Вычислительные технологии **Том 4, № 4, 1999**

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНО-СИМВОЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ

А. Н. Рогалев
Красноярский государственный университет, Россия
Ю. И. Шокин
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail: shokin@adm.ict.nsc.ru

In the numerical estimation of the solution sets to differential equations with interval parameters, one of the major obstacles to the computation of good enclosures is known to be the so-called wrapping effect that causes exponential growth of the computed bounds of the solution. Up to now, this phenomenon has not been overcome yet. In the present paper, we advance a new explanation of the reasons of the wrapping effect relying on concepts of structural stability and recent developments in qualitative theory of differential equations. Additionally, we present the fundamentals of new interval-symbolic methods for the solution of interval differential equations, which sometimes enable one to successfully defeat the wrapping effect, and give a theoretical study of the new technique.

Введение

Как известно, использование интервальных методов позволяет получить гарантированные двусторонние оценки решений дифференциальных уравнений, но практическое вычисление этих оценок связано с проблемой экспоненциального взаимного расхождения найденных границ — явлением, которое получило название эффекта обертывания (в англоязычной литературе — wrapping effect, а в русских работах часто фигурируют также названия — эффект упаковывания или эффект Мура). Это явление так или иначе проявляется в большинстве интервальных и двусторонних методов оценки решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [9, 10, 12–16] и объясняется несколькими, часто налагающимися друг на друга, причинами. Основными из них являются пошаговое применение принципа сравнения решений дифференциальных уравнений (характеристики которого отражены в теореме польского математика Т. Важевского [2]) и структурная неустойчивость многих систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которая выявляет качественные изменения в траектории решения при изменении структуры самой системы.

На основе теоремы Важевского верхняя граница, построенная для дифференциальных уравнений (систем уравнений), будет и решением мажорирующего их уравнения (системы уравнений), если выполняется условие квазимонотонности правой части исходной системы. Без условия Важевского совпадения, как правило, не будет.

Как показывает наш опыт работы в области построения двусторонних оценок, значение результатов Важевского крайне важно, хотя не всегда осознается до конца. Но внедиагональная монотонность функций не является широко распространенным свойством, поэтому получение границы множеств решений, свободных от экспоненциального разбегания, является весьма актуальным. Ниже предлагается новая методика нахождения таких границ, основанная на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории и символьных формулах его представления с последующим интервальным оцениванием.

1. Верхние и нижние границы, получаемые на основе теорем сравнения

Остановимся подробнее на использовании теорем сравнения.

Чтобы получать модели сравнения, С. А. Чаплыгин [5] предложил использовать дифференциальные неравенства

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_n y < f(t),$$

где $y(t)$ — скалярная переменная. Пусть на любом интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ существует единственное для любых начальных условий решение соответствующего дифференциального уравнения $z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \cdots + b_n z = f(t)$. Требуется найти условия, при которых кривая $y(t)$, проходящая через ту же начальную точку, на всем интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ будет удовлетворять неравенству $y(t) < z(t)$. В случае дифференциального неравенства первого порядка и функции $f(\cdot)$, дифференцируемой на интервале $[t_0, t_0 + \tau]$, разрешимость задачи была показана С. А. Чаплыгиным. Резюмируя дальнейшие исследования в этом направлении, можно сформулировать следующие результаты.

Пусть заданы дифференциальное неравенство и соответствующее дифференциальное уравнение

$$y' < f(t, y), \tag{1}$$

$$z' = f(t, z), \tag{2}$$

где функция f определена на некотором открытом множестве T_0, непрерывна и дифференцируема на интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ и допускает продолжение решения $z(t; t_0, z_0)$ на интервале $[t_0, t_0 + \tau]$. Тогда уравнение (2) при $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ имеет единственное решение $z(t) = z(t; t_0, z_0)$, проходящее через начальную точку (t_0, z_0) из области определения функции $f(\cdot)$.

Если взять любую функцию $y(t)$ такую, что $y(t_0) \le z(t_0)$ и для нее на интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ выполняется неравенство (1), то на всем интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ будет выполняться неравенство $y(t) \le z(t)$.

Если функция $f(t, z)$ лишь непрерывна на некотором интервале, зависящем от начальных условий (t_0, z_0), то решение задачи Коши существует, но может быть не единственным, и через любую начальную точку (t_0, z_0) из области определения может проходить, вообще говоря, множество интегральных кривых, образующих интегральную воронку с вершиной в (t_0, z_0). Мажорирующую (минорирующую) модель сравнения в этом случае построить можно, если среди всех решений $z(t; t_0, z_0)$ интегральной воронки существует верхнее решение $z^+(t)$ (соответственно нижнее решение $z_-(t)$), т. е. такое, что всякие другие решения из той же воронки удовлетворяют неравенству

$$z(t) \leq z^+(t) \quad \text{для любого } t \in (t_0 - \tau_2, t_0 + \tau_1)$$

(соответственно $z_-(t) \leq z(t)$ для любого $t \in (t_0 - \tau_2, t_0 + \tau_1)$).

Итак, в дальнейшем мы используем два понятия:

1) верхнее (нижнее) решение, являющееся решением, мажорирующим (минорирующим) любую интегральную кривую из образующих интегральную воронку;

2) верхняя (нижняя) граница решений, которая может не быть решением дифференциального уравнения, но оценивает любое решение сверху.

Особенно существенно это различие для систем дифференциальных уравнений. При начальных условиях $y(t_0) \leq z(t_0)$ мы через небольшой промежуток времени уже утрачиваем справедливость этого неравенства. Это означает, что выбранное решение перестает быть мажорантой, а взамен него на верхнюю границу может выходить другая интегральная кривая. Неприятность этого явления в том, что в методах построения двусторонних (интервальных) оценок крайне важна возможность отслеживания совпадения верхних (нижних) оценок и верхних (нижних) решений. Именно это обеспечивает приемлемое поведение ширины верхних и нижних границ.

Условия Важевского, предъявляемые к векторной непрерывной, но не обязательно к дифференцируемой функции f, и обеспечивающие существование верхнего и нижнего решений уравнения $z' = f(t, z)$ при соблюдении соответствующих дифференциальных неравенств, состоят в следующем: функция $f(\cdot)$ определена и непрерывна в открытой области $F = \{\, (t, z) \mid t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \|z - z_0\| < Z \,\}$ и непрерывна в ней, функция f — квазимонотонная и неубывающая, т. е. такая, что все ее скалярные компоненты $f_i(t, z)$ — монотонные неубывающие функции всех своих аргументов, кроме t и z_i, которые считаются фиксированными:

$$z'_j < z''_j, \quad z'_i = z''_i$$

для $j = 1, 2, \ldots, r$, $j \neq i$. Тогда справедливы неравенства

$$f_i(t, z') \leq f_i(t, z'').$$

Отсутствие требования монотонности по t существенно для практических задач, так как при этом не устраняется возможность оценивать решения нестационарных систем, у которых функции $f_i(t, \cdot)$ с течением времени могут как убывать, так и возрастать, в частности для уравнений с переменными и периодическими коэффициентами.

Кроме того, отсутствуют требования на характер поведения функций f_i по собственной переменной z_i. Это имеет значение, в частности, в тех случаях, когда изолированная подсистема устойчива и введение условия неубывания $f_i(\cdot)$ по z_i сделало бы метод оценки, основанный на теореме Важевского, практически бесполезным.

Условия Важевского легко проверяются в случае линейных систем. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$z' = W(t)z,$$

где элементы матрицы $W(t)$ могут быть как функциями, зависящими от t, так и постоянными величинами:

$$W(t) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) & \dots & w_{1r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1}(t) & w_{r2}(t) & \dots & w_{rr}(t) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с определением Важевского функция f будет квазимонотонной и неубывающей в том и только в том случае, когда все внедиагональные элементы матрицы W будут неотрицательными:

$$w_{ij} \geq 0, \quad i \neq j,\ i, j = 1, 2, \dots, r.$$

Сформулируем **теорему Важевского** [2]. *Пусть дана система ОДУ*

$$z' = f(t, z) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$z(t_0) = z_0, \tag{4}$$

вектор-функция $f(\cdot)$ *определена и непрерывна в области*

$$F = \{\, (t, z) \mid t_0 - \tau_2 \leq t \leq t_0 + \tau_1,\ \tau_1 > 0, \tau_2 > 0,\ ||z - z_0|| < \rho \,\}, \tag{5}$$

и удовлетворены условия Важевского квазимонотонности и неубывания $f(\cdot)$. *Тогда имеем*

1) если решение задачи Коши (3) – (4) единственно и задана вектор-функция $v(t)$, *непрерывная на интервалах* $[t_0, t_0 + \tau_1]$ *или* $[t_0 - \tau_2, t_0]$ *такая, что выполняются строгие неравенства*

$$v(t_0) < z_0,$$

$$v(t)^{\cdot} < f(t, v),\ t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_1,$$

то справедливо неравенство

$$v(t) < z(t) \tag{6}$$

соответственно на интервалах $[t_0, t_0 + \tau_1]$ *или* $[t_0 - \tau_2, t_0]$*;*

2) если решение задачи Коши (3), (4) неединственно, то на некотором интервале $[t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_1]$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, *существуют верхнее (максимальное)* $\overline{z}$ *и нижнее (минимальное)* $\underline{z}$ *решения такие, что*

$$\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t), \tag{7}$$

и эти решения проходят через точку (t_0, z_0).

Таким образом, класс уравнений, для которого бесспорно построение классических двусторонних оценок или “наивных” интервальных методов, ограничивается классом систем дифференциальных уравнений с квазимонотонной правой частью.

Далее будут изложены вопросы применения подхода, позволяющего избежать влияния эффекта обертывания (экспоненциального роста верхних и нижних границ решений) и находить оценки, обеспечивающие сходимость в определенной норме (покоординатную сходимость). Основой этого подхода является сочетание символьных формул приближенных решений (аппроксимирующих некоторую траекторию исходной системы), найденных по сходящимся алгоритмам (сдвига по траектории), с последующим построением интервальных расширений по этим формулам совместно с интервальным оцениванием глобальной ошибки.

Большинство задач, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений с неточно заданными данными, может быть сведено к задаче с интервальными начальными данными

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \tag{8}$$

$$(y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,) \tag{9}$$
$$t \in [t_0, t_f], \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad y_0 \in \mathbf{Y}_0 \in \mathbb{IR}^n.$$

Этот факт был упомянут еще в книге Р. Мура [1] (см. также [15]). Суть его достаточно очевидна: в исходную систему нужно ввести дополнительное уравнение относительно вспомогательной переменной (параметра) системы с нулевой правой частью и соответственно интервальными начальными данными. Далее во многих случаях принято ограничиваться построением интервальных оценок для автономных систем ОДУ или динамических систем. Для нашего случая это не имеет принципиального различия, так как wrappiing effect наблюдается и для них, но исследования свойства структурной устойчивости производились для автономных систем уравнений. Следовательно, в дальнейшем будем считать, что в системе ОДУ (8) правая часть не зависит от t.

При этом мы хотим вычислить интервальную функцию $\mathbf{Y}(t) = \left[\underline{\mathbf{Y}}(t), \overline{\mathbf{Y}}(t)\right]$, для которой $y(t) \in \mathbf{Y}(t)$ при всех $t \in [t_0, t_f]$. Функция $\mathbf{Y}(t)$ учитывает также гарантированные границы глобальной ошибки решения задачи (8). Этот подход расширяет методику оценки численных решений с учетом всех типов погрешностей.

Реализация предлагаемых методов может производиться несколькими способами, которые объединяет общая идея аппроксимации оператора сдвига по траектории решения символьной формулой.

Классификация выглядит так:

А) способ основан на применении методов сплайн-коллокации решений дифференциального уравнения на заданной сетке узлов сплайнами большого дефекта; это позволяет находить символьные формулы коэффициентов сплайнов обычными подстановками и получать формулы приближенных решений;

Б) способ основан на преобразовании исходной системы дифференциальных уравнений к расширенной системе уравнений, в которую включена переменная, задающая длину дуги траектории решения, и затем аппроксимации преобразованной системы линейным многошаговым разностным методом (нахождение символьных формул приближенных решений) с последующим получением интервальных расширений по этим символьным формулам.

В обоих случаях при выполнении условий, обеспечивающих сходимость, получаем формулу глобальной ошибки, позволяющую находить интервальные оценки множества точных решений.

2. Возмущение векторного поля

Главная особенность классических понятий устойчивости состоит в том, что они относятся к конкретной системе и поведению ее траекторий в окрестности точки равновесия (притяжения или отталкивания). Совершенно другого подхода требует анализ поведения семейства траекторий, включая особые точки, сепаратрисы и предельные циклы, взаимное расположение которых определяет структуру семейства; этот анализ возникает при рассмотрении всех систем, “близких” к стандартной (8).

Согласно определению, введенному Понтрягиным и Андроновым [6], система (8) называется структурно устойчивой (грубой), если топологический характер траекторий всех близких к ней систем такой же, как у (8). Определенные математические трудности связаны с уточнением понятия “близкая система”, а также с конкретизацией смысла, который подразумевается под “эквивалентностью” траекторий, или их “топологическим подобием”. Но основная идея остается ясной: достаточно малые изменения структурно устойчивой системы должны приводить к соответственно малым изменениям в динамике ее поведения.

Пусть динамическая система $L(y,\mu)$ определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = L(y,\mu) \tag{10}$$

для вектора состояния y и зависит от некоторой совокупности параметров μ. Появление параметров здесь отражает тот факт, что к концепции структурной устойчивости близка теория бифуркаций. Это упоминает в своей монографии [25] В. И. Арнольд: “Бифуркация является раздвоением и используется для обозначения всякой качественной, топологической перестройки картины при изменении параметров, от которых зависит изучаемый объект. Из особых точек векторного поля на плоскости точками общего положения являются узлы, фокусы и седла, в то время, как, скажем, центры разрушаются сколь угодно малым шевелением поля”.

При анализе бифуркаций обычно предполагается, что динамика системы зависит от нескольких параметров и характер положений равновесия исследуется при их изменении. Фазовое пространство наделено некоторой структурой, которая задается направленным по движению ходом фазовых траекторий. Эта структура полностью определяется особыми структурными элементами в области движения, к которым относятся особые точки, сепаратрисы и предельные циклы. Их взаимное расположение и определяет структуру движения. Среди множества различных ситуаций есть такие, которые являются типичными, но есть и исключительные. Поэтому в первую очередь следует провести определенную классификацию систем $L(y,\mu)$.

Пусть при малом шевелении (т. е. при малом возмущении) “поля” L полученная динамическая система будет эквивалентна исходной. Такую систему называют структурно-устойчивой, или грубой, по Андронову — Понтрягину.

Рассмотрим в качестве примера динамическую систему, состоящую из двух уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(y_1,y_2),\\ y_2 &= F_2(y_1,y_2), \end{aligned} \tag{11}$$

и возмущенную систему

$$\begin{aligned} y_1 &= G_1(y_1,y_2),\\ y_2 &= G_2(y_1,y_2), \end{aligned} \tag{12}$$

которые определены в круге $D = \{\,(y_1,y_2) \mid y_1^2+y_2^2 \le 1\,\}$. Предположим далее, что векторы (F_1,F_2) и (G_1,G_2) не совпадают с касательной к границе области D и всегда направлены внутрь D.

Дифференциальное уравнение (11) называется структурно-устойчивым, если существует $\delta > 0$ такое, что для любого дифференциального уравнения (12), удовлетворяющего условиям

$$|F_i - G_i| < \delta, \quad \left|\frac{\partial(F_i - G_i)}{\partial x_j}\right| < \delta,$$

во всех точках D существует гомеоморфизм (взаимно однозначное непрерывное отображение), отображающий траектории системы (11) в траектории системы (12) и сохраняющий ориентацию этих траекторий. Другими словами, система структурно устойчива, если траектории близких систем можно непрерывным образом деформировать из одних в другие, сохраняя ориентацию потока.

Теорема Андронова — Понтрягина [6] о структурной устойчивости (в круге) утверждает следующее.

Дифференциальное уравнение (11) структурно-устойчиво в том и только в том случае, если 1) особые точки системы (11) гиперболические, 2) замкнутые траектории системы (11) гиперболические, 3) ни одна из траекторий системы (11) не соединяет седловые точки.

В более общем случае для описания структуры векторных полей на гладком многообразии необходимо изучение некоторого подмножества в пространстве векторных полей. Желательно, чтобы это подмножество было открытым и полным и его элементы были грубыми и имели достаточно простую структуру траекторий, поддающуюся классификации.

В глобальном смысле намеченная выше программа может быть реализована для компактных двумерных многообразий. Этот результат, полученный Пейксото [26, 27], является одной из ранних вех в развитии данной теории. Для высших размерностей множество грубых полей по-прежнему обширно, но не является уже всюду плотным. Класс векторных полей, называемых системами Морса — Смейла, образует непустое открытое подмножество, а его элементы являются грубыми. Эти результаты верны для компактных многообразий любой размерности, но только в случае многообразий размерности 2 системы Морса — Смейла являются также плотными.

Определение. Пусть V — компактное многообразие размерности n и $X \in \kappa^r(M)$. X называется *векторным полем Морса — Смейла*, если

1) имеет конечное число критических элементов (особых точек) и все они гиперболические;

2) из того, что σ_1, σ_2 — критические элементы поля X, следует трансверсальность устойчивого многообразия точки σ_1 к неустойчивому многообразию точки σ_2;

3) $\Omega(X)$ совпадает с объединением критических точек поля X.

Вначале исследователи полагали, что неустойчивые (негрубые) системы в пространстве параметров динамической системы — это лишь граничные случаи между различными устойчивыми (грубыми) системами, т. е. поверхности коразмерности больше 1. При этом свойством структурной устойчивости должны были обладать почти все системы дифференциальных уравнений. Однако после работ Смейла стало ясно, что негрубые системы могут заполнять целые области пространства динамических систем. Этот факт ориентирует нас при построении оценок решений систем ОДУ более детально учитывать возможные качественные изменения (возмущения структуры) системы обыкновенных дифференциальных уравнений, коль скоро такие возмущения сопровождают компьютерную реализацию большинства интервальных алгоритмов.

Рассматривая машинную реализацию интервальных методов построения оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, мы вносим возмущения во все коэффициенты системы, т. е. переходим от метода вида

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^n + h\Phi(y_k, h)$$

к методам вида

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^n + h\Theta(y_k, h),$$

где Θ уже несколько отличается от Φ. При этом операции над интервалами допускают внесение малых возмущений во все члены $\Theta_k(y_k, h)$, что может привести к появлению качественно других систем, в том числе опосредовать появление неустойчивых систем уравнений в пределах внесенных возмущений. Далее новые неустойчивые системы будут входить в совокупность систем ОДУ, для каждой из которых должен выполняться принцип сравнения решений. Анализ устойчивости при этом отличается от классического исследования. Аналогичный факт убедительно продемонстрирован в работе [24], где показано, что при изучении поведения аттракторов и "детерминированной" стохастики большое влияние оказывают ошибки округления и сдвиги чисел при хранении их в памяти.

Общий вид интервального алгоритма можно представить как тройку $\langle X, \Phi_f, h\rangle$, $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$.

Утверждение. *Для любого интервального метода построения оценки множеств решений задачи (8) реализация его в арифметике с направленными округлениями, как правило, вызывает возмущения векторного поля исходной системы ОДУ.*

Обосновать это утверждение можно, например, следующим образом. Значение интервала $\mathbf{Y}^n$ на n-м шаге мы получаем как

$$\mathbf{Y}^n = G(\mathbf{Y}^n, \Phi_f(y,t)), \tag{13}$$

где $G(\mathbf{Y}^n, \Phi_f(y,t))$ — некоторая интервальная формула, $\Phi_f(y,t)$ — интервальное расширение правой части исходной системы. При реализации некоторых операций над граничными точками интервалов осуществляется направленное округление, что приводит к появлению возмущения структуры системы дифференциальных уравнений. При этом выполняются включения $\mathbf{Y}^n \supseteq \{\, y(t, y_0) \mid |f(t,y) + [-\varepsilon, \varepsilon] \in \Phi_f,\ y \in \mathbf{Y}\,\}$, где сложение вектора правой части понимается покомпонентно. В силу сказанного происходит возмущение векторного поля. Верхняя и нижняя границы функции $G(\mathbf{Y}^n, \Phi_f(y,t))$ строятся так, чтобы мажорировать решения всех ОДУ, правые части которых включаются в функцию G. Поскольку возмущение векторного поля вызывает возмущение структуры верхних и нижних границ, то системы ОДУ, правые части которых включаются в функцию G, не могут состоять лишь из устойчивых систем ОДУ. Согласно изложенным фактам структурной устойчивости, в этом множестве в большинстве случаев найдутся неустойчивые системы ОДУ. Как упоминалось выше, негрубые системы могут заполнять целые области пространства динамических систем. Таким образом, верхняя и нижняя границы интервальных оценок в силу своего построения должны мажорировать в том числе неустойчивые решения. Это является одной из главных причин "эффекта обертывания" (wrapping effect) — экспоненциального роста границ решений.

В качестве примера рассмотрим систему двух линейных обыкновенных уравнений, на примере которой, как было отмечено, показывал влияние этого эффекта Р. Мур [1]. Пусть

$$y' = Ay, \tag{14}$$

где y — вектор размерности два, A — матрица коэффициентов,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общая схема большинства пошаговых интервальных методов построения границ множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений[1] выглядит как

$$\mathbf{Y}(t_{k+1}) = \mathbf{Y}(t_k) + h^m A\mathbf{Y}(t_k).$$

Здесь присутствуют интервальные векторы $\mathbf{Y}(t_k)$ и интервальные арифметические операции. В силу определения направленных округлений, при выполнении интервальных операций получим для компоненты $\mathbf{Y}_1$ соотношение

$$\mathbf{Y}_1(t_{k+1}) = \mathbf{Y}_1(t_k) + h^k([-\varepsilon, \varepsilon]\mathbf{Y}_1(t_k) + [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]\mathbf{Y}_2(t_k)).$$

Последняя запись означает, что при реализации каждой операции над граничными точками интервалов осуществляется направленное округление (ϵ — константа, характеризующая машинную точность), а это и есть возмущение структуры дифференциальных уравнений.

Применим для оценки множеств точных решений интервальный метод последовательных приближений Пикара. Заметим, что он не является пошаговым по времени, так как позволяет получить оценки сразу при интересующем нас значении аргумента t. Обозначим границы интервалов на n-м шаге приближения $\underline{\mathbf{Y}}_1^{(n)}, \overline{\mathbf{Y}}_1^{(n)}, \underline{\mathbf{Y}}_2^{(n)}, \overline{\mathbf{Y}}_2^{(n)}$; тогда можно записать метод последовательных приближений в виде

$$\left[\underline{\mathbf{Y}}_1^{(n+1)}, \overline{\mathbf{Y}}_1^{(n+1)}\right] = \int\limits_0^t \left[\underline{\mathbf{Y}}_2^{(n)}(s), \overline{\mathbf{Y}}_2^{(n)}(s)\right] ds + \left[\underline{\mathbf{Y}}_1^0, \overline{\mathbf{Y}}_1^0\right],$$

$$\left[\underline{\mathbf{Y}}_2^{(n+1)}, \overline{\mathbf{Y}}_2^{(n+1)}\right] = \int\limits_0^t \left[-\overline{\mathbf{Y}}_1^{(n)}(s), -\underline{\mathbf{Y}}_1^{(n)}(s)\right] ds + \left[\underline{\mathbf{Y}}_2^0, \overline{\mathbf{Y}}_2^0\right].$$

Пусть $\underline{\mathbf{Y}}_1^0 = \underline{\mathbf{a}}_1$, $\overline{\mathbf{Y}}_1^0 = \overline{\mathbf{a}}_1$, $\underline{\mathbf{Y}}_2^0 = \underline{\mathbf{a}}_2$, $\overline{\mathbf{Y}}_2^0 = \overline{\mathbf{a}}_2$; тогда

$$\underline{\mathbf{Y}}_1^{(n)} = \underline{\mathbf{a}}_1 \frac{t^n}{n!} - \overline{\mathbf{a}}_2 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \overline{\mathbf{a}}_1 \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \underline{\mathbf{a}}_2 \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} +$$

$$+ \underline{\mathbf{a}}_1 \frac{t^{n-4}}{(n-4)!} - \overline{\mathbf{a}}_2 \frac{t^{n-5}}{(n-5)!} + \ldots + \underline{\mathbf{a}}_1,$$

$$\overline{\mathbf{Y}}_1^{(n)} = \overline{\mathbf{a}}_1 \frac{t^n}{n!} - \underline{\mathbf{a}}_2 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \underline{\mathbf{a}}_1 \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \overline{\mathbf{a}}_2 \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} +$$

$$+ \overline{\mathbf{a}}_1 \frac{t^{n-4}}{(n-4)!} - \overline{\mathbf{a}}_2 \frac{t^{n-5}}{(n-5)!} + \ldots + \overline{\mathbf{a}}_1,$$

$$\underline{\mathbf{Y}}_2^{(n)} = \underline{\mathbf{a}}_2 \frac{t^n}{n!} + \underline{\mathbf{a}}_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \overline{\mathbf{a}}_2 \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} - \overline{\mathbf{a}}_1 \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} +$$

[1] В последнее время часто называемых в литературе “наивными” методами.

$$+\underline{\mathbf{a}}_2\frac{t^{n-4}}{(n-4)!}+\overline{\mathbf{a}}_1\frac{t^{n-5}}{(n-5)!}+\ldots+\underline{\mathbf{a}}_2,$$

$$\overline{\mathbf{Y}}_2^{(n)}=\overline{\mathbf{a}}_2\frac{t^n}{n!}-\overline{\mathbf{a}}_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}-\underline{\mathbf{a}}_2\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}-\underline{\mathbf{a}}_1\frac{t^{n-3}}{(n-3)!}+$$

$$+\overline{\mathbf{a}}_2\frac{t^{n-4}}{(n-4)!}+\overline{\mathbf{a}}_1\frac{t^{n-5}}{(n-5)!}+\ldots+\overline{\mathbf{a}}_2.$$

Несложные преобразования этих формул и переход к пределу позволяют получить выражения для длин интервальных оценок:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{Y}}_1(t)-\underline{\mathbf{Y}}_1(t) &= (\overline{\mathbf{a}}_1-\underline{\mathbf{a}}_1)\cosh t+(\overline{\mathbf{a}}_2-\underline{\mathbf{a}}_2)\sinh t,\\ \overline{\mathbf{Y}}_2(t)-\underline{\mathbf{Y}}_2(t) &= (\overline{\mathbf{a}}_2-\underline{\mathbf{a}}_2)\cosh t+(\overline{\mathbf{a}}_1-\underline{\mathbf{a}}_1)\sinh t,\end{aligned}$$

т. е. близкий к экспоненциальному рост длин интервалов. Следовательно, построение методов интервального оценивания должно происходить на основе уменьшения влияния интервальных вычислений, например значений функций.

Динамику системы дифференциальных уравнений (14) можно описать, рассмотрев ее как уравнение осциллятора

$$y''+c_1y'+c_2y=0,\quad y(t_0)=a,\quad y'(t_0)=0.$$

Проанализируем влияние параметров c_1, c_2 на траекторию системы. Если $c_1=0$, то на фазовой плоскости $(y,\dot{y})$ все траектории являются концентрическими окружностями с радиусами $a\sqrt{t}$ и центром в начале координат.

Если ввести в систему трение, то при условии $c_1>0$ точка равновесия $y=\dot{y}=0$ на плоскости есть либо узел, либо фокус. В обоих случаях начало координат является положением устойчивого равновесия по отношению к возмущениям в c_1, c_2. Эта ситуация резко контрастирует со случаем системы без трения ($c_1=0$), когда начало координат есть центр и качественная картина поведения изменяется при сколь угодно малых изменениях c_1. Таким образом, при $c_1=0$ система структурно неустойчива, а при качественных изменениях возможны появления систем неустойчивых, по Ляпунову.

Возможно трактовать как закон движения точки $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ векторного пространства $\mathbb{R}^n$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y), \tag{15}$$

правые части которой удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование решения достаточной гладкости. Кроме того, будем считать, что каждое начальное условие

$$y(s)=y_0$$

однозначно определяет решение

$$y(t)=u(t,s,y_0)$$

исходной системы, причем это решение определено при любом t.

Точка y_0, двигаясь по траекториям системы, за время от s до t перейдет в новую точку $y(t)$. Как было отмечено выше, оператор $U(t,s)$, определяющийся равенством

$$U(t,s)y_0=u(t,s,y_0)$$

и задающий переход от точки y_0 к новой точке $y(t)$, называется оператором сдвига по траекториям системы. Из определения и свойств оператора сдвига вдоль траектории (оператора Коши) следует, что однозначная разрешимость при каждом начальном условии системы уравнений (15) означает непрерывность оператора сдвига. Развиваемый ниже подход к оцениванию множеств решений систем ОДУ с интервальными данными состоит в объединении символьного вычисления формул приближенного решения с последующим нахождением интервального расширения. Тем самым мы аппроксимируем оператор сдвига по траекториям системы формулой в символьном виде, что в определенной степени ослабляет требования к методу нахождения решений в аналитическом виде, хотя выдвигает некоторые новые специфичные условия.

3. Сдвиг по траектории и символьные формулы для нахождения интервальных оценок

Рассмотрим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt} = f(t, y),\\ y(t_0) = y_0 \in \mathbf{Y}_0,\end{gathered} \tag{16}$$

где $\mathbf{Y}_0 \in \mathbb{IR}^n$. Обозначим совокупность точных решений задачи (16) как

$$Y^*(t) = \{\, y(t) \mid y' = f(t, y) \;\&\; y(t_0) \in \mathbf{Y}_0 \,\}.$$

Пусть на интервале $[t_0, t_K]$, где рассматривается задача (16), введена сетка узлов

$$t_0 < t_1 < \ldots, t_N = t_K, \quad \tau = \max_i \{\, t_{i+1} - t_i \}.$$

Развиваемый нами алгоритм построения интервальных оценок множеств решений основан на символьном вычислении коэффициентов приближенных решений с последующим нахождением их интервальных расширений и интервальной оценкой погрешности сплайн-коллокации. Ранее в работах [17–20] была изложена методика применения сплайн-коллокаций для нахождения символьных формул приближенных решений. Широкое применение сплайнов объясняется их хорошо известными аппроксимирующими свойствами и удобством для вычислений символьных выражений. При этом мы разделяем следующие классы задач: 1) системы ОДУ с линейной правой частью и 2) системы ОДУ с нелинейной правой частью. В первом случае для определения коэффициентов сплайн-решений в методе коллокации можно решать системы линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов точно, пользуясь пакетами аналитических вычислений на ЭВМ. Решение нелинейных систем ОДУ потребует некоторых изменений при выборе сплайн-функций и их коэффициентов, хотя и не внесет принципиальных отличий в общий подход. Для систем ОДУ с линейной правой частью обоснование нашей методики изложено в работах [17–20]; здесь мы распространяем доказательство на общий случай систем с нелинейной правой частью.

Пусть для правой части $f(t, y)$ системы (16) выполнено условие Липшица в виде

$$\left| f_k^{(i)}(t, y) - f_k^{(i)}(t, z) \right| \le L_{ki} \|y - z\| \le L \|y - z\|,$$

где $L > 0$, $L_{ki} > 0$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, функции $f_k^{(i)}$ определяются по формулам

$$f_k^0(t, y) = f_k(t, y),$$

$$f_k^{(i)}(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} f_k^{(i-1)}(t, y) + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y_l} f_k^{(i-1)} \right) f_k,$$

а в качестве нормы $\|\cdot\|$ выбрана чебышевская норма, т. е. мы полагаем

$$\|y - z\| = \max_k |\, y_k - z_k|.$$

Для аппроксимации каждой компоненты y_k вектора решений y используем полиномиальные сплайн-функции s_k степени m дефекта d. Подбор значений параметров m и d будет осуществляться на основе требования устойчивости построенной сплайн-функции.

Основные этапы нашего алгоритма решения систем ОДУ вида (16) можно описать так.

Этап 1. Выражаем значение сплайна $s_k(t)$ в любой интересующей нас точке t интервала $[t_0, t_K]$ как функцию от начальных значений $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$.

Этап 2. Оцениваем разность значений сплайна $s_k(t)$ и точного решения $y_k(t)$ с помощью выражения

$$\max_k |\, y_k(t) - s_k(t)\,| \le h^m r(t),$$

где $r(t)$ не зависит от h, $m > 0$ — некоторая константа, не зависящая от k.

Этап 3. В качестве интервальной оценки множества решений по каждой компоненте используем интервальную функцию

$$Y_k(t) = s_k^*(t) + h^m[-r(t), r(t)],$$

где $s_k^*(t)$ — объединенное интервальное расширение найденных сплайн-функций по всем $y_0 \in \mathbf{Y}_0$, т. е.

$$s_k^*(t) = \bigcup_{y_0 \in \mathbf{Y}_0} s_k(t).$$

Перейдем к описанию этапов 1 и 2. Оценка глобальной ошибки сплайн-аппроксимации решения системы ОДУ позволяет находить интервальную оценку множества решений системы ОДУ. Особенность нашего метода состоит в том, что отыскивается символьная формула, однако это не влияет на результаты, относящиеся к точности оценок.

На интервале $[t_0, t_K]$ введем равномерную сетку $t_i = t_0 + ih$, $h = (t_k - t_0)/N$, $i = 0, 1, \ldots, N$. На каждом подынтервале $J_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, для k-компоненты сплайн-функции $s_k(t)$ справедливо представление

$$s_k(t) = \sum_{j=0}^{q} C_{ij}^k \frac{(t - t_i)^j}{j!} + \sum_{j=1}^{d} C_{i,q+j}^k \frac{(t - t_i)^{q+j}}{(q+j)!}, \tag{17}$$

где коэффициенты удовлетворяют в точке t_i условиям

$$C_{ij}^k = s_k^{(j)}(t_i), \quad j = 0, 1, \ldots, q,$$

причем

$$C_{0j}^k = y_k^{(j)}(t_0), \quad j = 0, 1, \ldots, q,$$

а также условиям коллокации в точке t_{i+1}:

$$s_k^j(t_{i+1}) = f_k^{(j-1)}(t_{i+1}, s(t_{i+1})), \quad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{18}$$

Для доказательства разрешимости и единственности схемы сплайн-коллокации запишем (17) в виде

$$Dz = F(z, h),$$

где

$$z = (z_i)^T \in \mathbb{R}^{nd},\ z_i = h^{q+l_1} C^k_{i,q+l_1},$$

$$F(z, h) = (F_l(z, h))^T \in \mathbb{R}^{nd},$$

$$F_l(z, h) = h^{l_1} m_k^{(l_1-1)}(t_{i+1}, S(t_{i+1})) - \sum_{r=l}^{q} C^k_{ir} \frac{h^r}{(r-1)!}.$$

Матрица D имеет размерность $nd \times nd$ и не зависит от выбора правой части задачи (15); она составлена из n диагональных блоков D_b, в которых

$$D_b = [(q + j - l_1)!]^{-1}, \quad l_1, j = 1, 2, \ldots, d, \quad [(-p)!]^{-1} = 0,$$

$$p \in \mathbb{N}, \quad l = (k-1)d + l_1, \quad l_1 = 1, 2, \ldots, d, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть правая часть f — функция, не зависящая от y; тогда получаем задачу интерполирования, по Эрмиту, имеющую единственное решение [19]. Следовательно, матрица D не вырождена для любых функций $m(x, y)$. Функция F удовлетворяет условию Липшица в норме пространства $\mathbb{R}^{nd}$. Применяя теорему Банаха о неподвижной точке к отображению

$$D^{-1}F(z, h) \,:\, \mathbb{R}^{nd} \to \mathbb{R}^{nd},$$

имеем при достаточно малом h существование единственной неподвижной точки. Разрешимость и единственность схемы сплайн-коллокации следуют из этих рассуждений и схемы доказательства.

Проведем теперь доказательство сходимости полученных сплайн-функций к решению задачи (15) и оценку погрешности. На интервале J_i каждая компонента сплайн-функции s_k имеет вид

$$s_k(t) = \sum_{j=0}^{q} s_k^{(j)}(t_i) L_{1j}(t) + \sum_{j=1}^{d} s_k^{(j)}(t_{i+1}) L_{2j}(t) + s_k(t_{i+1}) L_{20}(t),$$

где $L_{1j}(t)$, $L_{2j}(t)$ — базисные полиномы интерполирования, по Эрмиту, в общем виде записывающиеся как

$$L_{ij}(t) = \frac{w(t)}{j!} \sum_{r=1}^{\alpha_{i-j}} \frac{(t - t_i)^{-r}}{(\alpha_i - j - r)!} \cdot \frac{d^{\alpha_i - j - r}}{dt^{\alpha_i - j - r}} \left\{ \frac{(t - t_i)^{\alpha_i}}{w(t)} \right\} \Bigg|_{t=t_i}, \tag{19}$$

где точки t_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ — узлы интерполяции кратности α_i:

$$w(t) = \prod_{i=1}^{N} (\,t - t_i)^{\alpha_i}.$$

В нашем случае интерполяция происходит по двум узлам t_i и t_{i+1} кратности $q+1$ и $d+1$ соответственно. Поэтому из (19) получаем

$$L_{1j}(t) = \frac{1}{j!}(t-t_{i+1})^{d+1}\sum_{r=1}^{q+1-j}(-h)^{j+r-m-2}\cdot\begin{pmatrix} -d-1 \\ q+1-j-r \end{pmatrix}(t-t_i)^{q+1-r},$$

$$L_{2j}(t) = \frac{1}{j!}(t-t_i)^{q+1}\sum_{r=1}^{d+1-j}(-h)^{j+r-m-2}\cdot\begin{pmatrix} -q-1 \\ d+1-j-r \end{pmatrix}(t-t_{i+1})^{d+1-r}.$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} -d-1 \\ q+1-j-r \end{pmatrix} = \frac{(-d-1)(-d-2)\cdots(-d-1-q-1+j+r+1)}{(q+1-j-r)!},$$

и аналогичное выражение можно выписать для

$$\begin{pmatrix} -q-1 \\ d+1-j-r \end{pmatrix}.$$

Сравнивая степени полиномов в (18), замечаем, что справа стоят полиномы, наивысшая степень которых равна $m+1$, а слева — полиномы степени m. Отсюда следует, что коэффициенты при старших степенях равны нулю. На основе этого получим соотношение

$$\sum_{j=0}^{q} s_k^{(j)}(t_i)\frac{1}{j!}h^{j+1}(-1)^{j+1}\begin{pmatrix} -d-1 \\ q-j \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{d} s_k^{(j)}(t_{i+1})\frac{1}{j!}h^{j+1}(-1)^{j+1}\begin{pmatrix} -q-1 \\ d-j \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$s_k(t_{i+1}) = s_k(t_i) + \sum_{j=1}^{q} a_j h^j s_k^{(j)}(t_i) + \sum_{j=1}^{d} b_j h^j s_k^{(j)}(t_{i+1}), \tag{20}$$

где

$$a_j = \frac{(m-j)!}{m!}\begin{pmatrix} q \\ j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, q,$$

$$b_j = (-1)^{j+1}\frac{(m-j)!}{m!}\begin{pmatrix} d \\ j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, d, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

а $m = q + d$ — степень сплайна. Соотношения (20) можно рассматривать как одношаговый разностный метод решения соответствующей задачи.

Поскольку производная y' также является решением соответствующей интерполяционной задачи Эрмита, то выражение

$$\sum_{j=1}^{q} a_j h^j s_k^{(j)}(t_i) + \sum_{j=1}^{d} b_j h^j s_k^{(j)}(t_{i+1})$$

является квадратурной двухточечной формулой Эрмита, примененной к интегралу

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} m_k(t, y(t))dt = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

причем t_i- узел кратности q, $t_{i+1}-$ узел кратности d. При $q = d$ одношаговый метод принимает вид

$$s_k(t_{i+1}) - s_k(t_i) = \sum_{j=1}^{q} h^j a_j \left[s_k^{(j)}(t_i) + (-1)^{(j+1)} s_k^{(j)}(t_{i+1}) \right].$$

Локальная ошибка метода (20) определится при подстановке точного решения соответствующей гладкости:

$$y_k(t_{i+1}) - y_k(t_i) - \sum_{j=1}^{q} h^j a_j y_k^{(j)}(t_i) - \sum_{j=1}^{d} h^j b_j y_k^{(j)}(t_{i+1}) =$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!} \int_{t_i}^{t_{i+1}} y^{(m+1)}(\xi)(\xi - t_i)^q (\xi - t_{i+1})^d d\xi =$$

$$= (-1)^d \frac{d!q!}{m!(m+1)!} y^{(m+1)}(\eta) h^{(m+1)}$$

для некоторого $\eta \in (t_i, t_{i+1})$.

Введем обозначение $e_k(t_i) = s_k(t_i) - y_k(t_i)$ и перепишем (20) в виде

$$s_k(t_{i+1}) = e_k(t_i) + y_k(t_i) + \sum_{j=1}^{q} h^j a_j y_k^{(j)}(t_i) + \sum_{j=1}^{d} h^j b_j y_k^{(j)}(t_{i+1}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} h^j a_j e_k^{(j)}(t_i) + \sum_{j=1}^{d} h^j b_j e_k^{(j)}(t_{i+1}). \tag{21}$$

Вычитая $y_k(t_{i+1})$ из обеих частей (21), получаем

$$e_k(t_{i+1}) = e_k(t_i) + y_k(t_i) - y_k(t_{i+1}) + \sum_{j=1}^{q} h^j a_j y_k^{(j)}(t_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} h^j b_j y_k^{(j)}(t_{i+1}) + \sum_{j=1}^{q} h^j a_j e_k^{(j)}(t_i) \sum_{j=1}^{d} h^j b_j e_k^{(j)}(t_{i+1}). \tag{22}$$

Учитывая (20), оцениваем $e_k(t_{i+1})$ из (22):

$$|e_k(t_{i+1})| \le |e_k(t_i))| + \frac{d!q!}{m!(m+1)!} \max |y^{(m+1)}(\eta)| h^{(m+1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} |a_j| h^j e_k^{(j)}(t_i) + \sum_{j=1}^{d} |b_j| h^j e_k^{(j)}(t_{i+1}).$$

В силу достаточной гладкости решения $y(t)$ и сплайна $s(t)$, из соотношений

$$s_k^{(j)} = m_k^{(j-1)}(t_i, s(t_i)), \quad y_k^{(j)} = m_k^{(j-1)}(t_i, y(t_i)),$$

$k=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,d^*$, $d^*=\max(q,d)$, получаем с учетом условия Липшица для правой части неравенства

$$|e_k^{(j)}(t_i)| \le L|e_k(t_i)|.$$

Подставляя эти равенства в (21), имеем

$$|e_k(t_{i+1})| \le |e_k(t_i)| + \frac{d!q!}{m!(m+1)!}\max_{\eta\in J_I}|y^{(m+1)}(\eta)|h^{(m+1)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{q}|a_j|h^jL|e_k^{(j)}(t_i)| + \sum_{j=1}^{q}|b_j|h^j|e_k(t_{i+1})|,$$

или

$$|e_k(t_{i+1})| \le \alpha\,|e_k(t_i)| + \gamma, \tag{23}$$

где

$$\alpha = \left(1+\sum_{j=1}^{q}|a_j|h^jL\right)\left(1-\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^jL\right)^{-1},$$

$$\gamma = \frac{d!q!}{m!(m+1)!}\left[\max_{\eta_i}|y^{(m+1)}(\eta)|h^{m+1}\right]\left(1-\sum_{j=1}^{d}|b_j|\,h^jL\right)^{-1}.$$

Налагая условия на h, имеем

$$1-\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^jL > \delta > 0$$

и далее последовательной подстановкой из (23) получаем

$$|e_k(t_{i+1})| \le \alpha^{i+1}|e_k(t_0)| + \gamma(\alpha^{i+1}-1)/(\alpha-1).$$

Величина $e_k(t_0)=0$ в силу постановки задачи, а α^{i+1} преобразуем к следующему виду:

$$\alpha^{i+1} = \left[\left(1-\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^jL\right)\left(1-\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^jL\right)^{-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^jL+\sum_{j=1}^{q}|a_j|h^jL\right)\left(1-\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^jL\right)^{-1}\right]^{i+1} =$$

$$= \left[1+hL\left(\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^{j-1}+\sum_{j=1}^{q}|a_j|h^{j-1}\right)\left(1-\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^jL\right)^{-1}\right]^{i+1}. \tag{24}$$

Обозначим

$$p := \left(\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^{j-1}+\sum_{j=1}^{q}|a_j|h^{j-1}\right)\left(1-\sum_{j=1}^{d}|b_j|h^jL\right)^{-1};$$

тогда (24) принимает вид

$$\alpha^{i+1} = (1 + hLp)^{i+1} \le \exp(hpLi)$$

и погрешность $e_k(t_{i+1})$ оценивается как

$$|e_k(t_{i+1})| \le \gamma \left(\exp(hpLi) - 1\right)/(hLp),$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Для вектора ошибки метода сплайн-коллокаций

$$E(t) = (e_1(t), \ldots, e_n(t))$$

в норме максимума модуля получим аналогичное неравенство, обосновывающее сходимость метода:

$$\|E(t_{i+1})\| = \max_k |e_k(t_{i+1})| \le \gamma \, \frac{\exp(t_k Lp) - 1}{hLp}.$$

Заметим, что подобные неравенства можно вывести и для погрешностей производных $|s_k^{(j)}(t_i) - y_k^{(j)}(t_i)|$, $j = 1, 2, \ldots, d$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$. Используя далее интерполяционные свойства сплайн-функций, эти неравенства можно распространить на любую точку t интервала $[t_0, t_K]$.

Произведем теперь проверку свойства A-устойчивости метода (20) на решении тестовой системы уравнений

$$\begin{aligned} &y_k' = \lambda y_k, \\ &y_k(0) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ \mathrm{Re}\,\lambda < 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Применяя (20) к задаче (25), получаем для k-й компоненты сплайн-функции s выражение

$$s_k(t_i) = R(\lambda h)^i,$$

где

$$R(z) = \left(1 + \sum_{j=1}^{q} a_j z_j\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{d} b_j z_j\right)^{-1}, \quad z = \lambda h.$$

Таким образом, мы обнаружили, что метод (20) аппроксимирует задачу (15) с порядком $m+1$; следовательно

$$\exp z = R(z) + O\left(z^{m+1}\right),$$

т. е. $R(z)$ — это (q, d)-аппроксимация Паде функции $\exp z$.

Как известно, методы, основанные на аппроксимациях Паде, A-устойчивы, если $q = d$ или $q = d-1$ либо $q = d-2$. Чтобы рассмотреть поведение интервальной функции $\mathbf{Y}(t, h)$, вновь обратимся к схеме построения сплайн-решения и покажем, что полученный сплайн будет линейной функцией относительно начальных значений $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$, а коэффициентами при них служат полиномы относительно t.

Можно вычислить

$$s_k^{(l)}(t) = \sum_{j=1}^{q} c_{ij}^k \frac{(t - t_i)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{j=1}^{d} c_{i,q+j}^k \frac{(t - t_i)^{q+j-1}}{(q+j-l)!}$$

и

$$m_k^{(l)}(t_{i+1}, s(t_{i+1})) = \frac{d^l}{dt^l} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) s_j(t) + b_k \right] \Bigg|_{t=t_{i+1}} =$$

$$= \sum_{j=1+1}^{n} \left[\sum_{r=1}^{l} a_{kj}(t)^{(r)} s_j^{(l-r)}(t) \begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix} \right] \Bigg|_{t=t_{i+1}},$$

$k = 1, 2, \ldots, n, \quad l = 1, 2, \ldots, d$. Тогда (17) запишется в виде

$$\sum_{j=l}^{q} c_{ij}^k \frac{(t-t_i)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{j=1}^{d} c_{i,q+j}^k \frac{(t-t_i)^{q+j-1}}{(q+j-l)!} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{r=1}^{l} \begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix} [a_{kj}(t_{i+1})]^{(r)} \left[\sum_{j_1=l-r}^{q} c_{i,j_1}^k \frac{h^{j_1-l+r}}{(j_1-1)!} \sum_{j_1=1}^{d} c_{i,q+j_1}^k \frac{h^{q+j_1-l+r}}{(q+j_1-l+r)!} \right] \right\}, \tag{26}$$

$l = 1, 2, \ldots, d$. Относительно вектора неизвестных $\left(c_{i,q+1}^k, c_{i,q+2}^k, \ldots, c_{i,q+d}^k\right)^T$ уравнение (26) примет вид

$$\sum_{j=1}^{d} c_{i,q+j}^k \frac{h^{q+j-l}}{(q+j-l)!} - \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{r=1}^{l} \begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix} [a_{kj}(t_{i+1})]^{(r)} \left[\sum_{j_1=1}^{d} c_{i,q+j_1}^k \frac{h^{q+j_1-l+r}}{(q+j_1-l+r)!} \right] \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{r=1}^{l} \begin{pmatrix} l \\ r \end{pmatrix} \left(a_{kj}(t_{i+1}) \right)^{(r)} \left[\sum_{j_1=l-r}^{q} c_{i,j_1}^k \frac{h^{j_1-l+r}}{(j_1-1)!} \right] \right\} - \sum_{j=l}^{q} c_{i,j}^k \frac{h^{j-1}}{(j-1)!}. \tag{27}$$

Рассматривая (27) как k-уравнение системы линейных алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных

$$(c_{i,q+1}^k, c_{i,q+2}^k, \ldots, c_{i,q+d}^k)^T$$

размерности nd, замечаем, что матрица коэффициентов не содержит компонент, зависящих от начальных значений $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$. На первом интервале $[t_0, t_1]$ правая часть системы (27) представляет собой линейную функцию относительно $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$, в силу (17).

Решая систему (27) в узле коллокации t_1, получаем вектор решений, являющийся линейной функцией относительно $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$. Применение описанной процедуры на интервале $[t_1, t_2]$ начинается с вычисления коэффициентов c_{2j}^k по формулам (24), что также сохраняет линейную зависимость относительно начальных значений. Затем вновь решается система (27), в правую часть которой подставлены значения компонент сплайна s.

Метод математической индукции позволяет доказать, что последовательное применение описанного выше метода нахождения коэффициентов сплайна даст в любой точке t_i значение сплайн-решения как линейную функцию относительно значений $y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)$.

Наконец, для описания этапа 3 алгоритма заметим, что компоненты сплайн-решения могут быть записаны в виде

$$s_k(t) = P_{k1}(t, h) y_1(t_0) + \ldots + P_{kn}(t, h) y_n(t_0).$$

Следовательно, можно находить интервальные расширения кусочных полиномов. Это означает, что наш метод позволяет получить покоординатную сходимость интервальной оценки к множеству точных решений, или неулучшаемость оценок в общем случае.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (16) с нелинейной правой частью мы применяем модификацию алгоритма, позволяющую находить символьные формулы простыми подстановками. Это не умаляет общности предыдущего доказательства сходимости, но обусловливает некоторые особенности схемы реализации.

Введем обозначения

$$f_k^{(q)}(t, y_1, \dots y_n) = \frac{\partial}{\partial t} f_k^{(q-1)}(t, y_1, \dots, y_n) + \sum_{l=1}^{n} f_l(t, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_l} f_k^{(q-1)}(t, y_1, \dots, y_n),$$

$$f_k^{(0)}(t, y_1, \dots, y_n) = y_k^0, \quad q = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, n.$$

Будем строить полиномиальную сплайн-функцию степени $r+1$, гладкости 1, аппроксимирующую решение $y(t)$ согласно схеме

$$s_k(t_0) = y_k^0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$s_k(t) = s_k(t_{i-1}) + \sum_{j=0}^{r} f_k^{(j)}(t_{i-1}, s_1(t_{i-1}), \dots, s_n(t_{i-1})) \frac{(t - t_{i-1})^{(j+1)}}{(j+1)!},$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n_r.$$

Отметим, что сплайн-функция такого большого дефекта редко используется в методах сплайн-коллокации решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, и, вообще говоря, такая схема весьма похожа на метод рядов Тейлора, но рассмотрение сплайнов позволяет связать вопрос оценки погрешности метода сплайн-коллокации с точностью построения двусторонних оценок сразу на всем интервале в зависимости от величины шага сетки h. Запишем разложение компонент точного решения $y(t)$ по формуле Тейлора на интервале $[t_{i-1}, t_i]$:

$$y_k(t) = \sum_{j=0}^{r} \frac{y_k^{(j)}(t_{i-1})}{j!}(t - t_i)^j + \frac{y_k^{(r+1)}(\xi_{k,i})}{(r+1)!}(t - t_{i-1})^{(r+1)},$$

$$\xi_{k,i} \in (t_i, t_{i+1}), \quad k = 1, \dots, n_r.$$

Обозначим $e_k(t) = |y_k(t) - s_k(t)|, \quad k = 1, \dots, n_r$. Тогда

$$\Big| y_k(t) - s_k(t) \Big| = \Big| \sum_{j=0}^{r} \frac{y_k^{(j)}(t_{i-1})}{j!}(t - t_{i-1})^j + \frac{y_k^{(r+1)}(\xi_{k,i-1})}{(r+1)!}(t - t_{i-1})^{(r+1)} -$$

$$- s_k(t_{i-1}) - \sum_{j=0}^{r} f_k^{(j)}(t_{i-1}, s_1(t_{i-1}, \dots, s_n(t_{i-1})) \frac{(t - t_{i-1})^{j+1}}{(j+1)!} \Big| \le$$

$$\le \Big| y_k(t_{i-1}) - s_k(t_{i-1}) \Big| + \sum_{j=0}^{r-1} \Big| {y_k}^{(j+1)}(t_{i-1}) - f_k^{(j)}(t_{i-1}, \dots, s_n(t_{i-1}) \Big| \cdot \frac{(t - t_{i-1})^{j+1}}{(j+1)!} +$$

$$+ \Big| {y_k}^{(r+1)}(\xi_k) - f_k^{(r)}(t_{i-1}, \dots, s_n(t_{i-1})) \Big| \cdot \frac{(t - t_{i-1})^{r+1}}{(r+1)!}. \qquad (28)$$

Учитывая непрерывность сплайн-функции и условие Липшица, которое выполняется для производных правой части (16), получим

$$|y_k^{(j+1)}(t_{i-1}) - f_k^{(j)}(t_{i-1}, s_1(t_{i-1}), \ldots, s_n(t_{i-1}))| \le L_k \sum_{l=1}^{n} |y_l(t_{i-1}) - s_l(t_{i-1})| \le$$
$$\le L_k \sum_{l=1}^{n} e_l(t_i), k = 1, \ldots n. \tag{29}$$

Аналогичные рассуждения приводят к оценке

$$|y_k{}^{(r+1)}(\xi_{k,i}) - f_k^{(r)}(t_{i-1}, s_1(t_i - 1), \ldots, s_n(t_{i-1}))| \le |y_k^{(r+1)}(\xi_{k,i}) - y_k^{(r+1)}(t_{i-1})| +$$
$$+ |f_k^{(r)}(t_{i-1}, y_1(t_{i-1}), \ldots, y_n(t_{i-1})) - f_k^{(r)}(t_{i-1}, s_1(t_{i-1}), \ldots, s_n(t_{i-1}))| \le$$
$$\le \omega(y_k^{(r+1)}, h) + L_k \sum_{l=1}^{n} e_l(t_{i-1}). \tag{30}$$

Заметим, что в этих неравенствах были использованы модули непрерывности ω производной $(r+1)$-го порядка решения, которые в общем виде определяются как функция

$$\omega(f, \delta) = \sup\{\, |f(t') - f(t'')| \mid |t' - t''| \le \delta, t', t'' \in [a, b]\}.$$

Непосредственно из определения ясно, что модуль непрерывности ω функции f характеризует величину максимальной осцилляции этой функции на отрезке длины $\delta > 0$. Модули непрерывности, как и модули гладкости, с успехом использовались во многих аппроксимационных задачах и особенно для выражения погрешностей численных методов, в которых участвуют функции с компактной областью определения, когда значения функций могут быть заданы или численно определены с наперед заданной точностью в конечном (или счетном) множестве точек этой области.

Для нас существенно то, что использование этих модулей позволяет оценивать погрешность численного метода или приближенной формулы для данного численного метода без каких-либо дополнительных ограничений на участвующие функции, кроме тех, которые необходимы при формулировке задачи. Подставляя (29), (30) в (28), имеем

$$e_k(t) \le e_k(t_i) + L_k \left(\sum_{l=1}^{n} e_l(t_i) \right) \sum_{j=0}^{(r-1)} \frac{h^{j+1}}{(j+1)!} + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \cdot L_k \left(\sum_{l=1}^{n} e_l(t_i) + \omega(y_k^{(r+1)}, h) \right). \tag{31}$$

Замечая, что

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{h^j}{(j+1)!} \le \exp(h) \le \exp(1),$$

неравенство (31) можно записать в виде

$$e_k(t) \le e_k(t_i) \left(1 + hL_k \exp(1) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} L_k \right) +$$
$$+ \sum_{l=1,\, l \ne k}^{n} e_l(t_i) \left(hL_k \exp(1) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} L_k \right) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} \omega(y_k^{(r+1)}, h) \le$$

$$\leq e_k(t_i)(1+hc_k)+c_kh\sum_{l=1,\,l\neq k}^{n}e_l(t_i)+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(y_k^{(r+1)},h), \tag{32}$$

где $c_k = L_k\Big(\exp(1)+\dfrac{1}{(r+1)!}\Big)$. Если ввести вектор $E(t)$, составленный из величин $e_k(t)$,

$$E(t)=(\,e_1(t),\dots,e_n(t))^\top,$$

то совокупность покомпонентных неравенств (32) запишется в матричном виде

$$E(t)\leq (I+hA)E(t_i)+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(h)B,$$

где A — матрица размерности $n\times n$

$$A=\begin{pmatrix} c_1 & c_1 & \dots & c_1\\ c_2 & c_2 & \dots & c_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_n & c_n & \dots & c_n \end{pmatrix},$$

B — единичный вектор размерности n,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}^\top,$$

а через $\omega(h)$ мы обозначили величину

$$\omega(h)=\max_k\,\omega(y_k^{(r+1)},h).$$

В дальнейшем используем норму вектора $\|E(t_i)\|=\max_k E_k(t)$ и соответствующую матричную норму

$$\|G\|=\max_i\sum_{j=1}^{n}|\,g_{ij}|,$$

где g_{ij} — элемент матрицы G. Запишем последовательность неравенств

$$\begin{aligned}
\|E(t)\| &\leq (1+h\|A\|)\|E(t_i)\|+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega h,\\
(1+h\|A\|)\|E(t_i)\| &\leq (1+h\|A\|)^2\|E(t_{i-1})\|+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(h)(1+h\|A\|),\\
(1+h\|A\|)^2\|E(t_{i-1})\| &\leq (1+h\|A\|)^3\|E(t_{i-2}\|+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(h)(1+h\|A\|)^2,\\
&\dots\\
(1+h\|A\|)^i\|E(x_1)\| &\leq (1+h\|A\|)^{i+1}\|E(x_0)\|+\frac{h^{r+1}}{(r+1)!}\omega(h)(1+h\|A\|)^i.
\end{aligned}$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что $e_k(t_0)=0$, получим

$$\|E(t)\|\leq\frac{\exp(\|A\|-1)}{(r+1)!\|A\|h^r\omega(h)}.$$

Естественно, что это неравенство справедливо и для отдельных компонент вектора $E(t)$. Аналогично предыдущим рассуждениям можно оценить отклонение производных точного решения и сплайн-решения (т. е. $|\, y_k^{(q)}(t) - s_k^q(t)|$, $q = 1, \ldots, r,$):

$$\|\, y^{(q)}(t) - s^{(q)}(t)\| \leq \frac{(\exp(\|A\| - 1)}{(r+1)!\|A\|h^{r-q}\omega(h)}.$$

Выведенные оценки обосновывают сходимость развиваемого нами метода построения сплайн-функций, аппроксимирующих решение исходной задачи, на всем интервале $[t_0, t_K]$ при шаге сетки h, стремящемся к 0. Схема доказательства этого факта основана на свойствах интервальных расширений, построенных по кусочно-полиномиальным символьным формулам и оценке глобальной погрешности, полученной в [19, 21, 22].

Заметим, что для данного класса алгоритмов символьные формулы приближенных решений можно также получать, основываясь на линейных многошаговых методах численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, но детальное развитие этой методики находится за рамками настоящей статьи.

4. Приложения

Представленный интервально-символьный метод достаточно успешно был применен к различным системам ОДУ с интервальными данными.

1. Рассмотрим, как в работе [28], систему ОДУ

$$\begin{gathered} dx/dt = a_1x + b_1yz + b_1xz, \\ dy/dt = a_2y - b_1yz - b_1xz, \\ dz/dt = -a_3z + (x+y)(b_2x + b_3y) \end{gathered}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1 &= 9.700378782, \quad b_1 = -0.227266206, \\ a_2 &= -16.700378783, \quad b_2 = 2.616729797, \\ a_3 &= 2.666666667, \quad b_3 = -1.783396463. \end{aligned}$$

Следует отметить, что эта система получена с помощью линейного преобразования из известной системы Лоренца с коэффициентами $r = 28$, $\sigma = 6$, $b = 8/3$.

Применяя наш метод, определим символьную формулу приближенного решения, а затем ее интервальное расширение. Нам удалось локализовать неподвижную точку в интервале

$$\begin{pmatrix} [3.50078720472498 - \delta, 3.50078720472498 + \delta], \\ [3.33033119770258 - \delta, 3.33033119770258 + \delta], \\ [26.9999999999 - \delta, 27.00000000001 + \delta], \end{pmatrix}$$

с $\delta = 10^{-7}$.

В работе [28] рассматривалась модель Лоренца, для которой было предложено на основании численного счета математически строго устанавливать границы периодической траектории, определяющей границу “странного” аттрактора. При этом использовались строгие оценки производных, обеспечивающие наличие периодической траектории (границы странного аттрактора). Наши результаты совпадают с приведенными в работе [28], но метод обладает большей общностью.

2. Для системы ОДУ

$$dx/dt = y, \tag{33}$$
$$dy/dt = -0.2y - x - x^3 + 50\cos 2t \tag{34}$$

с начальными данными $x(1) = 0.5$, $y(1) = 1$ была получена оценка для седловой неподвижной точки:

$$x \in [5.20899927, 5.2114779],$$
$$y \in [1.45899956, 1.4642199].$$

Заметим, что эта система обладает свойством сжатия площадей: $\div \dfrac{\partial f}{\partial x} < 0$, т. е. существует число R такое, что для любых начальных данных x_0, y_0 имеет место неравенство

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t, t_0, x_0)\| \le R.$$

Несмотря на указанное свойство диссипативности обычные интервальные методы оценки множества решений не дают точных оценок.

3. Интервально-символьный метод применялся нами для оценки решений линейного управляемого осциллятора с вязким трением при нулевых начальных условиях

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha\frac{dy}{dt} + ky = u,$$
$$|u| \le 1,$$
$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0.$$

Здесь y — скалярная переменная, u — скалярное управление, k, α — постоянные коэффициенты. Без потери общности можно считать, что коэффициент k принимает одно из трех значений $k \in \{-1, 0, 1\}$. Случай произвольного k сводится к одному из трех за счет изменения масштабов.

Как уже отмечено выше, особенность предлагаемых интервально-символьных методов состоит в том, что бóльшая часть выкладок производится символьно, с нахождением численных значений интервальных оценок лишь в конечной точке. При этом в методе могут получаться достаточно большие формулы, занимающие несколько килобайт оперативной памяти. Приведем вид таких формул.

В случае, когда $k = 0$, $\alpha = -1$, введем обозначения y^1 для y и y^2 для $\dfrac{dy}{dt}$. После первого шага получаем для компоненты $y^1(t)$ вектора решений формулы, зависящие только от начальных значений y_0^1 и y_0^2:

$$y^1(t) = \left(\frac{y_0^1}{120} + \frac{y_0^2}{360}\right)h^5 + \left(\frac{y_0^1}{24} + \frac{y_0^2}{44}\right)h^4 + \left(\frac{y_0^1}{6} + \frac{y_0^2}{9}\right)h^3 + \left(\frac{y_0^1}{2} + \frac{y_0^2}{7}\right)h^2 + y_0^1\,h + y_0^1.$$

После второго шага для компоненты $y^1(t)$ вектора решений получаем формулы:

$$y^1(t) = \left(\frac{y_0^2}{24400} + \frac{y_0^1}{16240}\right)h^{10} + \left(\frac{y_0^1}{1440} + \frac{y_0^2}{1820}\right)h^9 + \left(\frac{13y_0^1}{2880} + \frac{13y_0^2}{1860}\right)h^8 +$$

$$+\left(\frac{y_0^1}{85}+\frac{y_0^2}{64}\right)h^7+\left(\frac{31y_0^2}{360}+\frac{24y_0^1}{360}\right)h^6+\left(\frac{6y_0^1}{25}+\frac{4y_0^2}{15}\right)h^5+$$
$$+\left(\frac{2y_0^1}{3}+\frac{2y_0^2}{3}\right)h^4+\left(\frac{4y_0^1}{7}+\frac{8y_0^2}{3}\right)h^3+\left(2y_0^1+3y_0^2\right)h^2+2\,y_0^1\,h+y_0^1.$$

Приведенные формулы сплайн-аппроксимаций решений демонстрируют процесс вычислений выражений, используемых нами для нахождения интервальных оценок множеств решений. Эти формулы приближают также оператор сдвига по траектории решений дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] Moore R. E. *Interval analysis.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.

[2] Walter W. *Differential and integral inequalities.* Springer, Berlin, 1970.

[3] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. *Методы интервального анализа.* Наука, Новосибирск, 1986.

[4] Мартынюк А. А., Гутовски Р. *Интегральные неравенства и устойчивость движения.* Наук. думка, Киев, 1979.

[5] Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. В: *“Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика”*. Наука, М., 1976, 307–362.

[6] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Динамические системы первой степени негрубости на плоскости. *Математ. сборник*, **68**, №3, 1965, 328–372.

[7] Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. *Успехи матем. наук*, **25**, №1, 1970, 113–185.

[8] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*, **1**, 1985.

[9] Stewart N. F. A heuristic to reduce the wrapping effect in the numerical solution of $x' = f(t, x)$. *BIT*, No. 11, 1971, 328–337.

[10] Вербицкий В. И., Горбань А. Н., Утюбаев Г. Ш., Шокин Ю. И. Эффект Мура в интервальных пространствах. *Докл. АН СССР*, **304**, №1, 1989, 17–22.

[11] Вербицкий В. И., Горбань А. Н., Шокин Ю. И. Simultaneously dissipative operators and the infinitesimal wrapping effect in interval spaces. *Вычисл. технологии*, **2**, №4, 1997, 16–48.

[12] Nickel K. Using interval methods for the numerical solution of ODE’s. *Z. Angew. Math. Mech.*, **66**, No. 11, 1986, 513–523.

[13] Neumaier A. The wrapping effect, ellipsoidal arithmetic, stability and confidence regions. *Comput.*, Suppl. 9, 1993, 12–28.

[14] Gambill T., Skeel R. Logarithmic reduction of the wrapping effect with application to ordinary differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **25**, No. 1, 1988, 153–162.

[15] Adams E., Cordes D., Lohner R. Enclosure of solutions of ordinary initial value problems and applications. *Math. Res.*, No. 36, 1987, 9–28.

[16] Kühn W. Towards an optimal control of the wrapping effect. In *"SCAN-98. Volume of extended abstarcts"*. Budapest, 1998.

[17] Новиков В. А., Рогалев А. Н. Влияние эффекта "раскрутки" на получение верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **29**, №10, 1990, 1593–1595.

[18] Рогалев А. Н. Двусторонние численно-аналитические методы оценки решений систем ОДУ с интервальными данными. В *"VIII междунар. школа-семинар "Качественная теория дифференциальных уравнений гидродинамики". Ин-т гидродинамики СО РАН, Новосибирск, Красноярский гос. ун-т*, 1992, 22–24.

[19] Новиков В. А., Рогалев А. Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **33**, №2, 1993, 219–231.

[20] Rogalev A. N. Outer and inner estimates for sets of solutions of ODE's with interval data. In *"Internat. Congress on Comput. Systems and Appl. Math."* St. Peterburg State University. Russian Local ACM Chapter, 1993, 99–100.

[21] Рогалев А. Н. Нахождение оптимальных гарантированных оценок множеств решений систем ОДУ с интервальными данными. В *"Вычисл. технологии"*, **4**, №13, ИВТ СО РАН, Новосибирск, 1995, 58–64.

[22] Rogalev A. N. Solving Systems of Ordinary Differential Equations with Interval Data: Rigorous and Optimal Bounds. In *"IMACS/GAMM Internat. Symp. on Scientific Comput., Comput. Arithmetic and Validated Numerics"*. Bergische Universität Gesamthochschulle Wuppertal, 1995, 113–114.

[23] Kulish U. Numerical algorithms with automatic result verification. *Lectures in Appl. Math.*, **32**, 1996.

[24] Prüfer M. Turbulence in multistep methods for initial value problems. *SIAM J. Appl. Math.*, **45**, No. 1, 1985, 32–69.

[25] Арнольд В. И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Наука, М., 1978.

[26] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, **1**, No. 2, 1962, 102–120.

[27] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds — a further remark. *Ibid.*, **2**, No. 2, 1963, 179–180.

[28] Sinai J. G., Vul E. The finding of periodic trajectories of dynamic systems. The use of computer. *J. Stat. Phys.*, **23**, 1980.

Поступила в редакцию 20 мая 1999 г.