

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В ДОРОЖКЕ ТИПА КАРМАНА*

Б. К. АЛИЕВА, А. Ж. НАЙМАНОВА

Институт математики Министерства образования и науки

Республики Казахстан, Алматы

e-mail: KED@math.kz

Ш. С. СМАГУЛОВ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы

A flow of the moist air stream over two arrow shaped obstacles is modelled numerically on the basis of the fictitious domain method. The results of investigations on the influence of the distance between the bodies on the vortex formation are presented. Resonant effects which result in the intensification of vortices in the lee of the obstacles are revealed.

Введение

Теоретические и экспериментальные исследования обтекания одиночных препятствий достаточно хорошо изучены. Их основным выводом, как известно, является образование за конечным телом нестационарного течения (типа дорожки Кармана) [1, 2]. При решении практических задач аэрогидродинамики необходимо знание закономерностей обтекания системы различных тел. Вопросы обтекания системы тел влажным потоком воздуха теоретически не рассматривались. Основными трудностями исследования таких типов течений являются как отсутствие достаточно надежных моделей турбулентности, эффективных методов интегрирования уравнений Навье — Стокса при расчете течений с малыми числами Маха, так и многосвязность рассматриваемой области. Немногочисленные экспериментальные исследования и натурные наблюдения [3] показывают, что существование дополнительных препятствий оказывает сильное воздействие на поведение подветренных волн, в этом случае обнаружены значительные вертикальные скорости, которые, очевидно, являются следствием резонансного эффекта.

В работе на примере обтекания двух стреловидных тел потоком влажного воздуха с помощью метода фиктивных областей численно моделируется явление резонанса при наличии вихревой дорожки.

*Работа выполнена при поддержке фонда фундаментальных исследований Министерства науки и образования Республики Казахстан (Ф.0189, № 0100РК00169).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2004.

1. Постановка задачи

Нестационарное двумерное течение сжимаемого турбулентного газа в поле силы тяжести (без учета сил Кориолиса) в ограниченной области $\Omega_1 \in R^2$ с границей S сводится к решению системы нелинейных уравнений в частных производных:

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{Fr} \rho - \frac{1}{\gamma M^2} \nabla P + K_M \Delta_b V; \quad (1)$$

$$\rho \frac{dT}{dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dP}{dt} + K_H \Delta_b T - \rho L_c \Delta; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho V = 0; \quad (3)$$

$$\rho = \frac{P}{T(1 + 0,61q_v)}; \quad (4)$$

$$\frac{dq}{dt} = K_q \Delta_b q, \quad q = q_v + q_c, \quad (5)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}; \quad \Delta_b = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\Delta = \begin{cases} 0, & q \leq q_{vs}, \\ \frac{dq_{vs}}{dt}, & q > q_{vs} \end{cases}$$

— скорость конденсации водяного пара.

Удельная влажность при состоянии насыщения имеет вид

$$q_{vs} = 0.622 \bar{E}_0 \exp(17,27(T-1)/T)/P. \quad (6)$$

Начальные и граничные условия. В начальный момент времени газ находится в состоянии покоя, начальные распределения температуры, плотности и влажности задаются следующим образом:

$$T = 1 - mz, \quad \rho = \exp\left(-\frac{\gamma M^2}{Fr} z\right), \quad q = RHq_{vs}, \quad m = 0.007, \quad 0 \leq z \leq 1.5, \quad (7)$$

где m — вертикальный градиент температуры; RH — заданная относительная влажность.

На входе задан линейный рост поля скорости $u = 2t$, $w = 0$ до момента времени $t = 0.5$, далее скорость принимается постоянной $u = 1$, $w = 0$, остальные условия следующие:

$$T = 1 - mz, \quad q = RHq_{vs}, \quad \rho = \exp\left(-\frac{\gamma M^2}{Fr} z\right). \quad (8)$$

На нижней и верхней границах условия для поля скорости совпадают с условиями на входе, остальные условия следующие:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f = [T, q]. \quad (9)$$

На поверхности обтекаемого тела

$$u = 0, \quad w = 0, \quad T = 1 - mz, \quad q = RHq_{vs}. \quad (10)$$

На выходе приняты мягкие граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = [u, T, q]. \quad (11)$$

Уравнения (1)–(11) записаны в безразмерной форме. В качестве параметров обезразмеривания приняты характерные величины для рассматриваемого течения: H — высота области, V_0 — максимальная скорость невозмущенного потока, T_0 и ρ_0 — температура и плотность на входе, масштаб времени $t_0 = H/V_0$, для давления P и упругости насыщения $E_0 = \rho_0 R T_0$. Турбулентность описывается простейшей K -моделью.

Здесь $Fr = \frac{V_0^2}{gH}$ — число Фруда; $Sc = \frac{\mu}{\rho_0 D}$ — число Шмидта; $Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ — число Прандтля; $M = \frac{V_0}{(\gamma R T_0)^{1/2}}$ — число Маха; g — ускорение свободного падения; D — коэффициент диффузии переноса общего влагосодержания, $L_c = L/c_p T_0$ — безразмерный коэффициент, L — удельная теплота конденсации, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; R — газовая постоянная воздуха, q_v — удельная влажность; q_c — удельная водность воздуха, q_{vs} — удельная влажность насыщения, q — удельное влагосодержание; K_M , K_H , K_q — безразмерные коэффициенты турбулентной вязкости, связанные между собой следующим образом: $K_H = K_M/Pr$, $K_q = K_M/Sc$, $K_M = K/Re$, остальные обозначения общеприняты.

2. Методика решения

Задача (1)–(6) решается методом фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам в расширенной области. Для этого рассматриваемая область Ω_1 дополняется до прямоугольника $\Omega = \{0 \leq x \leq \ell, 0 \leq z \leq H\}$, где ℓ — длина области.

Поскольку рассматриваемое течение является существенно-дозвуковым ($M \ll 1$), для устранения трудностей, возникающих при численном моделировании течений с малыми числами Маха, вместе со слабо изменяющимся в воздушном потоке безразмерным статическим давлением P^* вводится безразмерное динамическое давление \bar{P} , изменяющееся в пределах от нуля до значения порядка единицы [4]. Таким образом, полное давление представляется в виде

$$P = \gamma M^2 \bar{P} + P^*. \quad (12)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу с малым параметром:

$$\begin{aligned} \frac{d(u\rho)^\varepsilon}{dt} &= -\frac{\partial \bar{P}^\varepsilon}{\partial x} + K_M \Delta_b u^\varepsilon - \xi \rho^\varepsilon (u^\varepsilon - u_{nx}^\varepsilon), \\ \frac{d(w\rho)^\varepsilon}{dt} &= -\frac{\partial \bar{P}^\varepsilon}{\partial z} + K_M \Delta_b w^\varepsilon + \frac{(\rho^* - \rho^\varepsilon)}{Fr} - \xi \rho^\varepsilon (w^\varepsilon - w_{nz}^\varepsilon), \\ \rho^\varepsilon \frac{dT^\varepsilon}{dt} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{d(\gamma M^2 \bar{P}^\varepsilon + P^*)}{dt} + K_H \Delta_b T^\varepsilon - \rho^\varepsilon L_c \Delta - \xi \rho^\varepsilon (T^\varepsilon - T_0^\varepsilon), \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho^\varepsilon} \frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} - \frac{V^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} \text{grad } \rho^\varepsilon, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho^\varepsilon = \frac{\gamma M^2 \bar{P}^\varepsilon + P^*}{T^\varepsilon (1 + 0,61 q_v^\varepsilon)}, \quad \frac{dq^\varepsilon}{dt} = K_q \Delta_b q^\varepsilon - \xi (q^\varepsilon - q_0^\varepsilon),$$

где

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } (x, z) \in \Omega_1, \\ \varepsilon^{-2} & \text{при } (x, z) \in \Omega/\Omega_1; \end{cases}$$

$$P^* = \exp\left(-\frac{\gamma M^2}{Fr} z\right); \quad \rho = \rho^* = \exp\left(-\frac{\gamma M^2}{Fr} z\right)$$

— характерные значения безразмерного гидростатического давления и плотности соответственно; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $u_{nx}^\varepsilon, w_{nz}^\varepsilon$ — составляющие скорости на препятствии; $T_0^\varepsilon, q_0^\varepsilon$ — соответствующие температура и удельное влагосодержание на поверхности тела.

3. Анализ полученных результатов

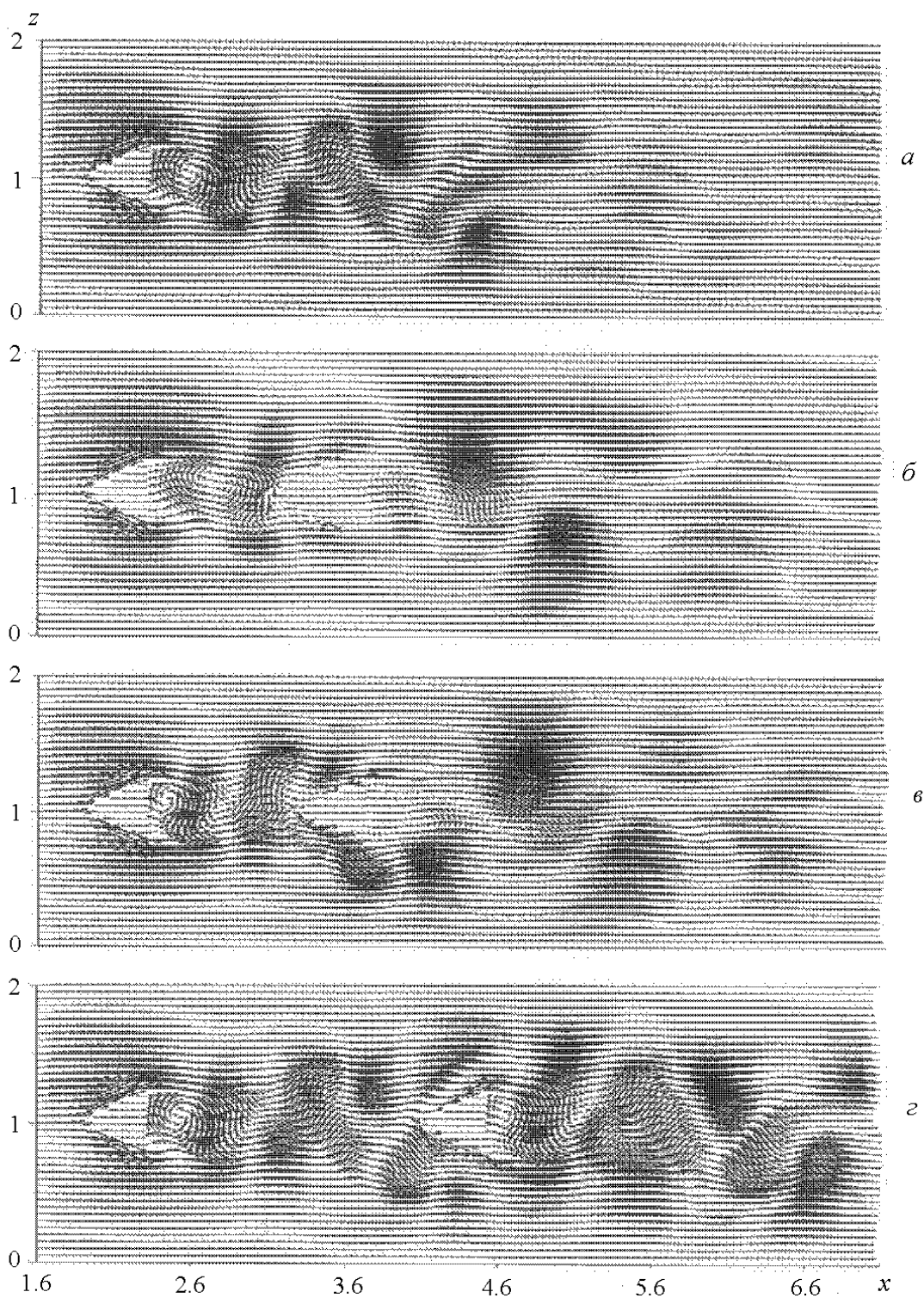
Задача (13) решается методом расщепления, подробно описанным в работе [5]. Приведем основные этапы расчета: промежуточные значения скорости вычисляются явно, уравнение Пуассона для динамического давления с граничными условиями Неймана решается методом последовательной симметричной верхней релаксации. Расчет поля температуры и влажности производится методом переменных направлений с монотонной схемой по пространственным координатам, имеющим второй порядок аппроксимации.

Расчеты проводились со следующим диапазоном параметров: $0.0022 \leq M \leq 0.0387$; $0.0045 \leq Fr \leq 0.0095$; $K_M = 0.0012$; $Pr = Sc = 0.71$; $0.16 \leq \bar{E}_0 \leq 1.5$; $0.5 \leq L_c \leq 1.5$; $0 \leq RH \leq 0.9$. Расчетная сетка состоит из 215×81 ячеек с шагами $h_x = 0.035$, $h_z = 0.025$ и с шагом по времени $\tau = 0.0025$.

В качестве препятствия было принято стреловидное треугольное тело $z = c \pm k(x - a)$, где $c = 0.75$, $k = 0.5$, $a = 2.05$.

На рисунке приводятся результаты численного эксперимента при $M = 0.026$, $Fr = 0.007$, $L_c = 0.5$, $RH = 0.9$, $E_0 = 0.16$. Как следует из рисунка, при обтекании одного стреловидного тела возникает течение типа вихревой дорожки Кармана. При обтекании двух тел, расположенных на расстоянии $\ell_x = 3d, 3.5d$ ($d = 0.4$ — высота стреловидного тела, ℓ_x — продольное расстояние между центрами тел) с нулевым углом выноса (вынос определяется углом между линией, проходящей через оси тела, и направлением потока), возмущения распространяются так, как они распространялись бы при обтекании одного широкого препятствия. Так как в этом случае поток, оторвавшийся от переднего стреловидного тела, присоединяется к заднему препятствию, затрудняется сход вихрей с переднего тела (б и в). При удалении тел на расстояние $\ell_x = 5.5d$ возмущения за обоими телами увеличиваются и, как видно из рисунка, волны за первым препятствием, распространяясь вниз по потоку, взаимодействуют с течением вблизи второго препятствия, вызывая увеличение амплитуды за ним. Очевидно, в этом случае второе препятствие оказалось вблизи ложбины возмущений, идущих от первого тела, что и привело к усилению волнового процесса. Этот результат означает, что характеристики потока зависят от фазы подветренных возмущений, вызванных первым препятствием и местоположением второго препятствия.

В заключение отметим, что обнаруженное явление резонанса способствует пониманию закономерностей взаимодействия вихрей, возникающих при обтекании потоком сжимаемого газа дискретно расположенных тел с различными углами выноса.



Поле вектора скорости в момент времени $t = 7.5$: *a* — обтекание одного препятствия; *б* — обтекание двух препятствий, расположенных на расстоянии между ними $l_x = 3d$; *в* — обтекание двух препятствий ($l_x = 3.5d$); *г* — обтекание двух препятствий ($l_x = 5.5d$).

Список литературы

- [1] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 519 с.
- [2] АЛЬБОМ течений жидкости и газа: Пер. с англ. / Сост. М. Ван-Дайк. М.: Мир, 1986. 184 с.
- [3] INOUE O. Resonance of Lee waves of a stratified flow over two barriers // J. of the Meteorological Society of Japan. 1979. Vol. 57. P. 21–28.
- [4] ЛАПИН Ю.В., СТРЕЛЕЦ М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.
- [5] ИБРАЕВА Д.С., НАЙМАНОВА А.Ж. Численное моделирование влажных подветренных волн // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37, № 1. С. 93–102.
- [6] СМАГУЛОВ Ш.С. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье — Стокса. Новосибирск, 1979 (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; № 68).

Поступила в редакцию 27 октября 2003 г.