Вычислительные технологии **Том 9, № 6, 2004**

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ПОЛЕЗНЫМ СВОЙСТВОМ*

З. И. Федотова

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: zf@ict.nsc.ru

The paper is devoted to derivation and investigation of nonlinear dispersive equations of hydrodynamics, which admit the analogues of Riemann invariants in the case of a flat bottom.

Введение

В работе рассмотрена система уравнений из класса приближенных слабо нелинейных моделей гидродинамики, описывающих распространение длинных поверхностных волн на воде с учетом дисперсионных эффектов. Такие модели успешно применяются для решения задач гидродинамики длинных волн, когда применение полных трехмерных моделей сталкивается с необоснованно большими затратами вычислительных ресурсов.

В научной литературе о волнах на воде описано несколько разновидностей нелинейно-дисперсионных (НЛД) моделей. Большинство из них выведено из "базовой" модели, приведенной к нормированным переменным и содержащей два параметра: параметр нелинейности α и параметр дисперсии β (см., например, [1, 2]). В работах [1, 3, 4] выполнен сравнительный анализ и дана классификация этих моделей по свойствам, важным для моделирования задач волновой гидродинамики. Одной из причин разнообразия модельных уравнений является возможность выбора зависимых переменных. Например, под "скоростью" в НЛД-уравнениях можно понимать не только скорость воды на дне канала (как в "базовой" модели), но и скорость на свободной поверхности, или усредненную по глубине скорость, или скорость на некоторой высоте Y над основанием канала (что использовано в данной работе) и т.д. В результате можно добиться тех или иных свойств от системы НЛД-уравнений. Ранее [4, 5] мы обратили внимание на полезное свойство одной системы НЛД-уравнений, состоящее в возможности привести ее к переменным, аналогичным инвариантам Римана [6]. В работах [5, 7] изучена соответствующая одномерная модель и продемонстрирован ряд ее свойств. Ниже мы покажем ряд преимуществ этой модели перед другими из класса НЛД-моделей и приведем ее вывод для произвольного дна в двумерном случае.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-05-64108), Программы интеграционных исследований СО РАН (грант № 2003-5) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2314.2003.1).

1. Вывод модели

Для вывода НЛД-модели с указанным свойством рассмотрим уравнения безвихревого течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и жестким непроницаемым дном. Чтобы учесть длинноволновой характер течения и проследить за нелинейностью, используем, как обычно, разномасштабные характерные размеры в горизонтальном и вертикальном напрвлениях: l — длина, H_0 — глубина, η_0 — амплитуда возмущения поверхности воды и параметры $\beta = (H_0/l)^2$ (параметр дисперсии) и $\alpha = \eta_0/H_0$ (параметр нелинейности). Далее нормируем переменные с помощью следующей замены:

$$x'_i = lx \quad (i = 1, 2), \quad y' = H_0 y, \quad t' = \frac{lt}{c_0}, \quad \varphi' = \frac{gl\eta_0}{c_0}\varphi, \quad H' = H_0 H, \quad \eta' = \eta_0 \eta.$$

Здесь x_1, x_2 — пространственные координаты на горизонтальной плоскости; y — вертикальная координата; t — время; η — возвышение свободной поверхности над ее равновесным положением; H — глубина невозмущенной жидкости; φ — потенциал скорости жидкости; $c_0 = (gH_0)^{1/2}$, g — ускорение свободного падения. Штрихами помечены размерные переменные. Соответствующие уравнения гидродинамики в указанных безразмерных переменных можно записать в виде

$$\Delta\varphi + \frac{1}{\beta}\varphi_{yy} = 0, \quad -H(x_1, x_2) < y < \alpha\eta(x_1, x_2, t); \tag{1}$$

$$\nabla\varphi\nabla H + \frac{1}{\beta}\varphi_y = 0, \quad y = -H(x_1, x_2); \tag{2}$$

$$\eta_t + \alpha\nabla\varphi\nabla\eta - \frac{1}{\beta}\varphi_y = 0, \quad y = \alpha\eta(x_1, x_2, t); \tag{3}$$

$$\varphi_t + \frac{\alpha}{2}\,(\nabla\varphi)^2 + \frac{\alpha}{2\beta}\,{\varphi_y}^2 + y = 0, \quad y = \alpha\eta(x_1, x_2, t). \tag{4}$$

Здесь $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)$ и $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — определенные в горизонтальной плоскости операторный вектор-градиент и оператор Лапласа соответственно.

Для получения НЛД-модели примем разложение потенциала по вертикальной координате [1, 8]: $\varphi = \phi(x_1, x_2, t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \phi_k(x_1, x_2, t)Y^k$, где ϕ, ϕ_k $(k = \overline{1, \infty})$ — функции, зависящие только от x_1, x_2 и t; $Y = \alpha y + H(x_1, x_2)$. Подстановка суммы в уравнение (1) и граничные условия (2)–(4) приводят к рекуррентным соотношениям между этими функциями, что в результате позволяет перейти от бесконечного числа уравнений к системе двух уравнений бесконечного порядка для функций ϕ и η.

В целом указанная процедура весьма громоздка, поэтому мы приведем окончательные уравнения, в которых члены порядка $\mathcal{O}(\beta^2)$ отброшены:

$$\eta_t + \nabla\,(h\nabla\phi) =$$

$$= \beta\left(\nabla\left(h\left(\nabla H\nabla\phi\right)\nabla H\right) + \frac{1}{2}\nabla\left(h^2\left(\nabla\left(\nabla H\nabla\phi\right) + \Delta\phi\nabla H\right)\right) + \frac{1}{3}\nabla\left(h^3\nabla^3\phi\right)\right); \tag{5}$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\alpha|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{\alpha}\,(h - H) = \beta\left(\frac{1}{2}\alpha(\nabla H\nabla\phi)^2 + h\left(\nabla H\,(\nabla\phi)_t + \alpha\nabla\phi\nabla\left(\nabla h\nabla\phi\right)\right) + \right.$$

$$+\frac{h^2}{2}\left(\left(\Delta\phi\right)_t+\alpha\nabla\phi\nabla\left(\Delta\phi\right)-\alpha\left(\Delta\phi\right)^2\right)\Big). \tag{6}$$

Эти уравнения называют “базовыми” НЛД-уравнениями мелкой воды (это уравнения мелкой воды второго приближения). По аналогии с классическими уравнениями мелкой воды первого приближения первое из этих уравнений будем называть уравнением неразрывности, второе — уравнением движения.

Уравнения (5), (6) являются основой для получения многих других описанных в литературе нелинейных уравнений с дисперсией. В частности, они содержат подкласс моделей Буссинеска, у которых параметры нелинейности и дисперсии имеют одинаковый порядок малости. В этом специальном случае исходная модель упрощается ввиду пренебрежения членами порядка $\mathcal{O}(\alpha\beta,\alpha^2)$ и принимает вид

$$\eta_t+\nabla\left(h\nabla\phi\right)=\frac{1}{3}\beta\nabla^3\left(H^3\nabla\phi\right); \tag{7}$$

$$\phi_t+\frac{1}{2}\alpha|\nabla\phi|^2+\frac{1}{\alpha}\left(h-H\right)=\frac{1}{2}\beta\nabla\left(H^2\nabla\phi\right)_t. \tag{8}$$

Здесь $h=\alpha\eta+H$ — полная глубина жидкости. Преобразуя эти уравнения, удается получить ряд НЛД-систем с улучшенными свойствами [1, 3, 4]. Например, применив к уравнению (6) оператор ∇ и заменив в системе (5)–(6) производные ϕ_{x_1} и ϕ_{x_2} переменными w_1, w_2, которые можно трактовать как компоненты “скорости” (на самом деле, это и есть скорость течения на дне канала), получим отличную от (5)–(6) систему НЛД-уравнений. В свою очередь, скорость $\mathbf{w}=\nabla\phi$ может быть заменена некоторой другой “скоростью”, в частности скоростью на высоте Y над основанием канала. Если рассмотреть в качестве “скорости течения” в приближенной модели истинную скорость течения $\mathbf{u}$ на глубине $Y=\sqrt{2/3}H$:

$$\mathbf{u}=\nabla\phi-\beta\gamma\nabla\left(H\nabla H\nabla\phi\right)-\beta\frac{\gamma^2}{2}\nabla\left(H^2\Delta\phi\right)+\mathcal{O}\left(\beta^2\right),$$

где $\gamma^2=2/3$, то после надлежащих преобразований членов порядка $\mathcal{O}\left(\beta\right)$ и приведения полученных уравнений по $\mod(\beta^2)$ получим уравнения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\eta+\nabla\left(h\mathbf{u}+\frac{\beta}{3}R[\mathbf{u}]\right)=\frac{\beta}{6}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi[\eta],\\&\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}+\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla\eta=\frac{\beta}{6}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi[\mathbf{u}],\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}&R[\mathbf{u}]=-kH^2\left((\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla H+(\nabla H\times\nabla)\mathbf{u}^{\perp}\right)-H\nabla H(\nabla H\cdot\mathbf{u}),\\&\Phi[\eta]=\nabla\left(H^2\eta\right)-(k+1)\nabla\left(H^2\right)\eta,\\&\Psi[\mathbf{u}]=\nabla\left(H^2\mathbf{u}\right)+k\nabla\left(H^2\right)\cdot\mathbf{u},\quad k=2-\sqrt{6}.\end{aligned}$$

В случае ровного дна $H(x_1,x_2)\equiv H_0$ модель (9) принимает компактный вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\eta+\nabla\left(h\mathbf{u}\right)=\frac{\beta}{6}{H_0}^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta\eta,\\&\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}+\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla\eta=\frac{\beta}{6}{H_0}^2\frac{\partial}{\partial t}\nabla\left(\nabla\mathbf{u}\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Если воспользоваться предположением о потенциальности исходного течения, то на основе равенства $u_{x_2} - v_{x_1} = \mathcal{O}(\beta^2)$ (u, v — компоненты скорости) в уравнениях движения можно сделать замену правой части на выражение $\beta \frac{{H_0}^2}{6} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{u}$, что делает уравнения более привлекательными с точки зрения конструирования вычислительных алгоритмов. Стандартная процедура линейного дисперсионного анализа исследуемой модели приводит к дисперсионному соотношению и выражениям для мод ($\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ – волновой вектор):

$$\omega^2 = \frac{H_0|\mathbf{k}|^2}{(1 + \beta H_0^2|\mathbf{k}|/6)^2}, \quad \omega = \pm \frac{H_0^{1/2}|\mathbf{k}|}{1 + \beta H_0^2|\mathbf{k}|/6}.$$

Таким образом, система уравнений (10) имеет две моды, которым соответствуют уравнения конечного порядка со смешанной производной третьего порядка. Нетрудно видеть, что фазовая и групповая скорости при $|\mathbf{k}| \to \infty$ стремятся к нулю, откуда следует несущественность высокочастотных гармоник (свойство, полезное при численной реализации алгоритмов). Другие свойства будут рассмотрены ниже.

2. Численные эксперименты

Как следует из вида дисперсионного соотношения, полученные уравнения замечательны тем, что в линейном одномерном случае возможна замена переменных, при которой система уравнений распадается на два независимых уравнения, каждое из которых содержит только одну независимую функцию. В определенном смысле эту замену можно трактовать как переход к инвариантам Римана [6]. Из общего вида уравнений в случае ровного дна следует, что если такую систему уравнений записать в матричном виде, то матрица с дисперсионными членами будет диагональной. Это позволяет в полной мере использовать методику исследования целого класса разностных схем, разработанную для гиперболической системы уравнений мелкой воды, технически основанную на возможности изучения одного скалярного уравнения.

В одномерном случае уравнения (9) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\eta_t + ((h + \beta/3\tilde{R})u)_x = \beta/6\,(\Phi[\eta])_{xt}\,,\\
&u_t + \alpha u u_x + \eta_x = \beta/6\,(\Psi[u])_{xt}\,,\\
&\Phi[\eta] = \left(H^2\eta\right)_x - (k+1)\left(H^2\right)_x \eta,\\
&\Psi[u] = \left(H^2 u\right)_x + k\left(H^2\right)_x u,\\
&R[u] = \tilde{R}u, \quad \tilde{R} = -H\left(kHH_{xx} + (H_x)^2\right), \quad k = 2 - \sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Отметим, что R зависит только от формы дна, т. е. это известная функция. Правая часть уравнения неразрывности не зависит от u, а правая часть уравнения движения не зависит от η. Чтобы введенная скорость имела физический смысл, следует потребовать выполнения неравенства $\sqrt{2/3}H \le h$. По существу, это есть ограничение на величину амплитуды волн понижения. Напомним, что модель (9) получена при условии, что α и β имеют один и тот же порядок малости, т. е. уже при выводе модели заложено ограничение на размах амплитуды. Указанная модель рассмотрена в [4], где, в частности, приведена вариационная формулировка и выписаны законы сохранения импульса и энергии.

Рассмотрим некоторые свойства построенной модели в сравнении с аналогичными моделями. Для построения численного алгоритма вводится замена, такая, что исходную систему уравнений можно представить в виде

$$\begin{gathered}\eta - \frac{\beta}{6}\left(\Phi[\eta]\right)_x = \Theta, \quad u - \frac{\beta}{6}\left(\Psi[u]\right)_x = U, \\ \Theta_t + \left(\left(h + \beta\tilde{R}\right)u\right)_x = 0, \quad U_t + \eta_x + \frac{1}{2}\alpha\left(u^2\right)_x = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Пусть Δt и Δx — шаги сетки в направлении осей по времени t и пространству соответственно. Введем ряд обозначений. Пусть E — тождественный оператор, T — оператор сдвига: $T_{\pm j}\psi(x,t) = \psi(x \pm j\Delta x, t)$; $T^{\pm n}\psi(x,t) = \psi(x, t \pm n\Delta t)$. Используя комбинации этих операторов, введем следующие разностные операторы: $\Delta_1 = T_1 - E, \quad \Delta_{-1} = E - T_{-1}, \quad \Delta^1 = T^1 - E, \quad \mu = (T_1 + T_{-1})/2$. Сеточную функцию с n-го слоя по времени будем обозначать ψ_j^n: $\psi_j^n = \psi^n(j\Delta x)$. Уравнения системы (11) аппроксимируем следующим образом:

$$\eta_j^{n+1} - \beta\frac{\Delta_1}{\Delta x^2}\left[\Delta_{-1}(H_j^2\eta_j^{n+1}) - (k+1)\mu\eta_j^{n+1}\Delta_{-1}H_j^2\right] = \Theta_j^{n+1},$$

$$u_j^{n+1} - \beta\frac{\Delta_1}{\Delta x^2}\left[\Delta_{-1}(H_j^2 u_j^{n+1}) + k\mu u_j^{n+1}\Delta_{-1}H_j^2\right] = U_j^{n+1},$$

$$\frac{\Delta^1\Theta_j^n}{\Delta t} + \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2\Delta x}\left[(\alpha(\eta_j^{n+1} + \eta_j^n)/2 + H_j + \beta/3\tilde{R}_j)u_j^n\right] = 0,$$

$$\frac{\Delta^1 U_j^n}{\Delta t} + \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2\Delta x}\left[\eta_j^{n+1} + \alpha u_j^{n\,2}/2\right] = 0,$$

$$\tilde{R}_j = -\frac{H_j}{\Delta x^2}\left[kH_j\Delta_1\Delta_{-1}H_j + ((\Delta_1 + \Delta_{-1})H_j)^2/4\right].$$

Эта схема подробно исследована в работе автора [5]. Она имеет второй порядок аппроксимации и условно устойчива, однако ограничение на шаг по времени менее строго, чем для соответствующей разностной схемы без дисперсионных членов.

Как правило, тестирование НЛД-моделей начинается с проверки, насколько точно они передают движение по ровному дну $H(x) = H_0$ уединенной волны

$$\eta = \eta_0\,\mathrm{sech}^2[(3\eta_0)^{1/2}/(2H_0(H_0+\eta_0)^{1/2})(x - x_0 - Ct)], \quad C = [g(H_0+\eta_0)]^{1/2}. \tag{12}$$

Предложенная модель, как и все модели типа Буссинеска, в отличие от полных НЛД-моделей [8], не допускает точного решения (12). Если взять начальное возмущение жидкости в виде (12), то в численном решении при $t > 0$ происходит сброс осциллирующего хвоста и формируется солитонообразная волна, соответствующая конкретной модели.

Существенным преимуществом предложенной модели является возможность простой конструкции граничных условий, обеспечивающих выход волны за границу области без отражения, — свойство, присущее гиперболическим уравнениям.

Рассмотрим задачу: при $t = 0$ на отрезке $[0, 30]$ задается возвышение свободной поверхности в виде (12) для $\eta_0 = 0.2$, $H_0 = 1$, $x_0 = 15$, $g = 1$ с нулевой скоростью. Границы полагаются открытыми. В точках $x = 0$ (левая граница) и $x = 5$ установлены виртуальные мареографы, фиксирующие высоту проходящей волны. При $t > 0$ волна распадается на две, идущие в противоположных направлениях. Вершина волны достигает границ за

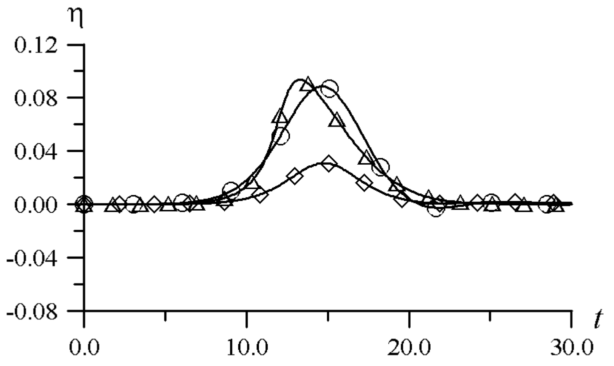

Рис. 1. Выход волны из области ($x = 0$).

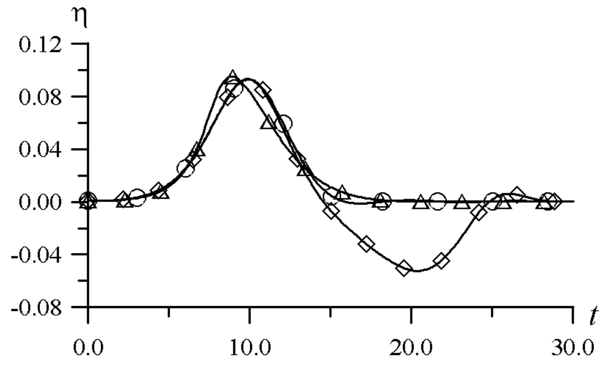

Рис. 2. Поведение вблизи границы ($x = 5$).

$t = 15$. На границах заданы "мягкие условия" простейшего вида: ${\eta_0}^n = {\eta_1}^n$, ${u_0}^n = {u_1}^n$, ${\eta_N}^n = {\eta_{N-1}}^n$, ${u_N}^n = {u_{N-1}}^n$; $0, \ldots, N$ — номера узлов сетки.

На рис. 1, 2 показаны мареограммы решений, рассчитанных по однотипным разностным схемам для ряда моделей: "треугольниками" отмечено решение гиперболических уравнений мелкой воды (по описанной выше разностной схеме с $\beta = 0$), кривые с "кружками" и "ромбиками" получены соответственно по предложенной модели и известной модели Перегрина [8, 9]. На рис. 1 показана форма выходящей за пределы области волны. Видно, что в последнем случае возникает существенная по амплитуде отраженная волна, тогда как для первых двух моделей граница оказывается "прозрачной". На рис. 2 видно, что до взаимодействия с границей решения, полученные по НЛД-моделям, близки.

Мы рассмотрели и другие известные НЛД-модели типа моделей Буссинеска. Все они показали примерно тот же результат, что и модель Перегрина. Используя простейшие граничные условия (выпуск волны за пределы области и пересчет линии уреза с помощью экстраполяции), мы попытались применить НЛД-модели для расчета наката волны на берег. Работающий алгоритм удалось получить только в случае описанной здесь модели именно благодаря свойству правильно выпускать волну за пределы области.

Список литературы

[1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

[2] Fedotova Z.I., Karepova E.Д. Variational principle for approximate models of wave hydrodynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1996. Vol. 11, N 3. P. 183–204.

[3] Марчук А. Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И. Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, 1983.

[4] Fedotova Z.I., Pashkova V.Yu. On the numerical modelling of the dynamics of weakly nonlinear waves with dispersion // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1995. Vol. 10, N 5. P. 407–424.

[5] Fedotova Z.I., Pashkova V.Yu. Methods of construction and the analysis of difference schemes for nonlinear dispersive models of wave hydrodynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1997. Vol. 12, N 2. P. 127–149.

[6] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Второе доп. издание. М.: Наука, 1968.

[7] Chubarov L.B., Fedotova Z.I., Shokin Yu.I., Einarsson B.G. Comparative analysis of nonlinear dispersive models of shallow water // Intern. J. of Computational Fluid Dynamics. 2000. Vol. 14, N 1. P. 55–73.

[8] Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеоиздат, 1989.

[9] Peregrine D. Long Waves on a Beach // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 27. P. 815–827.

Поступила в редакцию 10 сентября 2004 г.