В О П Р О С Ы

по курсу «Методы вычислений»
V семестр обучения ММФ НГУ
(лектор С.Г. Чёрный)

1. Метод Эйлера для решения задачи Коши и обоснование его сходимости.

2. Модифицированный метод Эйлера второго порядка для решения задачи Коши и обоснование его сходимости.

3. Схемы Рунге-Кутты решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

4. Правило Рунге для контроля погрешности одношаговых методов интегрирования задачи Коши.

5. Схемы Адамса решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.

6. Сетки, сеточные функции, нормы сеточных функций, разностные операторы, разностная аппроксимация дифференциального оператора. Примеры.

7. Метод неопределённых коэффициентов для построения разностных операторов с заданным порядком аппроксимации.

8. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной задачей. Погрешность аппроксимации разностной схемы. Сходимость разностной схемы.

   Устойчивость разностной схемы — два определения. Эквивалентность этих двух определений в случае линейной разностной схемы.

9. Теорема о сходимости разностной схемы, как следствии её аппроксимации и устойчивости.

10. Каноническая форма записи линейной разностной схемы решения задачи Коши в виде скалярного уравнения.

Достаточный признак устойчивости разностной схемы (случай разностного уравнения 1-го порядка).

11. Каноническая форма записи линейной разностной схемы решения задачи Коши для системы двух ОДУ первого порядка в двумерном пространстве.

    Достаточный признак устойчивости разностной схемы. Условия, при которых он становится необходимым.

12. Каноническая форма записи линейной разностной схемы решения задачи Коши для разностных уравнений 2-го порядка в двумерном пространстве.

    Достаточный признак устойчивости разностной схемы. Условия, при которых он становится необходимым.

13. Каноническая форма записи линейной разностной схемы решения задачи Коши. Необходимый спектральный признак устойчивости.

14. Необходимый спектральный признак устойчивости линейной разностной схемы решения задачи Коши. Характеристическое уравнение.

15. Исследование устойчивости разностных схем для решения нелинейных задач Коши. Примеры.

16. Количественная характеристика устойчивости разностных схем решения задачи Коши.

17. Особенности численного решения жёстких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

18. Метод стрельбы решения краевой задачи для ОДУ второго порядка. Пример сильной чувствительности решения от вспомогательного параметра

19. Разностные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Обоснование сходимости.

20. Разностный метод решения нелинейной краевой задачи, его сходимость.

21. Реализация нелинейной разностной схемы решения нелинейной краевой задачи. Метод последовательных приближений, его сходимость.

22. Разностные аналоги формул дифференцирования, интегрирования по частям и интегральных формул Грина.

23. Собственные значения и собственные функции второй разностной производной, их свойства (случай однородных краевых условий).

24. Конечные ряды Фурье для сеточных функций. Равенство Парсеваля.

25. Сеточный аналог теоремы вложения, неравенство $\|y\|_C \leq \frac{1}{2}\sqrt{l}\, \|y_{\overline{x}}]|$.

26. Оценки нормы $\|y_{\overline{x}}]|$ сверху и снизу через норму $\|y\|$.

27. Свойства оператора второй разностной производной (случай однородных краевых условий).

28. Свойства оператора второй разностной производной с переменными коэффициентами (случай однородных краевых условий).

29. Априорные оценки решения разностной краевой задачи

$$\begin{aligned} &y_{\overline{x}x,j} + f_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ &y_0 = y_N = 0, \end{aligned}$$

в локальной и среднеквадратичной нормах. Метод энергетических неравенств.

30. Априорные оценки решения разностной задачи $Ay = f$ в случае, когда

а) A — положительно определённый оператор,

б) A — самосопряжённый положительный оператор

(метод операторных неравенств).

31. Методы исследования устойчивости разностных схем решения краевых задач для ОДУ второго порядка.

32. Разностная схема второго порядка аппроксимации для задачи

$$
\begin{aligned}
&(k(x)\,y')' - q(x)\,y = -f(x), \qquad 0 \le x \le l,\\
&y(0) = \omega, \qquad y(l) = \psi,\\
&k(x) \ge c_1 > 0, \qquad q(x) \ge 0
\end{aligned}
$$

(построение схемы).

33. Априорные оценки в локальной и среднеквадратичной нормах для решения разностной задачи

$$
\begin{aligned}
&\big(a\,y_{\overline{x}}\big)_{x,j} - d_j\,y_j = -f_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1,\\
&y_0 = \omega, \qquad y_N = \psi,\\
&d_j = q_j, \qquad a_j = k_{j-1/2},
\end{aligned}
$$

аппроксимирующей дифференциальную задачу

$$
\begin{aligned}
&(k(x)\,y')' - q(x)\,y = -f(x), \qquad 0 \le x \le l,\\
&y(0) = \omega, \qquad y(l) = \psi,\\
&k(x) \ge c_1 > 0, \qquad q(x) \ge 0.
\end{aligned}
$$

34. Применение принципа максимума и леммы о мажоранте для доказательства сходимости разностной схемы

$$
\begin{aligned}
&y_{\overline{x}x,j} + p_j\,y_{\mathring{x},j} + q_j\,y_j = \varphi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1,\\
&y_0 = y_a, \qquad y_N = y_b,
\end{aligned}
$$

решения дифференциальной задачи

$$
\begin{aligned}
&u'' + p(x)\,u' + q(x)\,u = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l,\\
&u(a) = y_a\,, \qquad y(b) = y_b\,.
\end{aligned}
$$