

# ДАЛЬНИЙ БЕЗЫМПУЛЬСНЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ СЛЕД В ПАССИВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ\*

О. Ф. ВОРОПАЕВА

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: vorop@lchd.ict.nsc.ru

The numerical simulation of the far momentumless turbulent wake behind a body of revolution in passively stratified medium is carried out using the application of the modern semi-empirical turbulence models of the second order. The numerical analysis of self-similarity decay of the characteristics including the second-order moments with the turbulent fluctuations of density field is fulfilled.

Безымпурсный турбулентный след в пассивно стратифицированной среде представляет собой модельный случай спутного течения в жидкости с активной стратификацией, когда не учитывается действие силы тяжести. Интерес к задаче в такой постановке связан с тем, что она имеет автомодельное решение, дающее представление о турбулентном перемешивании в следе за самодвижущимся телом в стратифицированной среде.

Гидродинамические характеристики собственно турбулентного следа, развивающегося как в однородной жидкости, достаточно хорошо изучены. В [1] содержатся подробная библиография и результаты анализа автомодельного вырождения дальнего безымпурсного турбулентного следа за удлиненным телом вращения, основанного на данных численных расчетов.

Спутное течение в пассивно стратифицированной среде исследовалось численно в работах [2–5]. В [2–4] турбулентный след представлялся как плоская локальная турбулизованная область в жидкости с линейным распределением плотности по глубине. В [2] для расчетов использовалась простейшая  $e$ -модель, в [3] — модель с дифференциальными уравнениями для нормальных напряжений Рейнольдса; для турбулентных потоков привлекались простые градиентные гипотезы. В этих работах указывалось, что в рассмотренной постановке при линейном распределении плотности невозмущенной жидкости осредненное уравнение неразрывности имеет автомодельное решение, описывающее трансформацию профиля плотности под влиянием точечного источника турбулентности. При этом конкретный вид автомодельного решения определялся из численного решения задачи. В [4] расчеты проводились на основе иерархии полуэмпирических моделей — от  $(e - \varepsilon)$ -модели с градиентными аппроксимациями турбулентных потоков до модели с дифференциальными уравнениями для всех вторых одноточечных корреляционных моментов. Было установлено, что характеристики течения слабо зависят от применяемой модели.

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00783 и СО РАН, интеграционный проект 2000-1.

© О. Ф. Воропаева, 2003.

В [5] рассматривался турбулентный след с ненулевым избыточным импульсом. Для расчетов привлекалась модифицированная  $(e - \varepsilon)$ -модель. Все алгебраические гипотезы для вторых моментов в этой модели представляют собой локально-равновесное усечение соответствующих дифференциальных уравнений. В работах [2–5] показано, что турбулентная диффузия приводит к неполному перемешиванию жидкости: в турбулизованной области среда остается неоднородной со стратификацией, отличной от стратификации окружающей среды. Этот факт имеет значение, в частности, для оценки параметров генерируемых турбулентным следом внутренних волн в стратифицированной среде.

Из анализа упомянутой литературы следует, что подробное исследование автомодельности переменных задачи, связанных с турбулентными флуктуациями поля плотности, проводилось лишь в модельном приближении плоской локальной турбулизованной области. Отсутствуют данные об особенностях и законах изменения вторых одноточечных корреляционных моментов, включающих турбулентные пульсации поля плотности, в дальнем безымпурсном турбулентном следе. Для описания турбулентных потоков и дисперсии флуктуаций плотности до сих пор привлекались классические уравнения и аппроксимации. Вопрос о применимости более совершенных моделей остается открытым. Данная работа посвящена исследованию этих проблем.

## 1. Постановка задачи

**Основные уравнения.** Система уравнений, описывающих турбулентное течение в следе в пассивно стратифицированной среде, включает в себя осредненные уравнения движения и неразрывности в приближении дальнего следа:

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \langle uv \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle uw \rangle, \quad (1)$$

$$U_\infty \frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \langle v\rho \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w\rho \rangle. \quad (2)$$

Здесь и ниже приняты следующие обозначения:  $u = u_1$ ,  $v = v_2$ ,  $w = u_3$  — пульсационные составляющие компонент скорости в направлении осей  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $z = x_3$ ;  $U = U_1$ ,  $V = U_2$ ,  $W = U_3$  — соответствующие компоненты скорости осредненного движения;  $\varrho$  — осредненная плотность жидкости;  $\rho$  — пульсационная составляющая плотности,  $\varrho_1 = \varrho - \varrho_s$  — дефект осредненной плотности, где  $\varrho_s = \varrho_s(z)$  — плотность невозмущенной жидкости,  $d\varrho_s/dz = -a\varrho_0$ ,  $a = \text{const} > 0$ ,  $\varrho_0 = \varrho_s(0)$ . Система координат связана с движущимся телом так, что скорость его движения равна  $-U_\infty$ , ось  $z$  направлена вертикально вверх;  $U_d = U_\infty - U$  — дефект продольной компоненты скорости. Скобки  $\langle \rangle$  означают осреднение. В правых частях уравнений (1), (2) слагаемые с множителями в виде коэффициентов ламинарной вязкости и диффузии, а также производные по маршевой переменной  $x$  опущены как малые. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры, стратификация предполагается слабой, устойчивой. Поскольку стратификация пассивная, это означает отсутствие влияния силы тяжести на развитие турбулентного следа ( $g = 0$ ) и отсутствие порождаемого следом конвективного течения ( $V = W = 0$ ).

**Модели турбулентного течения.** Для замыкания системы уравнений (1), (2) воспользуемся следующими полуэмпирическими моделями турбулентности.

*Модель 1.* Модель 1 базируется на дифференциальных уравнениях переноса рейнольдсовых напряжений  $\langle u_i u_j \rangle$  ( $i = j = 1, 2, 3$ ;  $i = 2, j = 3$ ) [6]:

$$U_\infty \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x} = P_{ij} + d_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij}. \quad (3)$$

Диффузионные и диссипативные слагаемые аппроксимируются следующим образом (здесь и ниже по повторяющимся индексам производится суммирование):

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_l \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_l} \right\}, \quad \varepsilon_{ij} = 2/3 \delta_{ij} \varepsilon,$$

где  $e = \langle u_i u_i \rangle / 2$  — энергия турбулентности,  $\varepsilon$  — скорость диссипации энергии турбулентности в тепло,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $c_s = 0.22$  — эмпирическая постоянная. Представление  $P_{ij}$  имеет стандартный вид:

$$P_{ij} = - \left\{ \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}.$$

Учитывая особенности рассматриваемого спутного течения, выражения  $d_{ij}$  и  $P_{ij}$  можно упростить:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle vw \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial z} \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle vw \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle w^2 \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial z} \right\}; \\ P_{11} &= 2 \left\{ \langle uv \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle uw \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z} \right\}, \quad P_{22} = 0, \quad P_{33} = 0, \\ P_{12} &= \langle v^2 \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle vw \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z}, \quad P_{13} = \langle vw \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle w^2 \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z}, \quad P_{23} = 0; \\ P &= P_{ii}/2 = \langle uv \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle uw \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z}. \end{aligned}$$

Обменные члены в (3) аппроксимируются следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &= \phi_{ij1} + \phi_{ij2}, \\ \phi_{ij1} &= -c_1 \varepsilon (a_{ij} + c'_1 (a_{ik} a_{jk} - 1/3 A_2 \delta_{ij})), \\ \phi_{ij2} &= -0.6 (P_{ij} - 2/3 \delta_{ij} P) + 0.6 a_{ij} P - 0.2 B_{ij1} - c_2 [A_2 (P_{ij} - D_{ij}) + 3 a_{mi} a_{nj} (P_{mn} - D_{mn})], \\ B_{ij1} &= \frac{\langle u_k u_j \rangle \langle u_l u_i \rangle}{e} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) - \frac{\langle u_l u_k \rangle}{e} \left( \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right), \\ D_{ij} &= - \left( \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Для касательных рейнольдсовых напряжений  $\langle uv \rangle$  и  $\langle uw \rangle$  используются алгебраические представления [1], являющиеся локально-равновесным усечением [7] уравнений (3) ( $i = 1, j = 2$ ;  $i = 1, j = 3$ ):

$$\frac{\langle u_i u_j \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} (1 + \Phi_e) - \Phi_e \frac{P_{ij}}{\varepsilon} + 0.6 \Phi_e \left( \frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right), \quad \Phi_e = -\frac{1}{c_1}.$$

Отсюда следует

$$\langle uv \rangle = -0.4\Phi_e \frac{e\langle v^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial U_d}{\partial y} = K_{y1} \frac{\partial U_d}{\partial y}, \quad \langle uw \rangle = -0.4\Phi_e \frac{e\langle w^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial U_d}{\partial z} = K_{z1} \frac{\partial U_d}{\partial z}. \quad (4)$$

При этом уравнение (1) преобразуется к диффузионному виду

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial U_d}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U_d}{\partial z} \quad (5)$$

с коэффициентами турбулентной вязкости  $K_y = K_{y1}$ ,  $K_z = K_{z1}$ . Эмпирические постоянные и функции определяются следующим образом [6]

$$c_1 = (3.75A_2^{1/2} + 1)A, \quad c'_1 = 0.7, \quad c_2 = 0.55, \quad c'_2 = 0.6,$$

$$A_2 = a_{ij}a_{ji}, \quad A_3 = a_{ij}a_{jk}a_{ki}, \quad A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3), \quad a_{ij} = (\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3}\delta_{ij}e)/e.$$

Для вычисления скорости диссипации  $\varepsilon$  привлекается дифференциальное уравнение переноса:

$$U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_k} c_\varepsilon \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_l \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e},$$

где  $c_\varepsilon = 0.18$ ,  $c_{\varepsilon 1} = 1.0$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1.92/(1 + 0.7A_2^{1/2}A_{25})$ ,  $A_{25} = \max(A, 0.25)$ ,  $k, l = 2, 3$ .

Обратимся теперь к замыканию уравнения (2). Компоненты вектора турбулентных потоков  $\langle u_i \rho \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вычисляются из уравнений [6]:

$$U_\infty \frac{\partial \langle u_i \rho \rangle}{\partial x} = P_{i\rho} + d_{i\rho} + \phi_{i\rho} - \varepsilon_{i\rho}, \quad (6)$$

где используются следующие представления:

$$d_{i\rho} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ c_\rho \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_l \rangle \frac{\partial \langle u_i \rho \rangle}{\partial x_l} \right\}, \quad \varepsilon_{i\rho} = 0,$$

$$P_{i\rho} = - \left\{ \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \langle u_k \rho \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}, \quad k, l = 2, 3, \quad c_\rho = 0.11.$$

По аналогии с уравнением (3) выражения для  $d_{i\rho}$  и  $P_{i\rho}$  в окончательном виде упрощаются:

$$d_{i\rho} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ c_\rho \frac{e}{\varepsilon} \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle u_i \rho \rangle}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ c_\rho \frac{e}{\varepsilon} \langle vw \rangle \frac{\partial \langle u_i \rho \rangle}{\partial z} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_\rho \frac{e}{\varepsilon} \langle vw \rangle \frac{\partial \langle u_i \rho \rangle}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_\rho \frac{e}{\varepsilon} \langle w^2 \rangle \frac{\partial \langle u_i \rho \rangle}{\partial z} \right\},$$

$$P_{1\rho} = - \left\{ \langle uv \rangle \frac{\partial \rho}{\partial y} + \langle uw \rangle \frac{\partial \rho}{\partial z} + \langle v\rho \rangle \frac{\partial U}{\partial y} + \langle w\rho \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right\},$$

$$P_{2\rho} = - \left\{ \langle v^2 \rangle \frac{\partial \rho}{\partial y} + \langle vw \rangle \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\}, \quad P_{3\rho} = - \left\{ \langle vw \rangle \frac{\partial \rho}{\partial y} + \langle w^2 \rangle \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\}.$$

Слагаемые  $\phi_{i\rho}$  в правой части уравнения (6) аппроксимируются, согласно [6], следующим образом:

$$\phi_{i\rho} = \phi_{i\rho 1} + \phi_{i\rho 2},$$

$$\phi_{i\rho 1} = -1.7 \left\{ 1 + 1.2(A_2 A)^{1/2} \right\} R^{1/2} \frac{\varepsilon}{e} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ \langle u_i \rho \rangle (1 + 0.6A_2) - 0.8a_{ik} \langle u_k \rho \rangle + 1.1a_{ik}a_{kj} \langle u_j \rho \rangle \} - 0.2A^{1/2}Ra_{ij}e \frac{\partial \varrho}{\partial x_j}, \\
& \phi_{i\rho 2} = 0.8 \langle u_i \rho \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 0.2 \langle u_k \rho \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{1}{6} \frac{\varepsilon}{e} \langle u_i \rho \rangle (P_{kk}/\varepsilon) - \\
& - 0.4 \langle u_k \rho \rangle a_{il} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) + 0.1 \langle u_k \rho \rangle a_{ik} a_{ml} \left( \frac{\partial U_m}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) - 0.1 \langle u_k \rho \rangle (a_{im} P_{mk} + 2a_{mk} P_{im}) / e + \\
& + 0.15 a_{ml} (a_{mk} \langle u_i \rho \rangle - a_{mi} \langle u_k \rho \rangle) \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) - \\
& - 0.05 a_{ml} \left\{ 7a_{mk} \left( \langle u_i \rho \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \langle u_k \rho \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right) - \langle u_k \rho \rangle \left( a_{ml} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + a_{mk} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \right) \right\}, \\
& R = \frac{3}{2} (1 + A_{2\rho}), \quad A_{2\rho} = \frac{\langle u_i \rho \rangle \langle u_i \rho \rangle}{e \langle \rho^2 \rangle}.
\end{aligned}$$

Для вычисления дисперсии турбулентных флуктуаций поля плотности  $\langle \rho^2 \rangle$  привлекается дифференциальное уравнение переноса [6]:

$$U_\infty \frac{\partial \langle \rho^2 \rangle}{\partial x} = P_{\rho\rho} + d_\rho - 2\varepsilon_\rho, \quad (7)$$

$$P_{\rho\rho} = -2 \langle u_j \rho \rangle \frac{\partial \varrho}{\partial x_j}, \quad d_\rho = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ c_\rho \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_l \rangle \frac{\partial \langle \rho^2 \rangle}{\partial x_l} \right\}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{R \langle \rho^2 \rangle \varepsilon}{2e}.$$

Таким образом, модель 1 является упрощением известной модели работы [6], базирующейся на усовершенствованных аппроксимациях обменных слагаемых. Различие этих моделей состоит в привлечении в модели 1 алгебраических аппроксимаций (4) для касательных напряжений  $\langle uv \rangle$  и  $\langle uw \rangle$  и, следовательно, замене уравнения движения (1) его диффузионным аналогом (5). Введение данного упрощения связано с тем обстоятельством, что исходная модель работы [6], как показали расчеты, неудовлетворительно описывает вырождение дефекта продольной компоненты скорости в дальнем безымпульсном турбулентном следе в однородной жидкости. Подробно результаты этих расчетов и тестирования моделей представлены в [1].

*Модель 2.* Модель 2 отличается от модели 1 упрощенными представлениями (по аналогии с [7]) величин  $\langle u_i \rho \rangle$  и  $\langle \rho^2 \rangle$ . Эти алгебраические аппроксимации являются следствием применения локально-равновесного приближения к уравнениям (6) и (7):

$$-\langle u_i \rho \rangle = \frac{e}{\varepsilon} \Phi_\rho \left\{ \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \varrho}{\partial x_j} + 0.2 \langle u_j \rho \rangle \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\}, \quad \langle \rho^2 \rangle = -\frac{2}{R} \frac{e}{\varepsilon} \langle u_j \rho \rangle \frac{\partial \varrho}{\partial x_j},$$

$$\Phi_\rho^{-1} = 1.7R^{1/2}.$$

С учетом особенностей рассматриваемого спутного течения — малости производных по маршевой переменной, быстрого вырождения дефекта продольной компоненты скорости [8, 9] и выделенности вертикального направления — получаем простые градиентные представления:

$$-\langle v\rho \rangle = \Phi_\rho \frac{e \langle v^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \varrho}{\partial y} = K_{\rho y 1} \frac{\partial \varrho}{\partial y}, \quad -\langle w\rho \rangle = \Phi_\rho \frac{e \langle w^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \varrho}{\partial z} = K_{\rho z 1} \frac{\partial \varrho}{\partial z}, \quad (8)$$

$$-\langle u\rho\rangle = \Phi_\rho \frac{e\langle uw\rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \varrho}{\partial z}, \quad \langle \rho^2\rangle = -\frac{2e}{R\varepsilon} \langle w\rho\rangle \frac{\partial \varrho}{\partial z}.$$

При этом уравнение (2), как и (1), преобразуется к диффузионному виду:

$$U_\infty \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_{\rho y} \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{\rho z} \frac{\partial \varrho}{\partial z}, \quad (9)$$

где  $K_{\rho y} = K_{\rho y1}$ ,  $K_{\rho z} = K_{\rho z1}$ . В остальном модель 2 повторяет модель 1.

*Модель 3.* Модель 3 [8] также основана на уравнении (3) для определения нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений  $\langle u_i u_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Однако в этих уравнениях использовалось упрощенное представление диффузионных и стандартное [10] — обменных слагаемых:

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} \right\}, \quad k = 2, 3,$$

$$\phi_{ij} = -c_1 \varepsilon a_{ij} - c_2 (P_{ij} - 2/3 \delta_{ij} P), \quad i = j = 1, 2, 3,$$

где  $c_s = 0.25$ ,  $c_1 = 2.2$ ,  $c_2 = 0.55$ .

Для аппроксимации касательных рейнольдсовых напряжений  $\langle u_i u_j \rangle$  ( $i \neq j$ ) привлекаются алгебраические соотношения [11]

$$\frac{\langle u_i u_j \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - c_2}{c_1} \left( \frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right).$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к диффузионному виду (5) с коэффициентами турбулентной вязкости

$$K_y = K_{y2} = \frac{1 - c_2}{c_1} \frac{e \langle v^2 \rangle}{\varepsilon}, \quad K_z = K_{z2} = \frac{1 - c_2}{c_1} \frac{e \langle w^2 \rangle}{\varepsilon}.$$

Скорость диссипации в этой модели вычисляется из уравнения

$$U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ c_\varepsilon \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_k \rangle \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \quad k = 2, 3,$$

со значениями эмпирических констант:  $c_\varepsilon = c_s/\sigma$ ,  $\sigma = 1.3$ ,  $c_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1.92$ .

Для аппроксимации величин  $\langle u_i \rho \rangle$  привлекаются следующие алгебраические соотношения [11]:

$$-\langle u_i \rho \rangle = \frac{e}{c_{1T} \varepsilon} \left[ \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} + (1 - c_{2T}) \langle u_k \rho \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right]. \quad (10)$$

Как отмечалось выше, для данного течения можно пренебречь производными по переменной  $x$  в правых частях выражений и уравнений и, кроме того,  $V = W = 0$ . Тогда из соотношений (10) следует

$$-\langle v\rho\rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon} \langle v^2 \rangle \frac{\partial \varrho}{\partial y} = K_{\rho y 2} \frac{\partial \varrho}{\partial y}, \quad -\langle w\rho\rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon} \langle w^2 \rangle \frac{\partial \varrho}{\partial z} = K_{\rho z 2} \frac{\partial \varrho}{\partial z}. \quad (11)$$

При этом уравнение (2) преобразуется к диффузионному виду (9) с коэффициентами турбулентной диффузии  $K_{\rho y} = K_{\rho y 2}$  и  $K_{\rho z} = K_{\rho z 2}$ . Принимаются также следующие выражения для величин  $\langle u\rho\rangle$  и  $\langle \rho^2\rangle$ :

$$-\langle u\rho\rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon} \left[ \langle uw \rangle \frac{\partial \varrho}{\partial z} + (1 - c_{2T}) \langle w\rho \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right], \quad -\langle \rho^2 \rangle = \frac{2e}{c_T \varepsilon} \langle w\rho \rangle \frac{\partial \varrho}{\partial z}. \quad (12)$$

Значения эмпирических констант полагаются равными  $c_{1T} = 3.2$ ,  $c_{2T} = 0.5$ ,  $c_T = 1.25$ .

Модель 3 является примером классической модели второго порядка, которая достаточно хорошо зарекомендовала себя при расчетах турбулентных следов в стратифицированной среде [8]. Модели 1 и 2, напротив, впервые используются для исследования спутных турбулентных течений. Из-за привлечения усовершенствованных нелинейных аппроксимаций обменных слагаемых модели 1 и 2 можно отнести к числу наиболее полных моделей второго порядка. При этом ответ на принципиальный вопрос о степени перемешивания жидкости в турбулентном следе в расчетах с применением таких моделей не является очевидным.

**Начальные и граничные условия.** В качестве начальных распределений искомым величин  $U_d$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$ ,  $\langle u^2 \rangle$ ,  $\langle v^2 \rangle$ ,  $\langle w^2 \rangle$  на расстоянии  $x = x_0$  от тела используются данные, согласующиеся с данными лабораторных экспериментов; кроме того, полагаем

$$\langle vw \rangle = 0, \quad \langle uv \rangle = K_y \frac{\partial U_d}{\partial y}, \quad \langle uw \rangle = K_z \frac{\partial U_d}{\partial z}, \quad \varrho_1 = \langle u_i \rho \rangle = \langle \rho^2 \rangle = 0.$$

На бесконечности задаются условия невозмущенного потока, которые при численной реализации из бесконечности переносятся на границы достаточно большой прямоугольной области  $-Y \leq y \leq Y$ ,  $-Z \leq z \leq Z$ .

С учетом свойств симметрии переменных задачи относительно начала координат численные расчеты выполнялись лишь в первом квадранте плоскости  $(y, z)$  с постановкой на осях соответствующих условий симметрии (антисимметрии). Исключение составляет величина  $U_d$ , для которой решение уравнения проводилось также на осях  $y = 0$  и  $z = 0$  с учетом соображений симметрии [8]. Это связано с тем, что в данной задаче особое значение имеет выполнение закона сохранения импульса.

**Обезразмеривание.** Переменные задачи обезразмериваются с применением в качестве масштабов длины и скорости диаметра тела  $D$  и скорости набегающего потока  $U_\infty$ . Обезразмеренные переменные представляются в следующем виде:  $x_i^* = x_i/D$ ,  $U_i^* = U_i/U_\infty$ ,  $\langle u_i u_j \rangle^* = \langle u_i u_j \rangle / U_\infty^2$ ,  $e^* = e/U_\infty^2$ ,  $\varepsilon^* = \varepsilon D / U_\infty^3$ ,  $\varrho^* = \varrho / (aD\varrho_0)$ ,  $\langle u_i \rho \rangle^* = \langle u_i \rho \rangle / (aD\varrho_0 U_\infty)$ ,  $\langle \rho^2 \rangle^* = \langle \rho^2 \rangle / (aD\varrho_0)^2$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

**Алгоритм решения задачи.** Конечно-разностный алгоритм основан на применении методов расщепления по пространственным переменным [12]. Решение уравнений (1), (2), (5), (9) во всех описанных моделях проводится по схеме расщепления с использованием центрально-разностных аппроксимаций. Для численного интегрирования других уравнений, входящих в модели 1 и 2, привлекается схема стабилизирующей поправки. Уравнения модели 3, в которых из-за упрощения диффузионных слагаемых отсутствуют смешанные производные, решаются по схеме расщепления.

Вводится преобразование координат, при котором осуществляется переход от неравномерной ортогональной расчетной сетки со сгущающимися в окрестности турбулентного следа узлами к равномерной.

Численный алгоритм и результаты его тестирования подробно описаны в [8].

## 2. Тестирование

Результаты численных экспериментов сопоставлялись с экспериментальными данными Линя и Пао о вырождении безимпульсного турбулентного следа в однородной жидкости (см. [13, 14]). Поскольку стратификация отсутствует, модели 1 и 2 становятся идентичными и задача сводится к решению уравнения (1) с его замыканием на основе моделей 1 и

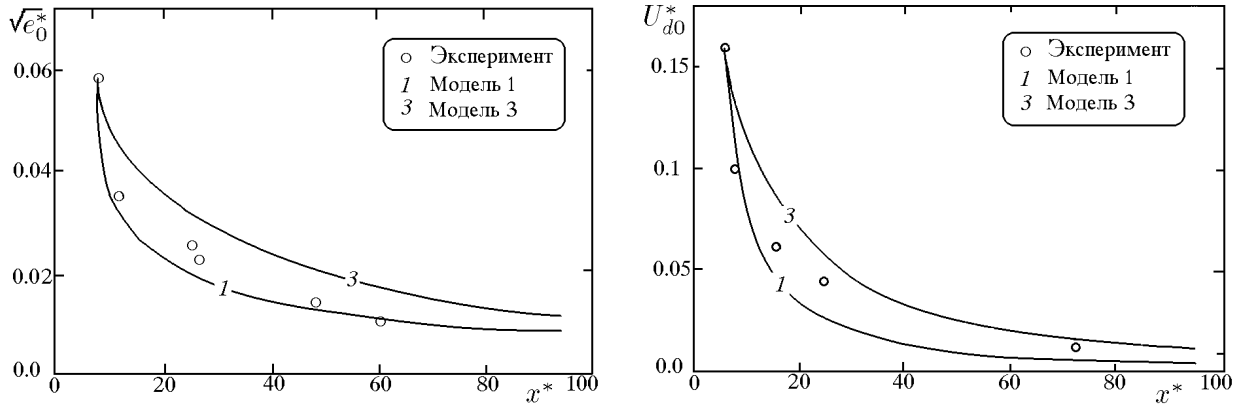


Рис. 1. Энергия турбулентности  $e_0$  и дефект продольной компоненты осредненной скорости на оси следа  $U_{d0}$ .

3. Начальные условия при  $x = x_0 = 6D$  задавались в виде функций [13], согласованных с данными лабораторных экспериментов:

$$e(x_0, y, z) = E_0 \cdot \exp(-4r^2/D^2), \quad \varepsilon(x_0, y, z) = \sqrt{12}E_0^{3/2} \cdot \exp(-6r^2/D^2),$$

$$U_d(x_0, y, z) = U_D(1 - 8r^2/D^2) \exp(-8r^2/D^2), \quad r^2 = y^2 + z^2.$$

Величины  $E_0$  и  $U_D$  выбирались из экспериментальных данных Линя и Пао при  $x = x_0 = 6D$ . Расчеты проводились в прямоугольнике  $6D \times 6D$  на сетке с числом узлов  $51 \times 51$ . Первые 30 узлов сетки в каждом направлении располагались равномерно с шагом  $h = h_y = h_z = 0.1D$ , а далее шаг  $h$  увеличивался в геометрической прогрессии. Шаг по маршевой переменной  $x$  изменялся от  $0.005D$  до  $0.5D$  по формуле  $h_x = h_x + 0.005D$ .

На рис. 1 приведено изменение в зависимости от расстояния от тела безразмерных осевых значений энергии турбулентности  $e_0 = e(x, 0, 0)$  и дефекта продольной компоненты скорости  $U_{d0} = U_d(x, 0, 0)$ . Видно, что результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными.

Более подробное тестирование моделей проведено в [1]. В этой работе, в частности, результаты расчетов по моделям 1 и 3 сопоставляются по осевым значениям энергии турбулентности, диссипации, дефекта скорости, нормальных напряжений Рейнольдса и полуширине следа с экспериментальными данными [9] об эволюции безымпурсного турбулентного следа за сферой в однородной жидкости. Вычисленные с использованием модели 1 данные наиболее близки к измеренным. Кроме того, расчеты безымпурсного турбулентного следа за удлиненным телом вращения показали, что законы вырождения основных характеристик течения в однородной жидкости согласуются с известными данными экспериментальных, теоретических и численных исследований.

Тестирование моделей 1–3 в части описания характеристик, связанных со стратификацией, проводилось в ходе численных экспериментов на последовательности конечно-разностных сеток.

### 3. Результаты расчетов

Задача о динамике дальнего безымпурсного турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде (при линейном распределении плотности невозмущенной жидкости) имеет автомодельное решение [2, 3]. При этом наблюдается подобие распределений переменных



задачи в поперечном сечении следа, нормированных на соответствующие значения масштабных функций. Сами масштабные функции изменяются как степенные функции маршевой переменной  $x$ . Ниже будет представлен анализ автомодельного решения задачи, основанный на обработке результатов численных экспериментов.

В качестве начальных данных для  $e, \varepsilon, U_d, \langle u_i^2 \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) на расстоянии  $x = 8D$  от тела задавались распределения, согласованные с данными лабораторных экспериментов Линя и Пао [13, 14] об эволюции турбулентного следа в однородной жидкости.

Конечно-разностные сетки в плоскости  $(y, z)$  содержали  $51 \times 51$  (сетка 1) и  $101 \times 101$  (сетка 2) ячеек. Расчетная область представляла собой квадрат размером  $6D \times 6D$ . Узлы сетки 1 распределялись равномерно с шагами  $h_{1y} = h_{1z} = 0.1D$  в квадрате  $4D \times 4D$ , далее в обоих направлениях — в геометрической прогрессии. Значения шага сетки в маршевом направлении  $h_x$  полагались постоянными для  $x < 19D$ , при больших значениях  $x$  изменялись от  $0.015D$  до  $0.75D$  по формуле суммы членов арифметической прогрессии с разностью  $0.015D$ . Сетка 2 была вдвое подробнее в квадрате  $4D \times 4D$ :  $h_{2y} = h_{2z} = 0.05D$ , в маршевом направлении — как сетка 1. Основные расчеты проводились на сетке 1.

Анализ автомодельного вырождения гидродинамических характеристик дальнего безымпурсного турбулентного следа, рассчитанных с использованием моделей 1–3, выполнен в [1] (как уже отмечалось, в этой части описания течения модели 1 и 2 идентичны). Было показано, в частности, что энергия турбулентности на больших расстояниях от тела вырождается по степенному закону  $e_0 \sim x^{-1.5}$ , дефект продольной компоненты скорости — по закону  $U_{d0} \sim x^{-1.65}$ . Характерный размер турбулентного следа  $L$  изменяется на больших удалениях от тела вниз по потоку как  $x^{0.25}$ . Рассчитанные степенные зависимости согласуются с существующими представлениями о поведении основных характерных масштабов безымпурсного турбулентного следа за телами вращения, полученными как из экспериментальных исследований, так и из теоретического и численного анализа.

Более быстрое убывание дефекта продольной компоненты осредненной скорости в сравнении с турбулентными флуктуациями указывает на существование в данной задаче двух масштабов скорости. При введении автомодельных переменных в качестве основных масштабов выбираются полуширина следа  $L$ :  $e(x, L, 0) \approx e(x, 0, L) = 0.5e(x, 0, 0)$ , осевое значение энергии турбулентности  $e_0$ , а также осевое значение дефекта продольной компоненты осредненной скорости  $U_{d0}$ .

Обратимся к данным о поведении характеристик, связанных со стратификацией: дефекту осредненной плотности  $\varrho_1$ , компонент вектора турбулентных потоков  $\langle u_i \rho \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и дисперсии турбулентных флуктуаций поля плотности  $\langle \rho^2 \rangle$ .

На рис. 2 представлено поведение в зависимости от расстояния от тела обезразмеренных полуширины следа  $L$  и максимума дефекта осредненной плотности  $\varrho_{1m} = \max_{y,z} \varrho_1$ . Здесь и ниже на рисунках линии со значком  $\star$  соответствуют модели 1, линии со значком  $\square$  — модели 2, линии со значком  $\circ$  — модели 3; штриховая линия иллюстрирует асимптотические законы вырождения. Изменение с ростом расстояния от тела максимального значения дефекта осредненной плотности  $\varrho_{1m}$  происходит по тому же закону, что и расширение турбулентного следа, т.е. пропорционально  $x^{0.25}$ . Этот факт согласуется с соображениями о размерности данной величины.

Представляет интерес вопрос о степени перемешивания стратифицированной жидкости в турбулентном следе, поскольку при решении задачи с учетом активной роли стратификации это определяет характеристики генерируемых следом внутренних волн. Как показывают результаты исследований [2–5, 15–17], жидкость в следе перемешана слабо.

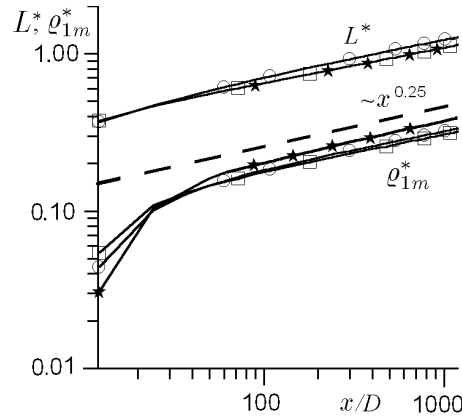


Рис. 2. Изменение с расстоянием от тела полуширины турбулентного следа  $L$  в его поперечном сечении и максимального значения дефекта осредненной плотности  $\rho_{1m}$ .

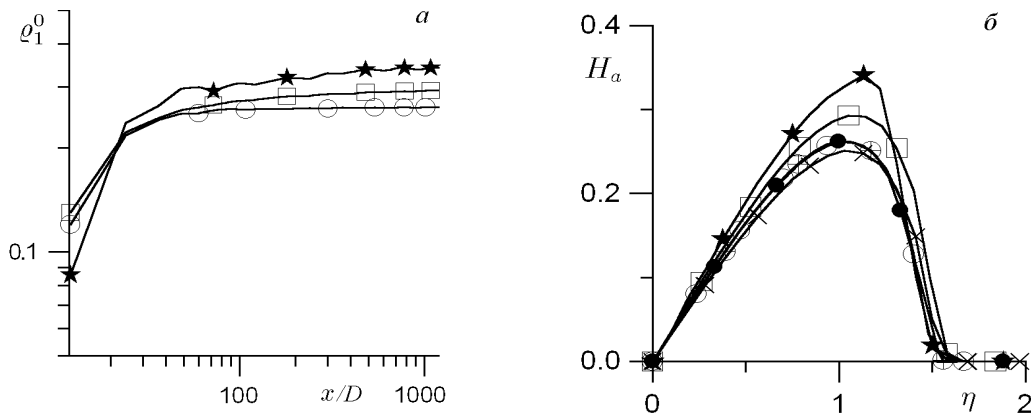


Рис. 3. Изменение с расстоянием от тела характерного значения дефекта плотности (а); автомодельное распределение дефекта осредненной плотности вдоль вертикальной оси (б).

Степень перемешивания может быть определена [2, 3] соотношением  $\rho_{1m}^*/L^* = \rho_1^0$ , которое на больших удалениях от тела вниз по потоку принимает практически постоянное значение. Величина  $\rho_1^0 = \text{const}_1$  в разных работах в зависимости от применяемой математической модели оценивается примерно одинаково — от 0.22 до 0.282 ( $\text{const}_1 = 1$  соответствует полному перемешиванию). На рис. 3, а представлены как функции расстояния от тела значения  $\rho_1^0$ , определенные с использованием моделей 1–3. Видно, что рассчитанные по моделям 2 и 3 данные достаточно близки к полученным в упомянутых работах, а модель 1 дает несколько завышенное значение  $\rho_1^0$ . Эти данные подтверждаются также рис. 3, б, где приведены автомодельные распределения вдоль вертикальной оси функции  $H$ :  $\rho_1 = \rho_{0a}L(x/D)H(\xi, \eta)$ ,  $\xi = y/L$ ,  $\eta = z/L$ . Распределение дефекта плотности  $H_a = H(0, \eta)$  при  $x/D = 2400$  (линия со значком  $\bullet$  — модель 3) практически совпадает с решением при  $x/D = 1200$  (линия со значком  $\circ$ ). Линия с маркером  $\times$  соответствует расчету по модели 1, в которой для величин  $\langle u_i \rho \rangle$  и  $\langle \rho^2 \rangle$  используются те же аппроксимации, что и в модели 3. Как и следовало ожидать, в этом случае значения функции  $H$  близки к рассчитанным по модели 3. Линия с маркером  $\oplus$  получена по модели, аналогичной модели 3, за исключением турбулентных потоков, для которых привлекались неравновесные

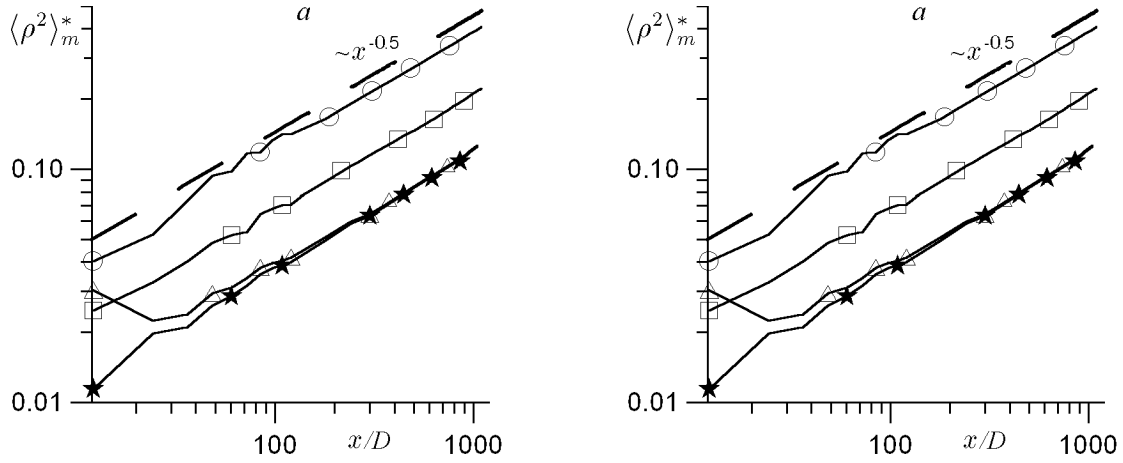


Рис. 4. Изменение в зависимости от расстояния от тела максимальных значений: дисперсии турбулентных флуктуаций поля плотности (а), компонент вектора турбулентных потоков (б).

аппроксимации [18] (ниже, в табл. 1, она будет упоминаться как модель 4):

$$-\langle u_i \rho \rangle = \Phi_t \frac{e}{\varepsilon} \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} - \Phi_t' \frac{e}{\varepsilon} P_{it},$$

$$P_{it} = \langle u_k \rho \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad \Phi_t = \left( c_{1t} + \frac{1}{2} \left( \frac{P}{\varepsilon} - 1 \right) \right)^{-1}, \quad \Phi_t' = (1 - c_{2t}) \Phi_t.$$

Расчеты показали, что введение данных гипотез дает лишь незначительные отклонения от решения, полученного по модели 3 с применением простейших градиентных аппроксимаций для компонент вектора турбулентных потоков.

На рис. 4, а представлены в зависимости от расстояния от тела  $x/D$  величины максимума дисперсии турбулентных флуктуаций поля плотности  $\langle \rho^2 \rangle_m = \max_{y,z} \langle \rho^2 \rangle$  (штриховые линии иллюстрируют асимптотические законы вырождения). Для всех использованных моделей  $\langle \rho^2 \rangle_m$  изменяется пропорционально  $x^{0.5}$ , т.е. как  $L^2$ , что также соответствует представлениям о размерности этой величины. При этом для достаточно больших удалений от тела имеем  $\langle \rho^2 \rangle^0 = \langle \rho^2 \rangle_m^* / (L^*)^2 \approx \text{const}_2$ . Для иллюстрации роли начальных данных для величины  $\langle \rho^2 \rangle$  при использовании модели 1 на рис. 4, а маркером  $\Delta$  помечена линия, соответствующая расчету с ненулевыми начальными данными (они задавались в виде алгебраических аппроксимаций, аналогичных использованным в модели 2). Видно, что уже при  $x \geq 150D$  начальное распределение  $\langle \rho^2 \rangle$  оказывается несущественным.

Данные о поведении компонент вектора турбулентных потоков  $\langle u_i \rho \rangle_m = \max_{y,z} \langle u_i \rho \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$  на рис. 4, б свидетельствуют о том, что на больших расстояниях от тела  $\langle u \rho \rangle_m$  изменяется как  $x^{-1.4}$ , а  $\langle v \rho \rangle_m$  и  $\langle w \rho \rangle_m$  — как  $x^{-0.5}$ . То есть  $\langle u \rho \rangle$  вырождается быстрее, чем  $\langle v \rho \rangle$  и  $\langle w \rho \rangle$ . При этом величина  $\langle w \rho \rangle_m$  почти на порядок превосходит  $\langle v \rho \rangle_m$ , что подтверждает особую роль вертикального направления. Из классических градиентных гипотез (11) и соображений размерности следует, что  $\langle v \rho \rangle \sim e_0^{0.5} L \sim x^{-0.5}$ ,  $\langle w \rho \rangle \sim e_0^{0.5} L \sim x^{-0.5}$ . Аналогично следствием аппроксимации (12) является соотношение  $\langle u \rho \rangle \sim U_{d0} L \sim x^{-1.4}$ . В результате для больших удалений от тела вниз по потоку получим

$$\langle u \rho \rangle^0 = \langle u \rho \rangle_m^* / (U_{d0}^* L^*) \approx \text{const}_3,$$

Т а б л и ц а 1

Модель	$\varrho_1^0$	$\langle u\rho \rangle^0$	$\langle v\rho \rangle^0$	$\langle w\rho \rangle^0$	$\langle \rho^2 \rangle^0$
1	.370	.280	.0420	.159	.120
2	.310	.082	.0220	.157	.210
3	.262	.115	.0163	.132	.250
4	.262	.150	.0196	.158	.290

$$\langle v\rho \rangle^0 = \langle v\rho \rangle_m^* / ((e_0^*)^{0.5} L^*) \approx \text{const}_4, \quad \langle w\rho \rangle^0 = \langle w\rho \rangle_m^* / ((e_0^*)^{0.5} L^*) \approx \text{const}_5.$$

В табл. 1 приведены характерные значения  $\varrho_1^0$ ,  $\langle u_i\rho \rangle^0$ ,  $\langle \rho^2 \rangle^0$ , полученные с использованием моделей 1–4. Расчеты показывают, что степень перемешивания  $\varrho_1^0$  слабо зависит от используемой модели турбулентности, что согласуется с данными работы [4], где рассматривалась модельная задача об эволюции плоского турбулентного пятна. Вместе с тем обращает на себя внимание следующее обстоятельство. При использовании модели 1 значение степени перемешивания жидкости в следе оказывается несколько завышенным по сравнению с другими моделями (этот факт иллюстрирует также рис. 3). С введением упрощенных градиентных аппроксимаций для потоков в модели 2 величина  $\varrho_1^0$  уменьшается от значения 0.37 до значения 0.31. Подобный факт имел место в расчетах работы [4], в которой для "классической" модели [10] с дифференциальными уравнениями для всех моментов второго порядка было получено перемешивание 0.282, а для простейшей "градиентной" модели — 0.26.

Из табл. 1 видно, что все модели дают близкие значения  $\langle w\rho \rangle^0$ . Эти данные достаточно хорошо согласуются с расчетами работы [4], в которой независимо от используемой модели  $\langle w\rho \rangle^0 = 0.122$ . На основе моделей 2–4 получены также близкие значения величин  $\langle v\rho \rangle^0$  и  $\langle \rho^2 \rangle^0$  (в [4]  $\langle v\rho \rangle^0 = 0.0140 \dots 0.0141$ ). В то же время модель 1 дает сильно заниженное (в сравнении с другими моделями) значение  $\langle \rho^2 \rangle^0$  и завышенное —  $\langle v\rho \rangle^0$ . Последнее относится также и к  $\langle u\rho \rangle^0$ . Однако разброс в значениях этой величины, полученных с использованием разных моделей, достаточно велик, что указывает на необходимость более детального исследования этого вопроса. Решающую роль здесь могли бы сыграть лабораторные измерения. Насколько известно автору, такие данные для случая активной линейной стратификации имеются лишь для  $\langle \rho^2(x, 0, 0) \rangle$  [14]. В работе [8] расчеты по моделям 3 и 4 (активная стратификация) сравниваются с экспериментальными данными [14]. Получено достаточно хорошее согласие в значениях  $\langle \rho^2(x, 0, 0) \rangle$ .

На рис. 5 приведены данные об изменении величин  $\langle u\rho \rangle^0$ ,  $\langle v\rho \rangle^0$ ,  $\langle w\rho \rangle^0$ ,  $\langle \rho^2 \rangle^0$ ,  $\varrho_1^0$ . Согласно расчетам, выполненным на основе модели 3 (сплошные линии), первой из указанных величин на постоянное значение выходит  $\varrho_1^0$ ; при этом на удалении от тела вниз по потоку от  $50D$  до  $3600D$  изменение  $\varrho_1^0$  составило лишь 5%. Аналогично значение  $\langle w\rho \rangle^0$  близко к постоянной величине при  $x \geq 240D$ ,  $\langle v\rho \rangle^0$  — при  $x \geq 500D$ . Что касается  $\langle u\rho \rangle^0$  и  $\langle \rho^2 \rangle^0$ , то их выход на постоянное значение отмечается при  $x \geq 50D$  и  $x \geq 120D$  соответственно. Примером моделей, базирующихся на неклассических аппроксимациях, являются модели 1, 2. Для этих моделей выход на константу величины  $\varrho_1^0$  замедляется и наблюдается лишь при  $x \geq 180D$ . То же самое можно сказать и о величине  $\langle \rho^2 \rangle^0$ , которая близка к постоянной при  $x \geq 280D$  — для модели 1 и при  $x \geq 700D$  — для модели 2. Характерное значение  $\langle u\rho \rangle^0$ , близкое к константе, достигается в расчетах по моделям 1 и 2 также лишь при  $x \geq 700D$ . Напротив, быстрее, чем в случае использования модели 3, на режим автомодельности выходят  $\langle w\rho \rangle^0$  — при  $x \geq 60D$  и  $\langle v\rho \rangle^0$  — при  $x \geq 100D$ .

Представляет также интерес влияние начального перемешивания жидкости в области следа на автомодельное развитие характеристик течения, обусловленных пассивной стра-

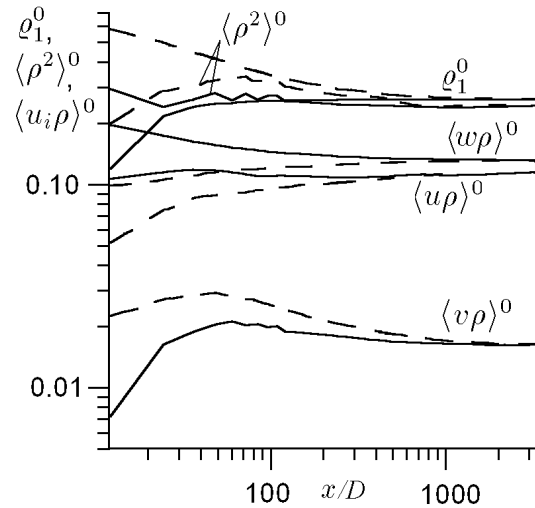


Рис. 5. Изменение в зависимости от расстояния от тела характерных значений дефекта плотности, компонент вектора турбулентных потоков и дисперсии флуктуаций плотности.

тификацией. На рис. 5 штриховые линии соответствуют расчету по модели 3 с ненулевыми начальными данными для дефицита плотности [13]:  $\varrho_1(x_0, y, z) = a\varrho_0 z \exp(-4r^2/D^2)$ . При этом начальное перемешивание более чем вдвое превышает возможное турбулентное перемешивание жидкости собственно следом в автомодельном режиме. Видно, что существенная роль перемешивания проявляется на начальном этапе, а на больших расстояниях от тела переменные задачи выходят на асимптотики и значения, соответствующие нулевому начальному перемешиванию. Расчеты показывают, что и автомодельные распределения переменных задачи в плоскости  $(\xi, \eta)$ , соответствующие ненулевому начальному перемешиванию жидкости в области следа, при  $x/D \geq 700$  практически совпадают с решением задачи с нулевыми начальными данными для дефекта плотности.

Для иллюстрации точности проведенных расчетов в табл. 2 представлен ряд характерных значений, полученных с использованием моделей 1–3 на сетке 1 (с1) и сетке 2 (с2) (здесь  $\langle \rho^2 \rangle_0^* = \langle \rho^2(x, 0, 0) \rangle^*$ ). Согласно этим данным, при использовании сеток 1 и 2 для одной и той же модели разница в значениях не превышает 10 %.

Т а б л и ц а 2

Модель	$(e_0^*)^{0.5}$	$\varrho_{1m}^*$	$\langle v \rho \rangle_m^*$	$\langle w \rho \rangle_m^*$	$\langle \rho^2 \rangle_0^*$
	$x/D = 120$				
Модель1 с1	.0058	.219	$.152 \cdot 10^{-3}$	$.594 \cdot 10^{-3}$	.031
Модель1 с2	.0061	.227	$.146 \cdot 10^{-3}$	$.653 \cdot 10^{-3}$	.033
Модель2 с1	.0058	.186	$.787 \cdot 10^{-4}$	$.562 \cdot 10^{-3}$	.035
Модель2 с2	.0061	.195	$.772 \cdot 10^{-4}$	$.611 \cdot 10^{-3}$	.037
Модель3 с1	.0072	.192	$.101 \cdot 10^{-3}$	$.758 \cdot 10^{-3}$	.086
Модель3 с2	.0075	.203	$.104 \cdot 10^{-3}$	$.812 \cdot 10^{-3}$	.090
$x/D = 960$					
Модель1 с1	.0011	.365	$.455 \cdot 10^{-4}$	$.179 \cdot 10^{-3}$	.071
Модель1 с2	.0012	.359	$.454 \cdot 10^{-4}$	$.196 \cdot 10^{-3}$	.077
Модель2 с1	.0011	.306	$.240 \cdot 10^{-4}$	$.175 \cdot 10^{-3}$	.090
Модель2 с2	.0012	.321	$.252 \cdot 10^{-4}$	$.193 \cdot 10^{-3}$	.098
Модель3 с1	.0014	.319	$.286 \cdot 10^{-4}$	$.230 \cdot 10^{-3}$	.203
Модель3 с2	.0015	.334	$.308 \cdot 10^{-4}$	$.249 \cdot 10^{-3}$	.217

Таким образом, в данной работе выполнено численное моделирование дальнего безымпурсного турбулентного следа за телом вращения в пассивно стратифицированной среде. Для расчетов привлечены полуэмпирические модели турбулентности второго порядка, в том числе основанные на использовании нелинейных аппроксимаций обменных слагаемых в уравнениях переноса вторых одноточечных корреляционных моментов. Проведен численный анализ автомодельного вырождения характеристик течения, среди которых вторые корреляционные моменты имеют турбулентные пульсации поля плотности. Результаты расчетов согласуются с известными представлениями о неполном перемешивании жидкости в турбулентном следе. Рассчитанная величина степени перемешивания слабо зависит от используемой модели турбулентности.

Автор благодарит Г.Г. Черных за внимание к работе и обсуждения.

## Список литературы

- [1] ВОРОПАЕВА О.Ф. Численное моделирование дальнего безымпурсного осесимметричного турбулентного следа // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 2. С. 36–52.
- [2] ВАСИЛЬЕВ О.Ф., КУЗНЕЦОВ Б.Г., ЛЫТКИН Ю.М., ЧЕРНЫХ Г.Г. Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 45–52.
- [3] ЛЫТКИН Ю.М., ЧЕРНЫХ Г.Г. Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // Математические проблемы механики сплошных сред: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 47. С. 70–89.
- [4] ВОРОПАЕВА О.Ф., ЧЕРНЫХ Г.Г. О численном моделировании динамики областей турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Вычисл. технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1992. Т. 1, № 1. С. 93–104.
- [5] МОШКИН Н.П., ФЕДОРОВА Н.Н., ЧЕРНЫХ Г.Г. О численном моделировании турбулентных следов // Вычисл. технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1992. Т. 1, № 1. С. 70–92.
- [6] CRAFT T.J., INCE N.Z., LAUNDER B.E. Recent developments in second-moment closure for buoyancy-affected flows // Preprints of the Fourth Intern. Symp. on Stratified Flows. Grenoble Inst. of Mech. Grenoble. General Session. 1994. Vol. 2. P. 16.
- [7] ЛЕВЕЛЛЕН В. Метод инвариантного моделирования // Турбулентность. Принципы и применения. М.: Мир. 1980. С. 262–310.
- [8] CHERNYKH G.G., VOROPAYEVA O.F. Numerical modeling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Computers and Fluids. 1999. Vol. 28. P. 281–306.
- [9] АЛЕКСЕНКО Н.В., КОСТОМАХА В.А. Экспериментальное исследование осесимметричного безымпурсного турбулентного струйного течения // ПМТФ. 1987. № 1. С. 65–69.

- [10] LAUNDER B.E. On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 67. Pt. 3. P. 659–581.
- [11] RODI W. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92. P. 5305.
- [12] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. 195 с.
- [13] HASSID S. Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // J. Hydronautics. 1980. Vol. 14, No. 1. P. 25–32.
- [14] LIN J.T., PAO Y.H. Wakes in stratified fluids // Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11. P. 317–336.
- [15] МЕРРИТ. Развитие и коллапс следа в стратифицированном потоке // РТК. 1974. № 7. С. 73–85.
- [16] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.
- [17] MCEWAN A.D. Internal mixing in stratified fluids // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 128. P. 59–80.
- [18] GIBSON M.M., LAUNDER B.E. On the calculation of horizontal, turbulent, free shear flows under gravitational influence // J. Heat Transfer. Trans. ASME. 1976. № 98C. P. 81–87.
- [19] HASSID S. Similarity and decay laws of momentumless wakes // Phys. Fluids. 1980. Vol. 23, No. 2. P. 404, 405.

*Поступила в редакцию 12 ноября 2002 г.,  
в переработанном виде — 14 января 2003 г.*