

Расчет сильного сжатия сферического парового пузырька в жидкости*

А. А. АГАНИН, Т. Ф. ХАЛИТОВА, Н. А. ХИСМАТУЛЛИНА
Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
e-mail: taliny@kfti.knc.ru

A numerical technique to study dynamics of a spherical gas bubble under strong compression in a liquid is presented based on a second-order accurate difference scheme. It is shown that the technique is more than 10 times more effective than those used in literature and constructed on basis of the first-order accurate methods.

Введение

Изучение радиальной динамики газовых пузырьков в жидкости при их сильном сжатии в настоящее время привлекает большое внимание исследователей. Это обусловлено тем, что с сильным сжатием пузырька связан целый ряд интересных явлений. К ним относятся: эрозия твердых поверхностей при кавитации [1], однопузырьковая сонолюминесценция [2, 3], многопузырьковая сонолюминесценция [4], нейтронная эмиссия при акустической кавитации дейтерированного ацетона [5, 6] и т. д. Сонолюминесценция и нейтронная эмиссия наблюдаются в финальной стадии сжатия пузырьков, когда их радиус имеет значение порядка долей микрометра [7]. Столь малые размеры пузырьков значительно затрудняют проведение экспериментальных исследований. Поэтому важное значение приобретают теоретические методы.

Изучение процесса коллапса пузырьков связано с постоянным усложнением и совершенствованием используемых моделей. В частности, в настоящее время считается, что сонолюминесценция и нейтронная эмиссия при сжатии пузырьков обусловлены тем, что в его финальной высокоскоростной стадии стенка пузырька движется со скоростью порядка 1 км/с [7]. В результате этого в полости пузырька образуется сферическая ударная волна, сходящаяся к центру пузырька [8, 9]. По мере схождения ее интенсивность быстро нарастает — так, что в небольшой окрестности центра образуется горячее ядро, излучающее свет [10] и нейтроны [11]. В случае нейтронной эмиссии в области радиусом примерно 100 нм достигаются температура около 10^8 К и плотность около 10 г/см^3 [11].

Исследование сильного сжатия пузырька с образованием ударных волн в его полости, как правило, проводится методом вычислительного эксперимента. В качестве моделей обычно применяются те или иные вариации уравнений динамики газа и жидкости. Во многих работах движение жидкости описывается приближенно в предположении малой сжимаемости. В таком случае применяемые модели различаются уравнениями динамики газа и описанием процессов на межфазной поверхности. В частности,

*Работа выполнена в рамках программы ОЭММПУ РАН и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00215 и № 08-01-97029).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2008.

в [8] применяется модель газа Ван-дер-Ваальса без учета вязкости и теплопроводности. В [12] учитываются вибрационные степени свободы молекул газа, его диссоциация и ионизация, потери на излучение. В работе [13] учитываются теплопроводность газа, испарение и конденсация на межфазной поверхности, в [14] — теплопроводность и вязкость, ионизация и рекомбинация. Уравнения газовой динамики для описания движения газа в полости пузырька и уравнения динамики сжимаемой жидкости для описания движения окружающей жидкости впервые применены в работе [9]. Однако в [9] эта модель использовалась при рассмотрении всего процесса расширения—сжатия пузырька. Подобный подход требует больших затрат компьютерного времени. В связи с этим в работах [11, 15, 16] предложена более экономичная модель, в которой при расширении и на начальной стадии сжатия пузырька, когда его поверхность движется с малыми числами Маха, газ полагается гомобарическим, а жидкость — несжимаемой. Полная же гидродинамическая модель применяется лишь на высокоскоростной стадии сжатия, когда число Маха движения стенки пузырька становится близким к единице.

Задачи динамики пузырька решаются в основном с применением расщепления по физическим процессам [17]. При этом для расчета движения невязкого нетеплопроводного газа (и жидкости) применяются методы первого порядка точности. В частности, используются метод Годунова [11, 12, 15, 16], схема Лакса—Фридрихса [8], комплекс KDYNA [9]. TVD-схема второго порядка точности применялась в работе [14]. Однако сделано это лишь в рамках модели с упрощенным описанием динамики жидкости (в предположении ее малой сжимаемости). При этом теплопроводность в [14] учитывается по явной схеме, что означает неоправданно жесткие ограничения на временной шаг интегрирования. В работе [13] для расчета движения газа применяют спектральный метод коллокаций, но его эффективность в задачах с ударными волнами изучена мало.

В настоящей работе предлагается экономичная методика расчета задач высокоскоростной динамики пузырька. В этой методике движение газа в полости пузырька и окружающей жидкости описывается уравнениями динамики сжимаемой жидкости. Осуществляется учет эффектов теплопроводности газа и жидкости, испарения и конденсации на межфазной поверхности, вязкости жидкости и поверхностного натяжения. Уравнения состояния приняты в виде довольно общих зависимостей давления и внутренней энергии от плотности и температуры. При численном решении задачи применяется расщепление на два этапа. На первом этапе решаются уравнения без учета теплопроводности газа и жидкости с помощью модификации метода Годунова на основе UNO-схемы второго порядка точности по пространству и времени, аналогично тому, как это сделано в работе [18]. На втором этапе решается уравнение теплопроводности. При этом используется неявная схема второго порядка точности по пространству. Эффекты испарения и конденсации учитываются по формулам Герца—Кнудсена—Ленгмюра [11].

Проводится сравнение результатов применения методики настоящей работы и методики на основе классической схемы Годунова первого порядка точности, аналогичной тем, что применяются в [11, 12, 15, 16]. Показано, что методика настоящей работы значительно более экономична (более чем в 10 раз).

1. Постановка задачи

Рассматривается радиальная динамика сферического пузырька газа в неограниченном объеме жидкости. Движение газа и жидкости в сферической системе координат

с началом отсчета радиальной координаты r в центре пузырька описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}(\rho r^2)_t + (\rho u r^2)_r &= 0, \\(\rho u r^2)_t + (p r^2 + \rho u^2 r^2)_r &= 2pr, \\(\rho E r^2)_t + [u r^2 (p + \rho E) - \kappa T_r r^2]_r &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь ρ — плотность, u — радиальная скорость, p — давление, $E = \varepsilon + u^2/2$ — удельная полная энергия, ε — удельная внутренняя энергия, T — температура, κ — коэффициент теплопроводности. Уравнения состояния принимаются в форме зависимостей давления и внутренней энергии от плотности и температуры: $p = p(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$.

Граничные условия в центре пузырька ($r = 0$) имеют следующий вид:

$$u = 0, \quad T_r = 0,\tag{2}$$

а на бесконечном удалении от его поверхности ($r = \infty$) — следующий:

$$p = p_\infty(t), \quad T = T_\infty(t).\tag{3}$$

На межфазной поверхности ($r = R(t)$) имеем

$$p^+ = p^- - \frac{4\mu u^+}{R} - \frac{2\sigma}{R}, \quad \dot{R} = u^+ + j/\rho^+ = u^- + j/\rho^-, \tag{4}$$

$$T^+ = T^-, \quad (\kappa T_r)^+ - (\kappa T_r)^- = jl.\tag{5}$$

Индекс “+” относится к стороне жидкости, индекс “−” относится к стороне пара, μ — коэффициент вязкости жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, j — интенсивность фазовых преобразований, l — теплота парообразования.

Влияние вязкости учитывается приближенно в предположении несжимаемости жидкости и без учета ее влияния на изменение энергии. Поэтому вязкостные слагаемые отсутствуют в уравнениях движения и энергии системы (1), но присутствуют в динамическом граничном условии среди соотношений (4). Учет влияния вязкости жидкости в таком приближении вполне оправдан, поскольку он проявляется в основном при малых скоростях движения межфазной поверхности, когда жидкость ведет себя как несжимаемая. При больших скоростях влиянием вязкости можно пренебречь, так как в этом случае преобладают силы инерции.

Если пузырек заполнен неконденсируемым газом, то $j = 0$. Если же пузырек паровой, то для вычисления интенсивности фазовых преобразований j используется формула Герца—Кнудсена—Ленгмюра [11]:

$$j = \frac{\alpha_{ac}}{\sqrt{2\pi R_\nu}} \left(\frac{p_S(T^+)}{\sqrt{T^+}} - \frac{\chi p^-}{\sqrt{T^-}} \right), \tag{6}$$

где

$$\chi = \exp(-\Omega^2) - \Omega\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\Omega \exp(-x^2) dx \right), \quad \Omega = \frac{j}{\sqrt{2}p^-} \sqrt{R_\nu T^-}.$$

Здесь p_S — давление насыщения, α_{ac} — коэффициент аккомодации, R_ν — газовая постоянная для пара. Посредством параметра χ учитывается подвижность поверхности пузырька. Зависимости $p_S(T)$, $\kappa^+(T)$, $\kappa^-(T)$, $\mu(T)$, $l(T)$ обычно определяются по экспериментальным данным.

2. Методика расчета

В ходе сжатия пузырька в жидкости около его поверхности возникают большие градиенты давления, а тепловые пограничные слои и в газе, и в жидкости становятся очень тонкими. Градиент давления в жидкости воздействует на скорость сжатия пузырька, а от тепловых пограничных слоев зависит масса пара в пузырьке, что значительно влияет на изменение радиуса пузырька в конце сжатия. Кроме того, в финальной стадии сжатия возле поверхности пузырька в его полости возникает радиально сходящаяся ударная волна. В последующем именно она определяет экстремальные значения газодинамических параметров в окрестности центра пузырька. Поэтому в расчетах важно правильно описать градиенты давления жидкости у поверхности пузырька, тепловые пограничные слои в газе и жидкости и сходящуюся ударную волну. Для учета перечисленных особенностей движения жидкости и газа удобно использовать подвижную эйлерово-лагранжеву систему (СЭЛ) координат, связанную с поверхностью пузырька. Связь СЭЛ-координат с поверхностью пузырька означает явное выделение межфазной границы, что важно для правильного описания ее перемещения. В дополнение к этому СЭЛ-координаты позволяют осуществить плавный переход от сетки с хорошим разрешением пограничных слоев к сетке с хорошим разрешением ударной волны. Соотношение эйлеровой координаты r и связанного с ней времени t и СЭЛ-координаты ξ и связанного с ней времени τ имеет вид

$$r = r(\xi, \tau), \quad t = \tau.$$

Система уравнений (1) с граничными условиями (2)–(5) решается численно расщеплением на два этапа. Сначала рассматриваются уравнения газовой динамики в СЭЛ-координатах:

$$\mathbf{Q}_\tau + \mathbf{F}_\xi = \mathbf{S}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{Q} = \sqrt{h}\mathbf{q}, \quad \mathbf{F} = \sqrt{hr}\xi^{-1}\mathbf{f}, \quad \mathbf{S} = \sqrt{h}\mathbf{s}, \quad \sqrt{h} = r^2 r_\xi,$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho(u - r_\tau) \\ \rho u(u - r_\tau) + p \\ \rho E(u - r_\tau) + pu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2p/r \\ 0 \end{pmatrix},$$

с граничными условиями

$$r = 0 : u = 0;$$

$$r = \infty : p = p_\infty(t); \quad (8)$$

$$r = R : p^+ = p^- - \frac{4\mu u^+}{R} - \frac{2\sigma}{R}, \quad \dot{R} = u^+ + j/\rho^+ = u^- + j/\rho^-. \quad (9)$$

Затем решается уравнение теплопроводности в СЭЛ-координатах:

$$T_\tau = -(u - r_\tau)T_\xi r_\xi^{-1} + \frac{1}{\rho\varepsilon_T r^2 r_\xi} (\kappa T_\xi r_\xi^{-1} r^2)_\xi - \frac{p - \rho^2 \varepsilon_p}{\rho\varepsilon_T} (u_\xi r_\xi^{-1} + 2ur^{-1}), \quad (10)$$

с граничными условиями

$$r = 0 : T_\xi = 0; \quad r = \infty : T = T_\infty(t); \quad (11)$$

$$r = R : T^+ = T^-, \quad (\kappa T_\xi r_\xi^{-1})^+ - (\kappa T_\xi r_\xi^{-1})^- = j l^-, \quad (12)$$

и определяется интенсивность фазовых преобразований j по формуле (6).

В расчетах применяется область $0 \leq r \leq r_f(t)$ с достаточно далеко удаленной искусственной границей $r = r_f(t)$. Начальное положение искусственной границы r_f^0 зависит от конкретной задачи, а ее перемещение находится из граничных условий (8) и (9).

Расчетная область покрывается сеткой размером $N = N_g + N_l$ ячеек, содержащей N_g ячеек в области газа и N_l ячеек в области жидкости. Для детального отображения процессов вблизи поверхности пузырька выбирается сетка, сгущающаяся (по геометрической процессии) к межфазной поверхности как со стороны газа, так и со стороны жидкости. По мере формирования в газе радиально сходящейся ударной волны осуществляется постепенный переход на равномерную сетку, а затем, при необходимости, и на сетку со сгущением к центру пузырька.

В СЭЛ-координатах сетка всегда остается равномерной, с шагом $\Delta\xi$, что в значительной степени упрощает построение вычислительной схемы. Сеточные аналоги плотности — $\hat{\rho}_i$, давления — \hat{p}_i , радиальной скорости — \hat{u}_i , удельной полной энергии — \hat{E}_i и температуры — \hat{T}_i представляют собой аппроксимацию среднеинтегральных значений соответствующих величин по объему ячейки с номером i . В дальнейшем используются следующие обозначения: n — предыдущий слой $\tau = \tau^n$, $n + 1/2$ — полуцелый промежуточный слой $\tau = \tau^{n+1/2} = (\tau^n + \tau^{n+1})/2$, а $n + 1$ — последующий слой $\tau = \tau^{n+1}$, $\Delta\tau^n = \tau^{n+1} - \tau^n$ — шаг по времени.

На первом этапе применяется модификация метода Годунова второго порядка точности по пространству и времени на основе UNO-схемы Хартена для скалярных законов сохранения [18]. Для вычисления значений сеточных функций на следующем временном слое используется явная конечно-объемная схема:

$$\frac{\hat{\mathbf{Q}}_i^{n+1} - \hat{\mathbf{Q}}_i^n}{\Delta\tau^n} + \frac{\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta\xi} = \hat{\mathbf{S}}_i^{n+1/2}, \quad (13)$$

где

$$\hat{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{Q}}_{i\pm 1/2}^{n+1/2}), \quad \hat{\mathbf{S}}_i^{n+1/2} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Q}}_i^{n+1/2}).$$

Здесь вектор $\hat{\mathbf{Q}} = \sqrt{\hat{h}}\hat{\mathbf{q}}$ представляет собой сеточный аналог вектора \mathbf{Q} . При этом $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{\rho}, \hat{\rho}\hat{u}, \hat{\rho}\hat{E})^T$ задается в виде кусочно-линейной функции с разрывами на границах между ячейками:

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}_i^n + (\xi - \xi_i)(\hat{\mathbf{q}}_\xi)_i^n + (\tau - \tau^n)(\hat{\mathbf{q}}_\tau)_i^n, \quad (14)$$

где $\xi_{i-1/2} < \xi < \xi_{i+1/2}$, $\tau^n \leq \tau < \tau^{n+1}$.

Для получения аппроксимации производной по времени $\hat{\mathbf{q}}_\tau$ используется ее явное выражение из системы (7). Аппроксимация пространственной производной $\hat{\mathbf{q}}_\xi$ в центре ячейки i осуществляется по формуле

$$(\hat{\mathbf{q}}_\xi)_i = \text{minmod} \left[\Delta_i^1 - \frac{1}{2}\Delta_{i+1/2}^2, \Delta_{i-1}^1 + \frac{1}{2}\Delta_{i-1/2}^2 \right] / \Delta\xi,$$

где

$$\text{minmod}[x, y] = \frac{1}{2}(\text{sign}(x) + \text{sign}(y)) \min(|x|, |y|),$$

$$\Delta_i^1 = \hat{\mathbf{q}}_{i+1} - \hat{\mathbf{q}}_i, \quad \Delta_{i+1/2}^2 = \min(|\hat{\mathbf{q}}_{i+1} - 2\hat{\mathbf{q}}_i + \hat{\mathbf{q}}_{i-1}|, |\hat{\mathbf{q}}_{i+2} - 2\hat{\mathbf{q}}_{i+1} + \hat{\mathbf{q}}_i|).$$

Используемый принцип минимальных значений производных позволяет уменьшить нефизические осцилляции в окрестности разрывов.

Решение системы (13) осуществляется следующим образом. Сначала вычисляется точное решение $\hat{\mathbf{q}}_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$ задачи Римана о распаде плоского разрыва на границах между ячейками в момент времени $\tau = \tau^{n+1/2}$. С использованием этого решения находится значение потока $\hat{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$. Затем вычисляется вектор свободных членов $\hat{\mathbf{S}}_i^{n+1/2}$ и из системы (13) находятся параметры следующего временного слоя.

Такой подход позволяет получить второй порядок точности всюду в области гладких решений, в то время как при использовании TVD-схемы [14] порядок точности снижается не только в окрестности разрывов решения, но и в окрестности локальных экстремумов. Рассматриваемая разностная схема не обладает свойством TVD. Однако возрастание полной вариации происходит в пределах порядка точности схемы, что является вполне приемлемым.

Заметим, что существует и другой вариант кусочно-линейной аппроксимации. В этом случае со вторым порядком точности приближаются не компоненты вектора $\hat{\mathbf{q}}$ (14), а характеристические величины. Однако применение такого подхода связано со значительным усложнением алгоритма. К тому же наличие в используемых уравнениях (7) источников \mathbf{S} , не содержащих производных, усложняет построение численной схемы.

На втором этапе для решения уравнения теплопроводности (10) с граничными условиями (11) и (12) применяется неявная схема

$$a_i \hat{T}_{i+2}^{n+1} + b_i \hat{T}_{i+1}^{n+1} + c_i \hat{T}_i^{n+1} + d_i \hat{T}_{i-1}^{n+1} + e_i \hat{T}_{i-2}^{n+1} = f_i, \quad (15)$$

где коэффициенты $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ определяются на временном слое $\tau = \tau^n$. Их вид в силу громоздкости не приводится.

В разностной схеме (15) в зависимости от расположения ячейки, в которой составляются аппроксимации производных по пространственной переменной, могут появляться нулевые коэффициенты:

- а) в центре пузырька с учетом условия $T_\xi = 0$ получим $a_i = d_i = e_i = 0$;
- б) внутри области газа и области жидкости используются центрально-разностные аппроксимации, в соответствующих уравнениях — два нулевых коэффициента $a_i = e_i = 0$;
- в) в приграничных ячейках и в газе, и в жидкости при составлении разностного уравнения применяется явное выражение температуры в граничной точке, которое получается с использованием условия (12). Это уравнение содержит значения температуры в четырех точках (в газе $e_i = 0$, в жидкости $a_i = 0$);
- г) разностное уравнение в последней ячейке в жидкости составляется с учетом краевого условия на внешней границе и содержит три нулевых коэффициента $a_i = b_i = e_i = 0$.

Система уравнений (15) решается методом прогонки. Затем определяется интенсивность фазовых преобразований, которая используется на следующем временном слое в граничных условиях первого этапа.

На каждом временном слое из условия устойчивости Куранта [19] для метода решения уравнений первого этапа вычисляется шаг по времени:

$$\Delta\tau^n = \alpha_{CRT} \frac{\Delta\xi}{a},$$

где α_{CRT} — число Куранта, a — наибольшая по модулю скорость распространения волн вдоль оси ξ . Этот шаг оказывается пригодным и для второго этапа, поскольку расчетная схема второго этапа является неявной.

3. Результаты расчетов

Эффективность предлагаемой методики расчета задач динамики сферического пузырька с сильным сжатием демонстрируется путем ее сравнения с методиками первого порядка точности, что описывается в литературе [11, 12, 15, 16], на примере следующей задачи. До начального момента времени $t = 0$ кавитационный (паровой) сферический пузырек, находящийся в неограниченном объеме жидкости (дейтерированного ацетона), расширяется до радиуса R^0 . В момент $t = 0$ расширение прекращается, давление пара в полости пузырька считается однородным и равным давлению насыщения p_S^0 . Давление жидкости на бесконечности при $t \geq 0$ равно p_∞^0 , $p_\infty^0 > p_S^0$. Под действием перепада давления в жидкости пузырек при $t > 0$ сжимается. В ходе сжатия в полости пузырька формируется ударная волна.

Начальные распределения давления и скорости жидкости определяются в предположении $j = 0$ и с учетом того, что сжимаемость жидкости в начале сжатия несущественна. Температура полагается постоянной и равной T_∞^0 , а распределение плотности определяется из уравнения состояния. При описании состояния жидкого и парообразного дейтерированного ацетона применяются реалистичные уравнения в форме Ми—Грюнайзена [11].

Для реализации граничных условий на бесконечности используется удаленная внешняя искусственная граница $r = r_f(t)$, перемещение которой при $t > 0$ определяется из решения задачи о плоском поршне, вдвигаемом в среду (или выдвигаемом из нее) при известном давлении p_f^0 на поверхности поршня. Величина p_f^0 находится по распределению давления в жидкости при $t = 0$ с учетом того, что сжимаемость жидкости в начале сжатия несущественна [11]. Путем численного эксперимента установлено, что в данной задаче начальное положение искусственной внешней границы достаточно принять равным $r_f^0 = 9R^0$.

В начале сжатия применяется подвижная сетка, сгущающаяся по геометрической прогрессии к межфазной поверхности как в области пузырька $0 \leq r \leq R$, так и в области жидкости $R \leq r \leq r_f$. Когда в газе появляются большие градиенты давления и начинает формироваться ударная волна, осуществляется постепенный переход на равномерную сетку. Соотношение приграничных ячеек в жидкости и в газе определяется выражениями

$$\frac{\Delta r_f}{\Delta r_g} = \frac{\gamma_0}{\beta(R)}, \quad \Delta r_g = \beta(R) \frac{R}{N_g},$$

где

$$\beta(R) = \begin{cases} \beta_1 & \text{при } R > R_1, \\ [(1 - \beta_1)(R - R_1)/(R_2 - R_1)] + \beta_1 & \text{при } R_2 \leq R \leq R_1, \\ 1 & \text{при } R < R_2. \end{cases}$$

Здесь R_1 и R_2 — значения радиуса пузырька, соответствующие моментам начала и завершения перехода на равномерную сетку. Эти значения, как и значения параметров γ_0 , β_1 , определяются экспериментально.

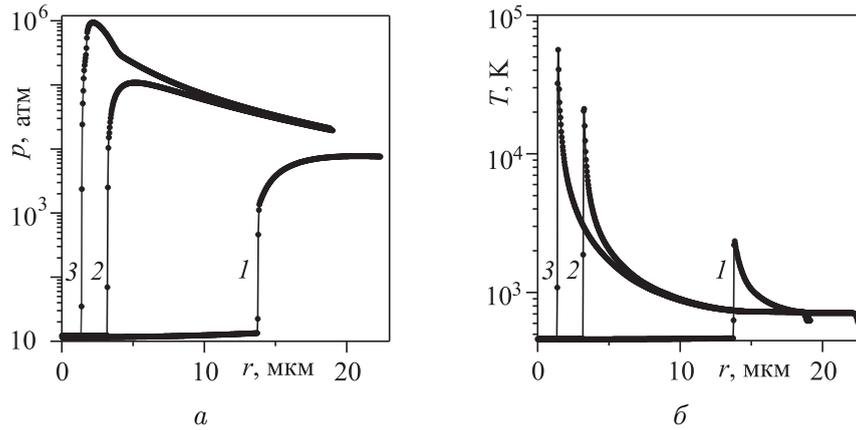


Рис. 1. Пространственное распределение давления (а) и температуры (б) внутри полости пузырька для трех последовательных моментов времени финальной стадии сжатия: кривые 1 соответствуют моменту $t_1 \approx t^* - 3.38$ нс, кривые 2 — $t_2 \approx t^* - 0.24$ нс, кривые 3 — $t_3 \approx t^* - 0.046$ нс

Задача решается при следующих входных данных: $R^0 = 500$ мкм, $T_\infty^0 = 273.15$ К, $p_S^0 = 0.0879$ атм, $p_\infty^0 = 15$ атм, $\alpha_{ac} = 1$, $R_1 = 56.31$ мкм, $R_2 = 35.05$ мкм, $\gamma_0 = 0.01$, $\beta_1 = 0.08$.

На рис. 1 представлены пространственные распределения давления и температуры газа внутри полости сферического пузырька для трех последовательных моментов времени $t_1 - t_3$ (кривые 1–3, номер кривой соответствует номеру момента времени) финальной стадии сжатия. Для согласования моментов времени используется время t^* , когда температура газа в четвертой от центра пузырька ячейке принимает максимальное по r значение. По мере сжатия радиальное распределение газодинамических параметров становится все более неоднородным — так, что со временем в области радиально сходящейся волны сжатия в полости пузырька формируется ударная волна (кривые 1). С течением времени интенсивность волны сжатия и ударной волны возрастает. Конфигурация фронта волны сжатия по мере ее схождения к центру полости пузырька значительно усложняется, что лучше видно по кривой давления (кривая 3). При этом наибольшее значение температуры достигается на фронте ударной волны, а давления — за ее фронтом.

Для оценки экономичности предлагаемой методики ее результаты сравниваются с результатами, которые получаются на основе классического метода Годунова первого порядка точности [19]. На рис. 2 приводятся графики пространственных распределений давления газа в полости пузырька в момент времени t_1 , полученные на ряде последовательно сгущающихся расчетных сеток по методике настоящей работы и с применением классической схемы Годунова. Видно, что в масштабе рис. 2, а расхождение между всеми представленными решениями относительно невелико. При этом графики решения, полученного по методике настоящей работы, на всех сетках визуально совпадают с тем, что получается на самой грубой сетке a со 150 ячейками в газе и 385 ячейками в жидкости. Результаты, полученные с применением классического метода Годунова, сливаются с “эталоном” (здесь и далее под “эталоном” понимается численное решение, визуально не изменяющееся при дальнейшем измельчении сетки), начиная с сетки c (600 + 1540 ячеек). На рис. 2, б представлен наиболее сложный для численного описания фрагмент решения, приведенного на рис. 2, а. Видно, что здесь сетки c (600 + 1540 ячеек) для

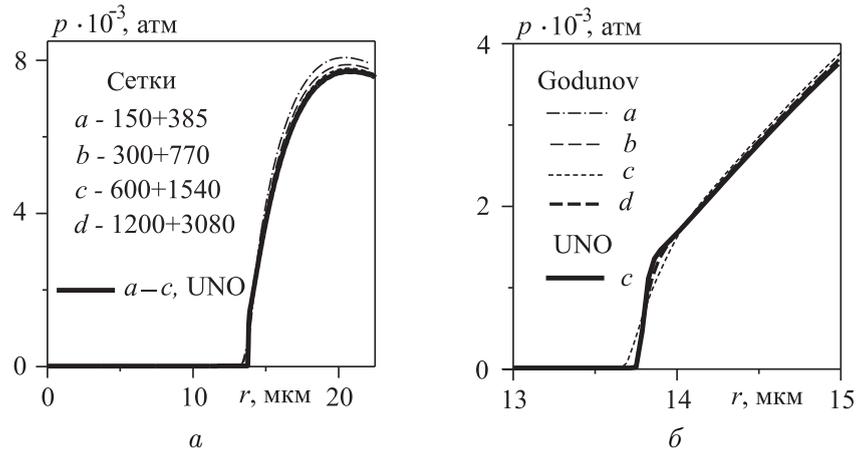


Рис. 2. Пространственные распределения давления газа в полости пузырька в момент времени t_1 , полученные с применением классической схемы Годунова и ее UNO-модификации

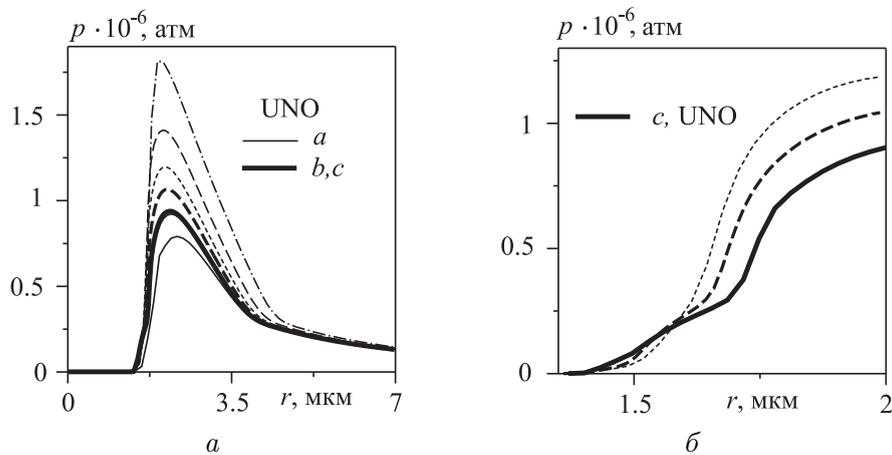


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, включая обозначения указанных кривых, но для момента t_3

классического метода Годунова еще недостаточно. Лишь сетка d (1200 + 3080 ячеек) позволяет добиться решения, достаточно близкого к “эталону”.

С течением времени точность вычислений на каждой отдельной сетке в силу усложнения решения и накопления погрешностей падает. Для получения удовлетворительной точности в момент времени t_3 (рис. 3, a) по методике настоящей работы уже требуется сетка b (300 + 770 ячеек). Значительно хуже обстоит дело с классической схемой Годунова. Для нее даже сетки d (1200 + 3080 ячеек) оказывается недостаточно. Таким образом, для достижения “эталонного” решения с применением классического метода Годунова затраты компьютерного времени оказываются более чем в 10 раз большими, чем при расчетах по методике настоящей работы.

Интересно отметить, что на первый взгляд схема Годунова первого порядка точности на более грубых сетках (рис. 3, a) позволяет описать передний фронт волны сжатия лучше, чем методика настоящей работы второго порядка точности. Однако при более детальном рассмотрении переднего фронта волны (рис. 3, b) видно, что он имеет сложную структуру. Эту структуру на сетках $a-c$ с применением метода Годунова первого порядка описать не удастся. Подобным конфигурации “эталона” становится лишь решение на сетке d .

Заключение

Предложена экономичная методика расчета задач динамики сферического пузырька газа с сильным сжатием. В этой методике движение газа в полости пузырька и окружающей жидкости описывается уравнениями динамики сжимаемой жидкости. Учитываются теплопроводность газа и жидкости, испарение и конденсация на межфазной поверхности, вязкость жидкости и поверхностное натяжение. Уравнения состояния отражают довольно общие зависимости давления и внутренней энергии от плотности и температуры. Решение уравнений движения газа в полости пузырька и в окружающей жидкости находится в два этапа. На первом этапе решаются уравнения без учета эффектов теплопроводности, с помощью модификации метода Годунова на основе UNO-схемы второго порядка точности по пространству и времени [18]. На втором этапе решается уравнение теплопроводности по неявной схеме второго порядка точности по пространству. Показано, что предлагаемая методика значительно экономичнее (более чем в 10 раз) тех, что применяются в работах [11, 12, 15, 16], в силу того, что в них используются методы первого порядка точности.

Список литературы

- [1] BENJAMIN T.B., ELLIS A.T. The collapse of cavitation bubbles and the pressures thereby produced against solid boundaries // *Phil. Trans. Royal Soc. Lond. A.* 1966. Vol. 260, N 1110. P. 221–240.
- [2] GAITAN D.F., CRUM L.A. Observation of sonoluminescence from a single, stable cavitation bubble in a water/glycerine mixture // *12th Intern. Symp. On Nonl. Acoustics.* N.Y.: Elsevier, 1990. P. 459–463.
- [3] BRENNER M.P. Single-bubble sonoluminescence // *Reviews of Modern Physics.* 2002. Vol. 74. P. 425–484.
- [4] МАРГУЛИС М.А. Сонолюминесценция // *Успехи физических наук. Обзоры актуальных проблем.* 2000. Т. 170, № 3. С. 263–287.
- [5] TALEYARKHAN R.P., WEST C.D., CHO J.S. ET AL. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science.* 2002. Vol. 295. P. 1868–1873.
- [6] TALEYARKHAN R.P., WEST C.D., LAHEY R.T. ET AL. Nuclear emissions during self-nucleated acoustic cavitation // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 96. P. 034301.1–034301.4.
- [7] BARBER B.P., HILLER R.A., LOFSTEDT R. ET AL. Defining the unknowns of sonoluminescence // *Phys. Rev.* 1997. Vol. 281. P. 65–143.
- [8] WU C.C., ROBERTS P.H. Shock wave propagation in a sonoluminescing gas bubble // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. P. 3424–3427.
- [9] MOSS W.C., CLARKE D.B., WHITE J.W., YOUNG D.A. Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond somoluminescence // *Phys. Fluids.* 1994. Vol. 6, N 9. P. 2979–2985.
- [10] MOSS W.C., CLARKE D.B., YOUNG D.A. Calculated pulse widths and spectra of a single sonoluminescing bubble // *Science.* 1997. Vol. 276. P. 1398–1401.
- [11] NIGMATULIN R.I., АКХАТОВ I.SH., ТОПОЛНИКОВ A.S. ET AL. The theory of supercompression of vapor bubbles and nanoscale thermonuclear fusion // *Phys. Fluids.* 2005. Vol. 17. P. 107106.1–107106.31.

- [12] KONDIC L., GERSTEN J.I., YUAN C. Theoretical studies of sonoluminescence radiation: Radiative transfer and parametric dependence // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, N 5. P. 4976–4990.
- [13] STOREY B.D., SZERI A.J. Water vapour, sonoluminescence and sonochemistry // Proc. R. Soc. Lond. A. 2000. Vol. 456. P. 1685–1709.
- [14] HO C.Y., YUAN L., CHU M.-C. ET AL. Effects of ionization in single-bubble sonoluminescence // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. P. 041201.1–041201.12.
- [15] АГАНИН А.А., ИЛЬГАМОВ М.А. Динамика пузырька газа в центре сферического объема жидкости // Математ. моделирование. 2001. Т. 13, № 1. С. 26–40.
- [16] АКНАТОВ I., LINDAU O., ТОПОЛНИКОВ А. ET AL. Collapse and rebound of a laser-induced cavitation bubble // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13, N 10. P. 2805–2819.
- [17] КОВЕНЯ В.М., ЯНЕНКО Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
- [18] HARTEN A., ENGQUIST B., OSHER S., ШАКРАВАРТХИ S.R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III // J. Comp. Phys. 1987. Vol. 71. P. 231–303.
- [19] ЧИСЛЕННОЕ решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 7 мая 2008 г.