

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ГАЛАТЕЯ — ПОЯС\*

Г. И. ДУДНИКОВА, М. П. ФЕДОРУК, В. С. ЯКОВЛЕВ

*Институт вычислительных технологий СО РАН*

*Новосибирск, Россия*

e-mail: udn@adm.ict.nsc.ru, mife@net.ict.nsc.ru,

e-mail: iakovlev@beast.uic.nsc.ru

This paper presents the numerical simulation of plasma dynamics in the Belt-Type galateas. The development of current sheets is investigated, their instability and relatively short life time is shown. The numerical results are compared with the experimental ones.

Плазменные ловушки, в которых магнитное поле создается не только внешними катушками, но и проводниками с током, погруженными в плазму (миксинами), были в [1] названы галатеями. Данные ловушки имеют  $\beta \simeq 1$  и поэтому представляют значительный интерес в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза (УТС) и другими приложениями [1].

Общая концепция галатей была предложена в [1]. В дальнейшем они исследовались аналитически [2–5], экспериментально [6, 7] и численно [8–11]. В частности, экспериментально исследовано образование токового слоя [6], который рассматривается как один из способов эффективного разогрева плазмы в галатеях. Впервые численное моделирование галатей выполнено в работе [8], где было показано, что эволюция магнитоплазменной конфигурации идет с формированием токового слоя. В [10] с помощью численного моделирования было исследовано образование квазиравновесных плазменных конфигураций при различных условиях. Кроме того, в этой работе было продемонстрировано отжатие плазмы от миксин в случае, когда через них течет нарастающий со временем электрический ток.

В настоящей работе продолжено исследование галатей в рамках модели, представленной в [10]. При этом особое внимание уделено динамике плазмы на начальной стадии, исследовано образование токовых слоев, проведено сравнение с экспериментальными данными.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №98-02-17115а.

© Г. И. Дудникова, М. П. Федорук, В. С. Яковлев, 2000.

## 1. Математическая формулировка задачи

Приведенные в данной статье расчеты выполнялись применительно к экспериментальной установке Галатейя — Пояс [6, 7], представляющей собой кварцевую цилиндрическую вакуумную камеру, внутри которой вдоль ее оси размещены два прямых проводника (миксины), покрытые тонким слоем диэлектрика. Снаружи от камеры параллельно оси расположены еще два проводника — обратные токопроводы. Электрические токи в миксинах имеют одинаковые направления и величины. С обоих торцов в камеру введены два плоских электрода, с помощью которых к плазме прикладывается внешнее электрическое поле.

Результаты экспериментальных исследований [6] показали, что плазменные конфигурации однородны вдоль оси  $Oz$ . Поэтому в первом приближении будем предполагать, что электромагнитное поле, скорость, плотность и давление плазмы не зависят от  $z$ . При расчете электромагнитных полей в миксине плотность тока в ней считалась фиксированной величиной, и для их определения на каждом шаге по времени решалось уравнение Пуассона. Тем самым пренебрегалось диффузией электромагнитного поля из плазмы в миксину.

Выберем систему координат так, как показано на рис. 1. В расчетах предполагалось, что течение плазмы симметрично относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ . Поэтому решение рассматривалось только в первом квадранте  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq L$ , а на осях  $Ox$  и  $Oy$  ставились условия симметрии, которые будут выписаны ниже. В двумерной постановке магнитное поле и скорость плазмы имеют только  $x$  и  $y$  компоненты:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}), \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y, \mathbf{0}).$$

Магнитное поле в системе удобно описывать с помощью векторного потенциала:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \psi), \quad \mathbf{B} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \mathbf{0} \right). \quad (1)$$

Заметим, что в этом случае изолинии  $\psi$  совпадают с силовыми линиями магнитного поля.

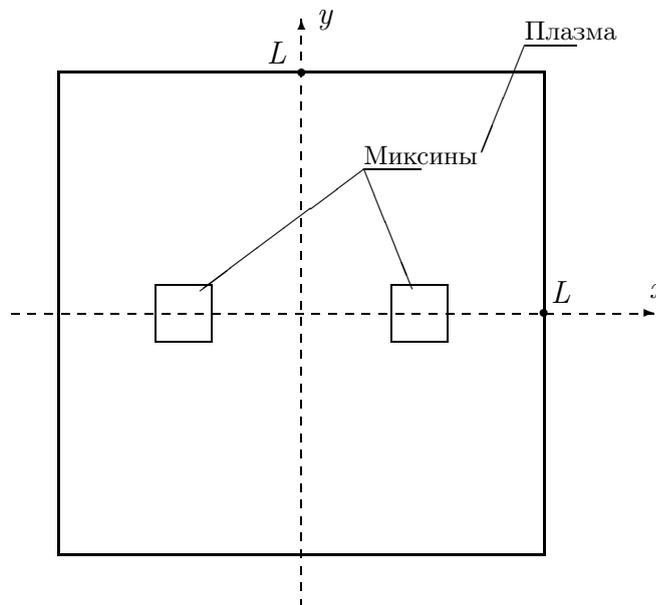


Рис. 1. Геометрия расчетной области.

Расчеты велись в рамках модели одножидкостной магнитной гидродинамики. В пренебрежении теплопроводностью и вязкостью плазмы основные уравнения этой модели

имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -(\mathbf{v} \nabla) \rho - \rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} [\Delta \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A}], \\
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{A}] + \nu_m \Delta \mathbf{A}, \\
\frac{\partial p}{\partial t} &= -(\mathbf{v} \nabla) p - \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\gamma - 1}{4\pi} \nu_m (\Delta \mathbf{A})^2,
\end{aligned} \tag{2}$$

где показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ , а  $\nu_m = c^2/(4\pi\sigma)$  — магнитная вязкость плазмы ( $c$  — скорость света,  $\sigma$  — проводимость плазмы). Рассмотрим теперь граничные и начальные условия. Граничные условия формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned}
u \Big|_{x=0} = v \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \\
\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0, \\
\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0, \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Условие на  $\psi_\Gamma$  должно быть поставлено таким образом, чтобы на границе камеры была задана напряженность внешнего электрического поля  $(0, 0, E_\Gamma)$ . Из этого следует, что векторный потенциал на границах расчетной области определяется как

$$\psi_\Gamma(t) = -c \int_0^t E_\Gamma(t) dt. \tag{4}$$

На границе между миксиной и плазмой должно стоять условие неразрывности магнитного поля, которое требует, чтобы  $\psi$  была непрерывна вместе со своей нормальной к поверхности миксины производной (рис. 2):

$$\psi_0 = \frac{1}{3} \left( 2(\psi_1 + \psi_{-1}) - \frac{1}{2}(\psi_2 + \psi_{-2}) \right), \tag{5}$$

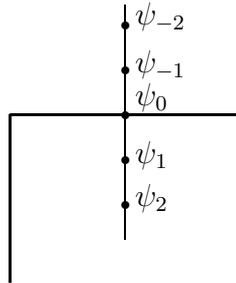


Рис. 2. К постановке граничного условия на поверхности миксины.

здесь  $\psi_0$  — значение векторного потенциала в некоторой точке на поверхности миксины,  $\psi_1, \psi_2$  — то же, в соседних с ней точках в объеме миксины, а  $\psi_{-1}, \psi_{-2}$  — в плазме.

В начальный момент времени  $t = 0$  плазма предполагалась полностью ионизированной с однородными распределениями концентрации и давления. Начальное распределение потенциала  $\psi$  находилось из решения уравнения Пуассона

$$\Delta\psi \Big|_{t=0} = \begin{cases} -4\pi j_m/c, & \text{в миксине,} \\ 0, & \text{вне миксины.} \end{cases} \quad (6)$$

Для решения этого уравнения использовался метод последовательной верхней релаксации с ускорением.

Значения параметров задачи были выбраны близкими к параметрам экспериментальной установки Галатея — Пояс:

Масса иона ( $\text{Ar}^+$ )	$6.6 \cdot 10^{-23}$ г
Начальная концентрация $n_0$	$10^{14} - 10^{15}$ см $^{-3}$
Начальная температура	1 эВ
Размер камеры	$18 \times 18$ см
Размер миксины	$2 \times 2$ см
Ток через миксину $j_m$	8–16 кА
Электрическое поле на границе $E_\Gamma$	20–50 В/см

Нами использовалась модель с постоянной проводимостью плазмы:  $\sigma = \text{const} = 10^{13}, 10^{14}$  с $^{-1}$ . При этом характерное значение магнитного числа Рейнольдса  $\text{Re}_m \simeq 1 - 10$ , что говорит о слабой степени вмороженности силовых линий магнитного поля в плазму.

## 2. Конечно-разностная схема

Перейдем в уравнениях (2) к безразмерным переменным:

$$u \rightarrow \frac{u}{v_0}, \quad v \rightarrow \frac{v}{v_0}, \quad \rho \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0}, \quad p \rightarrow \frac{p}{p_0}, \quad \psi \rightarrow \frac{\psi}{\psi_0}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow L \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow L \frac{\partial}{\partial y},$$

где индексом 0 обозначены некоторые характерные значения переменных, входящих в задачу.

Обозначим характерную плотность как  $\rho_0$ , а характерное магнитное поле как  $H_0$ . Тогда для характерных скорости, времени, давления и потенциала имеем

$$v_0 = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad t_0 = \frac{L}{v_0}, \quad p_0 = \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad \psi_0 = H_0 L. \quad (7)$$

Кроме того, удобно ввести безразмерную магнитную вязкость

$$\tilde{\nu}_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma L v_0}. \quad (8)$$

Для численной реализации исходной системы уравнений (2) нами была использована схема Лелевье первого порядка точности. Пусть  $f_{i,j}^n$  — значение величины  $f$  в узле  $(i, j)$  на временном слое  $n$ . Введем следующие обозначения:

$$\Delta_{i,j}^n = \frac{\psi_{i-1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i+1,j}^n}{h_x} + \frac{\psi_{i,j-1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j+1}^n}{h_y},$$

$$\Lambda_x^k f_{i,j} = \begin{cases} \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n}{h_x}, & \text{если } u_{i,j}^k < 0, \\ \frac{f_{i,j}^n - f_{i-1,j}^n}{h_x}, & \text{если } u_{i,j}^k \geq 0, \end{cases}$$

$$\Lambda_y^k f_{i,j} = \begin{cases} \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j}^n}{h_y}, & \text{если } v_{i,j}^k < 0, \\ \frac{f_{i,j}^n - f_{i,j-1}^n}{h_y}, & \text{если } v_{i,j}^k \geq 0. \end{cases}$$

Здесь подразумевается, что  $n$  — номер текущего временного слоя, а  $k$  может быть равно  $n$  либо  $n+1$ ;  $h_x, h_y$  — шаги сетки в направлении  $x, y$  соответственно.

В безразмерных переменных схема будет иметь вид:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \tau \left( -u_{i,j}^n \Lambda_x^n u_{i,j} - v_{i,j}^n \Lambda_y^n v_{i,j} - \frac{1}{2\rho_{i,j}^n} \left( \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{h_x} \Delta_{i,j}^n + \frac{1}{2} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{h_x} \right) \right), \quad (9)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \tau \left( -u_{i,j}^{n+1} \Lambda_x^{n+1} v_{i,j} - v_{i,j}^n \Lambda_y^n v_{i,j} - \frac{1}{2\rho_{i,j}^n} \left( \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{h_y} \Delta_{i,j}^n + \frac{1}{2} \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{h_y} \right) \right), \quad (10)$$

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \tau \left( -u_{i,j}^{n+1} \Lambda_x^{n+1} \rho_{i,j} - v_{i,j}^{n+1} \Lambda_y^{n+1} \rho_{i,j} - \frac{1}{2} \rho_{i,j}^n \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} \right) \right), \quad (11)$$

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^n + \tau \left( -u_{i,j}^{n+1} \Lambda_x^{n+1} \psi_{i,j} - v_{i,j}^{n+1} \Lambda_y^{n+1} \psi_{i,j} + \tilde{\nu}_m \Delta_{i,j}^n \right), \quad (12)$$

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + \tau \left( -u_{i,j}^{n+1} \Lambda_x^{n+1} p_{i,j} - v_{i,j}^{n+1} \Lambda_y^{n+1} p_{i,j} - \frac{\gamma}{2} p_{i,j}^n \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{h_y} \right) + 2(\gamma - 1) \tilde{\nu}_m (\Delta_{i,j}^{n+1})^2 \right). \quad (13)$$

Для контроля точности расчетов проверялся закон сохранения полной энергии системы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho v^2 + \frac{3}{2} p + (\nabla \psi)^2 \right) = -\operatorname{div} \left( \mathbf{v} \left( \rho v^2 + \frac{5}{2} p \right) + 2 \nabla \psi \left( (\mathbf{v}, \nabla \psi) - \tilde{\nu}_m \Delta \psi \right) \right),$$

а также законы сохранения импульса и массы плазмы. Погрешности в выполнении законов сохранения не превышали нескольких процентов.

Кроме того, были проведены тестовые расчеты по проверке скорости распространения альвеновской и магнитозвуковых волн. Для этой цели ставились периодические граничные условия и задавалось однородное начальное магнитное поле, причем отличной от нуля была либо компонента  $H_x$ , либо  $H_y$ . Затем на границе расчетной области  $y = L$  задавалось возмущение давления плазмы, в результате чего в ней возникали магнитогидродинамические волны. Скорости движения этих волн менее чем на процент отличались от теоретических значений.

### 3. Результаты расчетов

При описании динамики плазмы в галатях выделяют два основных режима:  $\alpha$ -режим, когда направления токов через миксины и внешнего электрического поля в плазме совпадают, и  $\beta$ -режим, когда они противоположны. В этой статье мы ограничимся рассмотрением  $\alpha$ -режима.

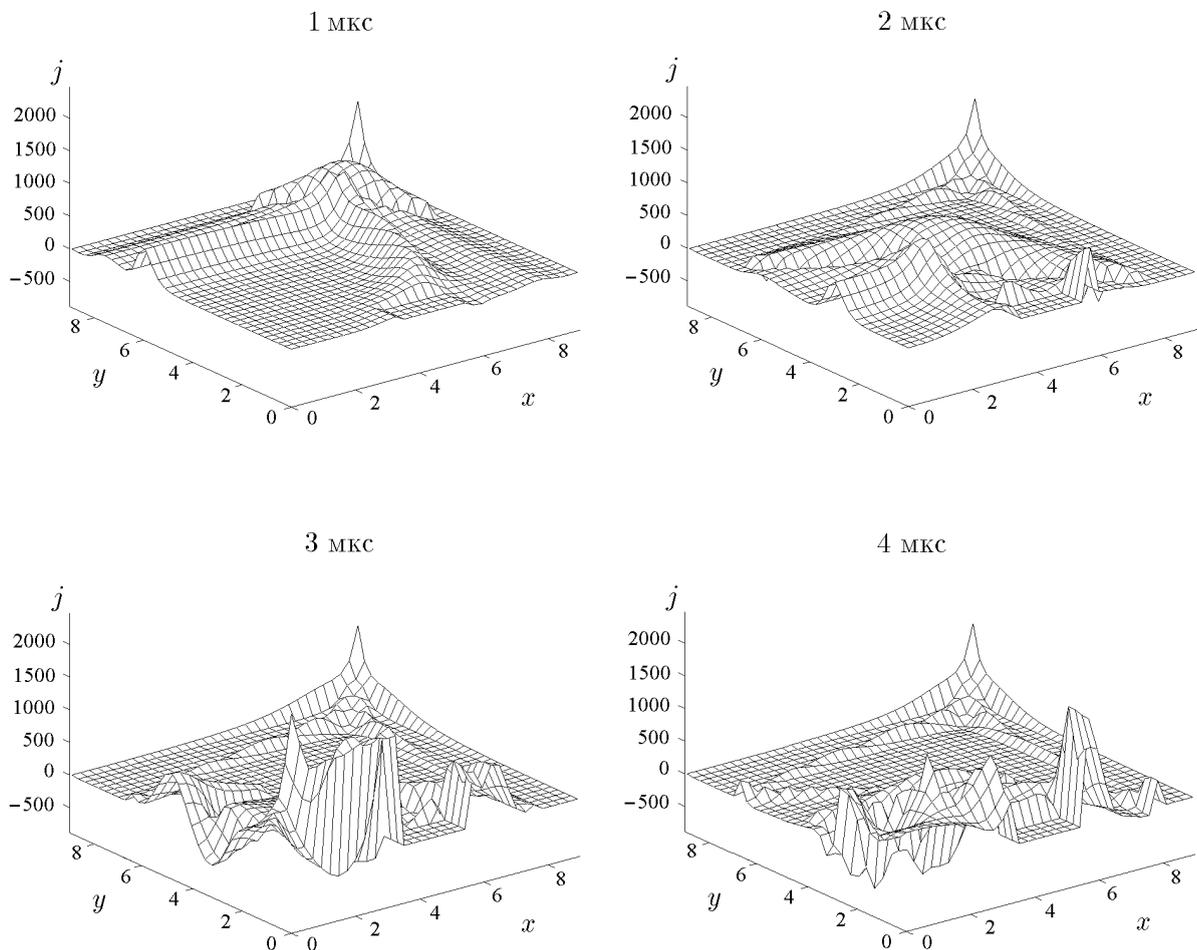


Рис. 3. Образование и распад токового слоя в центре камеры ( $x = 0, y = 0$ ). Плотность тока в  $A/cm^2$ .

Качественно процессы, происходящие в галатях, можно представить следующим образом: электрическое поле, приложенное к плазме, диффундирует в нее, вызывая электрический ток, параллельный току в миксинах. Под действием силы Ампера происходит

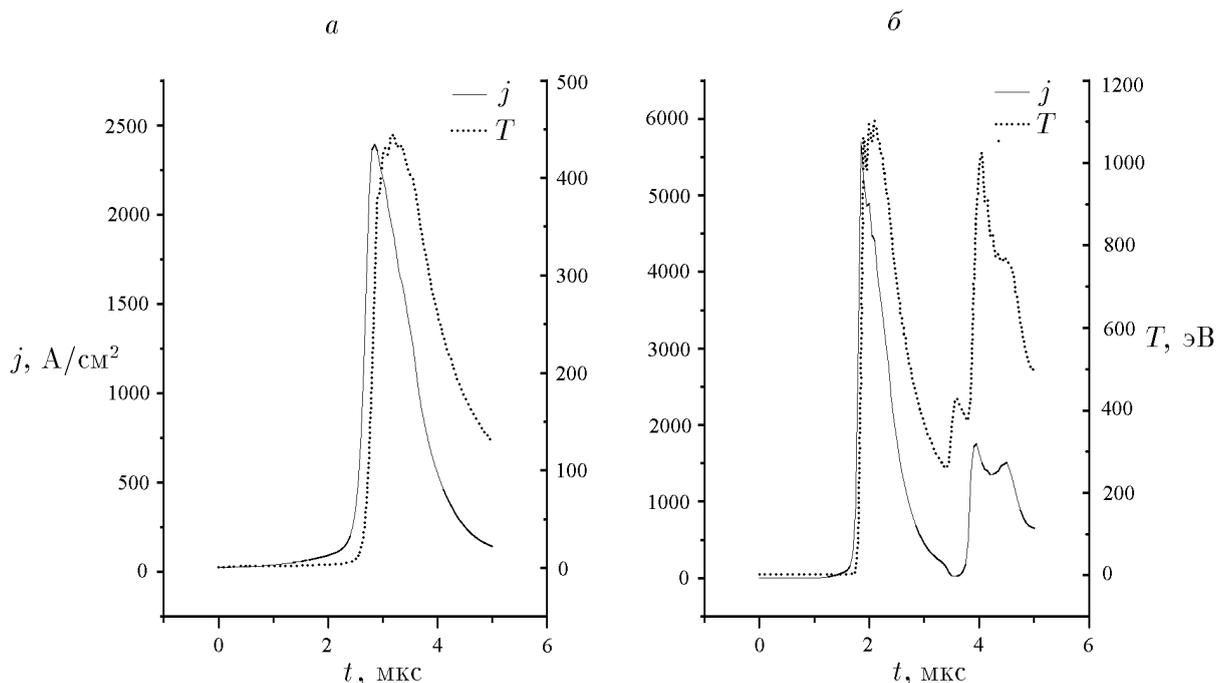


Рис. 4. Плотность тока и температура плазмы в центре камеры в зависимости от времени; *a* — однократное, *б* — двукратное образование токового слоя.

адиабатическое сжатие плазмы к центру камеры. Этот процесс совместно с выделением джоулева тепла обуславливает нагрев плазмы. Через центр камеры проходит нулевая линия магнитного поля, а значит в ее окрестности может образоваться токовый слой. С выходом на стационар устанавливается некоторая равновесная конфигурация.

Особый интерес представляет образование токовых слоев в галатеех. В начальный момент времени возникает быстрая магнитозвуковая волна, которая распространяется от границ камеры к ее центру. Когда эта волна достигает центра камеры, там возникает токовый слой (рис. 3). Как показывают наши расчеты, время жизни этого слоя не превышает 1–2 мкс — практически он начинает распадаться в тот же момент, как закончилось его формирование (рис. 4). В некоторых вариантах расчетов наблюдалось повторное образование токового слоя (рис. 4, б). При этом механизм его возникновения оставался прежним: кумуляция магнитозвуковой волны к центру камеры.

В работе [6] приведены изображения плазмы в различных спектральных линиях при разных условиях, полученные на экспериментальной установке. Для сравнения с нашими результатами рассмотрим простую модель линейчатого излучения плазмы. Согласно [12], в двухуровневой системе с энергией возбуждения  $\varepsilon$  в корональном режиме (разреженная горячая плазма) можно считать, что интенсивность излучения пропорциональна

$$I \sim n_e n_i \sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} Ei\left(\frac{\varepsilon}{T}\right), \quad (14)$$

где  $Ei$  — интегральная показательная функция, а температура  $T$  измерена в энергетических единицах. В нашей модели считается, что все ионы ионизированы однократно, поэтому  $n_e = n_i = n$ . Если мы рассматриваем излучение плазмы в спектральной линии с

длиной волны  $\lambda$ , то

$$\frac{\varepsilon}{T} = \frac{hc n}{\lambda p}, \quad (15)$$

где  $h$  — постоянная Планка.

По формулам (14) и (15) было рассчитано распределение интенсивности излучения аргонной плазмы в спектральной линии  $\lambda = 480.6$  нм. На рис. 5 приведены соответствующие

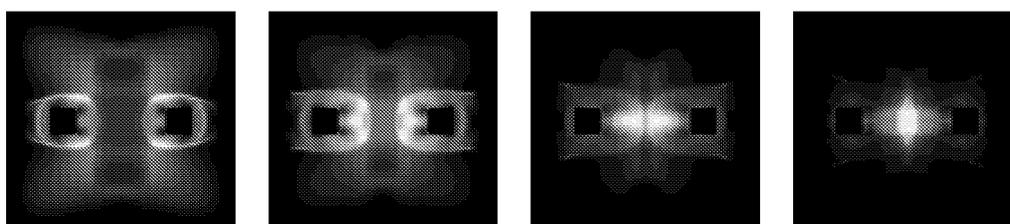


Рис. 5. Интенсивность излучения плазмы в линии AgII 480.6 нм в последовательные моменты времени.

изображения плазмы в последовательные моменты времени с интервалом 0.3 мкс. Четко видно образование мантий вокруг миксин и плоского светящегося слоя между миксинами. Со временем яркость свечения мантий уменьшается, а яркость слоя — увеличивается. Это качественно хорошо согласуется с теми результатами, которые были опубликованы в [6].

## Заключение

В результате численного моделирования исследовано образование токовых слоев в конфигурациях типа Галатей — Пояс. Отмечены их нестабильность и относительно короткое время жизни, обнаружена возможность повторного образования токового слоя. Распределение интенсивности линейчатого излучения плазмы, полученное в результате расчетов, хорошо качественно согласуется с данными лабораторных экспериментов.

## Список литературы

- [1] МОРОЗОВ А. И. О галатейях — плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками. *Физика плазмы*, **18**, вып. 3, 1992, 305–316.
- [2] МОРОЗОВ А. И., ХРИПУНОВ В. И. Оценка параметров кольцевой “миксины” для термоядерных реакторов Галатей. *Там же*, **18**, вып. 7, 1992, 838–849.
- [3] МОРОЗОВ А. И., ФРАНК А. Г. Тороидальная мультипольная ловушка — галатейя с азимутальным током. *Там же*, **20**, №11, 1994, 982–989.
- [4] МОРОЗОВ А. И., МУРЗИНА М. В. Простейшие равновесные конфигурации галатей типа “Пояс”. *Там же*, **22**, №6, 1996, 551–563.
- [5] МОРОЗОВ А. И., ПАСТУХОВ В. П. О процессах переноса вблизи погруженных в плазму замкнутых проводников с током (“миксин”). *Там же*, **18**, вып. 6, 1992, 790–798.

- [6] Богданов С. Ю., Бурилина В. Б., Кирий Н. П., Марков В. С., Морозов А. И., Франк А. Г. Эволюция температуры плазмы в зависимости от условий формирования магнитоплазменных конфигураций в прямой системе Галатея—Пояс. *Там же*, **24**, №6, 1998, 467–480.
- [7] Богданов С. Ю., Марков В. С., Морозов А. И., Франк А. Г. Плазменная конфигурация “Галатея—Пояс”: первые результаты экспериментальных исследований. *Письма в ЖТФ*, **21**, вып. 24, 1995, 5–9.
- [8] Брушлинский К. В., Горшенин К. П., Морозов А. И. Численное моделирование начальной стадии формирования плазменной конфигурации “Пояс”. *Там же*, **21**, вып. 22, 1995, 67–70.
- [9] Брушлинский К. В., Горшенин К. П. Плоская МГД модель образования плазменной конфигурации с погруженными в нее проводниками. *Матем. моделирование*, **9**, №5, 1997, 28–36.
- [10] Дудникова Г. И., Морозов А. И., Федорук М. П. Численное моделирование прямых плазменных конфигураций — Галатей типа “Пояс”. *Физика плазмы*, **23**, №5, 1997, 387–396.
- [11] Дудникова Г. И., Морозов А. И., Федорук М. П. Формирование плазменных конфигураций — галатей типа “Пояс”. *Письма в ЖТФ*, **22**, №21, 1996, 45–51.
- [12] Подгорный И. М. *Лекции по диагностике плазмы*. Атомиздат, М., 1968.

*Поступила в редакцию 28 января 1999 г.,  
в переработанном виде 4 июня 1999 г.*