Вычислительные технологии **Том 16, № 2, 2011**

Маломодовая модель геодинамо*

Г. М. Водинчар[1,2], Л. К. Крутьева[1]
[1]*Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, п. Паратунка Камчатского края, Россия*
[2]*Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, Россия*
e-mail: gvodinchar@yandex.ru, kruteva_lu@mail.ru

Построена маломодовая модель геодинамо, структура полоидального поля скоростей которой согласована с данными о распределении плотности в жидком ядре Земли. Модель включает две компоненты температуры, одну полоидальную компоненту скорости и две тороидальные, моделирующие кориолисов эффект. Магнитное поле представлено основным диполем и шестью модами, структурно согласованными с модами скорости. Показано, что при параметрах ядра, принятых в теории геодинамо, в данной модели поддерживается магнитное поле, дипольная компонента которого близка по величине к реальной дипольной компоненте геомагнитного поля.

Ключевые слова: конвекция, тороидальные и полоидальные поля, ядро Земли, геодинамо.

Введение

Исследование вопросов формирования геомагнитного поля является одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений геофизики, тем более, что работы в этой области имеют пересечение с проблемами космического магнетизма, задачами космо- и астрофизики. Обзоры постоянно увеличивающегося числа исследований данного направления приведены, например, в [1, 2]. В настоящее время практически общепризнанной для геомагнетизма и космического магнетизма является теория динамо. В этой теории достигнут огромный прогресс, однако нельзя считать, что задача формирования и поддержания геомагнитного поля полностью решена. На сегодня нет модели, которая объясняла бы все наблюдаемые свойства поля.

Одним из ключевых для геодинамо является вопрос о структуре конвективных течений в жидком ядре. Косвенную информацию об этой структуре можно получить из данных о неоднородностях в плотности жидкого ядра. В [3] проанализированы результаты ряда работ по splitting-функциям собственных колебаний Земли, в которых получены срезы распределения плотности на различных глубинах. Вариации плотности на глубине 3900 км, соответствующие splitting-функции жидкого ядра, приведенные в [3], представлены на рис. 1. Здесь прослеживается четкая 12-зонная шахматная структура. Автором работы [3] на основе этих данных была высказана гипотеза о соответствующей структуре конвекции, где в шести областях материал ядра “тонет”, а в шести — “всплывает”.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (проект 10-III-B-07-158).

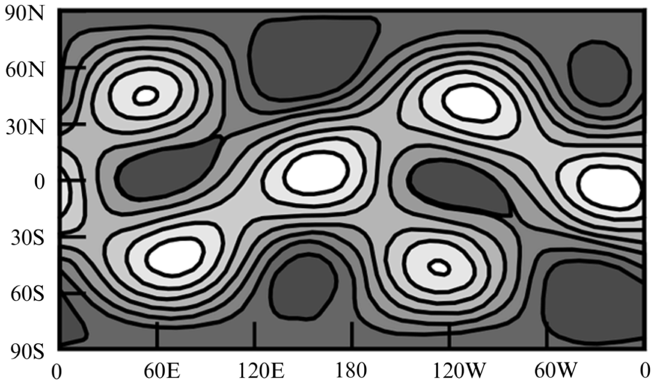

Рис. 1. Портрет splitting-функции для моды ${}_{11}S_4$ собственных колебаний Земли из работы [3]. Черный цвет — плотность вещества на 0.2% выше средней, белый — на 0.2% ниже средней. По горизонтальной оси — градусы долготы, по вертикальной — широты

В [4] исследовалась возможность существования конвекции с подобной структурой без учета магнитного поля. Было показано, что при общепринятых значениях физических параметров ядра эта конвекция может поддерживаться в ядре. В настоящей работе изучается вопрос о том, может ли подобная структура конвекции поддерживать магнитное поле дипольного типа, близкое по величине к наблюдаемому, а также будут ли характерные значения скорости согласовываться с имеющимися оценками [5].

1. Формулировка краевой задачи геодинамо

Рассмотрим вращающуюся вместе с Землей с угловой скоростью Ω систему координат, начало которой расположено в центре Земли, а ось Oz проходит через Северный полюс. Обозначим через $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$ и P поля скорости, магнитной индукции и давления. Поле температуры внешнего ядра представим в виде $T+T_s$, где T_s — стационарное распределение температуры, соответствующее теплопередаче в виде чистой теплопроводности, T — отклонение от этого распределения.

Будем использовать следующие упрощающие предположения: вещество внешнего ядра несжимаемое, относительная магнитная проницаемость всего пространства $\mu = 1$, вариации плотности внешнего ядра относительно среднего значения ρ_0 малы, кинематическая вязкость ν и температуропроводность k внешнего ядра, а также магнитная вязкость ν_m всего ядра постоянны. Среду за пределами ядра считаем непроводящей, что приводит к потенциальности поля $\mathbf{B}$ в этой области. Температура на внутренней r_1 и внешней $r_2 = r_1 + h$ границах жидкого ядра сохраняет постоянные значения T_1 и $T_2 = T_1 - \delta T$. Эти предположения являются обычными при постановке задач геодинамо [1, 2]. Будем также считать скорость поля $\mathbf{v}$ за пределами внешнего ядра нулевой, т. е. в рассматриваемой модели отсутствует явление супервращения внутреннего ядра. Тогда уравнения динамо записываются в приближении Буссинеска в виде [1]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\bigtriangledown)\mathbf{v} = \nu \bigtriangleup \mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0} \bigtriangledown P + \beta \frac{g_2}{r_2} T\mathbf{r} - 2\,(\Omega \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \mathrm{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\bigtriangledown)(T + T_s) = k \bigtriangleup T, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \bigtriangleup \mathbf{B},$$
$$\bigtriangledown \mathbf{v} = 0, \quad \bigtriangledown \mathbf{B} = 0. \tag{1}$$

Здесь g_2 — ускорение свободного падения на границе ядра, β — коэффициент объемного теплового расширения внешнего ядра, μ_0 — магнитная постоянная.

Известно, что стационарное решение уравнения теплопроводности в сферической оболочке с граничными условиями $T_s(r=r_1)=T_1$ и $T_s(r=r_2)=T_2$ имеет гиперболический по радиусу профиль $T_s=\dfrac{r_2\delta T}{h}\left(\dfrac{r_1}{r}-1\right)+T_1$.

Если в качестве единиц измерения расстояния, скорости, времени, давления, температуры и магнитной индукции принять величины $h,\nu/h,h^2/\nu,\rho_0\nu^2/h^2,\delta T$ и $\nu\sqrt{\mu_0\rho_0}/h$ соответственно, то уравнения (1) в безразмерных переменных запишутся в следующем виде (обозначения переменных сохранены):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\bigtriangledown)\mathbf{v}=\triangle\mathbf{v}-\bigtriangledown P+\mathrm{Ra}\mathrm{Pr}^{-1}\frac{Tr}{r_2}\mathbf{e_r}-\tau\left(\mathbf{e_z}\times\mathbf{v}\right)+\mathrm{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B},\\
\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{v}\bigtriangledown)T-r_1r_2\frac{v_r}{r^2}=\mathrm{Pr}^{-1}\triangle T,\quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\mathrm{rot}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)+q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1}\triangle\mathbf{B},\\
\bigtriangledown\mathbf{v}=0,\quad \bigtriangledown\mathbf{B}=0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Управляющими параметрами модели являются: число Релея $\mathrm{Ra}=\delta T g_2 h^3\beta/(\nu k)$, число Прандтля $\mathrm{Pr}=\nu/k$, число Кориолиса $\tau=2h^2\Omega/\nu$, число Робертса $q=k/\nu_m$.

Для исключения поля давления возьмем ротор от обеих частей первого уравнения системы (2), учитывая, что $(\mathbf{v}\bigtriangledown)\mathbf{v}=(1/2)\mathrm{grad}\mathbf{v}^2-\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{v}$. Получим

$$
\begin{gathered}
\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}-\mathrm{rot}\left(\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{v}\right)=\mathrm{rot}\triangle\mathbf{v}+\frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}}\mathrm{rot}\left(\frac{Tr}{r_2}\mathbf{e_r}\right)-\tau\,\mathrm{rot}\left(\mathbf{e_z}\times\mathbf{v}\right)+\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B}\right),\\
\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{v}\bigtriangledown)T-r_1r_2\frac{\mathbf{v_r}}{r^2}=\mathrm{Pr}^{-1}\triangle T,\quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\mathrm{rot}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)+q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1}\triangle\mathbf{B},\\
\bigtriangledown\mathbf{v}=0,\quad \bigtriangledown\mathbf{B}=0.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Систему (1) дополним однородными граничными условиями для температуры и условиями прилипания для скорости на внутренней и внешней границах жидкого ядра: $T(r=r_1)=T(r=r_2)=0,\mathbf{v}(r=r_1)=\mathbf{v}(r=r_2)=0$.

Рассмотрим теперь граничные условия для магнитного поля. Поскольку при $r\geq r_2$ поле потенциально, то в этой области $\mathbf{B}=-\mathrm{grad}U$, где потенциал раскладывается в ряд по сферическим гармоникам

$$
U=r_2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-(n+1)}\sum_{m=-n}^{n}A_n^m(t)Y_n^m(\theta,\varphi).
\tag{4}
$$

Тогда разложение для магнитного поля вне ядра будет иметь вид

$$
\mathbf{B}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^m(t)\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\frac{r_2}{n}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-(n+1)}Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right).
\tag{5}
$$

В справедливости этого разложения можно убедиться непосредственным вычислением двойного ротора в формуле (5) и градиента выражения (4). Соленоидальное поле $\mathbf{B}$ разлагается в сумму тороидальной и полоидальной составляющих, которые определяются соответственно как $\mathrm{rot}(\Phi\mathbf{r})$ и $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\Psi\mathbf{r})$, где Φ и Ψ — некоторые скалярные (производящие) функции. Тогда из (5) видно, что вне ядра магнитное поле является чисто полоидальным и разлагается в линейную комбинацию элементарных полоидальных компонент

$$\mathbf{B}_{nm}^{out} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\frac{r_2}{n}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-(n+1)} Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right). \tag{6}$$

Для магнитного поля внутри ядра также будем использовать разложения по сферическим функциям на тороидальные и полоидальные составляющие

$$\mathbf{B}_{nm}^{T} = \mathrm{rot}\left(R_{nm}^{T}(r,t)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right) \text{ и } \mathbf{B}_{nm}^{P} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(R_{nm}^{P}(r,t)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right). \tag{7}$$

Вид функций $R_{nm}^T(r,t)$ и $R_{nm}^P(r,t)$ конкретизируем позже. Тогда для обеспечения непрерывности магнитного поля при переходе через границу ядра $r = r_2$ краевые условия примут следующий вид:

$$\mathbf{B}_{nm}^{T}(r=r_2) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B}_{nm}^{T}(r=r_2) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{B}_{nm}^{P}(r=r_2)\|\mathbf{B}_{nm}^{out}(r=r_2), \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B}_{nm}^{P}(r=r_2) = \mathbf{0}. \tag{8}$$

2. Спектральное разложение полей

Для построения маломодовой модели геодинамо будем раскладывать поля температуры, скорости и индукции по собственным полям спектральных задач, связанных с оператором Лапласа. Температуру представим в виде $T = \sum\limits_{k,n,m} {}_k\alpha_{nm}(t)\,{}_k\Theta_{nm}(r,\theta,\varphi)$, где ${}_k\Theta_{nm}$ — собственные функции оператора Лапласа, нулевые при $r = r_{1,2}$. Тороидальную составляющую поля скорости запишем в виде $\mathbf{v} = \sum\limits_{k,n,m} {}_k\beta_{nm}^T(t)\,{}_k\mathbf{v}_{nm}^T(r,\theta,\varphi)$, где ${}_k\mathbf{v}_{nm}^T = \mathrm{rot}\left(R_{kn}^T(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right)$ — собственные поля векторного оператора Лапласа, удовлетворяющие условию прилипания при $r = r_{1,2}$. Наконец, полоидальную часть скорости представим в виде $\mathbf{v}_{nm}^P = \sum\limits_{k,n,m} {}_k\beta_{nm}^P(t)\,{}_k\mathbf{v}_{nm}^P(r,\theta,\varphi)$, где ${}_k\mathbf{v}_{nm}^P = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(R_{kn}^P(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right)$ — собственные поля спектральной задачи $\mathrm{rot}\,\triangle\,\mathbf{P} + \mu\,\mathrm{rot}\mathbf{P} = 0$ в пространстве полоидальных полей, нулевых при $r = r_{1,2}$.

Строение функций ${}_k\Theta_{nm}$ описано в [6], построение полей ${}_k\mathbf{v}_{nm}^T$, ${}_k\mathbf{v}_{nm}^P$ выполнено в [4].

Компоненты (7) магнитного поля также будем раскладывать по полям задачи

$$\mathrm{rot}\,\triangle\,\mathbf{B}_{nm} + \eta\,\mathrm{rot}\mathbf{B}_{nm} = 0 \tag{9}$$

с соответствующими краевыми условиями. Верхний индекс из формулы (7) опускается, поскольку пока рассуждения носят общий характер для полей обоих типов. Разделяя радиальную и временную переменные, представим поля $\mathbf{B}_{nm}$ в виде

$$\mathbf{B}_{nm} = \sum_k {}_k\gamma_{nm}(t)\,\mathrm{rot}\left({}_kR_{nm}(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right) = \sum_k {}_k\gamma_{nm}(t)\,{}_k\mathbf{B}_{nm}.$$

Здесь индекс $k = 0,1,2,\ldots$ соответствует дискретизации спектра задачи (9) по радиальной переменной. В [4] показано, что функции ${}_kR_{nm}$ с учетом их ограниченности в центре Земли имеют вид $\left(A_{kn}j_n\left(\sqrt{\eta_{kn}}\,r\right)+B_{kn}r^n\right)Y_n^m$, где $j_n(\cdot)$ — сферические функции Бесселя первого рода, коэффициенты A_{kn} и B_{kn} определяются из краевых условий с точностью до нормирующего множителя.

Далее рассмотрим поля разных типов отдельно. Краевые условия для тороидальных полей ${}_k\mathbf{B}^T_{nm}$ дают систему уравнений

$$ {}_kR^{BT}_{nm}(r_2)=\left.\frac{d_kR^{BT}_{nm}}{dr}\right|_{r=r_2}=0 \qquad (10)$$

для вычисления коэффициентов A_{kn} и B_{kn}. Условие нетривиальной разрешимости этой системы определяет для каждого n счетное множество собственных значений η^T_{kn} как решений уравнения

$$ j_n\left(\sqrt{\eta_{kn}}r_2\right)nr_2^{n-1}-r_2^n\left.\frac{dj_n\left(\sqrt{\eta_{kn}}\,r\right)}{dr}\right|_{r=r_2}=0.$$

После нахождения коэффициентов η^T_{kn} подставляем их в одно из уравнений системы (10), откуда получаем коэффициенты A_{kn} и B_{kn} с точностью до нормирующего множителя. Условие нормировки, соответствующее единичной безразмерной энергии, выделяемой полем ${}_k\mathbf{B}^T_{nm}$ во всем пространстве, выберем в виде

$$\int\limits_{R^3}({}_k\mathbf{B}^T_{nm})^2\,dV=\int\limits_{r\le r_2}({}_k\mathbf{B}^T_{nm})^2\,dV=1.$$

Для полоидальных полей краевое условие $\operatorname{rot}\mathbf{B}^P_{nm}(r=r_2)=\mathbf{0}$ дает уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\,\frac{d}{dr}-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R^{BP}_{kn}|_{r=r_2}=0, \qquad (11)$$

а условие $\mathbf{B}^P_{nm}(r=r_2)\parallel\mathbf{B}^{out}_{nm}(r=r_2)$ приводит к формуле

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{n+1}{r}\right)R^{BP}_{kn}|_{r=r_2}=0. \qquad (12)$$

Аналогично случаю тороидальных полей условие ненулевой разрешимости системы (11)–(12) дает уравнения на собственные значения η^P_{kn}, подстановка которых в эту систему позволяет определить коэффициенты A_{kn} и B_{kn} с точностью до нормирующего множителя. Сам множитель находим из условия нормировки

$$\int\limits_{R^3}({}_k\mathbf{B}^P_{nm})^2\,dV=\int\limits_0^{+\infty}\left[R^{BP}_{kn}\right]^2n^2(n+1)^2\,dr+\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{R^{BP}_{kn}}{r}+\frac{dR^{BP}_{kn}}{dr}\right]^2r^2n(n+1)\,dr=1. \qquad (13)$$

Как и в предыдущем случае, это условие приводит к единичной энергии, выделяемой полем во всем пространстве. В левом интеграле формулы (13) интегрирование ведется по всему пространству, а правая часть формулы представляет собой результат аналитического интегрирования левой части по угловым переменным. При интегрировании по промежутку $r>r_2$ в (13) предполагается, что в этом промежутке

$$R^{BP}_{kn}(r)=R^{BP}_{kn}(r_2)\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-(n+1)}.$$

Такое выражение накладывается непрерывным переходом $\mathbf{B}^P_{nm}$ в $\mathbf{B}^{out}_{nm}$. Все вышеописанные расчеты базисных магнитных мод, связанные с решением уравнений на собственные значения, систем для коэффициентов, нормировками, проводились в пакете MAPLE 12. При этом интегрирование по угловым переменным выполнялось аналитически, а по радиальной — численно. Эти расчеты были проведены для $k = 0, 1, 2$ и $n = 1, \ldots, 10$.

3. Построение маломодовой модели

Выполним отбор мод скорости, которые определят описанную во введении структуру течений с 12 чередующимися зонами поднятия и опускания вещества. В работе [4] показано, что подобная структура вертикальных течений описывается полоидальными компонентами ${}_k\mathbf{v}^P_{4,\pm2}$. При этом крупномасштабная конвекция с транспортом материала от нижней границы к верхней получается при $k = 0$. Знаки радиальной проекции компоненты ${}_0\mathbf{v}^P_{4,2}$ и некоторые ее линии тока приведены на рис. 2. Линейными комбинациями двух таких мод можно обеспечить любой фазовый сдвиг 12-зонной картины по углу φ. Поскольку выбор начала отсчета угла φ произволен, можно ограничиться только модой ${}_0\mathbf{v}^P_{4,2}$.

Чтобы учесть кориолисов снос основной компоненты скорости, направление $\mathbf{e_z} \times {}_0\mathbf{v}^P_{4,2}$ действующей на нее силы Кориолиса аппроксимировалось другими компонентами скорости. В качестве критерия приближения использовалась минимизация невязки

$$\sum_{k,n,m} \left({}_kq_{nm}\ {}_k\mathbf{v}^T_{nm} + {}_ks_{nm}\ {}_k\mathbf{v}^P_{nm} \right) - \mathbf{e_z} \times {}_0\mathbf{v}^P_{4,2}$$

в метрике скалярного произведения $\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = \displaystyle\int (\mathbf{P}\,\mathbf{Q})\,dV$, где интегрирование ведется по объему жидкого ядра. Результаты расчетов показали, что отличными от нуля являются только коэффициенты ${}_kq_{3,2}$, ${}_kq_{5,2}$ и ${}_0s_{4,-2}$. Представим выражение $\mathbf{e_z} \times {}_k\mathbf{v}^P_{4,2}$ в порядке убывания коэффициентов:

$$\mathbf{e_z} \times {}_k\mathbf{v}^P_{4,2} \approx 0.41 {}_0\mathbf{v}^T_{5,2} - 0.34 {}_1\mathbf{v}^T_{3,2} - 0.25 {}_0\mathbf{v}^T_{3,2} - 0.17 {}_1\mathbf{v}^T_{5,2} - 0.1 {}_0\mathbf{v}^P_{4,-2} - 0.06 {}_2\mathbf{v}^T_{5,2} + 0.04 {}_2\mathbf{v}^T_{3,2} + \ldots$$

а *б*

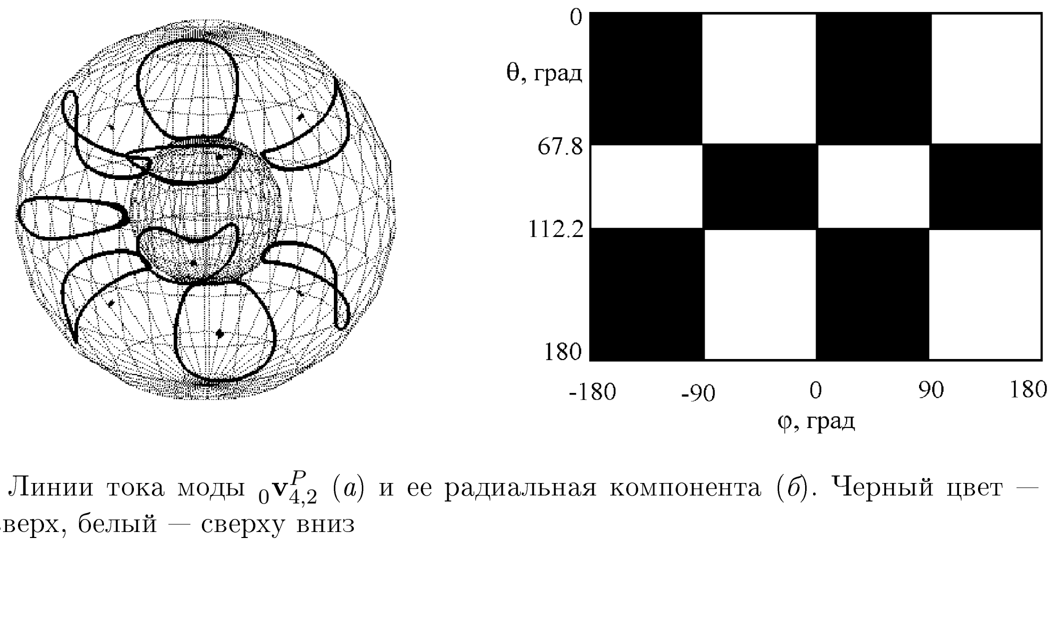

Рис. 2. Линии тока моды ${}_0\mathbf{v}^P_{4,2}$ (*а*) и ее радиальная компонента (*б*). Черный цвет — течение снизу вверх, белый — сверху вниз

С учетом этого разложения для аппроксимации кориолисова сноса основной моды скорости в модели использовались две тороидальные компоненты ${}_0\mathbf{v}^T_{5,2}$ и ${}_1\mathbf{v}^T_{3,2}$.

Для представления температуры были оставлены две моды: ${}_1\Theta_{0,0}$ и ${}_0\Theta_{4,2}$. Первая дает равномерное отклонение по радиусу от стационарного профиля (используется по аналогии с моделью Лоренца маломодовой конвекции в плоском слое [7]), вторая "запускает" основную конвективную моду ${}_0\mathbf{v}^P_{4,2}$.

Магнитное поле представим модами ${}_0\mathbf{B}^P_{1,0}$, ${}_0\mathbf{B}^P_{1,\pm1}$, описывающими дипольную часть, а также пространственно (по индексам) связанными с компонентами скорости модами ${}_0\mathbf{B}^T_{5,\pm2}$, ${}_0\mathbf{B}^P_{5,\pm2}$, ${}_0\mathbf{B}^T_{3,\pm2}$, ${}_0\mathbf{B}^P_{3,\pm2}$, ${}_0\mathbf{B}^T_{4,\pm2}$, ${}_0\mathbf{B}^P_{4,\pm2}$.

Таким образом, первоначально в модели будем использовать три компоненты скорости, две — температуры, 15 — магнитной индукции. В дальнейшем число магнитных мод можно сократить.

Для удобства в соответствии с табл. 1 перейдем к одноиндексным обозначениям.

Итак, принимаются разложения полей:

$$T = \alpha_0(t)\Theta_0 + \alpha_1(t)\Theta_1, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{2} \beta_i(t)\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=0}^{14} \gamma_i(t)\mathbf{B}_i. \tag{14}$$

Собственные значения мод температуры, скорости и индукции обозначим соответственно через λ_i, μ_i, η_i.

Т а б л и ц а 1. Одноиндексные обозначения

Трехиндексные комбинации и типы полей				Один индекс
k	n	m	Тип поля	
Моды температуры				
1	0	0		0
0	4	2		1
Моды скорости				
1	3	2	tor	0
0	4	2	pol	1
0	5	2	tor	2
Моды индукции				
0	1	−1	pol	0
0	1	0	pol	1
0	1	1	pol	2
0	4	−2	tor	3
0	4	2	tor	4
0	4	−2	pol	5
0	4	2	pol	6
1	3	−2	tor	7
1	3	2	tor	8
1	3	−2	pol	9
1	3	2	pol	10
0	5	−2	tor	11
0	5	2	tor	12
1	5	−2	pol	13
0	5	2	pol	14

Разложения (14) подставим в систему (1), предварительно взяв в ней ротор третьего уравнения. Следуя идее метода Галеркина [8], получим квадратичную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для амплитуд $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $\gamma_i(t)$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2} A_i^k \frac{d\beta_i}{dt} = \sum_{i,j=0}^{3} B_{ij}^k \beta_i\beta_j - \sum_{i=0}^{3} A_i^k \beta_i \mu_i + \mathrm{Ra}\mathrm{Pr}^{-1} \sum_{j=0}^{1} C_j^k \alpha_j + \\
&+\tau \sum_{i=0}^{2} E_i^k \beta_i + \sum_{i,j=0}^{14} L_{i,j}^k \gamma_i\gamma_j, \quad k = 0,1,2, \\
&\frac{d\alpha_s}{dt} = \sum_{i,j=0}^{2,1} F_{ij}^s \beta_i \alpha_j + \sum_{i=0}^{2} H_i^s \beta_i - \mathrm{Pr}^{-1}\lambda_s\alpha_s, \quad s = 0,1, \\
lr &\sum_{i=0}^{14} Q_i^l \frac{d\gamma_i}{dt} = \sum_{i,j=0}^{2,14} W_{ij}^l \beta_i\gamma_j - q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1} \sum_{i=0}^{14} Q_i^l \eta_i \gamma_i, \quad l = 0,\ldots,14.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Здесь $A_i^k = \langle \mathrm{rot}\mathbf{v}_k, \mathrm{rot}\mathbf{v}_i \rangle$, $B_{ij}^k = \langle \mathrm{rot}\mathbf{v}_k, \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}_i \times \mathrm{rot}\mathbf{v}_j) \rangle$, $C_j^k = \langle \mathrm{rot}\mathbf{v}_k, \mathrm{rot}\,(T_j r \mathbf{e_r}/r_2) \rangle$, $E_j^k = -\langle \mathrm{rot}\mathbf{v}_k, \mathrm{rot}\,(e_z \times \mathbf{v}_i) \rangle$, $L_{ij}^k = \langle \mathrm{rot}\mathbf{v}_k, \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\mathbf{B}_i \times \mathbf{B}_j) \rangle$, $F_{ij}^s = -\langle \Theta_s, (\mathbf{v}_i \bigtriangledown)\,\Theta_j \rangle$, $H_i^s = \langle \Theta_s, (\mathbf{v}_i)_r (r_1 r_2/r^2) \rangle$, $Q_i^l = \langle \mathrm{rot}\mathbf{B}_l, \mathrm{rot}\mathbf{B}_i \rangle$, $W_{ij}^l = \langle \mathrm{rot}\mathbf{B}_l, \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_l) \rangle$. Все эти скалярные произведения являются интегралами по объему либо всего ядра (коэффициенты Q_i^l), либо жидкого ядра (все остальные коэффициенты) от известных базисных полей. Они были вычислены в системе MAPLE 12, причем аналитическое интегрирование по θ и φ показало, что многие коэффициенты нулевые. В частности, равны нулю все коэффициенты W_{ij}^l для $l = 0, 2, 5, \ldots, 8, 11, 12$, а матрицы с элементами A_i^k и Q_i^l — диагональные. Тогда из системы (15) видно, что амплитуды магнитных мод $\mathbf{B}_l$ при вышеупомянутых l экспоненциально затухают и эти моды можно отбросить. Таким образом, окончательно в модели оставляем только семь магнитных мод. Система (15) теперь преобразуется к следующему виду:

$$
A_0^0 \frac{d\beta_0}{dt} = -A_0^0 \mu_0 \beta_0 + \tau E_1^0 \beta_1 + L_{4,1}^0 \gamma_1\gamma_4 + \left(L_{1,9}^0 + L_{9,1}^0\right)\gamma_1\gamma_9,
$$

$$
A_1^1 \frac{d\beta_1}{dt} = -A_1^1 \mu_1 \beta_1 + \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}} C_1^1 \alpha_1 + \tau\left(E_0^1\beta_0 + E_2^1\beta_2\right) + \left(L_{1,3}^1 + L_{3,1}^1\right)\gamma_1\gamma_3 +
$$

$$
+ \left(L_{1,10}^1 + L_{10,1}^1\right)\gamma_1\gamma_{10} + \left(L_{1,14}^1 + L_{14,1}^1\right)\gamma_1\gamma_{14},
$$

$$
A_2^2 \frac{d\beta_2}{dt} = -A_2^2 \mu_2 \beta_2 + \tau E_1^2 \beta_1 + L_{4,1}^2 \gamma_1\gamma_4 + \left(L_{1,13}^2 + L_{13,1}^2\right)\gamma_1\gamma_{13},
$$

$$
\frac{d\alpha_0}{dt} = F_{1,1}^0 \beta_1 \alpha_1 + \mathrm{Pr}^{-1}\lambda_0\alpha_0,
$$

$$
\frac{d\alpha_1}{dt} = F_{1,0}^1 \beta_1 \alpha_0 + H_1^1 \beta_1 - \mathrm{Pr}^{-1}\lambda_1\alpha_1,
$$

$$
Q_1^1 \frac{d\gamma_1}{dt} = W_{0,9}^1 \beta_0 \gamma_9 + W_{1,3}^1 \beta_1 \gamma_3 + W_{1,10}^1 \beta_1 \gamma_{10} + W_{1,14}^1 \beta_1 \gamma_{14} +
$$

$$
+W_{2,13}^1 \beta_2 \gamma_{13} - q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1} Q_1^1 \eta_1 \gamma_1,
$$

$$
Q_3^3 \frac{d\gamma_3}{dt} = W_{1,1}^3 \beta_1 \gamma_1 - q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1} Q_3^3 \eta_3 \gamma_3,
$$

$$Q_4^4\frac{d\gamma_4}{dt} = W_{2,1}^4\beta_2\gamma_1 + W_{0,1}^4\beta_0\gamma_1 - q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1}Q_4^4\eta_4\gamma_4,$$

$$Q_9^9\frac{d\gamma_9}{dt} = W_{0,1}^9\beta_0\gamma_1 - q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1}Q_9^9\eta_9\gamma_9,$$

$$Q_{10}^{10}\frac{d\gamma_{10}}{dt} = W_{1,1}^{10}\beta_1\gamma_1 - q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1}Q_{10}^{10}\eta_{10}\gamma_{10},$$

$$Q_{13}^{13}\frac{d\gamma_{13}}{dt} = W_{2,1}^{13}\beta_2\gamma_1 - q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1}Q_{13}^{13}\eta_{13}\gamma_{13},$$

$$Q_{14}^{14}\frac{d\gamma_{14}}{dt} = W_{1,1}^{14}\beta_1\gamma_1 - q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1}Q_{14}^{14}\eta_{14}\gamma_{14}. \tag{16}$$

Примем следующие значения для параметров земного ядра [9]: $\nu = 10^{-6}$ м^2/с, $\nu_m = 10^{-6}$ м^2/с, $k = 10^{-5}$ м^2/с, $\delta T = 10^3$ К, $\beta = 10^{-4}$ К$^{-1}$, $g_2 = 7$ м/с^2. Известно также, что $h = 2.1 \cdot 10^6$ м, $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-6}$ рад/с, $r_1 = 1391$ км.

Система (16) при любых значениях управляющих параметров имеет нулевую точку покоя, соответствующую отсутствию конвекции и магнитного поля. При вычислении ненулевых точек покоя учтем, что система (2) обладает симметрией относительно замены знака магнитного поля, а система (16) обладает симметрией относительно смены знаков амплитуд скоростных мод и температурной амплитуды α_1 при сохранении знака α_0. Эта вторая симметрия специфична для рассматриваемой маломодовой модели.

Численно, с использованием пакета MAPLE 12, были найдены три несимметричные ненулевые точки покоя. Координаты β_1 и γ_1 этих точек, определяющих характерные скорость конвекции и интенсивность основного диполя, приведены в табл. 2. С учетом вышеуказанных симметрий первая точка таблицы расщеляется на две, а каждая из двух оставшихся — на четыре. Первая точка соответствует непроводящему материалу ядра, т. е. в контексте настоящей работы интереса не представляет.

Пересчитывая безразмерную скорость в систему Си, получим, что $\beta_1 = 2.46 \cdot 10^8 \sim 10^{-4}$ м/с, $\beta_1 = 2.77 \cdot 10^7 \sim 10^{-5}$ м/с. Имеющиеся оценки реальной характерной скорости конвекции дают значения порядка 10^{-4} м/с [5].

Вне ядра дипольной моде $\mathbf{B}_1 = {}_0\mathbf{B}_{1,0}^P$ соответствует безразмерная компонента потенциала $R_{01}^P(r_2)\left(\dfrac{r}{r_2}\right)^{-2} Y_1^0$, которая на поверхности Земли имеет вид $2.93 \cdot 10^{-2}\cos\theta$. Тогда стационарным амплитудам будут соответствовать значения потенциала $2.01 \cdot 10^{10}\cos\theta$ и $1.76 \cdot 10^{11}\cos\theta$. Аналогичная безразмерная компонента потенциала в модели IGRF [10] для поверхности Земли равна в безразмерном виде $1.53 \cdot 10^9\cos\theta$.

Таким образом, точки покоя с координатами $\beta_1 = \pm 2.46 \cdot 10^8$, $\gamma_1 = -6.87 \cdot 10^{11}$ дают стационарные решения модели, совпадающие по порядку величин с имеющимися оценками скорости конвекции и на порядок отличающиеся от наблюдаемой величины основного диполя. Учитывая большую неопределенность в оценках таких параметров ядра как коэффициенты температуропроводности, объемного расширения и особенно

Таблица 2

Номер точки покоя	β_1	γ_1
1	$1.54 \cdot 10^2$	0
2	$2.46 \cdot 10^8$	$6.87 \cdot 10^{11}$
3	$2.77 \cdot 10^7$	$6.02 \cdot 10^{12}$

вязкости, можно говорить, что эти точки покоя дают стационарные режимы, близкие к наблюдаемым.

Заключение

В настоящей работе предложена и изучена маломодовая модель геодинамо. В основу модели положено предположение о пространственной структуре крупномасштабной конвекции, отражающей распределение плотности вещества в жидком ядре Земли, полученное по данным о расщеплениях сферических мод собственных колебаний Земли.

Магнитное поле представлено вертикальным диполем и шестью модами, структурно связанными с гидродинамическими токами. При принятых в теории геодинамо значениях физических параметров ядра в модели возможны восемь стационарных режимов магнитогидродинамической конвекции. Эти режимы разбиваются на две группы, в пределах каждой из которых различие точек выражает симметрию модели. Показано, что режимы одной из групп дают характерные скорости конвекции и величину дипольной компоненты магнитного поля на поверхности Земли, близкие по порядку величин к наблюдаемым.

Список литературы

[1] Kono M., Roberts P.H. Recent geodynamo simulations and observations of the field // Rev. Geophysics. 2002. Vol. 40, No. 10. P. B1–B41.

[2] Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 2000. Vol. 358. P. 873–897.

[3] Кузнецов В.В. Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли // Успехи физ. наук. 1997. Т. 169, № 9. С. 1001–1012.

[4] Водинчар Г.М., Шевцов Б.М. Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости // Вычисл. технологии. 2009. Т. 14, № 4. С. 3–15.

[5] Голицын Г.С. Режимы конвекции на различных вращающихся геофизических и астрофизических объектах // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27, № 1. С. 20–31.

[6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

[7] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.

[8] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 232 с.

[9] Merril R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L. The Magnetic Field of the Earth. N.Y.: Acad. Press, 1996. 532 p.

[10] International Geomagnetic Reference Field. `http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html`

Поступила в редакцию 5 апреля 2010 г.,
с доработки — 22 апреля 2010 г.