ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОДАЛГЕБР ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФФУЗИИ*

И. И. Рыжков
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск, Россия
e-mail: `ranger@ktk.ru`

A model for convective motion of binary mixture with thermal diffusion effect is considered. The Oberbeck — Boussinesq approximation describing convection in natural earth's conditions is used. The Lie group of transformations allowed by the equations of motion and the corresponding Lie algebra of generators $L = L_5 \oplus L_\infty$ are found. The optimal system of sub-algebras for the finite Lie algebra L_5 and the optimal system of one-dimensional sub-algebras for the Lie algebra L are constructed.

Введение

Известно, что в неравномерно нагретой жидкости может возникнуть конвективное движение. Если жидкость представляет собой смесь двух веществ, то движение может вызываться как градиентом температуры, так и градиентом концентрации. Это явление называется термодиффузией [1]. Существует множество примеров практического применения термодиффузии: рост кристаллов, разделение смесей, течения в океанах и т.д.

В работе рассматривается модель конвективного движения бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии. Используется приближение Обербека — Буссинеска, предназначенное для описания конвективных течений в естественных земных условиях. Изучены групповые свойства уравнений модели: найдены допускаемая группа Ли преобразований и соответствующая алгебра Ли операторов L. Показано, что алгебра L представима в виде прямой суммы $L = L_5 \oplus L_\infty$, где L_5 — конечномерная подалгебра, а L_∞ — бесконечномерный идеал. Построены оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_5 и оптимальная система одномерных подалгебр алгебры Ли L.

1. Групповые свойства уравнений термодиффузии

В приближении Обербека — Буссинеска предполагается, что плотность смеси линейно зависит от температуры и концентрации легкой компоненты:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант НШ 902.2003.1).

Здесь ρ_0 — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации, а T и C — отклонения от средних значений, которые предполагаются малыми; β_1 — коэффициент теплового расширения смеси, а β_2 — концентрационный коэффициент плотности ($\beta_2 > 0$, так как C — концентрация легкой компоненты). Конвективное движение смеси описывается системой уравнений [2]:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \mathbf{g}(\beta_1 T + \beta_2 C),\\
&T_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \chi\Delta T,\\
&C_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C = d\Delta C + \alpha d\Delta T,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, u^3)$ — вектор скорости; p — превышение давления над гидростатическим; ν, χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности смеси; d — коэффициент диффузии; α — параметр термодиффузии. В первом уравнении $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, где g — ускорение силы тяжести (направление оси совпадает с направлением силы тяжести). Все характеристики среды предполагаются постоянными, соответствующими средним значениям температуры и концентрации.

В дальнейшем будем считать, что постоянные α, β_1, β_2 в нуль не обращаются (таким образом, соответствующие члены присутствуют в уравнениях). В этом случае система (1) допускает бесконечномерную группу Ли преобразований. Соответствующая ей алгебра Ли L представляется в виде прямой суммы $L = L_5 \oplus L_\infty$. Конечномерная алгебра L_5 образована операторами

$$\begin{gathered}
X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = -\rho_0\beta_1\, g\, x^3\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial T},\ X_3 = -\rho_0\beta_2\, g\, x^3\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial C},\\
X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}(x^i\frac{\partial}{\partial x^i} - u^i\frac{\partial}{\partial u^i}) - 2p\frac{\partial}{\partial p} - 3T\frac{\partial}{\partial T} - 3C\frac{\partial}{\partial C},\\
X_5 = x^1\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + u^1\frac{\partial}{\partial u^2} - u^2\frac{\partial}{\partial u^1},
\end{gathered} \tag{2}$$

а бесконечномерный идеал L_∞ имеет базис

$$\begin{gathered}
H_i(f^i(t)) = f^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i} + f^i_t(t)\frac{\partial}{\partial u^i} - \rho_0 x^i f^i_{tt}(t)\frac{\partial}{\partial p},\ i = 1, 2, 3,\\
H_0(f^0(t)) = f^0(t)\frac{\partial}{\partial p},
\end{gathered} \tag{3}$$

где $f^i(t), f^0(t)$ — произвольные гладкие функции. Если входящие в систему постоянные связаны соотношением $\alpha = \beta_1(d-\chi)/\beta_2 d$, то базис (2), (3) дополняется оператором

$$R = \beta_2 T\frac{\partial}{\partial T} - \beta_1 T\frac{\partial}{\partial C}.$$

В дальнейшем предполагается, что $\alpha \neq \beta_1(d-\chi)/\beta_2 d$, $d \neq \chi$, и оператор R не допускается. Система (1) также обладает дискретными симметриями

$$d_1:\ \widetilde{x^1} = -x^1,\ \widetilde{u^1} = -u^1;\ d_2:\ \widetilde{x^2} = -x^2,\ \widetilde{u^2} = -u^2;$$

$$d_3: \ \widetilde{x^3} = -x^3, \ \widetilde{u^3} = -u^3, \ \widetilde{T} = -T, \ \widetilde{C} = -C.$$

Заметим, что последнее преобразование не имеет физического смысла.

Для выделения существенно различных (относительно действия допускаемой группы преобразований) инвариантных решений системы (1) требуется построить оптимальную систему подалгебр ΘL алгебры Ли L. В настоящей работе проводится построение оптимальной системы подалгебр ΘL_5 для конечномерной алгебры Ли L_5, а также оптимальной системы одномерных подалгебр $\Theta_1 L$ алгебры Ли L. Используемые при этом алгоритмы описаны в работах [3–5].

Введем следующие обозначения: $\boldsymbol{f}(t) = (f^1(t), f^2(t), f^3(t))$, $\boldsymbol{g}(t) = (g^1(t), g^2(t), g^3(t))$, $f^0 = f^0(t)$, $g^0 = g^0(t)$ — произвольные гладкие функции, $H(\boldsymbol{f}) = H_1(f^1) + H_2(f^2) + H_3(f^3)$ — оператор алгебры L_∞. В этих обозначениях вычисляются коммутаторы базисных операторов алгебры Ли L, которые представлены в табл. 1.

Для построения оптимальной системы ΘL необходимо найти группу внутренних автоморфизмов $\mathrm{Aut}L$ алгебры L. Действие $\mathrm{Aut}L$ на множестве всех подалгебр алгебры L разбивает это множество на классы подобных подалгебр. Совокупность представителей этих классов (по одному из каждого класса) образует оптимальную систему подалгебр ΘL.

Образ $\widetilde{X}$ базисного оператора X под действием внутреннего автоморфизма, соответствующего базисному оператору Y, ищется как решение задачи

$$\frac{d\widetilde{X}}{da} = [\widetilde{X}, Y], \ \widetilde{X}(0) = 0, \tag{4}$$

или используется явная формула

$$\widetilde{X} = A_Y(a) < X >= X + \frac{a}{1!}[X, Y] + \frac{a^2}{2!}[[X, Y], Y] + \ldots \tag{5}$$

Группу $\mathrm{Aut}L$ образуют автоморфизмы $A_i(a_i)$, $i = 1, \ldots, 5$, $A^H(\boldsymbol{g})$, $A_0^H(g^0)$, соответствующие базисным операторам X_i, $i = 1, \ldots, 5$, $H(\boldsymbol{f})$, $H_0(f^0)$. Здесь a_i, $\boldsymbol{g}(t)$ и $g^0(t)$ — параметры.

Рассмотрим оператор общего вида

$$X = \sum_{i=1}^{5} k_i X_i + H(\boldsymbol{f}) + H_0(f^0),$$

где $(k_1, \ldots, k_5, \boldsymbol{f}(t), f^0(t))$ — координаты оператора $X \in L$ в базисе (2), (3). Группа внутренних автоморфизмов преобразует координаты оператора X по формуле

$$\mathrm{Aut}L: \ (k_1, \ldots, k_5, \boldsymbol{f}(t), f^0(t)) \longrightarrow (\widetilde{k}_1, \ldots, \widetilde{k}_5, \widetilde{\boldsymbol{f}}(t), \widetilde{f}^0(t)).$$

Действие группы $\mathrm{Aut}L$ приведено в табл. 2, при этом используются следующие обозначения:

$$R(a_5) = \begin{pmatrix} \cos a_5 & -\sin a_5 & 0 \\ \sin a_5 & \cos a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \begin{pmatrix} (-1)^{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\delta_3} \end{pmatrix},$$

$$h^0(t) = \rho_0 \Big[\frac{k_1}{2}(\boldsymbol{g}_{ttt}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}_t\boldsymbol{g}_{tt}) + (k_2\beta_1 + k_3\beta_2)\, g\, g^3 + k_4(2\boldsymbol{g}_{tt}\boldsymbol{g} + t\boldsymbol{g}_{ttt}\boldsymbol{g} - t\boldsymbol{g}_{tt}\boldsymbol{g}_t) + \\ + k_5(g^1 g^2_{tt} - g^1_{tt} g^2) + \boldsymbol{f}_{tt}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}_{tt} \Big], \tag{6}$$

$$\boldsymbol{h}(t) = k_1\boldsymbol{g}_t + k_4(2t\boldsymbol{g}_t - \boldsymbol{g}) + k_5(g^2, -g^1, 0), \ p^0(t) = k_1 g^0_t + k_4(2t g^0_t + 2g^0).$$

Таблица 1

Коммутаторы операторов алгебры Ли L

$[\downarrow,\rightarrow]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$H(\boldsymbol{g})$	$H_0(g^0)$
X_1	0	0	0	$2X_1$	0	$H(\boldsymbol{g}_t)$	$H_0(g^0_t)$
X_2	0	0	0	$-3X_2$	0	$H_0(\rho_0\beta_1\, g\, g^3)$	0
X_3	0	0	0	$-3X_3$	0	$H_0(\rho_0\beta_2\, g\, g^3)$	0
X_4	$-2X_1$	$3X_2$	$3X_3$	0	0	$H(2t\boldsymbol{g}_t - \boldsymbol{g})$	$H_0(2tg^0_t + 2g^0)$
X_5	0	0	0	0	0	$H(g^2, -g^1, 0)$	0
$H(\boldsymbol{f})$	$H(-\boldsymbol{f}_t)$	$H_0(-\rho_0\beta_1\, g\, f^3)$	$H_0(-\rho_0\beta_2\, g\, f^3)$	$H(-2t\boldsymbol{f}_t + \boldsymbol{f})$	$H(-f^2, f^1, 0)$	$H_0(\rho_0\boldsymbol{f}_{tt}\boldsymbol{g} - \rho_0\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}_{tt})$	0
$H_0(f^0)$	$H_0(-f^0_t)$	0	0	$H_0(-2t\boldsymbol{g}^0_t - 2g^0)$	0	0	0

Таблица 2

Действие внутренних автоморфизмов алгебры Ли L

	$\widetilde{k}_1$	$\widetilde{k}_2$	$\widetilde{k}_3$	$\widetilde{k}_4$	$\widetilde{k}_5$	$\widetilde{\boldsymbol{f}}(t)$	$\widetilde{f^0}(t)$
$A_1(a_1)$	$k_1 - 2a_1k_4$	k_2	k_3	k_4	k_5	$\boldsymbol{f}(t-a_1)$	$f^0(t-a_1)$
$A_2(a_2)$	k_1	$k_2 + 3a_2k_4$	k_3	k_4	k_5	$\boldsymbol{f}(t)$	$f^0(t) - a_2\rho_0\beta_1\, g\, f^3(t)$
$A_3(a_3)$	k_1	k_2	$k_3 + 3a_3k_4$	k_4	k_5	$\boldsymbol{f}(t)$	$f^0(t) - a_3\rho_0\beta_2\, g\, f^3(t)$
$A_4(a_4)$	$e^{2a_4}k_1$	$e^{-3a_4}k_2$	$e^{-3a_4}k_3$	k_4	k_5	$e^{a_4}\boldsymbol{f}(te^{-2a_4})$	$e^{-2a_4}f^0(te^{-2a_4})$
$A_5(a_5)$	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	$R(a_5)\boldsymbol{f}(t)$	$f^0(t)$
$A^H(\boldsymbol{g})$	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	$\boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{h}(t)$	$f^0(t) + h^0(t)$
$A^H_0(g^0)$	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	$\boldsymbol{f}(t)$	$f^0(t) + p^0(t)$
$A^d_1(\delta_1)$	k_1	k_2	k_3	k_4	$(-1)^{\delta_1}k_5$		$f^0(t)$
$A^d_2(\delta_2)$	k_1	k_2	k_3	k_4	$(-1)^{\delta_2}k_5$	$D(\delta_1,\delta_2,\delta_3)\boldsymbol{f}(t)$	$f^0(t)$
$A^d_3(\delta_3)$	k_1	$(-1)^{\delta_3}k_2$	$(-1)^{\delta_3}k_3$	k_4	k_5		$f^0(t)$

В таблице также указано действие дискретных автоморфизмов $A_i^d(\delta_i)$, порождаемых дискретными симметриями d_i, $i = 1, 2, 3$. Параметры δ_i принимают значения $\{0, 1\}$, при этом $A_i^d(0)$ соответствует тождественному преобразованию.

Замечание. Для определения действия автоморфизмов $A_1(a_1)$ и $A_4(a_4)$ на операторы $H(\boldsymbol{f})$ и $H_0(f^0)$ строилось решение задачи (**??**). Во всех остальных случаях использовалась формула (**??**).

2. Оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_5

Рассмотрим классификацию подалгебр алгебры Ли L_5 относительно группы внутренних автоморфизмов $\mathrm{Aut}L_5$ с базисом A_i, $i = 1, \ldots, 5$ и дискретных автоморфизмов A_j^d, $j = 1, 2, 3$. Алгебра L_5 представима в виде прямой суммы $L_5 = L_4 \oplus \{X_5\}$ алгебры $L_4 = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ и своего центра $\{X_5\}$.

Прежде всего найдем оптимальную систему ΘL_4. Используя табл. 1, выделим композиционный ряд $0 \subset \{X_1\} \subset \{X_1, X_2\} \subset \{X_1, X_2, X_3\} \subset L_4$ и представим L_4 в виде прямой суммы собственного идеала J и подалгебры N: $L_4 = J \oplus N$, где $J = \{X_1, X_2\}$, $N = \{X_3, X_4\}$. Соответствующее разложение группы внутренних автоморфизмов A с базисом A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, имеет вид $A = A_J A_N$, при этом $A_J = A_1 A_2$ и $A_N = A_3 A_4$.

Построение ΘL_4 осуществляется в два этапа. На первом этапе строится оптимальная система ΘN с использованием автоморфизмов A_N. Пусть $\{k_3X_3 + k_4X_4, l_3X_3 + l_4X_4\}$ — произвольная подалгебра алгебры Ли N. Задача о нахождении ΘN равносильна построению оптимальной системы матриц

$$\xi = \begin{pmatrix} k_3 & k_4 \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix}$$

относительно действия группы $G_2 = A_N B_2$, где B_2 — группа преобразований базиса (строк матрицы ξ). Так как ранг $r(\xi)$ матрицы ξ является инвариантом группы A_N, построение ведется по значениям этого ранга. Если $r(\xi) = 2$, то B_2-преобразованиями матрица ξ приводится к единичной, а при $r(\xi) = 1$ — к одной из двух форм: $(1, 0)$ и $(\lambda, 1)$. С помощью автоморфизма $A_3(-\lambda/3)$ вторая из них сводится к $(0, 1)$. При $r(\xi) = 0$ матрица ξ нулевая. Таким образом, первый этап дает оптимальную систему

$$N_1 = \{X_3, X_4\},\ N_2 = \{X_3\},\ N_3 = \{X_4\},\ N_4 = \{0\}. \tag{7}$$

На втором этапе строятся оптимальные системы для алгебр $J \oplus N_p$, $p = 1, 2, 3, 4$. Объединение всех этих систем и будет оптимальной системой ΘL_4. Задача сводится к построению оптимальных систем (4×4)-матриц блочного строения

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \xi \\ \eta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

относительно действия группы $G_4 = AB_4$, где B_4 — группа преобразований базиса (строк матрицы η). Здесь ξ — одна из подматриц, соответствующих (**??**), а блок η_2 следует за первой ненулевой строкой в ξ. Ранг $r(\eta_2)$ матрицы η_2 оказывается инвариантом группы A, поэтому построение ведется по значениям этого ранга.

Таблица 3

Оптимальная система подалгебр ΘL_4

i	Базис F_i	NorF_i	i	Базис F_i	NorF_i
1	1, 2, 3, 4	=1	12	2, 3	1
2	1, 2, 3	1	13	1	1
3	1, 2, 4	=3	14	4	=14
4	2, 3, 4	=4	15	$\lambda 1 + 2$	2
5	1, $\lambda 2 + 3$, 4	=5		$\lambda \neq 0$ ($\lambda > 0$)	
6	1, 2	1	16	2	1
7	1, 4	=7	17	$\lambda 1 + \mu 2 + 3$	2
8	2, 4	=8		$\lambda \neq 0$ ($\lambda > 0$)	
9	1, $\lambda 2 + 3$	1	18	$\mu 2 + 3$	1
10	$\lambda 2 + 3$, 4	=10	19	0	1
11	$\lambda 1 + 2$, $\mu 1 + 3$	2			
	$\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$				
	($\mathrm{sgn}\lambda + \mathrm{sgn}\mu \neq -2$)				

В табл. 3 приведена нормализованная [4] оптимальная система ΘL_4. Базисы подалгебр записаны символически только номерами соответствующих операторов, при этом символ $\lambda 2 + 3$ означает $\lambda X_2 + X_3$ и т.д. Символом “0” обозначена нулевая подалгебра. В третьем столбце указаны номера нормализаторов подалгебр F_i в L_4, знаком равенства отмечены самонормализованные подалгебры. Постоянные λ, μ принимают любые вещественные значения, если не оговорено противное. Заметим, что при построении оптимальной системы подалгебр использовались дискретные автоморфизмы A_1^d, A_2^d. Если также принять во внимание автоморфизм A_3^d (хотя порождающая его симметрия не имеет физического смысла), то на значения постоянных λ, μ накладываются ограничения, указанные в скобках. Этот принцип используется и в дальнейшем.

Теперь, когда оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_4 найдена, можно перейти к построению оптимальной системы ΘL_5. Так как подалгебра $\{X_5\}$ является центром в L_5, она может входить в виде прямого слагаемого в любую подалгебру алгебры Ли L_5. Поэтому формирование оптимальной системы ΘL_5 осуществляется по следующему принципу. Для каждой подалгебры $F_i \in \Theta L_4$, $i = 1, \ldots, 19$, строятся векторные пространства F_{ij}, $j = 1, \ldots, \mathrm{dim} F_i + 1$ путем:

а) добавления оператора X_5 в качестве еще одного элемента базиса к операторам, входящим в F_i, при этом $\mathrm{dim} F_{ij} = \mathrm{dim} F_i + 1$;

б) последовательного добавления слагаемого $k_5 X_5$, $k_5 \in \mathbb{R}$, к каждому из операторов, образующих базис в F_i, при этом $\mathrm{dim} F_{ij} = \mathrm{dim} F_i$.

Затем проверяется свойство F_{ij} быть подалгеброй и используются внутренние автоморфизмы из $\mathrm{Aut} L_5$, а также группа преобразований базиса для того, чтобы придать базисным операторам наиболее простой вид. Заметим, что использование автоморфизма A_1^d (или A_2^d) позволяет всегда считать $k_5 \geq 0$. Получаемая при этом совокупность подалгебр образует оптимальную систему ΘL_5, которая приведена в табл. 4. Здесь номер подалгебры имеет вид $r.i$, где r — размерность подалгебры, i — порядковый номер подалгебры размерности r. В третьем столбце приведены номера нормализаторов подалгебр K_i^r в L_5, знаком равенства отмечены самонормализованные подалгебры. В скобках указаны ограничения на значения постоянных λ, μ, возникающие при использовании автоморфизма A_3^d в процессе построения ΘL_5.

Таблица 4

Оптимальная система подалгебр ΘL_5

$r.i$	Базис K_i^r	NorK_i^r	$r.i$	Базис K_i^r	NorK_i^r
5.1	1, 2, 3, 4, 5	=5.1	2.10	$1,\ 4+\lambda 5$	3.2
4.1	1, 2, 3, 5	5.1		$\lambda \geq 0$	
4.2	1, 2, 4, 5	=4.2	2.11	$2,\ 4+\lambda 5$	3.3
4.3	2, 3, 4, 5	=4.3		$\lambda \geq 0$	
4.4	$1,\ \lambda 2+3,\ 4,\ 5$	=4.4	2.12	$1,\ \lambda 2+3$	5.1
4.5	$1,\ 2,\ 3,\ 4+\lambda 5$	5.1	2.13	$1+5,\ \lambda 2+3$	4.1
	$\lambda \geq 0$		2.14	$1,\ \lambda 2+3+5$	4.1
3.1	1, 2, 5	5.1	2.15	$\lambda 2+3,\ 4+\mu 5$	3.5
3.2	1, 4, 5	=3.2		$\mu \geq 0$	
3.3	2, 4, 5	=3.3	2.16	2, 3	5.1
3.4	$1,\ \lambda 2+3,\ 5$	5.1	2.17	$2+5,\ 3$	4.1
3.5	$\lambda 2+3,\ 4,\ 5$	=3.5	2.18	$2,\ 3+5$	4.1
3.6	$\lambda 1+2,\ \mu 1+3,\ 5$	4.1	2.19	$\lambda 1+2,\ \mu 1+3$	4.1
	$\lambda^2+\mu^2 \neq 0$			$\lambda^2+\mu^2 \neq 0$	
	$(\mathrm{sgn}\lambda+\mathrm{sgn}\mu \neq -2)$			$(\mathrm{sgn}\lambda+\mathrm{sgn}\mu \neq -2)$	
3.7	2, 3, 5	5.1	2.20	$\lambda 1+2+5,\ \mu 1+3$	4.1
3.8	1, 2, 3	5.1		$\lambda^2+\mu^2 \neq 0$	
3.9	$1+5,\ 2,\ 3$	4.1		$(\mathrm{sgn}\lambda+\mathrm{sgn}\mu \neq -2)$	
3.10	$1,\ 2+5,\ 3$	4.1	2.21	$\lambda 1+2,\ \mu 1+3+5$	4.1
3.11	$1,\ 2,\ 3+5$	4.1		$\lambda^2+\mu^2 \neq 0$	
3.12	$1,\ 2,\ 4+\lambda 5$	4.2		$(\mathrm{sgn}\lambda+\mathrm{sgn}\mu \neq -2)$	
	$\lambda \geq 0$		1.1	1	5.1
3.13	$2,\ 3,\ 4+\lambda 5$	4.3	1.2	1+5	4.1
	$\lambda \geq 0$		1.3	$4+\lambda 5$	2.2
3.14	$1,\ \lambda 2+3,\ 4+\mu 5$	4.4		$\lambda \geq 0$	
	$\mu \geq 0$		1.4	2	5.1
2.1	1, 5	5.1	1.5	$\lambda 1+2$	4.1
2.2	4, 5	=2.2		$\lambda \neq 0\ (\lambda > 0)$	
2.3	$\lambda 1+2,\ 5$	4.1	1.6	$\lambda 1+2+5$	4.1
	$\lambda \neq 0\ (\lambda > 0)$			$(\lambda \geq 0)$	
2.4	2, 5	5.1	1.7	$\mu 2+3$	5.1
2.5	$\lambda 1+\mu 2+3,\ 5$	4.1	1.8	$\lambda 1+\mu 2+3$	4.1
	$\lambda \neq 0\ (\lambda > 0)$			$\lambda \neq 0\ (\lambda > 0)$	
2.6	$\mu 2+3,\ 5$	5.1	1.9	$\lambda 1+\mu 2+3+5$	4.1
2.7	1, 2	5.1		$(\lambda \geq 0)$	
2.8	$1+5,\ 2$	4.1	1.10	5	5.1
2.9	$1,\ 2+5$	4.1	0.1	0	5.1

3. Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры Ли $\boldsymbol{L}$

При построении оптимальной системы $\Theta_1 L$ за основу берется оптимальная система одномерных подалгебр $\Theta_1 L_5$ из табл. 4. Прежде всего заметим, что любая одномерная подалгебра из L с помощью автоморфизмов из $\mathrm{Aut} L_5$, а также дискретных автоморфизмов может быть приведена к виду $\{K + H(\boldsymbol{f}) + H_0(f^0)\}$, где $\{K\} \in \Theta_1 L_5$. Далее, подалгебры

$\{K + H(\boldsymbol{f}) + H_0(f^0)\}$ и $\{\widetilde{K} + H(\boldsymbol{f}) + H_0(f^0)\}$, где $\{K\}$ и $\{\widetilde{K}\}$ — различные подалгебры из $\Theta_1 L_5$, не могут быть переведены друг в друга с помощью автоморфизмов из $\mathrm{Aut}L$, так как любая конечномерная подалгебра инвариантна относительно $A^H(\boldsymbol{g})$, $A_0^H(g^0)$. Поэтому для построения оптимальной системы $\Theta_1 L$ необходимо последовательно рассмотреть подалгебры

$$\{K_i^1 + H(\boldsymbol{f}) + H_0(f^0)\}, \quad \{K_i^1\} \in \Theta_1 L_5,\ i = 1, \ldots, 11, \tag{8}$$

и классифицировать каждую из них относительно $\mathrm{Aut}L$ и дискретных автоморфизмов. При этом следует добиться обращения в нуль максимально возможного числа функций из набора f^0, f^1, f^2, f^3 путем выбора параметров автоморфизмов.

В дальнейшем предполагается, что функции $f^0, f^1, f^2, f^3 \in C^n(t_0, t_1)$, где $-\infty \le t_0 < t_1 \le \infty$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. При классификации подалгебр используются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f \in C^n(t_0, t_1)$. *Тогда существует решение* $g \in C^n(t_0, t_1)$ *уравнения* $tg_t + g + f = 0$.

Лемма 2. *Пусть* $f \in C^n(t_0, t_1)$. *Тогда существует решение* $g \in C^n(t_0, t_1)$ *уравнения* $2tg_t - g + f = 0$.

Лемма 3. *Пусть* $f^1, f^2 \in C^n(t_0, t_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда существует решение* $g^1, g^2 \in C^n(t_0, t_1)$ *системы уравнений*

$$\begin{aligned} 2tg_t^1 - g^1 + \lambda g^2 + f^1 = 0, \\ 2tg_t^2 - g^2 - \lambda g^1 + f^2 = 0. \end{aligned}$$

Указанные леммы приводятся в работе [6].

Остановимся подробнее на классификации двух подалгебр из списка (**??**), соответствующих $K_3^1 = \{X_4 + \lambda X_5\}$, $\lambda \ge 0$ и $K_4^1 = \{X_2\}$. Рассмотрим подалгебру $\{X_4 + \lambda X_5 + H(\boldsymbol{f}) + H_0(f^0)\}$. Последовательным действием автоморфизмов $A^H(\boldsymbol{g})$, $A_0^H(g^0)$, где функции $\boldsymbol{g} = (g^1, g^2, g^3)$ и g^0 удовлетворяют уравнениям

$$2tg_t^1 - g^1 + \lambda g^2 + f^1 = 0,\ 2tg_t^2 - g^2 - \lambda g^1 + f^2 = 0, \tag{9}$$

$$2tg_t^3 - g^3 + f^3 = 0,\ 2tg_t^0 + 2g^0 + f^0 + h^0 = 0, \tag{10}$$

эта подалгебра приводится к виду $\{X_4 + \lambda X_5\}$ (здесь h^0 — функция из (**??**)). Существование решения системы (**??**) и уравнений (**??**) гарантируется леммами 1–3.

Перейдем к подалгебре $\{X_2 + H(\boldsymbol{f}) + H_0(f^0)\}$. С помощью автоморфизма $A^H(0, 0, g^3)$, где функция g^3 удовлетворяет уравнению

$$f^3 g_{tt}^3 - (f_{tt}^3 + \beta_1\, g) g^3 - f^0/\rho_0 = 0, \tag{11}$$

данная подалгебра приводится к виду $\{X_2 + H(\boldsymbol{f})\}$. Решение $g^3 \in C^n(t_0, t_1)$ уравнения (**??**) существует, если $f^3 \in C^n(t_0, t_1)$, $n \ge 2$, $f^3(t) \ne 0$, для любого $t \in (t_0, t_1)$ и $f^0 \in C^{n-2}(t_0, t_1)$.

Классификация остальных подалгебр осуществляется аналогичным образом. Часть возникающих при этом дифференциальных уравнений сводится к уравнениям (**??**), (**??**); для (**??**) и остальных уравнений существование решения непосредственно следует из известных теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Оптимальная система подалгебр $\Theta_1 L$ приведена в табл. 5. В первом столбце указан номер подалгебры, во втором — базисный оператор и в четвертом приведены операторы нормализатора подалгебры в L. В скобках указаны ограничения на значения постоянной λ,

Таблица 5

Оптимальная система подалгебр $\Theta_1 L$

i	Базис P_i	Примечание	NorP_i				
1	X_1		L_5				
2	$X_4 + \lambda X_5$	$\lambda \geq 0$	X_4, X_5				
3	$X_1 + \lambda X_2$	$\lambda \neq 0$ $(\lambda > 0)$	X_1, X_2, X_3, X_5				
4	$X_1 + \lambda X_2 + X_5$	$(\lambda \geq 0)$					
5	$\lambda X_1 + \mu X_2 + X_3$	$\lambda \neq 0$ $(\lambda > 0)$					
6	$\lambda X_1 + \mu X_2 + X_3 + X_5$						
7	$H_0(f^0)$	$f^0 \neq 0$	L				
8	$X_5 + H_0(f^0)$		X_2, X_3, X_5, H_3, H_0				
9	$-\frac{\beta_2}{\beta_1} X_2 + X_3 + H_0(f^0)$		$X_2, X_3, X_4, X_5, H_1, H_2, H_0$				
10	$-\frac{\beta_2}{\beta_1} X_2 + X_3 + X_5 + H_0(f^0)$		X_2, X_3, X_5, H_0				
			$f^3 = 0$	$f^3 \neq 0$			
11	$X_5 + H_3(f^3)$		L_5, H_3, H_0	X_5, H_0			
12	$X_2 + X_5 + H_3(f^3)$		X_1, X_2, X_3, X_5, H_0				
13	$\mu X_2 + X_3 + X_5 + H_3(f^3)$						
				$f^3 = 0$	f^1	f^2	
14	$H(\boldsymbol{f})$		X_1, X_4, H_0	X_2, X_3, H_3	0	0	X_5, H_1, H_2
15	$X_2 + H(\boldsymbol{f})$		X_4, H_0	X_2, X_3	0	$\neq 0$	H_1
16	$\mu X_2 + X_3 + H(\boldsymbol{f})$				$\neq 0$	0	H_2
					$\neq 0$	$\neq 0$	X_5

связанные с использованием автоморфизма A_3^d при построении $\Theta_1 L$. Операторы нормализаторов подалгебр P_{14}, P_{15} и P_{16} определяются следующим образом. В первом столбце указаны операторы, входящие в нормализатор независимо от вида функций $\boldsymbol{f} = (f^1, f^2, f^3)$. Во втором столбце приведены операторы, которые следует добавить в нормализатор в случае $f^3 = 0$. Таблица со значениями функций f^1, f^2 — общая для подалгебр P_{14}, P_{15}, P_{16} и содержит операторы, входящие в нормализатор в зависимости от того, равны ли эти функции тождественно нулю или нет.

Заметим, что подалгебры из табл. 5, в которых координаты базисного оператора зависят от произвольных функций, могут содержать подобные подалгебры. В качестве примера рассмотрим подалгебру $\{X_5 + H_0(f^0)\}$. Последовательным действием автоморфизмов $A_1(a_1)$, $A_4(a_4)$ и $A_1^d(\delta_1)$ ее можно привести к виду $\{X_5 + H_0(\widetilde{f}^0)\}$, где

$$\widetilde{f}^0(t) = (-1)^{\delta_1} e^{-2a_4} f^0(e^{-2a_4}(t - a_1)), \tag{12}$$

при этом полученная подалгебра будет подобна исходной. Таким образом, действие внутренних и дискретных автоморфизмов разбивает каждую из подалгебр P_i, $i = 7, \ldots, 16$ на классы подобных подалгебр. Эти автоморфизмы должны оставлять неизменной конечномерную составляющую базисного оператора (при этом допускается умножение этой составляющей на отличное от нуля число). Каждый класс однозначно определяется конкретным видом произвольных функций и содержит подалгебры, в которых эти функции связаны некоторым соотношением (например, (**??**)). Это соотношение (условие подобия) не зависит от вида произвольных функций.

Условия подобия для подалгебр P_i, $i = 7, \ldots, 16$, приведены в табл. 6. Используются следующие обозначения: $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, $R(\gamma)$, $D(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ —

Таблица 6

Условия подобия бесконечномерных подалгебр из $\Theta_1 L$

Подалгебра	Условие подобия
$H_0(f^0)$	$\widetilde{f^0}(t) = af^0(at+b)$
$X_5 + H_0(f^0)$	$\widetilde{f^0}(t) = (-1)^{\delta_1} af^0(at+b)$
$-\frac{\beta_2}{\beta_1}X_2 + X_3 + H_0(f^0)$	$\widetilde{f^0}(t) = (-1)^{\delta_3} a^{-1/2} f^0(at+b)$
$-\frac{\beta_2}{\beta_1}X_2 + X_3 + X_5 + H_0(f^0)$	$\widetilde{f^0}(t) = (-1)^{\delta_1} f^0(t+b)$
$X_5 + H_3(f^3)$	$\widetilde{f^3}(t) = (-1)^{\delta_1} a^{-1/2} f^3(at+b)$
$X_2 + X_5 + H_3(f^3)$	$\widetilde{f^3}(t) = f^3(t+b)$
$\mu X_2 + X_3 + X_5 + H_3(f^3)$	
$H(\boldsymbol{f})$	$\widetilde{\boldsymbol{f}}(t) = D(\delta_1, \delta_2, \delta_3) R(\gamma) a^{-1/2} \boldsymbol{f}(at+b)$
$X_2 + H(\boldsymbol{f})$	$\widetilde{\boldsymbol{f}}(t) = D(\delta_1, \delta_2, 0) R(\gamma) a^{-2} \boldsymbol{f}(at+b)$
$\mu X_2 + X_3 + H(\boldsymbol{f})$	

матрицы из (**??**). Заметим, что если не учитывать действие автоморфизма $A_3^d(\delta_3)$, то в таблице следует положить $\delta_3 = 0$.

Автор выражает благодарность В.К. Андрееву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Гидродинамика межфазных поверхностей: Сб. трудов / Под ред. Ю.А. Буевича и Л.М. Рабиновича. М.: Мир, 1984.

[2] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.

[3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[4] Овсянников Л.В. Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.

[5] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.

[6] Fushchych W., Popowych R. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. II // Nonl. Math. Phys. 1994. Vol. 1, N 2. P. 158–188.

Поступила в редакцию 12 сентября 2003 г.