Вычислительные технологии **Том 10, № 4, 2005**

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ЧАСТИЦ ДЛЯ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА СПЛАЙНОВ*

Е. В. Овчинникова
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: frank@icm.krasn.ru

Further results on the convergence of the particles method for an incompressible fluid are obtained. The theorem of convergence for the case of eigenfunctions from space of splines is proved.

Введение

В [1] была доказана сходимость метода частиц для несжимаемой жидкости в случае внутренней краевой задачи для уравнений Навье — Стокса и базисных функций из пространства $L_4(\Omega)\cap H(\Omega)$. Однако в реальных расчетах в качестве базисных функций используются B-сплайны [2]. Использование B-сплайнов обусловлено тем, что они имеют компактный носитель, что значительно сокращает количество производимых арифметических операций. Кроме того, использование в качестве базисных функций B-сплайнов дает возможность проводить расчеты в областях с криволинейными и подвижными границами. Удачный выбор базисных функций часто позволяет получать хорошие результаты даже при очень грубом (с точки зрения традиционных конечно-разностных и конечно-элементных схем) пространственном разрешении.

В настоящей статье доказана теорема о сходимости метода частиц для несжимаемой жидкости в случае базисных функций из пространства сплайнов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим, как и в [1], следующую начально-краевую задачу для системы уравнений Навье — Стокса:

$$\mathbf{u}_t + u_k\mathbf{u}_{x_k} - \nu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}|_S = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

в области $Q_T = \Omega\times(0,T)$. Здесь Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S. Относительно $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ предположим

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a}|_S = 0. \tag{3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (грант КЦФЕ для аспирантов № А03-2.8-872).

Мы будем иметь дело с обобщенным решением Ладыженской [3] задачи (1), (2).

Скалярное произведение и норму в $L_2(\Omega)$ будем обозначать (,) и || || соответственно. Под нормой производной будем понимать

$$||\mathbf{u}_x||^2 \equiv \int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}_x|^2 d\mathbf{x}, \quad |\mathbf{u}_x| \equiv \left(\sum_{i,j=1}^{3} (u_{i_{x_j}})^2 \right)^{1/2}.$$

Численная схема та же, что и в [1]:

$$\left(\left(\frac{\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \mathbf{v}^n(\mathbf{x}^n)}{\tau}, \mathbf{a}^{lh}(\mathbf{x}^{n+1}) \right) \right) + \nu \left(\left(\mathbf{v}_{x_i}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}), \mathbf{a}_{x_i}^{lh}(\mathbf{x}^{n+1}) \right) \right) = 0, \tag{4}$$

где $l = 1, ..., m$, а частицы движутся в силу уравнения

$$\mathbf{x}^{n+1}(\xi_k) = \mathbf{x}^n(\xi_k) + \tau \mathbf{v}^n(\mathbf{x}^n(\xi_k)).$$

Отличие состоит в том, что функции $\{\mathbf{a}^{ih}\}_{i=1}^m$ не ортонормированы в $L_2(\Omega)$, кроме того, с уменьшением h меняется весь набор функций. Строятся они следующим образом. Возьмем W_h-пространство B-сплайнов, построенных на прямоугольной сетке с линейным размером ячейки h, носители которых целиком лежат в области Ω. Очевидно, что W_h — конечномерное пространство. Пусть $W_h = \mathrm{Span}\{\psi^{1h}, \psi^{2h}, ..., \psi^{nh}\}$. Введем функции

$$\mathbf{a}^{ih} = \mathrm{rot}(\psi^{ih}). \tag{5}$$

Легко видеть, что $\mathrm{div}\ \mathbf{a}^{ih} = 0$ и $\mathbf{a}^{ih}|_S = 0$. Поскольку после применения операции ротора система функций $\{\mathbf{a}^{ih}\}$ может оказаться линейно зависимой, выберем максимальное линейно независимое подмножество $\{\mathbf{a}^{ih}\}_{i=1}^m$ и обозначим $V_h = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}^{1h}, \mathbf{a}^{2h}, ..., \mathbf{a}^{mh}\}$.

2. Априорные оценки

Как и в случае ортонормированных базисных функций, в случае базисных функций из пространства сплайнов численная схема (4) будет безусловно устойчива. А именно выполняются неравенства

$$[[\mathbf{v}^k(\mathbf{x}^k)]]^2 \le [[\mathbf{v}^0]]^2; \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} [[\mathbf{v}^{i+1}(\mathbf{x}^{i+1}) - \mathbf{v}^i(\mathbf{x}^i)]]^2 \le [[\mathbf{v}^0]]^2; \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tau [[\mathbf{v}_{\mathbf{x}}^{i+1}(\mathbf{x}^{i+1})]]^2 \le \frac{1}{2\nu} [[\mathbf{v}^0]]^2. \tag{8}$$

Эти оценки следуют непосредственно из (4) и не зависят от вида базисных функций.

Для доказательства теоремы о сходимости метода частиц нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для любой функции* $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in V_h$ *и* $\forall i, j = 1, ..., 3$*, справедливы неравенства:*

1) $|\mathbf{v}| \le M_1 h^{-3/2} ||\mathbf{v}||$;

2) $|\mathbf{v}_{x_i}| \le M_2 h^{-5/2} ||\mathbf{v}||$;

3) $|\mathbf{v}_{x_i x_j}| \le M_3 h^{-7/2} ||\mathbf{v}||$,
где M_1, M_2, M_3 *— константы, зависящие от степени сплайн-функций.*

Доказательство. Поскольку пространство V_h конечномерное, в нем все нормы эквивалентны, следовательно, выполняются неравенства:

1) $|\mathbf{v}| \le A_1 ||\mathbf{v}||$,
2) $|\mathbf{v}_{x_i}| \le A_2 ||\mathbf{v}||$,
3) $|\mathbf{v}_{x_i x_j}| \le A_3 ||\mathbf{v}||$.

Проведем оценку констант A_1, A_2, A_3. Пусть W_h — пространство B-сплайнов степени n:

$$\psi^{ih} = B_n^i(x_1) B_n^i(x_2) B_n^i(x_3).$$

Базисные функции получаются взятием операции ротор от функций ψ^{ih}

$$\mathbf{a}^{ih} = \mathrm{rot}\psi^{ih}. \tag{9}$$

Функция $\mathbf{v}$ есть произвольная линейная комбинация функций $\mathbf{a}^{ih}$:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} c^i \mathbf{a}^{ih} = \sum_{i=1}^{m} c^i \mathrm{rot}\psi^{ih} = \mathrm{rot}\left(\sum_{i=1}^{m} c^i \psi^{ih}\right) = \mathrm{rot}\varphi,$$

где $\varphi \in W_h$. Очевидно, что в каждой ячейке нашей сетки v_j есть функция степени, не превосходящей n относительно x_i. На рис. 1–3 представлены случаи, когда полиномы соответствующих степеней имеют максимальную производную при одном и том же максимальном значении функции.

Аналогичные оценки имеют место и для полиномов более высоких степеней. Следовательно ($\forall \mathbf{v} \in V_h$), справедливы неравенства

$$|v_{j_{x_i}}| \le \frac{A}{h} |\mathbf{v}|_C, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{10}$$

где A зависит от степени B-сплайнов.

Считая $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, получим

$$|\mathbf{v}|_{x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{v_j}{|\mathbf{v}|} v_{j_{x_i}} \le \sum_{j=1}^{3} |v_{j_{x_i}}| \le \frac{3A}{h} |\mathbf{v}|_C, \quad i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

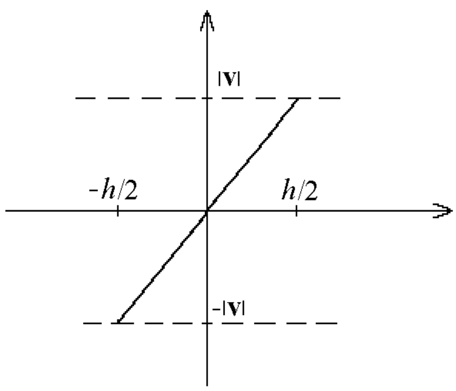

Рис. 1. Максимум производной линейной функции не может превышать $\dfrac{2}{h}|\mathbf{v}|$.

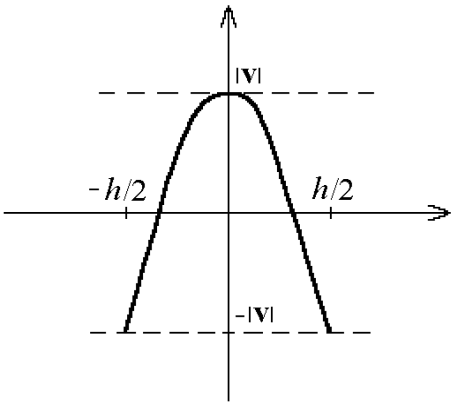

Рис. 2. Максимум производной полинома второй степени достигается на функции $y = |\mathbf{v}|\left(1-2\left(\frac{2x}{h}\right)^2\right)$ на концах интервала и равен он $\frac{8}{h}|\mathbf{v}|$.

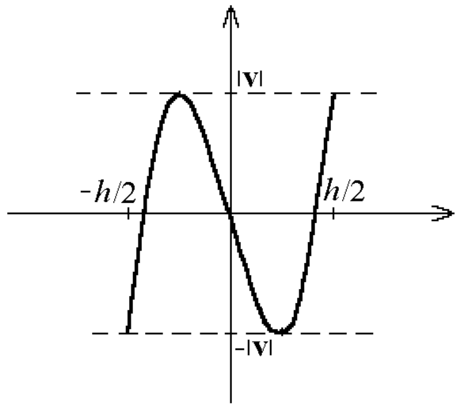

Рис. 3. Максимум производной полинома третьей степени достигается на функции $y = |\mathbf{v}|\left(4\left(\frac{2x}{h}\right)^3-3\left(\frac{2x}{h}\right)\right)$ на концах интервала и равен он $\frac{18}{h}|\mathbf{v}|$.

Тогда очевидно

$$|\mathrm{grad}|\mathbf{v}|| \le \frac{3A\sqrt{3}}{h}|\mathbf{v}|_C. \tag{12}$$

Пусть $|\mathbf{v}|$ достигает максимума в точке $\mathbf{x}^*$, т.е. $|\mathbf{v}(\mathbf{x}^*)| = |\mathbf{v}|_C$, тогда $|\mathbf{v}|$ отлична от 0 по крайней мере в шаре $B\left(\mathbf{x}^*, \frac{h}{3A\sqrt{3}}\right)$, причем $|\mathbf{v}| \ge |\mathbf{v}|_C\left(1-\frac{3A\sqrt{3}}{h}|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*|\right)$. Тогда

$$||\mathbf{v}||^2 \ge \int\limits_{B\left(\mathbf{x}^*,\frac{h}{3A\sqrt{3}}\right)} |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \ge |\mathbf{v}|_C^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{h/3A\sqrt{3}} \left(1-\frac{3A\sqrt{3}}{h}r\right)^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \frac{2\pi h^3}{5\cdot 3^5\sqrt{3}A^3}|\mathbf{v}|_C^2.$$

Следовательно, $A_1 = 9A\sqrt{\frac{15A\sqrt{3}}{2\pi}}\ h^{-3/2}$. Далее, из (10) вытекает, что

$$|\mathbf{v}_{x_i}| \le \frac{A\sqrt{3}}{h}|\mathbf{v}|_C \le 27A^2\sqrt{\frac{5A\sqrt{3}}{2\pi}}\ h^{-5/2}||\mathbf{v}||.$$

Получим $A_2 = 27A^2\sqrt{\frac{5A\sqrt{3}}{2\pi}}\ h^{-5/2}$. Оценка константы A_3 проводится аналогично, $A_3 = 27A^3\sqrt{\frac{15A\sqrt{3}}{2\pi}}\ h^{-7/2}$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если* $\tau^{1-\varepsilon} \le \frac{1}{4T}$, $\tau^{\varepsilon} \le \frac{h^5}{32M_2^2[[\mathbf{v}^0]]^2}$ *и* $\tau < \frac{h^{5/2}}{12M_2[[\mathbf{v}^0]]}$, *а* $d \le h^4\cdot e^{-6TM_2h^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]}\times (24\mu(\Omega)M_1M_2)^{-1}$, *где* M_1, M_2 *— те же, что в лемме 1, а* $\mu(\Omega)$ *— объем области* Ω, *то:*

1) $\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^n(\xi)$ *— взаимно-однозначное преобразование* Ω *на* Ω, *обратное преобразование* $\xi = \xi(\mathbf{x}^n)$ *принадлежит классу* C^1*;*

2) $|\mathbf{x}^n_\xi| \le e^{6TM_2h^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]}$;
3) $||\mathbf{v}||^2 \le 2(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}[[\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)]]^2$;
4) $\left|\dfrac{\partial \mathbf{v}^n}{\partial x_j}\right| \le 2M_2h^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]$;
5) $|J^{n+1}_n - 1| \le \tau^{2-\varepsilon}$.

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 из [1]. Однако необходимо передоказать следующее неравенство для случая неортогональных базисных функций:

$$||\mathbf{v}||^2 \le 2(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}[[\mathbf{v}(\mathbf{x}^k)]]^2. \tag{13}$$

Поскольку $\mathbf{v}$ принадлежит конечномерному пространству V_h, имеет место неравенство

$$\alpha^{kh}||\mathbf{v}|| \le [[\mathbf{v}(\mathbf{x}^k)]] \le \beta^{kh}||\mathbf{v}||,$$

где

$$\alpha^{kh} = \inf_{||\mathbf{v}||=1}\left(\sum_{j=1}^N m_j\mathbf{v}^2(\mathbf{x}^k(\xi_j))\right)^{1/2} = \inf_{||\mathbf{v}||=1}\left(\int\limits_\Omega \mathbf{v}^2(\mathbf{x}^k(\xi))d\xi - R^k\right)^{1/2};$$

$$R^k = ||\mathbf{v}(\mathbf{x}^k))||^2_\xi - [[\mathbf{v}(\mathbf{x}^k)]]^2.$$

Так как $J^k_0 \le (1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}$,

$$||\mathbf{v}||^2 = \int\limits_\Omega \mathbf{v}^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega \mathbf{v}^2(\mathbf{x}^k(\xi))J^k_0 d\xi \le \left(1+\tau^{2-\varepsilon}\right)^{T/\tau}\int\limits_\Omega \mathbf{v}^2(\mathbf{x}^k(\xi))d\xi,$$

следовательно

$$\int\limits_\Omega \mathbf{v}^2(\mathbf{x}^k(\xi))d\xi \ge \frac{||\mathbf{v}||^2}{(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}}. \tag{14}$$

Оценим сверху R^k:

$$|R^k| = \left|\sum_{j=1}^N \int\limits_{\omega_j}\left[\mathbf{v}^2(\mathbf{x}^k(\xi)) - \mathbf{v}^2(\mathbf{x}^k(\xi_j))\right]d\xi\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^N \int\limits_{\omega_j}\left[\mathbf{v}(\mathbf{x}^k(\xi))\Big(\mathbf{v}(\mathbf{x}^k(\xi)) - \mathbf{v}(\mathbf{x}^k(\xi_j))\Big) + \mathbf{v}(\mathbf{x}^k(\xi_j))\Big(\mathbf{v}(\mathbf{x}^k(\xi)) - \mathbf{v}(\mathbf{x}^k(\xi_j)\Big)\right]d\xi\right| \le$$

$$\le \max_{\mathbf{x}\in\Omega}|\mathbf{v}(\mathbf{x})|\max|\mathbf{v}_\xi|\cdot d\cdot 2\sum_{j=1}^N\int\limits_{\omega_j} 1\cdot d\mathbf{x} \le$$

$$\le 6\mu(\Omega)\max_{\mathbf{x}\in\Omega}|\mathbf{v}(\mathbf{x})|\max_{j,\,\mathbf{x}\in\Omega}|\mathbf{v}_{x_j}(\mathbf{x})|\cdot|\mathbf{x}^k_\xi|d \le$$

$$\le 6\cdot e^{6TM_2h^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]}d\mu(\Omega)M_1M_2h^{-4}||\mathbf{v}||^2.$$

Положив

$$d \le \frac{1}{24\cdot e^{6TM_2h^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]}\mu(\Omega)M_1M_2h^{-4}}, \tag{15}$$

получим

$$|R^k| \le \frac{||\mathbf{v}||^2}{4} \le \frac{||\mathbf{v}||^2}{2(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}}. \tag{16}$$

Теперь оценим снизу α^{km}:

$$\alpha^{kh} = \inf_{||\mathbf{v}||=1} \left(\int\limits_{\Omega} \mathbf{v}^2(\mathbf{x}^k(\xi))d\xi - R^k \right)^{1/2} \ge$$

$$\ge \inf_{||\mathbf{v}||=1} \left(\frac{||\mathbf{v}||^2}{(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}} - \frac{||\mathbf{v}||^2}{2(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/\tau}} \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(1+\tau^{2-\varepsilon})^{T/2\tau}}.$$

Отсюда непосредственно следует (13). □

Следствие 1. *Если выполнены условия леммы 2, то* $\forall n$*:*

1) $|J_0^n - 1| \le 2T\tau^{1-\varepsilon}$*;*

2) $||\mathbf{v}|| \le 2[[\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)]]$*;*

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}||\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)||_\xi \le ||\mathbf{v}|| \le \sqrt{2}||\mathbf{v}(\mathbf{x}^n)||_\xi$.

Доказательство. Доказательство первого пункта аналогично доказательству следствия 1 из [1]. Пункты 2 и 3 доказываются аналогично пунктам 4 и 5 леммы 2 из [1]. □

3. Сходимость численной схемы

Переходим к доказательству сходимости численных решений метода частиц к обобщенному решению задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ *есть обобщенное решение задачи (1), (2) и функции* $\{\mathbf{a}^{kh}(\mathbf{x})\}_{k=1}^m$ *— линейно-независимы. Если нормы* $||\mathbf{u}_{tt}||$, $||\mathbf{u}_x||$ *и* $||\mathbf{u}_t||_{H(\Omega)}$ *ограничены* $\forall\, t \in [0,T]$, *то последовательность приближенных решений* $\mathbf{v}$ *сходится к* $\mathbf{u}$ *при* $\tau \to 0$, $m \to \infty$, $d \to 0$ *и следующих ограничениях:*

$$\tau h^{-13/2} \to 0, \quad \tau \le \frac{h^{10}}{1024 M_2^4 [[\mathbf{v}^0]]^4}, \quad dh^{-5} \cdot e^{6Th^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]} \to 0.$$

Доказательство. Легко видеть, что при выполнении условий теоремы выполнены также условия леммы 2 с $\varepsilon = 1/2$.

Обозначим через $\mathbf{u}^h(\mathbf{x},t)$ наилучшее приближение в $L_2(\Omega)$ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ по системе функций $\{\mathbf{a}^{ih}\}_{i=1}^m$:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^m c_{ih}(t)\mathbf{a}^{ih}(\mathbf{x}).$$

Поскольку $\mathbf{u}^h(\mathbf{x},t)$ — это наилучшее приближение в $L_2(\Omega)$ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$,

$$\Phi = \frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}^h, \mathbf{u}-\mathbf{u}^h) \to \min,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_{ih}} = -(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{a}^{lh}) = 0 \quad \forall t \in [0,T]; \tag{17}$$

$$(\mathbf{u}^h, \mathbf{a}^{lh}) = (\mathbf{u}, \mathbf{a}^{lh}) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{18}$$

Отсюда следует, что вектор-функция $c_h = (c_{1h}, c_{2h}, ..., c_{mh}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot F\mathbf{u}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}^{1h},\ \mathbf{a}^{1h}) & (\mathbf{a}^{1h},\ \mathbf{a}^{2h}) & \dots & (\mathbf{a}^{1h},\ \mathbf{a}^{mh}) \\ (\mathbf{a}^{2h},\ \mathbf{a}^{1h}) & (\mathbf{a}^{2h},\ \mathbf{a}^{2h}) & \dots & (\mathbf{a}^{2h},\ \mathbf{a}^{mh}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{a}^{mh},\ \mathbf{a}^{1h}) & (\mathbf{a}^{mh},\ \mathbf{a}^{2h}) & \dots & (\mathbf{a}^{mh},\ \mathbf{a}^{mh}) \end{pmatrix},$$

а $F\mathbf{u} = ((\mathbf{u},\ \mathbf{a}^{1h}),\ (\mathbf{u},\ \mathbf{a}^{2h}),\ \dots,\ (\mathbf{u},\ \mathbf{a}^{mh}))$.

Матрица $\mathbf{A}$ невырождена, так как функции $\{\mathbf{a}^{ih}\}_{i=1}^m$ линейно независимы. А функция $F\mathbf{u}$ дифференцируема по t, следовательно, и функции $c_{ih}(t)$ дифференцируемы по t. Из (18) дифференцированием получим

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t}, \mathbf{a}^{lh}\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{a}^{lh}\right) \quad \forall\, l,\ \forall\, t \in [0,T]. \tag{19}$$

Тогда для $\mathbf{u}^h$ справедливы равенства

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t}, \mathbf{a}^{lh}\right) - \left(u_k^h \mathbf{u}^h, \mathbf{a}^{lh}_{x_k}\right) + \nu \left(\mathbf{u}^h_{x_i}, \mathbf{a}^{lh}_{x_i}\right) = I_{hl}, \tag{20}$$

где

$$I_{hl} = -\nu \left(\mathbf{u}_{x_i} - \mathbf{u}^h_{x_i}, \mathbf{a}^{lh}_{x_i}\right) + \left(u_k \mathbf{u} - u_k^h \mathbf{u}^h, \mathbf{a}^{lh}_{x_i}\right).$$

Для дальнейших преобразований необходимо, чтобы в (20) скалярные произведения были теми же, что и в численной схеме, а именно дискретными. Перепишем уравнение (20) в следующем виде:

$$\left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) - \left([u_k^h \mathbf{u}^h](t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}_{x_k}\right) +$$
$$+\nu \left(\left(\mathbf{u}^h_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) = I^n_{hl} + G^n_{hl} + Q^n_{hl}, \tag{21}$$

где $I^n_{hl} = I_{hl}(t^{n+1})$;

$$G^n_{hl} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}(\mathbf{x}^{n+1})\right)_\xi - \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t}(\mathbf{x}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}(\mathbf{x})\right) +$$
$$+\nu \left(\mathbf{u}^h_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)_\xi - \nu \left(\mathbf{u}^h_{x_i}(\mathbf{x}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}_{x_i}(\mathbf{x})\right);$$

$$Q^n_{hl} = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}(\mathbf{x}^{n+1})\right)_\xi +$$
$$+\nu \left(\left(\mathbf{u}^h_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) - \nu \left(\mathbf{u}^h_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{a}^{lh}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)_\xi.$$

Обозначим $\mathbf{w}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^n(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t^n)$. Вычтем из (4) уравнение (21), результат умножим на $\lambda_l^{n+1} - c_{lh}(t^{n+1})$ и просуммируем по l от 1 до m. В итоге получим

$$\left(\left(\frac{\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \mathbf{w}^n(\mathbf{x}^n)}{\tau}, \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) + \nu \left(\left(\mathbf{w}^{n+1}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1}_{x_i}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right) =$$
$$= -I^n_h - G^n_h - Q^n_h + r^n_h, \tag{22}$$

где

$$r_h^n = \big(\big(\mathbf{u}_t^h(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}), \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\big)\big) - \big([u_k^h \mathbf{u}^h](t^{n+1}), \mathbf{w}_{x_k}^{n+1}\big) -$$
$$- \left(\left(\frac{\mathbf{u}^h(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x}^n, t^n)}{\tau}, \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})\right)\right);$$

I_h^n получится, если в I_{hl}^n вместо $\mathbf{a}^{lh}$ взять $\mathbf{w}^{n+1}$. То же с G_h^n и Q_h^n.

Используя тождество $2((\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a})) = [[\mathbf{a}]]^2 - [[\mathbf{b}]]^2 + [[\mathbf{a} - \mathbf{b}]]^2$, запишем

$$[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 - [[\mathbf{w}^n]]^2 + [[\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n]]^2 + 2\nu\tau[[\mathbf{w}_x^{n+1}]]^2 =$$
$$= -2\tau I_h^n - 2\tau G_h^n - 2\tau Q_h^n + 2\tau r_h^n. \tag{23}$$

Теперь мы покажем, что все члены в правой части последнего уравнения стремятся к нулю быстрее, чем τ. Член I_h^n мал, поскольку при достаточно малых h мала разница между функцией и ее наилучшим приближением в $L_2(\Omega)$. Остаток G_h^n мал, поскольку якобиан преобразования $\left|\dfrac{\partial \mathbf{x}^{n+1}}{\partial \xi}\right|$ мало отличается от 1. Значение Q_h^n мало вследствие малости d, а r_h^n мал, так как мала разность между точным и приближенным значениями материальной производной. Оценка этих членов проводится так же, как в теореме 1 из [1]. Подставив полученные оценки в (22) и просуммировав по n от 0 до $l-1$, получим

$$[[\mathbf{w}^l]]^2 + \sum_{n=0}^{l-1} [[\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n]]^2 \le \left(\frac{5}{2} + C^2 \max_{t\in[0,T]} ||\mathbf{u}^h(t)||_{L_4(\Omega)}^8\right) \sum_{n=0}^{l-1} \tau[[\mathbf{w}^{n+1}]]^2 + \sum_{j=1}^{13} R_j^l, \tag{24}$$

где

$$R_1^l = \sum_{n=0}^{l-1} \tau \frac{16C_1^2}{\nu} ||\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}^h(t^{n+1})||_H^2,$$

$$R_2^l = C_2 T^2 \tau^2 \sum_{n=0}^{l-1} ||\mathbf{u}_t^h(t^{n+1})||^2,$$

$$R_3^l = C_3 \nu T^2 \tau^2 \sum_{n=0}^{l-1} ||\mathbf{u}_x^h(t^{n+1})||^2,$$

$$R_4^l = C_4 h^{-5} \cdot e^{12Th^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \mu(\Omega) \sum_{n=0}^{l-1} \tau ||\mathbf{u}_t^h(t^{n+1})||^2,$$

$$R_5^l = C_5 \nu^2 h^{-7} \cdot e^{12Th^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \mu(\Omega) \sum_{n=0}^{l-1} \tau ||\mathbf{u}_x^h(t^{n+1})||^2,$$

$$R_6^l = C_6 \nu h^{-7} \cdot e^{12Th^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \mu(\Omega) \sum_{n=0}^{l-1} \tau ||\mathbf{u}^h(t^{n+1})||^2,$$

$$R_7^l = C_7 h^{-5} \cdot e^{12Th^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \sum_{n=0}^{l-1} \tau [[\mathbf{v}^n]]^2 \cdot ||\mathbf{u}_x^h(t^{n+1})||^2,$$

$$R_8^l = C_8 h^{-10} \cdot e^{12Th^{-5/2}[[\mathbf{v}^0]]} d^2 \mu(\Omega) \sum_{n=0}^{l-1} \tau [[\mathbf{v}^n]]^2 \cdot ||\mathbf{u}^h(t^{n+1})||^2,$$

$$R_9^l = C_9 \tau \sum_{n=0}^{l-1} [[\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n]]^2 \cdot ||\mathbf{u}_x^h(t^{n+1})||^2,$$

$$R_{10}^l = C_{10} T^2 h^{-3} \tau^2 \sum_{n=0}^{l-1} [[\mathbf{v}^{n+1}]]^2 \cdot ||\mathbf{u}_x^h(t^{n+1})||^2,$$

$$R_{11}^l = 6T\tau^2 \mu(\Omega) \sum_{i=1}^{3} \max_{\substack{t\in[0,T]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{tt}}^h(\mathbf{x},t)\right)^2,$$

$$R_{12}^l = 6\tau^2 \sum_{k,i=1}^{3} \max_{\substack{t\in[0,T]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{tx_k}}^h(\mathbf{x},t)\right)^2 \sum_{n=0}^{l-1} \tau [[\mathbf{v}^n]]^2,$$

$$R_{13}^l = 36\tau^2 h^{-6} \sum_{i,j,k=1}^{3} \max_{\substack{t\in[0,T]\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \left(u_{i_{x_j x_k}}^h(\mathbf{x},t)\right)^2 \sum_{n=0}^{l-1} \tau [[\mathbf{v}^n]]^4.$$

Обозначим через P_h оператор проектирования, ставящий в соответствие любой функции $\varphi(\mathbf{x})$ ее наилучшее приближение в $L_2(\Omega)$ по системе $\{\mathbf{a}^{kh}(\mathbf{x})\}_{k=1}^m$, а именно

$$P_h\varphi = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{a}^i.$$

Легко видеть, что P_h являются ограниченными операторами в пространствах $H(\Omega)$ и $L_4(\Omega)$. С другой стороны, они сходятся к единичному оператору на любом из элементов этих пространств. Поэтому в силу теоремы Банаха — Штейнгауза их нормы в обоих пространствах будут ограничены в совокупности: $||P_h||_{H(\Omega)} \le C_{11}$ и $||P_h||_{L_4(\Omega)} \le C_{12}$. Это дает для $\mathbf{u}^h(\mathbf{x},t)$ оценки

$$||\mathbf{u}^h(\mathbf{x},t)||_{H(\Omega)} = ||P_h\mathbf{u}||_{H(\Omega)} \le C_{11}||\mathbf{u}(\mathbf{x},t)||_{H(\Omega)}; \tag{25}$$

$$||\mathbf{u}^h(\mathbf{x},t)||_{L_4(\Omega)} \le C_{12}||\mathbf{u}(\mathbf{x},t)||_{L_4(\Omega)}. \tag{26}$$

Вместе с тем из (19) легко видеть, что $\mathbf{u}_t^h = P_h\mathbf{u}_t$, следовательно,

$$||\mathbf{u}_t^h(\mathbf{x},t)||_{H(\Omega)} = ||P_h\mathbf{u}_t||_{H(\Omega)} \le C_{11}||\mathbf{u}_t(\mathbf{x},t)||_{H(\Omega)}. \tag{27}$$

Так как для обобщенного решения $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ ограничены интегралы $\int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^{3} \left[u_i^h(\mathbf{x},t)\right]^4 d\mathbf{x}$ $\forall\, t \in [0,T]$, ограничены и нормы $||u^h(\mathbf{x},t)||_{L_4(\Omega)}$ $\forall\, t \in [0,T]$, а значит, ограничен и $\max\limits_{t\in[0,T]} ||\mathbf{u}^h(t)||^8_{L_4(\Omega)}$. Теперь, отбросив второе и третье слагаемые левой части (24) и учитывая, что $[[\mathbf{w}^0]] = 0$, получим неравенство, из которого известным образом (разностный аналог леммы Гронуолла) выводится оценка

$$[[\mathbf{w}^l]]^2 \le C_{13} \sum_{j=1}^{12} R_j^l \tag{28}$$

с постоянной C_{13}, зависящей лишь от T. Остается показать, что $\sum\limits_{j=1}^{13} R_j^l \to 0$ при $\tau \to 0$, $d \to 0$ и $h \to 0$. Подробно остановимся на доказательстве того, что $R_1^l \to 0$ при $\tau \to 0$,

$h \to 0$, для остальных слагаемых оценки с точностью до констант совпадают с оценками теоремы 1 из [1].

Введем функцию $\Phi^h(t) = ||\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^h(t)||_H^2$. Тогда $R_1^l = \dfrac{16C_1^2}{\nu} \sum\limits_{n=0}^{l-1} \tau \Phi^h(t^{n+1})$. Поскольку оператор P_h сходится к единичному на любом элементе пространства $H(\Omega)$, функция $\Phi^h(t) \to 0$ $\forall h$, $\forall t \in [0, T]$. Легко видеть, что если $\Phi^h(t)$ сходится к нулю равномерно по t на $[0, T]$, то $R_1^l \to 0$. Покажем равномерную сходимость.

Поскольку по условию теоремы $||\mathbf{u}_t||_H$ и $||\mathbf{u}||_H$ ограничены $\forall t \in [0, T]$, из (25), (27) следует, что и $||\mathbf{u}_t^h||_H$, и $||\mathbf{u}^h||_H$ ограничены $\forall\, h$, $\forall\, t \in [0, T]$. А значит, равномерно ограничена и производная $\dfrac{d}{dt}\Phi^h(t)$:

$$\left| \frac{d}{dt}\Phi^h(t) \right| \le M \ \forall h,\ \forall t \in [0, T].$$

Предположим,что $\Phi(t)$ сходится к нулю неравномерно. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ $\exists \{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\forall i$ $\exists t_i^*$: $\Phi^{h_i}(t_i^*) > \varepsilon$. Поскольку производные $\dfrac{d}{dt}\Phi^{h_i}(t)$ ограничены, $\forall i$ $\forall t \in \left(t_i^* - \dfrac{\varepsilon}{2M},\ t_i^* + \dfrac{\varepsilon}{2M}\right)$, $\Phi^{h_i}(t) > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\int\limits_0^T \Phi^{h_i}(t)dt > \dfrac{\varepsilon^2}{2M}$ $\forall i$. Пришли к противоречию, так как по теореме Лебега $\int\limits_0^T \Phi^h(t)dt \to 0$ при $h \to 0$. Таким образом, $\Phi^h(t)$ сходится к нулю равномерно по t на $[0, T]$.

Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Овчинникова Е.В., Франк А.М. О сходимости метода частиц для несжимаемой жидкости // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 1. С. 58–74.

[2] Франк А.М. Дискретные модели несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 2001.

[3] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1961.

[4] Frank A.M. 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film // Europ. J. Mech.-B/Fluids. 2003. N 22. P. 445–471.

[5] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 8 июля 2004 г.