

Аналитическая теория и численное моделирование нелинейных волновых пакетов (бризеров) в океане, стратифицированном по плотности и течению*

Т. Г. ТАЛИПОВА^{1,2}, Е. Г. ДИДЕНКУЛОВА^{1,2,†}, Е. Н. ПЕЛИНОВСКИЙ^{1,2}

¹Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

²Нижегородский государственный технический университет им. П. Е. Алексеева, Россия

[†]Контактный e-mail: eshurgalina@mail.ru

Развита теория нелинейных осциллирующих волновых пакетов в океане, стратифицированном по плотности и течению. Теория основана на уравнении Гарднера, которое полностью интегрируется современными методами теории нелинейных волн. Определены фазовые соотношения в бризерах. В качестве примера рассмотрен расчет динамики пакета внутренних волн с образованием бризеров для условий, приближенных к условиям Балтийского моря в районе Готландской котловины.

Ключевые слова: бризеры, уравнение Гарднера, стратифицированный океан.

Библиографическая ссылка: Талипова Т.Г., Диденкулова Е.Г., Пелиновский Е.Н. Аналитическая теория и численное моделирование нелинейных волновых пакетов (бризеров) в океане, стратифицированном по плотности и течению // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 2. С. 99–110. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.2.009.

Введение

О существовании солитонов внутренних волн в океане хорошо известно. Они повсеместно наблюдаются в зонах генерации внутренних волн и на шельфах. Локализованным волновым пакетам внутренних волн (бризерам) до настоящего времени почти не уделялось внимания. Так как они нечасто наблюдаются в океане и их трудно идентифицировать в поле внутренних волн, в литературе приведены только несколько случаев бризероподобных пакетов [1–3], некоторые из них показаны на рис. 1. На рис. 1, *а* видны три солитона отрицательной полярности, распространяющиеся, судя по их амплитудам, справа налево, а за ними — четко выраженный локализованный волновой пакет. На рис. 1, *б* бризероподобные пакеты 2 находятся за солитоном второй моды 1. На рис. 1, *в* дана запись внутренних волн в Андаманском море. Здесь выделены пять солитонов положительной полярности, локализованный волновой пакет обведен красной линией.

*Title translation and abstract in English can be found on page 110.

© ИВТ СО РАН, 2019.

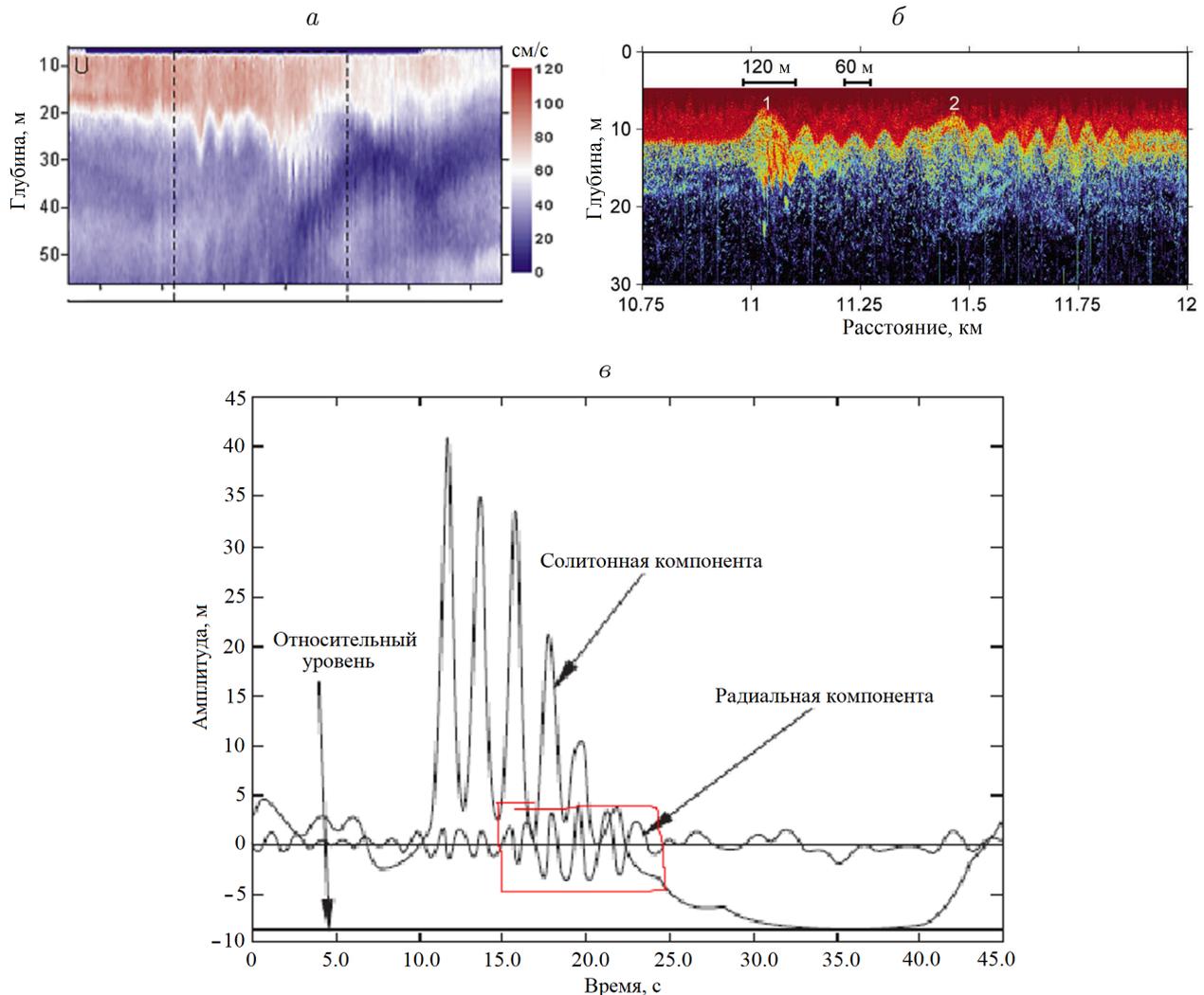


Рис. 1. Примеры записей бризероподобных волновых пакетов: *a* — Восточно-Китайское море, у берегов Кореи; *b* — атлантический шельф США; *в* — Андаманское море

Теория бризеров — локализованных нелинейных волновых пакетов — была развита математически [4, 5] для отдельных нелинейных интегрируемых уравнений (синус-Гордона, модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза, нелинейного уравнения Шрёдингера и др.). Применение этой теории к внутренним волнам начато нами более 20 лет назад в рамках уравнения Гарднера [6, 7]. Исследованы оптимальные условия для самомодуляции волновых групп и образования бризеров длинных внутренних волн, представляющих собой солитоны нелинейного уравнения Шрёдингера [8]. Хотя существование бризера и было предсказано в рамках слабонелинейной теории уравнения Гарднера, моделирование в рамках исходных уравнений Эйлера показало, что бризер может долго распространяться в стратифицированной жидкости без изменения формы [9]. Были изучены два механизма генерации бризеров: при взаимодействии солитона второй моды с уступом дна [10] и со сдвиговым течением [11]. Наконец, исследованы особенности распространения бризеров внутренних волн над неоднородным дном с учетом вращения Земли [12]. Сегодня для практических приложений в океанологии требуется описание бризеров в океане, стратифицированном по плотности и течению, что и будет представлено в настоящей работе.

1. Уравнение Гарднера

Динамика длинных внутренних волн с умеренной нелинейностью хорошо описывается уравнением Гарднера [13], которое в лабораторной системе отсчета имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (c + \alpha \eta + \alpha_1 \eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где η — смещение изоопикны на горизонте максимума моды; α и α_1 — квадратичный и кубический коэффициенты нелинейности; β — коэффициент дисперсии; c — скорость распространения длинных линейных внутренних волн. Коэффициенты уравнения Гарднера выражаются через модовую функцию Φ , которая находится из задачи Штурма — Лиувилля для каждой моды

$$\frac{d}{dz} \left((c - U)^2 \frac{d\Phi}{dz} \right) + N^2(z) \Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(H) = 0, \quad \Phi_{\max} = \Phi(z_{\max}) = 1, \quad (2)$$

где нулевые граничные условия на дне $z = 0$ и свободной поверхности $z = H$. Скорость распространения внутренних волн c находится из (2) как собственное число. Здесь $N(z)$ — частота Вайселя — Брента, определяемая плотностной стратификацией морской воды

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho(z)} \frac{d\rho(z)}{dz},$$

а $U(z)$ — сдвиговое устойчивое течение. Формально (2) описывает любую моду внутренних волн, но на практике значимы первая мода внутренних волн, для которой функция $\Phi(z)$ не имеет нулей в промежутке $z = 0$ и $z = H$, и вторая мода, для которой $\Phi(z)$ имеет один нуль и два экстремума на интервале $[0, H]$. Смещения изоопикн на всех горизонтах описываются выражением

$$\zeta(z, x, t) = \eta(x, t) \Phi(z) + \eta^2(x, t) F(z), \quad (3)$$

где $F(z)$ — первая нелинейная поправка к вертикальной моде, которая находится из неоднородной краевой задачи [13]:

$$\frac{d}{dz} \left((c - U)^2 \frac{dF}{dz} \right) + N^2(z) F = -\alpha \frac{d}{dz} \left((c - U) \frac{d\Phi}{dz} \right) + \frac{3}{2} \frac{d}{dz} \left[(c - U)^2 \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 \right],$$

$$F(0) = F(H) = 0, \quad F(z_{\max}) = 0.$$

Выбор нуля $F(z)$ в точке z_{\max} без ограничения общности позволяет записать уравнение (1) для смещения изоопикны в максимуме линейной моды, поскольку из (3) вытекает, что тогда в этой точке $\zeta(z_{\max}, x, t) = \eta(x, t)$.

Остальные коэффициенты уравнения Гарднера находятся в квадратурах от модовой функции, ее производных и нелинейной поправки к ней, т. е. определяются вертикальной стратификацией жидкости по плотности и скорости течения:

$$\beta = \frac{1}{2D} \int_0^H (c - U)^2 \Phi^2 dz, \quad \alpha = \frac{3}{2D} \int_0^H (c - U)^2 \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^3 dz, \quad D = \int_0^H (c - U) \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 dz, \quad (4)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2D} \int_0^H dz \left\{ 9(c-U)^2 \frac{dF}{dz} \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 - 6(c-U)^2 \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^4 + 5\alpha(c-U) \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^3 - \right. \\ \left. - 4\alpha(c-U) \frac{dF}{dz} \frac{d\Phi}{dz} - \alpha^2 \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 \right\}. \quad (5)$$

Для существования бризеров длинных внутренних волн необходимым условием является положительность коэффициента кубической нелинейности α_1 в уравнении Гарднера. Карты коэффициентов уравнения Гарднера (кинематических характеристик внутренних волн) уже построены для всего Мирового океана с использованием базы данных по плотностной стратификации океана GDEM без учета сдвиговых течений [14]. Частично они представлены в работах [15–19]. Отметим, что положительный коэффициент кубической нелинейности наблюдается во многих районах, в том числе в Балтийском, Средиземном и Черном морях [16], в Арктическом бассейне, особенно вблизи устьев сибирских рек [17], в Охотском море [18] и т. д. Поэтому необходимое условие существования бризероподобных волновых пакетов в океанских условиях подтверждается, хотя и не повсеместно. Данные по течениям в океане, особенно по их вертикальной структуре, в настоящее время неполные. С учетом сдвиговых течений нами сделаны расчеты кинематических характеристик внутренних волн только для трех станций в море Лаптевых, но здесь не рассчитывался коэффициент кубической нелинейности [19]. Расчеты показали, что изменения коэффициентов уравнения (1) могут достигать 80 % в зависимости от скорости сдвигового течения. Этого можно ожидать и для коэффициента кубической нелинейности.

2. Нелинейный волновой пакет — бризер

Уравнение (1) полностью интегрируемо методом обратной задачи теории рассеяния. Когда коэффициент α_1 — отрицательная величина, дискретный спектр ассоциированной обратной задачи (Захарова—Шабата) представляет собой набор реальных величин, каждая из которых определяет стационарное решение уравнения — солитон [5]. Число и амплитуды солитонов зависят от вида начального возмущения. Если коэффициент кубической нелинейности является положительной величиной, то дискретный спектр ассоциированной обратной задачи в зависимости от начального возмущения может содержать как реальные (определяющие солитоны), так и комплексные величины, которые определяют квазистационарные решения — бризеры, представляющие собой нелинейные волновые пакеты.

С математической точки зрения удобно работать с уравнением Гарднера в канонической форме

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (6qu + 6u^2) \frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial^3 u}{\partial \chi^3} = 0, \quad (6)$$

где q — произвольная величина, определяющая соотношение между коэффициентами квадратичной и кубической нелинейности. Для приведения уравнения (1) к виду (6) нужно произвести нормирование переменных η , x и t :

$$\eta = Au, \quad t = T\tau, \quad x - ct = L\chi. \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (1), получаем следующую форму уравнения Гарднера:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(\frac{\alpha A T}{L} u + \frac{\alpha_1 A^2 T}{L} u^2 \right) \frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\beta T}{L^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \chi^3} = 0. \quad (8)$$

Приравнивая коэффициенты в уравнении (8) к коэффициентам канонического уравнения (6), получаем следующие соотношения для коэффициентов нормировки:

$$L = \frac{q}{\alpha} \sqrt{6\alpha_1\beta}, \quad A = \frac{\alpha}{q\alpha_1}, \quad T = \frac{6q^3\alpha_1}{\alpha^3} \sqrt{6\alpha_1\beta}.$$

Для уравнения Гарднера, записанного в каноническом виде (6), бризерное решение имеет вид

$$u = 2 \frac{\partial}{\partial \chi} \arctan \frac{l \cosh(\Psi) \cos(\theta) - k \cos(\Phi) \sinh(\kappa)}{l \sinh(\Psi) \sin(\theta) + k \sin(\Phi) \cosh(\kappa)}, \quad (9)$$

где θ и κ — фазы бегущей волны и огибающей

$$\theta = k(\chi - w\tau) + \theta_0, \quad \kappa = l(\chi - v\tau) + \kappa_0,$$

а k и l — соответственно их волновые числа, найденные из обратной задачи Захарова — Шабата. Фазовая w и групповая v скорости волн выражаются как

$$w = (3l^2 - k^2), \quad v = (l^2 - 3k^2),$$

$$\Phi + i\Psi = \operatorname{arctanh} \left(\frac{l + ik}{q} \right). \quad (10)$$

Хотя аналитическое решение (9) известно давно, тем не менее анализ его параметров практически не выполнялся, в частности, не изучена связь между параметрами, входящими в формулу (10). Преобразуем (10) к виду

$$l = q \frac{\tanh \Phi (1 + \tan^2 \Psi)}{1 + \tanh^2 \Phi \tan^2 \Psi}, \quad k = q \frac{\tan \Psi (1 - \tanh^2 \Phi)}{1 + \tanh^2 \Phi \tan^2 \Psi}.$$

Рассчитаем фазы Φ и Ψ по заданным l и k . На рис. 2, а приведен график зависимости Φ от волновых чисел l и k при фиксированном значении $\Psi = 1.5$. Следует отметить, что Φ неоднозначна при $l > 1$. Вообще выбор Φ при такой неоднозначности затруднен. Если выбрать верхнюю ветку после точки $l = 1$, то фаза быстро нарастает с уменьшением l и уходит в бесконечность. Для физического представления бризера как волнового пакета нужны небольшие значения l , поскольку это волновое число огибающей, а k — волновое число несущей волны. Внутри огибающей должно быть несколько индивидуальных волн (хотя бы две), поэтому $l < k$. Тогда остается случай, когда $\Phi \rightarrow 0$, и допускается $l < k$. На рис. 2, б показаны те же зависимости фазы Φ от волновых чисел l и k , но при $\Psi = 1$. Здесь очень небольшая область неоднозначности и все значения l до асимптоты $l = 1$ вполне удовлетворяют соотношению $l < k$. При еще меньших значениях Ψ (рис. 2, в) область неоднозначности пропадает, однако l и k , что называется, “в одном весе” и ситуация $l < k$ реализуется до $l = 0.55$.

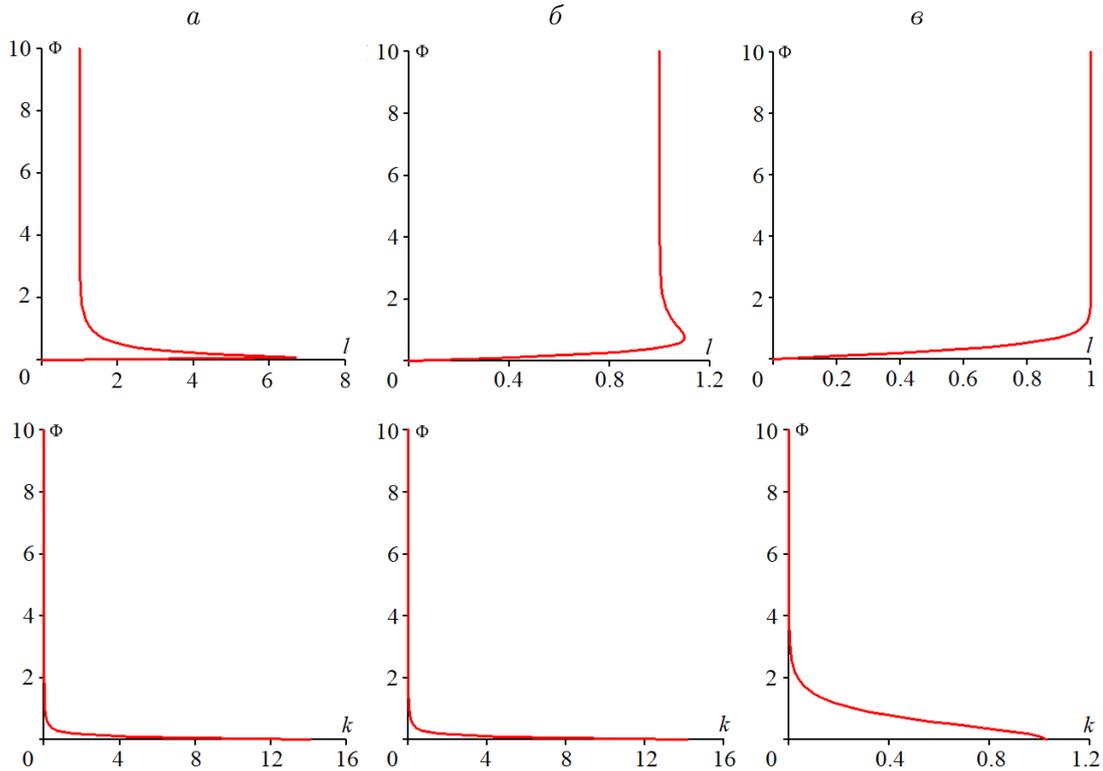


Рис. 2. Зависимость фазы Φ от волновых чисел l и k при $\Psi = 1.5$ (а), $\Psi = 1$ (б) и $\Psi = 0.8$ (в)

Следует сказать, что бризеры уравнения Гарднера часто имеют ненулевую “массу” $\left(M = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) dx \right)$ в отличие от бризеров модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза или других нелинейных эволюционных уравнений, что имеет важное значение при моделировании бризеров во вращающемся океане. Форма бризеров может быть довольно разнообразной — от пары связанных солитонов разных полярностей, которые периодически меняют фазу (рис. 3, а), до типичного локализованного волнового пакета (рис. 3, б).

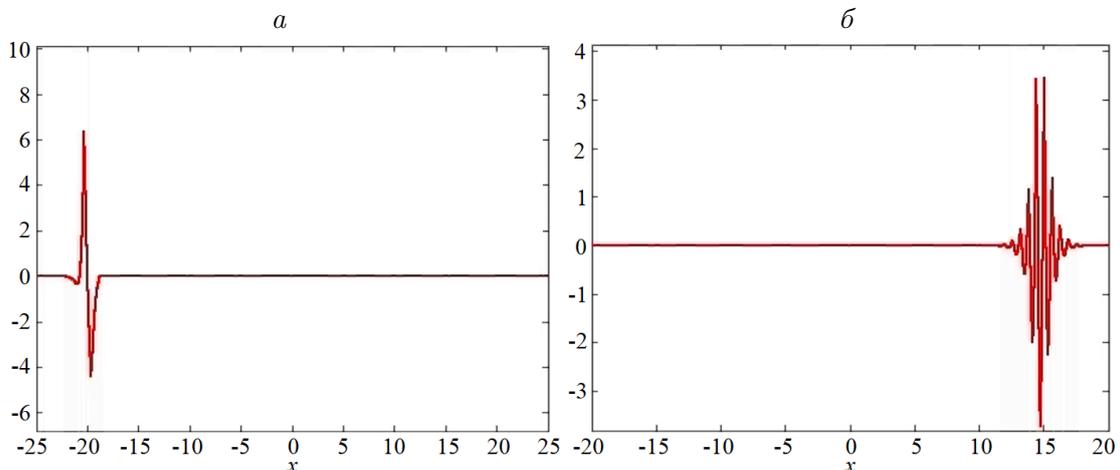


Рис. 3. Форма бризеров уравнения Гарднера: при $t = -5$ (а) и $t = -0.05$ (б)

Возвращаясь к размерным переменным, получим следующий вид бризерного решения:

$$\eta = 2 \frac{\alpha}{q\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \chi} \arctan \frac{l \cosh(\Psi) \cos(\theta) - k \cos(\Phi) \sinh(\kappa)}{l \sinh(\Psi) \sin(\theta) + k \sin(\Phi) \cosh(\kappa)},$$

$$\theta = \frac{\alpha k}{q\sqrt{6\alpha_1\beta}} \left[(x - ct) - \frac{\alpha^2 (3l^2 - k^2) t}{6q^2\alpha_1} \right], \quad \kappa = \frac{\alpha l}{q\sqrt{6\alpha_1\beta}} \left[(x - ct) - \frac{\alpha^2 (l^2 - 3k^2) t}{6q^2\alpha_1} \right],$$

$$\chi = x \frac{\alpha}{q\sqrt{6\alpha_1\beta}}.$$

Эта формула может применяться для описания бризеров в океане, стратифицированном по плотности и течению. Специфика океанских задач проявляется здесь через величины коэффициентов уравнения Гарднера по реальной океанической стратификации.

3. Влияние постоянного течения на характеристики бризера

Рассмотрим простейший случай однородного по вертикали течения. Отметим, что в случае однородного течения U краевая задача (2) решается, как и в отсутствие течения, т. е. структура моды сохраняется, и только скорость распространения длинной внутренней волны $c = c_0 + U$, где c_0 — скорость распространения волны в отсутствие течения. В интегралах (4), (5) член $(c - U)$ выносится за знак интеграла, а все коэффициенты уравнения (1) остаются такими же, как для случая отсутствия течения. Единственное изменение появляется в самом уравнении Гарднера

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (c_0 + U + \alpha\eta + \alpha_1\eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

Слагаемое с $(c_0 + U)$ можно убрать заменой x на $(x - c_0t - Ut)$ (преобразование Галилея). Отсюда следует, что все пространственные характеристики бризера не меняются на однородном течении, однако временные характеристики меняются из-за эффекта Доплера. В частности, период несущей волны и длительность огибающей находятся по формулам

$$T_{\text{car}} = \frac{\lambda}{c_0 + U + W}, \quad T_{\text{env}} = \frac{\Lambda}{c_0 + U + V}.$$

Здесь λ и Λ — соответственно длина волны и длина огибающей, а $(W, V) = (w, v)Q$, где $Q = \frac{\alpha^2}{6q^2\alpha_1}$. Доплер-эффект необходимо учитывать при интерпретации данных наблюдений, сделанных в фиксированной точке (станции). Более того, меняется число индивидуальных волн в бризере

$$N_t = \frac{T_{\text{env}}}{T_{\text{car}}} = N_x \frac{c_0 + U + W}{c_0 + U + V}, \quad N_x = \frac{\Lambda}{\lambda},$$

и этот эффект может быть заметен в поле сильных течений.

4. Моделирование генерации и динамики бризера для реальных условий

Эволюционное уравнение Гарднера в неоднородной вращающейся среде модифицируется в уравнение Гарднера с переменными коэффициентами, которое выводится из уравнений Эйлера с помощью асимптотической процедуры, при этом зависимость коэффициентов от горизонтальной координаты предполагается плавной [6, 7, 20]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\alpha(x)Q(x)}{c^2(x)} \xi + \frac{\alpha_1(x)Q^2(x)}{c^2(x)} \xi^2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\beta(x)}{c^4(x)} \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} = 0. \quad (11)$$

Здесь x — координата вдоль пути распространения волны; s — время в сопровождающей системе отсчета, $s = \int dx/c(x) - t$; $\xi = \eta/Q(x)$, где $Q(x)$ — коэффициент линейного усиления (находимый из естественного условия сохранения потока энергии в неоднородной среде).

Генерация и распространение бризеров демонстрируются расчетами трансформации внутренних волн в рамках (11) для Балтийского моря в районе Готландской котловины, где на довольно большой территории коэффициент кубической нелинейности положителен. Координаты начала и конца трассы в Балтийском море: 60°N , 20.4°E и 58.6°N , 18.6°E . Рассчитанные коэффициенты уравнения Гарднера показаны на рис. 4. Как можно видеть, коэффициент кубической нелинейности α_1 два раза меняет знак вдоль трассы, но остается положительным на расстоянии около 100 км. Для моделирования в качестве начального условия выбиралась слабомодулированная группа синусоидальных волн с характерным периодом порядка 10 мин, т. е. $w = 0.01 \text{ с}^{-1}$. Граничные условия на отрезке моделирования задавались периодическими с временным периодом, равным 3 ч, амплитуда пакета составляла 6 м, длительность — 2.8 ч.

Трансформация волновой группы вдоль выбранной трассы показана на рис. 5. Начальная форма волнового пакета представлена на рис. 5, а. Отметим, что на начальном участке трассы (40 км) знак кубического коэффициента уравнения Гарднера согласно расчетам оказывается отрицательным. На этом участке формирование бризера невозможно (рис. 5, б). На следующем участке длиной около 60 км коэффициент кубической нелинейности положителен и достигает максимума внутри участка. Здесь образуется

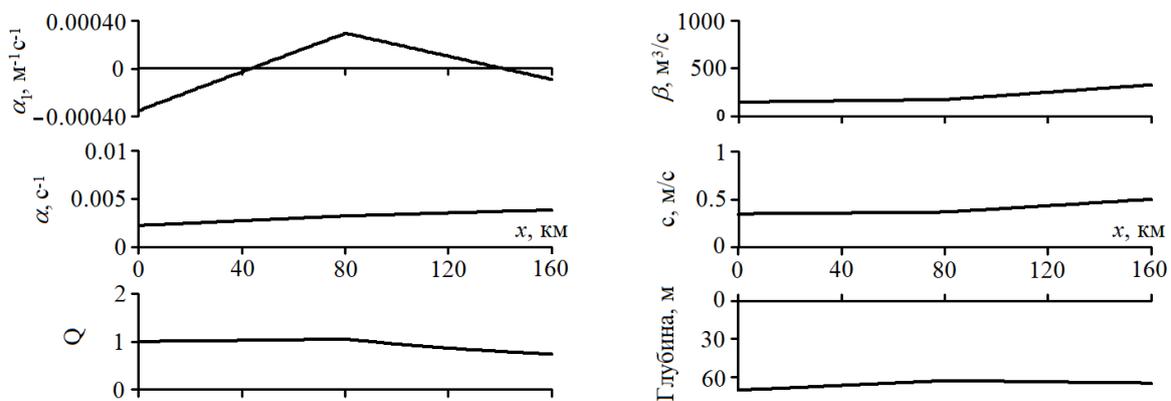


Рис. 4. Рассчитанные коэффициенты уравнения Гарднера для трассы в Балтийском море

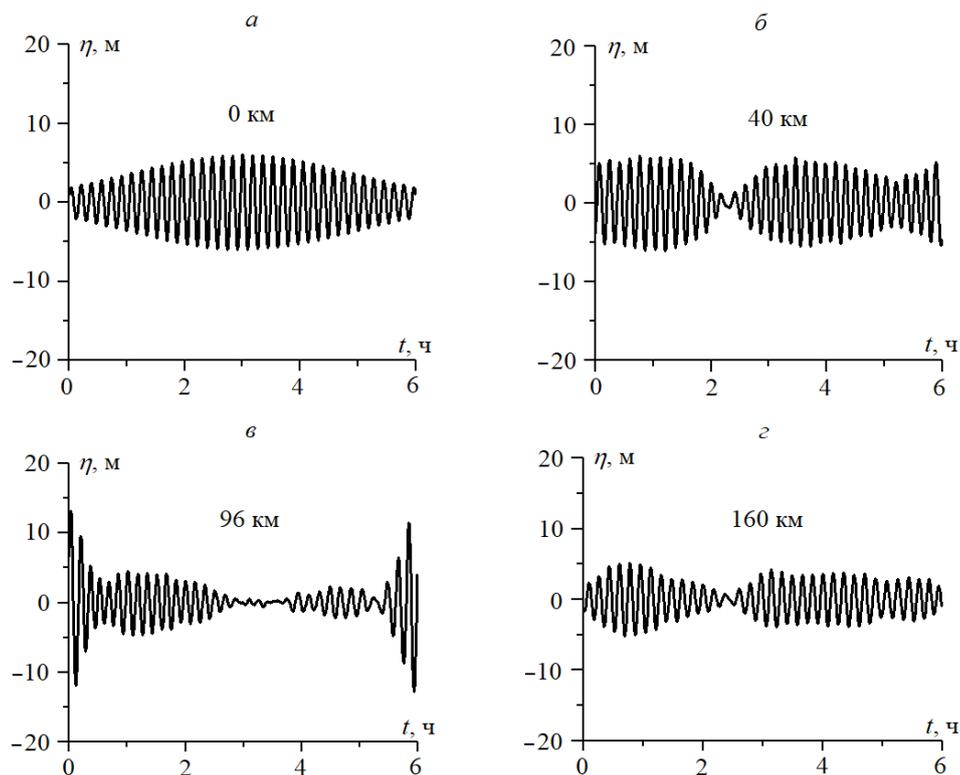


Рис. 5. Трансформация группы внутренних волн по трассе в условиях Балтийского моря

бризер с амплитудой 13 м (рис. 5, в). Следует отметить, что коэффициент линейного усиления Q до этой точки практически не меняется от начального значения “единица”, так что рост амплитуды пакета связан только с действием нелинейности и формированием бризера. После того как группа волн выходит из зоны положительного значения кубического коэффициента, бризер снова трансформируется в волновой пакет с почти постоянной огибающей (рис. 5, г).

Формирование бризеров внутренних волн в рамках уравнения Гарднера из волновых групп получалось в численных расчетах для условий Южно-Китайского моря [7, 21] и северо-восточного шельфа Австралии [6]. Также проводилось сравнение распространения бризера для условий Балтийского моря в рамках двух моделей уравнения Гарднера с переменными коэффициентами и исходных уравнений Эйлера, получено неплохое совпадение результатов [22].

Заключение

Рассмотрена важная проблема моделирования трансформации бризеров внутренних волн в горизонтально-неоднородной среде, стратифицированной по плотности и течению. В настоящее время имеются довольно подробные гидрологические атласы, позволяющие выполнить расчеты кинематических характеристик внутренних волн по заданному полю плотности океана. Данные же по течениям более отрывистые, и в них пока нет необходимой точности. Если для солитонов малой амплитуды “незнание” поля течений приводит только к количественной разнице в параметрах, то для бризеров ситуация может измениться качественно, и при изменении знака кубической нелинейности

бризер просто перестает существовать. Течение приводит к различиям в пространственных и временных характеристиках бризера, что очень важно при сопоставлении данных измерений, полученных разными методами (с буя или движущегося носителя). При этом возможны эффекты блокировки волн на встречных течениях, переменных по горизонтали. Все это указывает на необходимость тщательного исследования поведения бризеров на океанических течениях.

Благодарности. Представленные результаты получены в рамках выполнения госзадания в сфере научной деятельности (проекты № 5.4568.2017/6.7 и № 5.1246.2017/4.6) при поддержке РФФИ (гранты № 19-05-00161 и № 18-02-00042), а также программы фундаментальных исследований президиума РАН “Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и приложения”.

Список литературы / References

- [1] **Lee, J.H., Lozovatsky, I., Jang, S.-T. et al.** Episodes of nonlinear internal waves in the northern East China Sea // *Geoph. Res. Letters*. 2006. Vol. 33. P. L18601.
- [2] **Shroyer, E.L., Moum, J.N., Nash, J.D.** Mode 2 waves on the continental shelf: Ephemeral components of the nonlinear internal wavefield // *JGR*. 2010. Vol. 115. P. C07001.
- [3] **Osborne, A.R.** Nonlinear ocean waves and the inverse scattering transform. International Geophysics Series. Vol. 97. Acad. Press, 2010. 944 p.
- [4] **Pelinovsky, D., Grimshaw, R.** Structural transformation of eigenvalues for a perturbed algebraic soliton potential // *Phys. Letters A*. 1997. Vol. 229. P. 165–172.
- [5] **Ablowitz, M., Segur, H.** Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
- [6] **Grimshaw, R., Pelinovsky, E., Talipova, T., Kurkin, A.** Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves // *J. Phys. Oceanogr.* 2004. Vol. 34. P. 2774–2791.
- [7] **Grimshaw, R., Pelinovsky, E., Talipova, T., Kurkina, O.** Internal solitary waves: propagation, deformation and disintegration // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2010. Vol. 17. P. 633–649.
- [8] **Grimshaw, R., Pelinovsky, D., Pelinovsky, E., Talipova, T.** Wave group dynamics in weakly nonlinear long-wave models // *Physica D*. 2001. Vol. 159, No. 1–2. P. 35–57.
- [9] **Lamb, K., Polukhina, O., Talipova, T. et al.** Breather generation in the fully nonlinear models of a stratified fluid // *Physical Rev. E*. 2007. Vol. 75, No. 4. P. 046306.
- [10] **Terletska, K., Jung, K.T., Talipova, T. et al.** Internal breather-like wave generation by the second mode solitary wave interaction with a step // *Phys. Fluids*. 2016. Vol. 28. P. 116602.
- [11] **Zhang, P., Zhenhua, Xu Zh., Li, Q. et al.** The evolution of mode-2 internal solitary waves modulated by background shear currents // *Nonlin. Proc. Geophys.* 2018. Vol. 25. P. 441–455.
- [12] **Rouvinckaya, E., Talipova, T., Kurkina, O. et al.** Transformation of internal breathers in the idealised shelf sea conditions // *Continental Shelf Res.* 2015. Vol. 110. P. 60–71.
- [13] **Pelinovsky, E.N., Slunyaev, A.V., Polukhina, O.E., Talipova, T.G.** Internal solitary waves. Book: Solitary waves in fluids / Ed. R. Grimshaw. Southampton, Boston: WIT Press, 2007. P. 85–110.
- [14] **Carnes, M.R.** Description and evaluation of GDEM-V3.0. Naval Research Laboratory (NRL) Report NRL/MR/7330-09-9165. 2009. 27 p.
- [15] **Kurkina, O., Talipova, T., Pelinovsky, E., Soomere, T.** Mapping the internal wave field in the Baltic Sea in the context of sediment transport in shallow water // *J. Coastal Research*. 2011. Vol. SI 64. P. 2042–2047.

- [16] Kurkina, O., Rouvinskaya, E., Talipova, T., Soomere, T. Propagation regimes and populations of internal waves in the Mediterranean Sea basin // Estuarine, Coastal and Shelf Science. 2017. Vol. 185. P. 44–54.
- [17] Полухин Н., Талипова Т., Пелиновский Е., Лавренов И. Кинематические характеристики поля высокочастотных внутренних волн в Арктике // Океанология. 2003. Т. 43, № 3. С. 356–367.
Polukhin, N., Talipova, T., Pelinovsky, E., Lavrenov, I. Kinematic characteristics of the high-frequency internal wave field in the Arctic // Oceanology. 2003. Vol. 43, No. 3. P. 333–343.
- [18] Kurkina, O., Talipova, T., Soomere, T. et al. The impact of seasonal changes in stratification on the dynamics of internal waves in the Sea of Okhotsk // Estonian J. of Earth Sci. 2017. Vol. 66, No. 4. P. 238–255.
- [19] Полухин Н.В., Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г., Муякшин С.И. О влиянии сдвиговых течений на вертикальную структуру и кинематические параметры внутренних волн // Океанология. 2004. Т. 44, № 1. С. 26–33.
Polukhin, N.V., Pelinovskii, E.N., Talipova, T.G., Muyakshin, S.I. On the effect of shear currents on the vertical structure and kinematic parameters of internal waves // Oceanology. 2004. Vol. 44, No. 1. P. 22–29.
- [20] Holloway, P., Pelinovsky, E., Talipova, T. A generalized Korteweg—de Vries model of internal tide transformation in the Coastal Zone // J. Geophys. Res. 1999. Vol. 104, No. C8. P. 18333–18350.
- [21] Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Хариф К. Модуляционная неустойчивость длинных внутренних волн умеренной амплитуды в стратифицированном горизонтально неоднородном океане // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 9, № 3. С. 199–203.
Talipova, T.G., Pelinovsky, E.N., Kharif, C. Modulation instability of long internal waves with moderate amplitudes in a stratified horizontally inhomogeneous ocean // JETP Letters. 2011. Vol. 94. P. 182–186.
- [22] Rouvinskaya, E., Talipova, T., Kurkina, O. et al. Transformation of internal breathers in the idealised shelf sea conditions // Continental Shelf Res. 2015. Vol. 110. P. 60–71.

Поступила в редакцию 28 января 2019 г.

Analytical theory and numerical modelling of nonlinear wave packages (breathers) in the ocean stratified by density and currents

TALIPOVA, TATIANA G.^{1,2}, DIDENKULOVA, EKATERINA G.^{1,2*}, PELINOVSKY, EFIM N.^{1,2}

¹Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

²Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

*Corresponding author: Didenkulova, Ekaterina G., e-mail: eshurgalina@mail.ru

The paper addresses the important problem of modelling the transformation of breathers of internal waves in a horizontally heterogeneous medium stratified by density and currents. At present, there are sufficiently detailed hydrological atlases that allow performing calculations of the kinematic characteristics of internal waves for a given density field in an ocean. The data on currents is incomplete, and still there is no

necessary accuracy. For solitons of small amplitude, “ignorance” of the flow field leads only to a quantitative difference in the parameters, however for breathers the situation can change qualitatively, and if the sign of cubic nonlinearity changes, the breather simply ceases to exist. Currents lead to differences in the spatial and temporal characteristics of a breather, which is very important when comparing measurement data obtained by different methods (from a buoy or from a moving carrier). In this case, the effects of blocking waves on the opposite currents, which vary horizontally, are possible. All this points require a thorough study of the behavior of breathers on ocean currents. The theory of nonlinear oscillating wave packets in the ocean is developed. The theory is based on the Gardner equation, which is fully integrated by modern methods of the theory of nonlinear waves. Phase relations in breathers are determined. As an example, the calculation of the dynamics of the package of internal waves with the formation of breathers for the conditions close to the conditions of the Baltic Sea in the Gotland Basin is considered.

Keywords: breathers, Gardner equation, stratified ocean.

Cite: Talipova, T.G., Didenkulova, E.G., Pelinovsky, E.N. Analytical theory and numerical modeling of nonlinear wave packages (breathers) in the ocean stratified by density and currents // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 2. P. 99–110. (In Russ.) DOI: 10.25743/ICT.2019.24.2.009.

Acknowledgements. This research was supported by state tasks in the field of scientific activity (projects No. 5.4568.2017/6.7 and No. 5.1246.2017/4.6), RFBR (grants No. 19-05-00161 and No. 18-02-00042), and by the Fundamental Research Program of RAS “Nonlinear dynamics: Fundamental problems and applications”.

Received January 28, 2019