ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА*

А. М. Гришин, А. С. Якимов
Томский государственный университет, Россия
e-mail: rector@tsu.ru

Stable difference schemes have been obtained by the generalization of iterative-interpolation method with the conventional approximation error for the solution of a three-dimensional equation of a general type. The convergence of the iterative process is studied. Calculation results are presented for the Poisson equation and at the constant transport coefficients the convergence rate has been theoretically estimated.

Известны итерационные методы [1–4] решения многомерного уравнения Пуассона. Эти методы иногда используют параметр релаксации ω ($0 < \omega < 2$), который необходимо подбирать при решении эллиптического уравнения общего вида. Их не удается применить при численном решении трехмерного уравнения в частных производных, за исключением, может быть, универсального локально-одномерного метода расщепления (разностные схемы суммарной погрешности аппроксимации) [5, 6] или метода Дугласа [7, 8] (схема стабилизирующей поправки с погрешностью аппроксимации в обычном смысле).

В работах [2, 4–6, 8] отмечено, что итерационные схемы можно трактовать как методы установления (при $t \to \infty$) для соответствующего нестационарного уравнения со стационарными (не зависящими от времени) граничными условиями. Однако имеется одна особенность [2]: в нестационарных задачах для обеспечения точности решения шаги по времени τ должны быть достаточно малы, в стационарных же задачах оптимальные итерационные параметры τ_0 выбираются из условия, при котором разностное решение выйдет на стационарное за наименьшее число шагов K и параметр τ_0 может принимать относительно большие значения.

Следуя [6], можно показать, что симметричный вариант локально-одномерной схемы расщепления для уравнения Пуассона в трехмерном случае имеет сходимость $O(N)$ при $h_m = h = 1/N$ (h — шаг разностной сетки по пространству, $m = 1, 2, 3$). Но, как справедливо отмечено в [4], аддитивные схемы обладают свойством “близости” к решаемому уравнению только при ограничении на итерационный параметр τ (например, $\tau \to 0$ при $n \to \infty$, n — номер итерации). В общем случае свойство “близости” итерационной разностной схемы к решаемому уравнению сформулировано в [8] как условие полной аппроксимации.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральных целевых программ “Университеты России — фундаментальные исследования”, “Интеграция” (проект “Академический университет”) и Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99–01–00352, № 99–01–00363.

Цель данной работы — показать, что итерационно-интерполяционный метод (ИИМ) [9] свободен от отмеченных выше недостатков, а также исследовать аппроксимацию, устойчивость и найти теоретическую оценку скорости сходимости для трехмерного уравнения Пуассона при постоянных коэффициентах переноса.

1. Алгоритм метода

Для простоты дальнейших выкладок логическую схему метода приведем с постоянными коэффициентами переноса внутри параллелепипеда R $\{x=(x_1,x_2,x_3),\ 0<x_m<d_m,\ m=1,2,3\}$, $c_4>0$:

$$\sum_{m=1}^{3} c_m\frac{\partial^2 T}{\partial x_m^2} - c_4 T(x) + f(x) = 0\ . \tag{1.1}$$

Вместо (1.1) рассмотрим нестационарное уравнение

$$c_4 T + \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{m=1}^{3} c_m \frac{\partial^2 T}{\partial x_m^2} + f(x)\ . \tag{1.2}$$

Для построении разностного аналога уравнения (1.2) введем неравномерную сетку $x_{1,i}$ $(i=0,1,2,\ldots,N_1)$, $x_{2,j}$ $(j=0,1,2,\ldots,N_2)$, $x_{3,k}$ $(k=0,1,2,\ldots,N_3)$. Введем верхние индексы n, $n+1/3$, $n+2/3$, $n+1$, соответствующие начальному и последующим этапам итераций.

Используя результаты работ [9, 10], введем обозначения:

$$a(t,x) = \dot T + c_4 T - c_2\partial^2 T/\partial x_2^2 - c_3\partial^2 T/\partial x_3^2\ , \tag{1.3}$$

$$b(t,x) = \dot T - c_3\partial^2 T/\partial x_3^2 + c_4 T\ , \tag{1.4}$$

$$h_{1,i-1} = x_{1,i} - x_{1,i-1}\ ,\quad h_{2,j-1} = x_{2,j} - x_{2,j-1}\ ,\ \ \hbar_{1,i} = 0.5(h_{1,i-1} + h_{1,i}),$$

$$h_{1,i} = x_{1,i+1} - x_{1,i}\ ,\ \ h_{3,k-1} = x_{3,k} - x_{3,k-1}\ ,$$

где точка над символом обозначает частную производную по времени.

Разностные операторы внутри области определения R из работы [10] имеют вид

$$A_1 a_i = [(h_1 a)_{i-1} + 4(\hbar_1 a)_i + h_{1,i}a_{i+1}]/6\hbar_{1,i}\ ,$$

$$\Lambda_1 T_i = c_1[(T_{i+1}-T_i)/h_{1,i} + (T_{i-1}-T_i)/h_{1,i-1}]/\hbar_{1,i},$$

$$i=1,\ldots,N_1-1\ ,\ \ 0<x_m<d_m\ ,\ \ m=2,3\ . \tag{1.5}$$

Разностные операторы внутри области определения R для нового подхода записываются следующим образом:

$$A_1 T = [h_{1,i-1}T_{i-1,j,k} + 4\hbar_{1,i}T_{i,j,k} + h_{1,i}T_{i+1,j,k}]/6\hbar_{1,i}\ ,$$

$$\Lambda_1 T = c_1[(T_{i+1,j,k}-T_{i,j,k})/h_{1,i} + (T_{i-1,j,k}-T_{i,j,k})/h_{1,i-1}]/\hbar_{1,i},$$

$$i,j,k=1,\ldots,N_m-1,\quad m=1,2,3. \tag{1.6}$$

Отметим, что операторы A_2T, A_3T, Λ_2T, Λ_3T в уравнениях (1.13)–(1.16), а также $\triangle T_2$, $\triangle T_3$ в приведенных в п. **2** уравнениях подробно выписаны в [9].

Следуя алгоритму из [10] и используя обозначения (1.3), (1.5), для уравнения (1.2) последовательно получим по направлению координаты x_1

$$a = c_1 \partial^2 T/\partial x_1^2 + f,$$

разностные схемы поочередного интегрирования по пространственным переменным на основе ИИМ имеют вид

$$A_1 a_i = \Lambda_1 T_i^{n+1/3} + A_1 f_i^n \ ,$$

$$i = 1, \ldots, N_1 - 1, \quad 0 < x_m < d_m, \quad m = 2, 3 \ ; \tag{1.7}$$

по направлению оси x_2

$$b_i = c_2 \partial^2 T_i/\partial x_2^2 + a_i \ , \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1,$$

разностные уравнения записываются так:

$$A_2 b_{i,j} = \Lambda_2 T_{i,j}^{n+2/3} + A_2 a_{i,j} \ ,$$

$$i = 1, \ldots, N_1 - 1 \ , \quad j = 1, \ldots, N_2 - 1, \quad 0 < x_3 < d_3; \tag{1.8}$$

окончательно по направлению координаты x_3

$$\dot{T}_{i,j} + c_4 T_{i,j} = c_3 \partial^2 T_{i,j}/\partial x_3^2 + b_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1 \ , \quad j = 1, \ldots, N_2 - 1$$

разностные схемы ИИМ принимают вид

$$A_3(\dot{T}_{i,j,k} + c_4 T_{i,j,k}) = \Lambda_3 T_{i,j,k}^{n+1} + A_3 b_{i,j,k} \ ,$$

$$i, j, k = 1, \ldots, N_m - 1 \ , \quad m = 1, 2, 3. \tag{1.9}$$

Отметим, что разностные уравнения вида, например (1.7), получаются непосредственно из логической схемы ИИМ [11]. Для определения явной зависимости разностного соотношения (1.7) от неизвестного T подставим в него значение a из (1.3) и получим

$$A_1(\dot{T}_i + c_4 T_i - c_2 \partial^2 T_i/\partial x_2^2 - c_2 \partial^3 T_i/\partial x_3^2) = \Lambda_1 T_i^{n+1/3} + A_1 f_i^n \ ,$$

$$i = 1, \ldots, N_1 - 1 \ , \quad 0 < x_m < d_m \ , \quad m = 2, 3. \tag{1.10}$$

Воспользовавшись обозначениями (1.6), имеем вместо (1.10) по координатному направлению x_1 дифференциально-разностную схему ($A_1 T = A_1 T_i$, $\Lambda_1 T = \Lambda_1 T_i$, так как x_2, x_3 в интервале $0 < x_m < d_m$, $m = 2, 3$ изменяются непрерывным образом в (1.5)):

$$A_1(\dot{T} + c_4 T^{n+1/3}) = \Lambda_1 T^{n+1/3} + \Lambda_2 T^n + \Lambda_3 T^n + A_1 f^n \ ,$$

$$i, j, k = 1, \ldots, N_m - 1 \ , \quad m = 1, 2, 3. \tag{1.11}$$

Из уравнений (1.7), умножая обе его части на A_1^{-1} слева, найдем a_i. Это можно сделать, так как матрица, соответствующая этому оператору, трехдиагональная $(1/6, \quad 4/6, \quad 1/6\ )$ при $h_m = h$, $m = 1, 2, 3$ и с диагональным преобладанием. Тогда, отмечая, что $A_1^{-1} A_1 = E$, получим

$$a_i = A_1^{-1} \Lambda_1 T_i^{n+1/3} + f_i^n \ . \tag{1.12}$$

В левую часть операторного уравнения (1.8) подставим значение b из (1.4), а в правую — значение a_i из (1.12), тогда она примет вид

$$A_2(c_4 T_{i,j} + \dot{T}_{i,j} - c_3 \partial^2 T_{i,j}/\partial x_3^2) = \Lambda_2 T_{i,j}^{n+2/3} + A_2(A_1^{-1}\Lambda_1 T_{i,j}^{n+1/3} + f_{i,j}^n) =$$
$$= \Lambda_2 T_{i,j}^{n+2/3} + (A_2 A_1^{-1})(\Lambda_1 T_{i,j}^{n+1/3}) + A_2 f_{i,j}^n\,,$$
$$i = 1,\, \ldots,\, N_1 - 1, \quad j = 1,\, \ldots,\, N_2 - 1, \quad 0 < x_3 < d_3. \tag{1.13}$$

Используя обозначения (1.6) и соотношение $A_2 A_1^{-1} = E$, аналогично (1.10), (1.11) из (1.13) получим

$$A_2(c_4 T^{n+2/3} + \dot{T}) = \Lambda_1 T^{n+1/3} + \Lambda_2 T^{n+2/3} + \Lambda_3 T^n + A_2 f^n,$$
$$i, j, k = 1,\, \ldots,\, N_m - 1, \quad m = 1, 2, 3. \tag{1.14}$$

Наконец, в правую часть уравнения (1.9) подставим значение $b_{i,j}$, полученное из разностного соотношения (1.8) и предварительно умноженное слева на A_2^{-1}. Тогда разностная схема (1.9) перепишется так:

$$A_3(c_4 T_{i,j,k} + \dot{T}_{i,j,k}) = \Lambda_3 T_{i,j,k}^{n+1} + A_3(A_2^{-1}\Lambda_2 T_{i,j,k}^{n+2/3} + A_1^{-1}\Lambda_1 T_{i,j,k}^{n+1/3} + f_{i,j,k}^n) =$$
$$= (A_3 A_2^{-1})(\Lambda_2 T_{i,j,k}^{n+2/3}) + (A_3 A_1^{-1})(\Lambda_1 T_{i,j,k}^{n+1/3}) + A_3 f_{i,j,k}^n. \tag{1.15}$$

Учитывая, что $A_3 A_2^{-1} = E$, $A_3 A_1^{-1} = E$, из операторного уравнения (1.15) окончательно следует уравнение

$$A_3(c_4 T^{n+1} + \dot{T}) = \Lambda_1 T^{n+1/3} + \Lambda_2 T^{n+2/3} + \Lambda_3 T^{n+1} + A_3 f^n,$$
$$i, j, k = 1,\, \ldots,\, N_m - 1, \quad m = 1, 2, 3. \tag{1.16}$$

Таким образом, для решения трехмерного эллиптического (1.1) или нестационарного (1.2) уравнений внутри области определения R получены разностные уравнения (1.11), (1.14), (1.16), аппроксимация и устойчивость которых будет исследована ниже.

Отметим, что в логической схеме ИИМ (1.7)–(1.16) неявно присутствует подход Дугласа для решения трехмерного уравнения теплопроводности [7, 8]. Поэтому полученные разностные схемы (1.11), (1.14), (1.16) имеют погрешность аппроксимации в обычном смысле. Так как в итоге получается схема стабилизирующей поправки [8], то двухслойная разностная схема по времени для отмеченных уравнений абсолютно устойчива для любых начальных данных.

2. Постановка задачи и метод построения разностного решения

Пусть требуется решить трехмерное уравнение в частных производных [12, 13]

$$\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(v_m \frac{\partial T}{\partial x_m}\right) + w \sum_{\substack{m=1\\k\neq m}}^{3} \frac{\partial^2 T}{\partial x_m \partial x_k} + \sum_{m=1}^{3} u_m \frac{\partial T}{\partial x_m} - c_4 T + f = 0 \tag{2.1}$$

в параллелепипеде R при $w = \mathrm{const}$ и граничных условиях первого рода

$$T|_{x_1=d_1} = p_1(d_1, x_2, x_3), \quad T|_{x_2=d_2} = p_2(x_1, d_2, x_3),$$

$$T|_{x_3=d_3} = p_3(x_1, x_2, d_3)\ , \tag{2.2}$$

$$T|_{x_1=0} = s_1(x_2, x_3), \quad T|_{x_2=0} = s_2(x_1, x_3),$$

$$T|_{x_3=0} = s_3(x_1, x_2). \tag{2.3}$$

Наряду с основной краевой задачей (2.1)–(2.3) рассмотрим вспомогательную нестационарную задачу

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(v_m \frac{\partial T}{\partial x_m}\right) + w \sum_{\substack{m=1 \\ k\neq m}}^{3} \frac{\partial^2 T}{\partial x_m \partial x_k} + \sum_{m=1}^{3} u_m \frac{\partial T}{\partial x_m} - c_4 T + f = 0 \tag{2.4}$$

при произвольном начальном условии $T|_{t=0} = p(x)$ и с теми же стационарными граничными значениями.

Уравнения типа (2.1) применяются в механике сплошных сред [13]. В общем случае при наличии смешанных производных имеем 27-точечный шаблон в пространстве, а при их отсутствии — 7-точечный крест.

Разностные операторы внутри области определения R записываются в виде

$$A_1 T = \tau^{-1}[h_{1,i-1}T_{i-1,j,k} + 4\hbar_{1,i}T_{i,j,k} + h_{1,i}T_{i+1,j,k}]/6\hbar_{1,i},$$

$$\Lambda_1 T = [(v_{1,i+1,j,k} + v_{1,i,j,k})(T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k})/h_{1,i} + (v_{1,i-1,j,k} + v_{1,i,j,k})\times$$
$$\times(T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k})/h_{1,i-1}]/2\hbar_{1,i},$$

$$\Lambda_{1,2} T = 2w[(T_{i+1,j+1,k} - T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j+1,k} + T_{i-1,j,k})/h_{2,j} +$$
$$+(T_{i+1,j,k} - T_{i+1,j-1,k} - T_{i-1,j,k} + T_{i-1,j-1,k})/h_{2,j-1}]/4\hbar_{1,i},$$

$$\Lambda_{1,3} T = 2w[(T_{i+1,j,k+1} - T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k+1} + T_{i-1,j,k})/h_{3,k} +$$
$$+(T_{i+1,j,k} - T_{i+1,j,k-1} - T_{i-1,j,k} + T_{i-1,j,k-1})/h_{3,k-1}]/4\hbar_{1,i},$$

$$\Lambda_{2,3} T = 2w[(T_{i,j+1,k+1} - T_{i,j+1,k} - T_{i,j-1,k+1} + T_{i,j-1,k})/h_{3,k} +$$
$$+(T_{i,j+1,k} - T_{i,j+1,k-1} - T_{i,j-1,k} + T_{i,j-1,k-1})/h_{3,k-1}]/4\hbar_{2,j},$$

$$\Lambda_{1-3} T = (\Lambda_{1,2} + \Lambda_{2,3} + \Lambda_{1,3})T,$$

$$\Delta_1 T = [(u_{1,i+1,j,k} + 2u_{1,i,j,k})(T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}) + (u_{1,i-1,j,k} + 2u_{1,i,j,k})\times$$
$$\times(T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k})]/6\hbar_{1,i}. \tag{2.5}$$

В случае переменных коэффициентов $v_m = v_m(x,t)$, $u_m = u_m(x,t)$ и $h_m \neq \mathrm{const}$ $(m = 1, 2, 3)$, используя операторные обозначения (2.5), получим следующую систему разностных уравнений внутри параллелепипеда R:

$$A_1(T^{n+1/3} - T^n) = (\Lambda_1 + \Delta_1)T^{n+1/3} + (\Lambda_2 + \Delta_2)T^n +$$
$$+(\Lambda_3 + \Delta_3)T^n + (\Lambda_{1,2} + \Lambda_{2,3} + \Lambda_{1,3})T^n + \tau A_1 f^n\ , \tag{2.6}$$

$$A_2(T^{n+2/3} - T^n) = (\Lambda_1 + \Delta_1)T^{n+1/3} + (\Lambda_2 + \Delta_2)T^{n+2/3} +$$
$$+(\Lambda_3 + \Delta_3)T^n + \Lambda_{1-3}T^n + \tau A_2 f^n\ , \tag{2.7}$$

$$A_3(T^{n+1}-T^n)=(\Lambda_1+\Delta_1)T^{n+1/3}+(\Lambda_2+\Delta_2)T^{n+2/3}+$$
$$+(\Lambda_3+\Delta_3)T^{n+1}+\Lambda_{1-3}T^n+\tau A_3 f^n\ ,$$
$$i,j,k=1,\ \ldots,\ N_m-1,\quad m=1,2,3. \tag{2.8}$$

Практически при исследовании аппроксимации разностных схем (2.6)–(2.8) и программировании алгоритма расчета удобно пользоваться вместо двух последних уравнений (2.7), (2.8) более простыми разностными уравнениями [8]. Вычтем из второго уравнения первое, а из третьего второе, тогда вместо двух последних уравнений системы (2.6)–(2.8) получим

$$A_2T^{n+2/3}-A_1T^{n+1/3}=(\Lambda_2+\Delta_2)(T^{n+2/3}-T^n)+$$
$$+A_2(T+\tau f)^n-A_1(T+\tau f)^n, \tag{2.9}$$
$$A_3T^{n+1}-A_2T^{n+2/3}=(\Lambda_3+\Delta_3)(T^{n+1}-T^n)+A_3(T+\tau f)^n-$$
$$-A_2(T+\tau f)^n,\quad i,j,k=1,\ \ldots,\ N_m-1,\quad m=1,2,3. \tag{2.10}$$

На гранях параллелепипеда $x_m=0$, $x_m=d_m$ $(m=1,2,3)$ имеем

$$T^{n+1}_{N_1,j,k}=p^{n+1}_{1,j,k}|_{x_1=d_1},\quad j=0,\ \ldots,\ N_2,\quad k=0,\ \ldots,\ N_3,$$
$$T^{n+1}_{0,j,k}=s^{n+1}_{1,j,k},\quad j=0,\ \ldots,\ N_2,\quad k=0,\ \ldots,\ N_3. \tag{2.11}$$

На остальных гранях формулы вида (2.11) получаются одна из другой круговой заменой индексов.

3. Об экономичности метода

Представляют интерес оценка арифметических действий для нахождения численного решения и аппроксимация (абсолютная устойчивость по начальным данным доказана в [9]). Внутри области R получается $S_1=\prod_{m=1}^{3}(N_m-1)$ разностных уравнений (2.6)–(2.8) или (2.6), (2.9), (2.10) для определения S_1 неизвестных T.

На гранях $x_m=0$, $x_m=d_m$ $(m=1,2,3)$ имеем также $S_2=2(N_1N_2+N_1N_3+N_2N_3)$ конечных алгебраических выражений (2.11) для определения S_2 заданных функций из (2.2), (2.3).

С учетом абсолютной устойчивости из [9] расчет по однородным разностным схемам (2.6)–(2.8) экономичен, так как для получения численного решения в узлах области определения понадобится $O(S_1)$ арифметических действий, пропорциональное числу узлов R.

Пусть существуют ограниченные вплоть до четвертого порядка производные по пространству и второго порядка по времени. Не умаляя общности, найдем погрешность аппроксимации разностных схем (1.11), (1.14), (1.16) для уравнения (1.2) при $c_4=f=0$ и $h_m=\mathrm{const}$ $(m=1,2,3)$, тогда имеем

$$\tau^{-1}A_1(T^{n+1/3}-T^n)=\Lambda_1T^{n+1/3}+\Lambda_2T^n+\Lambda_3T^n, \tag{3.1}$$

$$\tau^{-1}(A_2T^{n+2/3}-A_1T^{n+1/3})=\Lambda_2(T^{n+2/3}-T^n)+\tau^{-1}(A_2T^n-A_1T^n), \tag{3.2}$$
$$\tau^{-1}(A_3T^{n+1}-A_2T^{n+2/3})=\Lambda_3(T^{n+1}-T^n)+\tau^{-1}(A_3T^n-A_2T^n), \tag{3.3}$$
$$i,j,k=1,\ \ldots,\ N_m-1,\quad m=1,2,3.$$

Из выражений (3.2), (3.3) последовательно находим

$$\tau^{-1}A_2T^{n+2/3} = \tau^{-1}A_3T^{n+1} - \Lambda_3(T^{n+1} - T^n) - \tau^{-1}(A_3T^n - A_2T^n), \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}\tau^{-1}A_1T^{n+1/3} = \tau^{-1}A_2T^{n+2/3} - \Lambda_2(T^{n+2/3} - T^n) - \tau^{-1}(A_2T^n - A_1T^n) = \\ = \tau^{-1}A_3T^{n+1} - \Lambda_3(T^{n+1} - T^n) - \tau^{-1}(A_3T^n - A_2T^n) - \Lambda_2[A_2^{-1}A_3T^{n+1} - \\ -\tau A_2^{-1}\Lambda_3(T^{n+1} - T^n) - A_2^{-1}(A_3T^n - A_2T^n) - T^n] - \tau^{-1}(A_2T^n - A_1T^n).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Умножим слева равенства (3.4), (3.5) на A_2^{-1}, A_1^{-1} соответственно, тогда они перепишутся так:

$$\tau^{-1}T^{n+2/3} = \tau^{-1}A_2^{-1}A_3T^{n+1} - A_2^{-1}\Lambda_3(T^{n+1} - T^n) - \tau^{-1}A_2^{-1}(A_3T^n - A_2T^n), \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}\tau^{-1}T^{n+1/3} = A_1^{-1}[\tau^{-1}A_3T^{n+1} - \Lambda_3(T^{n+1} - T^n) - \tau^{-1}(A_3T^n - A_2T^n)] - \\ -A_1^{-1}\Lambda_2[A_2^{-1}A_3T^{n+1} - \tau A_2^{-1}\Lambda_3(T^{n+1} - T^n) - A_2^{-1}(A_3T^n - A_2T^n) - T^n] - \\ -\tau^{-1}A_1^{-1}(A_2T^n - A_1T^n).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Найдем разностную схему в целых шагах и покажем, что разностные схемы ИИМ удовлетворяют условию полной аппроксимации [8]. Для этого сложим почленно уравнения (3.1)–(3.3) и получим

$$\tau^{-1}(A_3T^{n+1} - A_1T^n) = \Lambda_1T^{n+1/3} + \Lambda_2T^{n+2/3} + \Lambda_3T^{n+1} + \tau^{-1}(A_3T^n - A_1T^n). \tag{3.8}$$

Для нахождения погрешности аппроксимации разностной схемы 1 обобщенного ИИМ (3.8) исключим из нее величины $T^{n+1/3}$, $T^{n+2/3}$ при помощи формул (3.6), (3.7), тогда она перепишется так:

$$\begin{gathered}\tau^{-1}A_3(T^{n+1} - T^n) = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)T^{n+1} - \tau\{\Lambda_1A_1^{-1}\Lambda_3(T^{n+1} - T^n) + \\ +\Lambda_1A_1^{-1}\Lambda_2[T^{n+1} - T^n - \tau A_2^{-1}\Lambda_3(T^{n+1} - T^n)] + \Lambda_2A_2^{-1}\Lambda_3(T^{n+1} - T^n)\}.\end{gathered}$$

В результате для уравнения (1.2) при $f = 0$ и $c_4 = 0$ имеем окончательно

$$\partial T_{i,j,k}/\partial t + 0.5\tau\ddot{T}_{i,j,k} = \sum_{m=1}^{3} c_m\partial^2T_{i,j,k}/\partial x_m^2 + O\left(\tau + \sum_{m=1}^{3} h_m^2\right).$$

Таким образом, погрешность аппроксимации разностной схемы (3.8) на решениях уравнения (1.2) имеет первый порядок по времени и второй — по пространству.

Для уравнения (2.4) локальная погрешность аппроксимации разностной схемы (2.6)–(2.8) есть $O[\sum_{\alpha=1}^{3}(h_{\alpha,\nu} - h_{\alpha,\nu}) + \tau]$ ($\nu = i$ при $\alpha = 1$, $\nu = j$ при $\alpha = 2$, $\nu = k$ при $\alpha = 3$), для $h_m = c_m$ ($c_m = \text{const}$, $m = 1,2,3$) — $O(\tau + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$, а при $w = u_m = 0$ и $v_m = c_m$ — $O[\tau + \sum_{m=1}^{3}(h_{m,q}^2 - h_{m,q}h_{m,q-1} + h_{m,q-1}^2)]$ для $h_{1,i} - h_{1,i-1} = h_{2,j} - h_{2,j-1} = h_{3,k} - h_{3,k-1}$. Граничные условия типа (2.11) точно аппроксимируют соответствующие граничные условия из (2.2), (2.3), так как они заданы как функции пространственных координат x_m ($m = 1,2,3$) явно на целом слое.

В работе [9] в приближении замороженных коэффициентов [6, 8] найдено условие безусловной устойчивости явно-неявных разностных уравнений (2.6)–(2.8) или (2.6), (2.9), (2.10) по начальным данным. Для $\eta(\tau, h_m, q_m)$ — коэффициента возрастания гармоники $\exp[I(q_1x_{1,i} + q_2x_{2,j} + q_3x_{3,k})]$, $I = \sqrt{-1}$, $q_m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, m = 1,2,3$ — спектральное условие Неймана при $w = c_4 = 0$ имеет вид $\eta = (A - IB)/(C - ID)$, $|\eta| = [(A^2+B^2)/(C^2+D^2)]^{0.5}$, где

$$A = F + s; \quad C = F + a; \quad D = E + b; \quad B = E + g; \quad I^2 = -1;$$

$$F = r_3r_2r_1 + r_1(a_2a_3 - b_2b_3) + r_2(a_1a_3 - b_1b_3) + r_3(a_2a_1 -$$

$$-b_2b_1) + a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 - a_3b_2b_1;$$

$$s = a_1r_2(r_3 - r_1) + r_1a_2(r_3 - r_2); \quad a = r_3r_2a_1 + r_3a_2r_1 + a_3r_2r_1;$$

$$E = r_1(b_2a_3 + a_2b_3) + r_2(b_1a_3 + a_1b_3) + r_3(b_2a_1 + a_2b_1) +$$

$$+a_2a_3b_1 + a_1a_3b_2 + a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3;$$

$$g = b_1r_2(r_3 - r_1) + r_1b_2(r_3 - r_2); \quad b = r_3r_2b_1 + r_3b_2r_1 + b_3r_2r_1;$$

$$a_m = 4\tau v_m h_m^{-2} \sin^2 q_m h_m/2; \quad b_m = \tau u_m h_m^{-1} \sin q_m h_m;$$

$$r_m = (1 + 2\cos^2 q_m h_m/2)/3, \quad m = 1, 2, 3.$$

Как было отмечено во введении, при получении стационарного решения методом установления представляет интерес нахождение оптимального шага по времени, при котором численное решение выйдет на стационарное за минимальное число итераций K. Следуя известному алгоритму из монографии [6, с. 405–407], получим оценку K в кубе Q: $(0 < x_m < 1,\ m = 1, 2, 3)$ для (2.6), (2.9), (2.10) при $v_m = h_m = \mathrm{const}$, $w = c_4 = 0$, $m = 1, 2, 3$.

Собственные функции разностного оператора из (2.6), (2.9), (2.10) в кубе Q на равномерной сетке равны

$$w_{q_1q_2q_3}(x) = \prod_{m=1}^{3} \sin(\pi q_m x_m), \quad 1 \le q_m \le N_m - 1, \quad m = 1, 2, 3. \tag{3.9}$$

Подставим (3.9) в разностную схему (2.6), (2.9), (2.10) и, полагая $w_{q_1q_2q_3}^{(n+1)}(x) = \eta_q w_{q_1q_2q_3}^{(n)}(x)$, получим множитель роста гармоник $\eta_q = \eta_q\ (\tau,\ h_m,\ q_m)$ аналогично [9], но для простоты дальнейших выкладок будем считать, что $v_m = v$, $u_m = u$, $h_m = h$, $q_m = q$, $m = 1, 2, 3$. Так как нас интересуют асимптотические оценки, то, считая $N_m = N$ достаточно большими, можно положить $\Delta_m T \ll \Lambda_m T$ $(h^{-2} \gg h^{-1}$, $v \sim u)$ в (2.6), (2.9), (2.10). Тогда

$$\eta_q = (r^3 + 3ra^2 + a^3)(r^3 + 3r^2a + 3ra^2 + a^3)^{-1}\ , \tag{3.10}$$

$$a = 4\tau v h^{-2} \sin^2(\pi q h/2), \quad r = [1 + 2\cos^2(\pi q h/2)]/3, \quad m = 1, 2, 3.$$

В [6] показано, какие гармоники затухают наиболее медленно и тем самым больше всего препятствуют выходу на стационарный режим. Значение η_q меняется в пределах $0 < \eta_q < 1$. Сначала η_q монотонно убывает при увеличении номера q, а затем возрастает при $N \to \infty$. При этом, как следует из дальнейших выкладок, наибольшим значение η_q может быть либо при $q = 1$, либо при $q = N - 1$. Сделаем оценки для a и r в (3.10):

$$\text{при} \quad q = 1 \ \ \sin(\pi h/2) = \sin(\pi/2N) \approx \pi/2N, \quad a_1 = \tau v \pi^2, \quad r = 1;$$

$$\text{при} \quad q = N - 1 \ \ \sin[\pi(N-1)h/2] = \sin[\pi(N-1)/2N] \approx 1,$$

$$a_{N-1} = 4\tau v N^2, \quad r = 1/3.$$

В результате экстремальные множители можно представить в виде

$$\eta_1 = (1 + 3a_1^2)(1 + 3a_1^2 + 3a_1)^{-1} \approx (1 + 3a_1^2)(1 - 3a_1) \approx 1 - 3a_1. \tag{3.11}$$

$$\eta_{N-1} = (1/27 + a_{N-1}^2 + a_{N-1}^3)(1/27 + a_{N-1}^2 + a_{N-1}^3 + a_{N-1}/3)^{-1} =$$
$$= (1 + 1/a_{N-1})(1 + 1/a_{N-1} + 1/3a_{N-1}^2)^{-1},$$
$$\eta_{N-1} \approx (1 + 1/a_{N-1})[1 - (1/a_{N-1} + 1/3a_{N-1}^2)] \approx 1 - 4/(3a_{N-1}^2). \tag{3.12}$$

(считается, что $(\tau v)^2 \ll (\tau v)$ при $\tau v < 1$).

Тогда τ_0 выбирается так, чтобы $\eta_1\ (\tau_0) = \eta_{N-1}\ (\tau_0)$. Из (3.11), (3.12) получим τ_0: $3a_1 = 4/(3a_{N-1}^2)$ или

$$\tau_0 = [v(6\pi)^{2/3}]^{-1} N^{-4/3} = v^{-1} N^{-4/3}/7.08. \tag{3.13}$$

Следовательно, минимальное необходимое число итераций, при котором разностное решение выйдет на стационарное с заданной точностью ε [6], есть

$$[\exp(-4/(3a_{N-1}^2)]^K = \varepsilon$$

или

$$K(\tau_0) = 3N^{4/3} \ln(1/\varepsilon)/4\pi. \tag{3.14}$$

4. Результаты численных расчетов

Оценку скорости сходимости (3.14) проведем на решении модельных (тестовых) задач. Сначала найдем численное решение эллиптического уравнения общего вида

$$c_1 \sum_{m=1}^{3} \partial T/\partial x_m + c_2 \sum_{m=1}^{3} \partial^2 T/\partial x_m^2 + c_3 \sum_{m=1,k\neq m}^{3} \partial^2 T/\partial x_m \partial x_k - f = 0, \tag{4.1}$$

с постоянными коэффициентами переноса и граничными условиями первого рода, у которых известно точное аналитическое решение, например, $T = 1 + \sum_{m=1}^{3} x_m^z$:

$$f = c_1 z \sum_{m=1}^{3} x_m^{z-1} + c_2 z(z-1) \sum_{m=1}^{3} x_m^{z-2},$$

$$T|_{x_1=0} = (1 + x_3^z + x_2^z), \quad T|_{x_2=0} = (1 + x_1^z + x_3^z), \quad T|_{x_3=0} = (1 + x_1^z + x_2^z),$$
$$T|_{x_1=1} = (2 + x_3^z + x_2^z), \quad T|_{x_2=1} = (2 + x_1^z + x_3^z), \quad T|_{x_3=1} = (2 + x_1^z + x_2^z). \tag{4.2}$$

Для решения задачи (4.1), (4.2) воспользуемся разностными уравнениями (2.6), (2.9), (2.10). Были взяты следующие значения входных данных для опорного варианта $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $z = 2$ и $T_{\text{H}} = 1$. Программа составлена на языке Фортран-77 (Power Station-4), расчет проводился на ПЭВМ Pentium-2 (133 МГц) с двойной точностью. Число итераций $K(\tau_0)$ отслеживалось по относительному изменению нормы вектора погрешности

$$||y^n|| = \max|(T - T^n)/T|,$$

где T — заданное точное решение дифференциальной задачи (4.1), (4.2); T^n — численное решение. В табл. 1 приведены результаты расчетов $K(\tau_0)$ с $||y^n|| \le \varepsilon$, $\varepsilon = 0,1$ для двух вариантов: $T_{\text{H}} = 1$, $T_{\text{H}} = 0$ при $c_2 = 1$ и различных c_1, c_3.

Видно, что выбор начального приближения может влиять на скорость сходимости итерационного процесса. Отметим, что время расчета варианта при $N = 81$ составило 30 минут. Однако расчет при $c_1 = 1$, $c_3 = 2$ и прочих одинаковых входных данных общего уравнения (4.1) по количеству итераций изменяется незначительно. При увеличении в (4.1) первого слагаемого ($c_1 = 500$) для $N = 81$, $T_{\text{Н}} = 1$, $c_3 = 2$ имеем $K = 32$, что также не ухудшает предложенный алгоритм.

Т а б л и ц а 1

$T_{\text{Н}}$	$c_1 = c_3 = 0$						$c_1 = 1$		$c_3 = 2$
	0			1			1		1
N	21	41	81	21	41	81	21	41	81
K	24	55	133	17	40	96	18	43	104

Для проверки эффективности метода и оценки теоретической формулы (3.14) рассматривалась разностная задача Дирихле в кубе для уравнения Пуассона с постоянными и переменными коэффициентами:

$$\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{x_m}\left(v_m \frac{\partial T}{\partial x_m}\right) = f, \quad x_m \in (0,1), \tag{4.3}$$

$$T|_{\Gamma} = 0, \tag{4.4}$$

$$v_1(x) = 1 + C\sum_{m=1}^{3}(x_m - 0.5)^2, \quad C = \text{const},$$

$$v_2(x) = 1 + C[0.5 - (x_1 - 0.5)^2 - (x_2 - 0.5)^2 + (x_3 - 0.5)^2],$$

$$v_3(x) = 1 + C[0.5 + (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 - (x_3 - 0.5)^2].$$

Источник f в правой части уравнения (4.3), как и в (4.1), подбирался, чтобы пробная функция $T = \prod_{m=1}^{3} x_m(1 - x_m)$ была точным решением. Отметим, что в двумерном случае постановка задачи (4.3), (4.4) совпадает с тестовой задачей, приведенной в [1].

В табл. 2 K отвечает численному решению краевой задачи (4.3), (4.4) при $||y^n|| \le \varepsilon$, а K_1, K_2 соответствуют теоретической оценке скорости сходимости (3.14) для $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.01$ и $C = 0$. Видно, что $\delta_i = (K - K_i)/K_i$ ($i = 1, 2$) улучшается с ростом N и ε. Это говорит о сходимости алгоритма и правильности полученных формул (3.13), (3.14).

Т а б л и ц а 2

	$\varepsilon_i = 0.1$				$\varepsilon_i = 0.01$		
	$N = 21$	$N = 41$	$N = 81$		$N = 21$	$N = 41$	$N = 81$
K	36	83	203	K	73	165	399
K_1	32	78	193	k_2	64	156	386
δ_1	0.13	0.064	0.051	δ_2	0.14	0.061	0.035

В табл. 3 приведено численное решение этой задачи при $v_m \ne \text{const}$, $\varepsilon = 0.1$ для $C = 2$, $C = 62$ и прочих одинаковых входных данных; параметр τ_0 из (3.13) находился при $v = (1 + 0.5C)/2$. Таким образом, и при переменных коэффициентах переноса сходимость итерационного процесса при помощи ИИМ не ухудшается.

Т а б л и ц а 3

	$C = 2$			$C = 62$		
N	21	41	81	21	41	81
K	22	51	124	29	67	161

Выводы

1. Для решения трехмерного эллиптического уравнения общего вида на основе ИИМ получены устойчивые разностные схемы с погрешностью аппроксимации.

2. На тестовых примерах показана сходимость итераций, и при постоянных коэффициентах переноса для уравнения Пуассона найдена теоретическая оценка скорости сходимости итерационного метода.

Список литературы

[1] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

[3] Ильин В. П. Разностные методы решения эллиптических уравнений. Новосибирск: Наука, 1970.

[4] Коновалов А. Н. Численное решение задач теории упругости. Новосибирск: Наука, 1968.

[5] Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

[6] Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

[7] Douglas J. Alternating direction methods for three space variables // Numerische Math. 1962. Vol. 4, No. 6. P. 41–63.

[8] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

[9] Гришин А. М, Якимов А. С. Обобщение итерационно-интерполяционного метода для решения трехмерного параболического уравнения общего вида // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 2. С. 26–41.

[10] Якимов А. С. Об одном методе расщепления // Числ. методы механики сплошной среды. 1985. Т. 16, № 2. С. 144–161.

[11] Гришин А. М., Берцун В. Н., Зинченко В. И. Итерационно-интерполяционный метод и его приложения. Томск: Изд-во ТГУ, 1981.

[12] Ладыженская О. А, Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

[13] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 23 ноября 1999 г.
в переработанном виде — 11 ноября 2000 г.