Синтез многомерных банков фильтров с четным носителем*

М. К. Чобану
Московский энергетический институт, Россия
e-mail: cmk2@orc.ru

The main features of multidimensional non-separable multirate systems with perfect reconstruction and linear phase properties are investigated. For different types of symmetry all possible combinations of filter sizes were found, including those with even support.

Generalized multidimensional non-separable transform was developed that allows building of multidimensional filter banks with even support. Examples of these filter banks are given.

Введение

Многомерные банки фильтров

Анализ и синтез многомерных (ММ) систем нуждаются в решении теоретических и прикладных проблем, возникающих в непрерывно растущих требованиях многих приложений. Одна из наиболее перспективных областей применения ММ-методов — многоскоростные системы для сжатия, восстановления сигналов, их очистки от шумов и др. Результативность методов сжатия далека от окончательных пределов, наложенных глубинной структурой источников данных, таких как видеосигналы, изображения или акустические явления, и усилия, приложенные для его улучшения, особенно в определенных приложениях, должны окупиться с лихвой. Понимание проблемы сжатия для этого типа данных подразумевает знание основ их моделирования и аппроксимации. В свою очередь это может быть полезным для многих других задач, включая классификацию, подавление шумов, интерполяцию и сегментацию.

Одним из основных средств обработки сигналов является линейное преобразование. Субполосное кодирование как частный случай линейного преобразования имеет многочисленные полезные свойства. В многоскоростных системах оно реализуется путем свертки сигнала с несколькими полосовыми фильтрами и децимацией результата [1 – 3]. Совокупность набора фильтров с дециматорами называется банком фильтров (БФ). В банке анализа каждый получившийся в результате преобразования сигнал несет в себе информацию о спектральной составляющей исходного сигнала при некотором пространственном (временно́м) масштабе. Для обратного синтеза сигнала (его

*Работа выполнена при содействии совместного гранта Российского фонда фундаментальных исследований и японского общества JSPS № 06-07-91751-ЯФ_а.

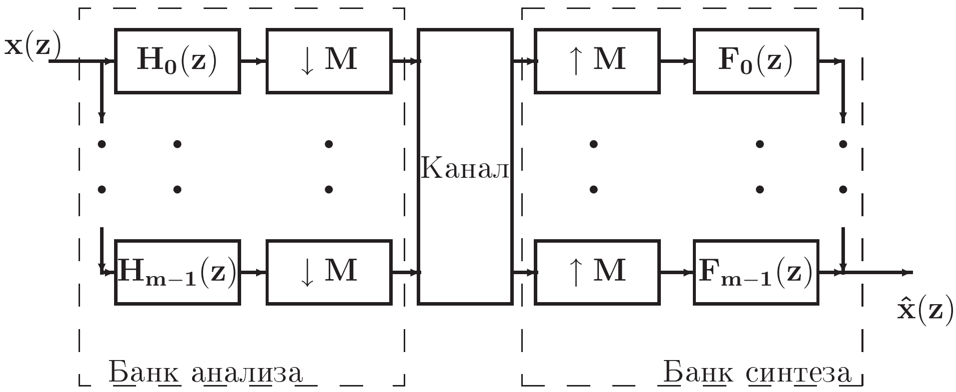


Рис. 1. Многомерная m-канальная многоскоростная система

реконструкции) выполняются операция интерполяции субполосных сигналов, фильтрация и их сложение.

На рис. 1 показана многоскоростная система [3]. Банк анализа (БА) состоит из фильтров $H_i(z_1, \ldots, z_D)$ и дециматоров $\downarrow \mathbf{M}$, банк синтеза (БС) — из фильтров $F_i(z_1, \ldots, z_D)$ и интерполяторов $\uparrow \mathbf{M}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, где $\mathbf{M}$ — матрица децимации, D — число измерений сигнала. Число каналов многоскоростной системы равно $m = |\det \mathbf{M}|$.

Входной сигнал $x(z_1, \ldots, z_D)$ поступает на вход БА и на вход фильтров $H_i(z_1, \ldots, z_D)$, а потом прореживается (децимируется) в соответствии с матрицей децимации $\mathbf{M}$. На выходе БА получается m подполосовых сигналов, которые далее попадают в канал передачи сигнала, где они могут кодироваться, квантоваться, сжиматься и т. д. После канала передачи данных обработанные подполосовые сигналы поступают в БС, где сначала происходит интерполяция сигналов, а затем их фильтрация. Восстановленный сигнал $\hat{x}$ — это сумма подполосовых сигналов на выходе банка синтеза.

Важным блоком многоскоростной системы является блок децимации. В то время как осуществление одномерной децимации может быть выполнено единственным способом, в случае двух или более измерений это не так. Многомерная децимация представлена решеткой, которая может быть разделимой или неразделимой.

Другой важный блок — цифровые фильтры. Синтез ММ цифровых фильтров для многоскоростных систем включает учет проектных ограничений, таких как, например, ортогональность, линейная фаза, регулярность и др. Фильтры сами по себе могут быть как разделимыми, так и неразделимыми, независимо от вида решетки. Возможно иметь все комбинации разделимых/неразделимых операций при осуществлении децимации/фильтрации полифазных компонентов (см. о полифазном представлении в [3, 4]). Неразделимые системы более сложны. И разделимые, и неразделимые фильтры могут иметь неразделимые полифазные компоненты. Изначально для любых разделимых или неразделимых полифазных компонентов можно получить неразделимый фильтр. Исторически первыми возникли разделимые ММ-системы. Только в последние 15 лет стали появляться неразделимые системы.

В большинстве предыдущих работ по двух- и трехмерной многоскоростной обработке сигналов использовалась разделимая децимация и все операции выполнялись по каждому измерению в отдельности. Основная причина применения разделимых операций — простота реализации и отсутствие наработок в области синтеза неразделимых систем. Неразделимые операции с использованием недиагональных матриц децимации, такие как уменьшение/увеличение размера изображения, сжатие изображений, очистка от шумов, очень важны и с теоретической, и с практической точек зрения. Неразделимые операции, которые включают разделимые операции как частный случай, предполагают большую гибкость и лучшие характеристики, что требуется в некоторых приложениях [5 – 7]. Например, системы, которые состоят из 1-D двухканальных БФ, не всегда могут иметь решения, где бы совмещались такие крайне необходимые свойства, как линейная фаза и ортогональность. Чтобы преодолеть все эти недостатки, требуется неразделимый БФ.

Методы синтеза ММ-банков фильтров

Всего можно выделить пять групп методов синтеза многомерных цифровых фильтров для многоскоростных систем:

1) полиномиальные методы;
2) преобразование переменных;
3) структурные методы;
4) представление в пространстве состояний;
5) оптимизационные методы.

Приведенная классификация довольна условна. В данной работе предложен метод преобразования, позволяющий синтезировать ММ цифровые фильтры с четным носителем. При этом интенсивно используются различные полиномиальные методы.

Преобразование переменных

Преобразование МакКлеллана — эффективная и весьма гибкая методика для проектирования ММ БФ [6, 8–10]. Преобразование позволяет проектировать регулярные неразделимые ММ-фильтры и вейвлет-базисы, поскольку достаточно просто задавать нули заданного порядка (в полосе задерживания) для фильтров, построенных по данной методике. Известны различные методы, которые связаны с применением преобразования МакКлеллана [11].

Видоизмененная методика проектирования ММ БФ была предложена в работах [12, 13]. Метод может использоваться для произвольного числа каналов. Однако применение данного преобразования одномерного к многомерному, включающее метод разделимых полифазных компонентов, не обеспечивает выполнения свойства точного восстановления сигнала (ТВС) для фильтров с конечным носителем так, как это имеет место для преобразования МакКлеллана. Последний сохраняет ТВС, как и нули, на граничных частотах наложения и работает только для фильтров с нулевой фазой [6, 9, 10, 12].

Следуя логике выбранного пути, преобразования МакКлеллана хорошо работают с 1-D симметричными фильтрами с нечетной длиной. Преобразование 1-D БФ с ТВС с нечетной длиной дает ММ БФ со свойством ТВС. Но это преобразование, однако, не работает с 1-D симметричными фильтрами с четной длиной. В [14] показано, что расширенное преобразование дает ММ БФ, которые не удовлетворяют свойству ТВС. В данной работе предложен новый подход, который позволяет преобразовывать 1-D симметричный БФ с четной длиной в ММ БФ. Это преобразование сохраняет свойство ТВС. Преобразованные ММ-фильтры имеют ЛФ, если исходные фильтры также имеют свойство ЛФ. В разд. 1.2.3 доказано, что этот метод работает не для всех матриц децимации. Например, для шахматной матрицы децимации не существует пары фильтров, имеющих четный носитель.

Вопросы синтеза банков фильтров, которые состоят из фильтров с четным носителем, весьма важны. Как было замечено в [15], фильтры с четным носителем имеют при обработке изображений в целом лучшие характеристики, чем фильтры с нечетным носителем, так как при этом удается избежать некоторых проблем, связанных с тем, что многоскоростные системы не являются инвариантными к сдвигу системами. Фильтры с ЛФ с четным носителем ведут к синтезу симметричных вейвлетов. Также необходимо заметить, что фильтры с четным носителем могут реализовать задержку на половину периода дискретизации, что очень важно, например, при синтезе преобразователей Гильберта и комплексных вейвлетов [16].

В данной работе исследуются особенности многомерных неразделимых многоскоростных систем, обладающих свойством точного восстановления сигнала и имеющих линейную фазу, приводятся известные и сформулированы новые свойства таких систем. Для разных типов симметрии многомерных неразделимых импульсных характеристик фильтров с линейной фазой впервые найдены все возможные сочетания размеров фильтров, включая случай четного носителя. Впервые аналитически разработано обобщенное многомерное неразделимое преобразование, позволяющее строить многомерные банки фильтров с четным носителем на основе заданных фильтров-прототипов, в отличие от известного преобразования МакКлеллана, в результате применения которого банки фильтров могут иметь только нечетный носитель, приводятся примеры синтеза таких банков фильтров.

1. Свойства многомерных банков фильтров

В [17] были введены понятия классов смежности для заданной ММ-решетки. Определим m различных классов смежности, которые соответствуют различным целочисленным векторам единичной ячейки $\mathbf{k}_i \in \mathcal{UC}(\mathbf{M})$, $i = 0, \ldots, m-1$, для $\mathcal{UC}(\mathbf{M}) = \left\{\sum\limits_{i=0}^{m-1} \lambda_i \mathbf{u}_i;\ \lambda_i \in [0,1)\right\}$, где $\mathbf{u}_i$ — это столбцы матрицы децимации $\mathbf{M}$, $m = |\det \mathbf{M}|$.

Аналогично можно определить m различных классов смежности, которые соответствуют различным целочисленным векторам $\mathbf{l}_i \in \mathcal{UC}(\mathbf{M}^T)$, $i = 0, \ldots, m-1$, для $\mathcal{UC}(\mathbf{M}^T) = \left\{\sum\limits_{i=0}^{m-1} \lambda_i \mathbf{v}_i;\ \lambda_i \in [0,1)\right\}$, где $\mathbf{v}_i$ — столбцы $\mathbf{M}^T$.

Пусть уравнение $[\mathbf{H}(\mathbf{z})]_{ij} = H_{i,j}(\mathbf{z})$ представляет собой полифазную матрицу банка анализа [3], у которой $(k,\, i)$-элемент $H_{k,i}$ определяется с помощью полифазного разложения 1-го типа:

$$\mathbf{H}_k(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{z}^{-\mathbf{k}_i} H_{k,i}(\mathbf{z}^{\mathbf{M}}), \tag{1}$$

где $k = 0, \ldots, m-1$ — номер подполосы и соответствующего фильтра, вектор $\mathbf{k}_i$ соответствует i-му классу смежности. Полифазная матрица банка синтеза равна $[\mathbf{F}(\mathbf{z})]_{ij} = F_{j,m-1-i}(\mathbf{z})$, а $(k,\, i)$-элемент $\mathrm{F}_{k,i}$ определяется с помощью полифазного разложения 2-го типа:

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{z}^{\mathbf{k}_i} F_{k,i}(\mathbf{z}^{\mathbf{M}}).$$

Таким образом, получаем две ММ полиномиальные полифазные матрицы:

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} H_{00}(\mathbf{z}) & H_{01}(\mathbf{z}) & \cdots & H_{0(m-1)}(\mathbf{z}) \\ H_{10}(\mathbf{z}) & H_{11}(\mathbf{z}) & \cdots & H_{1(m-1)}(\mathbf{z}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{(m-1)0}(\mathbf{z}) & H_{(m-1)1}(\mathbf{z}) & \cdots & H_{(m-1),(m-1)}(\mathbf{z}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} F_{0(m-1)}(\mathbf{z}) & F_{1(m-1)}(\mathbf{z}) & \cdots & F_{(m-1),(m-1)}(\mathbf{z}) \\ F_{0(m-2)}(\mathbf{z}) & F_{1(m-2)}(\mathbf{z}) & \cdots & F_{(m-1),(m-2)}(\mathbf{z}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{00}(\mathbf{z}) & F_{10}(\mathbf{z}) & \cdots & F_{(m-1)0}(\mathbf{z}) \end{bmatrix}.$$

Определим модуляционные матрицы банков анализа и синтеза как [18]:

$$[\mathcal{H}(\mathbf{z})]_{pq} = H_p(\mathbf{z} \circ e^{j2\pi \mathbf{l}_q^T \mathbf{M}^{-1}}),\ [\mathcal{F}(\mathbf{z})]_{pq} = F_q(\mathbf{z} \circ e^{j2\pi \mathbf{l}_p^T \mathbf{M}^{-1}}), \tag{2}$$

где $p, q = 0, \ldots, m-1$. Обозначение $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ используется для покоординатного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$, а обозначение $e^{j2\pi \mathbf{f}^T}$ равно вектору $\left(e^{j2\pi f_1}, \ldots, e^{j2\pi f_n}\right)$, если $\mathbf{f}^T = (f_1, \ldots, f_n)$.

Связь между модуляционными и полифазными матрицами устанавливается с помощью равенств:

$$\mathcal{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{H}(\mathbf{z}^{\mathbf{M}}) \cdot \Gamma_1(\mathbf{z}), \quad \text{где} \quad [\Gamma_1(\mathbf{z})]_{pq} = \mathbf{z}^{\mathbf{k}_p} e^{j2\pi \mathbf{l}_q^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{k}_p},$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \Gamma_2(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{z}^{\mathbf{M}}), \quad \text{где} \quad [\Gamma_2(\mathbf{z})]_{pq} = \mathbf{z}^{\mathbf{k}_{m-1-q}} e^{j2\pi \mathbf{l}_p^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{k}_{m-1-q}}.$$

1.1. Условие точного восстановления сигнала

В терминах полифазных матриц банка анализа $\mathbf{H}(\mathbf{z})$ и банка синтеза $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ условие ТВС записывается в виде $\mathbf{F}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{z}^{\mathbf{N}}$, где $\mathbf{N}$ — ММ-сдвиг. Для **КИХ** банков фильтров, полифазная матрица БС $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ и полифазная матрица БА $\mathbf{H}(\mathbf{z})$ являются полифазными матрицами БФ со свойством ТВС тогда и только тогда, когда $\det \mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{p}^T}$ — моном. Отсюда следует, что для двухканальных систем

$$H_{00}(\mathbf{z}) H_{11}(\mathbf{z}) - H_{01}(\mathbf{z}) H_{10}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{p}^T}. \tag{3}$$

Свойство 1. *Полифазные компоненты $H_0(\mathbf{z})$ не имеют общих корней за исключением $(z_1, z_2) = (0, \gamma)$ или $(\gamma, 0)$ тогда и только тогда, когда не существуют $\alpha \neq 0$ и/или $\beta \neq 0$ такие, что $H_0(\alpha, \beta) = H_0(-\alpha, -\beta) = 0$.*

Необходимым и достаточным условием для ТВС будет равенство $\mathcal{F}(\mathbf{z}) \cdot \mathcal{H}(\mathbf{z}) = m \cdot \Lambda(\mathbf{z})$, где

$$\Lambda(\mathbf{z}) = \mathrm{Diag}\left[\mathbf{z}^{\mathbf{r}} e^{j2\pi \mathbf{l}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}}, \mathbf{z}^{\mathbf{r}} e^{j2\pi \mathbf{l}_1^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}}, \cdots, \mathbf{z}^{\mathbf{r}} e^{j2\pi \mathbf{l}_{m-1}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}}\right].$$

Здесь $\mathbf{r}$ — это сдвиг между выходным и входным сигналами: $\mathbf{Y}(\mathbf{n}) = \mathbf{X}(\mathbf{n} - \mathbf{r})$. В одномерном случае это условие приведено в [19].

Для КИХ фильтров следующие условия эквивалентны существованию модуляционной и полифазной матриц банков анализа и синтеза, таких, что выполняется условие ТВС (в работе [19] приводится одномерный аналог):

1) $\mathcal{F}(\mathbf{z}) \cdot \mathcal{H}(\mathbf{z}) = m \cdot \Lambda(\mathbf{z})$;
2) $\mathbf{F}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{I}$;
3) $\det(\mathbf{H}(\mathbf{z})) = \mathbf{z}^{\mathbf{p}^T}$.

Необходимо отметить, что матрицы $\Gamma_i(\mathbf{z})$ связаны следующим образом:

— $\tilde{\Gamma}_1(\mathbf{z}) \cdot \Gamma_1(\mathbf{z}) = m\mathbf{I}$, где "парасопряжение" полиномиальной матрицы $\Gamma_1(\mathbf{z})$ означает, что $\tilde{\Gamma}_i(\mathbf{z}) = \Gamma_i^{*T}(\mathbf{z}^{-1})$, а знак $*$ говорит о комплексном сопряжении всех коэффициентов матрицы;

— $\tilde{\Gamma}_2(\mathbf{z}) \cdot \Gamma_2(\mathbf{z}) = m\mathbf{I}$;

— для одномерных фильтров, для которых выполняется условие $r = Mm + M - 1$, также выполняется равенство $\tilde{\Gamma}_2(\mathrm{z}) \cdot \Lambda(\mathrm{z}) \cdot \Gamma_1(\mathrm{z}) = z^{mM} m\mathbf{I}$. Для ММ-случая равенство выглядит следующим образом:

$$\left[\tilde{\Gamma}_2(\mathbf{z}) \cdot \Lambda(\mathbf{z}) \cdot \Gamma_1(\mathbf{z})\right]_{pq} = \mathbf{z}^{\mathbf{r}-\mathbf{k}_{m-1-p}-\mathbf{k}_q} \sum_{i=0}^{m-1} e^{j2\pi \mathbf{l}_i^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{k}_{m-1-p}-\mathbf{k}_q)}.$$

Как известно из [20], можно вычислить сумму

$$\sum_{i=0}^{m-1} e^{j2\pi \mathbf{l}_i^T \mathbf{M}^{-1}\mathbf{n}} = \begin{cases} m, & \text{если } \mathbf{n} \equiv 0\,(\mathrm{mod}\mathbf{M}), \\ 0, & \text{если } \mathbf{n} \neq 0\,(\mathrm{mod}\mathbf{M}). \end{cases}$$

Поэтому если $\mathbf{r} - \mathbf{k}_{m-1-p} - \mathbf{k}_q = \mathbf{Mq}$ или $\mathbf{r} - \mathbf{k}_{m-1-p} - \mathbf{k}_q \equiv 0(\mathrm{mod}\mathbf{M})$, то сумма равна $m\mathbf{z}^{\mathbf{Mq}}$, а при $\mathbf{r} - \mathbf{k}_{m-1-p} - \mathbf{k}_q = \mathbf{Mq} + \mathbf{k}_l$, $l \neq 0$, сумма равна 0.

В силу того, что вектор $\mathbf{r} - \mathbf{k}_{m-1-p} - \mathbf{k}_q$ при фиксированном значении p (в p-й строке) пробегает для $q = 0, 1, \ldots, m-1$ все m возможных различных классов смежности, включая нулевое значение, должно существовать единственное значение q, для которого $\mathbf{r} - \mathbf{k}_{m-1-p} - \mathbf{k}_q \equiv 0(\mathrm{mod}\mathbf{M})$. Зафиксируем данное значение q и будем менять значение параметра $p = 0, 1, \ldots, m-1$ (в q-м столбце). Рассуждая аналогично, можно показать, что существует и единственное значение p, для которого $\mathbf{r} - \mathbf{k}_{m-1-p} - \mathbf{k}_q \equiv 0(\mathrm{mod}\mathbf{M})$. Таким образом, в каждой строке и в каждом столбце матрицы $\tilde{\Gamma}_2(\mathbf{z}) \cdot \Lambda(\mathbf{z}) \cdot \Gamma_1(\mathbf{z})$ имеется единственный ненулевой элемент.

1.2. Фильтры с линейной фазой

1.2.1. Линейная фаза и групповая задержка

Пусть $g(\mathbf{x})$ — ММ-фильтр, а его частотная характеристика равна $G(\mathbf{f}) = |G(\mathbf{f})| e^{j\Phi(\mathbf{f})}$, где $G(\mathbf{f})$ — преобразование Фурье $g(\mathbf{x})$ [21, 22]. Фильтр имеет линейную фазу (ЛФ), если групповая задержка

$$\tau_G(\mathbf{f}) = -\frac{d}{2\pi d\mathbf{f}} \Phi(\mathbf{f})$$

постоянна в каждой точке непрерывности фазы $\Phi(\mathbf{f})$. Фаза определена по модулю 2π и может иметь разрывы в нулях $G(\mathbf{f})$.

Каждый фильтр, определенный на решетке Γ так, что

$$g(-\mathbf{x} + \mathbf{c}) = Sg(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad S \in \{\pm 1\} \ \text{ и } \mathbf{c} \in \Gamma, \tag{4}$$

имеет линейную фазу. В этом случае групповая задержка будет равна $\tau_G(\mathbf{f}) = \dfrac{1}{2}\mathbf{c}$ и представляет собой центр симметрии импульсной характеристики (ИХ) фильтра $g(\mathbf{x})$.

1.2.2. Четыре типа фильтров с линейной фазой

Известны четыре типа фильтров (по (1-D)-обработке сигналов) с ЛФ [23]. Центр симметрии КИХ фильтра с ЛФ $\frac{1}{2}\mathbf{c} \in \frac{1}{2}\Gamma$ может быть, а может и не быть элементом решетки Γ.

1. Типы I и III.

Центр симметрии принадлежит Γ. Таким образом, $\frac{1}{2}\mathbf{c} \in \Gamma$, что эквивалентно $\mathbf{c} \in 2\Gamma$.

2. Типы II и IV.

Центр симметрии не принадлежит Γ, но принадлежит $\frac{1}{2}\Gamma$. Таким образом, $\mathbf{c} \in \Gamma \backslash 2\Gamma$.

Фильтр будет симметричным, если $S = 1$, и антисимметричным, если $S \neq 1$. Поэтому имеется четыре различных типа ММ КИХ фильтров с ЛФ.

Любой 1-D КИХ фильтр с ЛФ может иметь некоторые нули в частотной области. Та же ситуация наблюдается и в ММ-случае. Эти нули зависят от выбора нужного типа согласно приложению. Расположение нулей будет следующим.

Типы I и II: нули для $\mathbf{f} \in {}^1\!/_2\Gamma^*$ такие, что $2\mathbf{f}^T\mathbf{c}$ является нечетным.

Типы III и IV: нули для $\mathbf{f} \in {}^1\!/_2\Gamma^*$ такие, что $\mathbf{f}^T\mathbf{c}$ является целочисленным (что включает $\mathbf{f} = 0$, так что это — плохие НЧ-фильтры).

1.2.3. Центры симметрии и типы фильтров

Фильтр $H_k(\mathbf{z})$ обладает ЛФ, если

$$H_k(\mathbf{z}) = \pm \mathbf{z}^{\mathbf{n}_k} H_k(\mathbf{z}^{-1}), \tag{5}$$

или в частотной области — $H_k(\mathbf{w}) = \pm e^{j\mathbf{w}\mathbf{n}_k^T} H_k(-\mathbf{w})$ для целочисленного вектора $\mathbf{n}_k$. Говорят, что фильтр $H_k(\mathbf{z})$ имеет индекс $\mathbf{n}_k$ (или $Ind(H_k(\mathbf{z}))$).

Определение 1.

1. Полином A(z) является симметричным-(анти)симметричным с индексом $\boldsymbol{n}$*, если удовлетворяется равенство* $A(\mathbf{z}) = \pm \mathbf{z}^{\mathbf{n}} A(\mathbf{z}^{-1})$*; полиномы P(z) и Q(z) являются кросс(анти)симметричными с индексом* $\boldsymbol{m}$*, если удовлетворяется равенство* $P(\mathbf{z}) = \pm \mathbf{z}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{z}^{-1})$.

2. Полиномы $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = (h_1(\mathbf{z}), \ldots, h_n(\mathbf{z}))$ *и* $\mathbf{h}'(\mathbf{z}) = (h_1'(\mathbf{z}), \ldots, h_n'(\mathbf{z}))$ *называются структурно-подобными, если равенство* $h_i(\mathbf{z}) = \pm \mathbf{z}^{\mathbf{n}} h_j(\mathbf{z}^{-1})$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $h_i'(\mathbf{z}) = \pm \mathbf{z}^{\mathbf{n}} h_j'(\mathbf{z}^{-1})$ *или* $h_i'(\mathbf{z}) = \mp \mathbf{z}^{\mathbf{n}} h_j'(\mathbf{z}^{-1})$.

3. Полиномы называются индексно подобными, если в дополнение к тому, что они структурно-подобные, для всех i и j выполняются также равенства $Ind(h_i(\mathbf{z})) - Ind(h_j(\mathbf{z})) = Ind(h_i'(\mathbf{z})) - Ind(h_j'(\mathbf{z}))$.

Весь банк фильтров удовлетворяет свойству ЛФ, если все его подполосовые фильтры $H_k(\mathbf{z})$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ имеют линейную фазу. Если для всех этих фильтров можно найти такие целочисленные векторы $\mathbf{m}_k$, что равенство

$$\mathbf{n}_k^T = \mathbf{m}_k^T \mathbf{M} + \mathbf{k}_l^T \tag{6}$$

выполняется для всех $k = 0, 1, \ldots, m-1$, то банк фильтров имеет **тип** $\mathbf{k}_l$.

В терминах модуляционных матриц условие ЛФ записывается в виде

$$\mathcal{H}(\mathbf{z}) = D \cdot \Omega_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{z}) \cdot \tilde{\mathcal{H}}^T(\mathbf{z}) \cdot \mathcal{W},$$

где диагональная матрица D состоит из элементов, равных ± 1, $\Omega_{\mathbf{n}_k} = \mathrm{Diag}\left[e^{j\mathbf{w}\mathbf{n}_0^T},\right.$ $\left.e^{j\mathbf{w}\mathbf{n}_1^T}, \cdots, e^{j\mathbf{w}\mathbf{n}_{m-1}^T}\right]$, $\mathcal{W}(\mathbf{w}) = \mathrm{Diag}\left[1,\ e^{j\mathbf{w}\mathbf{k}_1^T}, \cdots, e^{j\mathbf{w}\mathbf{k}_{m-1}^T}\right]$.

В терминах полифазных матриц условие ЛФ записывается в следующем виде [18]:

$$\mathbf{H}(\mathbf{wM}) = D \cdot \Omega_{\mathbf{n}_k} \cdot \mathbf{H}(-\mathbf{wM}) \cdot \mathcal{W}(-\mathbf{w}) \cdot \Delta_l \cdot \mathcal{W}(-\mathbf{w}), \tag{7}$$

где $\Delta_l = \dfrac{1}{m}\mathcal{W}_d^* \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{W}_d^*$, $\mathcal{W}_d$ — это матрица ММ дискретного преобразования Фурье для матрицы децимации $\mathbf{M}$: $[\mathcal{W}_d]_{ij} = e^{-j2\pi \mathbf{l}_j^T \mathbf{M}^{-1}\mathbf{k}_i}$,

$$\mathcal{W}(\mathbf{w}) = \mathrm{Diag}\left[1,\ e^{j\mathbf{w}\mathbf{k}_1^T}, \cdots, e^{j\mathbf{w}\mathbf{k}_{m-1}^T}\right],$$

$$\mathcal{L} = \mathrm{Diag}\left[1,\ e^{-j2\pi \mathbf{l}_1^T \mathbf{M}^{-1}\mathbf{k}_l}, \ldots, e^{-j2\pi \mathbf{l}_{m-1}^T \mathbf{M}^{-1}\mathbf{k}_l}\right],$$

$$\Omega_{\mathbf{n}_k} = \mathrm{Diag}\left[e^{j\mathbf{w}\mathbf{n}_0^T},\ e^{j\mathbf{w}\mathbf{n}_1^T}, \cdots, e^{j\mathbf{w}\mathbf{n}_{m-1}^T}\right].$$

Матрица Δ_l в одномерном случае является левосторонней циркулянтной матрицей, у которой первая строка равна $\left\{\delta_l, \delta_{l-1}, \cdots, \delta_{l-(m-1)}\right\}$. Определитель Δ_l равен 1 либо -1 в зависимости от $\mathbf{k}_l$.

Для выполнения свойства ЛФ необходимо выполнение целого ряда условий. Среди них самыми важными являются следующие [18].

Свойство 2.

1. Если выполняется свойство ТВС (см. 1.1), то $\det H(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{p}^{\mathbf{T}}}$, *где* $\mathbf{p}$ *— это неотрицательный целочисленный вектор. Если фильтры обладают свойством ЛФ, то (необходимое условие)*

$$\sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{n}_i^T = 2\left(\mathbf{p}^T\mathbf{M} + \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{k}_i^T\right). \tag{8}$$

2. Если m *нечетное число, то число симметричных фильтров превосходит число антисимметричных фильтров на единицу для всех* $\mathbf{k}_l$.

3. Если m *четное число, то в двумерном случае число симметричных фильтров превосходит число антисимметричных фильтров на 0, или на 2, или на 4. Для большей размерности пока нет однозначных выводов.*

Для **шахматной** матрицы децимации $\mathbf{M} = \mathbf{V}_{\mathrm{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ всего имеются два канала, так как $m = 2$. Два класса смежности описываются векторами $\mathbf{k}_0 = (0, 0)$ и $\mathbf{k}_1 = (1, 0)$. Пусть индексы фильтров банка анализа будут равны $Ind(H_0) = \mathbf{n}_0 = (n_{00}, n_{01})$ и $Ind(H_1) = \mathbf{n}_1 = (n_{10}, n_{11})$. Тогда

$$H_k(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{k}_0^T} H_{k,0}(\mathbf{z}^{\mathbf{M}}) + \mathbf{z}^{\mathbf{k}_1^T} H_{k,1}(\mathbf{z}^{\mathbf{M}}), \tag{9}$$

где $\mathbf{z}^{\mathbf{M}} = (z_1 z_2, z_1 z_2^{-1})$.

Теорема 1.

1. Пусть банк фильтров имеет тип $\mathbf{k}_0 = (0,0)$*, а индекс* k*-го фильтра выражается как* $\mathbf{n}_k = \mathbf{M}\mathbf{m}_k + \mathbf{k}_0$*, где* $\mathbf{m}_k$ *— целочисленный вектор. Тогда полифазные компоненты каждого фильтра являются симметрично-(анти)симметричными, а именно:* $H_{k,0}(\mathbf{z}) = \pm\mathbf{z}^{\mathbf{m}_k^T} H_{k,0}(\mathbf{z}^{-1})$; $H_{k,1}(\mathbf{z}) = \pm\mathbf{z}^{(\mathbf{m}_k-(1,1))^T} H_{k,1}(\mathbf{z}^{-1})$.

2. Пусть банк фильтров имеет тип $\mathbf{k}_1 = (1,0)$*, а индекс* k*-го фильтра выражается как* $\mathbf{n}_k = \mathbf{M}\mathbf{m}_k + \mathbf{k}_1$*, где* $\mathbf{m}_k$ *— целочисленный вектор. Тогда полифазные компоненты каждого фильтра являются кросс-(анти)симметричными, а именно:* $H_{k,0}(\mathbf{z}) = \pm\mathbf{z}^{\mathbf{m}_k^T} H_{k,1}(\mathbf{z}^{-1})$.

Доказательство. Действительно, из (5) и из полифазного разложения (9) вытекает, что $H_{k,o}(\mathbf{z}) = \pm(\mathbf{z}^{\mathbf{n}_k^T}\cdot\ H_{k,0}(\mathbf{z}^{-\mathbf{M}}) + \mathbf{z}^{\mathbf{n_k}-\mathbf{k_1}_1^T} H_{k,1}(\mathbf{z}^{-\mathbf{M}}))$, откуда после подстановки $-\mathbf{k}_1 = -\mathbf{M}(1,1)^T + \mathbf{k}_1$ и вычитания из (9) получим, что $\{H_{k,0}(\mathbf{z}^{\mathbf{M}}) \mp \mathbf{z}^{\mathbf{M}\cdot\mathbf{m_k^T}} H_{k,0}(\mathbf{z}^{-\mathbf{M}})\} + \mathbf{z}_1^{\mathbf{k}}\{H_{k,1}(\mathbf{z}^{\mathbf{M}}) \mp \mathbf{z}^{\mathbf{M}\cdot\mathbf{m}_k-(1,1)^T} H_{k,1}(\mathbf{z}^{-\mathbf{M}})\} = 0$. Аналогично доказывается вторая часть свойства 1. Эти два свойства по сути являются выражением соотношения (7). $\square$

Из (9) вытекает, что для шахматной матрицы децимации выполняются условия, определенные двумя теоремами.

Теорема 2.

1. Если банк фильтров имеет тип $\mathbf{k}_0 = (0,0)$*, то оба фильтра симметричны.*

2. Если банк фильтров имеет тип $\mathbf{k}_1 = (1,0)$*, то один фильтр симметричный, а другой антисимметричный.*

Следующая теорема определяет условия синтеза фильтров с четным носителем.

Теорема 3.

1. Если банк фильтров имеет тип $\mathbf{k}_0 = (0,0)$*, то индексы каждого фильтра, а именно* $n_{k,0}$ *и* $n_{k,1}$ *для* $k = 0,1$*, всегда будут четными.*

2. Если банк фильтров имеет тип $\mathbf{k}_1 = (1,0)$*, то сумма частичных индексов обоих фильтров, соответствующих каждой переменной, а именно* $n_{0,k} + n_{1,k}$ *для* $k = 0,1$*, всегда будет четной.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{n}_k = (n_{k,0}, n_{k,1})$ для $k = 0,1$. Тогда для $\mathbf{V_Q}$ из (6) получим

$$n_{k,0} + n_{k,1} = \begin{cases} \mathbf{m}_k \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{если} \quad \mathbf{k}_l = \mathbf{k}_0, \\ \mathbf{m}_k \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1, & \text{если} \quad \mathbf{k}_l = \mathbf{k}_1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если $\mathbf{k}_l = \mathbf{k}_0$, то *оба* $n_{k,0}$ и $n_{k,1}$ будут либо четными, либо нечетными. Утверждается, что они могут быть только четными. Действительно, допустим обратное. Тогда в силу предполагаемой нечетности $\mathbf{n}_k$ и в силу симметрии $H_k(\mathbf{z}) = z_1^{n_1} z_2^{n_2} H_k(1/z_1, 1/z_2)$, $k = 0,1$, при подстановке в это уравнение $(z_1, z_2) = (1,-1)$ получим, что $H_k(1,-1) = 1^{n_1}(-1)^{n_2} H_k(1,-1) = -H_k(1,-1)$ или $H_k(1,-1) = 0$, $k = 0,1$. Однако, с другой стороны, в силу того, что выполняются свойство ТВС (см. 1.1) и свойство 1, то других *совместных* нулей, кроме $(\gamma,0)$ или $(0,\gamma)$, у H_k быть не может. Следовательно, для БФ типа $\mathbf{k}_0$ оба $n_{k,0}$ и $n_{k,1}$ будут четными.

Т а б л и ц а 1. Допустимые комбинации индексов для $Ind(H_k) = (n_{k,0}, n_{k,1})$

Тип БФ	Комбинации индексов со свойством ТВС			
	n_{00}	n_{01}	n_{10}	n_{11}
$\mathbf{k_0}$	Четное	Четное	Четное	Четное
$\mathbf{k_1}$	Четное	Нечетное	Четное	Нечетное
	Нечетное	Четное	Нечетное	Четное

Если же $\mathbf{k}_l = \mathbf{k}_1$, то в этом случае сумма частичных индексов обоих фильтров, соответствующих каждой переменной, а именно $n_{0,k}+n_{1,k}$ для $k = 0, 1$, всегда будет четной. Допустим обратное. Следуя свойству 2, фильтры имеют разный тип симметрии: один симметричен, другой антисимметричен. Без ограничения общности допустим, что $H_0(\mathbf{z})$ симметричен, а $H_0(\mathbf{z})$ антисимметричен. Тогда из свойства 1 следует, что $H_{0,0}(\mathbf{z^M}) = {z_1}^{n_{00}-1}{z_2}^{n_{01}}H_{0,1}(\mathbf{z^{-M}})$; $H_{1,0}(\mathbf{z^M}) = -{z_1}^{n_{10}-1}{z_2}^{n_{11}}H_{1,1}(\mathbf{z^{-M}})$. После подстановки в (3) значения $(z_1, z_2) = (1, -1)$ получим, что определитель полифазной матрицы для $\mathbf{z^M} = (-1, -1)$ будет равен $\det \mathbf{H}(-1, -1) = H_{0,0}(-1, -1) \times H_{1,1}(-1, -1) \times [1 - (-1)^{n_{01}+n_{11}+1}]$. Если сумма $n_{0,k} + n_{1,k}$ нечетная, тогда у определителя полифазной матрицы появляется еще один корень, кроме допускаемого нулевого, что противоречит условию ТВС. Поэтому указанная сумма индексов всегда четная. □

В табл. 1 приведены допустимые комбинации индексов для матрицы $\mathbf{V_Q}$.

1.3. Двухканальные банки фильтров

Свойство ТВС

Рассмотрим двухканальную многоскоростную систему. Следуя (2), получим, что выходным сигналом для таких многоскоростных систем будет [24, 25]:

$$\hat{X}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\left(X(\mathbf{z}) \cdot T_0(\mathbf{z}) + X(-\mathbf{z}) \cdot T_1(\mathbf{z})\right), \qquad (10)$$

где

$$T_0(\mathbf{z}) = H_0(\mathbf{z}) \cdot F_0(\mathbf{z}) + H_1(\mathbf{z}) \cdot F_1(\mathbf{z}),\ T_1(\mathbf{z}) = H_0(-\mathbf{z}) \cdot F_0(\mathbf{z}) + H_1(-\mathbf{z}) \cdot F_1(\mathbf{z}), \qquad (11)$$

или $\begin{bmatrix} H_0(\mathbf{z}) & H_1(\mathbf{z}) \\ H_0(-\mathbf{z}) & H_1(-\mathbf{z}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0(\mathbf{z}) \\ F_1(\mathbf{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0(\mathbf{z}) \\ T_1(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$. Здесь $H_0(\mathbf{z})$ и $H_1(\mathbf{z})$ — соответственно НЧ и ВЧ передаточные характеристики ММ-фильтров БА; $F_0(\mathbf{z})$ и $F_1(\mathbf{z})$ — НЧ и ВЧ передаточные характеристики ММ-фильтров БС соответственно; $X(\mathbf{z})$ и $X(\mathbf{z})$ — входной и выходной сигналы БА и БС; $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_D]^T$. Слагаемое $T_0(\mathbf{z})$ учитывает наличие амплитудных искажений сигнала $X(\mathbf{z})$, а $T_1(\mathbf{z})$ — наложение спектров.

Наложение спектров сигналов можно исключить введением определенных зависимостей между передаточными характеристиками фильтров БС [24, 26]. Чаще всего встречаются следующие два типа зависимостей:

1) $F_0(\mathbf{z}) = p(-1)^r H_1(-\mathbf{z})$, $F_1(\mathbf{z}) = p(-1)^{r+1} H_0(-\mathbf{z})$. Если $p = 1$, $r = 0$, то $H_1(\mathbf{z}) = F_0(-\mathbf{z})$, $F_1(\mathbf{z}) = -H_0(-\mathbf{z})$, и тогда (11) примет вид

$$T_0(\mathbf{z}) = H_0(\mathbf{z}) \cdot F_0(\mathbf{z}) - H_0(-\mathbf{z}) \cdot F_0(-\mathbf{z}); \qquad (12)$$

2) $F_0(\mathbf{z}) = -\mathbf{z^q} H_1(-\mathbf{z})$, $F_1(\mathbf{z}) = \mathbf{z^q} H_0(-\mathbf{z})$, где $q_1 + q_2 + \ldots + q_D$ — нечетное. Выбрав $q_1 = 1$, $q_2 = \ldots = q_D = 0$, получим $H_1(\mathbf{z}) = z_1^{-1} F_0(-\mathbf{z})$, $F_1(\mathbf{z}) = z_1 H_0(-\mathbf{z})$, и (11) примет

вид

$$T_0(\mathbf{z}) = H_0(\mathbf{z}) \cdot F_0(\mathbf{z}) + H_0(-\mathbf{z}) \cdot F_0(-\mathbf{z}). \tag{13}$$

Амплитудные искажения исключаются, если $T_0(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{-\mathbf{L}}$. Поэтому свойство ТВС достигается при выполнении следующих равенств [24, 27]:

— для (12) должно выполняться

$$H_0(\mathbf{z})H_1(-\mathbf{z}) - H_1(\mathbf{z})H_0(-\mathbf{z}) = H_0(\mathbf{z}) \cdot F_0(\mathbf{z}) - H_0(-\mathbf{z}) \cdot F_0(-\mathbf{z}) = 2 \cdot \mathbf{z}^{-\mathbf{L}}, \tag{14}$$

где $\mathbf{L} = [l_1, l_2, \ldots, l_D]^T$, причем $l_1 + l_2 + \ldots + l_D$ — нечетно;

— для (13) должно выполняться

$$H_0(\mathbf{z})H_1(-\mathbf{z}) - \mathbf{z}^{2\mathbf{q}}H_1(\mathbf{z})H_0(-\mathbf{z}) = H_0(\mathbf{z}) \cdot F_0(\mathbf{z}) + H_0(-\mathbf{z}) \cdot F_0(-\mathbf{z}) = 2 \cdot \mathbf{z}^{-\mathbf{L}}, \tag{15}$$

причем $l_1 + l_2 + \ldots + l_D$ — четное. В (14) члены с четными степенями сократятся и останутся члены с нечетными степенями. Поэтому сумма $l_1 + l_2 + \ldots + l_D$ может быть только нечетной. Аналогично показывается, что в (15) сумма $l_1 + l_2 + \ldots + l_D$ — четная.

2. Синтез многомерных банков фильтров с помощью метода преобразования

Методы синтеза ММ-фильтров с помощью преобразования МакКлеллана используются достаточно давно и успешно. Для построения банка фильтров необходимо располагать двумя объектами (далее рассматривается пример двухканальных систем с шахматной матрицей децимации):

1) одномерными фильтрами-прототипами

$$H_P(Z) = \sum_n h_p(n) Z^{-n}, \quad F_P(Z) = \sum_n f_p(n) Z^{-n}. \tag{16}$$

Для выполнения свойства ТВС данные фильтры-прототипы должны удовлетворять (см. (13)) $Q_P(Z) + Q_P(-Z) = 2$, где $Q_P(Z) = H_P(Z) F_P(Z)$;

2) ядром преобразования $Z = W(z_1, z_2)$, которое может быть в общем случае как КИХ, так и БИХ, и удовлетворяет свойству антисимметрии

$$W(z_1, z_2) = -W(-z_1, -z_2), \tag{17}$$

или, что то же самое, если $W(z_1, z_2) = \sum_{l_1} \sum_{l_2} w(l_1, l_2) z_1^{-l_1} z_2^{-l_2}$, то

$$w(l_1, l_2) = \begin{cases} 0 & \text{для } l_1 + l_2 = \text{четное}, \\ \text{произвольное} & \text{для } l_1 + l_2 = \text{нечетное}. \end{cases}$$

ВЧ-фильтры банков анализа и синтеза вычисляются как $H_1(z_1, z_2) = z_1^{-q_1} z_2^{-q_2} \times F_0(-z_1, -z_2)$, $F_1(z_1, z_2) = z_1^{q_1} z_2^{q_2} H_0(-z_1, -z_2)$, где $q_1 + q_2$ — нечетно.

Известно несколько типов получаемых банков фильтров.

— Преобразование W имеет нулевую фазу [6]. Чаще всего предлагается либо $W(z_1, z_2) = \dfrac{1}{4}\left(z_1 + \dfrac{1}{z_1} + z_2 + \dfrac{1}{z_2}\right)$, либо параметризованное через a, b преобразование [28]

$W(z_1,z_2) = \frac{1}{4}\,z_1 + \frac{1}{4}\,{z_1}^{-1} + \frac{1}{2}\,z_2 + \frac{1}{2}\,{z_2}^{-1} + \frac{1}{2}\,az_1 + \frac{1}{2}\,\frac{a}{z_1} - \frac{1}{32}\,b{z_1}^2 z_2 + \frac{1}{32}\,\frac{b{z_1}^2}{z_2} + \frac{1}{32}\,\frac{bz_2}{{z_1}^2} - \frac{1}{32}\,\frac{b}{{z_1}^2 z_2} - \frac{1}{32}\,b{z_2}^2 z_1 + \frac{1}{32}\,\frac{b{z_2}^2}{z_1} + \frac{1}{32}\,\frac{bz_1}{{z_2}^2} - \frac{1}{32}\,\frac{b}{{z_2}^2 z_1}.$

— Пары полуполосовых фильтров [9] $H_0 = \frac{1}{2}(1+W)$ и $F_0 = -\frac{1}{2}(W+1)(W-2)$.

— Сумма и разность всепропускающих фильтров $H_0 = \frac{1}{2}(1+W)$ и $H_1 = \frac{1}{2}(1-W)$, где W является всепропускающим фильтром [12]. Соответственно, если $F_0 = \frac{1}{2}(1+W)$ и $F_1 = -\frac{1}{2}(1-W)$, то $T_0(\mathbf{z})$ (см. (13)) — всепропускающий фильтр, а если $F_0 = \frac{1}{2}(1+W^{-1})$ и $F_1 = \frac{1}{2}(1-W^{-1})$, то система обладает свойством ТВС.

— Обобщенное преобразование переменных [9–11], когда фильтры-прототипы (16) имеют только положительные степени W. Само преобразование W может быть как КИХ, так и БИХ.

2.1. Четный носитель фильтра прототипа и свойство ТВС

Свойство ТВС

Пусть симметричный фильтр-прототип имеет нечетную длину, тогда его можно выразить в виде $H_P(Z)$ и $F_P(Z)$, где $Z = \frac{1}{2}(z+1/z)$. Тогда применение (17) позволит получить ММ-фильтр со свойством ТВС [9].

Данное преобразование работает достаточно хорошо, когда длины импульсных характеристик нечетные, а сами характеристики — симметричные. Получаемые в результате ММ импульсные характеристики также имеют нулевую фазу и нечетный носитель. Причем в этом случае свойство ТВС, присущее 1-D прототипу, сохраняется. Однако это же преобразование не работает для четных носителей одномерных прототипов. Как показано в [14], если использовать “простое” расширение фильтра-прототипа с нечетным носителем до четного умножением на $1+z_i$ по всем координатам или подобное ему преобразование, то в этом случае свойство ТВС теряется.

Для построения банков фильтров с четным носителем предлагается следующая процедура. Если можно выразить фильтры-прототипы в виде $H_P(Z) = \frac{1}{2}(1+z^{-1})U_H(Z)$ и $F_P(Z) = \frac{1}{2}(1+z)U_F(Z)$, где $U_H(Z)$, $U_F(Z)$ зависят от $Z = \frac{1}{2}(z+1/z)$, тогда их импульсные характеристики будут иметь центры симметрии соответственно в $c_H = 1/2$ и $c_F = -1/2$. Используя вариант (13), позволяющий записать выполнение свойства ТВС, получим, что в силу $H_P(Z)F_P(Z) + H_P(-Z)F_P(-Z) = 1$

$$\frac{(1+Z)}{2}U_H(Z)U_F(Z) + \frac{(1-Z)}{2}U_H(-Z)U_F(-Z) = 1. \tag{18}$$

Исходя из *вида* этого соотношения, предлагается ввести две функции $A(z_1,z_2)$ и $B(z_1,z_2)$, которые удовлетворяют соотношению $A(z_1,z_2)B(z_1,z_2) = \frac{1}{2}(1+W(z_1,z_2))$. Одновременно строятся НЧ-фильтры БА и БС в виде $H_0(z_1,z_2) = A(z_1,z_2)U_H(W(z_1,z_2))$ и $F_0(z_1,z_2) = B(z_1,z_2)\;U_F(W(z_1,z_2))$. Тогда выполняется следующая теорема.

Теорема 4. *Если для фильтра прототипа выполняется свойство ТВС, тогда и для пары H_0, F_0 выполняется свойство ТВС.*

Доказательство. Подставив H_0, F_0 в (13), получим, что

$$T_0(\mathbf{z}) = A(z_1,z_2)B(z_1,z_2)U_H(W(z_1,z_2))U_F(W(z_1,z_2)) + A(-z_1,-z_2)B(-z_1,-z_2)\times$$
$$\times U_H(-W(z_1,z_2))U_F(-W(z_1,z_2)) = \frac{1}{2}(1+W(z_1,z_2))U_H(W(z_1,z_2))U_F(W(z_1,z_2))+$$
$$+\frac{1}{2}(1-W(z_1,z_2))U_H(-W(z_1,z_2))U_F(-W(z_1,z_2)).$$

Сравнив с (18), сделав замену $Z = W(z_1,z_2)$ и учитывая ее антисимметрию, можно прийти к выводу, что для новой пары ММ-фильтров выполняется свойство ТВС. □

Свойство ЛФ

Если дополнительно потребовать, чтобы $W(z_1,z_2)$ имело нулевую фазу, а $U_H(z_1,z_2)$ и $U_F(z_1,z_2)$ имели ЛФ (и симметричные относительно нуля центры симметрии), то тогда построенная ММ-пара фильтров H_0, F_0 также имеет ЛФ. Действительно, если $A(z_1^{-1},z_2^{-1}) = \pm z_1^{r_1}z_2^{r_2}A(z_1,z_2)$, $B(z_1^{-1},z_2^{-1}) = \pm z_1^{-r_1}z_2^{-r_2}B(z_1,z_2)$, и тогда $W(z_1^{-1},z_2^{-1}) = W(z_1,z_2)$, то выполняется равенство $H_0(z_1^{-1},z_2^{-1}) = A(z_1^{-1},z_2^{-1})U_H(W(z_1^{-1},z_2^{-1})) = \pm z_1^{r_1}z_2^{r_2}A(z_1,z_2)U_H(W(z_1,z_2)) = \pm z_1^{r_1}z_2^{r_2}H_0(z_1,z_2)$. Если сравнить с (5), то получим, что фильтр H_0 имеет линейную фазу.

Для успешного синтеза ММ БФ с четным носителем необходимо сначала синтезировать пару фильтров (речь идет о двухканальных системах), каждый из которых является симметричным, удовлетворяет свойству ТВС и имеет четный носитель, т. е. $2k \times 2l$. Как следует из свойства 3, для шахматной матрицы децимации *не существует* пары фильтров со свойством ТВС, если они оба имеют четный носиитель.

Пусть фильтры $A(z_1,z_2), B(z_1,z_2)$ обладают свойством ТВС. Условие симметрии относительно $c_H = (1/2,1/2)$ и $c_F = -c_H = (-1/2,-1/2)$ (как того требует условие нулевой фазы для $W(z_1,z_2)$) можно записать следующим образом. Введем многочлены

$$E_0(z_1,z_2) = \sum_{i=-N_H}^{N_H}\sum_{j=0}^{M_H} a_{i,j}z_1^{-i}z_2^{-j}, \quad D_0(z_1,z_2) = \sum_{i=-N_F}^{N_F}\sum_{j=-M_F}^{0} b_{i,j}z_1^{-i}z_2^{-j}.$$

Тогда фильтры $U_H(z_1,z_2), U_F(z_1,z_2)$, обладающие требуемыми центрами симметрии, можно записать в виде

$$\begin{gathered} A(z_1,z_2) = z_1^{-1}z_2^{-1}E_0(z_1,z_2) + E_0(1/z_1,1/z_2),\\ B(z_1,z_2) = z_1z_2D_0(z_1,z_2) + D_0(1/z_1,1/z_2). \end{gathered} \tag{19}$$

Легко убедиться, что $A(1/z_1,1/z_2) = z_1^{-1}z_2^{-1}A(z_1,z_2)$, $B(1/z_1,1/z_2) = z_1z_2B(z_1,z_2)$. По способу построения данные фильтры уже симметричны, остается проверить свойство ТВС. После подстановки в (13) соответствующих компонентов модуляционных матриц из (2), зависящих от матрицы децимации $\mathbf{M}$, получим, что должно выполняться равенство

$$T_0(z_1,z_2) = A(z_1,z_2)B(z_1,z_2) + A(z_1\alpha_1,z_2\alpha_2)B(z_1\alpha_1,z_2\alpha_2) = 2, \tag{20}$$

где $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2) = e^{j2\pi\mathbf{l}_q^T\mathbf{M}^{-1}}$, а вектор $\mathbf{l}$ является ненулевым классом смежности матрицы $\mathbf{M^T}$. Для шахматной матрицы $\mathbf{l} = (1,0)$, $\alpha = (-1,-1)$. Для матрицы децимации $\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ имеем $\mathbf{l} = (1,0)$, $\alpha = (1,-1)$. После подстановки (19) в выражение для T_0 только одно слагаемое должно быть отлично от нуля — соответствующее нулевым степеням по z_1 и z_2.

3. Применение метода преобразования

Шахматная матрица децимации $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$

Если задаться симметричными множителями

$$A(z_1,z_2) = a\left(1+{z_1}^{-1}\right) + b\left({z_2}^{-1}+\frac{z_2}{z_1}\right) + c\left(z_2+\frac{1}{z_1\,z_2}\right) + d\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{{z_1}^2}\right)+$$

$$+e\left({z_1}^{-2}+z_1\right) + f\left(\frac{1}{{z_1}^2 z_2}+z_1\,z_2\right)$$

и

$$B(z_1,z_2) = m\left(1+z_1\right) + n\left(z_2+\frac{z_1}{z_2}\right) + o\left({z_2}^{-1}+z_1\,z_2\right) + p\left(\frac{z_2}{z_1}+\frac{{z_1}^2}{z_2}\right)+$$

$$+q\left({z_1}^2+{z_1}^{-1}\right) + r\left({z_1}^2 z_2+\frac{1}{z_1\,z_2}\right)$$

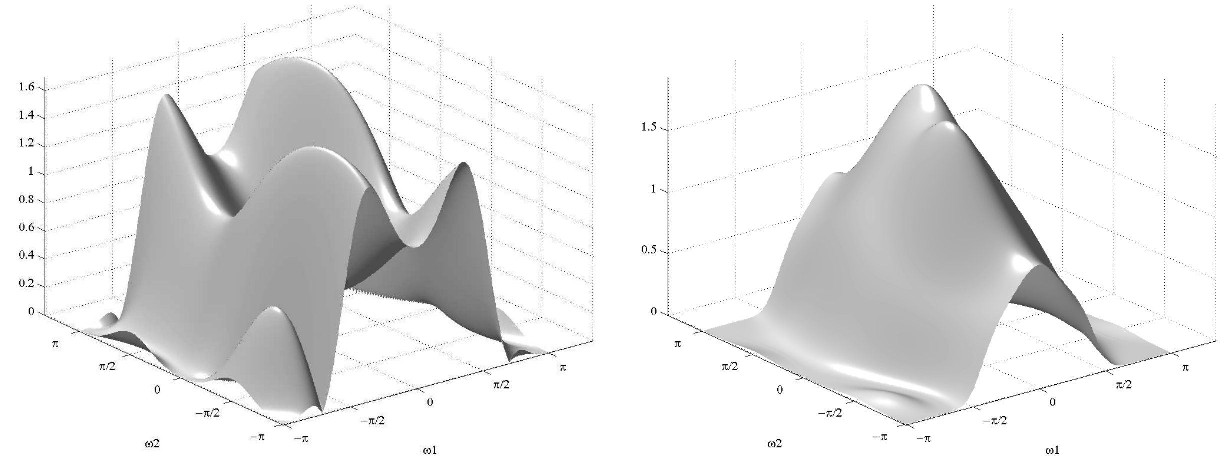
с центрами симметрии $c_A = 1/2, c_B = -1/2$, то из условия нулевой фазы для $W(z_1,z_2)$, записанного через параметры множителей $A(z_1,z_2), B(z_1,z_2)$, можно получить 16 различных решений. Ниже приведены только два из них.

Вариант 1. $W(n_1,n_2) =$

$$= \begin{bmatrix}
0 & 0 & \frac{m^2n^2}{2(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 & 0 \\
0 & \frac{mo^2n}{(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{o^4}{2(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 & \frac{-m^2o^2}{2(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 & \frac{-n^2o^2}{2(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} \\
0 & \frac{-mo^2n}{(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 & \frac{-mo^2n}{(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 \\
\frac{-n^2o^2}{2(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 & \frac{-m^2o^2}{2(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 & \frac{o^4}{2(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} \\
0 & 0 & 0 & \frac{mo^2n}{(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 \\
0 & 0 & \frac{m^2n^2}{2(-o^2+m^2)(n^2-o^2)} & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

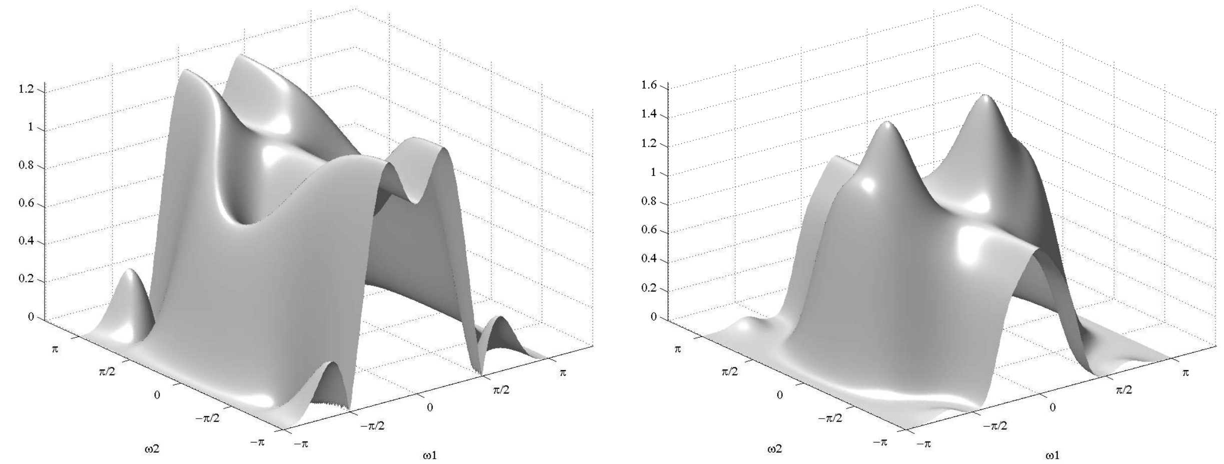
$$A(n_1,n_2) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{cnm}{o^2} & 0 \\ c & -\frac{cm}{o} & -\frac{cn}{o} \\ -\frac{cn}{o} & -\frac{cm}{o} & c \\ 0 & \frac{cnm}{o^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B(n_1,n_2) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{nm}{o} & 0 \\ o & m & n \\ n & m & o \\ 0 & \frac{nm}{o} & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $c = o = 1$, $m = 3.5$, $n = 1/3$, а фильтры-прототипы — это $H_P(Z) = (1+z^{-1})\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}Z-\frac{3}{4}Z^2\right)$, $F_P(Z) = (1+z)\left(\frac{5}{4}+\frac{13}{20}Z-\frac{3}{4}Z^2-\frac{3}{20}Z^3+\frac{9}{20}Z^4\right)$. Полученные частотные характеристики приведены на рис. 2.



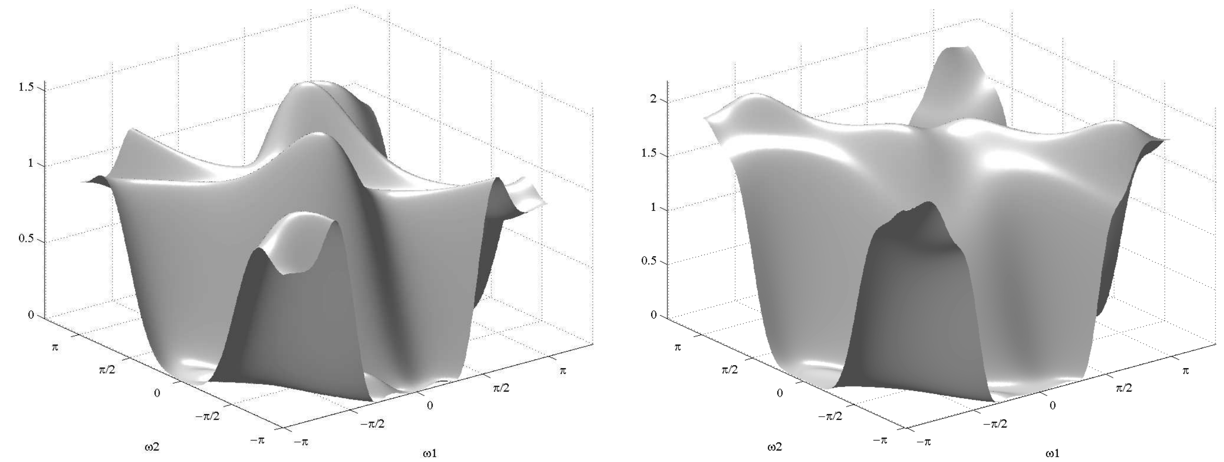
а *б*

Рис. 2. Вариант 1: *а* — АЧХ $H_0(\omega_1, \omega_2)$; *б* — АЧХ $F_0(\omega_1, \omega_2)$



а *б*

Рис. 3. Вариант 2: *а* — АЧХ $H_0(\omega_1, \omega_2)$; *б* — АЧХ $F_0(\omega_1, \omega_2)$



а *б*

Рис. 4. Вариант 3 (с *четным* носителем для $\mathbf{M}'$): *а* — АЧХ $H_0(\omega_1, \omega_2)$; *б* — АЧХ $F_0(\omega_1, \omega_2)$

Вариант 2. $W(n_1, n_2) =$

$$\begin{bmatrix} \frac{-o}{2m} & 0 & \frac{p}{2m} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-p+o}{2m} & 0 & \frac{-p+o}{2m} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{p}{2m} & 0 & \frac{-o}{2m} \end{bmatrix}, \quad B(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} -o & 0 & p \\ o & m & -p \\ -p & m & o \\ p & 0 & -o \end{bmatrix}, \quad A(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}.$$

Пусть $a = m = 1,\ o = 1/8,\ p = -1/8$, а фильтры-прототипы те же, что и в предыдущем варианте. Полученные частотные характеристики приведены на рис. 3.

Данные варианты являются примерами носителей ИХ $A(z_1, z_2)$ и $B(z_1, z_2)$ типа *четный* × *нечетный*. Для получения полностью четного носителя необходимо использовать иную, чем шахматная, матрицу децимации. М.А. Скопина предоставила пример фильтра $A(z_1, z_2)$ для матрицы $\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Матрица децимации $\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Вариант 3. При этом $A(z_1, z_2) = \dfrac{1}{2} z_1 z_2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16} {z_1}^2 z_2 + \dfrac{1}{16} z_2 - \dfrac{1}{8} z_1 {z_2}^3 + \dfrac{1}{8} \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{1}{16} z_1 - \dfrac{1}{16} {z_1}^{-1} + \dfrac{1}{8} {z_2}^2 - \dfrac{1}{8} {z_2}^{-2}$, что соответствует ИХ размера 4×6:

$$A(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/16 & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/2 & 1/16 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/16 & 1/2 & 0 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & -1/16 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученный с помощью метода достройки матрицы фильтр имеет также четные размеры 2×2: $B(z_1, z_2) = 1 + \dfrac{1}{z_1 z_2}$, а матрица ИХ равна $B(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Так как матрица децимации не шахматная, выражение (13) будет записано иначе (см. (20)), а именно

$$T_0(z_1, z_2) = H_0(z_1, z_2) \cdot F_0(z_1, z_2) + H_0(z_1, -z_2) \cdot F_0(z_1, -z_2) = 2. \tag{21}$$

Полученные частотные характеристики приведены на рис. 4.

Вариант 4. Получено обобщение фильтра $A(z_1, z_2)$ для заданной матрицы децимации:

$$A(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & -u & -w3 & 0 \\ w4 & 0 & c & -w & -w4 & w3 \\ w3 & -w4 & -w & c & 0 & w4 \\ 0 & -w3 & -u & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

Вариант фильтра, предоставленного М.А. Скопиной, соответствует значениям параметров $u = 0,\ c = 1/2,\ w = -1/16,\ d = 1/16,\ g = 1/8,\ w4 = -1/8$.

Приведенная выше параметризация фильтров с четным носителем для матрицы $\mathbf{M}'$ является лишь одной из 19 различных вариантов. Из-за недостатка места остальные 18 вариантов не показаны.

Заключение

В работе получены свойства полифазных и модуляционных матриц, описывающих многомерные многоскоростные системы, имеющих свойство точного восстановления сигнала. Для многомерных систем со свойством линейности фазы впервые получены некоторые свойства, описывающие типы симметрии и размеры носителей многомерных фильтров. Показано, что для широко применяемой шахматной матрицы децимации невозможно синтезировать банки фильтров с четным размером носителя.

Впервые предложена аналитическая процедура синтеза двухканальных многомерных неразделимых банков фильтров, имеющих четный размер носителя, включающая применение нового обобщенного преобразования. Подобные банки фильтров находят применение при синтезе комплексных вейвлетов и преобразователей Гильберта, а также при обработке изображений. Приведены примеры аналитического синтеза многомерных неразделимых банков фильтров с четным носителем для матриц децимации, отличных от шахматной.

Список литературы

[1] Чобану М.К. Многомерные многоскоростные системы и многомерные вейвлет-функции. Ч. I. Теория // Вестник МЭИ. 2003. Т. 2. С. 75–82.

[2] Чобану М.К. Многомерные многоскоростные системы и многомерные вейвлет-функции. Ч. II. Синтез // Вестник МЭИ. 2003. Т. 3. С. 69–78.

[3] Vaidyanathan P.P. Multirate Systems and Filter Banks. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.

[4] Tchobanou M. Design of multidimensional multirate systems and orthogonal and biorthogonal wavelets // Proc. 2nd International Conference Automation, Control and Information Technology (ACIT‘2005). Новосибирск, 2005. 20–24 июня. С. 262–267.

[5] Bose N. Multidimensional Systems Theory and Applications. 2nd ed. Kluwer Academic Publishers, 2003.

[6] Kovačević J., Vetterli M. Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for $\mathcal{R}^n$ // IEEE Trans. Inform. Th., special issue on Wavelet Transforms and Multiresolution Signal Analysis. 1992. Vol. 38, N 2. P. 533–555.

[7] Chen T., Vaidyanathan P.P. Recent developments in multidimensional multirate systems // IEEE Trans. Circ., Syst. Video Technol. 1993. Vol. 3, N 2. P. 116–137.

[8] Tay D., Kingsbury N. Design of nonseparable 3-D filter banks/wavelet bases using transformations of variables // IEEE Proc. Vis. Image Sign. Proc. 1996. Vol. 143, N 1. P. 51–61.

[9] Tay D.B.H., Kingsbury N.G. Flexible design of multidimensional perfect reconstruction FIR 2-band filters using transformations of variables // IEEE Trans. Image Proc. 1993. Vol. 2, N 4. P. 466–480.

[10] Kalker A., Shah I. Group theoretic approach to multidimensional filter banks // IEEE Trans. Signal Proc. 1996. Vol. 44, N 6. P. 1396–1405.

[11] Tay D. Design of filter banks/wavelets using TROV: a survey // Digital Signal Proc. 1997. Vol. 7. P. 229–238.

[12] Chen T., Vaidyanathan P. Multidimensional multirate filters derived from one-dimensional filters // Electr. Letters. 1991. Vol. 27. P. 225–228.

[13] Ansari R. Efficient IIR and FIR fan filters // IEEE Trans. Circ. Syst. 1987. Vol. 34. P. 941–945.

[14] Wei D., Evans B., Bovik A. Loss of perfect reconstruction in multidimensional filter banks and wavelets designed via extended McClellan transformations // IEEE Signal Proc. Letters. 1997. Vol. 4, N 10. P. 295–297.

[15] Villasenor J., Belzer B., Liao J. Wavelet filter evaluation for image compression // IEEE Trans. Image Proc. 1995. Vol. 4, N 8. P. 1053–1060.

[16] Kingsbury N. Shift invariant properties of the dual-tree complex wavelet transform // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc. 1999. Vol. 3. P. 1221.

[17] Чобану М.К., Максименко И.Е. Синтез двухканальных многомерных вейвлетов и их применение для сжатия изображений // Вестник МЭИ. 2006. № 2. С. 88–96.

[18] Basu S. Multi-dimensional filter banks and wavelets — a system theoretic perspective // J. Franklin Inst. 1998. Vol. 335B. P. 1367–1409.

[19] Basu S., Choi H. Hermite reduction methods for generation of a complete class of linear-phase perfect reconstruction filter banks — Part I: Theory // IEEE Trans. Circ., Syst. II: Analog and Digital Signal Processing. 1999. Vol. 46, N 4. P. 434–447.

[20] Viscito E., Allebach J. The analysis and design of multidimensional FIR perfect reconstruction filter banks with arbitrary sampling lattices // IEEE Trans. Circ. Syst. 1991. Vol. 38, N 1. P. 29–41.

[21] Coulombe S., Dubois E. Linear phase and symmetries for multidimensional FIR filters over lattices // IEEE Trans. Circ., Syst. II: Analog and Digital Signal Processing. 1998. Vol. 45, N 4. P. 473–481.

[22] Muramatsu S., Yamada A., Kiya H. A design method of multidimensional linear phase paraunitary filter banks with a lattice structure // IEEE Trans. Signal Proc. 1999. Vol. 47, N 3. P. 690–700.

[23] Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979. 416 с.

[24] Multidimensional two-channel linear phase FIR filter banks and wavelet bases with vanishing moments / T. Cooklev, A. Nishihara, Y. Toshiyuki, M. Sablatash // Multidimens. Syst. Sign. Proc. 1998. Vol. 9. P. 39–76.

[25] Tchobanou M. Polynomial methods for multi-dimensional filter banks' design // Proc. X European Signal Processing Conference EUSIPCO-2000. Finland, Tampere, 2000.

[26] Tchobanou M., Mironov V. Design of multi-dimensional filter banks // Proc. The Second International Workshop on Multi-dimensional (nD) Systems NDS-2000. Poland, Zielona Góra, 2000. P. 183–188.

[27] Большакова О.В., Чобану М.К. Синтез трехмерных банков фильтров с заданными свойствами на основе полиномов Бернштейна // Тр. Междунар. конф. "Информационные средства и технологии" (ITS-2002). М.: СТАНКИН, 2002. Т. 1. С. 153–156.

[28] Shapiro J. Adaptive McClellan transformations for quincunx filter banks // IEEE Trans. Signal Proc. 1994. Vol. 42. P. 642–647.

Поступила в редакцию 24 июля 2006 г.,
в переработанном виде — 27 мая 2008 г.