

## Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью

Е. А. КАЗАКОВ

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034,  
с. Паратунка, Камчатский край, Россия

Контактный автор: Казаков Евгений Анатольевич, e-mail: Mifistjohn@gmail.com

Поступила 18 апреля 2022 г., доработана 02 июня 2022 г., принята в печать 10 июня 2022 г.

Работа посвящена одному из направлений моделирования механизма генерации крупномасштабных магнитных полей космических объектов — планет, звезд, галактик. Рассмотрены малоразмерные модели динамо, описывающие на феноменологическом уровне работу двух генераторов поля, так называемых  $\omega$ - и  $\alpha$ -эффектов. В результате получена модель генерации магнитного поля в безразмерной форме с эрдитарным подавлением  $\alpha$ -эффекта. Представлена теорема существования и единственности решения для такой модели. Рассмотрен численный метод для исследования систем подобного вида и приведен процесс верификации численной схемы и программного кода.

*Ключевые слова:* гидромагнитное динамо, галёркинские приближения, маломодовые модели динамо, память (эрдитарность).

*Цитирование:* Казаков Е.А. Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью. Вычислительные технологии. 2022; 27(6):19–32. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.003.

### Введение

Существование крупномасштабных магнитных полей планет, звезд и галактик обычно объясняется действием механизма динамо [1, 2]. Речь идет о магнитном поле, возникающем в процессе эволюции системы, которая имеет в своем составе сплошную электропроводящую среду, такую как жидкий металл или плазма. Описание генерации космических магнитных полей остается важнейшей фундаментальной проблемой магнитной гидродинамики.

Движение среды в этих космических объектах сильно турбулизовано, но в крупномасштабном приближении носит осесимметричный характер, поэтому широко распространен подход среднего поля, когда скорость среды и магнитное поле разлагаются на крупномасштабные осесимметричные поля и трехмерные мелкомасштабные пульсации [3]. Подстановка этих разложений в уравнение индукции для магнитного поля и последующее усреднение по пульсациям приводят к выделению двух генераторов крупномасштабного поля. Первый генератор формирует тороидальную компоненту из полоидальной с помощью дифференциального вращения среды. Он называется  $\omega$ -эффектом. Второй генератор имеет специфически турбулентную природу и обеспечивает генерацию поло- и тороидальной компонент друг из друга с помощью нелинейных взаимодействий мелкомасштабных пульсаций скорости и магнитного поля. Этот

турбулентный генератор называется  $\alpha$ -эффектом. Такая идея динамо для космических объектов предложена Паркером [4].

Основная трудность этого механизма динамо заключается в обратной связи, когда крупномасштабное магнитное поле воздействует на турбулентный генератор, обеспечивая работу самосогласованного нелинейного механизма для генерации конечного поля. Обычно эта обратная связь считается мгновенной во времени и локальной в пространстве. Однако правильное описание турбулентного переноса включает свертку интегральных ядер со средним полем [3]. В [5] показано, что эффект памяти также сильно влияет на действие динамо. Бранденбург использовал формализм функций отклика и показал, что влияние интегральных ядер может быть значительным для анизотропных потоков [6].

Реальные космические динамо-системы демонстрируют большое разнообразие сложных динамических режимов: квазистационарные, квазирегулярные и хаотические колебания, всплески, васциляции (колебания вокруг ненулевого уровня), инверсии и т. п. [7, 8]. Таким образом, можно сказать, что реальные динамо-системы — это колебательные системы с эффектом памяти.

Прямое численное моделирование для уравнений динамо требует очень больших вычислительных ресурсов, поэтому такое моделирование временной динамики поля невозможно на временных масштабах, сравнимых со временем существования космических динамо-систем ( $\sim 10^9$  лет). Воспроизведение длительной динамики становится возможным при переходе к маломодовым приближениям. Предельный случай такого упрощения — это использование двух мод, по одной для торо- и полоидальной компонент поля. Даже при таком сильном пространственном усечении в моделях с памятью удастся воспроизводить динамические режимы, подобные реальным, включая такие свойства, как фрактальность шкалы полярности магнитного поля и степенное распределение времени ожидания инверсии [9–11].

Поэтому для развития теории космических динамо-систем актуальным направлением является разработка и исследование малоразмерных динамических систем с памятью, моделирующих на феноменологическом уровне процесс генерации магнитных полей. По сложившейся в теории динамических систем терминологии модели с памятью называют эредитарными.

Настоящая статья является развитием работ [10–12]. В модели вводится член, описывающий генерацию тороидальной компоненты поля с помощью  $\alpha$ -эффекта (так называемых  $\alpha^2$ - и  $\alpha^2\omega$ -динамо), а также строго доказываются существование и единственность решений интегродифференциальных уравнений модели. Строится разностная схема для обобщенной модели и приводятся результаты вычислительных экспериментов.

## 1. Вывод модели

Уравнение индукции магнитного поля в области  $\Omega$ , заполненной проводящей средой, имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\mathbf{V}$  — поле скорости среды, а  $\nu_m$  — магнитная вязкость, предполагаемая нами постоянной. В теории среднего поля вводится разложение полей скорости и магнитного поля

на средние поля  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  и флуктуации  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{b}$ . Малость флуктуаций по сравнению со средними полями не предполагается. Наблюдаемые крупномасштабные поля и крупномасштабные движения космических объектов в первом приближении осесимметричны, а пульсации трехмерные [2].

Подстановка разложений в уравнение (1) и последующее усреднение по мелкомасштабным пульсациям приводят к уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) + \nabla \times (\alpha \mathbf{V}) + \beta \Delta \mathbf{V}, \\ \nabla \mathbf{V} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — тензоры второго ранга, зависящие от скорости и магнитного поля. Установление характера этой зависимости составляет основную задачу теории среднего поля. Свертка  $\alpha \mathbf{V}$  определяет турбулентную ЭДС ( $\alpha$ -эффект), а  $\beta \mathbf{V}$  дает диффузию магнитного поля, включающую в себя молекулярную и турбулентную диффузию [13].

В дальнейшем будем рассматривать изотропный случай скалярных  $\alpha$  и  $\beta$ , причем  $\beta$  будем считать константой. Это связано с тем, что для космических тел, в первом приближении, движение носит характер дифференциального вращения, источником которого является турбулентность.

Безразмерная форма уравнения (2) при сохранении обозначения полей будет иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) + \nabla \times (\tilde{\alpha} \mathbf{V}) + R_m^{-1} \Delta \mathbf{V}, \\ \nabla \mathbf{V} &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

где  $R_m^{-1}$  — обратное магнитное число Рейнольдса,  $\tilde{\alpha}$  — безразмерная интенсивность  $\alpha$ -эффекта.

Соленоидальное магнитное поле  $\mathbf{V}$  образовано торо- и полоидальной компонентами. У поля скорости также, вообще говоря, существуют торо- и полоидальные компоненты, но в рамках нашего приближения мы считаем, что у поля скорости отсутствует полоидальная компонента. Другими словами, крупномасштабное движение среды  $\mathbf{U}$  носит характер осесимметричного дифференциального вращения.

Для рассматриваемого осесимметричного случая уравнение (3) расщепляется на следующие уравнения для торо- и полоидальной компонент:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{V}^P) + \text{rot}(\tilde{\alpha} \mathbf{V}^P) + R_m^{-1} \Delta \mathbf{V}^T, \\ \frac{\partial \mathbf{V}^P}{\partial t} &= \text{rot}(\tilde{\alpha} \mathbf{V}^T) + R_m^{-1} \Delta \mathbf{V}^P.\end{aligned}\tag{4}$$

Из системы (4) следует, что генерация тороидального поля из полоидального происходит за счет дифференциального вращения и  $\alpha$ -эффекта. Полоидальное же поле генерируется из тороидального исключительно только за счет  $\alpha$ -эффекта.

Предполагается, что вне  $\Omega$  среда непроводящая. Поэтому для магнитного поля задаются вакуумные граничные условия

$$\nabla \times \mathbf{V}^T(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{V}^P(\mathbf{r}, t) = 0, \quad r \in \partial\Omega.$$

Считаем, что пространственная структура магнитного поля очень простая и может быть описана одной полоидальной и одной тороидальной модами. Таким образом, рассматриваем только самую крупномасштабную структуру поля. Это приближение имеет следующий вид:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^T + \mathbf{B}^P = B^T(t)\mathbf{b}^T(\mathbf{r}) + B^P(t)\mathbf{b}^P(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Динамика поля в случае одномодовых приближений для торо- и полоидальной компонент определяется поведением скалярных амплитуд. Подставив (5) в (4) и применив метод Галёркина, можно получить уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dB^T}{dt} &= \omega B^P + \alpha^T B^P - \eta^T B^T, \\ \frac{dB^P}{dt} &= \alpha^P B^T - \eta^P B^P, \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты имеют следующий физический смысл:  $\omega$  — мера интенсивности генерации тороидальной моды крупномасштабным дифференциальным вращением;  $\alpha^P$  и  $\alpha^T$  — мера интенсивности генерации поло- и тороидальной мод;  $\eta^T$  и  $\eta^P$  — обратные характерные времена омической диссипации мод. Эти коэффициенты определяются по формулам

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\|\mathbf{b}^T\|^2} \int_{\Omega} [\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{b}^P)] \mathbf{b}^T dr > 0, \\ \eta^T &= \frac{-R_m^{-1}}{\|\mathbf{b}^T\|^2} \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{b}^T) \mathbf{b}^T dr > 0, \quad \eta^P = \frac{-R_m^{-1}}{\|\mathbf{b}^P\|^2} \int_{\Omega} (\Delta \mathbf{b}^P) \mathbf{b}^P dr > 0, \\ \alpha^T &= \frac{1}{\|\mathbf{b}^T\|^2} \int_{\Omega} (\nabla \times \tilde{\alpha} \mathbf{b}^T) \mathbf{b}^T dr > 0, \quad \alpha^P = \frac{1}{\|\mathbf{b}^P\|^2} \int_{\Omega} (\nabla \times \tilde{\alpha} \mathbf{b}^P) \mathbf{b}^P dr > 0, \\ \|\mathbf{b}^T\|^2 &= \int_{\Omega} [\mathbf{b}^T(r)]^2 dr, \quad \|\mathbf{b}^P\|^2 = \int_{\Omega} [\mathbf{b}^P(r)]^2 dr. \end{aligned}$$

В этих интегралах элемент  $dr$  означает объемное интегрирование в физическом пространстве. В уравнениях (6) присутствуют два турбулентных генератора поля с интенсивностями  $\alpha^T$ ,  $\alpha^P$  и один крупномасштабный генератор с интенсивностью  $\omega$ .

Легко проверить, используя методы теории устойчивости по линейному приближению, что генерация поля, т.е. рост малых флуктуаций  $B = \sqrt{|B^T|^2 + |B^P|^2}$ , происходит при  $(\alpha^T + \omega)\alpha^P > \eta^T\eta^P$ . Поле при этом растет экспоненциально. Ограниченные по величине неисчезающие решения получаются при  $(\alpha^T + \omega)\alpha^P = \eta^T\eta^P$ . Значит,  $D = \frac{(\alpha^T + \omega)\alpha^P}{\eta^T\eta^P}$  имеет смысл динамо-числа [6, 14].

Из выражения для динамо-числа  $D$  видно, что если  $\alpha^T \ll \omega$ , то турбулентным генератором тороидального поля можно пренебречь. Соответствующий механизм называется  $\alpha\omega$ -динамо. Наоборот, если  $\alpha^T \gg \omega$ , то можно пренебречь крупномасштабным генератором, в результате получим  $\alpha^2$ -динамо. Если же  $\alpha^T$  и  $\omega$  сравнимы по величине, то имеем дело с общим механизмом  $\alpha^2\omega$ -динамо.

Если  $D = 1$ , то у системы (6) кроме неустойчивого нулевого решения есть стационарные решения вида  $B^T = \frac{\alpha^T + \omega}{\eta^T} B^P$ , образующие асимптотически устойчивую прямую на фазовой плоскости системы.

Ограничение экспоненциального роста поля при  $D > 1$  можно получить, вводя механизм подавления  $\alpha$ -эффекта за счет нелинейного механизма обратной связи. Физический источник этого механизма — действие магнитного поля на турбулентный поток посредством силы Лоренца. Поскольку сила Лоренца — квадратичная по полю, обратная связь в модель должна вводиться в виде некоторой квадратичной по компонентам  $B^T$  и  $B^P$  форме. В простейшем случае вводятся функциональные зависимости вида  $\alpha = f(B^T, B^P)$  с заданной функциональной зависимостью. Модели такого типа известны как модели с алгебраическим подавлением (algebraic quenching) [15]. В этих моделях отклик  $\alpha$  на изменение величины поля мгновенный и он зависит только от текущего значения поля.

Более сложный, но и более правдоподобный вариант подавления динамического типа (dynamical quenching) возникает, если  $\alpha = f(B^T, B^P)$  вводится как функционал от энергии поля или его спиральности или если в  $\alpha$  вводится динамическая поправка, для которой записывается дополнительное эволюционное уравнение. В первом случае удается реализовать механизм памяти (эредитарности), поскольку текущая интенсивность  $\alpha$ -эффекта будет определяться не только текущим состоянием магнитного поля, но и его предшествующими состояниями. Во втором случае память не возникает, но динамическая поправка к  $\alpha$  делает систему нелинейной, а дополнительное уравнение увеличивает размерность системы до трех. В подобных системах уже возможно появление детерминированного хаоса [16].

В интенсивности  $\alpha^P$ ,  $\alpha^T$  введем динамическую поправку, обеспечивающую подавление, и примем для них представление  $\alpha^P = \alpha - w$ ,  $\alpha^T = \xi(\alpha - w)$ , где  $\xi$  — безразмерный коэффициент. Получим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dB^T}{dt} &= (\omega + \xi(\alpha - w))B^P - \eta^T B^T, \\ \frac{dB^P}{dt} &= (\alpha - w)B^T - \eta^P B^P, \\ w &= Q(B^T, B^P). \end{aligned} \tag{7}$$

В системе (7) введем замены переменных:

$$x_1(t) = B^T(t), \quad x_2(t) = sB^P(t), \quad w = sx_3(t).$$

Введем параметры  $s = (\omega + \xi\alpha)/\eta^T$  и  $D = s\alpha$ . Выберем в качестве временного масштаба характерное время диссипации полоидальной компоненты магнитного поля, тогда  $\eta^P = 1$ .

Вводим эредитарную модель подавления  $\alpha$ -эффекта, принимая для  $x_3(t)$  выражение в виде следующей интегральной конструкции сверточного типа:

$$x_3(t) = \int_0^t J(t - \tau)Q(x_1(\tau)x_2(\tau))d\tau.$$

Из этого выражения видно, что актуальное состояние  $x_3(t)$  определяется средневзвешенным значением квадратичной функции  $Q$  по всем предшествующим состояниям, ядро  $J(t)$  задает распределение весового коэффициента. Это ядро является достаточно произвольной функцией, которая должна быть неотрицательна и затухать на бесконечности, т.е.  $J(t) \geq 0 \forall t$  и  $J(+\infty) = 0$ . В результате получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \left( \eta^T - \frac{\xi}{s^2} x_3 \right) x_2 - \eta^T x_1, \\
\frac{dx_2}{dt} &= (D - x_3) x_1 - x_2, \\
x_3 &= \int_0^t J(t - \tau) Q(x_1(\tau) x_2(\tau)) d\tau.
\end{aligned} \tag{8}$$

Управляющие параметры в этой системе  $\eta^T$ ,  $s$ ,  $\xi$ ,  $D$ . При их варьировании будем получать системы  $\alpha^2\omega$ -,  $\alpha\omega$ -,  $\alpha^2$ -динамо. В случае  $\xi = 0$  получаем  $\alpha\omega$ -динамо, тогда система (8) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= (x_2 - x_1) \eta^T, \\
\frac{dx_2}{dt} &= (D - x_3) x_1 - x_2, \\
x_3 &= \int_0^t J(t - \tau) Q(x_1(\tau) x_2(\tau)) d\tau.
\end{aligned}$$

В случае, когда  $\xi \neq 0$ , получаем один из двух вариантов, а именно  $\alpha^2\omega$ - или  $\alpha^2$ -динамо. Рассмотрим параметр  $s = \frac{\omega}{\eta^T} + \frac{\xi\alpha}{\eta^T}$  и домножим обе части выражения на  $s$  и воспользуемся введенной ранее заменой, а именно  $D = s\alpha$ . В результате запишем

$$s^2 = \frac{\omega}{\eta^T} + \frac{\xi D}{\eta^T}. \tag{9}$$

Из (9) видно, что  $s^2 \geq \frac{\xi D}{\eta^T}$ . В случае, когда  $\omega = 0$ , получим равенство, т. е.  $s^2 = \frac{\xi D}{\eta^T}$ , и этот случай соответствует  $\alpha^2$ -динамо. Если же  $s^2 > \frac{\xi D}{\eta^T}$ , то имеем дело с  $\alpha^2\omega$ -динамо.

## 2. Существование и единственность решения уравнений модели

Уравнения модели можно записать в форме векторного уравнения Вольтерра:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau) \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T, \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T, \\
\mathbf{K}(t - \tau) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & J(t - \tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) = \begin{bmatrix} \left( \eta^T - \frac{\xi}{s^2} x_3(\tau) \right) x_2(\tau) - \eta^T x_1(\tau), \\ (D - x_3(\tau)) x_1(\tau) - x_2(\tau) \\ Q(x_1(\tau), x_2(\tau)) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Из уравнения (10) видно, что вектор  $\mathbf{a}$  имеет смысл начального значения  $\mathbf{x}(0)$ , т. е. уравнение (10) заменяет уравнение модели вместе с начальными условиями. Тогда можно доказывать существование и единственность решения в уравнении модели, используя принцип неподвижной точки.

Вводим оператор  $\Phi$  равенством

$$\Phi \mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau) \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau.$$

Тогда уравнение Вольтерра становится операторным уравнением вида

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{x}(t)$$

в функциональном пространстве непрерывных вектор-функций с расстоянием

$$\rho(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \sup_{t \in [0; T]} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|,$$

где норма понимается в смысле

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \max_i |x_i - y_i|.$$

Вводим подчиненную матричную норму

$$\|\mathbf{K}\| = \max_i \sum_j^n |k_{ij}|.$$

Тогда  $\|\mathbf{K}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{K}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$ . Ясно, что наше матричное ядро ограничено по норме, т. е.

$$\|\mathbf{K}(s)\| \leq M \quad \forall s \geq 0.$$

Функция  $\mathbf{f}$  удовлетворяет условию Липшица для подходящей  $\zeta$ :

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq \zeta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Покажем, что некоторая степень оператора  $\Phi$  является сжимающим отображением. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|\Phi \mathbf{x}(t) - \Phi \mathbf{y}(t)\| &= \left\| \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau) [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}(\tau))] d\tau \right\| \leq \int_0^t \|\mathbf{K}(t - \tau) [\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}(\tau))]\| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t \|\mathbf{K}(t - \tau)\| \cdot \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}(\tau))\| d\tau \leq \int_0^t M \cdot \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}(\tau))\| d\tau. \end{aligned}$$

Теперь применим условие Липшица и получим

$$\begin{aligned} \|\Phi \mathbf{x}(t) - \Phi \mathbf{y}(t)\| &\leq M\zeta \int_0^t \|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{y}(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq M\zeta \int_0^t \sup_{\tau \in [0; T]} \|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{y}(\tau)\| d\tau = M\zeta \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \int_0^t d\tau = M\zeta \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \|\Phi^2 \mathbf{x}(t) - \Phi^2 \mathbf{y}(t)\| &\leq \zeta M \int_0^t \|\Phi \mathbf{x}(\tau) - \Phi \mathbf{y}(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \zeta M \int_0^t \zeta M \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tau d\tau \leq \zeta^2 M^2 \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \int_0^t \tau d\tau = \zeta^2 M^2 \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\|\Phi^n \mathbf{x}(t) - \Phi^n \mathbf{y}(t)\| \leq \zeta^n M^n \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{t^n}{n!},$$

тогда

$$\rho(\Phi^n \mathbf{x}, \Phi^n \mathbf{y}) = \sup_{t \in [0; T]} \|\Phi^n \mathbf{x}(t) - \Phi^n \mathbf{y}(t)\| \leq \zeta^n M^n \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sup_{t \in [0; T]} \frac{t^n}{n!} = q_n \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где

$$q_n = \zeta^n M^n \frac{T^n}{n!}.$$

Таким образом, существует такое  $n$ , что  $q_n < 1$ , и тогда оператор  $\Phi^n$  является сжимающим, а операторное уравнение  $\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{x}(t)$  имеет решение, причем единственное.

Итак, интегродифференциальные уравнения модели при заданных начальных амплитудах мод  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  имеют единственное решение на любом конечном интервале моделирования  $[0; T]$ .

### 3. Численная схема

Для начала в системе (8) введем следующие замены:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T, \quad z = x_3, \quad \mathbf{a} \text{ — вектор параметров.}$$

В результате получим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= f(\mathbf{x}, z, \mathbf{a}), \\ z &= \int_0^t J(t - \tau) Q(\mathbf{x}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

При численном исследовании модели необходимо совмещение разностных схем для дифференциальной части и квадратурной формы для интегральной. В качестве разностной схемы для дифференциальной части возьмем один из неявных методов Рунге–Кутты второго порядка [17, 18]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_2, \\ \mathbf{m}_1 &= f(\mathbf{x}^k, z^k, \mathbf{a}), \\ \mathbf{m}_2 &= f\left(\mathbf{x}^k + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_2, z^{k+1}, \mathbf{a}\right). \end{aligned}$$

В расчетных целях его удобнее записать в виде

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{x}^k, z^k, \mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}, z^{k+1}, \mathbf{a})). \quad (11)$$

В качестве квадратурной формы для интегрального члена используем следующую формулу трапеций:

$$z^{k+1} = \frac{\Delta t}{2} J(t_{k+1}) Q(\mathbf{x}^0) + \Delta t \sum_{i=1}^k J(t_{k-i}) Q(\mathbf{x}_i) + \frac{\Delta t}{2} J(0) Q(\mathbf{x}^{k+1}). \quad (12)$$

Объединение формул (11) и (12) дает неявную разностную схему для интегродифференциальной системы. Данная схема программно реализована [12]. Следующий шаг — это проведение верификации программного кода и численной схемы.

#### 4. Верификация кода на существующих системах с известным поведением

Возьмем в системе (8) квадратичную форму  $Q(x_1, x_2) = x_1x_2$ , ядро  $J(s) = e^{-bs}$  и следующие значения параметров:  $\xi = 0$ ,  $\eta^T = 10$  и  $b = 8/3$ . Тогда очевидно, что последнее уравнение системы (8) можно записать в дифференциальной форме для  $x_3$  с начальным условием  $x_3(0) = 0$ .

Получим систему вида

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= (x_2 - x_1)\eta^T, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (D - x_3)x_1 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2 - bx_3, \\ x_3(0) &= 0.\end{aligned}$$

Это частный случай нашей модели, соответствующий  $\alpha\omega$ -динамо, причем хорошо видно, что это классическая система Лоренца. Динамика такой системы известна [10]. Применение разностной схемы и кода для такого частного случая модели (8) воспроизводит при соответствующих значениях  $D$  известные режимы системы Лоренца: асимптотический выход на стационар, квазипериодический режим и хаотический режим.

Если выбрать в качестве ядра интегрального оператора  $J(s) = te^{-bs}$ , это ядро будет решением дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2b\frac{d}{dt} + b^2\right)J(t) = 0. \quad (13)$$

Вычислим первую производную функции

$$x'_3(t) = \int_0^t J'(t - \tau)Q(x_1(\tau), x_2(\tau))d\tau + J(0)Q(x_1(t), x_2(t)).$$

Посчитаем вторую производную

$$x''_3(t) = \int_0^t J''(t - \tau)Q(x_1(\tau), x_2(\tau))d\tau + J'(0)Q(x_1(t), x_2(t)) + J(0)\frac{d}{dt}Q(x_1(t), x_2(t)).$$

Запишем уравнение

$$\begin{aligned}x''_3(t) + 2bx'_3(t) + b^2x_3(t) &= \int_0^t [J''(t - \tau) + 2bJ'(t - \tau) + b^2J(t - \tau)] Q(x_1(\tau), x_2(\tau))d\tau + \\ &+ J'(0)Q(x_1(t), x_2(t)) + J(0)\frac{d}{dt}Q(x_1(t), x_2(t)) + 2bJ(0)Q(x_1(t), x_2(t)).\end{aligned}$$

Подынтегральное выражение равно нулю с учетом уравнения (13). С учетом  $J(0) = 0$  и  $J'(0) = 1$  перепишем полученное уравнение:

$$x''_3(t) + 2bx'_3(t) + b^2x_3(t) = Q(x_1(t), x_2(t)).$$

Введем замену переменных  $\frac{dx_3}{dt} = x_4$ . Перепишем в новых переменных:

$$\frac{dx_4}{dt} = Q(x_1, x_2) - 2bx_4 - b^2x_3.$$

Таким образом, мы заменили интегральные уравнения системой однородных дифференциальных уравнений с начальными условиями  $x_3(0) = 0$  и  $x_4(0) = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx_3}{dt} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} &= Q(x_1, x_2) - 2bx_4 - b^2x_3.\end{aligned}$$

В результате получим систему

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \left( \eta^T - \frac{\xi}{s^2} x_3 \right) x_2 - \eta^T x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (D - x_3)x_1 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} &= Q(x_1, x_2) - 2bx_4 - b^2x_3.\end{aligned}\tag{14}$$

Теперь решим систему (8) с помощью численной схемы, предложенной в предыдущем разделе, а также решим систему (14), используя стандартные средства пакета Maple для численного решения систем дифференциальных уравнений. Систему моделировать будем при следующих параметрах:  $\eta^T = 3.37$ ,  $\xi = 1$ ,  $s = 1$ ,  $D = 25$ ,  $b = 2.67$ . В качестве функции  $Q(x_1(t), x_2(t))$  возьмем спиральность поля  $x_1x_2$ .

На рис. 1 в качестве примера представлены две фазовые траектории. Видно, что они очень близки. Говорить о полном совпадении, конечно, не приходится, но так бывает всегда при численном решении разными методами.

Итак, для рассмотренных видов ядер, когда оказалось возможным свести интегродифференциальную систему к чисто дифференциальной, наша схема и модуль дают корректный результат. Отметим, что только для ядер очень специального вида такое сведение возможно, в общем же случае надо работать в интегродифференциальной модели с использованием нашей схемы.

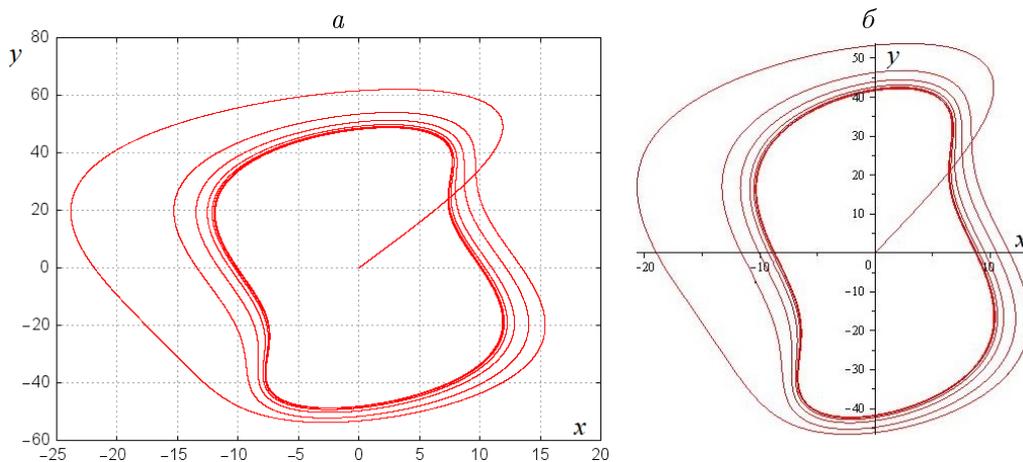


Рис. 1. Фазовые траектории: *а* — интегродифференциальная модель, решение построено с помощью схемы (11), (12); *б* — эквивалентная дифференциальная система, решение получено средствами Maple

Fig. 1. Phase trajectories: *a* — integrodifferential model, the solution is built using the scheme (11), (12); *b* — equivalent differential system, solution obtained by means of Maple

## 5. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим ядро интегрального оператора, который имеет степенную асимптотику. В качестве ядра возьмем  $J(t) = \frac{1}{(1+t)^b}$ . При таком ядре нельзя устранить интегральный член из системы (8), т.е. не сможем аналитически исследовать параметрическое пространство системы, поэтому прибегнем к численному моделированию.

Отметим, что, по сложившейся терминологии, к полноценно эредитарным системам принято относить именно системы со степенными ядрами в функционалах памяти, часто такие системы изучают, используя формализм дробных производных. Однако не будем в работе использовать формализм дробных производных.

Рассмотрим систему (8) с ядром  $J(t) = \frac{1}{(1+t)^b}$  при следующих параметрах (рис. 2, а):  $\eta^T = 3.37$ ,  $\xi = 1$ ,  $s = 1$ ,  $D = 25$ ,  $b = 0.8$ . Затем возьмем  $D = 100$  (рис. 2, б). Можно видеть, что в данных примерах система выходит на стационар.

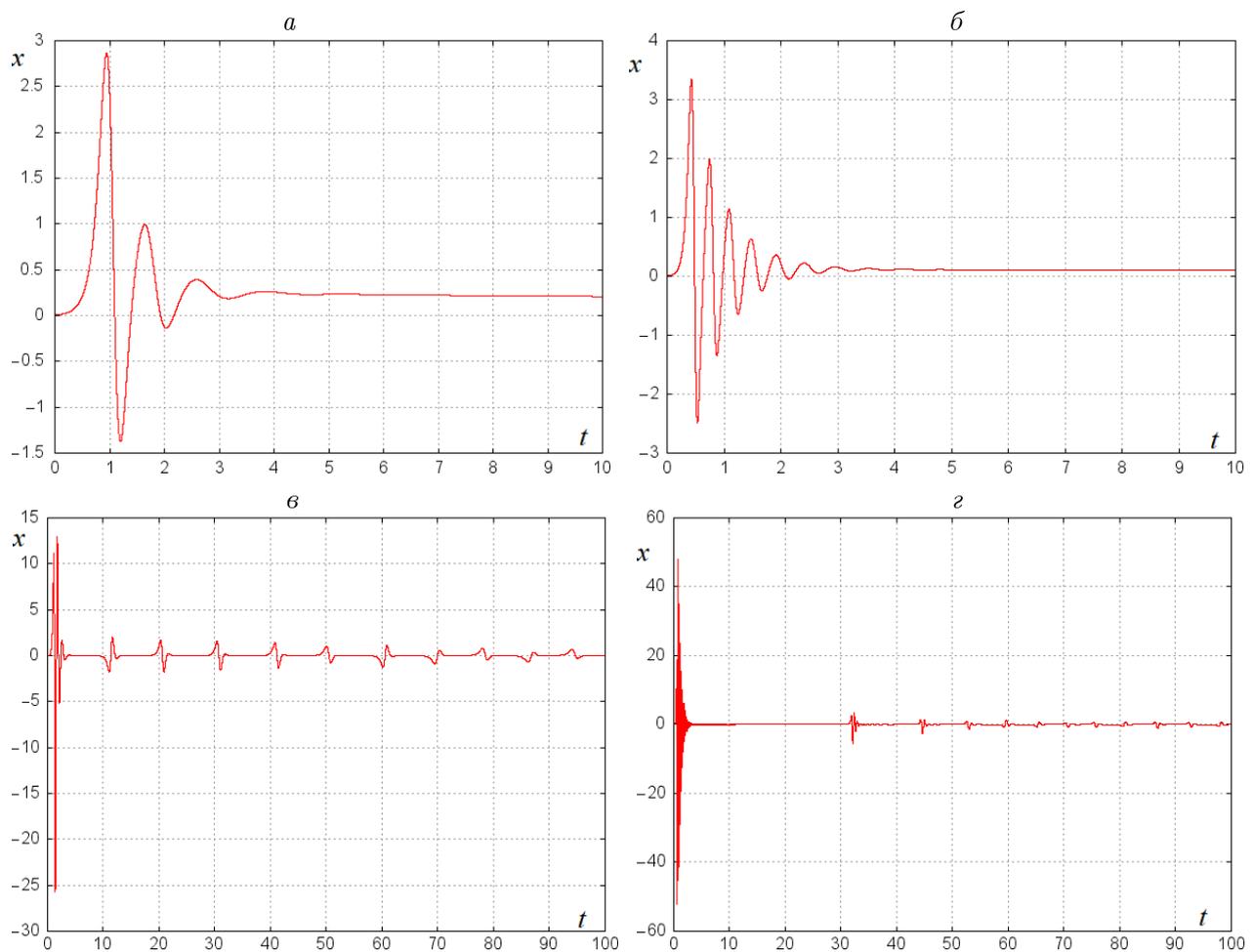


Рис. 2. Фазовая координата  $x_1$  при  $D = 25$  (а и в) и  $D = 100$  (б и г) для ядра  $J(t) = \frac{1}{(1+t)^b}$  (а и б) и  $J(t) = \frac{t}{(t+1)^{1+b}}$  (в и г)

Fig. 2. Phase coordinate  $x_1$  for  $D = 25$  (a and в) and  $D = 100$  (б and г) for cores  $J(t) = \frac{1}{(1+t)^b}$  (a and б) and  $J(t) = \frac{t}{(t+1)^{1+b}}$  (в and г)

Рассмотрим случай с ядром интегрального оператора подавления  $J(t) = \frac{t}{(t+1)^{1+b}}$ . Также будем моделировать систему с параметрами (рис. 2, *е*):  $\eta^T = 3.37$ ,  $\xi = 1$ ,  $s = 1$ ,  $D = 25$ ,  $b = 0.8$ . Теперь возьмем  $D = 100$  (рис. 2, *з*).

## Заключение

Предложена модель двухмодового динамо, охватывающая случаи осесимметричных крупномасштабных  $\alpha^2$ -,  $\alpha\omega$ - и  $\alpha^2\omega$ -динамо с эредитарным подавлением  $\alpha$ -эффекта. В реальных физических системах эффект памяти (эредитарности) проявляется прежде всего в запаздывании отклика  $\alpha$ -эффекта на изменения крупномасштабного поля. Физическая причина в том, что  $\alpha$ -эффект носит турбулентный мелкомасштабный характер, поэтому для передачи энергии подавления силой Лоренца с крупных масштабов на мелкие требуется некоторое время на преодоление инерционного интервала турбулентности.

Приведено доказательство существования и единственности решения системы, являющейся моделью динамо. Представлена численная схема для моделирования систем подобного вида.

Для некоторого вида ядер интегральный член в предложенной модели может быть заменен системой дифференциальных уравнений введением дополнительных фазовых переменных и начальных условий на эти переменные. В этом случае модель будет задаваться классической динамической системой, но в расширенном фазовом пространстве.

Рассмотрены также результаты численного моделирования, в которых демонстрируются некоторые типичные для реальных космических динамо-систем режимы.

**Благодарности.** Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-11-00064, <https://rscf.ru/project/22-11-00064>.

## Список литературы

- [1] **Вайнштейн С.И.** Магнитные поля в космосе. М.: Наука; 1983; 240.
- [2] **Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А.** Гидромагнитное динамо как источник планетарного, солнечного и галактического магнетизма. Успехи физических наук. 1987; 152(6):263–284.
- [3] **Krause F., Radler K.H.** Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Berlin: Academic-Verlag; 1980: 271.
- [4] **Parker E.N.** Hydromagnetic dynamo models. Astrophysical Journal. 1955; (122):293–314.
- [5] **Hori K., Yoshida S.** Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity. Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 2008; (102):601–632.
- [6] **Brandenburg A.** Memory effects in turbulent transport. Astrophysical Journal. 2009; (706):712–726.
- [7] **Merrill R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L.** The magnetic field of the Earth: paleomagnetism, the core, and the deep mantle. London: Academic Press; 1998: 531.
- [8] **Stix M.** The Sun. An introduction. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag; 1989: 390.

- [9] **Feschenko L., Vodinchar G.** Reversals in the large-scale  $\alpha\Omega$ -dynamo with memory. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2015; (22):361–369.
- [10] **Vodinchar G., Kazakov E.** Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory. *E3S Web of Conferences*. 2018; 62. DOI:10.1051/e3sconf/20186202011.
- [11] **Vodinchar G.** Hereditary oscillator associated with the model of a large-scale  $\alpha\omega$ -dynamo. *Mathematics*. 2020; 8(11):2065. DOI:10.3390/math8112065.
- [12] **Казakov Е.А.** Эредитарная маломодовая модель динамо. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2021; 35(2):40–47.
- [13] **Radler K.H.** Mean-field approach to spherical dynamo models. *Astronomische Nachrichten*. 1980; 301(3):101–129.
- [14] **Field G.B., Blackman E.G.** Quenching of the  $\alpha^2$  dynamo. *Astrophysical Journal*. 2002; (572):685–692.
- [15] **Brandenburg A.** Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. *Physics Reports*. 2005; 417(1–4):1–209.
- [16] **Кузнецов С.П.** Динамический хаос. М.: Физматлит; 2006: 356.
- [17] **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука; 1968: 720.
- [18] **Табор М.** Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Едиториал УРСС; 2001: 585.

## Two-mode model of a hydromagnetic dynamo with memory

KAZAKOV EVGENY A.

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Kamchatka region, Paratunka, Russia

Corresponding author: Kazakov Evgeny A., e-mail: Mifistjohn@gmail.com

Received April 18, 2022, revised June 02, 2022, accepted June 10, 2022.

### Abstract

The work addresses one of the directions for modelling of a mechanism of generation of large-scale magnetic fields for space objects — planets, stars, galaxies. The aim of the work is to derive and study small-scale dynamo models that describe at the phenomenological level the operation of two field generators, the so-called  $\alpha$ - and  $\omega$ -effects. When changing the control parameters, the model can implement the main types of dynamos —  $\alpha^2$ ,  $\alpha\omega$ ,  $\alpha^2\omega$ . All these types are found in real dynamo systems.

Galerkin method was employed for derivation of the model from the equations of magnetohydrodynamics. To prove the existence and uniqueness of the solution of the model, the method of contraction mappings was used. The study of various dynamic modes was carried out using numerical simulation. The article describes the derivation of the model equations from the general  $\alpha^2\omega$ -dynamo equations in the mean field approximation. The suppression of the  $\alpha$ -effect is provided by an integral term quadratic in the elements of the field, which introduces memory into the suppression

mechanism. The quadratic form may describe the suppression of the  $\alpha$ -effect by the helicity and/or energy of the field. The core of the suppression functional can be a rather arbitrary function. The choice of the kernel and the form of the quadratic form determines the specific suppression model.

The existence and uniqueness of solutions of integro-differential equations of the model with arbitrary initial conditions on any finite time interval is proved. An implicit non-local difference scheme for numerical simulation is proposed. Numerical simulations were used to study various dynamic regimes arising in the model.

When varying the control parameters, the model reproduces various dynamic modes typical of real space dynamo systems. The small dimension of the model allows simulating long-term dynamics on astronomical time scales.

*Keywords:* hydromagnetic dynamo, Galerkin approximations, low-mode dynamo models, memory (heredity).

*Citation:* Kazakov E.A. Two-mode model of a hydromagnetic dynamo with memory. Computational Technologies. 2022; 27(6):19–32. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.003. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The work is supported by Russian Science Foundation, grant No. 22-11-00064, <https://rscf.ru/project/22-11-00064>.

### References

1. **Vaynshteyn S.I.** Magnitnye polya v kosmose [Magnetic fields in space]. Moscow: Nauka; 1983: 240. (In Russ.)
2. **Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A.** The hydromagnetic dynamo as the source of planetary, solar, and galactic magnetism. Advances in Physical Sciences. 1987; (30):494–506. DOI:10.1070/PU1987v030n06ABEH002852.
3. **Krause F., Radler K.H.** Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Berlin: Academic-Verlag; 1980: 271.
4. **Parker E.N.** Hydromagnetic dynamo models. Astrophysical Journal. 1955; (122):293–314.
5. **Hori K., Yoshida S.** Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity. Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 2008; (102):601–632.
6. **Brandenburg A.** Memory effects in turbulent transport. Astrophysical Journal. 2009; (706):712–726.
7. **Merrill R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L.** The magnetic field of the Earth: paleomagnetism, the core, and the deep mantle. London: Academic Press; 1998: 531.
8. **Stix M.** The Sun. An introduction. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag; 1989: 390.
9. **Feschenko L., Vodinchar G.** Reversals in the large-scale  $\alpha\Omega$ -dynamo with memory. Nonlinear Processes in Geophysics. 2015; (22):361–369.
10. **Vodinchar G., Kazakov E.** Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory. E3S Web of Conferences. 2018; 62. DOI:10.1051/e3sconf/20186202011.
11. **Vodinchar G.** Hereditary oscillator associated with the model of a large-scale  $\alpha\omega$ -dynamo. Mathematics. 2020; 8(11):2065. DOI:10.3390/math8112065.
12. **Kazakov E.A.** Hereditary low-mode dynamo model. Vestnik KRAUNTS. Physical and Mathematical Sciences. 2021; 35(2):40–47. (In Russ.)
13. **Radler K.H.** Mean-field approach to spherical dynamo models. Astronomische Nachrichten. 1980; 301(3):101–129.
14. **Field G.B., Blackman E.G.** Quenching of the  $\alpha^2$  dynamo. Astrophysical Journal. 2002; (572):685–692.
15. **Brandenburg A.** Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. Physics Reports. 2005; 417(1–4):1–209.
16. **Kuznetsov S.P.** Dinamicheskiy kaos [Dynamic chaos]. Moscow: Fizmatlit; 2006: 356. (In Russ.)
17. **Korn G., Korn T.** Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Handbook of mathematics for scientists and engineers]. Moscow: Nauka; 1968: 720. (In Russ.)
18. **Tabor M.** Khaos i integriruemost' v nelineynoy dinamike [Chaos and integrability in nonlinear dynamics]. Moscow: Editorial URSS; 2001: 585. (In Russ.)