

Численный метод решения граничных интегральных уравнений трехмерной скалярной задачи дифракции*

А. А. КАШИРИН[†], С. И. СМАГИН

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия

[†]Контактный e-mail: elomer@mail.ru

Описывается метод численного решения трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн на однородном включении. Исходная задача сводится к граничным слабо сингулярным интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с одной неизвестной функцией, имеющим дискретный спектр. Эти уравнения решаются численно. Для поиска решения исходной задачи на спектре предложен метод интерполяции решения. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: задача дифракции, уравнение Гельмгольца, граничное интегральное уравнение, спектр, численный метод.

Библиографическая ссылка: Каширин А.А., Смагин С.И. Численный метод решения граничных интегральных уравнений трехмерной скалярной задачи дифракции // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 6. С. 40–49.
DOI: 10.25743/ICT.2019.24.6.006.

Введение

Рассматривается стационарная задача дифракции акустических волн на трехмерном однородном включении в обобщенной постановке. Она формулируется в виде двух слабо сингулярных граничных интегральных уравнений Фредгольма первого рода с одной неизвестной функцией (плотностью). Каждое из этих уравнений условно эквивалентно исходной задаче [1, 2]. Для их численного решения используется специальный метод осреднения ядер интегральных операторов со слабыми особенностями [3, 4]. Он позволяет рассчитывать коэффициенты систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), аппроксимирующие соответствующие интегральные уравнения, по весьма простым формулам. Метод не требует предварительной триангуляции поверхности, одинаково просто реализуется как на регулярных, так и на нерегулярных сетках и позволяет обойтись без трудоемкого приближенного вычисления кратных поверхностных интегралов.

Дискретизация граничных интегральных уравнений приводит к СЛАУ с плотно заполненными матрицами. Приближенные решения этих систем находятся с помощью обобщенного метода минимальной невязки (GMRES) [5]. После этого искомое приближенное решение задачи дифракции восстанавливается в любой точке пространства.

*Title translation and abstract in English can be found on page 49.

© ИВТ СО РАН, 2019.

Интегральные операторы указанных уравнений имеют спектр. Он состоит из счетного количества положительных волновых чисел. В каждой точке спектра нарушается условие эквивалентности интегральных уравнений исходной задаче. В работе предлагается метод интерполяции решения. Этот метод не требует знания спектра и позволяет находить приближенные решения задачи дифракции для всех положительных волновых чисел.

Обзор других подходов к численному решению задачи дифракции имеется, например, в [4].

1. Исходная задача и эквивалентные ей граничные интегральные уравнения

Задача 1. Найти в ограниченной области Ω_i трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 и в неограниченной области $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_i$, разделенных замкнутой поверхностью $\Gamma \in C^{r+\beta}$, $r+\beta > 1$, комплекснозначные функции $u_{i(e)} \in H^1(\Omega_{i(e)}, \Delta)$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_{i(e)}} \nabla u_{i(e)} \nabla v_{i(e)}^* dx - k_{i(e)}^2 \int_{\Omega_{i(e)}} u_{i(e)} v_{i(e)}^* dx = 0 \quad \forall v_{i(e)} \in H_0^1(\Omega_{i(e)}),$$

условиям сопряжения на границе раздела сред из Ω_i и Ω_e

$$\langle u_i^- - u_e^+, \mu \rangle_\Gamma = \langle f_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

$$\langle \eta, p_i N^- u_i - p_e N^+ u_e \rangle_\Gamma = \langle \eta, p_e f_1 \rangle_\Gamma \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma),$$

а также условию излучения на бесконечности для u_e

$$\partial u_e / \partial |x| - ik_e u_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

если на границе включения Γ заданы функции $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Здесь v^* — комплексно-сопряженная к v функция; $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ — отношение двойственности на $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, обобщающее скалярное произведение в $H^0(\Gamma)$; $u^\pm \equiv \gamma^\pm u$, $\gamma^- : H^1(\Omega_i) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma^+ : H^1(\Omega_e) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ — операторы следов; $N^- : H^1(\Omega_i, \Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$, $N^+ : H^1(\Omega_e, \Delta) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ — операторы нормальных производных [6],

$$k_{i(e)}^2 = \omega (\omega + i\gamma_{i(e)}) / c_{i(e)}^2, \quad \text{Im}(k_{i(e)}) \geq 0, \quad p_{i(e)} = c_{i(e)}^{-2} k_{i(e)}^{-2} \rho_{i(e)}^{-1},$$

ω — круговая частота колебаний, $c_{i(e)} > 0$, $\rho_{i(e)} > 0$, $\gamma_{i(e)} \geq 0$. Определения используемых здесь и далее функциональных пространств имеются в работе [6].

Замечание 1. Если $\text{Im}(k_e) = 0$, то $u_e \in H_{loc}^1(\Omega_e, \Delta)$.

В статье [1]¹ и работе [2] доказана

Теорема 1. Задача 1 имеет не более одного решения.

¹В работе [1] имеются опечатки: на с. 80 в выражении (9) для функции φ_i под знаком первого интеграла G_e следует заменить на G_i , а под знаком второго интеграла вместо φ_i должно быть φ_e .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} (A_{i(e)}q)(x) &\equiv \langle G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, & (B_{i(e)}q)(x) &\equiv \langle N_x G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, \\ (B_{i(e)}^*q)(x) &\equiv \langle N_{(\cdot)} G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, & G_{i(e)}(x, y) &= \exp(ik_{i(e)}|x-y|)/(4\pi|x-y|). \end{aligned} \quad (1)$$

Решение задачи 1 будем искать в виде потенциалов

$$\begin{aligned} u_e(x) &= (A_e q)(x), \quad x \in \Omega_e, \\ u_i(x) &= (p_{ei} A_i (N^+ u_e + f_1) - B_i^* (u_e^+ + f_0))(x), \quad x \in \Omega_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ — неизвестная плотность; $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$; $p_{ei} = p_e/p_i$.

Это позволяет сформулировать задачу дифракции в виде граничного слабо сингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\langle Cq, \mu \rangle_{\Gamma} = \langle f_2, \mu \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (3)$$

где

$$C = (0.5 + B_i^*) A_e + p_{ei} A_i (0.5 - B_e), \quad f_2 = -(0.5 + B_i^*) f_0 + p_{ei} A_i f_1.$$

Если же искать решение задачи 1 в виде

$$\begin{aligned} u_i(x) &= (A_i q)(x), \quad x \in \Omega_i, \\ u_e(x) &= (A_e (f_1 - p_{ie} N^- u_i) - B_e^* (f_0 - u_i^-))(x), \quad x \in \Omega_e, \end{aligned} \quad (4)$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ — неизвестная плотность, $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $p_{ie} = p_i/p_e$, то в этом случае она сводится к уравнению

$$\langle Dq, \mu \rangle_{\Gamma} = \langle f_0, \mu \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (5)$$

$$D = (0.5 - B_e^*) A_i + p_{ie} A_e (0.5 + B_i).$$

Теорема 2. Пусть $f_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_e > 0$ или ω не является собственной частотой задачи

$$\Delta u + k_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad u^- = 0. \quad (6)$$

Тогда уравнения (3) и (5) корректно разрешимы в классе плотностей $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и формулы (2) и (4) дают решение задачи 1.

Теорема 2 для уравнения (3) доказана в работах [1, 2]. Доказательство этой теоремы для уравнения (5) проводится аналогично, оно имеется в работе [2].

2. Численный метод

Кратко опишем общую схему реализации метода [3, 4]. Построим покрытие поверхности Γ системой $\{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ окрестностей узловых точек $x'_m \in \Gamma$, лежащих внутри сфер радиусов h_m с центрами в x'_m , и обозначим через $\{\varphi_m\}$ подчиненное ему разбиение

единицы. В качестве φ_m будем использовать функции

$$\varphi_m(x) = \varphi'_m(x) \left(\sum_{k=1}^M \varphi'_k(x) \right)^{-1}, \quad \varphi'_m(x) = \begin{cases} (1 - r_m^2/h_m^2)^3, & r_m < h_m, \\ 0, & r_m \geq h_m, \end{cases}$$

где $x \in \Gamma$, $r_m = |x - x'_m|$; $\varphi_m \in C^1(\Gamma)$ при $\Gamma \in C^{r+\beta}$, $r + \beta > 1$.

Приближенные решения уравнений (3) и (5) будем искать на сетке $\{x_m\}$,

$$x_m = \frac{1}{\bar{\varphi}_m} \int_{\Gamma} x \varphi_m d\Gamma, \quad \bar{\varphi}_m = \int_{\Gamma} \varphi_m d\Gamma,$$

узлами которой являются центры тяжести функций φ_m . Предполагаем, что для всех $m = 1, 2, \dots, M$ выполняются неравенства

$$0 < h' \leq |x_m - x_n|, \quad m \neq n, \quad n = 1, 2, \dots, M,$$

$$h' \leq \sigma_m \leq h_m \leq h, \quad h/h' \leq q_0 < \infty,$$

где h, h' — положительные числа, зависящие от M , а q_0 не зависит от M , $\sigma_m^2 = 0.5\bar{\varphi}_m$.

Интегральные операторы из (1) на Γ аппроксимируются выражениями [2, 3]

$$\langle A_{i(e)}q, \varphi_m \rangle_{\Gamma} \approx \sum_{n=1}^M A_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (7)$$

$$A_{i(e)}^{mn} \equiv A_{mn}(k_{i(e)}), \quad A_{mn}(k) = \frac{\bar{\varphi}_m \bar{\varphi}_n}{8\pi r_{mn}} \exp(\mu_{mn}^2 - \gamma_{mn}^2) (w(z_{mn}^-) - w(z_{mn}^+)), \quad n \neq m,$$

$$A_{mm}(k) = \frac{\bar{\varphi}_m^2}{4\pi} \exp(\mu_{mm}^2) \left[ikw(\mu_{mm}) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\bar{\varphi}_m} \left(\frac{\bar{\varphi}_m}{\pi\sigma_m} + 2\sigma_m - \frac{k^2\sigma_m^3}{3} \right) \right],$$

$$\sigma_{mn}^2 = \sigma_m^2 + \sigma_n^2, \quad \mu_{mn} = 0.5k\sigma_{mn}, \quad z_{mn}^{\pm} = \mu_{mn} \pm i\gamma_{mn}, \quad \gamma_{mn} = r_{mn}/\sigma_{mn}, \quad i^2 = -1,$$

$$w(z) = -\frac{2i}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \int_z^{\infty} \exp(t^2) dt,$$

$$\langle aq + B_{i(e)}q, \varphi_m \rangle_{\Gamma} \approx \sum_{n=1}^M B_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad a = \pm 0.5, \quad (8)$$

$$\langle aq + B_{i(e)}^*q, \varphi_m \rangle_{\Gamma} \approx \sum_{n=1}^M B_{i(e)}^{nm} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

$$B_{i(e)}^{mn} = \frac{\eta_{mn}}{4\pi r_{mn}^2} \exp(ik_{i(e)}r_{mn}) (ik_{i(e)}r_{mn} - 1) \bar{\varphi}_m \bar{\varphi}_n, \quad n \neq m,$$

$$B_{i(e)}^{mm} = (-|a| + a + Gs_m) \bar{\varphi}_m, \quad \eta_{mn} = \sum_{l=1}^3 n_{ml} \frac{x_{ml} - x_{nl}}{r_{mn}}, \quad Gs_m = -\sum_{n \neq m}^M \frac{\eta_{mn} \bar{\varphi}_n}{4\pi r_{mn}^2},$$

n_{ml} — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности Γ в точке x_m .

Операторы в левых частях уравнений (3) и (5) аппроксимируем композициями операторов (7)–(9):

$$\langle Cq, \varphi_m \rangle_\Gamma \approx \sum_{n=1}^M C_{ie}^{mn} q_n, \quad \langle Dq, \varphi_m \rangle_\Gamma \approx - \sum_{n=1}^M C_{ei}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (10)$$

$$C_{ie}^{mn} = \sum_{k=1}^M (B_i^{km} A_e^{kn} - p_{ei} A_i^{mk} B_e^{kn}),$$

а правые части уравнений (3) и (5) — по формулам

$$\langle f_2, \varphi_m \rangle_\Gamma \approx \sum_{n=1}^M (p_{ei} A_i^{mn} f_{1n} - B_i^{nm} f_{0n}), \quad \langle f_0, \varphi_m \rangle_\Gamma = \bar{\varphi}_m f_{0m}, \quad (11)$$

$$f_{lm} = \langle f_l, \varphi_m / \bar{\varphi}_m \rangle_\Gamma, \quad l = 0, 1, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Решая соответствующие СЛАУ, находим приближенные решения интегральных уравнений в точках дискретизации. После этого искомое решение задачи дифракции с помощью интегральных представлений может быть одинаково просто и точно вычислено как в ближней, так и в дальней зонах.

2.1. Метод интерполяции решения

Для численного решения интегральных уравнений на спектре воспользуемся следующей схемой. Пусть $k_e > 0$ — некоторое собственное значение задачи (6), а $q(k_e)$ — соответствующее ему частное решение уравнения (3) или (5). Выберем некоторое $\delta > 0$. Тогда справедлива интерполяционная формула

$$q(k_e) = 4q(k_e + i\delta) - q(k_e - \delta + i\delta) - q(k_e + \delta + i\delta) - q(k_e + 2i\delta) + O(\delta^4). \quad (12)$$

Все плотности в ее правой части являются решениями корректно разрешимых интегральных уравнений. Подстановка этих плотностей в формулы (2) или (4) дает приближенное решение задачи дифракции при условии, что искомые частные решения уравнений (3) и (5) существуют.

3. Результаты численных экспериментов

Пример 1. Рассматривается задача дифракции плоской акустической волны на единичном шаре с центром в начале координат и тремя различными наборами параметров вмещающей среды и включения. Комплексная амплитуда исходного волнового поля давлений имеет вид $u_0(x) = \exp(ik_e x_3)$, $f_0 = u_0^+$, $f_1 = N^+ u_0$, параметры сред:

- I) $k_i = 12.5$, $\rho_i = 4$, $k_e = 7.725251836937$, $\rho_e = 3$;
- II) $k_i = 7$, $\rho_i = 2$, $k_e = 16.9236212852138$, $\rho_e = 5$;
- III) $k_i = 21$, $\rho_i = 7$, $k_e = 13.6980231532492$, $\rho_e = 4.5$.

Точное решение этой задачи имеет вид [7]

$$u_e(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1) i^m a_m}{b_m} h_m(k_e r) P_m(\cos \theta), \quad r \geq 1,$$

$$u_i(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1) i^{m+1} p_e}{k_e b_m} j_m(k_i r) P_m(\cos \theta), \quad r \leq 1.$$

Здесь $r = |x|$, $\cos \theta = x_3/r$,

$$\begin{aligned} a_m &= (p_i j_m(k_e r) j'_m(k_i r) - p_e j_m(k_i r) j'_m(k_e r))|_{r=1}, \\ b_m &= (p_e j_m(k_i r) h'_m(k_e r) - p_i h_m(k_e r) j'_m(k_i r))|_{r=1}, \\ j_m(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{m+1/2}(kr), \quad h_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{m+1/2}^{(1)}(kr), \end{aligned}$$

$J_{m+1/2}$, $H_{m+1/2}^{(1)}$ — функции Бесселя и функции Ханкеля первого рода ($m + 1/2$)-го порядка соответственно, P_m — полиномы Лежандра m -го порядка.

Если бы условия теоремы 2 были выполнены, то задача из примера 1 свелась бы к эквивалентным уравнениям (3) и (5). В этом случае их решения имели бы вид

$$q(k_e) = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1) i^{m+1} a_m P_m(\cos \theta)}{k_e b_m j_m(k_e)}, \quad (13)$$

$$q(k_e) = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1) i^{m+2} p_e P_m(\cos \theta)}{k_i k_e b_m h_m(k_i)} \quad (14)$$

соответственно [4]. Однако в примере 1 в качестве k_e выбраны корни функций j_m , которые в данном случае образуют спектр задачи (6). Видно, что при таких k_e функция (13) не является непрерывной, т. е. уравнение (3) решения не имеет. Уравнение (5) в силу теории Рисса — Фредгольма имеет бесконечное множество решений, а функция (14) является его частным решением.

Для проведения экспериментов были использованы ресурсы ЦКП “Центр данных ДВО РАН” [8]. Основной их целью являлась демонстрация возможностей метода интерполяции решения. Поэтому задача из примера 1 решались дважды — с интерполяцией решения (формула (12), $\delta = 0.01$) и без нее. Дискретизация уравнений (3) и (5) осуществлялась по формулам (10), (11), количество точек дискретизации M здесь и далее варьировалось от 500 до 128 000, решения СЛАУ находились численно при помощи GMRES.

Скорость сходимости приближенных решений интегрального уравнения (5) к плотности (14) определялась в норме пространства сеточных функций [2]

$$\|q^h\|_{H_h^{-1/2}(\Gamma)}^2 = \sum_{m,n=1}^M A_{mn} q_m q_n^*,$$

где q_n^* — комплексно-сопряженное к q_n число,

$$A_{mn} = \frac{\bar{\varphi}_m \bar{\varphi}_n}{2\pi^{3/2} r_{mn}} \int_0^{\gamma_{mn}} \exp(-t^2) dt, \quad m \neq n, \quad A_{mm} = \frac{\bar{\varphi}_m^2}{2\pi^{3/2} \sigma_{mm}} + \frac{\sigma_{mm} \bar{\varphi}_m}{2\pi^{1/2}}.$$

На рис. 1 приведены относительные погрешности решений интегрального уравнения (5). Результаты расчетов, относящиеся к первому, второму и третьему наборам параметров, отмечены на графиках квадратами, треугольниками и кружками соответственно. Видно, что метод интерполяции решения позволяет находить приближенные

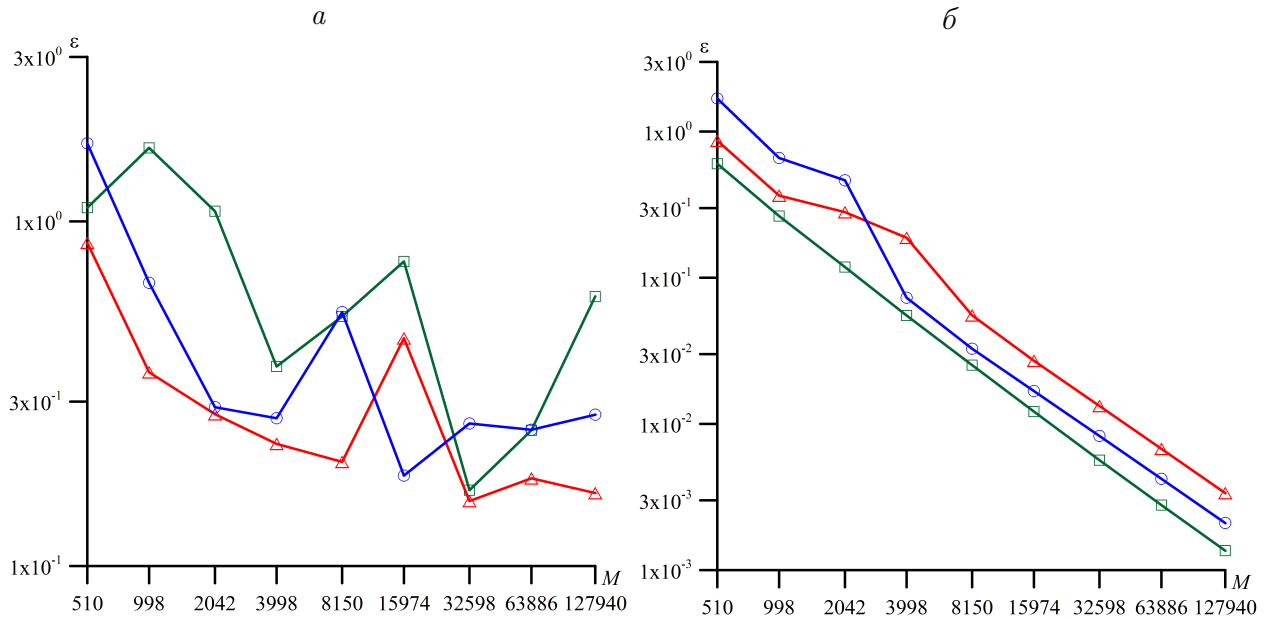


Рис. 1. Погрешности решений интегрального уравнения (5) из примера 1: *a* — без интерполяции решения, *б* — с интерполяцией

решения уравнения (5). При достаточно больших M погрешность решений имеет порядок не хуже $h^2 \sim M^{-1}$.

На рис. 2 и 3 приведены погрешности решений задачи из примера 1 с использованием уравнений (3) и (5) соответственно: *a* — без интерполяции решения, *б* — с интерполяцией. Погрешности посчитаны в норме пространств сеточных функций $H_h^0(\Omega_{i(e)})$. При интерполяции решения с использованием уравнения (3) применялась модификация метода, предложенная в [9]. В ней используется интерполяция для $u_{i(e)}(k_e)$. Формула (12)

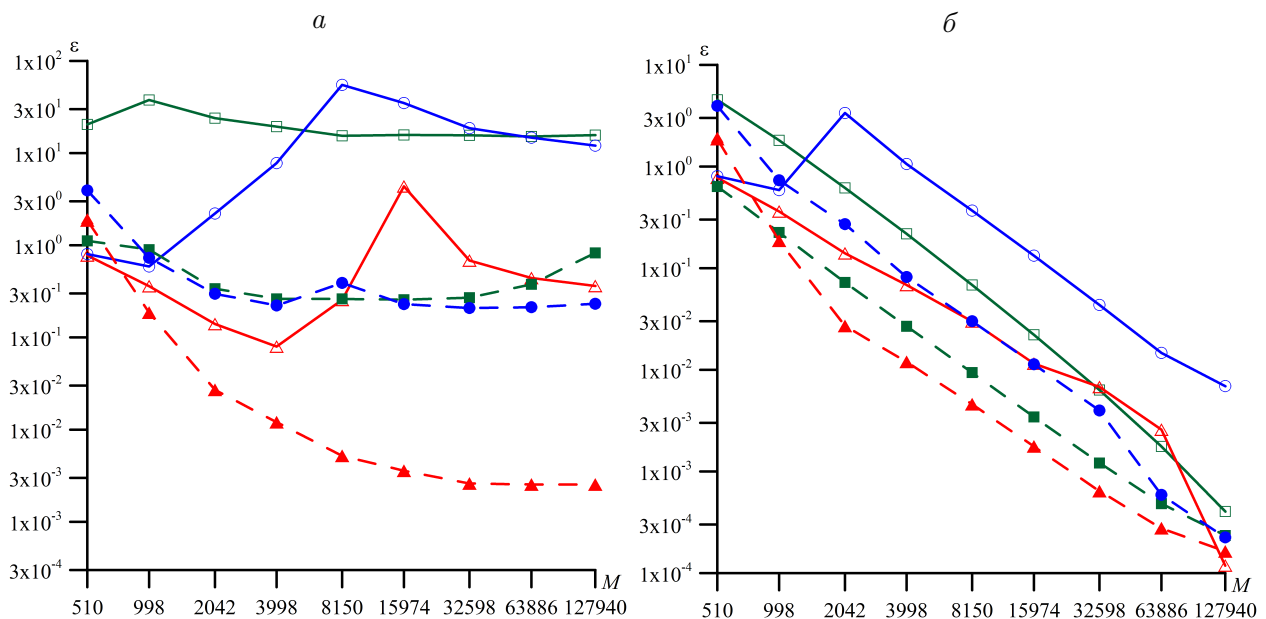


Рис. 2. Погрешности решений задачи из примера 1 с использованием уравнения (3): сплошная линия — для функции u_i , штриховая — для функции u_e

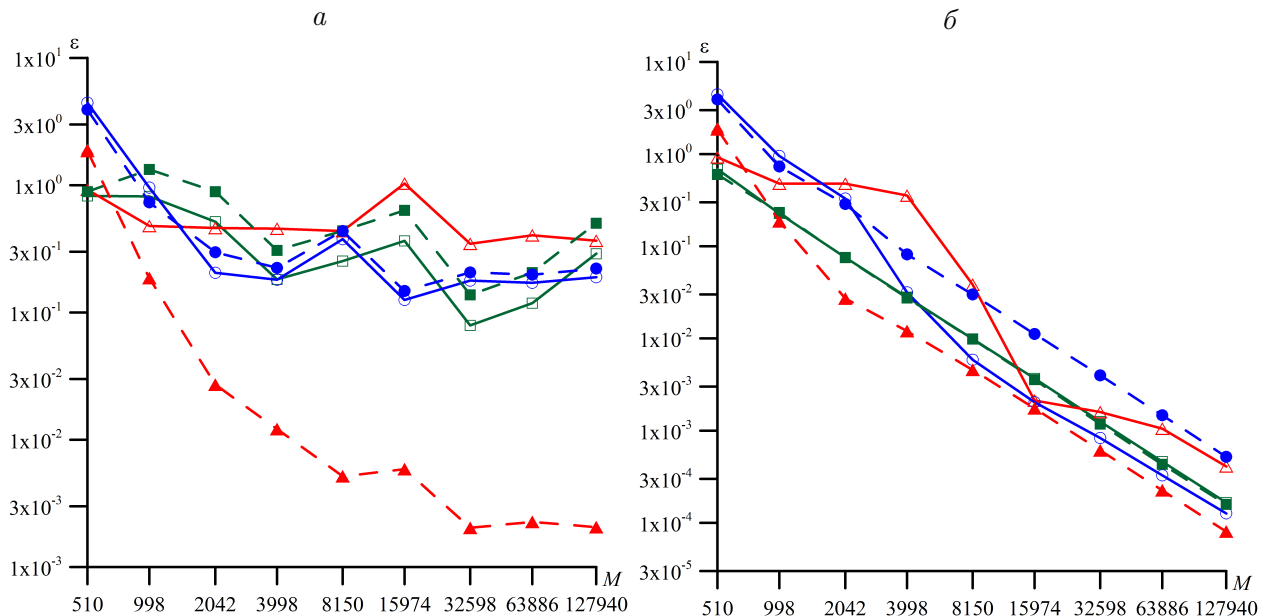


Рис. 3. Погрешности решений задачи из примера 1 с использованием уравнения (5): сплошная линия — для функции u_i , штриховая — для функции u_e

в данном случае не дает результата. Видно, что с интерполяцией решения при достаточно больших M погрешность имеет порядок не хуже $h^2 \sim M^{-1}$.

Заключение

Таким образом, изучены возможности численного решения стационарной задачи дифракции акустических волн на трехмерном однородном включении в интегральной форме с одной неизвестной функцией. Предложен метод интерполяции, который позволяет находить приближенные решения задачи на спектре интегральных операторов. Метод показал свою эффективность, он может быть рекомендован для тех же целей при численном решении других задач математической физики в интегральной форме.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00682) и Программы фундаментальных исследований ДВО РАН (проект № 18-5-100).

Список литературы / References

- [1] **Каширин А.А., Смагин С.И.** Обобщенные решения интегральных уравнений скалярной задачи дифракции // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 1. С. 79–90.
Kashirin, A.A., Smagin, S.I. Generalized solutions of the integral equations of a scalar diffraction problem // Differential Equations. 2006. Vol. 42, No. 1. P. 88–100.
- [2] **Каширин А.А.** Исследование и численное решение интегральных уравнений трехмерных стационарных задач дифракции акустических волн: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Хабаровск, ВЦ ДВО РАН, 2006. 118 с.
Kashirin, A.A. Research and numerical solution of integral equations for three-dimensional stationary problems of acoustic waves: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Khabarovsk, VTs DVO RAN, 2006. 118 p. (In Russ.)

- [3] **Каширин А.А., Смагин С.И.** О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2012. Т. 52, № 8. С. 1492–1505.
Kashirin, A.A., Smagin, S.I. Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation // Comput. Mathematics and Math. Physics. 2012. Vol. 52, No. 8. P. 1173–1185.
- [4] **Каширин А.А., Смагин С.И.** Численное решение интегральных уравнений трехмерных скалярных задач дифракции // Вычисл. технологии. 2018. Т. 23, № 2. С. 20–36.
Kashirin, A.A., Smagin, S.I. Numerical solution of integral equations for the three-dimensional scalar diffraction problems // Comput. Technologies. 2018. Vol. 23, No. 2. P. 20–36. (In Russ.)
- [5] **Saad, Y., Schultz, M.** GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. and Stat. Comput. 1986. Vol. 7, No. 3. P. 856–869.
- [6] **McLean, W.** Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 372 p.
- [7] **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 799 с.
Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A. Equations of Mathematical Physics. New York: Dover, 2011. 800 p.
- [8] **Sorokin, A.A., Makogonov, S.V., Korolev, S.P.** The information infrastructure for collective scientific work in the Far East of Russia // Sci. and Technical Inform. Proc. 2017. Vol. 44. P. 302–304.
- [9] **Каширин А.А., Смагин С.И.** Численное решение интегральных уравнений на спектре для задачи дифракции акустических волн // Информатика и системы управления. 2018. № 4(58). С. 141–149.
Kashirin, A.A., Smagin, S.I. Numerical solution of integral equations on the spectrum for acoustic waves diffraction // Inform. Sci. and Control Systems. 2018. No. 4(58). P. 141–149. (In Russ.)

Поступила в редакцию 2 октября 2019 г.

A numerical method for solving the boundary integral equations of the three-dimensional scalar diffraction problem

KASHIRIN, ALEKSEI A.^{1,*}, SMAGIN, SERGEI I.¹

¹Computing Center FEB RAS, Khabarovsk, 680000, Russia

*Corresponding author: Kashirin, Aleksei A., e-mail: elomer@mail.ru

Purpose. The article addresses developing efficient algorithms for numerical solution of the diffraction problem for stationary acoustic waves by three-dimensional homogeneous inclusions on the spectrum of integral operators.

Methods. By using the combinations of single- and double-layer potentials, two Fredholm boundary integral equations of the first kind with one unknown function are obtained for them. For discretization the equations, a special method of averaging integral operators with weak singularities in the kernels is applied. For a numerical solution on the spectrum of integral operators, a solution interpolation method is proposed.

Outcomes. The obtained integral equations are approximated by systems of linear algebraic equations with easily calculated coefficients, which are then solved numerically by the generalized minimal residual method (GMRES). The computing experiments for numerical solution of the three-dimensional diffraction problem have been carried out on the spectrum of integral operators.

Conclusions. Computational experiments have shown that the proposed approach is highly accurate in finding approximate solutions to the problems in question on the spectrum of integral operators. It can be used to solve other problems of mathematical physics formulated in the form of boundary integral equations.

Keywords: diffraction problem, Helmholtz equation, boundary integral equation, spectrum, numerical method.

Cite: Kashirin, A.A., Smagin, S.I. A numerical method for solving the boundary integral equations of the three-dimensional scalar diffraction problem // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 6. P. 40–49. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.6.004. (In Russ.)

Acknowledgements. This research was partly supported by RFBR (grant No. 17-01-00682) and by the Far Eastern Branch of the RAS (project No. 18-5-100).

Received October 2, 2019