В О П Р О С Ы

по курсу «Методы вычислений»
VI семестр обучения ММФ НГУ
(лектор С.Г. Чёрный)

1. Разностная схема с весами для первой краевой задачи

$$\begin{aligned}
&u_t = \nu\, u_{xx} + f, \qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T,\\
&u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(l,t) = \mu_l(t),\\
&u(x,0) = u^0(x).
\end{aligned}$$

   Условие, при котором эта схема имеет повышенный порядок аппроксимации.

2. Использование принципа максимума для исследования устойчивости явной разностной схемы для краевой задачи

$$\begin{aligned}
&u_t = \nu\, u_{xx} + f, \qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T,\\
&u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(l,t) = \mu_l(t),\\
&u(x,0) = u^0(x)
\end{aligned}$$

   в локальной (равномерной) сеточной норме.

3. Устойчивость разностной задачи по начальным данным. Необходимое спектральное условие устойчивости фон Неймана.

4. Устойчивость по начальным данным в сеточной норме L_2 разностной схемы с весами

$$\begin{aligned}
&\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \nu\Lambda\Big(\sigma y_j^{n+1} + (1-\sigma)\, y_j^n\Big),\\
&y_0^n = y_N^n = 0, \quad y_j^0 = u_j^0, \quad \Lambda y = y_{\bar{x}x}
\end{aligned}$$

   для решения задачи

$$\begin{aligned}
&u_t = \nu\, u_{xx}, \qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T,\\
&u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = u^0(x)
\end{aligned}$$

   (метод разделения переменных с представлением решения в виде конечного ряда Фурье.)

5. Исследование методом разделения переменных устойчивости по правой части разностной схемы

$$\frac{y_j^{n+1}-y_j^n}{\tau}-\nu\Lambda\Big(\sigma y_j^{n+1}+(1-\sigma)\,y_j^n\Big)=\varphi_j^n,$$
$$y_0^n=y_N^n=0,\quad y_j^0=0,\quad \Lambda y=y_{\overline{x}x}$$

   для решения задачи

$$u_t=\nu\,u_{xx}+f,\qquad 0\le x\le l,\ 0\le t\le T,$$
$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=0.$$

6. Каноническая форма двухслойной разностной схемы. Понятие корректной разностной схемы. Операторы перехода. Равномерная устойчивость по начальным данным. Необходимое и достаточное условие равномерной устойчивости разностной схемы $By_t+Ay^n=\varphi^n$ по начальным данным.

7. Достаточный признак равномерной устойчивости двухслойной разностной схемы по начальным данным. Условия, при которых из устойчивости схемы $By_t+Ay^n=\varphi^n$ по начальным данным следует равномерная устойчивость по начальным данным.

8. Представление решения разностной задачи $By_t+Ay^n=\varphi^n$ (y^0 задано) через операторы перехода со слоя k на слой n. Достаточное условие устойчивости разностной схемы по начальным данным и правой части. Устойчивость по начальным данным для схемы с постоянными операторами, как необходимое и достаточное условие устойчивости по правой части.

9. Энергетическое пространство H_A. Устойчивость двухслойной разностной схемы по начальным данным в H_A с постоянной ρ. Неравенства между операторами двухслойной схемы, выполнение которых необходимо и достаточно для устойчивости схемы по начальным данным в H_A (метод операторных неравенств).

10. Устойчивость двухслойной разностной схемы по начальным данным с постоянной ρ в произвольных энергетических нормах (метод операторных неравенств).

11. Необходимое и достаточное условие устойчивости разностной схемы с весами
$$y_t + A\left(\sigma y^{n+1} + (1-\sigma)\, y^n\right) = 0,$$
где $A = A^* > 0$ — линейный постоянный оператор.

12. Необходимое и достаточное условие устойчивости разностной схемы с весами
$$y_t + A\left(\sigma y^{n+1} + (1-\sigma)\, y^n\right) = 0, \qquad Ay = -\nu\, y_{\overline{x}x}.$$
Устойчивость в локальной (равномерной) сеточной норме.

13. Консервативная разностная схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами $u_t = \big(\nu(x,t)\, u_x\big)_x + f(x,t)$. Интегро-интерполяционный метод построения консервативной разностной схемы.

14. О возможности использования разностной схемы, построенной для недивергентного уравнения теплопроводности $u_t = \nu\, u_{xx} + \nu_x u_x$ в случае разрывного коэффициента ν.

15. Оценка устойчивости консервативной разностной схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами
$$\begin{aligned} &y_t + A\left(\sigma y^{n+1} + (1-\sigma)\, y^n\right) = \varphi^n, \\ &(Ay)_j = -(a_j y_{\overline{x}})_{x,j}\,, \quad a_j = \nu_{j-1/2}, \quad \nu = \nu(x), \\ &0 < C_1 \le \nu(x) \le C_2. \end{aligned}$$

16. Разностные схемы Ричардсона и Дюфорта-Франкела для уравнения теплопроводности $u_t = \nu\, u_{xx}$.

17. Явная двухслойная разностная схема для уравнения теплопроводности $u_t = \nu\, u_{xx}$. Условие Куранта, Фридрихса и Леви, необходимое для её сходимости.

18. Явная разностная схема для двумерного уравнения теплопроводности. Её аппроксимация и спектральный анализ устойчивости.

19. Использование принципа максимума для исследования устойчивости явной разностной схемы для решения задачи

$$
\begin{aligned}
&u_t = \nu\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x,y,t),\\
&u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u\big|_{\Gamma} = \mu
\end{aligned}
$$

в локальной (равномерной) сеточной норме.

20. Использование метода разделения переменных и представления решения в виде конечного ряда Фурье для исследования устойчивости явной разностной схемы для решения задачи

$$
\begin{aligned}
&u_t = \nu\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x,y,t),\\
&u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u\big|_{\Gamma} = 0
\end{aligned}
$$

в среднеквадратичной сеточной норме (без вывода свойств разностного оператора Лапласа).

21. Собственные значения и собственные функции разностного оператора Лапласа, их свойства (случай однородных краевых условий). Конечные ряды Фурье.

22. Свойства разностного оператора Лапласа (случай однородных краевых условий). Использование общей теории устойчивости при анализе устойчивости схемы с весами

$$
\begin{aligned}
&u_t + A\left(\sigma u_j^{n+1} + (1-\sigma)\, u_j^n\right) = 0,\\
&Ay = -u_{\bar{x}x} - u_{\bar{y}y}
\end{aligned}
$$

для уравнения $u_t = u_{xx} + u_{yy}$.

23. Понятие экономичной разностной схемы. Метод матричной прогонки реализации неявной разностной схемы для двумерного уравнения теплопроводности.

24. Понятие экономичной разностной схемы. Схема переменных направлений для двумерного уравнения теплопроводности.

25. Понятие экономичной разностной схемы. Схема расщепления Н.Н. Яненко для двумерного уравнения теплопроводности. Схема расщепления с весами.

26. Понятие экономичной разностной схемы. Схема стабилизирующей поправки для двумерного уравнения теплопроводности. Схема стабилизирующей поправки с весами.

27. Понятие экономичной разностной схемы. Метод приближённой факторизации построения устойчивых экономичных разностных схем. Общий способ построения схем приближённой факторизации.

28. Понятие экономичной разностной схемы. Примеры разностных схем приближённой факторизации для двумерного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx} + u_{yy}$.

29. Точное решение задачи Коши для простейшего линейного уравнения переноса $u_t + a\,u_x = 0$. Корректная постановка начально-краевой задачи для этого уравнения.

30. Явная разностная схема с направленными против потока разностями для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} &u_t + a\,u_x = f, \qquad -\infty < x < \infty,\ 0 \le t \le T, \\ &u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

    Её аппроксимация, необходимое и достаточное условие устойчивости.

31. Условие Куранта, Фридрихса и Леви, необходимое для сходимости разностной схемы. Его использование для исследования явной схемы с направленными против потока разностями для задачи Коши

$$\begin{aligned} &u_t + a\,u_x = f, \qquad -\infty < x < \infty,\ 0 \le t \le T, \\ &u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

32. Понятие дифференциального приближения разностной схемы. Дифференциальное приближение схемы с направленными против потока разностями для уравнения $u_t + a\,u_x = 0$. Численная диссипация. Аппроксимационная вязкость.

33. Разностная схема Лакса-Вендроффа для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} &u_t + a\,u_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ 0 \le t \le T, \\ &u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

    Численная дисперсия.

34. Понятие о свойствах явных разностных схем

    – сохранении монотонности решения,
    – монотонности,
    – невозрастании полной вариации

    для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} &u_t + a\,u_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ 0 \le t \le T,\\ &u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

    Формулировки теорем С.К. Годунова и А. Хартена.

35. Свойство невозрастания полной вариации численного решения задачи Коши

$$\begin{aligned} &u_t + a\,u_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ 0 \le t \le T,\\ &u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

    Теорема о достаточном условии выполнения TVD-свойства для явной схемы.

36. TVD-модификация схемы Лакса-Вендроффа для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} &u_t + a\,u_x = 0, \qquad a > 0,\ -\infty < x < \infty,\ 0 \le t \le T,\\ &u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

37. Точное решение задачи Коши для нелинейного уравнения переноса

$$\begin{aligned} &u_t + u\,u_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ 0 \le t \le T,\\ &u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

    Механизм возникновения разрывов.

38. Интегральная форма записи уравнения Бюргерса. Условие на линии разрыва решения. Неоднозначность интегральных форм уравнения Бюргерса.

39. Консервативная разностная схема для решения уравнения Бюргерса.

40. О возможности использования схемы, построенной для недивергентного уравнения Бюргерса $u_t + u\,u_x = 0$ в случае разрывного решения.