ИНТЕРВАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

А. П. Мартынов, Е. А. Салимоненко, Н. И. Федорова
Уфимский государственный авиационный технический университет
Россия
e-mail: ramazanov@imat.rb.ru

In this paper, a technique determining whether the optimal solution of a linear programming problem is feasible or not is considered for the case when some coefficients of the basic conditions may vary being dependent on a one-dimensional parameter.

Оптимальное базисное условие задачи линейного программирования (ЗЛП) представляется в виде системы линейных уравнений

$$Bx_B = b, \tag{1}$$

где B — матрица размерности $(m \times m)$, составленная из базисных столбцов; x_B — оптимальное решение-вектор размерности m; b — вектор правой (свободной) части размерности m. Коэффициенты матрицы B и вектора b будем варьировать в зависимости от одного параметра t, представив условие (1) в виде

$$(B + tc)x(t) = b + td, \tag{2}$$

где c — матрица размерности $(m \times m)$, d — вектор размерности m, $x(t)$ — решение системы (2), t — управляемый параметр, характеризующий, например, время. Могут быть и другие роли этого параметра, связанные с изучением влияния погрешностей исходных данных на структурные изменения исходных данных.

Матрица c и вектор d определяют структурную характеристику варьирования коэффициентов матрицы B и вектора b. Если считать, что $t \geq 0$, то знаки коэффициентов матрицы c и вектора d определяют направления варьирования (уменьшение или увеличение).

Оценка пригодности решения системы (1) будет определяться решением следующей задачи: найти множество значений параметра t, которое будем обозначать через M, такое, чтобы при $t \in M$ решения системы (2) удовлетворяли условию

$$\underline{x}_i \leq x_i(t) \leq \overline{x}_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где $\underline{x}_i$ и $\overline{x}_i$ — заданные величины, характеризующие интервал допустимых значений решения $x_i(t), i = 1, \ldots, m$. Такой подход согласуется с основными требованиями системного моделирования: при $t = 0$ получается исходное решение, интервалы изменения параметра t определяют интервалы допустимого варьирования коэффициентов матрицы B и вектора b в заданной структуре (2).

Методика решения поставленной здесь задачи основывается на математическом аппарате теории определителей, поиска корней полиномов и решения системы неравенств.

Как известно, решения системы (2) можно представить через отношения определителей с линейно зависимыми от одного параметра элементами

$$x_i(t) = \frac{|B + tc|_i}{|B + tc|}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

где $|B + tc|$ — определитель матрицы $(B + tc)$ условия (2), $|B + tc|_i$ — определитель, полученный из определителя $|B + tc|$ заменой i-го столбца вектором $(b + td)$. В условии (4), естественно, должно быть

$$|B + tc| \neq 0. \tag{5}$$

Так как матрица B является оптимальным базисом задачи линейного программирования, то условие (5) не может не выполняться при всех значениях параметра t. Например, при $t = 0$

$$|B| \neq 0. \tag{6}$$

Значения параметра t, при которых

$$|B + tc| = 0, \tag{7}$$

определяются путем раскрытия определителя условия (7) в полином как определителя с линейно зависимыми от одного параметра элементами.

Представим определитель $|B + tc|$ в виде

$$|B + tc| = |b_{\cdot 1} + tc_{\cdot 1}, b_{\cdot 2} + tc_{\cdot 2}, \ldots, b_{\cdot m} + tc_{\cdot m}|, \tag{8}$$

где $b_{\cdot j} + tc_{\cdot j}$ — j-й столбец определителя $|B + tc|$, $j = 1, \ldots, m$.

Используя основные свойства определителей, определитель (8) разложим по первому столбцу в виде суммы двух определителей

$$\begin{aligned} &|b_{\cdot 1} + tc_{\cdot 1}, \ldots, b_{\cdot m} + tc_{\cdot m}| = \\ &= |b_{\cdot 1}, b_{\cdot 2} + tc_{\cdot 2}, \ldots, b_{\cdot m} + tc_{\cdot m}| + |tc_{\cdot 1}, b_{\cdot 2} + tc_{\cdot 2}, \ldots, b_{\cdot m} + tc_{\cdot m}| = \\ &= |b_{\cdot 1}, b_{\cdot 2} + tc_{\cdot 2}, \ldots, b_{\cdot m} + tc_{\cdot m}| + t|c_{\cdot 1}, b_{\cdot 2} + tc_{\cdot 2}, \ldots, b_{\cdot m} + tc_{\cdot m}|. \end{aligned} \tag{9}$$

Продолжая процесс разложения каждого из вновь образованных определителей по другим столбцам, получим

$$|B + tc| = h_k t^k + \cdots + h_i t^i + \cdots + h_1 t + h_0, \tag{10}$$

где $0 \leq k \leq m$, $h_j = 0$ при $j = k + 1, \ldots, m$. В полиноме (10) коэффициент h_i равен сумме определителей, содержащих i столбцов из матрицы c и $(m - i)$ столбцов из матрицы B. Число таких определителей находят по формуле сочетаний $C_m^i = \dfrac{m!}{(m-i)!i!}$, $i = 1, \ldots, m$.

Решая уравнение
$$h_k t^k + \cdots + h_i t^i + h_1 t + \cdots + h_0 = 0, \tag{11}$$
находим значения t, при которых выполняется условие (7). Пусть оно выполняется при $t = t_1$. Тогда ранг матрицы $(B + t_1 c)$ будет меньше m. При этом возможны два случая. В первом система (2) при $t = t_1$ не имеет решения. Следовательно, значение $t = t_1$ не может входить в искомое множество . Во втором случае система (2) имеет множество решений, среди которых могут быть такие, которые будут удовлетворять условию (3). Таких решений может и не быть. Для решения этого вопроса систему (2) при $t = t_1$ представим в виде
$$Ax = p, \tag{12}$$
где $A = B + t_1 c$, $x = x(t_1)$, $p = b + t_1 d$. Используя метод полного исключения переменных, систему (12) преобразуем к виду (r переменных выражаем через другие)
$$x_{n_i} + \sum_{j=n_{r+1}}^{n_m} \alpha_{m_{i,j}} x_j = \beta_{m_i}, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{13}$$
где n_i, $i = 1, \ldots, r$, — номера выделенных переменных, m_i, $i = 1, \ldots, r$, — номера строк, не обращающихся в тождество $0 = 0$; r — ранг матрицы A в условии (12); $\alpha_{m_{i,j}}$ и β_{m_i} — преобразованные коэффициенты матрицы A и вектора p, $i = 1, \ldots, r$, $j = n_{r+1}, \ldots, n_m$.

Из условия (13) определяем переменные x_{n_i} и подставляем в условие (3):
$$\underline{x}_{n_i} \le \beta_{m_i} - \sum_{j=n_{r+1}}^{n_m} \alpha_{m_{i,j}} x_j \le \overline{x}_{n_i}, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{14}$$
и
$$\underline{x}_j \le x_j \le \overline{x}_j, \quad j = n_{r+1}, \ldots, n_m. \tag{15}$$

Если система неравенств (14) – (15) совместная, то особая точка $t = t_1$ включается в множество , в противном случае — не включается.

Если при решении системы неравенств (14) – (15) использовать целевую функцию
$$\max(\mu_{n_2+1} x_{n_2+1} + \cdots + \mu_m x_m), \tag{16}$$
то получим задачу линейного программирования, которая позволяет применять дополнительные требования к постановке задачи исследования решений системы линейных уравнений. Следует заметить, что переход от системы (12) к системе (13) может быть неоднозначным, т. е. номера выделенных переменных $n_1, \ldots, n_r$ могут быть различными. При составлении задачи (14) – (16) могут быть сформулированы дополнительные ограничения по качественным и количественным взаимосвязям различных групп компонентов решения системы линейных уравнений.

Таким образом, рассматривая все действительные корни (особые точки) полинома (11), устанавливаем, какие из них входят во множество , и какие — не входят.

В случае, когда $|B+tc| \ne 0$, т. е. выполняется условие (5), другие определители условия (4) так же, как и в условии (10), раскрываются в полиномы
$$|B + tc|_i = \lambda(i)_{k_i} t^{k_i} + \cdots + \lambda(i)_j t^j + \cdots + \lambda(i)_1 t + \lambda(i)_0, \tag{17}$$
где $0 \le k_i \le m$, $i = 1, \ldots, m$. Как и в условии (10), если $k_i < m$, $i = \{1, \ldots, m\}$, то некоторые первые коэффициенты в полиноме (17) равны нулю.

Подставив полиномы (10) и (17) в условие (4), получим

$$x(t)_i = \sum_{j=0}^{k_i} \lambda(i)_j t^j \Big/ \sum_{j=0}^{k} h_j t^j, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{18}$$

где $0 \le k_i \le m$, $0 \le k \le m$. Из условия (18) следует, что решения системы (2) в зависимости от параметра t выражаются в виде отношений полиномов.

Для получения оценки пригодности решения системы (1) используем условие (3), подставив в него выражения решений из условия (18). В результате получим систему неравенств с полиномами

$$\underline{x}_i \le \sum_{j=0}^{k_i} \lambda(i)_j t^j \Big/ \sum_{j=0}^{k} h_j t^j \le \overline{x}_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{19}$$

Система неравенств (19) вначале представляется в виде

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k_i} \lambda(i)_j t^j \Big/ \sum_{j=0}^{k} h_j t^j - \overline{x}_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \underline{x}_i - \sum_{j=0}^{k_i} \lambda(i)_j t^j \Big/ \sum_{j=0}^{k} h_j t^j \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{20}$$

где $i = 1, \ldots, m$, $0 \le k_i \le m$, $0 \le k \le m$.

После приведения к общему знаменателю система (20) записывается в виде

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k(i,u)} u(i)_j t^j \Big/ \sum_{j=0}^{k} h_j t^j \le 0, i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{j=0}^{k(i,v)} v(i)_j t^j \Big/ \sum_{j=0}^{k} h_j t^j \le 0, i = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$u(i)_j = \lambda(i)_j - h_j \overline{x}_i, \quad j = 0, 1, \ldots, k(i,u); \quad u(i)_j = 0, \quad j = k(i,u), \ldots, m;$$
$$v(i)_j = h_j \underline{x}_i - \lambda(i)_j, \quad j = 0, 1 \ldots, k(i,v); \quad v(i)_j = 0, \quad j = k(i,v), \ldots, m;$$
$$0 \le k(i,u) \le m, \quad 0 \le k(i,v) \le m, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Для решения системы неравенств (21) разработаны вычислительные схемы [1–3], основанные на разложении полиномов в виде произведений линейных множителей с учетом кратности действительных корней и положительных множителей (квадратные трехчлены с комплексными корнями) и применении метода интервалов.

Рассмотрим пример. Пусть задана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 140, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 130, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 100, \end{cases} \tag{22}$$

которая имеет решение: $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$. Исходные данные будем варьировать в виде условия (2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-t & 3-t \\ 2 & 1+t & 3 \\ 3 & 2+t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140-5t \\ 130+15t \\ 100+30t \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Ограничения типа (3) задаются в виде

$$5 \le x_1(t) \le 15, \quad 15 \le x_2(t) \le 25, \quad 25 \le x_3(t) \le 35. \tag{24}$$

Результаты раскрытия определителей условия типа (4) в виде системы (18) следующие:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (-20t^3 + 140t^2 - 240t + 120)/(4t^2 - 16t + 12),\\ x_2(t) &= (100t^2 - 340t + 240)/(4t^2 - 16t + 12),\\ x_3(t) &= (80t^2 - 440t + 360)/(4t^2 - 16t + 12). \end{aligned} \tag{25}$$

Подставив выражение (25) в условие (24) и выполнив преобразования типа (20) – (21), имеем

$$\begin{cases} (20t^3 + 80t^2 - 60)/(4t^2 - 16t + 12) \le 0,\\ (20t^3 - 120t^2 + 160t - 60)/(4t^2 - 16t + 12) \le 0,\\ (60t - 60)/(4t^2 - 16t + 12) \le 0,\\ (-40t^2 + 100t^2 - 60)/(4t^2 - 16t + 12) \le 0,\\ (60t^2 + 120t - 60)/(4t^2 - 16t + 12) \le 0,\\ (20t^2 + 40t - 60)/(4t^2 - 16t + 12) \le 0. \end{cases} \tag{26}$$

Разложив полиномы на множители, систему (26) приводим к виду

$$\begin{cases} -20(t-1)(t - \dfrac{3+\sqrt{21}}{2})(t - \dfrac{3-\sqrt{21}}{2})/(4(t-1)(t-3)) \le 0,\\ 20(t-1)(t - \dfrac{5+\sqrt{13}}{2})(t - \dfrac{5-\sqrt{13}}{2})/(4(t-1)(t-3)) \le 0,\\ 60(t-1)/(4(t-1)(t-3)) \le 0,\\ -40(t-1)(t-1,5)/(4(t-1)(t-3)) \le 0,\\ -60(t-1)(t-1)/(4(t-1)(t-3)) \le 0,\\ 20(t-1)(t+3)/(4(t-1)(t-3)) \le 0. \end{cases} \tag{27}$$

Система (27) имеет решение

$$\frac{3-\sqrt{21}}{2} \le t \le \frac{5-\sqrt{13}}{2}. \tag{28}$$

Как видно из условия (27), особыми точками являются $t = 1$ и $t = 3$. Используя формулы (12) – (15), убеждаемся, что при $t = 1$ существует допустимое по условию (3) решение системы (23):

$$x_1(1) = 5; \quad x_2(1) = 15; \quad x_3(1) = 35.$$

При $t = 3$ система (23) не имеет решений.

Таким образом, искомое множество M записывается в виде

$$M = \left\{ \frac{3-\sqrt{21}}{2} \le t \le \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \quad t = 1 \right\}.$$

Используя найденное множество M, определяем интервалы возможного варьирования коэффициентов системы (22), при которых решения будут удовлетворять условиям интервальной устойчивости типа (3). Наличие разрывных точек во множестве M показывает, что даже в линейных системах могут возникать критические (аварийные) ситуации. И, с другой стороны, математические модели такого рода могут быть использованы для определения и анализа таких ситуаций.

Список литературы

[1] Мартынов А. П. К исследованию устойчивости решения задачи линейного программирования в условиях неопределенности исходной информации. *Методы оптимизации.* Вып. 75, УАИ, Уфа, 1974, 20–27.

[2] Мартынов А. П., Салимоненко Е. А. и др. *Системное моделирование производственных процессов на базе метода генерации столбцов*. Гилем, Уфа, 1998.

[3] Мартынов А. П., Салимоненко Е. А. и др. *Линейные модели с взаимозависимыми параметрами управления и их применение*. Реактив, Уфа, 1998.

Поступила в редакцию 2 ноября 1998 г.,
в переработанном виде 26 января 1999 г.