ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ*

В. В. Бублик

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Россия
e-mail: bublik@itam.nsc.ru

Steady 2D Navier—Stokes equations of a compressible viscous and heat-conducting perfect gas with polytropic state equation are considered in the paper. Computer algebra methods were utilized for study of the compatibility analysis of overdetermined systems of differential equations. One partially invariant set of solutions is presented as an illustration of the method. An example of differentially invariant solution is also presented.

Введение

При разработке и создании новых численных методов и комплексов вычислительных программ для решения задач математической физики важным этапом является тестирование формул, алгоритмов и их программных реализаций на точных решениях. Один из способов получения точных решений — использование методов группового анализа дифференциальных уравнений [1]. С помощью этих методов можно получать классы инвариантных, частично инвариантных и дифференциально инвариантных решений.

Построение частично инвариантных и дифференциально инвариантных решений сопряжено с большими вычислительными трудностями. Это связано с тем, что для получения таких решений требуется проведение анализа на совместность систем дифференциальных уравнений с частными производными. Алгоритмы, позволяющие за конечное число операций провести такой анализ, хорошо известны [2, 3, 4]. Однако на практике для более-менее сложных систем уравнений произвести вручную необходимые вычисления человеку часто не под силу из-за труднообозримого объема аналитических

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00080).

выкладок. И здесь на помощь приходят системы компьютерной алгебры (например, *Mathematica*, *MACSYMA*, *Maple*, *REDUCE*, *MuPAD*, Maxima, Axiom). Впервые системы компьютерной алгебры для анализа совместности были применены школой Н.Н. Яненко [5, 6, 7, 8].

В настоящее время во всем мире создано и продолжает создаваться множество программ и пакетов программ для исследования совместности систем дифференциальных уравнений. Однако практика показала, что чем более универсальной является программа, тем у́же круг задач, к которым она применима. И связано это, во-первых, с ограниченностью машинных ресурсов (даже на современном этапе развития вычислительной техники), во-вторых, с тем, что иногда бывает очень сложно получить понятное описание решения исходной задачи несмотря на наличие приведенной в инволюцию системы дифференциальных уравнений. Поэтому для сложных и практически важных задач математической физики приходится искать индивидуальные подходы при решении переопределенных систем дифференциальных уравнений.

Прежде всего приходится отказываться от полностью автоматического исполнения программ исследования на совместность. Необходимым условием получения результата в таких задачах является существенное использование пошагового диалогового режима исполнения программ. Практически системы компьютерной алгебры используются в этом случае только для рутинных аналитических вычислений (дифференцирований, подстановок и других манипуляций с выражениями). Проблема же выбора следующего действия полностью ложится на человека. При этом для успешного решения задачи активно применяются не только собственно теория совместности дифференциальных уравнений, но и многие другие разделы математики, механики, физики.

Так как часто условия инволютивности систем в чистом виде выписать не удается, то приходится отказываться от решения этой задачи, переключаясь на задачу построения решения рассматриваемой системы. Тем более, для приложений чаще важнее иметь не систему дифференциальных уравнений в инволюции, а ее общее или частное решение. На практике это выглядит примерно так: сначала для исследуемой системы реализуются шаги одного из известных алгоритмов приведения систем в инволюцию, затем на каком-то этапе проводится либо интегрирование части уравнений, либо другие упрощения (связанные, например, с некоторыми физическими свойствами), после чего исследование продолжается.

При исследовании активно привлекаются физические свойства модели (например, положительность некоторых параметров). Это помогает существенно снизить число вариантов при приведении систем в инволюцию: нет необходимости рассматривать те варианты, которые заведомо не имеют физического смысла. После частичного интегрирования может получиться подсистема полиномиальных алгебраических уравнений на константы интегрирования. Такие системы удобно исследовать с помощью базисов Грёбнера. Существенно упростить исследования помогает также использование групповых свойств. Во-первых, групповые свойства исходной модели позволяют фиксировать часть констант интегрирования, что сокращает число неизвестных параметров. Во-вторых, при построении частично инвариантных решений необходимо уделять внимание проблеме редукции. Например, после частичного интегрирования можно обнаружить, что при определенном выборе констант (или функций интегрирования) решение редуцируется к инвариантному (причем можно явно указать группу, относительно которой решение инвариантно). Естественно, что эти случаи нет необходимости исследовать до конца, так как это решение можно получить более простым способом.

1. Описание модели

Рассматривается система уравнений, описывающая плоские стационарные течения вязкого теплопроводного совершенного газа с политропным уравнением состояния:

$$\rho(uu_x + vu_y) = -p_x + (\lambda(u_x + v_y))_x + (2\mu u_x)_x + (\mu(u_y + v_x))_y\,; \tag{1}$$

$$\rho(uv_x + vv_y) = -p_y + (\lambda(u_x + v_y))_y + (\mu(u_y + v_x))_x + (2\mu v_y)_y\,; \tag{2}$$

$$(u\rho)_x + (v\rho)_y = 0; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} c_V\rho(uT_x + vT_y) + p(u_x + v_y) = (\varkappa T_x)_x + (\varkappa T_y)_y + \\ * + \lambda(u_x + v_y)^2 + \mu\left(2u_x^2 + 2v_y^2 + (u_y + v_x)^2\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости; ρ — плотность; T — температура; $p = R\rho T$ — давление; R — газовая постоянная; c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме; $\mu = m_0T^\omega$, $\lambda = l_0T^\omega$ — первая и вторая вязкости; $\varkappa = k_0T^\omega$ — теплопроводность. При исследовании будем учитывать следующие условия, имеющие физический смысл:

$$\rho > 0, \quad T > 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geqslant 0, \quad \mu > 0, \quad \varkappa \geqslant 0, \quad R > 0, \quad c_V > 0. \tag{5}$$

Группа, допускаемая системой уравнений (1)–(4), вычислена в [9, 10]. Там показано, что эта система допускает алгебру Ли L_5 с базисом

$$\begin{gathered} Y_1 = \partial_x, \quad Y_2 = \partial_y, \quad Y_3 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \quad Y_4 = x\partial_x + y\partial_y - \rho\partial_\rho, \\ Y_5 = u\partial_u + v\partial_v + (2\omega - 1)\rho\partial_\rho + 2T\partial_T. \end{gathered}$$

В этих же работах построена оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_5 и описаны инвариантные решения ранга 1. Все инвариантные решения ранга 1 системы (1)–(4) являются подмножеством инвариантных решений ранга 1 для аналогичной системы уравнений, описывающей нестационарные движения вязкого теплопроводного газа. Все такие решения для нестационарных уравнений описаны в [11, 12]. Все инвариантные решения ранга 0 для нестационарных уравнений полностью описаны в [13]. Среди этих решений содержатся все инвариантные решения ранга 0 системы (1)–(4). Таким образом, для системы (1)–(4) описаны все инвариантные решения.

2. Пример построения частично инвариантного решения

Рассмотрим подалгебру $\{Y_1, Y_2, Y_5\}$. Инварианты соответствующей подгруппы:

$$u/v, \quad \rho u^{1-2\omega}, \quad Tu^{-2}.$$

Решение будем искать в виде

$$u = u(x,y), \quad v = v_0u, \quad \rho = \rho_0u^{2\omega-1}, \quad T = T_0u^2. \tag{6}$$

Это частично инвариантное решение ранга 0 дефекта 1.

При подстановке (6) в (3) получим

$$\omega(u_x + v_0 u_y) = 0.$$

В случае $u_x + v_0 u_y = 0$ после несложных преобразований система (1)–(4) примет вид

$$u u_{yy} + 2\omega u_y^2 = 0, \quad (2\omega + 1) u u_y = 0, \quad (4\omega k_0 T_0 + m_0 v_0^2) u_y = 0,$$

откуда получается два решения. Первое решение: $u \equiv \mathrm{const}$. Это решение инвариантно относительно подалгебры $\{Y_1, Y_2\}$. Второе решение: $u = u_0 \mathrm{e}^{\alpha(y - v_0 x)}$, $\omega = -1/2$, $k_0 = m_0 v_0^2/(2T_0)$. Это решение инвариантно относительно подалгебры $\{Y_1 - v_0\alpha Y_5, Y_2 + \alpha Y_5\}$.

В случае $\omega = 0$ система (1)–(4) принимает вид

$$(l_0 + 2m_0) u_{xx} + (l_0 + m_0) v_0 u_{xy} + m_0 u_{yy} - (RT_0 + 1)\rho_0 u_x - v_0 \rho_0 u_y = 0; \tag{7}$$

$$m_0 v_0 u_{xx} + (l_0 + m_0) u_{xy} + (l_0 + 2m_0) v_0 u_{yy} - v_0 \rho_0 u_x - \left(RT_0 + v_0^2\right) \rho_0 u_y = 0; \tag{8}$$

$$\begin{gathered} 2k_0 T_0 u u_{xx} + 2k_0 T_0 u u_{yy} + \left(2k_0 T_0 + l_0 + 2m_0 + m_0 v_0^2\right) u_x^2 + 2(l_0 + m_0) v_0 u_x u_y + \\ + \left(2k_0 T_0 + (l_0 + 2m_0) v_0^2 + m_0\right) u_y^2 - (2c_V + R)\rho_0 T_0 u u_x - (2c_V + R) v_0 \rho_0 T_0 u u_y = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Переопределенная система уравнений (7)–(9) требует исследования на совместность. Проведем такой анализ и покажем, как могут помочь при исследовании совместности физические свойства модели, базисы Гребнера и задача о редукции.

Составим матрицу из коэффициентов при старших производных системы (7)–(9):

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} (l_0 + 2m_0) & (l_0 + m_0) v_0 & m_0 \\ m_0 v_0 & l_0 + m_0 & (l_0 + 2m_0) v_0 \\ 2k_0 T_0 u & 0 & 2k_0 T_0 u \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему (7)–(9) в зависимости от ранга матрицы $\mathcal{A}_3$.

2.1. Ранг $\mathcal{A}_3$ равен 0

В этом случае не выполняются условия (5), поэтому нет необходимости рассматривать и сам случай.

2.2. Ранг $\mathcal{A}_3$ равен 1

Ранг матрицы $\mathcal{A}_3$ может быть равен 1 либо в случае $k_0 = l_0 = m_0 = 0$, либо в случае $k_0 \neq 0$, $l_0 + m_0 = 0$. Оба случая не удовлетворяют условиям (5), поэтому нет необходимости рассматривать и этот случай.

2.3. Ранг $\mathcal{A}_3$ равен 2

С учетом условий (5) ранг матрицы $\mathcal{A}_3$ может быть равен 2 только при $k_0 = 0$. Рассмотрим этот случай. Уравнение (9) принимает вид

$$\begin{gathered} \left(l_0 + 2m_0 + m_0 v_0^2\right) u_x^2 + 2(l_0 + m_0) v_0 u_x u_y + \left((l_0 + 2m_0) v_0^2 + m_0\right) u_y^2 - \\ -(2c_V + R)\rho_0 T_0 u u_x - (2c_V + R) v_0 \rho_0 T_0 u u_y = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

2.3.1. Случай $v_0 = 0$

Рассмотрим сначала случай $v_0 = 0$. Тогда система уравнений (7), (8), (10) принимает вид

$$(l_0 + 2m_0)u_{xx} + m_0 u_{yy} - (RT_0 + 1)\rho_0 u_x = 0, \quad (l_0 + m_0)u_{xy} - R\rho_0 T_0 u_y = 0; \tag{11}$$

$$(l_0 + 2m_0)u_x^2 + m_0 u_y^2 - (2c_V + R)\rho_0 T_0 u u_x = 0. \tag{12}$$

Случай $m_0 RT_0 - l_0 - m_0 = 0$. Интегрование уравнений (11) дает

$$u(x, y) = \left(C_1 y^2 + C_2 y - \frac{2C_1 m_0^2}{(l_0 + 2m_0)\rho_0} x + C_3 \right) \exp\left\{ \frac{\rho_0}{m_0} x \right\} + C_4.$$

При $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ решение редуцируется к инвариантному относительно $\{Y_1, Y_2\}$. При $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ решение редуцируется к инвариантному относительно $\{Y_2, m_0 Y_1 + \rho_0 Y_5\}$. Легко проверить, что все следствия уравнения (12) сводятся только к этим двум редуцируемым к инвариантным решениям случаям.

Случай $m_0 RT_0 - l_0 - m_0 \neq 0$. Интегрование уравнений (11) дает

$$u(x, y) = (C_1 \sin(k_1 y) + C_2 \cos(k_1 y)) \exp\{k_2 x\} + C_3 \exp\{k_3 x\} + C_4,$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{(m_0 RT_0 - l_0 - m_0)R\rho_0^2 T_0}{m_0 (l_0 + 2m_0)^2}}, \quad k_2 = \frac{R\rho_0 T_0}{l_0 + m_0}, \quad k_3 = \frac{(RT_0 + 1)\rho_0}{l_0 + 2m_0}.$$

Уравнение (12) в этом случае имеет структуру

$$a_1(x)\cos^2(k_1 y) + a_2(x)\cos(k_1 y)\sin(k_1 y) + a_3(x)\sin^2(k_1 y) +$$
$$+ a_4(x)\cos(k_1 y) + a_5(x)\sin(k_1 y) + a_6(x) = 0,$$

откуда следует, что

$$a_2 = a_4 = a_5 = 0, \quad a_1 + a_6 = 0, \quad a_1 - a_3 = 0. \tag{13}$$

Сами значения функций $a_1, \ldots, a_6$ здесь не приводятся из-за их громоздкости. Анализ условий (13) показывает, что все решения редуцируются к инвариантным относительно $\{Y_1, Y_2\}$ или $\{Y_2, Y_1 + k_3 Y_5\}$.

2.3.2. Случай $v_0 \neq 0$

Дифференциальные следствия уравнения (10) имеют вид

$$(2Au_x + Bu_y + Du)u_{xx} + (Bu_x + 2Cu_y + Eu)u_{xy} + (Du_x + Eu_y)u_x = 0; \tag{14}$$

$$(2Au_x + Bu_y + Du)u_{xy} + (Bu_x + 2Cu_y + Eu)u_{yy} + (Du_x + Eu_y)u_x = 0. \tag{15}$$

При дальнейшем анализе неоднократно будут встречаться множители вида $\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u$, на которые нужно будет умножать или делить уравнения. Поэтому сразу рассмотрим случай, когда это выражение может быть равным 0.

Случай $\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$. Данное условие можно проинтегрировать и в зависимости от значений α, β, γ получить функцию u одного из следующих трех видов.

Случай $u = C_1 \exp\{k_1 x + k_2 y\} + C_2 \exp\{k_3 x + k_4 y\}$**.** При $C_2 = 0$ решение редуцируется к инвариантному, поэтому рассмотрим случай

$$C_1^2 + C_2^2 \neq 0, \quad (k_1 - k_3)^2 + (k_2 - k_4)^2 \neq 0.$$

Данное решение допускает поворот, соответствующий оператору Y_3, поэтому одну из четырех констант k_1, k_2, k_3, k_4 для облегчения расчетов можно сделать равной 0. Пусть $k_4 = 0$. Подстановка представления вида решения в систему уравнений (7), (8), (10) и дальнейшее расщепление относительно экспонент дают семь уравнений, которые можно трактовать как полиномиальные уравнения относительно переменных k_1, k_2, k_3. Компьютерные вычисления показывают, что базис Гребнера полученной системы $\{k_1, k_2, k_3\}$. Отсюда $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, т. е. нередуцируемых решений нет.

Случай $u = (C_1 \cos(k_1 x + k_2 y) + C_2 \sin(k_1 x + k_2 y)) \exp\{k_3 x + k_4 y\}$**.** Чтобы отбросить решения, заведомо редуцируемые к инвариантным, рассмотрим случай

$$C_1^2 + C_2^2 \neq 0, \quad k_1 k_4 \neq k_2 k_3.$$

Данное решение допускает поворот, соответствующий оператору Y_3, поэтому одну из четырех констант k_1, k_2, k_3, k_4 для облегчения расчетов можно сделать равной 0. Пусть $k_4 = 0$. Подстановка представления вида решения в систему уравнений (7), (8), (10) и дальнейшее расщепление относительно экспонент дают семь уравнений, которые можно трактовать как полиномиальные уравнения относительно переменных k_1, k_2, k_3. Компьютерные вычисления показывают, что базис Гребнера полученной системы $\{k_1, k_2, k_3\}$. Отсюда $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, т. е. нередуцируемых решений нет.

Случай $u = u_0 \exp\{k_1 x + k_2 y\}$**.** Решение редуцируется к инвариантному.

Случай $\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u \neq 0$**.** В этом случае уравнение (15) на многообразии уравнений (7), (8), (10), (14) принимает вид

$$F u_x u_y + G u u_x + H u_y^2 + I u u_y + J u^2 = 0 \tag{16}$$

с известными константами F, G, H, I, J, зависимость которых от m_0, l_0, k_0, R, c_V, v_0, ρ_0 и T_0 здесь не приводится в силу ее громоздкости. Продифференцируем уравнение (16) по x и по y и перейдем на многообразие уравнений (7), (8), (10), (14), (15). Получится два дифференциальных уравнения первого порядка. В зависимости от соотношений параметров m_0, l_0, k_0, R, c_V, v_0, ρ_0 и T_0 эти следствия могут иметь разный вид. Однако компьютерный подсчет показал, что обязательным следствием этих уравнений будет условие $u_y/u = \mathrm{const}$, т. е. решение редуцируется к инвариантному.

2.4. Ранг $\mathcal{A}_3$ равен 3

Продифференцируем каждое из уравнений (7)–(9) по x и y и составим матрицу из коэффициентов при старших производных в полученных уравнениях:

$$\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} (l_0 + 2m_0) & (l_0 + m_0)v_0 & m_0 & 0 \\ 0 & (l_0 + 2m_0) & (l_0 + m_0)v_0 & m_0 \\ m_0 v_0 & l_0 + m_0 & (l_0 + 2m_0)v_0 & 0 \\ 0 & m_0 v_0 & l_0 + m_0 & (l_0 + 2m_0)v_0 \\ 2k_0 T_0 u & 0 & 2k_0 T_0 u & 0 \\ 0 & 2k_0 T_0 u & 0 & 2k_0 T_0 u \end{pmatrix}.$$

Если ранг матрицы $\mathcal{A}_3$ равен 3, то, с учетом условий (5), ранг матрицы $\mathcal{A}_4$ равен 4. То есть из дифференциальных следствий уравнения (9) можно исключить все производные третьего порядка с помощью дифференциальных следствий уравнений (7) и (8), а затем с помощью уравнений (7)–(9) исключить все производные второго порядка. В результате получим два новых уравнения первого порядка, являющихся дифференциальными следствиями системы (7)–(9):

$$\begin{gathered}\alpha_{i1}u_x^3 + \alpha_{i2}u_x^2u_y + \alpha_{i3}u_xu_y^2 + \alpha_{i4}u_y^3 + \alpha_{i5}uu_x^2 + \alpha_{i6}uu_xu_y + \\ +\alpha_{i7}uu_y^2 + \alpha_{i8}u^2u_x + \alpha_{i9}u^2u_y = 0, \quad i = 1, 2,\end{gathered} \tag{17}$$

где константы α_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, \ldots, 9)$ зависят от m_0, l_0, k_0, R, c_V, v_0, ρ_0, T_0 и не приводятся из-за их громоздкости. При выводе всех дифференциальных следствий системы (7)–(9) всегда будем стремиться к тому, чтобы коэфициенты уравнений были полиномами на константы m_0, l_0, k_0, R, c_V, v_0, ρ_0, T_0. Это может существенно облегчить вычисления, так как обычно в системах компьютерной алгебры операции над полиномами по сравнению с операциями над рациональными функциями требуют меньших ресурсов как по объемам памяти, так и по времени вычислений.

Применение методов группового анализа показывает, что рассматриваемое решение редуцируется к инвариантному относительно двумерной подгруппы группы $\{Y_1, Y_2, Y_5\}$ только в случае, если функция u удовлетворяет уравнению

$$\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0 \tag{18}$$

с постоянными коэффициентами α, β, γ. Поэтому при исследовании совместности системы (7)–(9) будем оставлять только те случаи, которые не дают следствий вида (17). Для начала рассмотрим каждое из уравнений (17) как квадратные уравнения на u. Решение такого квадратного уравнения будет иметь вид (18), если $\alpha_{i5}u_x^2 + \alpha_{i6}u_xu_y + \alpha_{i7}u_y^2$ делится на $\alpha_{i8}u_x + \alpha_{i9}u_y$, а дискриминант квадратного уравнения делится на $(\alpha_{i8}u_x + \alpha_{i9}u_y)^2$. Компьютерный анализ последних условий показывает, что это выполняется при $2k_0 = (2c_V + R)m_0$ и некоторых дополнительных связях между константами m_0, l_0, k_0, R, c_V, v_0, ρ_0, T_0. Полный результат такого анализа здесь не приводится, поскольку случай редукции нас не интересует.

Систему (17) можно рассматривать как систему полиномиальных уравнений на u, u_x, u_y. Тогда получение условий совместности системы (17) (пока без учета (7)–(9)) можно свести к вычислению базиса Гребнера. Вычисления показали, что в общем случае зависимости между константами m_0, l_0, k_0, R, c_V, v_0, ρ_0, T_0 базис Гребнера состоит из четырех уравнений: двух уравнений вида (17) и двух уравнений вида

$$\sum_{\substack{i+j+k=4\\ i,j,k\geqslant 0}} \beta_{ijk}u^iu_x^ju_y^k = 0, \qquad \sum_{\substack{i+j+k=5\\ i,j,k\geqslant 0}} \gamma_{ijk}u^iu_x^ju_y^k = 0. \tag{19}$$

При некоторых специальных видах зависимостей между m_0, l_0, k_0, R, c_V, v_0, ρ_0, T_0 базис Гребнера будет иметь другой вид. Далее надо учесть уравнения (7)–(9). Для этого дифференцируем каждое из уравнений базиса Гребнера по x и по y и исключаем производные второго порядка с помощью (7)–(9). В результате из каждого уравнения получаем два новых полиномиальных уравнения на u, u_x, u_y, степень которых в общем случае на единицу больше степени исходного полинома. Эти восемь следствий добавляем к системе и вновь получившуюся подсистему 12 уравнений первого порядка заменяем базисом Гребнера. Далее продолжаем процедуру учета уравнений (7)–(9) и вычисление базисов Гребнера до тех пор, пока не перестанем получать новые следствия. Теория совместности систем дифференциальных уравнений и теория базисов Гребнера гарантируют конечность данного процесса. Случаи, в которых в качестве следствия получаются уравнения вида (18), отбрасываем как не интересные (все инвариантные решения уже описаны и могут быть получены более простым способом).

Итак, регулярное частично инвариантное решение ранга 0 дефекта 1, построенное на основе подалгебры, формально описывается формулами (6) и системой дифференциальных уравнений, состоящей из уравнений (7)–(9) и конечного числа полиномиальных уравнений конечного порядка на u, u_x, u_y.

3. Пример построения дифференциально инвариантного решения

Рассмотрим подалгебру $\{Y_1, Y_2, Y_4\}$. Дифференциальные инварианты нулевого и первого порядка соответствующей подгруппы:

$$u, \quad v, \quad T, \quad \frac{u_x}{\rho}, \quad \frac{u_y}{\rho}, \quad \frac{v_x}{\rho}, \quad \frac{v_y}{\rho}, \quad \frac{T_x}{\rho}, \quad \frac{T_y}{\rho}, \quad \frac{\rho_x}{\rho^2}, \quad \frac{\rho_y}{\rho^2}.$$

Будем строить дифференциально инвариантное решение ранга 1 (т. е. будем считать, что все инварианты — функция какого-то одного инварианта). Пусть все инварианты являются функциями T. Введем дополнительные функции $\theta_1(T)$, $\theta_2(T)$, $\phi(T)$, $\psi(T)$. Тогда получаем следующие выражения для производных:

$$T_x = \rho\theta_1, \quad T_y = \rho\theta_2, \quad \rho_x = \rho^2\phi, \quad \rho_y = \rho^2\psi \tag{20}$$

(условия для u_x, u_y, v_x, v_y будут выполняться автоматически). Условия совместности уравнений (20) имеют вид

$$\phi'\theta_2 = \psi'\theta_1, \quad \psi\theta_1 + \theta_1'\theta_2 = \phi\theta_2 + \theta_1\theta_2'. \tag{21}$$

Система (1)–(4) принимает вид

$$\begin{gathered}
\left((l_0 + 2m_0)\theta_1^2 + m_0\theta_2^2\right) T^\omega u'' + (l_0 + m_0)T^\omega\theta_1\theta_2 v'' + (l_0 + 2m_0)T^\omega\theta_1\theta_1' u' + m_0 T^\omega\theta_2\theta_2' u' + \\
+(l_0 + m_0)T^\omega\theta_2\theta_1' v' + \left((l_0 + 2m_0)\omega T^{\omega-1}\theta_1^2 + m_0\omega T^{\omega-1}\theta_2^2 + (l_0 + 2m_0)T^\omega\phi\theta_1 + m_0 T^\omega\psi\theta_2 - \right.\\
\left. -\theta_1 u - \theta_2 v\right) u' + (l_0 + m_0)\left(\omega\theta_2 + T\psi\right) T^{\omega-1}\theta_1 v' - R\left(T\phi + \theta_1\right) = 0; \qquad (22)\\
(l_0 + m_0)T^\omega\theta_1\theta_2 u'' + \left(m_0\theta_1^2 + (l_0 + 2m_0)\theta_2^2\right) T^\omega v'' + (l_0 + m_0)T^\omega\theta_2\theta_1' u' + m_0 T^\omega\theta_1\theta_1' v' + \\
+(l_0 + 2m_0)T^\omega\theta_2\theta_2' v' + (l_0 + m_0)\left(\omega\theta_2 + T\psi\right) T^{\omega-1}\theta_1 u' + \left((l_0 + 2m_0)\omega T^{\omega-1}\theta_2^2 + \right.\\
\left. +m_0\omega T^{\omega-1}\theta_1^2 + m_0 T^\omega\phi\theta_1 + (l_0 + 2m_0)T^\omega\psi\theta_2 - \theta_1 u - \theta_2 v\right) v' - R\left(T\psi + \theta_2\right) = 0; \qquad (23)\\
\theta_1 u' + \theta_2 v' + \phi u + \psi v = 0; \qquad (24)\\
\left((l_0 + 2m_0)\theta_1^2 + m_0\theta_2^2\right) T^\omega u'^2 + 2(l_0 + m_0)T^\omega\theta_1\theta_2 u'v' + \left(m_0\theta_1^2 + (l_0 + 2m_0)\theta_2^2\right) T^\omega v'^2 - \\
-RT\left(\theta_1 u' + \theta_2 v'\right) + k_0 T^\omega\left(\theta_1\theta_1' + \theta_2\theta_2'\right) + k_0\omega T^{\omega-1}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right) + k_0 T^\omega\left(\phi\theta_1 + \psi\theta_2\right) - \\
-c_V\left(\theta_1 u + \theta_2 v\right) = 0. \qquad (25)
\end{gathered}$$

Таким образом дифференциально инвариантное решение восстанавливается по формулам (20) из решения системы (21)–(25).

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948.

[3] Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во МГУ, 1962.

[4] Pommaret J.F. Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups. N.Y.; L.; P., 1978.

[5] Шурыгин В.А., Яненко Н.Н. О реализации на электронных вычислительных машинах алгебраическо-дифференциальных алгоритмов // Проблемы кибернетики. 1961. Вып. 1. С. 33–43.

[6] Арайс Е.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация метода внешних форм Картана на ЭВМ // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214, № 4. С. 737–738.

[7] Ганжа В.Г., Мелешко С.В., Мурзин Ф.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация на ЭВМ алгоритма исследования на совместность систем уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 5. С. 1044–1046.

[8] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.

[9] Meleshko S.V. Group classification of two-dimensional stable viscous gas equations // Intern. J. Nonlin. Mech. 1998. Vol. 34, N 3. P. 449–456.

[10] Meleshko S.V. Group classification of two-dimensional steady viscous gas dynamics equations with arbitrary state equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. Vol. 35. P. 3515–3533.

[11] Бублик В.В. Инвариантные решения ранга 1 уравнений плоских движений вязкого теплопроводного совершенного газа // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 26–31.

[12] Андреев В.К., Бублик В.В., Бытев В.О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003.

[13] Бублик В.В. “Простые” решения уравнений двумерных движений вязкого теплопроводного совершенного газа // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 2000. Вып. 116. С. 123–127.

Поступила в редакцию 11 мая 2007 г.