ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Ю. М. Григорьев
Новосибирский государственный университет, Россия
e-mail: grigyum@hydro.nsc.ru

В. В. Наумов
Якутский государственный университет, Россия

On the basis of a new proof of the theorem of the mean its converse is proved for the Helmholtz equation.

Классическая теорема о среднем для гармонических функций допускает обращение и, тем самым, полностью характеризует решения уравнения Лапласа [1]. Для ряда уравнений и систем уравнений эллиптического типа имеются аналоги прямых теорем о среднем (см. [1–6]). Для однородных уравнений статической теории упругости установлены обратные теоремы о среднем [3, 6, 7]. Для некоторых уравнений других типов также имеются аналоги прямых и обратных теорем о среднем [см. 1, 6–8 и ссылки в них]. Значение таких теорем возрастает в связи с их применением при численном решении краевых задач методом Монте—Карло [5, 6]. В данной работе на основе нового доказательства прямой теоремы доказана обратная теорема о среднем для уравнения Гельмгольца.

Ниже пользуемся следующими обозначениями: $\mathcal{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $n = 2, 3, \ldots$; $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\varrho}$, $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^n$; $\boldsymbol{\varrho} = \mathbf{r} + \mathbf{R}$; $R = |\mathbf{R}|$; $U_R(\mathbf{r}) \subset \mathcal{R}^n$ — шар радиуса R с центром в точке $\mathbf{r}$, $\Sigma_R(\mathbf{r})$ — его граничная сфера; $\overline{U}_R(\mathbf{r})$ — замыкание $U_R(\mathbf{r})$; $S_R = 2\pi^{n/2}R^{n-1}/\Gamma(\frac{n}{2})$ — площадь сферы $\Sigma_R(\mathbf{r})$; $\mathbf{dS}_\varrho$ — векторный элемент поверхности $\Sigma_R(\mathbf{r})$ в точке $\boldsymbol{\varrho}$, направленный по внешней нормали $\mathbf{n}$; $dS_\varrho = |\mathbf{dS}_\varrho| = R^{n-1}d\omega$, где $d\omega$ — скалярный элемент поверхности единичной сферы ω; dV_ϱ — элемент объема в точке $\boldsymbol{\varrho}$; Δ, Δ_ϱ, Δ_R — операторы Лапласа, дифференцирующие по компонентам векторов $\mathbf{r}, \boldsymbol{\varrho}, \mathbf{R}$ соответственно; $\Subset$ — символ компактного включения; $J_\nu(z)$ — функция Бесселя 1-го рода, $|arg z| < \pi$;

$$I(\mathbf{r}, R) = \frac{1}{S_R} \oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})} u(\boldsymbol{\varrho}) dS_\varrho \ — \tag{1}$$

сферическое среднее. Свойства интеграла (1) известны, в частности, он удовлетворяет уравнению Эйлера—Пуассона—Дарбу: $\Delta_R I(\mathbf{r}, R) = \Delta I(\mathbf{r}, R)$. Для удобства сформулируем используемые нами свойства сферического среднего в виде леммы (см. [1], с. 694).

Лемма 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ *— произвольная область,* $u \subset C^2(\Omega)$, $\overline{U}_R(\mathbf{r}) \subset \Omega$. *Тогда интеграл* (1) *дважды непрерывно дифференцируем по совокупности переменных* ($\mathbf{r}$,R) *в*

некоторой окрестности точки ($\mathbf{r}$,R), *причем дифференцирование можно ввести под знак интеграла*:

$$\frac{\partial}{\partial R}I(\mathbf{r},R) = \frac{1}{S_R}\int\limits_{U_R(\mathbf{r})}\Delta_\varrho u(\boldsymbol{\varrho})dV_\varrho; \quad \Delta_R I(\mathbf{r},R) = \frac{1}{S_R}\oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})}\Delta_\varrho u(\boldsymbol{\varrho})dS_\varrho,$$

$$\Delta I(\mathbf{r},R) = \frac{1}{S_R}\oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})}\Delta_\varrho u(\boldsymbol{\varrho})dS_\varrho. \tag{2}$$

Приведем известную теорему о среднем для уравнения Гельмгольца.

Теорема 1[1, с. 289]. *Пусть* $u \in C^2(\Omega)$ *— решение уравнения*

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0, \;\; \mathbf{r} \in \Omega \subset \mathcal{R}^n \tag{3}$$

с произвольным комплексным $k = \text{const} \notin (-\infty, 0)$. *Тогда для любого шара* $\overline{U}_R(\mathbf{r}) \subset \Omega$ *справедливо равенство*

$$2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(kR)}{(kR)^\alpha}u(\mathbf{r}) = \frac{1}{S_R}\oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})}u(\boldsymbol{\varrho})dS_\varrho, \quad \alpha = \frac{n}{2}-1. \tag{4}$$

Новое доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Введем вспомогательную функцию $a(R) \in C^2$ как решение задачи

$$\Delta_R a(R) + k^2 a(R) = 0, \quad a(0) = 1, \quad a'(0) = 0. \tag{5}$$

Легко проверить, что эта задача имеет единственное решение

$$a(R) = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(kR)}{(kR)^\alpha}. \tag{6}$$

Введем также функцию $g(\mathbf{r},R)$

$$g(\mathbf{r},R) = u(\mathbf{r})a(R) - \frac{1}{S_R}\oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})}u(\boldsymbol{\varrho})dS_\varrho. \tag{7}$$

Из (5) и (7) видно, что $g(\mathbf{r},0) = 0$. По лемме 1, $g \in C^2$ и, с учетом (3), получим:

$$\frac{\partial}{\partial R}g(\mathbf{r},R) = u(\mathbf{r})a'(R) - \frac{k^2}{S_R}\int\limits_{U_R(\mathbf{r})}u(\boldsymbol{\varrho})dV_\varrho.$$

Отсюда ясно, что $\dfrac{\partial}{\partial R}g(\mathbf{r},0) = 0$. Снова используя лемму 1 и (3), а также (4), имеем:

$$\Delta_R g(\mathbf{r},R) + k^2 g(\mathbf{r},R) = u(\mathbf{r})\Delta_R a(R) + \frac{k^2}{S_R}\oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})}u(\boldsymbol{\varrho})dS_\varrho +$$

$$+k^2 u(\mathbf{r})a(R) - \frac{k^2}{S_R}\oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})}u(\boldsymbol{\varrho})dS_\varrho = 0.$$

Итак, $g(\mathbf{r},R)$ является решением следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\Delta_R g(\mathbf{r},R) + k^2 g(\mathbf{r},R) = 0, \quad g(\mathbf{r},0) = \frac{\partial}{\partial R}g(\mathbf{r},0) = 0.$$

В силу единственности ее решения $g(\mathbf{r}, R) \equiv 0$, т. е.

$$u(\mathbf{r})a(R) = \frac{1}{S_R} \oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})} u(\boldsymbol{\varrho}) dS_\varrho. \tag{8}$$

Формула (8) с учетом (6) совпадает с (4), что и требовалось доказать.

Примененная выше техника позволяет доказать и обратную теорему о среднем.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ — произвольная область, $u \in C^2(\Omega)$. Если для каждой точки $\mathbf{r} \in \Omega$ существуют такое число $R_0 = R_0(\mathbf{r}) > 0$ и его некоторая окрестность ε, что для всех $R \in \varepsilon$ выполняются включение $U_R(\mathbf{r}) \subseteq \Omega$ и соотношение (4), то функция $u(\mathbf{r})$ является решением уравнения Гельмгольца (3) в Ω.*

Доказательство. Согласно условиям теоремы, в произвольной точке $\mathbf{r} \in \Omega$ справедливо соотношение (8) для всех $R \in \varepsilon$, причем $a(R)$ является решением задачи (5). Применяя к интегралу (8) лемму 1, имеем:

$$a(R_0)\Delta u(\mathbf{r}) = \frac{1}{S_{R_0}} \oint\limits_{\Sigma_{R_0}(\mathbf{r})} \Delta_\varrho u(\boldsymbol{\varrho}) dS_\varrho, \quad u(\mathbf{r})\Delta_{R_0} a(R_0) = \frac{1}{S_{R_0}} \oint\limits_{\Sigma_{R_0}(\mathbf{r})} \Delta_\varrho u(\boldsymbol{\varrho}) dS_\varrho.$$

Отсюда, используя (5), получаем равенство

$$a(R_0)[\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r})] = 0.$$

Допустим, kR_0 не совпадает ни с одним из нулей μ_α функции $J_\alpha(z)$. Тогда из этого равенства с учетом (6) имеем

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0.$$

Если же kR_0 совпадает с одним из μ_α, то в силу изолированности нулей функций Бесселя найдется число $R_1 \neq R_0$ с окрестностью $\varepsilon_1 \subset \varepsilon$ такое, что $a(R_1) \neq 0$ и, повторяя вышеприведенные рассуждения, снова получим

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0.$$

В силу произвольности $\mathbf{r} \in \Omega$ теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ — произвольная ограниченная область и функция $u \in C^0(\Omega)$. Если для каждой точки $\mathbf{r} \in \Omega$ существует такое число $R_0 = R_0(\mathbf{r}) > 0$, что при всех $R < R_0$ функция $u(\mathbf{r})$ удовлетворяет свойству (4) среднего значения, то $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Доказательство проводится небольшой модификацией стандартной методики с использованием техники усреднения (см. [9], с. 213). Возьмем $\Omega' \subseteq \Omega$. По лемме Гейне—Бореля найдется такое число $R_0 = R_0(\Omega') > 0$, что для всех $\mathbf{r} \in \Omega'$ и $R < R_0$ для функции $u(\mathbf{r})$ будет выполнено равенство (4), причем без ограничения общности можно считать, что $kR_0 < \mu_\alpha$, где μ_α — первый нуль функции Бесселя $J_\alpha(z)$. Зададим произвольное малое число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < R_0$ и рассмотрим в точке $\mathbf{r} \in \Omega' \setminus \Omega'_{2\varepsilon}$, где $\Omega'_{2\varepsilon}$ — пограничная полоска, свойство среднего

$$u(\mathbf{r})a(R) = \frac{1}{S_R} \oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})} u(\boldsymbol{\varrho}) dS_\varrho. \tag{9}$$

Пусть $\omega_\varepsilon(|\mathbf{r} - \boldsymbol{\varrho}|) = \omega_\varepsilon(R)$ — усредняющее ядро с радиусом усреднения ε (см. [9], с. 29). Обе части равенства (9) умножим на $S_R \omega_\varepsilon(R) dR$ и проинтегрируем по R от 0 до ε:

$$u(\mathbf{r}) \int\limits_0^\varepsilon a(R) S_R \omega_\varepsilon(R) dR = \int\limits_0^\varepsilon \oint\limits_{\Sigma_R(\mathbf{r})} u(\boldsymbol{\varrho}) dS_\varrho \omega_\varepsilon(R) dR = \int\limits_{U_\varepsilon(\mathbf{r})} u(\boldsymbol{\varrho}) \omega_\varepsilon(R) dV_\varrho.$$

Вне шара $U_\varepsilon(\mathbf{r})$ усредняющее ядро $\omega_\varepsilon(R) = 0$, поэтому, обозначая

$$\int\limits_0^\varepsilon a(R) S_R \omega_\varepsilon(R) dR \equiv C(\varepsilon),$$

имеем

$$C(\varepsilon) u(\mathbf{r}) = \int\limits_\Omega u(\boldsymbol{\varrho}) \omega_\varepsilon(R) dV_\varrho, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega' \setminus \Omega'_{2\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что $u \in C^\infty(\Omega' \setminus \Omega'_{2\varepsilon})$ и, так как ε произвольно мало, то $u \in C^\infty(\Omega')$. В силу же произвольности $\Omega' \subseteq \Omega$ следует, что $u \in C^\infty(\Omega)$. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 и теоремы 2 следует

Теорема 3. *При условиях леммы 2 функция $u \in C^0(\Omega)$ является решением уравнения Гельмгольца* (3) *в* Ω.

Замечание 1. Предложенный подход можно распространить и на случай неоднородного уравнения Гельмгольца.

Замечание 2. В монографии [6] (с. 21, 22) доказана сильная обратная теорема для уравнения (3) при некоторых ограничениях на область Ω и значения k^2. В доказанной выше обратной теореме 2 нет таких ограничений, она является не сильной, но и не слабой.

Авторы благодарны рецензенту за замечания, улучшившие содержание статьи.

Список литературы

[1] Курант Р. *Уравнения с частными производными.* Мир, М., 1964.

[2] Михлин С. Г. *Проблема минимума квадратичного функционала.* Гостехиздат, М., 1952.

[3] Diaz J. B., Payne L. E. On a mean value theorem, and its converse, for the displacements in the theory of elastisity. *Portugaliae mathematica*, **17**, Fasc. 4, 1958, 123–126.

[4] Наумов В. В. Теоремы о среднем для уравнения гармонических колебаний упругого тела. В *“Динамика сплошной среды”*, вып. 82, ИГИЛ СО АН СССР, Новосибирск, 1987, 147–153.

[5] Сабельфельд К. К. *Методы Монте-Карло в краевых задачах.* Наука, Новосибирск, 1989.

[6] Sabelfeld K. K., Shalimova I. A. *Spherical means for PDEs.* VSP, Utrecht, 1997.

[7] Bramble J. H., Payne L. E. Some converses of mean value theorems in the theory of elastisity. *J. of Mathemat. Anal. and Appl.*, **10**, No. 3, 1965, 553–567.

[8] Половинкин И. П. К теореме о среднем для волнового уравнения. *Неклассические уравнения математической физики.* Новосиб. гос. ун-т, 1993, 50–62.

[9] Михлин С. Г. *Линейные уравнения в частных производных.* Высшая школа, М., 1977.

Поступила в редакцию 11 июня 1997 г.,
в переработанном виде 31 января 1998 г.