

Построение двумерных течений в физическом пространстве, возникающих после распада специального разрыва

С. Л. Дерябин¹, А. С. Кирьянова^{2,*}

¹Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия

²Институт машиноведения УроРАН, Екатеринбург, Россия

*Контактный автор: Кирьянова Анна Сергеевна, e-mail: kiryanova@imach.uran.ru

Поступила 21 января 2020 г., доработана 6 июля 2020 г., принята в печать 13 июля 2020 г.

Рассмотрены двумерные изэнтропические течения политропного газа, возникающие в начальный момент времени после мгновенного разрушения непроницаемой стенки, отделяющей неоднородный покоящийся газ от вакуума. В качестве математической модели используется система уравнений газовой динамики с учетом действия силы тяжести. В системе уравнений газовой динамики вводится автомодельная особенность в переменную x , и для полученной системы ставится задача Коши с данными на звуковой характеристике. Решение начально-краевой задачи строится в виде степенного ряда. Коэффициенты ряда находятся при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Для доказательства сходимости этого ряда ставится начально-краевая задача в пространстве других независимых переменных, а решение строится в виде своего сходящегося степенного ряда, и доказывается эквивалентность решений первой и второй начально-краевых задач.

Ключевые слова: истечение газа в вакуум, распад специального разрыва, система уравнений газовой динамики, сила тяжести, автомодельные переменные, начально-краевая задача, степенные ряды.

Цитирование: Дерябин С.Л., Кирьянова А.С. Построение двумерных течений в физическом пространстве, возникающих после распада специального разрыва. Вычислительные технологии. 2020; 25(4):4–19. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.002.

Введение

Среди задач об истечении газа в вакуум выделяется задача о распаде специального разрыва. Впервые ее решил Риман для плоскосимметричных течений. Пусть справа от непроницаемой поверхности находится покоящийся газ, а слева — вакуум. В момент времени $t = 0$ непроницаемая стенка $x = 0$ мгновенно разрушается и начинается истечение газа в вакуум. Это задача о распаде специального разрыва. Введя в систему уравнений газовой динамики автомодельную переменную $y = x/t$, Риман нашел точное решение [1]

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \quad c = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma + 1} c_0,$$

которое получило название “центрированная волна Римана”. Причем начальные значения параметров газа разрывны в точке $x = 0$. Таким образом Риману удалось построить решение задачи о распаде специального разрыва в физическом пространстве,

когда из разрывных начальных данных при $t = 0$ получается течение газа, непрерывное при $t > 0$.

В дальнейшем решение задачи о распаде специального разрыва для одно- и многомерных течений удавалось построить в виде сходящихся рядов только в специальном функциональном пространстве [2–8]. Начально-краевая задача ставилась в пространстве, где независимая пространственная переменная и неизвестная функция плотность газа (или скорость звука газа) менялись ролями. Основное достоинство этих работ — получение в аналитическом виде закона движения границы газ — вакуум и значений параметров газа на ней. Это позволило задавать правильные граничные условия при численном моделировании течений, примыкающих к вакууму.

Подобные начально-краевые задачи являются характеристическими задачами Коши, у которых определитель матрицы, стоящей перед вектором выводящих производных, равен нулю. Поэтому для численного моделирования разностными методами необходимо построить аналитическое решение начально-краевой задачи и, используя его, получить начальные условия для разностной схемы при $t = t_0 > 0$. Применение аналитических решений, построенных в специальном функциональном пространстве, для численного моделирования течений в физическом пространстве представляет большие трудности. В данной работе построено аналитическое решение задачи о распаде специального разрыва в физическом пространстве.

1. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая изэнтропические течения идеального политропного газа в условиях действия силы тяжести, имеет вид [2]

$$\begin{aligned} c_t + c_x u + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_x + w_z) &= 0, \\ u_t + u_x u + u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_x &= 0, \\ w_t + w_x u + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z &= -g. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u, w — декартовы координаты вектора скорости газа; t, x, z — независимые переменные; $c = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ — скорость звука газа; ρ — плотность газа; $\gamma > 1$ — показатель политропы газа; g — ускорение свободного падения.

В момент $t = 0$ непроницаемая стенка Γ с уравнением $x = 0$ отделяет идеальный политропный покоящийся газ от вакуума. В задаче предполагается, что газ находится справа от стенки, а вакуум — слева, на газ действует сила тяжести (рис. 1) и в начальный момент времени $t = 0$ на стенке Γ функция $c|_{\Gamma} > 0$, т.е. имеет место разрыв плотности газа. В этот момент непроницаемая стенка Γ мгновенно разрушается и начинается вдоль стенки $z = 0$ истечение газа в вакуум (рис. 2). В рассматриваемой задаче в каждый момент времени имеется область покоящегося газа. В результате распада разрыва возникает течение, граничащее с этой областью покоящегося газа и называемое далее волной разрежения. Волна разрежения отделена от области покоящегося газа линией Γ_{12} , которая является звуковой характеристикой этих течений, на ней имеет место слабый разрыв. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму че-

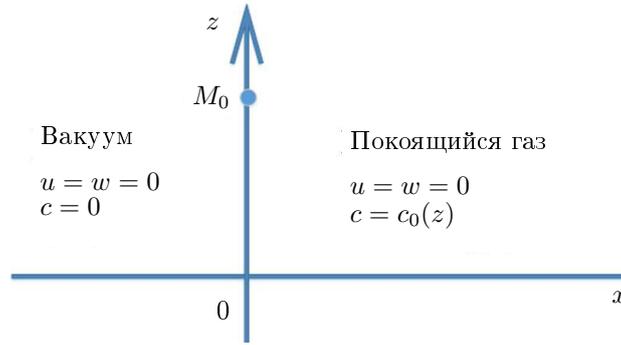


Рис. 1. Области покоящегося газа и вакуума

Fig. 1. Areas of resting gas and vacuum

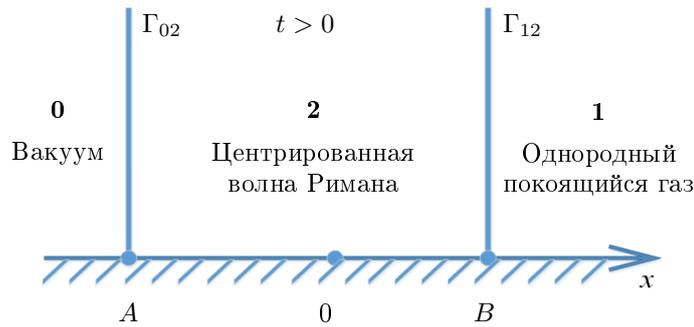


Рис. 2. Распад разрыва

Fig. 2. The decay of discontinuity

рез свободную границу Γ_{02} . В данной работе будут строиться закон движения звуковой характеристики Γ_{12} и волна разрежения.

Если в системе (1.1) положить $u = w = 0$, то первые два уравнения выполняются тождественно, а в третьем получим

$$\frac{2}{\gamma - 1}cc_z = -g. \quad (1.2)$$

Интегрируя это уравнение, запишем $c = c^0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - (\gamma - 1)gz}$ — распределение скорости звука покоящегося газа. Здесь $c_{00} = \text{const} > 0$ — скорость звука покоящегося газа при $z = 0$.

Далее волна разрежения строится для значений z из интервала

$$0 \leq z < \frac{c_{00}^2}{(\gamma - 1)g}. \quad (1.3)$$

Неравенство (1.3) гарантирует аналитичность функции $c^0(z)$.

Закон движения характеристики Γ_{12} : $x = x_0(t, z)$ определяется из решения дифференциальной задачи [1]

$$x_{0t} = c^0(z)\sqrt{1 + x_{0z}^2}, \quad x_0(0, z) = 0. \quad (1.4)$$

По теореме Ковалевской задача (1.4) имеет единственное аналитическое решение.

Представим это решение в виде ряда по степеням t :

$$x_0(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{0k}(z) \frac{t^k}{k!}. \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.4) имеем

$$x_{00}(z) = 0, \quad x_{01}(z) = c^0(z).$$

Продифференцируем по t уравнение (1.4) и получим

$$x_{0tt} = c^0(z) \frac{x_{0z}x_{0tz}}{\sqrt{1+x_{0z}^2}}.$$

Отсюда $x_{02}(z) = 0$, поскольку $x_{0z} = 0$. Продифференцировав по t уравнение (1.4) два раза, будем иметь

$$x_{0ttt} = c^0(z) \left(\frac{x_{0z}^2 x_{0tz}^2}{\sqrt{(1+x_{0z}^2)^3}} + \frac{x_{0tz}^2 + x_{0z}x_{0ttz}}{\sqrt{1+x_{0z}^2}} \right), \quad x_{03}(z) = c^0(z)(c_z^0(z))^2.$$

Поскольку $c_z^0(z) = \frac{-(\gamma-1)g}{2\sqrt{c_{00}^2 - (\gamma-1)gz}} = \frac{-(\gamma-1)g}{2c^0(z)}$, то в явном виде определяется

$$x_{03}(z) = \frac{(\gamma-1)^2 g^2}{4c^0(z)}.$$

Лемма 1. Коэффициенты ряда (1.5) с четными номерами равны нулю, т. е. $x_{02k} = 0$.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (1.5). Далее после индуктивного предположения следующее дифференцирование уравнения (1.4) приводит к нулевой правой части соответствующего коэффициента. \square

Единственное аналитическое решение задачи (1.4) позволяет записать начальные данные на характеристике Γ_{12} :

$$u|_{x=x_0(t,z)} = 0, \quad w|_{x=x_0(t,z)} = 0, \quad c|_{x=x_0(t,z)} = c^0(z). \quad (1.6)$$

В системе (1.1) сделаем следующую замену переменных:

$$t = t', \quad z = z', \quad y = \frac{x}{t}.$$

Тогда производные пересчитаются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{y}{t} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}.$$

В дальнейшем штрих опускается.

В результате такой замены вместо системы (1.1) после преобразований получается система

$$\begin{aligned} t(c_t + c_z w) + (u - y)c_y + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_y + t w_z) &= 0, \\ t(u_t + u_z w) + (u - y)u_y + \frac{2}{\gamma - 1} c c_y &= 0, \\ t(w_t + w_z w) + (u - y)w_y + \frac{2}{\gamma - 1} t c c_z &= -gt. \end{aligned} \quad (1.7)$$

С учетом структуры ряда (1.5) в новых переменных характеристика Γ_{12} имеет вид

$$\Gamma_{12} : y = y_0(t, z) = c^0(z) + \frac{(\gamma - 1)^2 g^2 t^2}{4c^0(z) 3!} + \dots,$$

т. е. задается аналитической функцией. Для других газодинамических параметров условия на характеристике Γ_{12} переписутся как

$$u|_{y=y_0(t,z)} = 0, \quad w|_{y=y_0(t,z)} = 0, \quad c|_{y=y_0(t,z)} = c^0(z). \quad (1.8)$$

Для удобства дальнейшего исследования преобразуем систему (1.7). Второе уравнение системы умножим на $(\gamma - 1)/2$ и прибавим к первому уравнению, после этого преобразования получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} (u + c - y) \left(c_y + \frac{\gamma - 1}{2} u_y \right) + t \left(c_t + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} (u_t + u_z w) + \frac{\gamma - 1}{2} c w_z \right) &= 0, \\ \frac{2}{\gamma - 1} c c_y + (u - y) u_y + t (u_t + u_z w) &= 0, \\ (u - y) w_y + t \left(w_t + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z + g \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Построение волны разрежения в пространстве независимых переменных t, z, y

Построим формальное решение задачи (1.8), (1.9) в виде ряда по степеням t :

$$\mathbf{f}(t, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(y, z) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{f} = \{c, u, w\}. \quad (2.1)$$

В системе (1.9) положим $t = 0$. Для определения нулевых коэффициентов ряда (2.1) получим уравнения

$$\begin{aligned} (u_0 + c_0 - y) \left(c_{0y} + \frac{\gamma - 1}{2} u_{0y} \right) &= 0, \\ \frac{2}{\gamma - 1} c_0 c_{0y} + (u_0 - y) u_{0y} &= 0, \\ (u_0 - y) w_{0y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Учитывая условия (1.8) при $t = 0$ из третьего уравнения системы (2.2), запишем

$$w_{0y} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$w_0 = w_{00}(z).$$

Учитывая условия (1.8) при $t = 0$, имеем

$$w_0 = 0.$$

Из первого уравнения системы (2.2) имеем

$$u_0 - y = -c_0 \quad (2.3)$$

Подставляя $u_0 - y$ во второе уравнение системы (2.2), получим

$$u_{0y} = \frac{2}{\gamma - 1} c_{0y}.$$

Интегрируя, имеем

$$u_0 = \frac{2}{\gamma - 1} c_0 + u_{00}(z).$$

С учетом условий (1.8) имеем

$$u_0 = \frac{2}{\gamma - 1} [c_0 - c^0(z)].$$

Тогда из соотношения (2.3) имеем

$$u_0 = \frac{2}{\gamma - 1} [-u_0 + y - c^0(z)].$$

Из этого равенства выражаем u_0 :

$$u_0 = \frac{2}{\gamma + 1} (y - c^0(z)).$$

Из соотношения (2.3) получаем

$$c_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(y + \frac{2}{\gamma - 1} c^0(z) \right).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} c_0(y, z) &= \frac{1}{2\alpha} \left(y + \frac{2}{\gamma - 1} c^0(z) \right), \\ u_0(y, z) &= \frac{2}{\gamma + 1} (y - c^0(z)), \\ w_0(y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $2\alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$ и справедливы соотношения

$$c_{0y} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad u_{0y} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad c_{0z} = \frac{2}{\gamma + 1} c_z^0(z), \quad u_{0z} = -\frac{2}{\gamma + 1} c_z^0(z). \quad (2.5)$$

Систему (1.9) продифференцируем по t , положим $t = 0$, с учетом (2.3), (2.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} (u_1 + c_1) + c_1 + \frac{\gamma - 1}{2} u_1 &= 0, \\ u_1 - c_0 u_{1y} + u_1 u_{0y} + \frac{2}{\gamma - 1} c_0 c_{1y} + \frac{2}{\gamma - 1} c_1 c_{0y} &= 0, \\ w_1 - c_0 w_{1y} + \frac{2}{\gamma - 1} c_0 c_{0z} &= -g. \end{aligned} \quad (2.6)$$

После преобразований третье уравнение системы (2.6) будет иметь вид

$$\left(y + \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)\right) w_{1y} - 2\alpha w_1 = 2\alpha g + \frac{4}{\gamma^2-1} \left(y + \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)\right) c_z^0(z).$$

Выпишем решение третьего уравнения системы (2.6) в квадратурах:

$$w_1 = \left(y + \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)\right)^{2\alpha} \times \\ \times \left(w_{10}(z) + \int \left[2\alpha g + \frac{4}{\gamma^2-1}c_z^0(z) \left(y + \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)\right)\right] \left(y + \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)\right)^{-2\alpha-1} dy\right).$$

Вычисляя интеграл, имеем

$$w_1 = w_{10}(z) \left(y + \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)\right)^{2\alpha} - \frac{2}{\gamma+1}c_z^0(z) \left(y + \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)\right) - g.$$

Используя условия (1.8), найдем $w_{10}(z)$. Положим $w_1 = 0$ и $y = c^0(z)$, получим

$$[2\alpha c^0(z)]^{2\alpha} w_{10}(z) = \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)c_z^0(z) + g.$$

В силу условий (1.2)

$$[2\alpha c^0(z)]^{2\alpha} w_{10}(z) = 0, \quad w_{10}(z) = 0.$$

Окончательно имеем

$$w_1 = -\frac{2}{\gamma+1}c_z^0(z) \left(y + \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)\right) - g. \quad (2.7)$$

Из первого уравнения системы (2.6) получаем

$$\frac{(\gamma+5)(\gamma-1)}{2(\gamma+1)}u_1 + \frac{3\gamma-1}{\gamma+1}c_1 = 0,$$

из этого соотношения находим u_1 :

$$u_1 = -\frac{6\gamma-2}{(\gamma-1)(\gamma+5)}c_1.$$

Тогда второе уравнение системы (2.6) переписется в виде

$$c_0 \left(1 + \frac{3\gamma-1}{\gamma+5}\right) c_{1y} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(1 - \frac{(\gamma+3)(3\gamma-1)}{(\gamma-1)(\gamma+5)}\right) c_1 = 0$$

или

$$\frac{4(\gamma+1)}{\gamma+5}c_0c_{1y} - 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{(\gamma+1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+5)}c_1 = 0.$$

Сокращая, будем иметь

$$2c_0c_{1y} - c_1 = 0.$$

Подставляя c_0 , получим

$$\left(y + \frac{2}{\gamma-1}c^0(z)\right) c_{1y} = \alpha c_1. \quad (2.8)$$

Интегрируя, имеем

$$c_1 = c_{10}(z) \left(y + \frac{2}{\gamma-1} c^0(z) \right)^\alpha,$$

$$u_1 = -\frac{6\gamma-2}{(\gamma-1)(\gamma+5)} c_{10}(z) \left(y + \frac{2}{\gamma+1} c^0(z) \right)^\alpha.$$

Учитывая (1.8), из второго соотношения получаем $c_{10}(z) = 0$. Следовательно,

$$u_1 = c_1 = 0. \quad (2.9)$$

Систему (1.9) продифференцируем k раз по t , положим $t = 0$, с учетом (2.3), (2.4) получим

$$\left(k + \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \right) c_k + \frac{\gamma-1}{2} \left(k + \frac{4}{\gamma+1} \right) u_k = F_{1k}(y, z),$$

$$\frac{2}{\gamma-1} c_0 c_{ky} - c_0 u_{ky} + \frac{2}{\gamma+1} c_k + \left(k + \frac{2}{\gamma+1} \right) u_k = F_{2k}(y, z), \quad (2.10)$$

$$k w_k - c_0 w_{ky} = F_{3k}(y, z).$$

Здесь функции F_{1k} , F_{2k} , F_{3k} известным образом зависят от уже найденных коэффициентов ряда (2.1).

Интегрируя третье уравнение системы (2.10), имеем

$$w_k = \left(y + \frac{2}{\gamma-1} c^0(z) \right)^{2\alpha k} \left[w_{k0}(z) - \int F_{3k}(y, z) \left(y + \frac{2}{\gamma-1} c^0(z) \right)^{-2\alpha k-1} dy \right].$$

Из первого уравнения системы (2.10) находим

$$u_k = -\frac{(2k+4)\gamma+2k-4}{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)} c_k + \frac{2\gamma+2}{k\gamma+k+4} F_{1k},$$

$$u_{ky} = -\frac{(2k+4)\gamma+2k-4}{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)} c_{ky} + \frac{2\gamma+2}{k\gamma+k+4} F_{1ky}.$$

Подставляя u_k и u_{ky} во второе уравнение системы (2.10), имеем

$$\frac{2}{\gamma-1} c_0 \left(\frac{(k+2)\gamma+k-2}{k\gamma+k+4} + 1 \right) c_{ky} + \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{(k\gamma+k+2)((k+2)\gamma+k-2)}{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)} \right) c_k =$$

$$= F_{2k} + \frac{2(\gamma+1)}{k(\gamma+1)+4} c_0 F_{1ky} - \frac{2(k(\gamma+1)+2)}{k(\gamma+1)+4} F_{1k} = F_k^+$$

или

$$\frac{4(k+1)(\gamma+1)}{(\gamma-1)(k\gamma+k+4)} c_0 c_{ky} - \frac{2}{\gamma+1} \frac{k(k+1)(\gamma+1)^2}{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)} c_k = F_k^+,$$

после преобразований имеем

$$2c_0 c_{ky} - k c_k = \frac{(k\gamma+k+4)(\gamma-1)}{2(k+1)(\gamma+1)} F_k^+.$$

Подставляя c_0 окончательно, получаем

$$\left(y + \frac{2}{\gamma - 1}c^0(z)\right) c_{ky} - \alpha k c_k = F_k(y, z).$$

Здесь $F_k(y, z) = \frac{k\gamma + k + 4}{4(k + 1)}F_k^+$. Тогда решения дифференциальных уравнений (2.10) запишутся в виде

$$\begin{aligned} c_k &= \left(y + \frac{2}{\gamma - 1}c^0(z)\right)^{\alpha k} \left(c_{k0}(z) + \int F_k(y, z) \left[y + \frac{2}{\gamma - 1}c^0(z)\right]^{-\alpha k - 1} dy\right), \\ u_k &= -\frac{(2k + 4)\gamma + 2k - 4}{(k\gamma + k + 4)(\gamma - 1)} \left(y + \frac{2}{\gamma - 1}c^0(z)\right)^{\alpha k} \times \\ &\times \left(c_{k0}(z) + \int F_k(y, z) \left[y + \frac{2}{\gamma - 1}c^0(z)\right]^{-\alpha k - 1} dy\right) + \frac{2\gamma + 2}{k\gamma + k + 4}F_{1k}(y, z). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Произвольные функции $c_{k0}(z)$, $w_{k0}(z)$ определяются из условий (1.8). Для этого в ряды (2.1) положим $u = w = 0$, $y = y_0(t, z)$, в результате имеем

$$0 = u(t, y_0(t, z), z),$$

$$0 = w(t, y_0(t, z), z).$$

Дифференцируя эти соотношения по t , подставляя $t = 0$, получим алгебраические уравнения для определения $c_{k0}(z)$, $w_{k0}(z)$, имеющие вид

$$\begin{aligned} \left[y_0(0, z) + \frac{2}{\gamma - 1}c^0(z)\right]^{\alpha k} c_{k0}(z) &= Q_{1k}(z), \\ \left[y_0(0, z) + \frac{2}{\gamma - 1}c^0(z)\right]^{2\alpha k} w_{k0}(z) &= Q_{2k}(z). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $Q_{1k}(z)$, $Q_{2k}(z)$ — функции, известным образом зависящие от $c^0(z)$.

Поскольку $y_0(0, z) = c^0(z)$, соотношения (2.12) переписутся в виде

$$[2\alpha c^0(z)]^{\alpha k} c_{k0}(z) = Q_{1k}(z),$$

$$[2\alpha c^0(z)]^{2\alpha k} w_{k0}(z) = Q_{2k}(z).$$

Так как $c^0(z) \neq 0$, $2\alpha \neq 0$, функции $c_{k0}(z)$, $w_{k0}(z)$ определяются единственным образом.

Анализ структуры коэффициентов ряда (2.1) приводит к следующей лемме.

Лемма 2.1. Коэффициенты ряда (2.1) при $k \geq 1$ имеют вид $c_{2k-1} = u_{2k-1} = 0$, $w_{2k} = 0$.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (2.1). Далее после индуктивного предположения следующее дифференцирование системы (1.9) приводит к нулевой правой части соответствующего уравнения. В силу условий (1.8) это гарантирует нулевые значения соответствующих коэффициентов ряда (2.1). \square

Таким образом, формальное решение задачи о распаде специального разрыва построено в виде ряда (2.1).

3. Построение волны разрежения в пространстве независимых переменных t, z, c

Для доказательства сходимости ряда (2.1) решение задачи о распаде специального разрыва построим в пространстве, где в системе (1.1) за независимые переменные берутся t, z, c , за неизвестные функции — x, u, w , т. е. переменные x и c меняются ролями [6]. Якобиан преобразования $J = x_c$. В результате такой замены вместо системы (1.1) получается система

$$\begin{aligned} x_t &= u - x_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c), \\ x_c u_t + (u - x_t - x_z w) u_c + x_c u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\ x_c w_t + (u - x_t - x_z w) w_c + x_c w_z w - \frac{2}{\gamma - 1} c x_z &= -g x_c. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для удобства дальнейшего исследования систему (3.1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} x_t &= u - x_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c), \\ x_c u_t - \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c) u_c + x_c u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c &= 0, \\ x_c w_t - \frac{\gamma - 1}{2} c(u_c + x_c w_z - x_z w_c) w_c + x_c w_z w - \frac{2}{\gamma - 1} c x_z &= -g x_c. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для полученной системы (3.2) начальные данные (1.6) на характеристике Γ_{12} переписутся в виде

$$u|_{\Gamma_{12}} = 0, \quad w|_{\Gamma_{12}} = 0, \quad x|_{\Gamma_{12}} = x_0(t, z). \quad (3.3)$$

Течение в области между Γ_{12} и Γ_{02} будем строить как решение системы (3.1) с данными на характеристике Γ_{12} (3.3). Поскольку Γ_{12} — характеристика кратности один, для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [9]. Этим условием в пространстве переменных t, c, z служит [2] соотношение

$$x(0, c, z) = 0. \quad (3.4)$$

Теорема 3.1 *Существует t_1 такое, что при $0 \leq t \leq t_1$ в некоторой окрестности Γ_{12} имеется единственное локально-аналитическое решение задачи (3.2)–(3.4) о распаде специального разрыва.*

Доказательство теоремы состоит, как и в [2], в сведении к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [9].

Разложим решение задачи (3.2)–(3.4) в ряд по степеням t :

$$\mathbf{q}(t, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{q}_k(c, z) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{q} = \{x, u, w\}. \quad (3.5)$$

В системе (3.2) положим $t = 0$ и с учетом (3.4) получим уравнения для определения нулевых коэффициентов ряда (3.5):

$$\begin{aligned}x_1 &= u_0 + \frac{\gamma - 1}{2} c u_{0c}, \\ \frac{\gamma - 1}{2} u_{0c}^2 &= \frac{2}{\gamma - 1}, \\ u_{0c} w_{0c} &= 0.\end{aligned}$$

Преобразуя уравнения, получаем

$$w_{0c} = 0, \quad u_{0c} = \frac{2}{\gamma - 1}.$$

Интегрируя с учетом (3.3), имеем

$$x_1 = 2\alpha c - \frac{2}{\gamma - 1} c^0(z), \quad u_0 = \frac{2}{\gamma - 1} (c - c^0(z)), \quad w_0 = 0.$$

Систему (3.2) продифференцируем по t , положим $t = 0$. С учетом (3.4) и найденных коэффициентов ряда получим

$$\begin{aligned}x_2 &= u_1 + \frac{\gamma - 1}{2} c u_{1c}, \\ c u_{1c} - \alpha u_1 &= 0, \\ c w_{1c} - 2\alpha w_1 &= 2\alpha g + \frac{4c_z^0(z)}{(\gamma - 1)^2} c.\end{aligned}$$

Интегрируя систему с учетом (3.3), имеем

$$x_2 = 0, \quad u_1 = 0, \quad w_1 = \left(\frac{2c^0(z)c_z^0(z)}{\gamma - 1} + g \right) \left(\frac{c}{c^0(z)} \right)^{2\alpha} - \frac{2c_z^0(z)}{\gamma - 1} c - g.$$

Систему (3.2) продифференцируем k раз по t , положим $t = 0$. С учетом (3.4) и найденных коэффициентов ряда получим

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= u_k + \frac{\gamma - 1}{2} c u_{kc} + F_{1k}(c, z), \\ c u_{kc} - \alpha k u_k &= F_{2k}(c, z), \\ c w_{kc} - 2\alpha k w_k &= F_{3k}(c, z).\end{aligned}$$

Здесь $F_{1k}(c, z)$, $F_{2k}(c, z)$, $F_{3k}(c, z)$ — функции, известным образом зависящие от уже найденных коэффициентов ряда (3.5).

Интегрируя систему, имеем

$$\begin{aligned}u_k(c, z) &= c^{\alpha k} \left(u_{0k}(z) + \int F_{2k}(c, z) c^{-\alpha k - 1} dc \right), \\ w_k(c, z) &= c^{2\alpha k} \left(w_{0k}(z) + \int F_{3k}(c, z) c^{-2\alpha k - 1} dc \right).\end{aligned}$$

□

Анализ структуры коэффициентов ряда (3.5) приводит к следующим леммам.

Лемма 3.1. Коэффициенты ряда (3.5) при $k \geq 1$ имеют вид $u_{2k-1} = 0$, $w_{2k} = 0$, $x_{2k} = 0$.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (3.5). Далее после индуктивного предположения следующее дифференцирование системы (3.2) приводит к нулевой правой части соответствующего уравнения. В силу условий (3.3) это гарантирует нулевые значения соответствующих коэффициентов ряда (3.5). \square

Лемма 3.2. Коэффициенты ряда (3.5) при $k \geq 1$ имеют следующую структуру: $\mathbf{q}_k(c, z) = \mathbf{q}_k^0(z) + c\mathbf{P}_k(c, clnc, c^{2\alpha})$, где P_k есть многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше чем Ak ($A = const$). Коэффициенты многочленов — функции, зависящие от z .

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по k . База индукции следует из структуры начальных коэффициентов ряда (3.5). После индуктивного предположения показывается, что правые части дифференциальных уравнений для \mathbf{q}_k обладают нужной структурой. После интегрирования системы доказывается, что и \mathbf{q}_k обладают нужной структурой. \square

На основании леммы 3.2 можно утверждать, что структура решения задачи (3.2)–(3.4) следующая:

$$\begin{aligned} x &= x^0(t, z) + cx^1(t, c, z), \\ u &= u^0(t, z) + cu^1(t, c, z), \\ w &= w^0(t, z) + cw^1(t, c, z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x^0(t, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k^0(z) \frac{t^k}{k!}, \\ u^0(t, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k^0(z) \frac{t^k}{k!}, \\ w^0(t, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k^0(z) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для $x^0(t, z)$, $u^0(t, z)$, $w^0(t, z)$ справедлива

Лемма 3.3. Ряды (3.6) являются решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} x_t + x_z w &= u, & x(0, z) &= 0, \\ u_t + x_z w &= 0, & u(0, z) &= -\frac{2}{\gamma - 1} c_0(z), \\ w_t + x_z w &= -g, & w(0, z) &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

На основании приведенных лемм доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2. При $0 \leq t \leq t_*$ и $\gamma > 1$ область сходимости рядов (3.5), а также рядов \mathbf{q}_t , \mathbf{q}_z , \mathbf{q}_c покрывает всю зону течения от Γ_{12} до Γ_{02} включительно. При этом закон движения свободной границы определяется из решения вспомогательной задачи (3.7).

Доказательство теоремы аналогично доказательству из [2] и проводится по методике [9], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по

соответствующей переменной. При доказательстве используются теорема 3.1 и полиномиальная структура коэффициентов ряда. \square

Теорема 3.3. Краевая задача (1.8), (1.9) эквивалентна задаче (3.2)–(3.4).

Доказательство. На основании теорем 3.1 и 3.2 можно утверждать, что в виде сходящегося ряда (3.5) единственным образом построено решение начально-краевой задачи (3.2)–(3.4). Полученное решение имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x(t, z, c) = x_1(z, c)t + x_3(z, c)\frac{t^3}{3!} + \dots + x_{2k+1}(z, c)\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots, \\ u &= u(t, z, c) = u_0(z, c) + u_2(z, c)\frac{t^2}{2!} + \dots + u_{2k}(z, c)\frac{t^{2k}}{(2k)!} + \dots, \\ w &= w(t, z, c) = w_1(z, c)t + w_3(z, c)\frac{t^3}{3!} + \dots + w_{2k+1}(z, c)\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

В первом соотношении системы (3.8) вместо x введем $y = x/t$, получим

$$y = x_1(z, c) + x_3(z, c)\frac{t^2}{3!} + \dots + x_{2k+1}(z, c)\frac{t^{2k}}{(2k+1)!} + \dots \quad (3.9)$$

Продифференцируем соотношение (3.9) по c и положим $t = 0$, будем иметь

$$y_c(0, z, c) = x_{1c}(z, c) = 2\alpha \neq 0.$$

Поскольку $2\alpha \neq 0$, по теореме о существовании обратной функции существует значение t_2 такое, что при $0 \leq t \leq t_2$ имеется локально-аналитическая функция $c = c(t, y, z)$. Тогда решение задачи (3.2)–(3.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} c &= c(t, y, z), \\ u &= u(t, z, y) = u_0(z, c(t, y, z)) + u_2(z, c(t, y, z))\frac{t^2}{2!} + \dots \\ &+ u_{2k}(z, c(t, y, z))\frac{t^{2k}}{(2k)!} + \dots, \\ w &= w(t, z, y) = w_1(z, c(t, y, z))t + w_3(z, c(t, y, z))\frac{t^3}{3!} + \dots \\ &+ w_{2k+1}(z, c(t, y, z))\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как при $t > 0$ якобиан преобразования $J = x_c \neq 0$, решение (3.10) удовлетворяет системе (1.9). Также оно удовлетворяет условиям (1.8). Покажем, что при $t = 0$ нулевые коэффициенты рядов (3.10) и (2.1) совпадают.

В решении (3.10) положим $t = 0$ и, учитывая (3.9), получим

$$\begin{aligned} w|_{t=0} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(z, c|_{t=0}) = \frac{2}{\gamma - 1} (c|_{t=0} - c^0(z)), \\ y &= x_1(z, c|_{t=0}) = 2\alpha c|_{t=0} - \frac{2}{\gamma - 1} c^0(z). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из третьего соотношения (3.11) найдем $c|_{t=0}$ и, подставляя ее во второе соотношение (3.11), запишем

$$\begin{aligned}c|_{t=0} &= \frac{1}{2\alpha} \left(y + \frac{2}{\gamma - 1} c^0(z) \right), \\u|_{t=0} &= \frac{2}{\gamma + 1} (y - c^0(z)), \\w|_{t=0} &= 0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Условия (3.12) совпадают с условиями (2.4).

В силу единственности построенных решений задачи (1.8), (1.9) и задачи (3.2)–(3.4) получается, что решение (2.1) совпадает с решением (3.10). Теорема доказана. \square

Из теоремы 3.3 следует, что ряд (2.1) сходится.

Замечание. Решение задачи о распаде специального разрыва, построенное в виде ряда (3.5), покрывает всю область волны разрежения от Γ_{12} до Γ_{02} включительно. Поскольку теорема о существовании обратной функции носит локальный характер, утверждение о включении свободной границы Γ_{02} в область сходимости ряда (2.1), вообще говоря, пока не доказано и требует дальнейших исследований.

Благодарности. В заключение авторы благодарят С. П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

Список литературы

- [1] **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-тут компьютерных исследований; 2003: 336.
 - [2] **Баутин С.П., Дерябин С.Л.** Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука; 2005: 390.
 - [3] **Баутин С.П., Дерябин С.Л., Мезенцев А.В., Чуев Н.П.** Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе. Новосибирск: Наука; 2015: 191.
 - [4] **Дерябин С.Л., Мезенцев А.В.** Численно-аналитическое моделирование газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. Вычисл. технологии. 2010; 15(5):51–71.
 - [5] **Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N. Yu.** Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011; 26(4):353–377.
 - [6] **Дерябин С.Л., Кирьянова А.С.** Обобщение централизованной волны Римана при учете силы тяжести. Математические структуры и моделирование. 2017; (1(41)):44–53.
 - [7] **Bautin S.P., Deryabin S.L.** Two-dimensional solutions of the equations shallow-water theory in the neighbourhood of a shore line boundary. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015; 79(4):358–366.
 - [8] **Дерябин С.Л., Кирьянова А.С.** Математическое моделирование при учете силы тяжести течений жидкости, возникающих в результате разрушения плотины. Математические структуры и моделирование. 2017; (4(44)):73–85.
 - [9] **Баутин С.П.** Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука; 2009: 368.
-

MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.002

Construction of two-dimensional flows in physical space arising after the decay of a special discontinuityDERYABIN SERGEY L.¹, KIRYANOVA ANNA S.^{2,*}¹Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, Russia²Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

*Corresponding author: Kiryanova Anna S., e-mail: kiryanova@imach.uran.ru

Received January 21, 2020, revised July 6, 2020, accepted July 13, 2020

Abstract

The aim of this study is to construct a solution to the problem of the decay of a special discontinuity in physical space, i. e., two-dimensional isentropic flows of polytropic gas, arising after the instantaneous destruction of an impenetrable wall that separates an inhomogeneous resting gas from a vacuum. The study takes into account the effect of gravity.

Research Methods. A variable, which governs the evolution of the self-similar singularity from the initial interface is introduced into the system of equations of gas dynamics. For the resulting system, the Cauchy problem is posed with prescribed values on the sound characteristic. The solution to this problem is constructed in the form of power series. The coefficients of the series are determined by solving algebraic and ordinary differential equations. Further, to prove the convergence of this series, an initial-boundary-value problem is posed in a special functional space. The solution to this initial-boundary value problem is constructed in the form of its convergent power series and the equivalence of solutions for the first and second initial-boundary value problems is proved.

Solutions of the problem for the decay of a special discontinuity are constructed in the form of convergent power series. The equivalence of solutions in the physical and special functional space is proved.

Conclusions. The solution constructed in physical space determines the initial conditions for the difference scheme for the numerical simulation of the given characteristic Cauchy problem, while the one, built in a special functional space, allows setting boundary conditions for this scheme.

Keywords: gas outflow into vacuum, decay of a special discontinuity, system of equations of gas dynamics, gravity, self-similar solutions, initial-boundary value problem, power series.

Citation: Deryabin S.L., Kiryanova A.S. Construction of two-dimensional flows in physical space arising after the decay of a special discontinuity. Computational Technologies. 2020; 25(4):4–19. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.002. (In Russ.)

References

1. Ovsyannikov L.V. Lectures on the basics of gas dynamics. Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Research; 2003: 336. (In Russ.)
2. Bautin S.P., Deryabin S.L. Mathematical modelling of the flow of an ideal gas into a vacuum. Novosibirsk: Nauka; 2005: 390. (In Russ.)
3. Bautin S.P., Deryabin S.L., Mezentsev A.V., Chuev N.P. Initial-boundary problems for modelling the motion of a continuous medium with singularities on a free boundary. Novosibirsk: Nauka; 2015: 191. (In Russ.)
4. Deryabin S.L., Mezentsev A.V. Numerical and analytical modeling of gas flows adjacent to a vacuum under the action of gravity and Coriolis. Comput. Technologies. 2010; 15(5):51–71. (In Russ.)

5. Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*. 2011; 26(4):353–377.
6. Deryabin S.L., Kiryanova A.S. Generalization of the centered Riemann wave taking gravity into account. *Mathematical Structures and Modeling*. 2017; (1(41)):44–53.
7. Bautin S.P., Deryabin S.L. Two-dimensional solutions of the equations shallow-water theory in the neighbourhood of a shore line boundary. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2015; 79(4):358–366.
8. Deryabin S.L., Kiryanova A.S. Mathematical modelling taking into account the gravity of fluid flows resulting from the destruction of the dam. *Mathematical Structures and Modelling*. 2017; (4(44)): 73–85.
9. Bautin S.P. The characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics. Novosibirsk: Nauka; 2009: 368. (In Russ.)