

К ВОПРОСУ О НЕАДЕКВАТНОСТИ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, А. Ш. Джабраилов
Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия, Россия
e-mail: arsen82@yandex.ru

A comparative analysis of the efficiency of use of isoparametrical finite elements and elements which geometrical characteristics are calculated using exact formulas is presented for the case of shells allowing rigid displacements under the influence of loading. Triangular and quadrangular finite elements are considered. Presented calculations for the case of an ellipse of revolution and a cylinder leaning on a spring support, have allowed to draw a conclusion on necessity of use of the finite elements which geometrical parameters are calculated using analytical formulas combined with vector interpolation of translations.

Введение

Одной из наиболее сложных проблем, с которыми приходится сталкиваться при конечно-элементном анализе напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций, является учет смещений конечного элемента как жесткого целого. Ряд исследователей в своих работах, посвященных применению метода конечных элементов (МКЭ) в расчетах оболочек, отмечают, что при изопараметрической аппроксимации перемещений смещения конечного элемента (КЭ) как жесткого целого воспроизводятся точно. Однако данное утверждение не подкреплено, на наш взгляд, достаточными доказательствами, например убедительными примерами расчета. В этой связи несомненный интерес представляет сопоставительный анализ использования изопараметрических конечных элементов и элементов других типов в качестве элементов дискретизации оболочек, допускающих жесткие смещения под воздействием заданной нагрузки.

1. Алгоритм формирования матрицы жесткости конечного элемента

При формировании матрицы жесткости конечного элемента и столбца внешней нагрузки использовалось равенство работ внешних и внутренних сил на возможном перемещении [1]:

$$\int_V \{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}^T \{\sigma^{\alpha\beta}\} dV = \int_F \{U\}^T \{P\} dF, \quad (1)$$

где $\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}^T = \{\varepsilon_{11}^{\zeta} \varepsilon_{22}^{\zeta} \varepsilon_{12}^{\zeta}\}$ — матрица-строка деформаций в произвольном слое оболочки, отстоящем от срединной поверхности на расстоянии ζ ;

$\{\sigma^{\alpha\beta}\} = \begin{Bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \end{Bmatrix}$ — матрица-столбец напряжений в произвольном слое оболочки;

$\{U\}^T = \{\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}\}$ — матрица-строка, содержащая компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности оболочки;

$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$ — матрица-столбец внешней нагрузки.

Интеграл по объему конечного элемента представляет собой работу внутренних сил, а интеграл по площади поверхности конечного элемента (так как внешняя нагрузка является поверхностной) — работу внешних сил на возможном перемещении.

Применяя традиционную интерполяционную процедуру [1], столбец $\{U\}$ можно представить в виде матричного произведения

$$\{U\} = [A]\{U_y^n\}, \quad (2)$$

где $\{U_y^n\}^T = \{\{\mathbf{u}_y^n\} \{\mathbf{v}_y^n\} \{\mathbf{w}_y^n\}\}$ — столбец узловых варьируемых параметров конечного элемента в локальной системе координат, а матрица $[A]$, содержащая аппроксимирующие функции φ , имеет следующий вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T \end{bmatrix}.$$

Используя геометрические и физические соотношения теории оболочек [2], можно сформировать матричные зависимости

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\} = [\Gamma]\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}, \quad \{\sigma^{\alpha\beta}\} = [C]\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\},$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = [D][A]\{U_y^n\}, \quad (3)$$

где $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}^T = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{12} \ \chi_{11} \ \chi_{22} \ \chi_{12}\}$ — столбец деформации точки срединной поверхности;

$$[\Gamma]_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2\zeta \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Входящие в (3) матрица упругости $[C]$ и матрица дифференциальных операторов $[D]$ имеют следующий вид:

$$[C]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & -\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \right) & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 - \frac{\partial^3 r}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^4 - \\ -3 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 & \frac{1}{r^2} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^3 \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s} & -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Здесь S и θ — глобальные криволинейные координаты точки срединной поверхности оболочки вращения (S — длина дуги меридиана; θ — угол, отсчитываемый от образующей против хода часовой стрелки); r — радиус вращения; x — глобальная осевая координата.

С учетом (2)–(6) функционал (1) примет вид

$$\{U_y^x\}^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV \{U_y^x\}^T = \{U_y^x\}^T \int_F [A]^T \{P\} dF. \quad (7)$$

Выполняя операцию минимизации функционала (1), можно записать следующее матричное уравнение:

$$[K] \{U_y^x\} = \{R\}, \quad (8)$$

где $[K] = \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV$ — матрица жесткости конечного элемента в локальной системе координат; $\{R\} = \int_F [A]^T \{P\} dF$ — столбец внешней нагрузки конечного элемента.

Матрицу жесткости и столбец внешней нагрузки конечного элемента в глобальной системе координат получают в результате умножения $[K]$ и $\{R\}$ на матрицу преобразований:

$$[K]^\Gamma = [T]^T [K] [T], \quad \{R\}^\Gamma = [T]^T \{R\}, \quad (9)$$

где элементы матрицы $[T]$ определяются на основании соотношений

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^m}{\partial \xi} &= \frac{\partial q^m}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{\partial q^m}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial q^m}{\partial \eta} &= \frac{\partial q^m}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{\partial q^m}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}.\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь под q понимается компонента вектора перемещения \mathbf{u} , \mathbf{v} или \mathbf{w} ; ξ и η — локальные координаты конечного элемента, а верхний индекс m указывает на номер узла используемого дискретного элемента.

2. Аппроксимация перемещений и геометрических величин

В настоящей статье рассматриваются тре- и четырехугольные конечные элементы, узловыми варьируемыми параметрами которых выбираются компоненты вектора перемещения и их первые производные. Столбы неизвестных в узле КЭ в локальной и глобальной системах координат имеют вид

$$\begin{aligned}\{U_y^\pi\}_{1 \times 9}^T &= \{\mathbf{u} \quad \mathbf{u}_{,\xi} \quad \mathbf{u}_{,\eta} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{v}_{,\xi} \quad \mathbf{v}_{,\eta} \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{w}_{,\xi} \quad \mathbf{w}_{,\eta}\}; \\ \{U_y^\Gamma\}_{1 \times 9}^T &= \{\mathbf{u} \quad \mathbf{u}_{,S} \quad \mathbf{u}_{,\theta} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{v}_{,S} \quad \mathbf{v}_{,\theta} \quad \mathbf{w} \quad \mathbf{w}_{,S} \quad \mathbf{w}_{,\theta}\},\end{aligned}\tag{11}$$

где запятая означает операцию дифференцирования по соответствующей координате.

Перемещение внутренней точки КЭ определяется через свои узловые значения с помощью интерполяционной зависимости следующего вида:

$$q = \{\varphi\}^T \{q_y^\pi\},\tag{12}$$

где матрица-строка $\{\varphi\}^T$ содержит функции формы.

Структура матрицы-строки $\{\varphi\}^T$ и столбца узловых значений компонент вектора перемещения в локальной системе координат q_y^π зависит от типа используемого дискретного элемента, например, для треугольных КЭ с девятью степенями свободы в узле можно записать

$$\begin{aligned}\{\varphi\}_{1 \times 9}^T &= \{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_9\}, \\ \{q_y^\pi\}_{1 \times 9}^T &= \{q^i q^j q^k q_{,\xi}^i q_{,\xi}^j q_{,\xi}^k q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta}^k\},\end{aligned}\tag{13}$$

где $\varphi_1 \dots \varphi_9$ получены с использованием полных двумерных полиномов третьей степени [3]; i, j, k — узлы треугольного КЭ; локальные координаты ξ и η изменяются в пределах $0 \leq \xi, \eta \leq 1$.

При использовании в качестве элемента дискретизации четырехугольного КЭ столбцы $\{\varphi\}$ и q_y^π принимают следующий вид:

$$\{\varphi\}_{1 \times 12}^T = \{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{12}\},$$

$$\{q_y^{\pi}\}_{1 \times 12}^T = \{q^i q^j q^k q^l q_{,\xi}^i q_{,\xi}^j q_{,\xi}^k q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta}^k q_{,\eta}^l\}, \quad (14)$$

где $\varphi_1 \dots \varphi_{12}$ представляют собой произведения полиномов Эрмита третьей степени, а локальные координаты ξ и η изменяются в диапазоне $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$.

При изопараметрической аппроксимации геометрические величины внутренней точки КЭ, входящие в матрицу $[D]$ соотношения (6), определяются через свои узловые значения по формулам, аналогичным (12). Так, например, для радиуса вращения можно записать интерполяционную зависимость

$$r = \{\varphi\}^T \{r_y^{\pi}\}, \quad (15)$$

где структура столбца $\{r_y^{\pi}\}$ подобна структурам $\{q_y^{\pi}\}$ из соотношений (13) и (14).

Столбец $\{r_y^{\pi}\}$ может быть выражен через столбец узловых значений радиуса вращения и его производных в глобальной системе координат

$$\{r_y^{\pi}\} = [PR] \{r_y^{\Gamma}\}, \quad (16)$$

где $\{r_y^{\Gamma}\}^T = \{r^i r^j r^k r^l r_{,\alpha}^i r_{,\alpha}^j r_{,\alpha}^k r_{,\alpha}^l r_{,\beta}^i r_{,\beta}^j r_{,\beta}^k r_{,\beta}^l\}$ для треугольного конечного элемента;

$\{r_y^{\Gamma}\}^T = \{r^i r^j r^k r^l r_{,\alpha}^i r_{,\alpha}^j r_{,\alpha}^k r_{,\alpha}^l r_{,\beta}^i r_{,\beta}^j r_{,\beta}^k r_{,\beta}^l\}$ для четырехугольного КЭ.

Матрица преобразования $[PR]$ для тре- и четырехугольных конечных элементов имеет размеры 9×9 и 12×12 соответственно.

С целью сокращения объема статьи ниже приводятся соотношения, справедливые только для треугольного конечного элемента.

Если в качестве глобальных координат α и β использовать длину дуги меридиана S и окружную координату θ , то матрица PR для треугольного конечного элемента будет иметь следующий вид:

$$[PR]_{9 \times 9} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & & & \\ \hline & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & S_{,\xi} & & & \theta_{,\xi} & & \\ \hline & & & & S_{,\xi} & & & \theta_{,\xi} & \\ \hline & & & & & S_{,\xi} & & & \theta_{,\xi} \\ \hline & & & S_{,\eta} & & & \theta_{,\eta} & & \\ \hline & & & & S_{,\eta} & & & \theta_{,\eta} & \\ \hline & & & & & S_{,\eta} & & & \theta_{,\eta} \\ \hline \end{array}. \quad (17)$$

Глобальные координаты S и θ внутренней точки треугольного КЭ выражаются через координаты узлов соотношениями

$$S = (1 - \xi - \eta)S^i + \xi S^j + \eta S^k, \quad \theta = (1 - \xi - \eta)\theta^i + \xi\theta^j + \eta\theta^k, \quad (18)$$

где ξ, η изменяются в пределах $0 \leq \xi, \eta \leq 1$.

Входящие в (17) производные $S_{,\xi}$, $S_{,\eta}$, $\theta_{,\xi}$ и $\theta_{,\eta}$ определяются дифференцированием (18):

$$S_{,\xi} = S^j - S^i, \quad S_{,\eta} = S^k - S^i, \quad \theta_{,\xi} = \theta^j - \theta^i, \quad \theta_{,\eta} = \theta^k - \theta^i. \quad (19)$$

Зависимость (15) с учетом (16) примет вид

$$r = \{\varphi\}^T [PR] \{r_y^{\Gamma}\}. \quad (20)$$

Первые, вторые и третьи производные радиуса вращения в точке интегрирования определяются соответствующим дифференцированием (20) по глобальной координате S :

$$\begin{aligned} r_{,s} &= (\{\varphi_{,\xi}\}^T \xi_{,s} + \{\varphi_{,\eta}\}^T \eta_{,s}) [PR] \{r_y^\Gamma\}, \\ r_{,ss} &= (\{\varphi_{,\xi\xi}\}^T (\xi_{,s})^2 + \{\varphi_{,\eta\eta}\}^T (\eta_{,s})^2 + 2\{\varphi_{,\xi\eta}\}^T \xi_{,s} \eta_{,s}) [PR] \{r_y^\Gamma\}, \\ r_{,sss} &= (\{\varphi_{,\xi\xi\xi}\}^T \xi_{,s}^3 + \{\varphi_{,\xi\xi\eta}\}^T \xi_{,s}^2 \eta_{,s} + \{\varphi_{,\eta\eta\xi}\}^T \eta_{,s}^2 \xi_{,s} + \{\varphi_{,\eta\eta\eta}\}^T \eta_{,s}^3 + \\ &+ 2\xi_{,s} \eta_{,s} (\{\varphi_{,\xi\eta\xi}\}^T \xi_{,s} + \{\varphi_{,\xi\eta\eta}\}^T \eta_{,s})) [PR] \{r_y^\Gamma\}. \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом (20) и (21) формируется матрица жесткости изопараметрического треугольного конечного элемента размером 27×27 . Данный тип элементов использовался для дискретизации оболочек, допускающих жесткие смещения под действием заданной нагрузки.

При этом в названном элементе геометрические параметры узловых значений векторов r_y^Γ определяются по аналитическим зависимостям рассматриваемой поверхности, а уже в каждой точке интегрирования с локальными координатами ξ, η геометрические параметры определяются аппроксимирующими соотношениями (21). Операция использования соотношений (21) при формировании матрицы жесткости конечного элемента приводит к значительным погрешностям.

Координаты точки интегрирования ξ и η в локальной системе координат являются заданными величинами. По заданным координатам точнее определять с использованием аппроксимирующих соотношений (18) глобальные координаты S и θ , после чего по аналитическим зависимостям рассматриваемой поверхности находить геометрические параметры в точке интегрирования конечного элемента, отказавшись от названия “изопараметрический элемент”.

Результаты конечно-элементных решений, полученных при использовании в качестве элементов дискретизации изопараметрических конечных элементов, сравнивались с результатами численного анализа, выполненного с применением конечных элементов, в которых геометрические величины в точке интегрирования по площади конечного элемента в локальной системе координат вычислялись по точным аналитическим формулам после определения глобальных координат S, θ по соотношениям (18).

Пример 1. Рассчитан фрагмент эллипсоида вращения, нагруженный внутренним давлением интенсивности q (рис. 1). Исходные данные имели следующие значения: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0.3$, $q = 5$ МПа, $t = 0.02$ м, параметры эллипса $a = 1.3$ м, $b = 0.9$ м, координата x изменялась в пределах $0 \leq x \leq 1.2$ м. На правом краю оболочка имеет пружинные опоры, позволяющие ей смещаться в меридиональном направлении как абсолютно твердому телу под действием заданной нагрузки. Вследствие наличия осевой симметрии эллипсоид представлен одной полоской треугольных КЭ, ориентированной в меридиональном направлении.

Расчеты выполнены в трех вариантах. В первом варианте для дискретизации оболочки использовались изопараметрические конечные элементы; во втором и третьем вариантах геометрические характеристики в точке интегрирования вычислялись по аналитическим формулам, определяющим форму срединной поверхности рассчитываемой оболочки. Вторым и третий варианты различались способом аппроксимации перемещений внутренней области треугольного КЭ. Во втором варианте использовалась традиционная интерполяционная процедура (12). В третьем варианте реализован векторный способ аппроксимации перемещений в треугольном КЭ [4].

Таблица 1. Количество элементов дискретизации для трех вариантов расчета

| $x, \text{ м}$ | $\sigma, \text{ МПа}$ | Вариант I | | | | Вариант II | | | | Вариант III | | | | Точное решение [5] |
|----------------|-----------------------|-----------|--------|--------|--------|------------|--------|--------|--------|-------------|--------|--------|------------------|--------------------|
| | | 8 | 16 | 32 | 48 | 8 | 16 | 32 | 48 | 8 | 16 | 32 | 48 | |
| 0.00 | σ_M | 96.08 | 95.92 | 95.88 | 95.87 | 95.82 | 95.85 | 95.86 | 95.86 | 95.94 | 95.89 | 95.88 | 95, <i>yy</i> 87 | 95, <i>yy</i> 86 |
| | σ_K | 179.17 | 179.08 | 179.09 | 179.09 | 179.07 | 179.06 | 179.08 | 179.09 | 179.03 | 179.05 | 179.08 | 179.09 | 179.06 |
| 1.20 | σ_M | 10.99 | 3.68 | 1.11 | 0.53 | 2.37 | 0.71 | 0.16 | 0.06 | 3.64 | 0.90 | 0.21 | 0.09 | 0.00 |
| | σ_K | 174.0 | 169.51 | 168.05 | 167.73 | 170.90 | 168.82 | 167.84 | 167.63 | 169.70 | 168.70 | 167.86 | 167.65 | 167.82 |

Таблица 2. Величина смещений оболочки как жесткого целого, для трех вариантов расчета, м

| $x, \text{ м}$ | $\theta, \text{ рад}$ | $\sigma, \text{ МПа}$ | Вариант I | | | | Вариант II | | | | Вариант III | | | |
|----------------|-----------------------|-----------------------|-----------|--------|--------|---------|------------|--------|---------|---------|-------------|--------|--------|---------|
| | | | 0.00 | 0.09 | 0.90 | 9.00 | 0.00 | 0.09 | 0.90 | 9.00 | 0.00 | 0.09 | 0.90 | 9.00 |
| 1.20 | 0.00 | σ_M | 1.11 | 512.64 | 5108.0 | 50331.1 | 0.16 | -3.02 | -31.68 | -318.0 | 0.21 | 0.21 | 0.21 | 0.21 |
| | | σ_K | 168.05 | 290.19 | 1387.6 | 12185.4 | 167.84 | 117.53 | -335.34 | -4858.6 | 167.86 | 167.86 | 167.86 | 4167.85 |
| | $\frac{\pi}{60}$ | σ_M | 1.06 | 553.01 | 5512.4 | 54308.2 | 0.10 | -2.19 | -22.814 | -228.8 | 0.12 | 0.12 | 0.12 | 0.12 |
| | | σ_K | 168.04 | 301.66 | 1502.2 | 13315.0 | 167.83 | 117.78 | -332.7 | -4832.8 | 167.86 | 167.85 | 167.85 | 167.84 |

Пример 2. Решена задача по определению напряженно-деформированного состояния цилиндра, нагруженного в середине сосредоточенной силой, опирающегося на пружинную опору (рис. 2). Исходные данные: $E = 7.38 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0.3125$, $P = 45.36$ Н, $t = 0.24$ см, $R = 12.58$ см, $L = 26.26$ см. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитывалась четвертая часть цилиндра. Расчеты, как и в примере 1, выполнялись в трех вариантах, причем в качестве элемента дискретизации использовался четырехугольный конечный элемент.

Результаты расчетов при жесткости пружины, равной бесконечности, представлены в табл. 3, где приведены значения прогиба в точке приложения сосредоточенной силы в зависимости от густоты сетки дискретизации оболочки. Видно, что во всех вари-

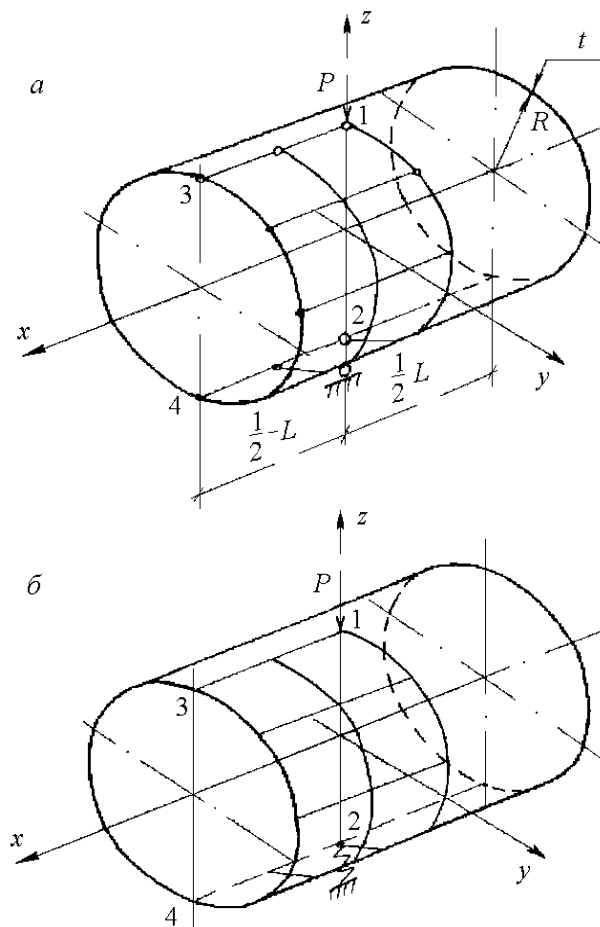


Рис. 2.

Таблица 3. Результаты расчетов при жесткости пружины, равной бесконечности

| Сетка элементов дискретизации | Вариант I | Вариант II | Вариант III |
|-------------------------------|---------------|---------------|--------------|
| 5×5 | 0.1612×2.54 | 0.1612×2.54 | -0.0157×2.54 |
| 7×7 | -0.02076×2.54 | -0.02076×2.54 | -0.0198×2.54 |
| 9×9 | -0.02207×2.54 | -0.02207×2.54 | -0.0213×2.54 |
| 11×11 | -0.02244×2.54 | -0.02244×2.54 | -0.0220×2.54 |

антах расчета наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса. При этом значения прогиба в первых двух вариантах полностью совпадают, а в третьем величина нормального перемещения отличается в меньшую сторону всего на 2 %.

Если жесткость пружины постепенно уменьшать, то оболочка получит возможность смещаться вертикально вниз как абсолютно твердое тело. Моделирование пружинной опоры можно осуществить следующим образом. Если жесткость пружины принять равной бесконечности, то данный факт будет соответствовать запрещению вертикального перемещения оболочки, что легко выполняется путем зануления соответствующего граничного условия. Так, например, для узла 2 (рис. 2) в матрице-строке граничных условий в колонке 7 табл. 4 стоит “нуль”, указывающий на то, что вертикальное перемещение данного узла запрещено. Цифра 1 означает, что перемещение или его производные разрешены.

Чтобы оболочка получила возможность смещаться как жесткое целое в вертикальном направлении, необходимо разрешить данное перемещение и одновременно увеличить соответствующий элемент матрицы жесткости КЭ на величину, равную жесткости пружины. Так, например, если необходимо задать оболочке жесткое смещение, равное единице, то величина жесткости пружины должна быть равна величине сосредоточенной силы, под действием которой цилиндр получит вертикальное единичное перемещение. Номер ячейки матрицы жесткости КЭ, в которую необходимо сделать соответствующую добавку, определяется физическим смыслом коэффициента матрицы жесткости КЭ. В рассматриваемом примере это ячейка под седьмым номером строки и столбца. Таким образом, в указанную ячейку матрицы жесткости КЭ необходимо добавить слагаемое, характеризующее жесткость пружины:

$$R_{7,7} = R_{7,7} + c,$$

где $R_{7,7}$ — коэффициент матрицы жесткости КЭ; c — жесткость пружины.

Результаты расчета цилиндра при различных значениях жесткости пружины представлены в табл. 5, где приведены значения кольцевых напряжений в наружных волокнах оболочки в точке 3 при сетке узлов 11×11 (рис. 2). Анализ данных таблицы показывает, что результаты расчета по вариантам существенно различаются между собой. При уменьшении жесткости пружины погрешности расчета в первом и во втором вариантах резко возрастают до совершенно неприемлемых значений. В третьем варианте наблюда-

Таблица 4. Матрица-строка граничных условий

| u | u_s | u_θ | v | v_s | v_θ | w | w_s | w_θ |
|----------|----------------------|----------------------|----------|----------------------|----------------------|----------|----------------------|----------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 5. Параметры напряженно-деформированного состояния для трех вариантов расчета, Н/см²

| Жесткость пружины | Смещение оболочки как жесткого целого, см | Вариант I | Вариант II | Вариант III |
|-------------------|---|-----------|------------|-------------|
| ∞ | 0 | −608.1 | −608.1 | −623.8 |
| 43.36 | 1.0×2.54 | −576.5 | −576.5 | −623.8 |
| 4.366 | 10.0×2.54 | −339.6 | −339.6 | −623.8 |
| 0.4336 | 100×2.54 | 47.7 | 47.4 | −623.4 |

ется стабильность контролируемых параметров напряженно-деформированного состояния оболочки, несмотря на значительные смещения цилиндра как абсолютно твердого тела.

Анализируя результаты расчетов, представленные в примерах 1 и 2, можно сделать следующие выводы.

1. Изопараметрическая форма параметризации срединной поверхности не позволяет в какой-либо мере учесть смещения КЭ как жесткого целого.

2. Для корректного учета жестких смещений в конечно-элементном анализе оболочек необходимо использовать векторную аппроксимацию перемещений [4].

Список литературы

- [1] Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 344 с.
- [2] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромиздат, 1962. 432 с.
- [3] Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселев А.П. О функциях формы в алгоритме формирования матриц жесткости треугольных конечных элементов // Изв. вузов. Сер. Строительство. 1999. № 10. С. 23–27.
- [4] Клочков Ю.В., Николаев А.П., Гуреева Н.А. Сравнение различных способов аппроксимации перемещений на треугольном элементе в расчетах оболочек // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 3. С. 47–55.
- [5] Голованов А.И. Новый конечный элемент для расчета произвольных тонких оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. 1986. № 4. С. 21–23.
- [6] Скоплинский В.Н. Об особенностях напряженно-деформированного состояния в области пересечения цилиндрических оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. 1986. № 2. С. 19–22.
- [7] Беляев Н.М. Соппротивление материалов. М.: Наука, 1976. 608 с.

*Поступила в редакцию 22 февраля 2006 г.,
в переработанном виде — 17 апреля 2006 г.*