

МЕТОД ЭКВИРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АДАПТИВНЫХ СЕТОК*

Г. С. ХАКИМЗЯНОВ, Н. Ю. ШОКИНА

Институт вычислительных технологий СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: khak@adm.ict.nsc.ru, shokin@ict.nsc.ru

The equidistribution method for constructing motionless regular grids is considered in the present work. The grids are adapted to the curvilinear boundaries of the domain as well as to the control function which is a priori given in the domain. Using the general methodology based on the equidistribution principle, the nonlinear equations of the elliptic type for the definition of the nodes coordinates inside the domain and on its boundaries are obtained.

В настоящее время численные методы являются эффективным средством решения большого числа практических задач механики сплошных сред. Очевидно, что точность решения задач о течениях жидкости и газа будет во многом зависеть от качества построенной сетки. Поскольку характеристики течения могут сильно изменяться в одних частях области и практически не меняться в других, желательно строить сетку так, чтобы она была более плотной в первом случае и более разреженной во втором. Кроме того, важными ограничивающими факторами являются затраты памяти и время работы компьютера.

Сетка, которая строится с учетом особенностей поставленной задачи, называется адаптивной. Существуют два подхода к адаптации сеток. Первый из них заключается в перераспределении точек сетки при сохранении их количества. Второй подход состоит в добавлении точек в тех частях области, где требуется более мелкая сетка.

Аналогично работе [1] можно выделить основные принципы адаптации сеток.

1. Плотность сетки является функцией какой-либо величины поставленной задачи (например, характеристики течения (скорость, давление и т. д.) или характеристики конфигурации области (кривизна, ширина и т. д.)).

2. Пользователь контролирует как, когда, где и насколько изменяется сетка.

3. Процесс адаптации сетки не генерирует “плохих” ячеек.

4. Ортогональность линий сетки и другие “хорошие” качества не уменьшаются в процессе адаптации.

5. Время решения всей задачи не увеличивается существенно при введении процедуры адаптации сетки в общий алгоритм.

Идея эквираспределения для построения адаптивных сеток была впервые изложена в работе [2] для одномерного случая. В дальнейшем при построении сеток в двумерном

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №97-01-00819.

© Г. С. Хакимянов, Н. Ю. Шокина, 1998.

[3–5] и трехмерном [6], [7] случаях принцип эквираспределения использовался отдельно в каждом координатном направлении, то есть для построения многомерной сетки несколько раз применялся одномерный принцип эквираспределения.

В настоящей работе приведены формулировка принципа эквираспределения и уравнения метода эквираспределения в дифференциальной и разностной формах для одномерного случая. На основе единой методологии сформулирован принцип эквираспределения и получены уравнения на дифференциальном уровне для двумерного случая. Доказана лемма об эквивалентности при некоторых дополнительных ограничениях принципа и уравнений эквираспределения на дифференциальном уровне. Выведены двумерные разностные аналоги принципа и уравнений эквираспределения. На разностном уровне показано, что координаты любой квазиортогональной адаптивной сетки будут удовлетворять уравнениям эквираспределения. Получены уравнения для расстановки узлов на границе двумерной области с использованием той же управляющей функции, что и внутри области.

Далее сформулированы принцип и уравнения эквираспределения на дифференциальном уровне для трехмерного случая. Доказано утверждение об эквивалентности, аналогичное двумерному случаю. Получены трехмерные принцип и уравнения эквираспределения на разностном уровне. Приведены условия, при которых на границе трехмерной области можно строить сетку методом эквираспределения при использовании такой же управляющей функции, что и внутри области. Выписаны дифференциальные и разностные уравнения эквираспределения для пространственных поверхностей и кривых. Приведены примеры трехмерных адаптивных сеток, построенных методом эквираспределения.

1. Одномерный метод эквираспределения

В работе [2] описывается метод эквираспределения для построения одномерных адаптивных сеток, покрывающих отрезок $[0; L]$. Суть метода эквираспределения заключается в том, чтобы при конструировании сетки добиться постоянства произведения длины ячейки на значение управляющей функции w в центре ячейки. Пусть x_j — координаты узлов сетки, $j = 1, \dots, N$, при этом $x_1 = 0$, $x_N = L$. Если длину ячейки $[x_j; x_{j+1}]$ обозначить через $S_{j+1/2}$, то принцип эквираспределения примет вид

$$w(x_{j+1/2})S_{j+1/2} = \tilde{C}_h = \text{const}, \quad j = 1, \dots, N - 1. \quad (1.1)$$

Таким образом, длины ячеек будут малы там, где w принимает большие значения и, наоборот, узлы сетки будут иметь разрежения в той части $\Omega = (0; L)$, в которой функция w принимает малые значения. Здесь и всюду далее предполагается, что управляющая функция удовлетворяет ограничениям

$$1 \leq w(x) \leq W, \quad W = \text{const} < \infty, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (1.2)$$

Принцип эквираспределения (1.1) является разностным аналогом дифференциального уравнения

$$w(x) \frac{dx}{dq}(q) = C, \quad C = \text{const}, \quad q \in Q = (0; 1), \quad (1.3)$$

где

$$x = x(q), \quad q \in \bar{Q} \quad (1.4)$$

есть искомое взаимно-однозначное отображение \bar{Q} на $\bar{\Omega}$. Уравнение (1.3) будем называть принципом эквираспределения в дифференциальной форме. На практике при вычислении

координат узлов используется аппроксимация следствия уравнения (1.3), получающегося его дифференцированием:

$$\frac{d}{dq} \left(w(x) \frac{dx}{dq} \right) (q) = 0. \quad (1.5)$$

Полученное уравнение называют уравнением метода эквираспределения в дифференциальной форме или ED1-уравнением в дифференциальной форме. Его разностный аналог

$$\frac{1}{h} \left[w(x_{j+1/2}) \frac{x_{j+1} - x_j}{h} - w(x_{j-1/2}) \frac{x_j - x_{j-1}}{h} \right] = 0, \quad j = 2, \dots, N - 1 \quad (1.6)$$

будем называть ED1-уравнением в разностной форме.

Далее вместо (1.1) и (1.3) будем использовать соотношения, в которые входит якобиан отображения (1.4). Обозначим его через J , $J(q) = \frac{dx}{dq}(q)$. Тогда принцип эквираспределения (1.3) примет вид

$$w(x(q))J(q) = C, \quad C = \text{const}, \quad q \in Q. \quad (1.7)$$

Если якобиан J в центре ячейки аппроксимировать центральной разностью

$$J_{j+1/2} = \frac{x_{j+1} - x_j}{h}, \quad (1.8)$$

то из (1.7) будет следовать разностный аналог (1.1) принципа эквираспределения, который можно теперь записать как

$$w(x_{j+1/2})J_{j+1/2} = \frac{\tilde{C}_h}{h} \equiv C_h = \text{const}, \quad j = 1, \dots, N - 1. \quad (1.9)$$

В одномерном случае принцип эквираспределения и ED1-уравнение эквивалентны в том смысле, что если отображение (1.4) удовлетворяет принципу эквираспределения (1.7), то функция $x = x(q)$ будет и решением ED1-уравнения (1.5), и наоборот, любое решение ED1-уравнения (1.5) удовлетворяет принципу эквираспределения (1.7). Эквивалентность имеет место и на разностном уровне: если координаты узлов сетки удовлетворяют принципу эквираспределения (1.9), то сеточная функция x_j является решением разностных ED1-уравнений (1.6), а решение этих уравнений дает сетку, удовлетворяющую принципу эквираспределения (1.9).

В последующих разделах работы будут даны формулировки принципа эквираспределения в многомерном случае, выведены уравнения метода эквираспределения и определены некоторые достаточные условия, при выполнении которых принцип и уравнение метода эквираспределения будут эквивалентны в отмеченном выше смысле.

2. Двумерный метод эквираспределения

В двумерном случае аналогом длины одномерной ячейки является площадь ячейки двумерной сетки с узлами \mathbf{x}_j , покрывающей область Ω с границей Γ . Здесь $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$, $j = (j_1, j_2)$ — мультииндекс, $j_\alpha = 1, \dots, N_\alpha$. Площадь четырехугольной ячейки с вершинами \mathbf{x}_{j_1, j_2} , \mathbf{x}_{j_1+1, j_2} , $\mathbf{x}_{j_1+1, j_2+1}$, \mathbf{x}_{j_1, j_2+1} будем обозначать через $S_{j+1/2}$. Тогда принцип эквираспределения, аналогичный (1.1), может быть записан в виде

$$w(\mathbf{x}_{j+1/2})S_{j+1/2} = \tilde{C}_h, \quad j_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad (2.1)$$

где $w(\mathbf{x}_{j+1/2})$ — значение заданной управляющей функции в центре ячейки, координаты которой определяются как среднее арифметическое соответствующих координат четырех ее вершин.

Совокупность узлов сетки обозначим через $\bar{\Omega}_h$. Будем считать, что множество $\bar{\Omega}_h$ является образом равномерной прямоугольной сетки \bar{Q}_h , покрывающей квадрат $\bar{Q} = [0; 1] \times [0; 1]$, при взаимно-однозначном отображении

$$x^\alpha = x^\alpha(q^1, q^2), \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.2)$$

плоскости $q^1 O q^2$ на плоскость декартовых координат $x^1 O x^2$. Отображение (2.2) является неизвестным. Выведем дифференциальное уравнение для определения этого отображения.

Возьмем тождество, которому удовлетворяет произвольное гладкое отображение (2.2):

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{g_{22}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} - \frac{g_{12}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(-\frac{g_{12}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} + \frac{g_{11}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Это тождество представляет собой уравнение Лапласа относительно неизвестных функций x^α , записанное в новых координатах q^α . Ковариантные компоненты метрического тензора искомого преобразования (2.2), входящие в рассматриваемое тождество, обозначены через $g_{\alpha\beta}$.

Чтобы сузить множество функций, удовлетворяющих тождеству (2.3), введем для них дополнительные ограничения. Во-первых, будем предполагать, что система координат, определяемая искомым отображением (2.2), является ортогональной; в математической форме это означает

$$g_{12} = 0. \quad (2.4)$$

И, во-вторых, будем считать, что отображение (2.2) удовлетворяет принципу эквираспределения в дифференциальной форме, аналогичному принципу (1.7) в одномерном случае:

$$w(\mathbf{x}(\mathbf{q}))J(\mathbf{q}) = C, \quad C = \text{const}, \quad \mathbf{q} = (q^1, q^2) \in Q, \quad (2.5)$$

где J — якобиан отображения (2.2). Использование этих условий в тождестве (2.3) приводит к двумерным уравнениям метода эквираспределения или к ED2-уравнениям в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(w g_{22} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(w g_{11} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.6)$$

Итак, в двумерном случае ED2-уравнения следуют из принципа эквираспределения (2.5) при дополнительном предположении об ортогональности отображения (2.2). Оказывается, верно и обратное утверждение о выполнении принципа эквираспределения для решений уравнений (2.6), удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.

Лемма 2.1. *Если отображение (2.2), задаваемое решениями уравнений (2.6), является невырожденным и ортогональным, то для него выполняется принцип эквираспределения (2.5).*

Доказательство. Использование равенства $g_{12} = 0$ из условия леммы и тождества

$$g_{\beta\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^{3-\beta}} - g_{12} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} = (-1)^{\alpha+\beta-1} J \frac{\partial x^{3-\alpha}}{\partial q^\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

в котором суммирование по повторяющимся индексам α и β не производится, приводит к соотношениям

$$g_{22} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} = (-1)^{\alpha+1} J \frac{\partial x^{3-\alpha}}{\partial q^2}, \quad g_{11} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} = (-1)^\alpha J \frac{\partial x^{3-\alpha}}{\partial q^1}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Подставляя их в уравнения (2.6), получим однородную систему из двух уравнений

$$\frac{\partial w J}{\partial q^1} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} - \frac{\partial w J}{\partial q^2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

относительно производных $\partial w J / \partial q^\alpha$, определитель которой совпадает с якобианом J . В силу предположения $J \neq 0$ эта система имеет лишь тривиальное решение $\partial w J / \partial q^\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2$. Отсюда следует, что $wJ = \text{const}$.

Покажем, как следует аппроксимировать уравнение (2.6), чтобы указанное в лемме свойство выполнялось и на разностном уровне. Покроем \bar{Q} равномерной прямоугольной сеткой с количеством узлов N_α и шагом h_α в направлении оси Oq^α , $h_\alpha = 1/(N_\alpha - 1)$, $\alpha = 1, 2$. Пусть $\mathbf{q}_j = (q_{j_1}^1, q_{j_2}^2)$, $j = (j_1, j_2)$, $j_\alpha = 1, \dots, N_\alpha$, $q_{j_\alpha}^\alpha = (j_\alpha - 1)h_\alpha$. Введем два базисных оператора разностных производных:

$$(D_{q^1} \varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1 + h_1/2, q^2) - \varphi(q^1 - h_1/2, q^2)}{h_1}, \quad (2.7)$$

$$(D_{q^2} \varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1, q^2 + h_2/2) - \varphi(q^1, q^2 - h_2/2)}{h_2}. \quad (2.8)$$

При использовании этих производных для записи разностных операторов необходимо учитывать область определения сеточных функций, так как в некоторых случаях сеточные функции будут относиться не к узлам сетки с целыми индексами, а, например, к центрам ячеек (узлы с двумя полуцелыми индексами) или к центрам сторон ячеек (узлы с одним целым и одним полуцелым индексами). Таким образом, результат действия операторов D_{q^α} зависит от того, в каких узлах определена сеточная функция φ . Этот результат будет также зависеть и от того, в какой точке требуется вычислить производную. Если функция φ определена в целых узлах $\mathbf{q}_j = (q_{j_1}^1, q_{j_2}^2)$, то полагаем

$$\begin{aligned} (D_{q^1} \varphi)_{j_1+1/2, j_2} &= \frac{\varphi_{j_1+1, j_2} - \varphi_{j_1, j_2}}{h_1}, \\ (D_{q^1} \varphi)_{j_1, j_2} &= \frac{(D_{q^1} \varphi)_{j_1-1/2, j_2} + (D_{q^1} \varphi)_{j_1+1/2, j_2}}{2}, \\ (D_{q^1} \varphi)_{j_1, j_2+1/2} &= \frac{(D_{q^1} \varphi)_{j_1, j_2} + (D_{q^1} \varphi)_{j_1, j_2+1}}{2}, \\ (D_{q^1} \varphi)_{j_1+1/2, j_2+1/2} &= \frac{(D_{q^1} \varphi)_{j_1+1/2, j_2} + (D_{q^1} \varphi)_{j_1+1/2, j_2+1}}{2}. \end{aligned}$$

Формула (2.7) для сеточных функций, определенных в центрах ячеек $\mathbf{q}_{j+1/2} = (q_{j_1+1/2}^1, q_{j_2+1/2}^2)$, $q_{j_\alpha+1/2}^\alpha = q_{j_\alpha}^\alpha + h_\alpha/2$, принимает следующий вид:

$$(D_{q^1} \varphi)_{j_1, j_2+1/2} = \frac{\varphi_{j_1+1/2, j_2+1/2} - \varphi_{j_1-1/2, j_2+1/2}}{h_1},$$

$$\begin{aligned}(D_{q^1}\varphi)_{j_1,j_2} &= \frac{(D_{q^1}\varphi)_{j_1,j_2-1/2} + (D_{q^1}\varphi)_{j_1,j_2+1/2}}{2}, \\(D_{q^1}\varphi)_{j_1+1/2,j_2+1/2} &= \frac{(D_{q^1}\varphi)_{j_1,j_2+1/2} + (D_{q^1}\varphi)_{j_1+1,j_2+1/2}}{2}, \\(D_{q^1}\varphi)_{j_1+1/2,j_2} &= \frac{(D_{q^1}\varphi)_{j_1,j_2} + (D_{q^1}\varphi)_{j_1+1,j_2}}{2}.\end{aligned}$$

Если сеточная функция φ определена в центрах $\mathbf{q}_{j_1+1/2,j_2} = (q_{j_1+1/2}^1, q_{j_2}^2)$ горизонтальных сторон ячеек, то под разностной производной (2.7) понимаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}(D_{q^1}\varphi)_j &= \frac{\varphi_{j_1+1/2,j_2} - \varphi_{j_1-1/2,j_2}}{h_1}, \\(D_{q^1}\varphi)_{j_1+1/2,j_2} &= \frac{(D_{q^1}\varphi)_{j_1,j_2} + (D_{q^1}\varphi)_{j_1+1,j_2}}{2}, \\(D_{q^1}\varphi)_{j_1,j_2+1/2} &= \frac{(D_{q^1}\varphi)_{j_1,j_2} + (D_{q^1}\varphi)_{j_1,j_2+1}}{2}, \\(D_{q^1}\varphi)_{j_1+1/2,j_2+1/2} &= \frac{(D_{q^1}\varphi)_{j_1+1/2,j_2} + (D_{q^1}\varphi)_{j_1+1/2,j_2+1}}{2}.\end{aligned}$$

Аналогично, с использованием при необходимости осредненных значений φ , вычисляется разностная производная $D_{q^1}\varphi$ для сеточных функций, определенных в центрах $\mathbf{q}_{j_1,j_2+1/2} = (q_{j_1}^1, q_{j_2+1/2}^2)$ вертикальных сторон ячеек, а также производная $D_{q^2}\varphi$.

Разностные уравнения для координат узлов получаются интегро-интерполяционным методом. Для этого уравнение (2.6) заменяется интегральным соотношением

$$\oint_{\mathcal{C}} w g_{22} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} dq^2 - w g_{11} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} dq^1 = 0, \quad (2.9)$$

где \mathcal{C} — контур прямоугольника, стороны которого параллельны осям Oq^α и делят пополам расстояния от рассматриваемого внутреннего узла \mathbf{q}_j до соседних с ним узлов. Интегралы по сторонам этого контура будем аппроксимировать по формуле трапеций, предполагая, что сеточные функции x^α определены в целых узлах \mathbf{q}_j , а функция w — в центрах ячеек. Компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и якобиан также определены в центрах ячеек и вычисляются по формулам

$$(g_{11})_{j+1/2} = (D_{q^1}x^1 D_{q^1}x^1 + D_{q^1}x^2 D_{q^1}x^2)_{j+1/2}, \quad (2.10)$$

$$(g_{12})_{j+1/2} = (D_{q^1}x^1 D_{q^2}x^1 + D_{q^1}x^2 D_{q^2}x^2)_{j+1/2}, \quad (2.11)$$

$$(g_{22})_{j+1/2} = (D_{q^2}x^1 D_{q^2}x^1 + D_{q^2}x^2 D_{q^2}x^2)_{j+1/2}, \quad (2.12)$$

$$J_{j+1/2} = (D_{q^1}x^1 D_{q^2}x^2 - D_{q^2}x^1 D_{q^1}x^2)_{j+1/2}. \quad (2.13)$$

В результате будем иметь следующие разностные ED2-уравнения:

$$(D_{q^1}(w g_{22} D_{q^1}x^\alpha) + D_{q^2}(w g_{11} D_{q^2}x^\alpha))_j = 0, \quad (2.14)$$

при этом следует учитывать, что сеточные комплексы $w g_{\beta\beta} D_{q^{3-\beta}}x^\alpha$, $\alpha, \beta = 1, 2$ определены также в центрах ячеек.

Разностные уравнения (2.14) являются нелинейными и девятиточечными. В итерационном процессе решения полученных систем будем брать коэффициенты разностных уравнений с предыдущей итерации. Тогда матрица из этих коэффициентов будет симметричной и иметь диагональное преобладание.

Отметим, что если якобиан отображения вычисляется по формуле (2.13), то

$$S_{j+1/2} = J_{j+1/2} h_1 h_2, \quad (2.15)$$

поэтому принцип эквираспределения в разностной форме (2.1) можно переписать в виде, аналогичном (1.9):

$$w(\mathbf{x}_{j+1/2}) J_{j+1/2} = \frac{\tilde{C}_h}{h_1 h_2} \equiv C_h = \text{const}, \quad j_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1. \quad (2.16)$$

Сетку с выпуклыми ячейками будем называть квазиортогональной, если перпендикулярны средние линии каждой четырехугольной ячейки. С учетом аппроксимации (2.11) условие квазиортогональности сетки можно записать в виде (2.4)

$$(g_{12})_{j+1/2} = 0. \quad (2.17)$$

Сетку с выпуклыми ячейками будем называть адаптивной, если для каждой ячейки выполняется принцип эквираспределения в разностной форме (2.16).

Выше было отмечено, что для ортогональных двумерных отображений (2.2) принцип эквираспределения в дифференциальной форме (2.5) и ED2-уравнение (2.6) эквивалентны. На разностном уровне удается доказать, что сеточные функции, определяющие криволинейную сетку, удовлетворяющую принципу эквираспределения в разностной форме (2.16), являются решениями разностных ED2-уравнений (2.14).

Лемма 2.2. *Координаты узлов любой квазиортогональной адаптивной сетки с выпуклыми ячейками удовлетворяют уравнению (2.14).*

Доказательство. Используя операторы (2.7), (2.8), легко убедиться, что для сеточных функций x_j^α справедливы формулы

$$(g_{\beta\beta} D_{q^{3-\beta}} x^\alpha - g_{12} D_{q^\beta} x^\alpha)_{j+1/2} = (-1)^{\alpha+\beta-1} (J D_{q^\beta} x^{3-\alpha})_{j+1/2}, \quad (2.18)$$

$\alpha, \beta = 1, 2$, суммирование по индексам α и β не производится. Следовательно, с учетом условия квазиортогональности (2.17), левую часть уравнения (2.14) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & ((D_{q^1} w J) D_{q^2} x^\alpha)_{j_1, j_2+1/2} + ((D_{q^1} w J) D_{q^2} x^\alpha)_{j_1, j_2-1/2} - \\ & - ((D_{q^2} w J) D_{q^1} x^\alpha)_{j_1+1/2, j_2} - ((D_{q^2} w J) D_{q^1} x^\alpha)_{j_1-1/2, j_2} \end{aligned} \right\}. \quad (2.19)$$

Если сетка адаптивная, то каждое из слагаемых выражения (2.19) обращается в нуль и тем самым координаты сетки удовлетворяют уравнению (2.14), что и требовалось доказать.

При построении сетки необходимы граничные условия. Если расположение узлов на границе задано (исходя из тех или иных соображений), то для уравнений (2.14) будет решаться разностная задача Дирихле. Как показали расчеты, результат при этом может оказаться неудовлетворительным из-за сильной скошенности сетки (неортогональности координатных линий) около границы. Причина этого кроется в том, что внутри области

положение узлов определяется разностными уравнениями (2.14) и управляющей функцией w , а на границе узлы задаются из других соображений, и эта расстановка может оказаться неудачной.

Другой тип граничных условий получается из требования ортогональности к границе соответствующего семейства координатных линий. Но этот метод определения координат узлов на границе приводит иногда к стягиванию узлов в ходе итераций к углам области Ω . Такой нежелательный эффект наблюдался в тех случаях, когда граница области Ω имела углы, большие, чем 90° .

Поэтому будем использовать следующий метод определения узлов на границе, в котором вместе с двумерным методом эквираспределения внутри области используется одномерный метод эквираспределения на границе. Для определенности возьмем нижнюю сторону $q^2 = 0$ квадрата Q и соответствующую ей при отображении (2.2) часть границы $\partial\Omega$. Пусть эта часть границы задана в параметрическом виде

$$x^\alpha = f^\alpha(q), \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (2.20)$$

и имеет длину L . Если через $s = s(q)$ обозначить длину дуги границы, то для $s(q)$ получим следующую формулу:

$$s(q) = \int_0^q \sqrt{\left(\frac{\partial f^1}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial q}\right)^2} dq. \quad (2.21)$$

Чтобы узлы на границе имели сгущение в соответствии с управляющей функцией w , потребуем выполнения на рассматриваемом участке границы аналога уравнения (1.5) для длины дуги:

$$\frac{d}{dq^1} \left(w \frac{ds}{dq^1} \right) = 0, \quad 0 \leq q^1 \leq 1, \quad (2.22)$$

где $w(s) = w(s(q^1)) = w(f^1(q(q^1)), f^2(q(q^1)))$, а параметры q^1 и q связаны соотношением (2.21), в левой части которого следует использовать величину $s(q^1)$. Уравнение (2.22) дополняется краевыми условиями

$$s(0) = 0, \quad s(1) = L,$$

и полученная задача решается итерационным методом. В качестве начального приближения берется сетка с узлами, равномерно распределенными по длине дуги.

Ниже будет показано, что рассмотренный метод расстановки узлов на границе двумерной области является частным случаем метода эквираспределения для построения сеток на поверхностях в пространстве и приведены условия, при которых одна и та же управляющая функция w может использоваться для согласованной расстановки узлов и внутри области и на ее границе.

3. Трехмерный метод эквираспределения

Теперь рассмотрим принцип и уравнения метода эквираспределения для построения сетки внутри трехмерной односвязной области Ω с неподвижной границей Γ . Пусть

$$x^\alpha = x^\alpha(q^1, q^2, q^3), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

есть взаимно-однозначное, невырожденное, достаточно гладкое отображение единичного куба Q на область Ω (рис. 1). Для такого произвольного отображения выполняется тождество, аналогичное (2.3) и вытекающее из записи уравнения Лапласа в новых координатах q^β :

$$\frac{\partial}{\partial q^\gamma} \left(J g^{\gamma\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

В отличие от (2.3) здесь для сокращения записи мы использовали контравариантные компоненты $g^{\gamma\beta}$ метрического тензора, а также тензорное правило суммирования по повторяющимся верхнему и нижнему индексам γ и β . Это правило будет, если не оговорено противное, использоваться и в дальнейшем. Для ортогонального отображения (3.1) вы-

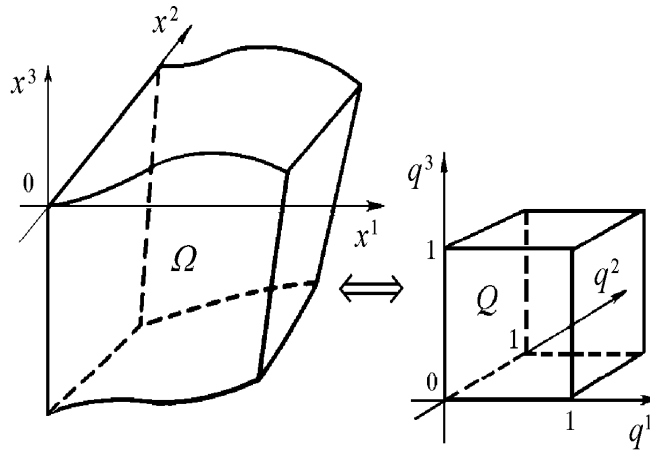


Рис. 1. Физическая область Ω и вычислительная область Q .

полняются условия

$$g_{12} = 0, \quad g_{13} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad (3.3)$$

и тождества (3.2) принимают вид уравнений, не содержащих смешанных производных от функций x^α :

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{g_{22}g_{33}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{g_{11}g_{33}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{g_{11}g_{22}}{J} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^3} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Если потребовать, чтобы отображение (3.1) подчинялось принципу эквираспределения в дифференциальной форме

$$w(\mathbf{x}(\mathbf{q}))J(\mathbf{q}) = C, \quad C = \text{const}, \quad \mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3) \in Q, \quad (3.5)$$

где J — якобиан отображения (3.1), а $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, то функции $x^\alpha = x^\alpha(q^1, q^2, q^3)$ будут решениями трехмерных уравнений метода эквираспределения в дифференциальной форме (ED3-уравнений):

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(g_{22}g_{33}w \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(g_{11}g_{33}w \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(g_{11}g_{22}w \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^3} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Также как и в двумерном случае, справедливо утверждение, обратное к сформулированному выше.

Лемма 3.1. Если отображение (3.1), задаваемое решениями уравнений (3.6), является невырожденным и ортогональным, то оно будет и адаптивным в смысле выполнения равенства (3.5).

Доказательство. Из условия леммы следует, что $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, поэтому функции $\varphi = x^\alpha$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial q^\gamma} (Jg^{\gamma\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} Jw) = 0.$$

Дифференцируя его и учитывая тождество (3.2), получим систему уравнений относительно величин $\partial(Jw)/\partial q^\gamma$:

$$g^{\gamma\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} \frac{\partial Jw}{\partial q^\gamma} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Определитель этой системы равен J^3 . В силу невырожденности отображения отсюда будет следовать, что однородная система (3.7) имеет лишь тривиальное решение $\partial(Jw)/\partial q^\gamma = 0$, $\gamma = 1, 2, 3$. Таким образом, выполняется равенство (3.5).

Покроем единичный куб Q прямоугольной равномерной сеткой с числом узлов N_α в направлении оси Oq^α . Узлы сетки будем обозначать через $\mathbf{q}_j = (q_{j_1}^1, q_{j_2}^2, q_{j_3}^3)$, j — мультииндекс, $j = (j_1, j_2, j_3)$, $j_\alpha = 1, \dots, N_\alpha$, $q_{j_\alpha}^\alpha = (j_\alpha - 1)h_\alpha$, $h_\alpha = 1/(N_\alpha - 1)$. Совокупность всех узлов \mathbf{q}_j обозначим \bar{Q}_h , внутренних — Q_h и граничных — γ_h , т.е. $\bar{Q}_h = Q_h \cup \gamma_h$. Помимо сетки \bar{Q}_h будут использоваться также сетки с узлами, сдвинутыми на полшага в одном, двух или в трех координатных направлениях. Эти узлы будем называть узлами с полуцелыми индексами, или короче, полуцелыми узлами. В вычислительной области Q координаты полуцелых узлов, являющихся серединами ребер, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{j_1+1/2, j_2, j_3} &= (q_{j_1+1/2}^1, q_{j_2}^2, q_{j_3}^3), & \mathbf{q}_{j_1, j_2+1/2, j_3} &= (q_{j_1}^1, q_{j_2+1/2}^2, q_{j_3}^3), \\ \mathbf{q}_{j_1, j_2, j_3+1/2} &= (q_{j_1}^1, q_{j_2}^2, q_{j_3+1/2}^3), \end{aligned}$$

где $q_{j_\alpha+1/2}^\alpha = q_{j_\alpha}^\alpha + h_\alpha/2$.

Для узлов, совпадающих с центрами граней, полагаем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{j_1+1/2, j_2+1/2, j_3} &= (q_{j_1+1/2}^1, q_{j_2+1/2}^2, q_{j_3}^3), & \mathbf{q}_{j_1, j_2+1/2, j_3+1/2} &= (q_{j_1}^1, q_{j_2+1/2}^2, q_{j_3+1/2}^3), \\ \mathbf{q}_{j_1+1/2, j_2, j_3+1/2} &= (q_{j_1+1/2}^1, q_{j_2}^2, q_{j_3+1/2}^3). \end{aligned}$$

Наконец, центр ячейки имеет координаты

$$\mathbf{q}_{j+1/2} \equiv \mathbf{q}_{j_1+1/2, j_2+1/2, j_3+1/2} = (q_{j_1+1/2}^1, q_{j_2+1/2}^2, q_{j_3+1/2}^3).$$

Введем базисные операторы разностных производных:

$$(D_{q_1}\varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1 + h_1/2, q^2, q^3) - \varphi(q^1 - h_1/2, q^2, q^3)}{h_1}, \quad (3.8)$$

$$(D_{q_2}\varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1, q^2 + h_2/2, q^3) - \varphi(q^1, q^2 - h_2/2, q^3)}{h_2}, \quad (3.9)$$

$$(D_{q_3}\varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1, q^2, q^3 + h_3/2) - \varphi(q^1, q^2, q^3 - h_3/2)}{h_3}. \quad (3.10)$$

При вычислении производных (3.8)–(3.10) необходимо, так же как и при вычислении разностных производных (2.7), (2.8), учитывать область определения сеточной функции φ и при необходимости использовать усреднение. Например, при вычислении разностных производных от функций x^α , определенных в целых узлах \mathbf{q}_j , полагаем

$$(D_{q^1} x^\alpha)_{j+1/2} = \frac{x_{j_1+1, j_2+1/2, j_3+1/2}^\alpha - x_{j_1, j_2+1/2, j_3+1/2}^\alpha}{h_1}, \quad (3.11)$$

где $x_{j_1, j_2+1/2, j_3+1/2}^\alpha$ — координаты центра грани с номером j_1 .

Ячейка криволинейной сетки (рис. 2), покрывающей физическую область Ω , является шестигранником с неплоскими, вообще говоря, гранями. Хотя грань является неплоским четырехугольником, тем не менее отрезки, соединяющие середины противоположных сторон грани, лежат в одной плоскости и пересекаются в некоторой точке, которую и будем называть центром грани. Например, для грани j_1 ее центром будет точка $\mathbf{x}_{j_1, j_2+1/2, j_3+1/2}$, каждая координата которой равна среднему арифметическому соответствующих координат четырех вершин этой грани.

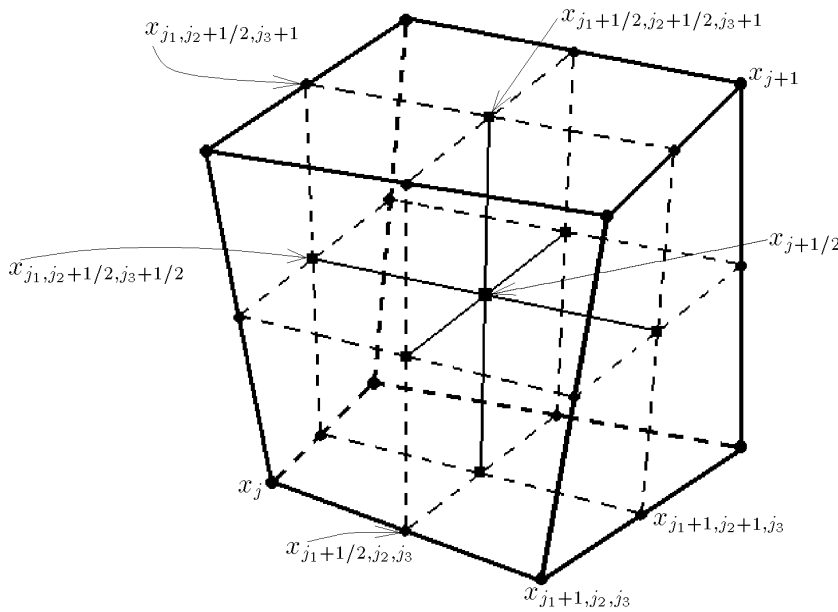


Рис. 2. Ячейка криволинейной трехмерной сетки, средние линии ячейки и граней, центры граней и центр ячейки.

Указанные выше отрезки будем называть средними линиями граней. Средними линиями ячейки будем называть отрезки, соединяющие центры противоположных граней. Легко показать, что средние линии выпуклой ячейки пересекаются в одной точке. Эту точку будем называть центром ячейки и обозначать $\mathbf{x}_{j+1/2}$.

Объем ячейки будем вычислять по формуле

$$S_{j+1/2} = (\mathbf{x}_{j_1+1, j_2+1/2, j_3+1/2} - \mathbf{x}_{j_1, j_2+1/2, j_3+1/2}) \cdot [(\mathbf{x}_{j_1+1/2, j_2+1, j_3+1/2} - \mathbf{x}_{j_1+1/2, j_2, j_3+1/2}) \times (\mathbf{x}_{j_1+1/2, j_2+1/2, j_3+1} - \mathbf{x}_{j_1+1/2, j_2+1/2, j_3})]. \quad (3.12)$$

Если при вычислении якобиана J отображения (3.1) использовать базисные операторы (3.8)–(3.10), то получим равенство, аналогичное (2.15):

$$S_{j+1/2} = J_{j+1/2} h_1 h_2 h_3, \quad (3.13)$$

поэтому аналогом (3.5) на разностном уровне будет требование постоянства произведения объемов ячеек на управляющую функцию w :

$$w(\mathbf{x}_{j+1/2}) S_{j+1/2} = \tilde{C}_h, \quad j_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1. \quad (3.14)$$

Это равенство будем называть трехмерным принципом эквираспределения в разностной форме. Очевидно, что в силу (3.13) этот принцип можно записать и в ином виде:

$$w(\mathbf{x}_{j+1/2}) J_{j+1/2} = \frac{\tilde{C}_h}{h_1 h_2 h_3} \equiv C_h = \text{const}, \quad j_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.6) аппроксимируется со вторым порядком следующим конечно-разностным уравнением:

$$(\Lambda_1 x^\alpha + \Lambda_2 x^\alpha + \Lambda_3 x^\alpha)_j = 0, \quad \mathbf{q}_j \in Q_h, \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 x^\alpha)_j &= D_{q^1} (g_{22} g_{33} w D_{q^1} x^\alpha)_j, & (\Lambda_2 x^\alpha)_j &= D_{q^2} (g_{11} g_{33} w D_{q^2} x^\alpha)_j, \\ (\Lambda_3 x^\alpha)_j &= D_{q^3} (g_{11} g_{22} w D_{q^3} x^\alpha)_j, \end{aligned}$$

при этом предполагается, что сеточные функции x^α определены в целых узлах \mathbf{q}_j , а компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и управляющая функция w — в центрах ячеек $\mathbf{q}_{j+1/2}$. Уравнения (3.16) будем называть уравнениями метода эквираспределения или ED3-уравнениями в разностной форме.

Для решения системы (3.16) использовался метод стабилизирующей поправки:

$$\frac{\varphi^{n+1/3} - \varphi^n}{\tau} = \Lambda_1 \varphi^{n+1/3} + \Lambda_2 \varphi^n + \Lambda_3 \varphi^n, \quad (3.17)$$

$$\frac{\varphi^{n+2/3} - \varphi^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 (\varphi^{n+2/3} - \varphi^n), \quad (3.18)$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 (\varphi^{n+1} - \varphi^n), \quad (3.19)$$

здесь $\varphi = x^\alpha$, n — номер итерации, τ — итерационный параметр, подбираемый экспериментально.

Каждый из шагов (3.17)–(3.19) реализовывался скалярными прогонками, при этом предполагалось, что координаты узлов на границе $\Gamma = \partial\Omega$ уже известны.

4. Построение сетки на пространственных поверхностях

Перейдем теперь к выводу уравнений метода эквираспределения для построения сеток на боковых поверхностях, ограничивающих физическую область Ω . Будем считать, что

область Ω является шестигранником, а каждая его грань является поверхностью, на которую отображается посредством (3.1) одна из граней куба Q . Если придерживаться единой методики построения сетки внутри области и на ее границе, то на боковых поверхностях сетку также необходимо строить на основе принципа эквираспределения. Его формулировка состоит в том, что произведение площади каждой ячейки двумерной сетки, покрывающей криволинейную грань, на управляющую функцию в центре этой ячейки должно быть величиной, постоянной для выбранной грани. Исходя из этого принципа, можно выписать уравнение, конечно-разностный аналог которого служил бы для вычисления координат узлов сетки на поверхности. Ниже приводится вывод такого уравнения, основывающийся на проектировании трехмерного уравнения (3.6) на граничную поверхность при некоторых дополнительных предположениях о поведении отображения (3.1) вблизи границы.

Методику вывода поясним на примере получения уравнений для части Γ_{bot} граничной поверхности Γ , являющейся образом нижней грани $q^3 = 0$ куба Q . Предполагается, что эта часть границы задана в следующем параметрическом виде

$$x^\alpha = f^\alpha(p^1, p^2), \quad 0 \leq p^\beta \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \beta = 1, 2. \quad (4.1)$$

Относительно преобразования (3.1) делаются следующие предположения:

- координатные линии этого отображения ортогональны на Γ_{bot} ;
- кривизна координатных линий третьего семейства в точках их пересечения с Γ_{bot} равна нулю;
- координатные поверхности $q^3 = \text{const}$ “параллельны” поверхности Γ_{bot} в некоторой ее окрестности.

Отметим, что второе предположение использовалось ранее в работе [9] при получении уравнений для поверхностной расчетной сетки из уравнений [8] для внутренних узлов.

Будем использовать следующую математическую форму этих предположений:

$$g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0, \quad \mathbf{q} = (q^1, q^2, 0), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial q^3} = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^3} \Theta_3, \quad \mathbf{q} = (q^1, q^2, 0), \quad (4.3)$$

$$g_{33} = \text{const}, \quad \mathbf{q} = (q^1, q^2, 0). \quad (4.4)$$

Через Θ_α обозначен вектор, касательный к координатной линии q_α , то есть $\Theta_\alpha = \partial \mathbf{r} / \partial q^\alpha$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки.

Лемма 4.1. Пусть отображение (3.1) удовлетворяет условиям (4.2) – (4.4). Тогда

$$\left. \frac{\partial g_{3\alpha}}{\partial q^3} \right|_{q^3=0} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.5)$$

Доказательство. Из равенства

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial q^3} = \Gamma_{33}^\gamma \Theta_\gamma$$

при учете (4.3) будет следовать

$$\Gamma_{33}^1 = 0, \quad \Gamma_{33}^2 = 0. \quad (4.6)$$

Ввиду ортогональности (4.2) системы координат получим

$$\Gamma_{33}^\alpha = g^{\alpha\alpha} \Gamma_{33,\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{3\alpha}}{\partial q^3} + \frac{\partial g_{3\alpha}}{\partial q^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial q^\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2.$$

Использование здесь условия (4.4) приводит к равенству (4.5).

Лемма 4.2. Пусть выполнены условия (4.2)–(4.4) и уравнение (3.6) выполняется вплоть до границы Γ_{bot} . Тогда

$$wJ(q^1, q^2, 0) = \text{const}, \quad 0 < q^\alpha < 1, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.7)$$

Доказательство. В силу (4.2) и полученного равенства (4.5) уравнение (3.6) можно записать на Γ_{bot} в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial q^\beta} \left(wJ^2 g^{\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\gamma} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.8)$$

Для любого $\beta = 1, 2, 3$ имеем равенство

$$g^{\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\gamma} = \delta^{m,m} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^m} \frac{\partial q^\gamma}{\partial x^m} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\gamma} = \delta^{m,m} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^m} \delta_m^\alpha = \frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad (4.9)$$

поэтому уравнение (4.8) можно переписать в виде

$$J \frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial q^\beta} (wJ) + wJ \frac{\partial}{\partial q^\beta} \left(J \frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

Пусть $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$, причем $u^\gamma = \delta^{\gamma\alpha}$, тогда $v^\beta = u^\gamma \partial q^\beta / \partial x^\gamma = \partial q^\beta / \partial x^\alpha$. Отсюда получается, что

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial q^\beta} \left(J \frac{\partial q^\beta}{\partial x^\alpha} \right).$$

В силу того, что $\text{div } \mathbf{u} = 0$, второе слагаемое в (4.10) обращается в нуль, и тогда равенство (4.7) будет следовать из того, что величины $\partial(wJ)/\partial q^\beta$ являются решением однородной системы (4.10), определитель которой не равен нулю.

Доказанное равенство (4.8) означает, что отображение (3.1) удовлетворяет принципу эквиварирования в дифференциальной форме на граничной поверхности Γ_{bot} .

При выводе уравнений для вычисления координат узлов на поверхности будем использовать тот факт, что величины $\partial(wJ)/\partial q^\alpha = 0$ можно считать решением однородной системы

$$\frac{\partial p^\alpha}{\partial q^2} \frac{\partial wJ}{\partial q^1} - \frac{\partial p^\alpha}{\partial q^1} \frac{\partial wJ}{\partial q^2} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.11)$$

определитель которой $\tilde{J} = p_{q^1}^1 p_{q^2}^2 - p_{q^2}^1 p_{q^1}^2$ не равен нулю. Пусть $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты метрического тензора взаимно-однозначного невырожденного преобразования

$$p^\alpha = p^\alpha(q^1, q^2), \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.12)$$

с якобианом $\tilde{J} > 0$, т. е.

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial p^1}{\partial q^\alpha} \frac{\partial p^1}{\partial q^\beta} + \frac{\partial p^2}{\partial q^\alpha} \frac{\partial p^2}{\partial q^\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (4.13)$$

Тогда для отображения (4.12) справедливы формулы

$$\tilde{J}\tilde{g}^{\beta 1}\frac{\partial p^\alpha}{\partial q^1} + \tilde{J}\tilde{g}^{\beta 2}\frac{\partial p^\alpha}{\partial q^2} = (-1)^{\alpha+\beta}\frac{\partial p^{3-\alpha}}{\partial q^{3-\beta}}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (4.14)$$

где

$$\tilde{g}^{11} = \frac{\tilde{g}_{22}}{\tilde{J}^2}, \quad \tilde{g}^{22} = \frac{\tilde{g}_{11}}{\tilde{J}^2}, \quad \tilde{g}^{12} = -\frac{\tilde{g}_{12}}{\tilde{J}^2}. \quad (4.15)$$

Переписав уравнения (4.11) в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(wJ \frac{\partial p^\alpha}{\partial q^2} \right) - \frac{\partial}{\partial q^2} \left(wJ \frac{\partial p^\alpha}{\partial q^1} \right) = 0$$

и используя в них тождества (4.14) при дополнительном предположении об ортогональности системы координат (4.12), получим следующие уравнения для функций $p^\alpha(q^1, q^2)$, $\alpha = 1, 2$:

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(w\sqrt{g_{22}g_{33}}\frac{\tilde{g}_{22}}{\tilde{J}}\frac{\partial p^\alpha}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(w\sqrt{g_{22}g_{33}}\frac{\tilde{g}_{11}}{\tilde{J}}\frac{\partial p^\alpha}{\partial q^2} \right) = 0. \quad (4.16)$$

При выводе данного уравнения использовалось также условие (4.4).

При численном решении (4.16) вместо компонент $g_{\alpha\alpha}$ используются ковариантные компоненты $\hat{g}_{\alpha\beta}$ метрического тензора поверхности Γ_{bot} . Последние связаны с величинами $g_{\alpha\beta}$ соотношениями:

$$g_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\gamma\varepsilon} \frac{\partial p^\gamma}{\partial q^\alpha} \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial q^\beta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = 1, 2, \quad (4.17)$$

при этом

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial p^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial p^\beta} \delta_{\gamma,\gamma}, \quad \alpha, \beta, = 1, 2 \quad (4.18)$$

(здесь по индексу $\gamma = 1, 2, 3$ производится суммирование).

Конечно-разностное уравнение для вычисления координат узлов $\mathbf{x}_{j_1, j_2, 1}$ было получено аппроксимацией уравнения (4.16) на 9-точечном шаблоне с помощью интегро-интерполяционного метода. По виду это разностное уравнение совпадает с (2.14):

$$(D_{q^1}(\tilde{w}\tilde{g}_{22}D_{q^1}p^\alpha) + D_{q^2}(\tilde{w}\tilde{g}_{11}D_{q^2}p^\alpha))_{j_1, j_2, 1} = 0, \quad (4.19)$$

где сеточная функция $\tilde{w} = w\sqrt{g_{22}g_{33}}/\tilde{J}$ относится к центрам ячеек. Решаются эти системы нелинейных разностных уравнений итерационным методом продольно-поперечных прогонок.

Отметим, что если поверхность Γ_{bot} является плоской, например, лежит на плоскости $x^3 = x_0^3$, и в качестве параметров p^α взяты декартовы координаты x^α ($\alpha = 1, 2$), то $\hat{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}$, $J = \tilde{J}$ и уравнения (4.16) переходят в уравнения (2.14) ED2-метода построения сеток в плоских областях.

Метод построения адаптивных сеток на основе уравнений (4.16) будем называть EDS-методом для поверхностей.

5. Построение сетки на пространственных кривых

Получим уравнения метода эквираспределения для вычисления координат узлов на пространственной кривой, являющейся одним из ребер криволинейного шестигранника Ω . Пусть для определенности это ребро (далее обозначается \mathcal{L}) принадлежит двум поверхностям, являющимся образами при отображении (3.1) граней $q^3 = 0$ и $q^2 = 0$ единичного куба Q .

Исходя из общего принципа метода эквираспределения, будем строить сетку на рассматриваемом ребре так, чтобы длины отрезков между двумя соседними узлами сетки были обратно пропорциональны значениям управляющей функции в центрах этих отрезков. Причем для лучшего согласования положения узлов внутри области и на кривой \mathcal{L} желательно использовать одну и ту же управляющую функцию w . Однако в таком случае w будет отвечать за степень концентрации узлов по разным признакам: внутри области значения w регулируют объем ячеек, а на \mathcal{L} — длину одного из ребер шестигранной ячейки. В общем случае использование одной и той же управляющей функции может приводить, например, к тому нежелательному эффекту, что в приграничном слое, примыкающем к \mathcal{L} , объемы ячеек при движении вдоль \mathcal{L} будут уменьшаться, а длины ребер этих ячеек, лежащих на \mathcal{L} , будут увеличиваться. Чтобы избежать таких последствий, приходится накладывать на отображение (3.1) дополнительные ограничения.

Итак, пусть функции x^α , определяющие отображение (3.1), являются решениями ED3-уравнений (3.6). Сформулируем дополнительные предположения о поведении функций x^α в окрестности кривой \mathcal{L} , при выполнении которых эти функции удовлетворяют принципу эквираспределения на \mathcal{L} :

$$\sqrt{g_{11}}w = \text{const}, \quad \mathbf{q} = (q^1, 0, 0). \quad (5.1)$$

Так как \mathcal{L} является линией пересечения двух боковых граней области Ω , на которых уравнения EDS-метода получены при условиях типа (4.2)–(4.4), эти же условия можно использовать и при выводе уравнений для сетки на \mathcal{L} . В действительности же для их вывода достаточна лишь часть условий, выписываемых для каждой из двух граней. Далее используются следующие ограничения на преобразование (3.1):

$$g_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial q^3} = \Gamma_{33}^3 \mathfrak{A}_3, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial q^2} = \Gamma_{22}^2 \mathfrak{A}_2, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial q^\beta} = 0, \quad \alpha = 2, 3, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad \beta \neq \alpha, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \quad (5.4)$$

означающие, что

- координатные линии этого отображения ортогональны на \mathcal{L} ;
- кривизна координатных линий второго и третьего семейства в точках их пересечения с \mathcal{L} равна нулю;
- координатные поверхности $q^2 = \text{const}$ и $q^3 = \text{const}$ “параллельны” кривой \mathcal{L} в некоторой ее окрестности.

Лемма 5.1. Пусть выполнены условия (5.2)–(5.4) и уравнение (3.6) выполняется в Ω вплоть до граничного ребра \mathcal{L} . Тогда на \mathcal{L} будет справедливо равенство (5.1).

Доказательство. В силу условия ортогональности (5.2) и предположения (5.3) имеем

$$0 = \Gamma_{\alpha\alpha}^\beta = g^{\beta\beta} \Gamma_{\alpha\alpha,\beta} = \frac{g^{\beta\beta}}{2} \left(2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial q^\beta} \right), \quad (5.5)$$

где индексы α и β принимают значения, указанные в условии (5.4). Учет этого условия в (5.5) приводит к равенствам

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} = 0, \quad \alpha = 2, 3, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad \beta \neq \alpha, \quad (5.6)$$

которые выполняются в каждой точке кривой \mathcal{L} .

В силу условия ортогональности (5.2) полученные равенства приводят к следующим соотношениям на кривой \mathcal{L} :

$$g^{\alpha\beta} = 0, \quad \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial q^\alpha} = 0, \quad \alpha = 2, 3, \quad \beta = 1, 2, 3, \quad \beta \neq \alpha, \quad (5.7)$$

поэтому уравнение (3.6) можно переписать на \mathcal{L} в виде (4.8) или (4.10), откуда и получим соотношение (5.1), учитывая, что на \mathcal{L} компоненты g_{22} и g_{33} постоянны.

Так как \mathcal{L} является пересечением двух поверхностей $q^2 = 0$ и $q^3 = 0$, то можно считать, что их параметрические уравнения (4.1) совпадают на \mathcal{L} и имеют в точках \mathcal{L} вид

$$x^\alpha = f^\alpha(p), \quad 0 \leq p \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (5.8)$$

Это параметрическое уравнение кривой \mathcal{L} используется в уравнениях метода эквираспределения (в EDC3-уравнениях)

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(w \sqrt{\left(\frac{\partial f^1}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^3}{\partial p}\right)^2} \frac{\partial p}{\partial q^1} \right) = 0, \quad (5.9)$$

которые получаются дифференцированием равенства (5.1) по переменной q^1 . Для плоской кривой с естественной параметризацией EDC3-уравнение переходит в уравнение (2.22). Если \mathcal{L} является прямолинейным отрезком, то из (5.9) следует ED1-уравнение (1.5).

Для аппроксимации (5.9) будем использовать 3-точечное разностное уравнение

$$D_{q^1}(\tilde{w} D_{q^1} p)_{j_1} = 0, \quad j_1 = 2, \dots, N_1 - 1, \quad (5.10)$$

где

$$\tilde{w} = w(f^1(p), f^2(p), f^3(p)) \sqrt{(D_p f^1)^2 + (D_p f^2)^2 + (D_p f^3)^2},$$

при этом предполагается, что сеточная функция \tilde{w} определена в полуцелых узлах $p_{j_1+1/2}$ неравномерной сетки p_{j_1} , а функция $p(q)$ — в целых узлах равномерной сетки $q_{j_1}^1$.

Нелинейное уравнение (5.10) решается итерационным методом. В качестве начального приближения для функции $p = p(q^1)$ бралась линейная функция. При вычислении величины p на $(\nu + 1)$ -й итерации использовались значения $\tilde{w}_{j_1+1/2}$ с ν -й итерации. Если итерационный процесс сходится, то для предельных значений координат узлов на \mathcal{L} будет выполняться равенство

$$w_{j_1+1/2,1,1} |\mathbf{x}_{j_1+1,1,1} - \mathbf{x}_{j_1,1,1}| = \text{const}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1 - 1. \quad (5.11)$$

Отметим, что параметрическое уравнение границы используется только при построении сетки, а при выполнении расчетов на построенной криволинейной сетке предполагается, что граница, в частности \mathcal{L} , определяется узлами сетки, т. е. является ломаной с

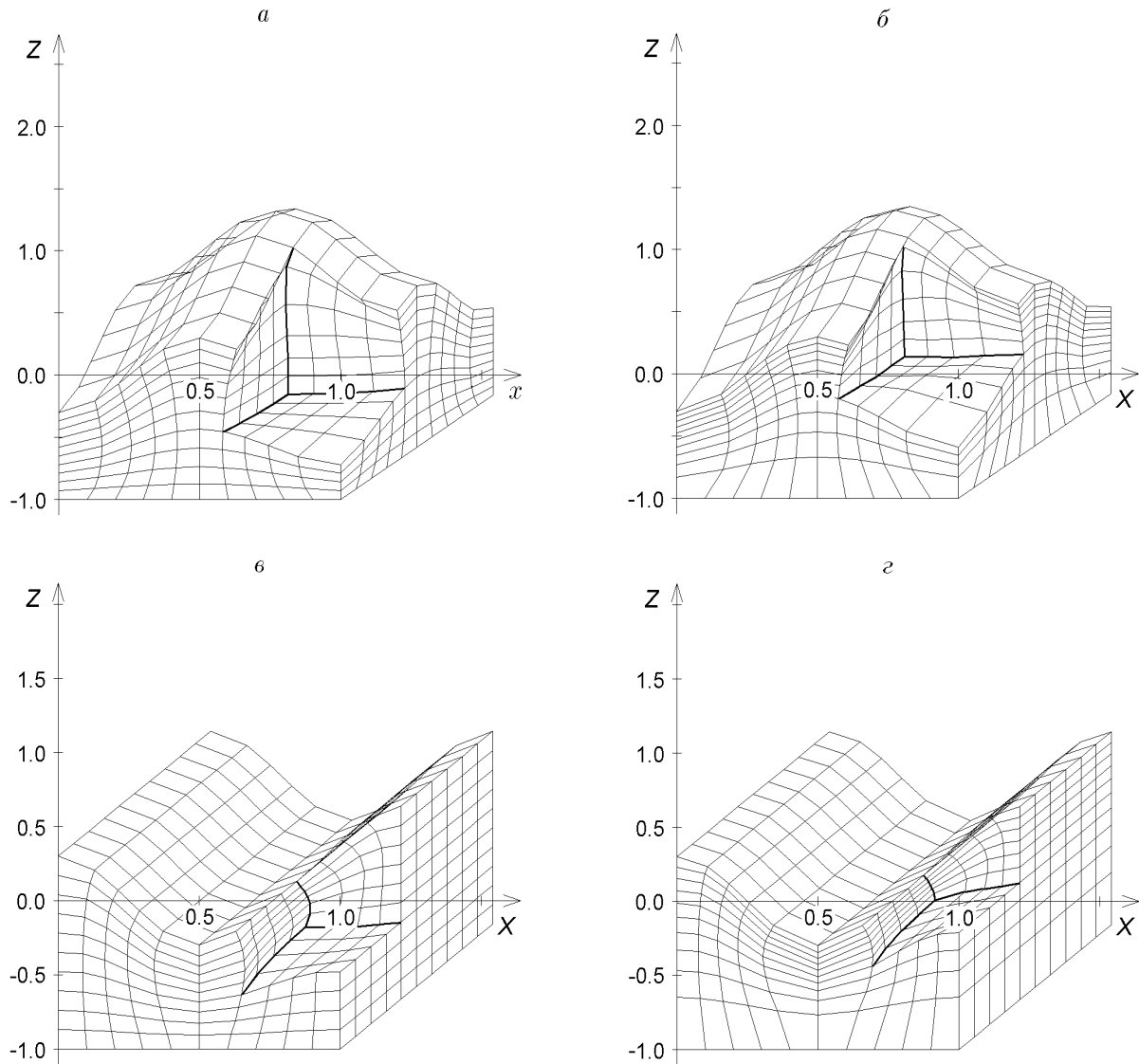


Рис. 3. Сетки после 100 итераций с управляющими функциями:
 $a - w = 1$; $б - w = 1 + 10(z + 1)$; $в - w = 1$; $г - w = 1 + 10(z + 1)$.

вершинами в узлах сетки. При таком описании границы равенство (5.11) означает, что произведение длины дуги границы между соседними узлами на управляющую функцию w является постоянной величиной, т. е. сетка на криволинейном ребре удовлетворяет принципу эквираспределения.

На рис. 3 приведены примеры трехмерных сеток, построенных с помощью метода эквираспределения.

Список литературы

- [1] PATEL M. K., PERICLEOUS K. A., BALDWIN S. The development of a structured mesh

- grid adaption technique for resolving shock discontinuities in upwind Navier—Stokes codes. *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, **20**, 1995, 1179–1197.
- [2] BOOR C. Good approximation by splines with variable knots. II. *Lecture Notes in Mathematics*, **363**, 1974, 12–20.
- [3] DWYER H. A., KEE R. J., SANDERS B. R. An adaptive grid method for problems in fluid mechanics and heat transfer. *AIAA J.*, **18**, 1980, 1205–1212.
- [4] DWYER H. A. Grid adaption for problems in fluid dynamics. *Ibid.*, **22**, No. 12, 1984, 1705–1712.
- [5] SHYY W. Computation of complex fluid flows using an adaptive grid method. *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, **8**, 1988, 475–489.
- [6] CHANG P. Y., SHYY W. Adaptive grid computation of three-dimensional natural convection in horizontal high-pressure mercury lamps. *Ibid.*, **12**, 1991, 143–160.
- [7] HUANG W., SLOAN D. M. A simple adaptive grid method on two dimesions. *SIAM J. Sci. Comput.*, **15**, No. 4, 1994, 776–797.
- [8] THOMPSON J. F., WARSI Z. U. A., MASTIN C. W. *Numerical grid generation, foundations and applications*. Amsterdam: Nort-Holland, 1985, 483.
- [9] TAKAGI T., MIKI K., CHEN B. C. J., SHA W. T., Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Arbitrarily Curved Surfaces. *J. of Comp. Physics*, **58**, 1985, 67–79.

Поступила в редакцию 19 августа 1998 г.