

# Метод расщепления в задаче численного моделирования турбулентного следа за буксируемым телом в стратифицированной жидкости\*

Н. П. Мошкин

*Учреждение Российской академии наук*

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: nikolay.moshkin@gmail.com

Построены параболизированные трехмерные численные модели дальних турбулентных следов за буксируемым телом. Численные модели основаны на схемах расщепления по физическим процессам и пространственным переменным.

*Ключевые слова:* метод расщепления, турбулентный след, буксируемое тело, стратифицированная жидкость.

## Введение

Турбулентные следы за телами вращения в стратифицированной жидкости рассматривались во многих публикациях, где содержится достаточно полный обзор ссылок по этой проблеме. Укажем лишь несколько последних, не претендуя на полноту [1–4]. Анализируя цитированную литературу, можно сделать вывод о недостаточной полноте численных моделей динамики турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде (прежде всего для расстояний, соответствующих временам после прохода тела  $t \leq 10T$ ,  $T$  — период Вьясяля—Брента). Недостаточно и сопоставление параметров турбулентных следов за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде. В настоящей работе численный подход, основанный на конечно-разностных методах расщепления, используется для построения численных моделей дальнего турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде.

## 1. Постановка задачи

Для описания течения в дальнем турбулентном следе за осесимметричным телом в стратифицированной среде используется трехмерная параболизированная система осредненных уравнений гидродинамики в приближении Обербека—Буссинеска:

$$U_0 \frac{\partial U_d}{\partial x} + V \frac{\partial U_d}{\partial y} + W \frac{\partial U_d}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle, \quad (1)$$

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00363), гранта НШ 9886.2006.9 Президента РФ и СО РАН (интеграционный проект 26).

© ИВТ СО РАН, 2009.

$$U_0 \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle v'w' \rangle, \quad (2)$$

$$U_0 \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'w' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 \rangle - g \frac{\langle \rho_1 \rangle}{\rho_0}, \quad (3)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial z} + W \frac{d\rho_s}{dz} = -\frac{\partial}{\partial y} \langle v'\rho' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'\rho' \rangle, \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial U_d}{\partial x}. \quad (5)$$

В уравнениях (1)–(5) величина  $U_d = U_0 - U$  — дефект осредненной продольной компоненты скорости;  $U, V, W$  — компоненты скорости осредненного движения в направлении осей  $x, y, z$  соответственно;  $\langle p_1 \rangle$  — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией  $\rho_s(z)$ ;  $U_0$  — скорость набегающего невозмущенного потока;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\langle \rho_1 \rangle$  — осредненный дефект плотности:  $\rho_1 = \rho - \rho_s$ ,  $\rho_s = \rho_s(z)$  — плотность невозмущенной жидкости, которая полагается линейной:  $\rho_s(z) = \rho_0(1 - az)$ ,  $a = \text{const} > 0$ ; штрихом обозначены пульсационные компоненты; символ  $\langle \rangle$  — осреднение. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры, стратификация предполагается слабой. Система координат связана с перемещающимся телом таким образом, что скорость его движения равна  $-U_0$  и ось  $z$  направлена вертикально вверх противоположно силе тяжести. В уравнениях (1)–(4) отброшены в предположении малости члены с молекулярной вязкостью и диффузией. Отброшены также производные по  $x$  в правых частях.

Для замыкания системы (1)–(5) используется иерархия моделей турбулентности второго порядка. В модели 1 неизвестные величины компонент тензора реинольдсовых напряжений  $\langle u_i'^2 \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\langle u'v' \rangle = \langle u_1'u_2' \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle = \langle u_1'u_3' \rangle$  и турбулентных потоков  $\langle u_i'\rho' \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$ , определены алгебраическими соотношениями (см. [4, 5]):

$$\frac{\langle u_i'u_j' \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - c_2}{c_1} \left( \frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right) + \frac{1 - c_3}{c_1} \left( \frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{G}{\varepsilon} \right), \quad (6)$$

$$P_{ij} = - \left\{ \langle u_i'u_k' \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u_j'u_k' \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}, \quad G_{ij} = \frac{1}{\rho_0} (\langle u_i'\rho' \rangle g_j + \langle u_j'\rho' \rangle g_i), \quad (7)$$

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g), \quad 2P = P_{ii}, \quad 2G = G_{ii}, \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \quad U_3 = W, \quad (8)$$

$$-\langle u'\rho' \rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon} \left[ \langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - c_{2T}) \langle w'\rho' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right], \quad (9)$$

$$-\langle v'\rho' \rangle = \frac{\langle v'^2 \rangle e}{c_{1T}\varepsilon} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} = K_{\rho y} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \quad \langle \rho'^2 \rangle = -\frac{2e}{c_T\varepsilon} \langle w'\rho' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -\langle w'\rho' \rangle &= \frac{e}{C_{1T}\varepsilon} \left[ \langle w'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - c_{2T}) \frac{g}{\rho_0} \langle \rho'^2 \rangle \right] = \\ &= \frac{e \langle w'^2 \rangle}{c_{1T}\varepsilon \left( 1 - 2 \frac{1 - c_{2T}}{c_{1T}c_T} \frac{g e^2}{\rho_0 \varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} = K_{\rho z} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь и ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Для определения значений энергии турбулентности  $e$ , скорости диссипации  $\varepsilon$  и касательного

рейнольдсова напряжения  $\langle v'w' \rangle$  привлекаются дифференциальные уравнения переноса [5]:

$$U_0 \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} + W \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial e}{\partial z} + P + G - \varepsilon, \quad (12)$$

$$U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + W \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} (P + G) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \quad (13)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} + (1 - c_2) P_{23} + (1 - c_3) G_{23} - c_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle v'w' \rangle, \quad (14)$$

где коэффициенты турбулентной вязкости определены по упрощенным уравнениям (6) следующим образом:

$$K_{ey} = \frac{1 - c_2 e \langle v'^2 \rangle}{c_1 \varepsilon}, \quad K_{\varepsilon y} = \frac{K_{ey}}{\sigma},$$

$$K_{ez} = \frac{\left[ (1 - c_2) e \langle w'^2 \rangle - \frac{(1 - c_3)(1 - c_{2T}) e^2 g}{c_{1T} \varepsilon \rho_0} \langle w' \rho \rangle \right]}{c_1 \varepsilon \left( 1 - \frac{(1 - c_3) g e^2 \partial \langle \rho \rangle}{c_{1T} \rho_0 \varepsilon^2 \partial z} \right)}, \quad K_{\varepsilon z} = \frac{K_{ez}}{\sigma}.$$

Поэтому

$$-\langle u'v' \rangle = K_{ey} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\langle u'w' \rangle = K_{ez} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Величины  $c_1, c_2, c_3, c_{1T}, c_{2T}, c_T, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, \sigma$  — общепринятые эмпирические константы. Их величины равны 2.2, 0.55, 0.55, 3.2, 0.5, 1.25, 1.45, 1.9, 1.3 соответственно. Выбор этой модели турбулентности обусловлен следующими причинами: модель близка к стандартной ( $e - \varepsilon$ )-модели турбулентности и в ее рамках мы можем учитывать анизотропию турбулентных характеристик в следах в стратифицированной жидкости.

Модель 2 подобна модели 1, но  $K_{ey} = c_s \frac{e \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon}$ ,  $K_{ez} = c_s \frac{e \langle w'^2 \rangle}{\varepsilon}$ ,  $c_s = 0.25$ .

Модель 3 основана на локально равновесных соотношениях (9)–(11) и дифференциальных уравнениях для определения  $\langle u'_i u'_j \rangle$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Величины  $\langle u_i'^2 \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяются из следующих уравнений:

$$U_0 \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial z} + P_{11} + G_{11} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle u'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) - C_2 \left( P_{11} - \frac{2}{3} P \right) - C_2 \left( G_{11} - \frac{2}{3} G \right), \quad (15)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial z} + P_{22} + G_{22} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle v'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) - C_2 \left( P_{22} - \frac{2}{3} P \right) - C_2 \left( G_{22} - \frac{2}{3} G \right), \quad (16)$$

$$U_0 \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} + P_{33} + G_{33} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle w'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) - C_2 \left( P_{33} - \frac{2}{3} P \right) - C_2 \left( G_{33} - \frac{2}{3} G \right), \quad (17)$$

$$K_{ey} = C_s \frac{e}{\varepsilon} \langle v'^2 \rangle, \quad K_{ez} = C_s \frac{e}{\varepsilon} \langle w'^2 \rangle, \quad e = (\langle u'^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle) / 2;$$

$$P_{11} = 2 \left( K_y \left( \frac{\partial U_d}{\partial y} \right)^2 + K_z \left( \frac{\partial U_d}{\partial z} \right)^2 \right) = 2P, \quad G_{11} = 0, \quad P_{22} = 0, \quad G_{22} = 0, \quad P_{33} = 0,$$

$$G_{33} = -2 \frac{g}{\rho_0} \langle w' \rho' \rangle = 2G, \quad P = \langle u' v' \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle u' w' \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z} = K_y \left( \frac{\partial U_d}{\partial y} \right)^2 + K_z \left( \frac{\partial U_d}{\partial z} \right)^2,$$

$$G = -\frac{g}{\rho_0} \langle w' \rho' \rangle = \frac{g}{\rho_0} K_{\rho z} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}.$$

Модели 1–3 аналогичны моделям, рассмотренным в [4].

Маршевая переменная  $x$  в уравнениях (1)–(4), (12)–(17) играет роль времени. На расстоянии  $x = x_0$  от тела были заданы следующие начальные условия:

$$U_d(x_0, y, z) = \Theta_1(r), \quad e(x_0, y, z) = \Theta_2(r), \quad \varepsilon(x_0, y, z) = \Theta_3(r),$$

$$\langle v' w' \rangle = \langle \rho_1 \rangle = V = W = 0, \quad \langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle = \frac{2}{3} e,$$

$$r^2 = y^2 + z^2, \quad 0 \leq r < \infty; \quad -\infty < z < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad x = x_0.$$

Здесь  $\Theta_1(r)$ ,  $\Theta_2(r)$  и  $\Theta_3(r)$  — функции, согласованные с экспериментальными данными Линя и Пао [6, 7] в однородной жидкости. Граничные условия показаны только для моделей 1 и 2 (для примера).

При  $r^2 = y^2 + z^2 \rightarrow \infty$  ставились условия невозмущенного потока

$$U_d = V = W = \langle \rho_1 \rangle = e = \varepsilon = \langle v' w' \rangle = 0, \quad x \geq x_0. \quad (18)$$

Из соображений симметрии решение отыскивается лишь в первом квадранте плоскости  $(y, z)$  с использованием следующих граничных условий на осях симметрии:

$$\langle v' w' \rangle = \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} = V = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U_d}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad z \geq 0;$$

$$\langle v' w' \rangle = \langle \rho_1 \rangle = W = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U_d}{\partial z} = \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad y \geq 0.$$

При численном решении задачи нулевые краевые условия, соответствующие  $r \rightarrow \infty$ , сносились на границы достаточно большого прямоугольника  $0 \leq y \leq y_*$ ;  $0 \leq z \leq z_*$ .

Переменные задачи могут быть обезразмерены с применением масштаба длины  $D$  — диаметра тела и масштаба  $U_0$  — скорости невозмущенного потока. В результате в обезразмеренных уравнениях вместо  $g$  появится величина  $4\pi^2/\text{Fr}^2$ , где  $\text{Fr}$  — плотностное число Фруда, определяемое равенством

$$\text{Fr} = \frac{U_0 T}{D}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}} = \frac{1}{N},$$

$$a = - \left( \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{d\rho_s}{dz},$$

где  $T$ ,  $N$  — период и частота Вайсяля—Брента. Для удобства интерпретации результатов расчетов ниже используется время  $t$ , связанное с расстоянием от тела следующим соотношением:

$$t = \frac{x}{U_0}, \quad t^* = \frac{t}{T} = \frac{xD}{U_0DT} = \frac{x^*}{Fr}.$$

## 2. Алгоритм решения

Для построения конечно-разностного алгоритма решения задачи, по аналогии с [4], введем новые независимые переменные

$$x' = x, \quad \xi = \chi_1(y), \quad \eta = \chi_2(z) \quad (x = x', \quad y = \phi_1(\xi), \quad z = \phi_2(\eta)). \quad (19)$$

Это необходимо, чтобы преобразовать неравномерную сетку в физической области  $(x, y, z)$  в равномерную прямоугольную сетку в вычислительной области  $(x', \xi, \eta)$ . Уравнения (1)–(5) и (12)–(17) преобразуются согласно (19). Функции  $\phi_1$  и  $\phi_2$  устанавливают взаимно однозначное соответствие узлов равномерной сетки в вычислительной области и узлов неравномерной сетки в физической области. Функции  $\phi_1(\xi)$ ,  $\phi_2(\eta)$  задаются таблично. Выбор этих функций позволяет сгущать расположение узлов сетки в окрестности турбулентного следа. Метрические коэффициенты вычисляются с использованием конечных разностей. В вычислительной области  $(x', \xi, \eta)$  узлы сетки в  $(\xi, \eta)$ -плоскости распределены равномерно:  $\xi_i = i \cdot \Delta\xi$ ,  $\eta_j = j \cdot \Delta\eta$ ,  $i = 0, \dots, M_1$ ,  $j = 0, \dots, M_2$ ,  $\varphi_1(\xi_{M_1}) = y_*$ ,  $\varphi_2(\eta_{M_2}) = z_*$ .

Неизвестные функции определялись в узлах разнесенной сетки:

— скалярные функции, такие как  $\langle p_1 \rangle$ ,  $\langle \rho_1 \rangle$ ,  $U_d$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$  и компоненты рейнольдсовых напряжений  $\langle u'_l u'_k \rangle$ , расположены в узлах основной сетки (в центре ячеек)  $(\xi_i, \eta_j) = (i \cdot \Delta\xi, j \cdot \Delta\eta)$ ;

— значения горизонтальной ( $V$ ) и вертикальной ( $W$ ) компонент вектора скорости расположены в узлах сеток, сдвинутых на половину шага в горизонтальном и в вертикальном направлениях соответственно (другими словами, значения горизонтальной и вертикальной компонент вектора скорости отнесены к серединам соответствующих сторон ячеек разностной сетки).

Условимся, что верхний индекс  $n$  будет соответствовать сечению  $x = x^n = x^{n-1} + \Delta x^n$ , а нижние индексы  $i$ ,  $j$  — узлу сетки  $(\xi_i, \eta_j)$  в сечении  $x = \text{const}$  (соответственно нижние индексы  $i + 1/2$ ,  $j + 1/2$  — узлу сдвинутой сетки  $\xi_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta\xi$ ,  $\eta_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta\eta$ ). На рис. 1 приведен пример расчетной сетки и показано расположение неизвестных в узлах сдвинутой сетки.

Алгоритм решения задачи основан на неявном методе расщепления по пространственным переменным для уравнений (1), (4), (12)–(17) и на явном методе расщепления по физическим процессам для системы уравнений (2), (3) и (5). Пусть все неизвестные функции уже определены в сечении  $x^n$ . Решение на следующем маршевом сечении  $x = x^{n+1}$  находится по предложенному алгоритму.

1. Из уравнения (1) получаем значения дефекта осевой скорости  $U_{d,i,j}^{n+1}$ . При этом используется неявная схема расщепления по пространственным переменным [8]. Все остальные неизвестные берутся с предыдущего слоя  $n$ .

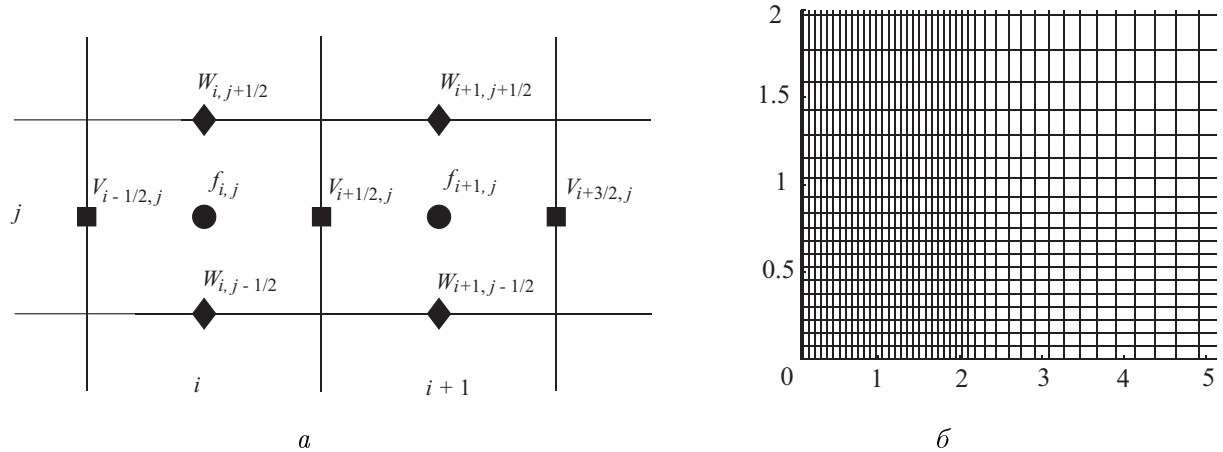


Рис. 1. Пример расчетной сетки (а) и расположение неизвестных в узлах сдвинутой сетки (б)

2. Компоненты скорости осредненного движения  $V^{n+1}$ ,  $W^{n+1}$  и отклонение давления от гидростатического,  $\langle p_1 \rangle^{n+1}$ , вычисляются с использованием уравнений (2), (3) и (5). Здесь мы используем идею метода расщепления, в котором вычислительный процесс разделен на три стадии [9, 10]. Первая стадия состоит в вычислении предварительных значений компонент вектора скорости  $V^*$ ,  $W^*$  с помощью явной аппроксимации уравнений (2), (3). Затем, во второй стадии, вычисляем  $\langle p_1 \rangle^{n+1}$  как решение уравнения Пуассона с граничными условиями Неймана на осях симметрии и граничными условиями Дирихле на удаленных границах. Метод стабилизирующей поправки [8] используется на этой стадии. Наконец, на третьей стадии новые компоненты вектора скорости  $V^{n+1}$ ,  $W^{n+1}$  вычисляются из требования выполнения условий несжимаемости (5).

3. С применением метода расщепления по пространственным переменным [8] из уравнений (4), (12)–(17) последовательно определяются сеточные функции  $\langle \rho_1 \rangle_{i,j}^{n+1}$ ,  $e_{i,j}^{n+1}$ ,  $\varepsilon_{i,j}^{n+1}$ ,  $\langle v'w' \rangle_{i,j}^{n+1}$ .

Из соображений простоты реализации алгоритма используется известная идея метода последовательных итераций Гаусса—Зейделя. При вычислении функций  $\langle \rho_1 \rangle^{n+1}$ ,  $e^{n+1}$ ,  $\varepsilon^{n+1}$ ,  $\langle v'w' \rangle^{n+1}$  мы использовали величины, уже известные в этом сечении  $x = x^{n+1}$ , остальные функции взяты с предыдущего сечения  $x = x^n$ .

Как пример приведем детали временной и пространственной аппроксимаций, используемых для численного решения уравнений переноса (1), (4), (12)–(17) по схеме расщепления. Рассмотрим типичное уравнение переноса, записанное в новых координатах (19):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{J} \left( \frac{\partial z_\eta V f}{\partial \xi} + \frac{\partial y_\xi W f}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{z_\eta K_y}{y_\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{y_\xi K_z}{z_\eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right) + Q. \quad (20)$$

Здесь  $z_\eta$ ,  $y_\xi$  обозначают производные по нижним индексам;  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', \xi, \eta)}$  — якобиан преобразования (19);  $f$  обозначает одну из неизвестных функций  $U_d$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$ ,  $\langle \rho_1 \rangle$  и т. д.;  $Q$  — правые части соответствующих уравнений. Для упрощения записи введем обозначения для величин в узлах разнесенных сеток, получаемых с помощью интерполяции:  $f_{i,j+1/2} = (f_{i,j+1} + f_{i,j}) \times 0.5$ ,  $f_{i+1/2,j} = (f_{i+1,j} + f_{i,j}) \times 0.5$ . Также введем обозначения производных от преобразования координат  $(z_\eta)_{i,j+1/2} = \frac{z_{j+1} - z_j}{h_\eta}$ ,  $(y_\xi)_{i+1/2,j} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_\xi}$ .

Схема расщепления для уравнения (20) записывается следующим образом:

$$\frac{f_{i,j}^{n+1/2} - f_{i,j}^n}{h_x} + \frac{1}{J_{i,j}} \frac{(z_\eta V^n f^{n+1/2})_{i+1/2,j} - (z_\eta V^n f^{n+1/2})_{i-1/2,j}}{h_\xi} =$$

$$\frac{1}{J_{i,j}} \frac{\widehat{K}_{i+1/2,j}^y (f_{i+1,j}^{n+1/2} - f_{i,j}^{n+1/2}) - \widehat{K}_{i-1/2,j}^y (f_{i,j}^{n+1/2} - f_{i-1,j}^{n+1/2})}{h_\xi^2} + Q_{i,j}, \quad (21)$$

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{1}{J_{i,j}} \frac{(y_\xi W^n f^{n+1})_{i,j+1/2} - (y_\xi W^n f^{n+1})_{i,j-1/2}}{h_\eta} =$$

$$\frac{1}{J_{i,j}} \frac{\widehat{K}_{i,j+1/2}^z (f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j}^{n+1}) - \widehat{K}_{i,j-1/2}^z (f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1})}{h_\eta^2}. \quad (22)$$

Здесь использованы обозначения  $\widehat{K}^y = \frac{z_\eta}{y_\xi} K_y$ ,  $\widehat{K}^z = \frac{y_\xi}{z_\eta} K_z$ . Уравнения (21) и (22) решаются последовательно с использованием метода прогонки для решения трехдиагональной системы алгебраических уравнений (см., например, [8]).

Уравнения (2), (3) и (5) для поля дефекта давления и компонент вектора скорости в поперечном сечении следа подобны двумерным несжимаемым уравнениям Навье—Стокса, в которых переменная  $x$  играет роль времени. В новой системе координат безразмерные уравнения (2), (3) и (5) принимают следующую форму

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{J} \frac{\partial(z_\eta V^2)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial(y_\xi WV)}{\partial \eta} = -\frac{\partial z_\eta \langle p_1 \rangle}{\partial \xi} + F_1(\langle \rho_1 \rangle, e, \varepsilon, \langle v'w' \rangle), \quad (23)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{J} \frac{\partial(z_\eta VW)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial(y_\xi W^2)}{\partial \eta} = -\frac{\partial y_\xi \langle p_1 \rangle}{\partial \eta} + F_2(\langle \rho_1 \rangle, e, \varepsilon, \langle v'w' \rangle), \quad (24)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} (z_\eta V) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} (y_\xi W) = \frac{\partial U_d}{\partial x}. \quad (25)$$

Здесь  $F_1$ ,  $F_2$  используются для обозначения правых частей уравнений (2), (3). Частные производные  $\frac{\partial U_d}{\partial x}$  в (25) аппроксимируются односторонней разностью вперед

$$\left( \frac{\partial U_d}{\partial x} \right)_{i,j}^{n+1} \simeq \frac{(U_d)_{i,j}^{n+1} - (U_d)_{i,j}^n}{h_x^{n+1}} = \alpha_{i,j}^{n+1}.$$

Рассмотрим три стадии вычислительного процесса.

— Сначала уравнения (23), (24) решаются без учета градиента давления. Выражения  $F_1$ ,  $F_2$ , стоящие в правых частях, вычисляются по значениям неизвестных на  $n$ -м слое по переменной  $x$ :

$$\frac{\widetilde{V}_{i+1/2,j} - V_{i+1/2,j}^n}{h_x^{n+1}} + \frac{1}{J_{i+1/2,j}} \frac{(z_\eta V^2)_{i+1,j}^n - (z_\eta V^2)_{i,j}^n}{h_\xi} +$$

$$+ \frac{1}{J_{i+1/2,j}} \frac{(y_\xi WV)_{i+1/2,j+1/2}^n - (y_\xi WV)_{i+1/2,j-1/2}^n}{h_\eta} = (F_1)_{i+1/2,j}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{W}_{i,j+1/2} - W_{i,j+1/2}^n}{h_x} + \frac{1}{J_{i,j+1/2}} \frac{(z_\eta VW)_{i+1/2,j+1/2}^n - (z_\eta VW)_{i-1/2,j+1/2}^n}{h_\xi} + \\ & + \frac{1}{J_{i,j+1/2}} \frac{(y_\xi W^2)_{i,j+1}^n - (y_\xi W^2)_{i,j}^n}{h_\eta} = (F_2)_{i,j+1/2}. \end{aligned} \quad (27)$$

— На втором этапе поле дефекта давления  $\langle p_1 \rangle^{n+1}$  вычисляется из разностного аналога уравнения Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{z_\eta}{y_\xi} \frac{\partial \langle p_1^{n+1} \rangle}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{y_\xi}{z_\eta} \frac{\partial \langle p_1^{n+1} \rangle}{\partial \eta} \right] = \frac{1}{h_x} \left\{ \frac{\partial z_\eta}{\partial \xi} \tilde{V} + \frac{\partial y_\xi}{\partial \eta} \tilde{W} - J \alpha^{n+1} \right\}. \quad (28)$$

Как упомянуто выше, уравнение (28) решается с применением итерационной схемы стабилизирующей поправки. В качестве краевых условий для дефекта давления на удаленной границе  $z = z_*$ ,  $y = y_*$  задаются соотношения  $\langle p_1 \rangle_{i,N_z} = 0$ ,  $\langle p_1 \rangle_{N_y,j} = 0$ . На осях симметрии  $y = 0$ ,  $z = 0$  ставились конечно-разностные аналоги условий Неймана, являющиеся следствием дифференциальных уравнений (2), (3) и аппроксимированные следующим образом:

$$\frac{\langle p_1 \rangle_{2,j} - \langle p_1 \rangle_{1,j}}{h_\xi} = 0, \quad \frac{\langle p_1 \rangle_{i,2} - \langle p_1 \rangle_{i,1}}{h_\eta} = 0.$$

— На последней (третьей) стадии значения компонент вектора скорости  $W^{n+1}$ ,  $V^{n+1}$  определены из требования удовлетворения разностному аналогу уравнения несжимаемости (5)

$$\begin{aligned} V_{i+1/2,j}^{n+1} &= \tilde{V}_{i+1/2,j} - h_x^{n+1} \frac{1}{J_{i+1/2,j}} \left( \frac{(z_\eta \langle p_1 \rangle)_{i+1,j}^{n+1} - (z_\eta \langle p_1 \rangle)_{i,j}^{n+1}}{h_\xi} \right), \\ W_{i,j+1/2}^{n+1} &= \tilde{W}_{i,j+1/2} - h_x^{n+1} \frac{1}{J_{i,j+1/2}} \left( \frac{(y_\xi \langle p_1 \rangle)_{i,j+1}^{n+1} - (y_\xi \langle p_1 \rangle)_{i,j}^{n+1}}{h_\eta} \right). \end{aligned}$$

### 3. Результаты вычислений

С целью проверки эффективности математических моделей и численного алгоритма выполнен ряд численных экспериментов. Вычисления проводились на последовательности сеток и сравнивались с экспериментальными данными Дж. Линя и Ю. Пао [6, 7] по вырождению безымпурсного следа и следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде. Основные вычисления были выполнены на сетке размерностью  $71 \times 36$  узлов в  $yz$ -плоскости. Измельчение размеров ячеек сетки в два раза в окрестности следа приводило к отклонениям величин  $\sqrt{e_0}$ ,  $U_{D0}$ , не превышающим 1–3%. Результаты вычислений для плотностного числа Фруда  $Fr = 31$  представлены на рис. 2 и 3. Изменение во времени безразмерных осевых значений энергии турбулентности  $e_0(x) = e(x, 0, 0)$  и дефекта продольной компоненты скорости  $U_D(x) = U_d(x, 0, 0)$  в безымпурсном турбулентном следе и следе за буксируемым телом также показаны на этих рисунках.

Результаты численных экспериментов демонстрируют существенное различие между развитием турбулентных следов за буксируемым и самодвижущимися телами.



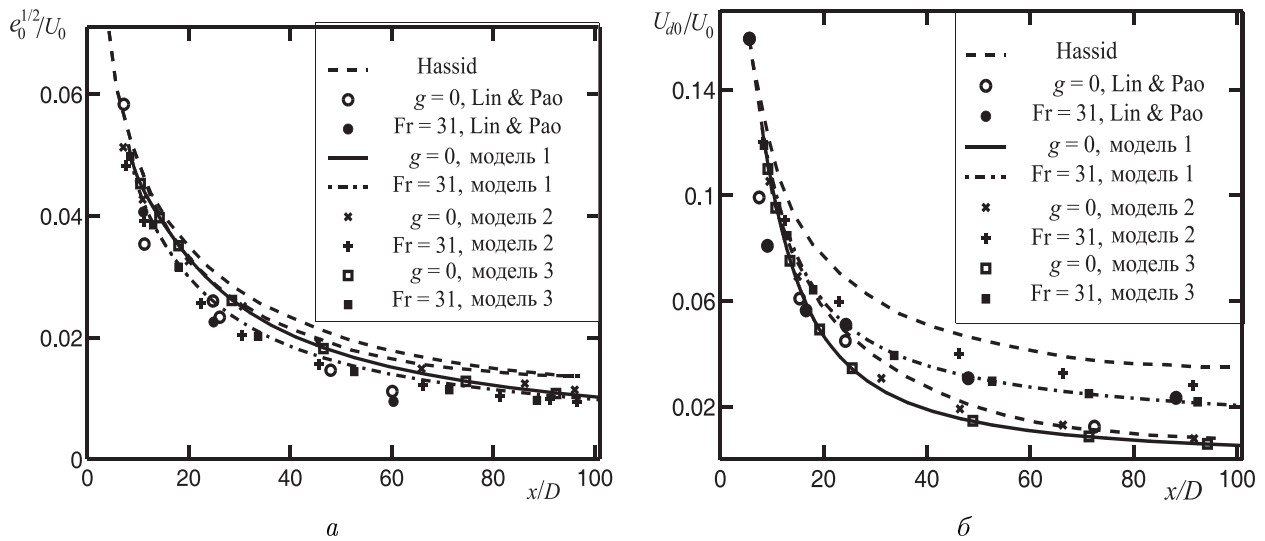


Рис. 2. Сопоставление рассчитанных с применением моделей 1–3 осевых значений энергии турбулентности  $e_0(x) = e(x, 0, 0)$  (а) и дефекта продольной компоненты скорости  $U_D(x) = U_d(x, 0, 0)$  (б) в турбулентном следе за самодвижущимся телом с экспериментальными данными Дж. Линя и Ю. Пао и результатами расчетов С. Хессиды

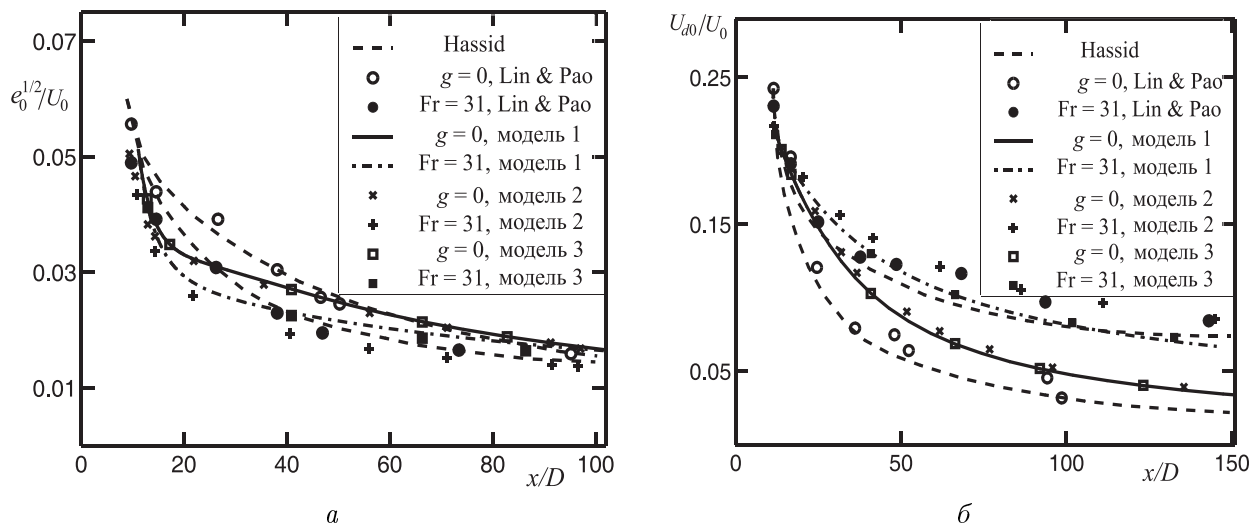


Рис. 3. Сопоставление рассчитанных с применением моделей 1–3 осевых значений энергии турбулентности  $e_0(x) = e(x, 0, 0)$  (а) и дефекта продольной компоненты скорости  $U_D(x) = U_d(x, 0, 0)$  (б) в буксируемом турбулентном следе с экспериментальными данными Дж. Линя и Ю. Пао и результатами расчетов С. Хессиды

На рис. 4 представлены линии равной энергии  $e/e_0 = \text{const}$ . Область, занимаемая турбулентным следом за буксируемым телом, значительно больше, чем область турбулентного следа за самодвижущимся телом. Это явление обусловлено тем, что в турбулентном следе за буксируемым телом имеется порождение за счет градиентов осредненной продольной компоненты скорости. В безимпульсном следе вклад порождения за счет градиентов осредненной продольной компоненты скорости несуществен. В следе за самодвижущимся телом вырождение турбулентности происходит быстрее по сравнению со следом за буксируемым телом. В результате, в следе за буксируемым телом

в стратифицированной жидкой среде турбулентность порождает перемешивание большего объема жидкости, и воздействие силы тяжести становится причиной генерации внутренних волн большей амплитуды [11].

Течение в безимпульсном следе в линейно стратифицированной среде характеризуется анизотропным вырождением интенсивностей турбулентных флуктуаций продольной и вертикальной компонент скорости [4, 6]. Проведенные расчеты также демонстрируют анизотропию вырождения турбулентности и в следе за буксируемым телом в линейно стратифицированной жидкости. В настоящих численных экспериментах анизотропия иллюстрируется рис. 5.

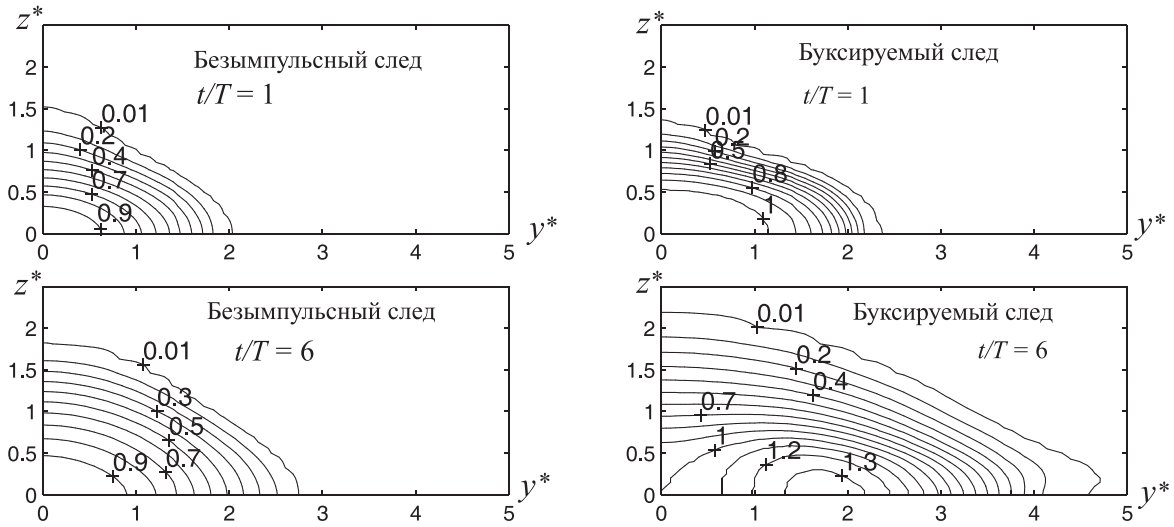


Рис. 4. Изолинии  $e/e_0 = \text{const}$ ,  $e_0 = e(t, 0, 0)$  для турбулентных следов за самодвижущимися и буксируемыми телами,  $Fr = 280$ ,  $t/T = 1, 6$

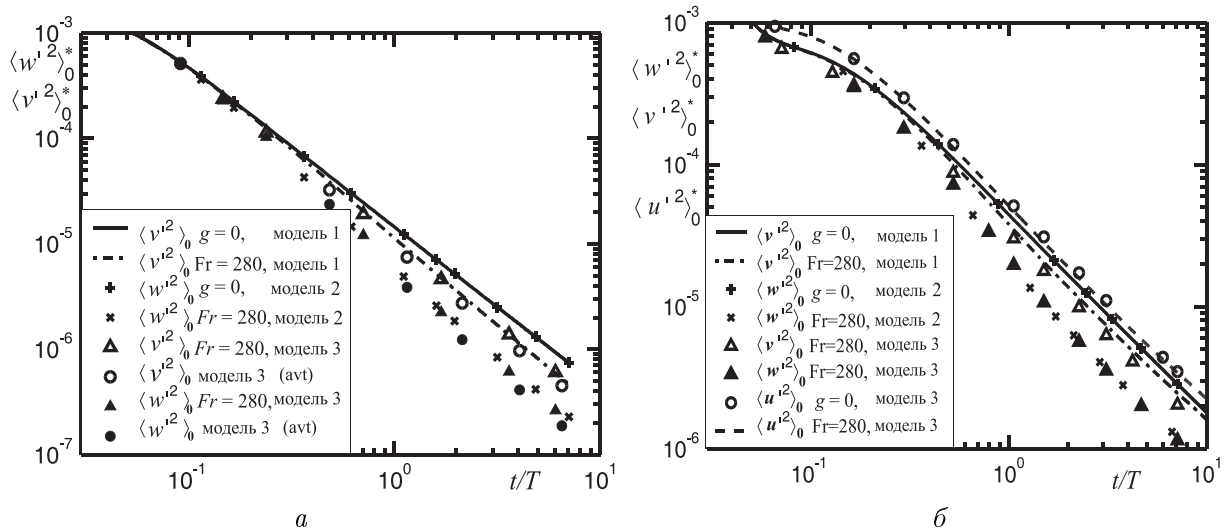


Рис. 5. Поведение осевых значений дисперсий турбулентных флуктуаций горизонтальной и вертикальной компонент скорости для безимпульсного следа (а) и следа за буксируемым телом (б); модель 3 (авт) соответствует результатам расчетов по модели 3 с автомодельными начальными данными, согласованными с экспериментальными данными; модель 2 дает результаты, близкие к модели 1; в безимпульсном следе  $\langle u'^2 \rangle \approx \langle v'^2 \rangle$

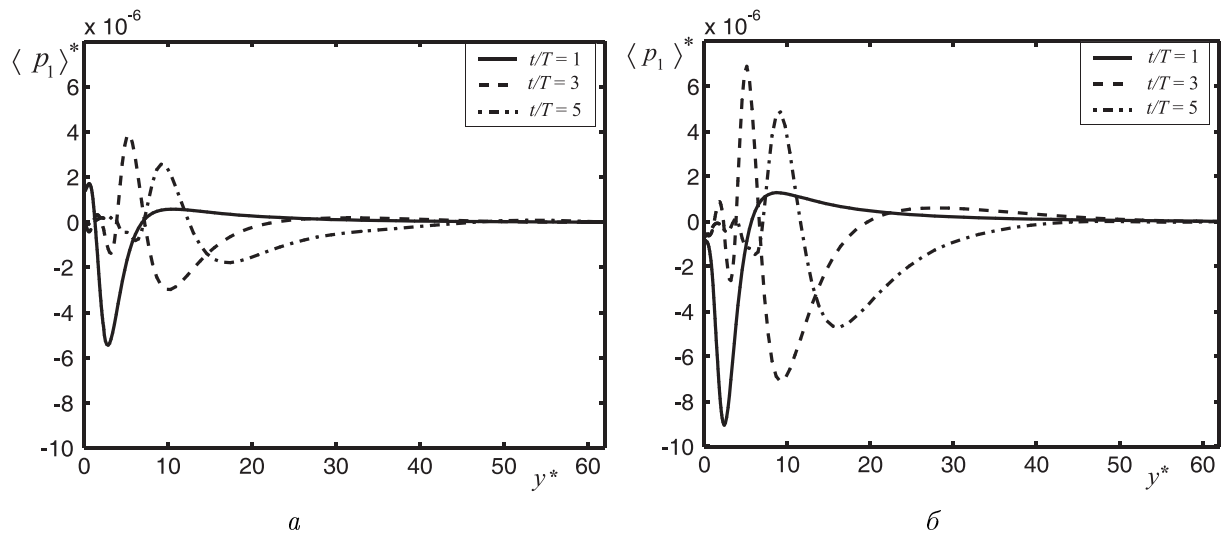


Рис. 6. Изменение во времени ( $t/T = 1.0; 3.0; 5.0$ ) линий  $\langle p_1 \rangle^*(y^*, z_0^*, t)$ ,  $z_0^* = 2$  в безымпульном следе (а) и в следе за буксируемым телом (б); расчеты проведены по модели 1; модели 2 и 3 дают близкие значения

Динамика турбулентных следов в линейно стратифицированной жидкости характеризуется рис. 6, на котором изображено изменение во времени ( $t/T = 1.0; 3.0; 5.0$ ) линий  $\langle p_1 \rangle^*(y^*, z_0^*, t)$ ,  $z_0^* = 2$  в безымпульном следе и следе за буксируемым телом. Изолинии избыточного давления носят “волновой” характер. Обращает на себя внимание тот факт, что буксируемому телу соответствуют большие значения  $\langle p_1 \rangle^*(y^*, z_0^*, t)$  и это обусловлено большими возмущениями, вносимыми турбулентным следом за буксируемым телом в стратифицированную жидкость. Последнее, как отмечалось выше, связано с наличием в следе за буксируемым телом порождения энергии турбулентности за счет градиентов продольной компоненты скорости.

## Заключение

Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом.

— Продемонстрирована эффективность применения методов расщепления при построении численных моделей динамики турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде. Построены численные модели, основанные на трехмерной системе параболизированных осредненных уравнений гидродинамики, для замыкания которых используется иерархия полуэмпирических моделей турбулентности второго порядка.

— Осуществлено тестирование численных моделей. Приведены результаты расчетов, демонстрирующие динамику дальнего турбулентного следа за буксируемым телом в сопоставлении с динамикой дальнего следа за самодвижущимся телом в линейно стратифицированной жидкости.

— Показано, что турбулентный след за буксируемым телом характеризуется существенно большими геометрическими размерами. Это обусловлено тем, что в турбулентном следе за буксируемым телом имеется порождение за счет градиентов осредненной продольной компоненты скорости.

— Рассмотрен вопрос об анизотропном вырождении турбулентности в следе за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде.

Автор признателен Г.Г. Черных и А.В. Фоминой за помощь при выполнении работы.

## Список литературы

- [1] MEUNIER P., SPEDDING G.R. Stratified propelled wakes // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 552. P. 229–256.
- [2] DOMMERMUTH D.G., ROTTMAN J.W., INNIS G.E., NOVIKOV E.A. Numerical simulation of the wake of a towed sphere in a weakly stratified fluid // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 473. P. 83–101.
- [3] GOURLAY M.J., ARENDT S.C., FRITTS D.C., WERNE J. Numerical modelling of initially turbulent wakes with net momentum // Physics of Fluids. 2001. Vol. 13, N. 12. P. 3783–3802.
- [4] CHERNYKH G.G., VOROPAYEVA O.F. Numerical modelling of momentumless turbulent wake dynamics in a linear stratified medium // Comput. and Fluids. 1999. Vol. 28. P. 281–306.
- [5] RODI W. Examples of calculation method for flow and mixing in stratified fluids // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92, N. 5. P. 5305–5328.
- [6] LIN J.T., PAO Y.H. Wakes in stratified fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11. P. 317–336.
- [7] HASSID S. Collapse of turbulent wakes in stratified media // J. Hydronautics. 1980. Vol. 14. P. 25–32.
- [8] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [9] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1977.
- [10] ДАНИЛЕНКО А.Ю., КОСТИН В.И., ТОЛСТЫХ А.И. О неявном алгоритме расчета течений однородной и неоднородной жидкости. М., 1985 (Препринт/ВЦ АН СССР).
- [11] ВОРОПАЕВА О.Ф., МОШКИН Н.П., ЧЕРНЫХ Г.Г. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде // Математ. моделирование. 2000. Т. 12, № 1. С. 77–94.

*Поступила в редакцию 2 ноября 2008 г.*