Вычислительные технологии **Том 9, № 2, 2004**

СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ И ПРОБЛЕМА КВАДРАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

В. Е. Федоров, М. В. Плеханова
Челябинский государственный университет, Россия
e-mail: kar@csu.ru, karina@csu.ac.ru

The concept of weak solutions of the Cauchy problem for linear equation of Sobolev type $L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t)$ allows to extend the set of admissible initial values of the problem and to relax the conditions on the smoothness of the function $y(t)$. The existence and uniqueness of the weak solution of the Cauchy problem and the solution of the problem on quadratic regulator for this equation are established in the case of strongly (L, p)-radial operator M. The obtained abstract results are applied to the problem of optimal control for a certain class of partial differential equations.

Введение

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ и $\mathcal{U}$ — гильбертовы пространства. Скалярные произведения в них будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Рассмотрим уравнение

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t), \tag{0.1}$$

где операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ (т. е. линейные и непрерывные), оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (т. е. линеен и замкнут с областью определения $\mathrm{dom} M$, плотной в $\mathcal{X}$, действует в $\mathcal{Y}$), $y : (0, \tau) \to \mathcal{Y}$, $u : (0, \tau) \to \mathcal{U}$ — некоторые функции. Задача Коши для такого уравнения является абстрактной формой многих неклассических уравнений математической физики, таких как линеаризованная система Навье — Стокса, система и уравнение Соболева, системы и уравнения внутренних и гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска, уравнение Буссинеска, уравнение стратификации объемного заряда в полупроводнике, уравнение ионно-звуковых волн [1], уравнение эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости, уравнение Баренблатта — Желтова — Кочиной, уравнение и система Осколкова [2].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования России (грант № PD02-1.1.-82) и Правительства Челябинской области для молодых ученых и аспирантов.

Проблема линейного квадратического регулятора, т. е. задача минимизации квадратического функционала на решениях задачи Коши

$$x(0) = x_0 \in \mathcal{X} \tag{0.2}$$

для уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{0.3}$$

с оператором $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$, порождающим C_0-непрерывную полугруппу операторов, рассмотрена в [3]. При этом разрешимость задачи понимается в слабом смысле, что позволяет брать произвольный вектор x_0 и функцию $u(t) \in L_2(0,\tau;\mathcal{X})$. Именно *слабым* решением называется такая функция $x(t)$, для которой при всех $v \in \mathrm{dom}A^*$ функция $\langle x(t), y\rangle$ абсолютно непрерывна, почти всюду на $(0,\tau)$ имеет место тождество

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), v\rangle = \langle x(t), A^*v\rangle + \langle y(t), v\rangle$$

и $\lim\limits_{t\to 0+}\langle x(t), v\rangle = \langle x(t), v\rangle$.

Заметим, что уравнение (0.3) является частным случаем уравнения (0.1). При условии сильной (L,p)-радиальности оператора M [2, 4, 5] в данной работе введено такое понятие слабого решения задачи Коши для вырожденного ($\ker L \neq \{0\}$) уравнения (0.1), которое согласуется с приведенным в предыдущем абзаце определением решения и позволяет исследовать задачу минимизации квадратического функционала на этом классе решений. Подчеркнем, что уравнения рассмотренного класса обладают сильно непрерывными разрешающими полугруппами.

Ранее задача оптимального управления *сильными* решениями для вырожденного уравнения (0.1) рассматривалась в работах Г.А. Свиридюка, А.А. Ефремова [6, 7]. При этом исследовались более узкие по сравнению с рассмотренным в данной работе классы уравнений с (L,σ)-ограниченным и с сильно (L,p)-секториальным оператором M. Отметим также работы, касающиеся вопросов, связанных с задачей оптимального управления для вырожденного уравнения (0.1) в конечномерных или гильбертовых пространствах [8 – 10].

В настоящей работе сначала изучены вопросы существования и единственности слабого решения задачи Коши для уравнения (0.1), затем исследована задача оптимального управления слабыми решениями с квадратическим функционалом стоимости и, наконец, приведен пример задачи оптимального управления для класса дифференциальных уравнений с многочленами от эллиптических дифференциальных по пространственным переменным операторов высокого порядка. Указаны задачи для одного уравнения теории фильтрации, попадающие в рассмотренный класс задач.

1. Относительно p-радиальные операторы

Напомним, что $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — гильбертовы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Введем обозначения

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\},$$

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p}(\mu_k L - M)^{-1}L, \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L(\mu_k L - M)^{-1},$$

$$\mathcal{X}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M), \quad \mathcal{Y}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M),$$

$$\mathcal{X}^1 = \overline{\mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)}, \quad \mathcal{Y}^1 = \overline{\mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)},$$

$$L_k = L\Big|_{\mathcal{X}^k}, \quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom}M_k}, \ \mathrm{dom}M_k = \mathrm{dom}M \cap \mathcal{X}^k, \quad k = 0, 1.$$

Оператор M называется *(L,p)-радиальным*, если
(i) $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \mu > a, \quad \mu \in \rho^L(M)$;
(ii) $\exists K > 0 \quad \forall \mu_k > a, \quad k = \overline{0,p}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)^n}.$$

Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если он (L,p)-радиален и существует плотный в $\mathcal{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{Y}}$ такой, что

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) y\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{\mathrm{const}(y)}{(\lambda - a)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)} \quad \forall y \in \overset{\circ}{\mathcal{Y}},$$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} \leq \frac{K}{(\lambda - a)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - a)}$$

для всех $\lambda, \mu_0, ..., \mu_p > a$.

Теорема 1.1 [5]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда:*
(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;
(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$;
(iv) *оператор* $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$ *нильпотентен степени не больше* p;
(v) *существует полугруппа* $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \geq 0\}$ $(\{Y^t \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}) : t \geq 0\})$, *разрешающая уравнение* $L\dot{x}(t) = Mx(t)$ $(L(\alpha L - M)^{-1}\dot{y}(t) = M(\alpha L - M)^{-1} y(t)$, $\alpha \in \rho^L(M))$;
(vi) *инфинитезимальным генератором* C_0*-непрерывной полугруппы* $\{X_1^t : t \geq 0\}$ $(\{Y_1^t : t \geq 0\})$ *является оператор* $L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$ $(M_1 L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{Y}^1))$. *Здесь* X_1^t (Y_1^t) — *сужение оператора* X^t (Y^t) *на* $\mathcal{X}^1$ $(\mathcal{Y}^1)$.

Проектор вдоль $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$ обозначим через P, а проектор вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$ — через Q. Обозначим через $J = L_0 M_0^{-1}$ нильпотентный в силу пункта (iv) теоремы 1.1 оператор. Условимся также о следующих обозначениях пространств: $L_q(0,\tau;\mathcal{Z}) = L_q(\mathcal{Z})$ — пространства Лебега, $W_q^k(0,\tau;\mathcal{Z}) = W_q^k(\mathcal{Z})$, $q > 1$, $W_2^k(0,\tau;\mathcal{Z}) = H^k(\mathcal{Z})$, $k \in \mathbb{N}$, — пространства Соболева вектор-функций, заданных на интервале $(0,\tau)$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{Z}$.

2. Слабое решение задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t), \quad t \in (0,\tau); \tag{2.1}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

Функцию $x(t)$ назовем *слабым* решением задачи (2.1), (2.2), если для всех $v^0 \in \mathrm{dom} M_0^*$, $v^1 \in \mathrm{dom} M_1^*$ функции $\langle (I-P)x(t), L_0^* v^0 \rangle$ и $\langle Px(t), L_1^* v^1 \rangle$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют уравнениям соответственно

$$\frac{d}{dt}\langle (I-P)x(t), L_0^* v^0 \rangle = \langle (I-P)x(t), M_0^* v^0 \rangle + \langle (I-Q)y(t), v^0 \rangle; \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt}\langle Px(t), L_1^* v^1 \rangle = \langle Px(t), M_1^* v^1 \rangle + \langle Qy(t), v^1 \rangle \tag{2.4}$$

почти всюду на $(0, \tau)$ и условиям

$$\lim_{t\to 0+} \langle (I-P)x(t), v^0 \rangle = \langle (I-P)x_0, v^0 \rangle, \ \lim_{t\to 0+} \langle Px(t), v^1 \rangle = \langle Px_0, v^1 \rangle.$$

Замечание 2.1. Таким образом, под слабой разрешимостью задачи (2.1), (2.2) мы понимаем слабую разрешимость двух соответствующих задач на подпространствах

$$L_0 \dot{x}^0(t) = M_0 x^0(t) + (I-Q)y(t), \quad x^0(0) = (I-P)x_0,$$

$$\dot{x}^1(t) = L_1^{-1} M_1 x^1(t) + L_1^{-1} Q y(t), \quad x^1(0) = Px_0.$$

С учетом расщепления пространств и действий операторов (теорема 1.1) такое определение слабого решения является естественным обобщением определения слабого решения, введенного в теореме 4.8.3 [3] для невырожденного эволюционного уравнения. Еще надо заметить, что для $w^1 = L_1^* v^1 \in L_1^*[\mathrm{dom} M_1^*] = \mathrm{dom}(L_1^{-1} M_1)^*$ (2.4) означает, что

$$\frac{d}{dt}\langle Px(t), w^1 \rangle = \langle Px(t), M_1^*(L_1^*)^{-1} w^1 \rangle + \langle Qy(t), (L_1^*)^{-1} w^1 \rangle =$$

$$= \langle Px(t), (L_1^{-1} M_1)^* w^1 \rangle + \langle L_1^{-1} Q y(t), w^1 \rangle.$$

Обозначим через $W_q^{p+1}(\mathcal{Y}^0) \oplus L_q(\mathcal{Y}^1)$ множество таких функций y, что $(I-Q)y \in W_q^{p+1}(\mathcal{Y}^0)$ и $Qy \in L_q(\mathcal{Y}^1)$, $q > 1$. Определим операторы

$$A_0 : y \to -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} ((I-Q)y)^{(k)}(t), \quad A_1 : y \to \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds.$$

Теорема 2.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $y \in W_q^{p+1}(\mathcal{Y}^0) \oplus L_q(\mathcal{Y}^1)$,*

$$x_0 \in \mathcal{M}_y = \{x \in \mathcal{X} : (I-P)x = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} ((I-Q)y)^{(k)}(0)\}. \tag{2.5}$$

Тогда существует единственное слабое решение задачи (2.1), (2.2), имеющее вид

$$x(t) = X^t x_0 + (A_0 + A_1) y(t).$$

Доказательство. Покажем, что функция

$$Px(t) = x^1(t) = X^t x_0 + \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds$$

удовлетворяет равенству (2.4). Действительно, для $v \in \mathrm{dom} M_1^*$

$$\frac{d}{dt}\left\langle X^t x_0, L_1^* v\right\rangle + \frac{d}{dt}\left\langle \int\limits_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds, L_1^* v\right\rangle =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\langle X_1^t P x_0, L_1^* v\right\rangle + \frac{d}{dt}\left\langle \int\limits_0^t X_1^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds, L_1^* v\right\rangle =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\langle P x_0, (X_1^t)^* L_1^* v\right\rangle + \left\langle L_1^{-1} Q y(t), L_1^* v\right\rangle + \int\limits_0^t \frac{d}{dt}\left\langle L_1^{-1} Q y(s), (X_1^{t-s})^* L_1^* v\right\rangle ds =$$

$$= \left\langle P x_0, (X_1^t)^* (L_1^{-1} M_1)^* L_1^* v\right\rangle + \left\langle L_1 L_1^{-1} Q y(t), v\right\rangle + \int\limits_0^t \left\langle L_1^{-1} Q y(s), (X_1^{t-s})^* (L_1^{-1} M_1)^* L_1^* v\right\rangle ds =$$

$$= \left\langle X^t x_0, M_1^* v\right\rangle + \langle Q y(t), v\rangle + \int\limits_0^t \left\langle X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s), M_1^* v\right\rangle ds.$$

Здесь использованы теорема 1.1 и тот факт, что полугруппа $\{(X_1^t)^* : t \geq 0\}$ дифференцируема на множестве $L_1^*[\mathrm{dom} M_1^*]$, которое является областью определения генератора $(L_1^{-1} M_1)^* = M_1^* (L_1^{-1})^*$.

С другой стороны, функция $Px(t)$ в силу замечания 2.1 является слабым решением в смысле [3] уравнения $\dot{x}^1(t) = L_1^{-1} M_1 x^1(t) + L_1^{-1} y^1(t)$, при этом оператор $L_1^{-1} M_1$ порождает C_0-непрерывную полугруппу, а $L_1^{-1} Q y \in L_q(\mathcal{X}^1)$. Единственность слабого решения такого уравнения показана в теореме 4.8.3 [3].

Докажем, что функция $(I-P)x(t) = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)y)^{(k)}(t)$ удовлетворяет (2.3). Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left\langle -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)y)^{(k)}, L_0^* v\right\rangle = \left\langle -\sum_{k=1}^{p} J^k ((I-Q)y)^{(k)}, v\right\rangle =$$

$$= \left\langle -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}((I-Q)y)^{(k)}, M_0^* v\right\rangle + \langle (I-Q)y, v\rangle, \quad v \in \mathrm{dom} M_0^*.$$

Если существуют две функции x_1^0 и x_2^0, удовлетворяющие (2.3), то их разность $x^0 = x_1^0 - x_2^0$ для любого $v \in \mathrm{dom} M_0^*$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\langle x^0(t), L_0^* v\rangle = \langle x^0(t), M_0^* v\rangle.$$

Обозначив $M_0^* v = w$, получим уравнение

$$\langle x^0, w\rangle = \frac{d}{dt}\langle x^0, L_0^* (M_0^*)^{-1} w\rangle.$$

Заметим, что $L_0^*(M_0^*)^{-1} = H^*$, и выберем $v = (M_0^*)^{-1}(H^*)^p v_p \in \mathrm{dom} M_0^*$, тогда $w = (H^*)^p v_p$ при некотором $v_p \in \mathcal{X}^{0*}$. Отсюда

$$\langle x^0, (H^*)^p v_p \rangle = \frac{d}{dt} \langle x^0, (H^*)^{p+1} v_p \rangle = \frac{d}{dt} \langle x^0, (H^{p+1})^* v_p \rangle \equiv 0.$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$0 \equiv \frac{d}{dt} \langle x^0, (H^*)^p v_p \rangle = \langle x^0, (H^*)^{p-1} v_p \rangle.$$

Повторив эту процедуру $p-1$ раз, получим

$$0 \equiv \frac{d}{dt} \langle x^0, H^* v_p \rangle = \langle x^0, v_p \rangle.$$

В силу произвольности v_p из подпространства $\mathcal{X}^{0*}$ получим, что $x^0 \equiv 0$.

Необходимость условия (2.5) следует из того, что $(I-Q)y \in W_q^{p+1}(\mathcal{Y}^0)$, поэтому функция $(I-P)x \in W_q^1(\mathcal{X}^0)$ непрерывна вплоть до нуля в силу вложения

$$W_q^{m+1}(\mathcal{X}) \hookrightarrow C^m([0,\tau); \mathcal{X}). \tag{2.6}$$

□

Следствие 2.1. *Слабое решение $x(t)$ в условиях теоремы 2.1 при $q = 2$ является элементом пространства $L_2(\mathcal{X})$.*

Доказательство. Функция $A_0 y(t) \in H^1(\mathcal{X}^0)$ является элементом пространства $L_2(\mathcal{X})$ в силу вложения $H^1(\mathcal{X}) \subset L_2(\mathcal{X})$. Далее,

$$\left\langle X^t x_0 + \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds, X^t x_0 + \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \right\rangle_{L_2(\mathcal{X})} =$$

$$= \int_0^\tau \|X^t x_0\|_{\mathcal{X}}^2 dt + 2\mathrm{Re} \int_0^\tau \left\langle X^t x_0, \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \right\rangle_{\mathcal{X}} dt + \int_0^\tau \left\| \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \right\|_{\mathcal{X}}^2 dt.$$

Рассмотрим каждое слагаемое последнего выражения отдельно. Во-первых,

$$\int_0^\tau \|X^t x_0\|_{\mathcal{X}}^2 dt \le \tau K^2 e^{2|a|\tau} \|x_0\|_{\mathcal{X}}^2 < \infty,$$

поскольку неравенство $\|X^t\| \le K e^{at}$ следует из построения полугруппы $\{X^t : t \ge 0\}$ (см. [5]). Константы $K \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$ при этом взяты из определения сильной (L,p)-радиальности оператора M. Затем

$$\left| \int_0^\tau \left\langle X^t x_0, \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \right\rangle_{\mathcal{X}} dt \right| \le \tau K^2 e^{2|a|\tau} \|x_0\|_{\mathcal{X}} \|L_1^{-1} Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} \int_0^\tau \|y(s)\|_{\mathcal{X}} ds.$$

Сходимость последнего интеграла следует из вложения $L_2(\mathcal{Y}^1) \subset L_1(\mathcal{Y}^1)$. Аналогичным образом получим

$$\int_0^\tau \left\| \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q y(s) ds \right\|_{\mathcal{X}}^2 dt \le \tau K^2 e^{2|a|\tau} \|L_1^{-1} Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})}^2 \left(\int_0^\tau \|y(s)\|_{\mathcal{X}} ds \right)^2 < \infty.$$

□

3. Задача оптимального управления

Пусть пространства $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}$ — гильбертовы и задан оператор $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$. Будем рассматривать задачу Коши (2.2) для уравнения

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t) + Bu(t). \tag{3.1}$$

Введем в рассмотрение пространство управлений

$$\{u(t) \in H^{p+1}(\mathcal{U}) : ((I-Q)Bu)^{(k)}(0) = 0, k = \overline{1,p}\} = \hat{H}^{p+1}(\mathcal{U}).$$

Выделим в $\hat{H}^{p+1}(\mathcal{U})$ выпуклое замкнутое подмножество H_∂^{p+1} — множество допустимых управлений. Обозначим $H_\partial^{p+1}(0) = \{v \in \mathcal{U} : \exists u(t) \in H_\partial^{p+1} \ u(0) = v\}$. Будем предполагать, что выполняется условие $B[H_\partial^{p+1}(0)] \supset \mathcal{Y}^0$. Тогда для $x_0 \in \mathcal{X}$, $y(t) \in H^{p+1}(\mathcal{Y}^0) \oplus L_2(\mathcal{Y}^1)$ множество управлений $u(t) \in H_\partial^{p+1}$ таких, что

$$(I-Q)Bu(0) = -M_0(I-P)x_0 - \sum_{k=0}^{p} J^k((I-Q)y)^{(k)}(0), \tag{3.2}$$

будет не пусто. Обозначим это множество управлений через $H_\partial(x_0, y(t))$. Тогда в силу теоремы 2.1 для любых $x_0 \in \mathcal{X}$, $y(t) \in H^{p+1}(\mathcal{Y}^0) \oplus L_2(\mathcal{Y}^1)$, $u(t) \in H_\partial(x_0, y(t))$ выполняется условие (2.5) и поэтому существует единственное слабое решение

$$x(t) = (A_0 + A_1)(y(t) + Bu(t)) + X^t x_0 \tag{3.3}$$

задачи Коши (2.2) для уравнения (3.1).

Пусть $\mathcal{Z}$ — некоторое гильбертово пространство наблюдений, оператор $C \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Z})$ задает наблюдение $z = Cx$, а самосопряженные операторы $N_q \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $q = \overline{0, p+1}$, удовлетворяют условиям

$$\exists c_q > 0 \ \forall w \in L_2(\mathcal{U}) \ \int_0^\tau \langle N_q w(t), w(t)\rangle_{\mathcal{U}} dt \geq c_q \|w\|^2_{L_2(\mathcal{U})}.$$

Построим функционал стоимости

$$J(u) = \int_0^\tau \|z(t) - z_0(t)\|^2_Z dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle N_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t)\rangle_{\mathcal{U}} dt. \tag{3.4}$$

Оптимальным управлением задачи назовем такое $u_0 \in H_\partial(x_0, y(t))$, что

$$J(u_0) = \inf_{u \in H_\partial(x_0, y(t))} J(u).$$

Лемма 3.1. *Отображение $u \to x(u)$, задаваемое формулой (3.3), непрерывно действует из подпространства $\hat{H}^{p+1}(\mathcal{U})$ пространства $H^{p+1}(\mathcal{U})$ в $L_2(\mathcal{X})$.*

Доказательство. Действительно, пусть $\|u_k - u\|_{H^{p+1}(\mathcal{U})}$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Рассмотрим $\|x(u_k) - x(u)\|_{L_2(\mathcal{X})} = \|(A_0 + A_1)B(u_k - u)\|_{L_2(\mathcal{X})}$. Непрерывность оператора

$A_0B : H^{p+1}(\mathcal{U}) \to L_2(\mathcal{X})$ очевидна, докажем непрерывность оператора $A_1B : H^{p+1}(\mathcal{U}) \to L_2(\mathcal{X})$. Как при доказательстве следствия 2.1, используя неравенство Гёльдера, получим

$$\left\| \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q B u(s) ds \right\|_{L_2(\mathcal{X})} \leq \tau K e^{|a|\tau} \|L_1^{-1} Q B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{X})} \|u\|_{L_2(\mathcal{U})} \leq \text{const} \cdot \|u\|_{H^{p+1}(\mathcal{U})}.$$

□

Теорема 3.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $B[H_\partial^{p+1}(0)] \supset \mathcal{Y}^0$. Тогда при любых $x_0 \in \mathcal{X}$, $y(t) \in H^{p+1}(\mathcal{Y}^0) \oplus L_2(\mathcal{Y}^1)$ существует единственное оптимальное управление $u_0 \in H_\partial(x_0, y(t))$ задачи (2.2), (3.1).*

Доказательство. Докажем замкнутость и выпуклость множества $H_\partial(x_0, y(t))$ при любых $x_0 \in \mathcal{X}$, $y(t) \in H^{p+1}(\mathcal{Y}^0) \oplus L_2(\mathcal{Y}^1)$. Пусть последовательность $\{u_k(t)\} \subset H_\partial(x_0, y(t))$ стремится к $u(t)$ в $H^{p+1}(\mathcal{U})$. Тогда $u(t)$ принадлежит множеству управлений H_∂^{p+1} в силу его замкнутости. Понятно, что $(I-Q)B \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathcal{U});\ H^{p+1}(\mathcal{Y}))$, поэтому в силу вложения (2.6) $\|(I-Q)B(u_k(0)-u(0))\|_{\mathcal{Y}} \leq C_1 \|(I-Q)B(u_k(t)-u(t))\|_{H^{p+1}(\mathcal{Y})} \to 0$. Отсюда $(I-Q)Bu(0) = -M_0(I-P)x_0 - \sum\limits_{k=0}^{p} J^{k-1}((I-Q)y)^{(k)}(0)$. Выпуклость множества $H_\partial(x_0, y(t))$ сразу следует из выпуклости H_∂^{p+1} и линейности условия (3.2) по $u(t)$.

Перепишем функционал качества J в виде $J(u) = \|z(u) - z_0\|^2_{L_2(\mathcal{Z})} + \xi(u,u)$, где билинейная форма $\xi(u,v)$ имеет вид $\xi(u,v) = \sum\limits_{q=0}^{p+1} \langle N_q u^{(q)}(t), v^{(q)}(t)\rangle_{L_2(\mathcal{U})}$. Поскольку операторы $C \in \mathcal{L}(L_2(\mathcal{X}), L_2(\mathcal{Z}))$, $N_q \in \mathcal{L}(L_2(\mathcal{U}))$, $q = \overline{0, p+1}$, согласно лемме 3.1

$$\pi(u,v) = \langle C(x(t,u) - x(t,0)), C(x(t,v) - x(t,0))\rangle_{L_2(\mathcal{Z})} + \xi(u,v) =$$
$$= \langle C(A_0 + A_1)Bu, C(A_0 + A_1)Bv\rangle_{L_2(\mathcal{Z})} + \xi(u,v)$$

является билинейной непрерывной формой на $H^{p+1}(\mathcal{U})$. Она симметрична, поскольку операторы N_q, $q = \overline{0, p+1}$, самосопряженные. Кроме того, форма $\pi(u,u)$ коэрцитивна. Действительно,

$$\pi(u,u) = \|C(x(t,u) - x(t,0))\|_{L_2(\mathcal{Z})} + \xi(u,u) \geq 0 + \min_{0 \leq q \leq p+1} c_q \|u\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{U})} = c\|u\|^2_{H^{p+1}(\mathcal{U})}.$$

Пусть

$$l(u) = \langle z_0(t) - Cx(t,0), C(x(t,u) - x(t,0))\rangle_{L_2(\mathcal{Z})} = \langle z_0(t) - Cx(t,0), C(A_0 + A_1)Bu\rangle_{L_2(\mathcal{Z})}$$

— линейная форма на $H^{p+1}(\mathcal{U})$. Ее непрерывность следует из того, что $C(A_0 + A_1)Bu \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathcal{U}); L_2(\mathcal{Z}))$, и из непрерывности скалярного произведения.

Отсюда получаем $J(u) = \pi(u,u) - 2l(u) + \|z_0(t) - Cx(t,0)\|^2_{L_2(\mathcal{Z})}$. Поскольку все требования теоремы 1.1 [11] выполнены, существование и единственность оптимального управления доказаны. □

4. Приложения

Пусть многочлены $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$, $Q_m(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j \lambda^j$ таковы, что $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $c_n, d_m \neq 0$, $m \geq n$. Далее, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, набор операторов A, $B_1, \dots B_r$ — регулярно эллиптический [12], где оператор

$$(Aw)(x) = \sum_{|\alpha|\leq 2r} a_\alpha(x) D^\alpha w(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

удовлетворяет требованию

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^s, \quad \mathrm{Re}(-1)^r \sum_{|\alpha|=2r} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq \delta|\xi|^{2r}, \tag{4.1}$$

операторы

$$(B_l w)(x) = \sum_{|\alpha|\leq r_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha w(x), \quad b_{l\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = \overline{1,r}.$$

Потребуем также самосопряженности оператора $A_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $\mathrm{dom}A_1 = W^{2r}_{2,\{B_l\}}(\Omega)$ [12], $A_1 w = Aw$, $w \in \mathrm{dom}A_1$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A_1, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Здесь мы учли, что спектр оператора A_1 вещественный и ограничен справа согласно условию (4.1).

Редуцируем начально-краевую задачу

$$P_n(A)w_t(x,t) = iQ_m(A)w(x,t) + y(x,t) + u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\tau); \tag{4.2}$$

$$B_l A^k w(x,t) = 0, \ k = \overline{0, m-1}, \quad l = \overline{1,r}, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\tau); \tag{4.3}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.4}$$

к задаче (2.2), (3.1). Для этого возьмем

$$\mathcal{X} = \{w \in W_2^{2rn}(\Omega) : B_l A^k w(x) = 0, \ k = \overline{0, n-1}, \ l = \overline{1,r}, \ x \in \partial\Omega\},$$
$$\mathcal{Y} = \mathcal{U} = L_2(\Omega),$$

где $W_2^\gamma(\Omega)$ — пространство Соболева, $\gamma = 0, 1, \dots$ Операторы зададим следующим образом:

$$B = I, \ L = P_n(A), \ M = iQ_m(A),$$

$$\mathrm{dom}M = \{w \in W_2^{2rm}(\Omega) : B_l A^k w(x) = 0, k = \overline{0, m-1}, \ l = \overline{1,r}, \ x \in \partial\Omega\}.$$

Теорема 4.1. *Пусть $m \geq n$, спектр $\sigma(A_1)$ не содержит общих корней многочленов $P_n(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$. Тогда оператор M сильно $(L,0)$-радиален.*

Доказательство. В условиях теоремы числа $\mu_k = iQ_m(\lambda_k)/P_n(\lambda_k)$ при тех k, при которых $P_n(\lambda_k) \neq 0$, лежат на мнимой оси и при этом составляют множество $\sigma^L(M)$. Поэтому можно взять $a = 0$ в определении (L,p)-радиальности оператора. Проверим оценки из определения $(L,0)$-радиальности. При $\mu, \nu > 0$, $w \in \mathcal{X}$, $y \in L_2(\Omega)$

$$\|L^L_\mu(M)y\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{|\langle y, \varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)}|^2}{\left|\mu - i\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2} \leq \frac{\|y\|^2_{L_2(\Omega)}}{\mu^2},$$

$$\|R^L_\mu(M)w\|^2_{W_2^{2rn}(\Omega)} = \sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0} \frac{|\langle w, \varphi_k\rangle_{W_2^{2rn}(\Omega)}|^2}{\left|\mu - i\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2} \leq \frac{\|w\|^2_{W_2^{2rn}(\Omega)}}{\mu^2},$$

$$\|R^L_\mu(M)(\nu L-M)^{-1}y\|^2_{W_2^{2rn}(\Omega)}\le$$

$$\le \mathrm{const}\cdot\sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0}\frac{(1+|\lambda_k|^{2n})|\langle y,\varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)}|^2}{|P_n(\lambda_k)|^2\left|\mu-i\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2\left|\nu-i\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2}\le\frac{\mathrm{const}\|y\|^2_{L_2(\Omega)}}{\mu^2\nu^2}.$$

При этом принято во внимание, что последовательность $|P_n(\lambda_k)|^{-2}(1+|\lambda_k|^{2n})$ сходится к $|c_n|^{-2}$ при $k\to\infty$ и поэтому ограничена. Взяв $y\in\mathrm{dom}M=\overset{\circ}{\mathcal{Y}}$, получим

$$\|M(\nu L-M)^{-1}L^L_\mu(M)y\|^2_{L_2(\Omega)}\le$$

$$\le\sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0}\frac{|Q_m(\lambda_k)|^2|\langle y,\varphi_k\rangle_{L_2(\Omega)}|^2}{|P_n(\lambda_k)|^2\left|\mu-i\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2\left|\nu-i\dfrac{Q_m(\lambda_k)}{P_n(\lambda_k)}\right|^2}\le\frac{c^{-2}\|My\|^2_{L_2(\Omega)}}{\mu^2\nu^2}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\exists c>0\ \forall k\in\mathbb{N}\ (P_n(\lambda_k)\neq 0)\Rightarrow(|P_n(\lambda_k)|\ge c)$. $\square$

Имеем

$$P=Q=\sum_{P_n(\lambda_k)\neq 0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,\ \mathcal{Y}^0=\mathrm{span}\{\varphi_k:P_n(\lambda_k)=0\},\ \mathcal{Y}^1=\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k:P_n(\lambda_k)\neq 0\}.$$

Далее, возьмем $H^1_\partial=\hat{H}^1(\mathcal{U})=H^1(L_2(\Omega))$, $\mathcal{Z}=\mathcal{X}$, $C=I$, $N_0=N_1=I$. Поэтому условие, определяющее множество $H_\partial(w_0,y)$, имеет вид

$$\langle u(x,0),\varphi_k(x)\rangle=-iQ_m(\lambda_k)\langle w_0(x),\varphi_k(x)\rangle-\langle y(x,0),\varphi_k(x)\rangle \text{ при } P_n(\lambda_k)=0.$$

Функционал стоимости при этом выглядит следующим образом:

$$J(u)=\int_0^\tau\|w(x,t)-z_0(x,t)\|^2_{W_2^{2rn}(\Omega)}dt+\int_0^\tau\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}dt+\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}dt.$$

Оптимальным управлением, как и прежде, будем называть минимизирующую этот функционал функцию управления.

Следствие 4.1. *Пусть $m\ge n$, спектр $\sigma(A_1)$ не содержит общих корней многочленов $P_n(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$. Тогда при любых $w_0\in\mathcal{X}$, $y(t)\in H^1(\mathcal{Y}^0)\oplus L_2(\mathcal{Y}^1)$ существует единственное оптимальное управление $u_0\in H_\partial(w_0,y)$ задачи (4.2)–(4.4).*

Задачи

$$u(x,t)=\Delta u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\tau),$$
$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega,$$

и

$$\frac{d}{dn}u(x,t)=\frac{d}{dn}\Delta u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\tau),$$
$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega,$$

для уравнения

$$(\lambda-\Delta)u_t(x,t)=\alpha\Delta u(x,t)-\beta\Delta^2u(x,t),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,\tau),$$

теории фильтрации, первая из которых рассмотрена в [6], являются частными случаями рассмотренного в этом параграфе примера.

Список литературы

[1] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

[2] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

[3] Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

[4] Федоров В.Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 3. С. 316–318.

[5] Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173–200.

[6] Свиридюк Г.А., Ефремов А.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1912–1919.

[7] Свиридюк Г.А., Ефремов А.А. Задача оптимального управления для линейных уравнений типа Соболева // Изв. вузов. Математика. 1996. № 12. С. 75–83.

[8] Lewis F.L. A survey of linear singular systems // Circuits, Systems and Signal Processing. 1986. Vol. 5, N 1. P. 3–36.

[9] Курина Г.А. Сингулярные возмущения задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной // Обзор. Изв. РАН. Сер. техн. кибернетика. 1992. № 4. С. 20–48.

[10] Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. Новосибирск: Наука, 1998.

[11] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

[12] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 16 декабря 2003 г.