

# ДВУМЕРНАЯ НЕОДНОРОДНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ\*

Е. Г. БЫКОВА

*Красноярский государственный технический университет, Россия*

В. В. ШАЙДУРОВ

*Институт вычислительного моделирования СО РАН*

*Красноярск, Россия*

e-mail: lena@ccin.krascience.rssi.ru

The paper deals with the construction and justification of an inhomogeneous difference scheme with the improved order of magnitude for a two-dimensional elliptic equation. The heterogeneity of the scheme is connected with the periodic alternation of the difference operator pattern. At some nodes there is a nine-point pattern and in the rest there is a standard five-point pattern. The general idea of such a construction is illustrated as well as the justification principle of the improved accuracy of its solution. Numerical examples confirm the theoretical conclusion of the fourth accuracy order of the approximated solution in spite of the second order of approximation in each of the difference equations.

## 1. Введение

Настоящая работа продолжает цикл статей, посвященных построению и обоснованию неоднородных разностных схем повышенного порядка точности. Здесь рассматривается двумерная краевая задача Дирихле для уравнения эллиптического типа на прямоугольнике. Основная идея построения такой схемы аналогична [1], где она изложена для обыкновенного дифференциального уравнения, но увеличение размерности усложнило как саму схему, так и доказательство ее точности. Тем не менее для построенной схемы доказан четвертый порядок точности в равномерной норме, что подтверждено численными примерами.

Как и в одномерном случае, разностная схема аналогична по структуре системе метода экстраполированных уравнений У. Рюде [2] для конечных элементов. Но доказательство точности построенной схемы отличается от обоснования метода У. Рюде, основанного на минимизации функционала.

Напомним, что стандартный разностный метод второго порядка точности на прямоугольнике приводит к системе линейных алгебраических уравнений с пятидиагональной матрицей при соответствующем упорядочении неизвестных. Построенная схема приводит к системе уравнений с девятидиагональной матрицей, сохраняющей основные свойства: положительную определенность, симметрию и положительную обратимость.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Фольксвагена (Volkswagenstiftung, Deutschland).  
© Е. Г. Быкова, В. В. Шайдулов, 1997.

Напомним также, что термин “неоднородная схема” возник из-за разных правил построения сеточных уравнений в соседних узлах в отличие от однородных схем [3], когда правило построения одинаково для всех узлов сетки.

## 2. Краевая задача и ее неоднородная разностная аппроксимация

Пусть  $\Omega$  — единичный квадрат  $(0, 1) \times (0, 1)$  с границей  $\bar{\Omega}$ . Рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta u + du = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u = g \quad \text{на } \bar{\Omega}. \quad (2)$$

с достаточно гладкими заданными функциями

$$d, f \in C^4(\bar{\Omega}), \quad (3)$$

$$d \geq 0 \quad \text{на } \bar{\Omega}. \quad (4)$$

Эти условия обеспечивают однозначную разрешимость задачи. Предположим достаточную гладкость решения:

$$u \in C^6(\bar{\Omega}). \quad (5)$$

Для разностной аппроксимации задачи (1) – (2) построим равномерную разностную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{z_{i,j} = (x_i, y_j) : x_i = ih, y_j = jh, i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n\}$$

с шагом  $h = 1/n$  и четным  $n \geq 4$ . Введем также множество внутренних узлов

$$\omega_h = \{z_{i,j} \in \bar{\omega}_h : i = 1, 2, \dots, n-1, j = 1, 2, \dots, n-1\}$$

и разобьем его на множества узлов только с четными, только с нечетными индексами и с индексами разной четности (первый индекс четный, а второй нечетный или первый индекс нечетный, а второй четный):

$$\bar{\omega}_{00} = \{z_{i,j} \in \bar{\omega}_h : i = 0, 2, \dots, n, j = 0, 2, \dots, n\}, \quad \omega_{00} = \bar{\omega}_{00} \setminus \{z_{0,0}, z_{n,0}, z_{0,n}, z_{n,n}\},$$

$$\bar{\omega}_{11} = \{z_{i,j} \in \bar{\omega}_h : i = 1, 3, \dots, n-1, j = 1, 3, \dots, n-1\}, \quad \omega_{11} = \bar{\omega}_{11} \setminus \{z_{1,1}, z_{n-1,1}, z_{1,n-1}, z_{n-1,n-1}\},$$

$$\bar{\omega}_{01} = \{z_{i,j} \in \bar{\omega}_h : i = 0, 2, \dots, n, j = 1, 3, \dots, n-1\}, \quad \omega_{01} = \bar{\omega}_{01} \setminus \{z_{0,1}, z_{n,1}, z_{0,n-1}, z_{n,n-1}\},$$

$$\bar{\omega}_{10} = \bar{\omega}_h \setminus (\bar{\omega}_{00} \cup \bar{\omega}_{11} \cup \bar{\omega}_{01}), \quad \omega_{10} = \bar{\omega}_{10} \setminus \{z_{1,0}, z_{n-1,0}, z_{1,n}, z_{n-1,n}\}.$$

Стандартная конечно-разностная аппроксимация уравнения (1) состоит в замене вторых производных по  $x$  и по  $y$  на вторые центральные разности

$$u_{\circ\circ}^{xx}(x, y) = (u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y))/h^2, \quad (6)$$

$$u_{\circ\circ}^{yy}(x, y) = (u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h))/h^2.$$

В итоге получается сеточная задача

$$\begin{aligned} L^h u^h &= f \quad \text{на } \omega_h, \\ u^h &= g \quad \text{на } \gamma_h = \cap \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (7)$$

с разностным оператором

$$L^h v(z) = -v_{xx}^{\circ\circ}(z) - v_{yy}^{\circ\circ}(z) + d(z)v(z). \quad (8)$$

Путем разложения решения  $u$  в ряд Тейлора устанавливается второй порядок аппроксимации [3], а на основании разностного принципа максимума [3] доказывается устойчивость решения в сеточной норме

$$\|v\|_{\infty, \bar{\omega}_h} = \max_{z \in \bar{\omega}_h} |v(z)|.$$

В совокупности это дает сходимость приближенного решения  $u^h$  задачи (7) к точному решению  $u$  задачи (1) – (2) со вторым порядком точности:

$$\|u^h - u\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq c_1 h^2 \|u\|_{\infty, \bar{\Omega}}^{(4)}, \quad (9)$$

где использовано обозначение

$$\|u\|_{\infty, \bar{\Omega}}^{(k)} = \sum_{0 \leq i+j \leq k} \left\| \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{\infty, \bar{\Omega}}$$

с целым  $k \geq 0$  и

$$\|u\|_{\infty, \bar{\Omega}} = \sup_{\bar{\Omega}} |u|.$$

Для построения схемы четвертого порядка введем оператор с удвоенным шагом

$$L^{2h} v(x, y) = -(v(x-2h, y) + v(x, y-2h) - 4v(x, y) + v(x+2h, y) + v(x, y+2h))/4h^2 + d(x, y)v(x, y)$$

только в четных узлах  $\omega_{00}$ .

Во введенных обозначениях рассмотрим разностную задачу

$$L^h u^h = f \quad \text{на } \omega_h \setminus \omega_{00}, \quad (10)$$

$$L^h u^h - L^{2h} u^h = 0 \quad \text{на } \omega_{00}, \quad (11)$$

$$u^h = g \quad \text{на } \gamma_h. \quad (12)$$

Эта сеточная задача, как и (7), содержит  $(n+1)^2$  неизвестных и  $(n+1)^2$  уравнений. В четных узлах получается девятиточечный шаблон (рис. 1, б), а в остальных узлах схема имеет обычный пятиточечный шаблон (рис. 1, а).

Для функций, заданных на  $\bar{\Omega}$ , применим обозначение

$$v_{i,j} = v(x_i, y_j) = v(ih, jh).$$

В уравнениях (10) – (11) исключим краевые значения (12). Оставшиеся неизвестные и уравнения занумеруем от 1 до  $(n-1)^2$  в лексикографическом порядке, определяемом внутренними узлами  $z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1n-1}, z_{21}, \dots, z_{n-1n-1}$ . В итоге получается система линейных алгебраических уравнений с симметричной разреженной матрицей  $A^h$ :

$$A^h U^h = F^h. \quad (13)$$

---

<sup>1</sup>Здесь и далее мы будем обозначать символом  $c_i$  с целыми индексами  $i$  различные константы, не зависящие от  $x$  и  $h$ .

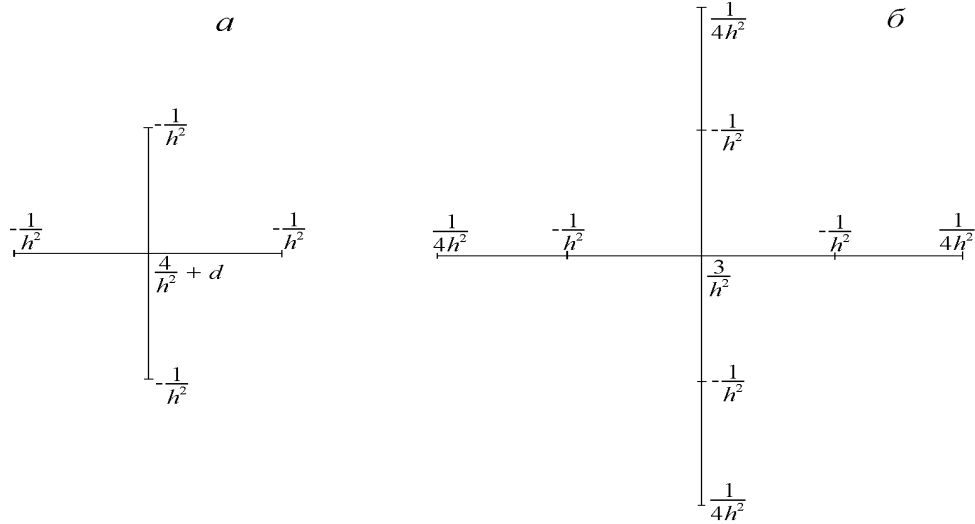


Рис. 1. Шаблоны неоднородной разностной схемы в четных (б) и остальных (а) узлах.

В качестве примера на рис. 2 приведена структура ненулевых элементов матрицы  $A^h$  для шага  $h = 1/8$ .

В теоретических целях нам будет полезно записать систему (10)–(12) также в векторном виде. Для этого занумеруем неизвестные и уравнения от 1 до  $(n + 1)^2$  в лексикографическом порядке, определяемом узлами  $z_{00}, z_{01}, \dots, z_{0n}, z_{10}, \dots, z_{nn}$ . В итоге получается система линейных алгебраических уравнений с матрицей  $B^h$ :

$$B^h V^h = G^h. \tag{14}$$

### 3. Устойчивость и разрешимость сеточной задачи

Докажем, что матрица системы (13) является положительно определенной.

**Теорема 1.** При выполнении условия (4) матрица  $A^h$  системы (13) положительно определена.

**Доказательство.** Левую часть каждого из уравнений (10) и (11) умножим на  $hu^h(z)$  с соответствующим  $z$  и просуммируем по всем  $z \in \omega_h$ :

$$h \sum_{z \in \omega_h} u^h(z) L^h u^h(z) - h \sum_{z \in \omega_{00}} u^h(z) L^{2h} u^h(z). \tag{15}$$

Положим  $u^h = 0$  на  $\gamma_h$  и для полученного выражения применим разностный аналог первой формулы Грина [3], перейдя к индексной форме записи:

$$h \sum_{z \in \omega_h} u^h(z) L^h u^h(z) = \frac{1}{h} \sum_{i,j=1}^n [(u_{ij}^h - u_{i-1,j}^h)^2 + (u_{ij}^h - u_{i,j-1}^h)^2] + h \sum_{i,j=1}^{n-1} d_{ij} (u_{ij}^h)^2, \tag{16}$$

$$2h \sum_{z \in \omega_{00}} u^h(z) L^{2h} u^h(z) = \frac{1}{2h} \sum_{i,j=1}^{n/2} [(u_{2i,2j}^h - u_{2i-2,2j}^h)^2 + (u_{2i,2j}^h - u_{2i,2j-2}^h)^2] +$$

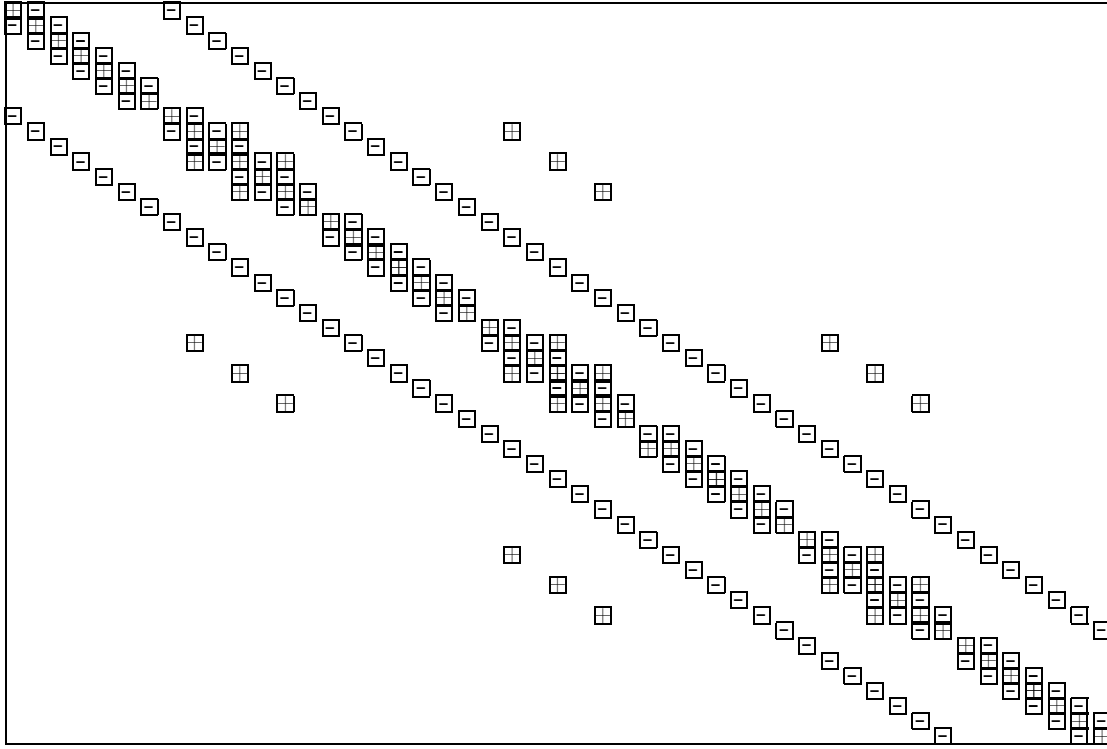


Рис. 2. Структура ненулевых элементов матрицы  $A^{1/8}$ . Знак  $\boxplus$  означает положительный элемент, знак  $\boxminus$  — отрицательный, их отсутствие — нулевой элемент.

$$+2h \sum_{i,j=1}^{n/2-1} d_{2i,2j} (u_{2i,2j}^h)^2. \quad (17)$$

Для вещественных чисел  $a, b$  справедливо неравенство  $a^2 + b^2 \geq (a + b)^2/2$ , из которого следует, что

$$\begin{aligned} & (u_{2i,2j}^h - u_{2i-1,2j}^h)^2 + (u_{2i,2j}^h - u_{2i,2j-1}^h)^2 + (u_{2i-1,2j}^h - u_{2i-2,2j}^h)^2 + (u_{2i,2j-1}^h - u_{2i,2j-2}^h)^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} [(u_{2i,2j}^h - u_{2i-2,2j}^h)^2 + (u_{2i,2j}^h - u_{2i,2j-2}^h)^2]. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом этого неравенства выражение (15) оценивается снизу величиной

$$\frac{3}{4h} \sum_{i,j=1}^n [(u_{i,j}^h - u_{i-1,j}^h)^2 + (u_{i,j}^h - u_{i,j-1}^h)^2] + h \sum_{i,j=1}^{n-1} d_{i,j} (u_{i,j}^h)^2 - h \sum_{i,j=1}^{n/2} d_{2i,2j} (u_{2i,2j}^h)^2. \quad (19)$$

Сумма  $h \sum_{i,j=1}^{n/2} d_{i,j} (u_{i,j}^h)^2$  содержит все слагаемые  $h \sum_{i,j=1}^{n/2} d_{2i,2j} (u_{2i,2j}^h)^2$ . Поэтому разность

$$h \sum_{i,j=1}^{n/2} d_{i,j} (u_{i,j}^h)^2 - h \sum_{i,j=1}^{n/2} d_{2i,2j} (u_{2i,2j}^h)^2$$

неотрицательна. Первая сумма в (19) оценивается снизу с помощью неравенства [3]

$$16h^2 \sum_{i,j=1}^n (u_{i,j}^h)^2 \leq \sum_{i,j=1}^n [(u_{i,j}^h - u_{i-1,j}^h)^2 + (u_{i,j}^h - u_{i,j-1}^h)^2], \quad (20)$$

являющегося аналогом вложения норм из  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$  в  $L^2(\Omega)$ . В итоге выражение (19) оценивается снизу величиной

$$12h \sum_{i,j=1}^{n-1} (u_{ij}^h)^2 = 12h \sum_{z \in \omega_h} (u^h(z))^2. \quad (21)$$

Сопоставляя ее с (15), приходим к утверждению теоремы.

Симметричность и положительная определенность матрицы  $A^h$  приводят к двум полезным заключениям. Во-первых, система (13) будет иметь единственное решение  $u^h$  при любой правой части  $F^h$ , что вытекает из недопустимости нулевого собственного числа у матрицы  $A^h$ . Во-вторых, для приближенного решения системы (13) становится возможным применение множества различных прямых и итерационных методов [4].

Теперь покажем, что система (14) удовлетворяет теоремам сравнения, несмотря на то, что она не является М-матрицей. Для этого введем обозначение  $G^h \leq 0$  для вектора  $G^h$  с компонентами  $G_j^h$ ,  $j = 1, \dots, (n+1)^2$ , означающее покомпонентное сравнение.

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие (4) и шаг  $h$  достаточно мал:

$$h \leq 2/(5\|d\|_{\infty, \bar{\Omega}}). \quad (22)$$

Тогда для системы (14) из  $G^h \geq 0$  следует  $V^h \geq 0$ .

**Доказательство.** Для стандартного использования результатов об М-матрицах необходимо, чтобы диагональные элементы были положительными, а внедиагональные — неотрицательными. Для уравнений в узлах  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{10}$  и  $\omega_{01}$  это условие выполнено, а для уравнений в узлах  $\omega_{00}$  — нет (см. рис. 2). Поэтому несколько преобразуем систему (14) или, что то же самое, систему (10) – (12), чтобы избавиться от положительных внедиагональных элементов в узлах  $\omega_{00}$ . Для этого к каждому уравнению, соответствующему  $(x, y) \in \omega_{00}$ , прибавим четыре уравнения, соответствующих узлам  $(x \pm h, y \pm h) \in \omega_{11}$ , с весом  $a$  и четыре уравнения, соответствующих узлам  $(x \pm h, y) \in \omega_{10}$ ,  $(x, y \pm h) \in \omega_{01}$ , с весом  $b$ . В результате в узле  $(x, y) \in \omega_{00}$  получается уравнение с шаблоном, изображенным на рис. 3, в котором

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{3}{h^2} - \frac{4b}{h^2}, \\ g_2 &= -\frac{1}{h^2} + b \left( \frac{4}{h^2} + d \right) - \frac{2a}{h^2}, \\ g_3 &= a \left( \frac{4}{h^2} + d \right) - \frac{2b}{h^2}, \\ g_4 &= \frac{1}{4h^2} - \frac{b}{h^2}, \\ g_5 &= -\frac{a}{h^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Попробуем подобрать веса  $a, b$  так, чтобы в полученном после преобразования уравнении диагональный элемент был положительным, а внедиагональные — неотрицательными. Это будет выполняться, если

$$g_1 \geq 0, \quad g_2 \leq 0, \quad g_3 \leq 0, \quad g_4 \leq 0, \quad g_5 \leq 0, \quad (24)$$

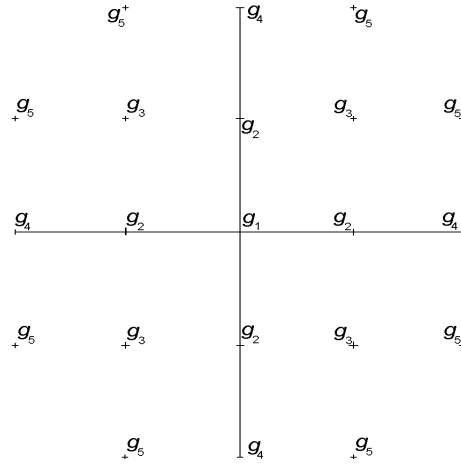


Рис. 3. 21-точечный шаблон уравнения в узле  $(x, y) \in \omega_{00}$  после преобразования.

что дает задачу теории линейного программирования об определении допустимого состояния. Пусть для шага  $h$  выполняется условие (22). Тогда задача (24) имеет непустое множество допустимых значений, из которого мы возьмем

$$a = 1/20, \quad b = 1/4. \quad (25)$$

В итоге получаются следующие коэффициенты шаблона на рис. 3:

$$g_1 = \frac{2}{h^2}, \quad g_2 = -\frac{1}{10h^2} + \frac{d}{4},$$

$$g_3 = -\frac{3}{10h^2} + \frac{d}{20}, \quad g_4 = 0, \quad g_5 = -\frac{1}{20h^2}.$$

Легко проверить, что при условии (22) мы приходим к неравенствам (24). Таким образом, вместо (14) получаем систему

$$\bar{B}^h V^h = \bar{G}^h \quad (26)$$

с  $M$ -матрицей  $\bar{B}^h$  и тем же самым решением  $V^h$ . Ввиду положительности весов  $a, b$  справедливо неравенство  $\bar{G}^h \geq 0$ . Поэтому на основании свойств  $M$ -матрицы [3]

$$V^h \geq 0.$$

Теперь докажем полезную в дальнейшем априорную оценку.

**Теорема 3.** Пусть для задачи

$$\begin{aligned} L^h v^h &= g^h \quad \text{на } \omega_h \setminus \omega_{00}, \\ L^h v^h - L^{2h} v^h &= g^h \quad \text{на } \omega_{00}, \\ v^h &= g^h \quad \text{на } \gamma_h \end{aligned} \quad (27)$$

выполнены оценки (4) и (22). Тогда

$$\|v^h\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq \frac{11}{48} \|g^h\|_{\infty, \omega_h} + \|g^h\|_{\infty, \gamma_h}. \quad (28)$$

**Доказательство.** Введем функцию

$$w = c_3 + c_4 x(1-x) \quad \text{на } \bar{\Omega} \quad (29)$$

с константами

$$c_3 = \|g^h\|_{\infty, \gamma_h}, \quad c_4 = \frac{11}{12} \|g^h\|_{\infty, \omega_h}. \quad (30)$$

Отметим, что

$$L^h w = Lw = dw + 2c_4 \geq 2c_4 \quad \text{на } \omega_h, \quad (31)$$

$$L^{2h} w = Lw = dw + 2c_4 \quad \text{на } \omega_{00}. \quad (32)$$

Поэтому для узлов  $(x, y) \in \omega_h \setminus \omega_{00}$  имеем

$$L^h w \geq 2c_4 \geq \|g^h\|_{\infty, \omega_h} \geq |g^h|. \quad (33)$$

Для граничных узлов  $(x, y) \in \gamma_h$  также очевидно, что

$$w \geq \|g^h\|_{\infty, \gamma_h} \geq |g^h|. \quad (34)$$

Рассмотрим сеточный оператор в узле  $(x, y) \in \omega_{00}$ , преобразованный по правилу, указанному в теореме 2:

$$\begin{aligned} & L^h w - L^{2h} w + a (L^h w(x+h, y+h) + L^h w(x-h, y+h) + \\ & + L^h w(x+h, y-h) + L^h w(x-h, y-h)) + b (L^h w(x, y+h) + \\ & + L^h w(x, y-h) + L^h w(x+h, y) + L^h w(x-h, y)) \geq \\ & \geq 8ac_4 + 8bc_4 = \frac{12}{5} c_4 \geq \frac{11}{5} \|g^h\|_{\infty, \omega_h} \geq \\ & \geq |g^h + a (g^h(x+h, y+h) + g^h(x-h, y+h) + \\ & + g^h(x+h, y-h) + g^h(x-h, y-h)) + b (g^h(x, y+h) + \\ & + g^h(x, y-h) + g^h(x+h, y) + g^h(x-h, y))|. \end{aligned} \quad (35)$$

Введем векторы  $V^h$  и  $W^h$  с компонентами

$$V^h = \{v_{ij}^h\}_{i,j=0}^{n+1}, \quad W^h = \{w_{ij}^h\}_{i,j=0}^{n+1},$$

упорядоченными, как в системе (14). Тогда из неравенств (33) – (35) следует, что

$$\overline{B}^h W^h \geq \overline{B}^h V^h, \quad \text{то есть} \quad \overline{B}^h (W^h - V^h) \geq 0.$$

Из свойств M-матриц вытекает, что

$$W^h - V^h \geq 0, \quad \text{то есть} \quad w \geq v^h \quad \text{на } \overline{\omega}_h.$$

Аналогично из (33) – (35) следует, что

$$w \geq -v^h \quad \text{на } \overline{\omega}_h.$$

Поэтому

$$|v^h| \leq w \quad \text{на } \overline{\omega}_h. \quad (36)$$

В левой части возьмем максимум по  $\overline{\omega}_h$ , а в правой — по  $\overline{\Omega}$ . В итоге получаем

$$\|v^h\|_{\infty, \overline{\omega}_h} \leq c_3 + c_4/4,$$

что равносильно (28).



#### 4. Сходимость неоднородной разностной схемы

**Теорема 4.** Пусть  $u, u^h$  – решения задач (1)–(2) и (10)–(12) соответственно и выполнены условия (3)–(5). Тогда

$$\|u - u^h\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq c_5 h^4. \quad (37)$$

**Доказательство.** Установим более тонкую структуру погрешности. Докажем, что решение  $u^h$  представимо в виде

$$u^h = u + h^4 \rho^h \quad \text{на } \omega_{11}, \quad (38)$$

$$u^h = u + w_{01} h^4 + h^4 \rho^h \quad \text{на } \bar{\omega}_{01} \cup \bar{\omega}_{10}, \quad (39)$$

$$u^h = u + w_{00} h^4 + h^4 \rho^h \quad \text{на } \bar{\omega}_{00}, \quad (40)$$

$$\text{где функции} \quad w_{01} = -\frac{1}{48} \mu, \quad w_{00} = -\frac{1}{12} \mu, \quad \mu = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad (41)$$

не зависят от  $h$ , а остаточный член  $\rho^h$  ограничен следующим образом:

$$\|\rho^h\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq c_6. \quad (42)$$

В выражении (6) применим разложение в ряд Тейлора из точек  $(x \pm h, y)$  и  $(x, y \pm h)$  в узел  $(x, y)$ . Далее будем опускать аргумент  $(x, y)$  там, где это не вызывает недоразумений:

$$u_{xx}^{\circ\circ} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + h^4 \mu_{1x}^h, \quad (43)$$

$$u_{yy}^{\circ\circ} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + h^4 \mu_{1y}^h,$$

здесь

$$|\mu_{1x}^h| \leq \frac{1}{360} \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right\|_{\infty, \bar{\Omega}} \quad \text{на } \omega_h, \quad (44)$$

$$|\mu_{1y}^h| \leq \frac{1}{360} \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right\|_{\infty, \bar{\Omega}} \quad \text{на } \omega_h.$$

С учетом разложений (38), (40) и (43) для нечетных узлов  $\omega_{11}$  получаем

$$\begin{aligned} L^h u^h &= L^h u + h^4 L^h \rho^h - h^2 (w_{01}(x+h, y) + \\ &+ w_{01}(x-h, y) + w_{01}(x, y+h) + w_{01}(x, y-h)). \end{aligned} \quad (45)$$

Для функции  $w_{01}$  используем разложение в ряд Тейлора из точек  $(x \pm h, y)$  и  $(x, y \pm h)$  в узел  $(x, y)$ :

$$w_{01}(x+h, y) + w_{01}(x-h, y) + w_{01}(x, y+h) + w_{01}(x, y-h) = 4w_{01} + 2h^2 \mu_{01}^h, \quad (46)$$

где с учетом (41) имеем

$$2|\mu_{01}^h| \leq \left\| \frac{\partial^2 w_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{01}}{\partial y^2} \right\|_{\infty, \bar{\Omega}} = \frac{1}{124} \|u\|_{\infty, \bar{\Omega}}^{(6)}. \quad (47)$$

Учитывая разложения (43), (46) в (45), получаем равенство

$$L^h u^h = (-\Delta u + du) - \frac{h^2}{12} \mu - h^4 (\mu_{1x}^h + \mu_{1y}^h) + h^4 L^h \rho^h - 4h^2 w_{01} - 2h^4 \mu_{01}.$$

На основании уравнений (1), (10) и определений (41) происходит сокращение слагаемых порядка 1 и  $h^2$ . Разделим оставшиеся слагаемые на  $h^4$ . В результате приходим к равенству

$$L^h \rho^h = \mu_{1x}^h + \mu_{1y}^h + 2\mu_{01}^h \quad \text{на } \omega_{11}. \quad (48)$$

Подстановка разложений (39), (40), (46) в сеточный оператор (11) для четных узлов  $\omega_{00}$  дает следующее соотношение:

$$\begin{aligned} L^h u^h - L^{2h} u^h &= L^h u - L^{2h} u + h^4(L^h \rho^h - L^{2h} \rho^h) + \\ &+ h^4(4w_{00}/h^2 + dw_{00}) - 4h^2 w_{01} - 2h^4 \mu_{01}^h. \end{aligned} \quad (49)$$

В четных узлах  $w_{00}$  справедливы разложения, аналогичные (43), но с удвоенным шагом, что дает

$$L^{2h} u = (-\Delta u + du) - \frac{h^2}{3} \mu - h^4(\mu_{2x}^h + \mu_{2y}^h), \quad (50)$$

где

$$|\mu_{2x}^h| \leq \frac{4}{45} \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right\|_{\infty, \bar{\Omega}}, \quad |\mu_{2y}^h| \leq \frac{4}{45} \left\| \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} \right\|_{\infty, \bar{\Omega}} \quad \text{на } \omega_{00}. \quad (51)$$

Учитывая (50) в (49), получаем равенство

$$\begin{aligned} L^h u^h - L^{2h} u^h &= h^4(L^h \rho^h - L^{2h} \rho^h) + 4h^2 w_{00} + dw_{00} h^4 - 4h^2 w_{01} - 2h^4 \mu_{01}^h - \\ &- \frac{h^2}{12} \mu - h^4 \mu_{1x}^h - h^4 \mu_{1y}^h + \frac{h^2}{3} \mu + h^4 \mu_{2x}^h + h^4 \mu_{2y}^h. \end{aligned}$$

Снова на основании уравнений (1), (10) и определений (41) происходит сокращение слагаемых порядка 1 и  $h^2$ . На этот раз сокращение слагаемых порядка  $h^2$  произошло за счет правильного выбора множителя при  $L^{2h} u^h$ . Оставшиеся слагаемые после деления на  $h^4$  дают равенство

$$L^h \rho^h - L^{2h} \rho^h = \mu_{1x}^h + \mu_{1y}^h - \mu_{2x}^h - \mu_{2y}^h - dw_{00} \quad \text{на } \omega_{00}. \quad (52)$$

Подстановка разложений (38), (39), (40) в сеточный оператор (10) для узлов с переменной четностью индексов  $w_{10}$  дает соотношение

$$L^h u^h = L^h u + h^4 L^h \rho^h + h^4 \left( \left( \frac{4w_{01}}{h^2} + dw_{01} \right) - \frac{w_{00}(x+h, y)}{h^2} - \frac{w_{00}(x-h, y)}{h^2} \right). \quad (53)$$

Для функции  $w_{00}$  используем разложение в ряд Тейлора из точек  $(x \pm h, y)$  в узел  $(x, y)$  аналогично (46), (47). В результате получаем

$$w_{00}(x+h, y) + w_{00}(x-h, y) = 2w_{00}(x, y) + h^2 \mu_{00}^h(x, y), \quad (54)$$

где с учетом (41) имеем

$$|\mu_{00}^h| \leq \frac{1}{6} \|u\|_{\infty, \bar{\Omega}}^{(6)}. \quad (55)$$

Учитывая разложения (43), (54) в (53), получаем равенство

$$L^h u^h = (-\Delta u + du) - \frac{h^2}{12} \mu + h^4 L^h \rho^h + 4h^2 w_{01} +$$

$$+h^4 dw_{01} - 2h^2 w_{00} - h^4 \mu_{1x}^h - h^4 \mu_{1y}^h - h^4 \mu_{00}^h.$$

Снова на основании уравнений (1), (10) и определений (41) происходит сокращение слагаемых порядка 1 и  $h^2$ . В результате после деления на  $h^4$  приходим к равенству

$$L^h \rho^h = -dw_{01} + \mu_{1x}^h + \mu_{1y}^h + \mu_{00}^h \quad \text{на } \omega_{10}. \quad (56)$$

Аналогично для узлов другой группы переменной четности  $\omega_{01}$  получаем равенство

$$L^h \rho^h = -dw_{01} + \mu_{1x}^h + \mu_{1y}^h + \mu_{00}^h \quad \text{на } \omega_{01} \quad (57)$$

с такой же оценкой (55) остаточного члена  $\mu_{00}^h$ .

Учитывая (39), (40), (48), (52), (56) и (57), получаем для  $\rho^h$  задачу

$$\begin{aligned} L^h \rho^h &= \xi^h \quad \text{на } \omega_h \setminus \omega_{00}, \\ L^h \rho^h - L^{2h} \rho^h &= \xi^h \quad \text{на } \omega_{00}, \\ \rho^h &= -\omega_{01} \quad \text{на } \gamma_h \cap (\bar{\omega}_{01} \cup \bar{\omega}_{10}), \\ \rho^h &= -\omega_{00} \quad \text{на } \gamma_h \cap \bar{\omega}_{00} \end{aligned} \quad (58)$$

с правой частью

$$\begin{aligned} \xi^h &= \mu_{1x}^h + \mu_{1y}^h + 2\mu_{01}^h \quad \text{на } \omega_{11}, \\ \xi^h &= -dw_{01} + \mu_{1x}^h + \mu_{1y}^h + \mu_{00}^h \quad \text{на } \omega_{01} \cup \omega_{10}, \\ \xi^h &= \mu_{1x}^h + \mu_{1y}^h - \mu_{2x}^h - \mu_{2y}^h - dw_{00} \quad \text{на } \omega_{00}. \end{aligned}$$

Благодаря оценкам (44), (47), (51), (55), ограниченности функций  $d$  и  $\mu$  из (41) справедливо неравенство

$$|\xi^h| \leq c_7 \quad \text{на } \omega_h. \quad (59)$$

Привлечем априорную оценку из теоремы 3. Тогда с учетом (41)

$$\|\rho^h\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq \frac{11}{48} \|\xi^h\|_{\infty, \omega_h} + \frac{1}{12} \|\mu\|_{\infty, \gamma_h}. \quad (60)$$

Принимая во внимание оценку (59), получаем (42) с константой

$$c_6 = 11c_7/48 + \|\mu\|_{\infty, \gamma_h}/12.$$

Из представления (38) – (40) вытекает, что

$$\|u - u^h\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq h^4 \left( \|\rho^h\|_{\infty, \bar{\omega}_h} + \|w_{01}\|_{\infty, \bar{\Omega}} + \|w_{00}\|_{\infty, \bar{\Omega}} \right).$$

С учетом (60) это доказывает оценку (37).

## 5. Численные примеры

По аналогии с работой [1] применим построенный метод для двух задач вида (1)–(2) с улучшенной гладкостью и с осциллирующим решением. Первая задача имеет вид

$$-\Delta u = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) y(1-y) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + (1-x) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \pi y(1-y) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) -$$

$$\begin{aligned}
 & -x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \pi y(1-y) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \frac{1}{2}x(1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \pi^2 y(1-y) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \\
 & + 2x(1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + x(1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) (1-y) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \pi - \\
 & -x(1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) y \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \pi \quad \text{на } \Omega, \\
 & \quad \quad \quad u \underset{=}{=} 0 \quad \text{на } \cdot
 \end{aligned} \tag{61}$$

Ее точное решение

$$u(x, y) = x(1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) y(1-y) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

Вторая задача имеет вид

$$\begin{aligned}
 & -\Delta u = -32c(1-x)y(1-y) + 512sx(1-x)y(1-y) + 32cxy(1-y) + \\
 & + 2sy(1-y) - 32cx(1-x)(1-y) + 32cx(1-x)y + 2sx(1-x) \quad \text{на } \Omega, \\
 & \quad \quad \quad u = 0 \quad \text{на } \cdot,
 \end{aligned} \tag{62}$$

где использованы обозначения  $s = \sin(16x + 16y)$  и  $c = \cos(16x + 16y)$ . Ее точное решение

$$u(x, y) = \sin(16x + 16y)x(1-x)y(1-y).$$

В табл. 1, 2 приведены погрешности  $\delta_2 = \|u - u^h\|_{\infty, \bar{\omega}_h}$  и  $\delta_1 = \|u - u^h\|_{2, \bar{\omega}_h} = \left(\sum_{z \in \bar{\omega}_h} (u(z) - u^h(z))^2\right)^{1/2}$  решений обеих задач стандартным методом (7) второго порядка точности и предложенным методом (10)–(12) четвертого порядка.

Т а б л и ц а 1

Погрешность приближенных решений задачи с улучшенной гладкостью

№	Задача I			
	метод (7)		метод (10)–(12)	
	$2, \bar{\omega}_h$	$\infty, \bar{\omega}_h$	$2, \bar{\omega}_h$	$\infty, \bar{\omega}_h$
4	$1.18_{10} - 03$	$2.24_{10} - 03$	$6.73_{10} - 04$	$2.20_{10} - 03$
8	$2.92_{10} - 04$	$6.11_{10} - 04$	$4.30_{10} - 05$	$1.64_{10} - 04$
16	$7.27_{10} - 05$	$1.52_{10} - 04$	$2.68_{10} - 06$	$1.02_{10} - 05$
32	$1.82_{10} - 05$	$3.82_{10} - 05$	$1.68_{10} - 07$	$6.46_{10} - 07$
64	$4.54_{10} - 06$	$9.54_{10} - 06$	$1.06_{10} - 08$	$4.08_{10} - 08$

Т а б л и ц а 2

Погрешность приближенных решений осциллирующей задачи

№	Задача II			
	метод (7)		метод (10)–(12)	
	$2, \bar{\omega}_h$	$\infty, \bar{\omega}_h$	$2, \bar{\omega}_h$	$\infty, \bar{\omega}_h$
4	$1.38_{10} - 01$	$2.70_{10} - 01$	$1.53_{10} - 01$	$3.64_{10} - 01$
8	$1.18_{10} - 02$	$2.67_{10} - 02$	$4.70_{10} - 02$	$1.41_{10} - 01$
16	$2.42_{10} - 03$	$5.76_{10} - 03$	$2.57_{10} - 03$	$1.04_{10} - 02$
32	$5.78_{10} - 04$	$1.39_{10} - 03$	$1.42_{10} - 04$	$6.00_{10} - 04$
64	$1.43_{10} - 04$	$3.52_{10} - 04$	$8.45_{10} - 06$	$3.61_{10} - 05$

Эти же данные представлены на графиках (в логарифмическом масштабе по обеим осям). На рис. 4, 5 цифрами 1, 2 обозначены погрешности  $\delta_1$  и  $\delta_2$  метода (7); 3, 4 — метода (10)–(12); 5 и 6 — графики прямых с наклонами  $\text{tg}(\varphi) = 2$  и  $\text{tg}(\varphi) = 4$ , характеризующими зависимость  $\delta = h^2$  и  $\delta = h^4$  соответственно.

Кроме того, на рис. 6 приведен поточечный график погрешности  $\delta'_2 = u - u^h$  предложенного метода (10)–(12) на сетке  $\bar{\omega}_h$  с шагом  $h = 1/32$  для задачи I.

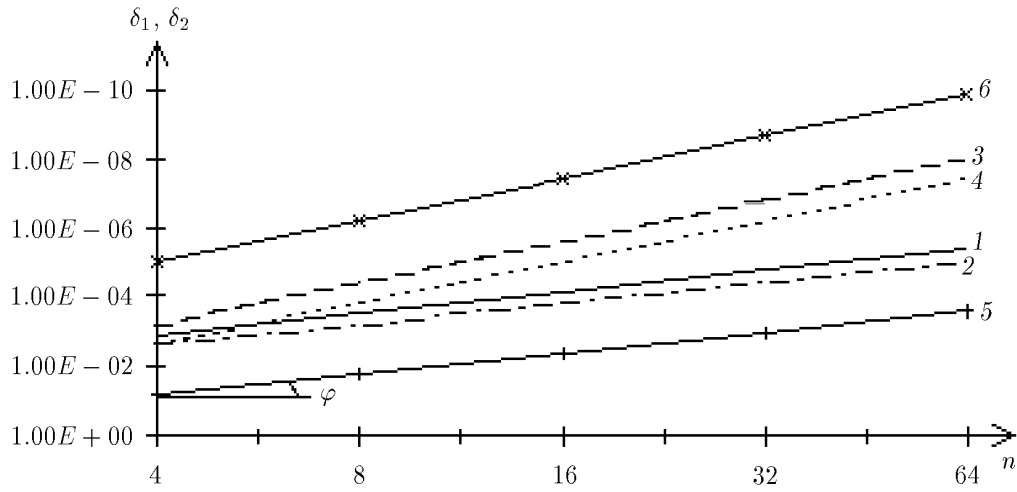


Рис. 4. Погрешность приближенных решений задачи I.

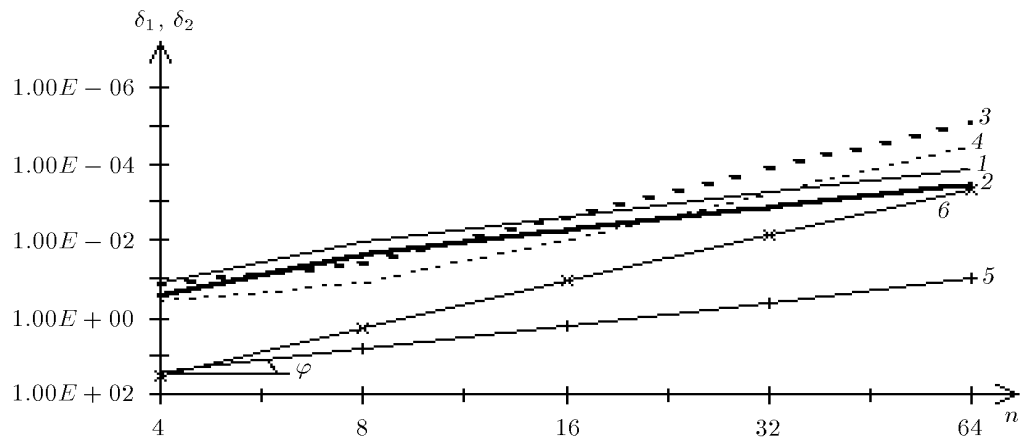


Рис. 5. Погрешность приближенных решений задачи II.

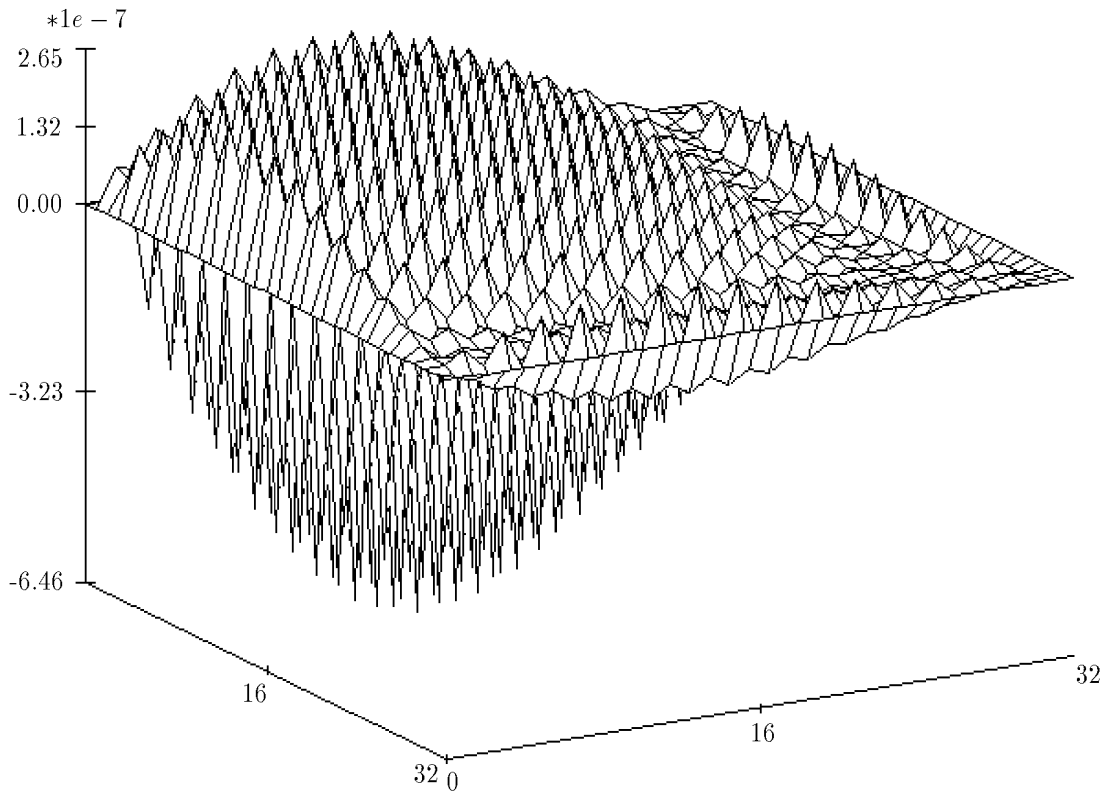


Рис. 6. Погрешность  $\delta'_2$  метода (10)–(12) при  $n = 32$ . Задача I.

## Список литературы

- [1] Быкова Е. Г., Шайдуров В. В. *Неоднородная разностная схема повышенного порядка точности. Одномерный иллюстративный пример*. Препринт №17, Вычисл. центр СО РАН, Красноярск, 1996.
- [2] Růde U. *Extrapolation and Related Techniques for Solving Elliptic Equations*. Preprint №I-9135, München Technical University, 1991.
- [3] Самарский А. А. *Теория разностных схем*. Наука, М., 1977.
- [4] Самарский А. А., Николаев Е. С. *Методы решения сеточных уравнений*. Наука, М., 1978.

Поступила в редакцию 15 января 1997 г.,