

# Методы вычислений

## Дополнительные главы

### 1. Организационно-методический раздел.

1.1. Курс «Методы вычислений. Дополнительные главы» в рамках специальностей прикладная математика и механика 0647 и 2013. Он относится к общим математическим дисциплинам.

1.2. Цели и задачи курса.

Курс «Методы вычислений. Дополнительные главы» предназначен для студентов IV курса механико-математического факультета, специализирующихся в области вычислительной математики и механики. Основной целью курса является знакомство с современными численными (конечно-разностными) методами решения нелинейных задач в механике жидкости и газа, физике и экологии. Для достижения цели в курсе изложены: основные конечно-разностные методы решения многомерных задач параболического и гиперболического типа; методы повышения точности численных решений; методы решения стационарных и нестационарных уравнений Эйлера и Навье-Стокса.

1.3. Требования к уровню освоения содержания курса.

По окончании изучения курса студент должен:

- иметь представление об основах математического моделирования и об основных его этапах;
- знать основные конечно-разностные методы решения уравнений математической физики;
- уметь применять полученные знания при решении конкретных задач, возникающих при моделировании.

1.4. Формы контроля.

**Итоговый контроль.** По окончании курса программой предусмотрен экзамен.

Текущий контроль. В течение семестра ведутся семинарские занятия по закреплению лекционного материала и решению модельных и конкретных задач, выполняется контрольная работа, проводится ее обязательное обсуждение.

### 2. Содержание дисциплины.

2.1. Курс является оригинальным и знакомит студентов с современными численными методами решения практических задач, возникающих при численном моделировании в механике, физике и экологии. Полученные знания используются при подготовке курсовых и дипломных работ.

2.2. Тематический план курса.

| Наименование разделов и тем                   | Количество часов |          |                     |                        |             |
|---|------------------|----------|---------------------|------------------------|-------------|
|   | Лекции           | Семинары | Лабораторные работы | Самостоятельная работа | Всего часов |
| Технологическая цепочка моделирования         | 2                |          |                     |                        | 2           |
| Численные алгоритмы решения многомерных задач | 14               | 8        |                     | 14                     | 36          |

|  |    |    |  |    |    |
|--|----|----|--|----|----|
| Методы повышения точности решения                    | 6  | 4  |  | 8  | 18 |
| Некоторые методы решения задач газо- и гидродинамики | 14 | 6  |  | 14 | 34 |
| Итого по курсу                                       | 36 | 18 |  | 36 | 90 |

### 2.3. Содержание отдельных тем и разделов.

#### I. Численные алгоритмы решения многомерных задач математической физики

1. Тенденции развития численных методов. Численное моделирование и технологическая цепочка.
2. Основные уравнения. Различные формы представления уравнений. Стационарные и нестационарные задачи.
3. Особенности построения схем для многомерных задач. Соотношение явных и неявных схем. Требования к численным алгоритмам.
4. Основные подходы построения разностных схем для многомерных задач. Метод слабой аппроксимации. Метод суммарной аппроксимации. Локально-одномерные схемы. Метод факторизации. Полная и приближенная факторизация. Методы типа предиктор-корректор.
5. Устойчивость схем в многомерном случае. Особенности их реализации. Потеря безусловной устойчивости схем приближенной факторизации в трехмерном случае для гиперболических систем.
6. Нелинейные разностные схемы. Их реализация. Методы линеаризации нелинейных схем. Одномерные и многомерные задачи. Схемы типа предиктор-корректор для решения нелинейных уравнений.
7. Итерационные методы решения нелинейных задач.

#### II. Методы повышения точности численных решений

1. Пути повышения точности численных решений. Повышение точности на последовательности сеток. Одномерный и многомерный случаи. Многосеточный метод.
2. Неравномерные сетки и способы их построения. Геометрический и физический подходы. Метод подвижных сеток.
3. Повышение порядка точности на расширенном шаблоне. Многослойные разностные схемы.
4. Компактные разностные схемы для обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных. Обобщение схем на многомерный случай. Устойчивость и реализация схем.

#### III. Некоторые методы решения задач газо- и гидродинамики

1. Метод приближенной факторизации при решении многомерных задач. Подходы Бима и Уорминга, Мак Дональда и Брили. Расщепление по пространственным направлениям. Реализация схем в многомерном случае.
2. Метод расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям. Применение к задачам аэродинамики.
3. Метод решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости.
4. Метод искусственной сжимаемости. Решение задач несжимаемой жидкости.

2.4. Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы.  
Темы семинарских занятий.

1. Законы сохранения. Преобразование координат. Представление уравнений в консервативной и недивергентной формах.
2. Основные разностные схемы решения нелинейных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \text{ где } \phi = \phi(u), \text{ или } \phi = \phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Реализация нелинейных схем. Метод линеаризации.

3. Точная, приближенная и неполная факторизация операторов. Факторизованные схемы и их свойства для уравнений гиперболического и параболического типов.
4. Схемы расщепления для многомерных уравнений. Их свойства.
5. Схемы расщепления для решения уравнений газовой динамики. Обобщение на многомерный случай.
6. Схемы предиктор-корректор и их свойства.
7. Схемы повышенного порядка на расширенном шаблоне для уравнений гиперболического типа.

8. Компактные разностные схемы для уравнений

$$\frac{du}{dt} + g(u) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

Их реализация и свойства.

9. Обобщение компактных схем для многомерных задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j} = 0, \text{ где } \phi_j = \phi_j(u), \text{ или } \phi_j = \phi_j\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

Компактные схемы для уравнений газовой динамики. Схемы типа предиктор-корректор.

10. Схемы Бима-Уорминга для решения уравнений газовой динамики. Алгоритмы решения уравнений Навье-Стокса вязкого сжимаемого газа в различных физических переменных.
11. Разностные схемы в переменных  $\omega - \psi$  для решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости. Схемы в переменных  $u, v, p$  для задач гидродинамики.

### 3. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.

- 3.1. Экзаменационные вопросы соответствуют программе, представленной в разделе 2.3.
- 3.2. Список основной и дополнительной литературы:

1. Ковеня В.М. Разностные методы решения многомерных задач. Курс лекций. - Новосибирск: НГУ, 2005.
2. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Новосибирск: Наука, 1967.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1980.
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей, т. I, II. - М.: Мир, 1991.

Программу составил  
д.ф.-м.н., профессор

Ковеня В.М.