В О П Р О С Ы

по курсу лекций «Вычислительные методы анализа и линейной алгебры»
(3 семестр обучения ММФ НГУ, II поток, лектор С.П. Шарый)

1. Задачи интерполирования и приближения функций. Алгебраическая интерполяция. Существование и единственность решения задачи алгебраической интерполяции. Интерполяционный полином Лагранжа.

2. Разделённые разности и их свойства. Формула для прямого представления разделённых разностей. Интерполяционный полином Ньютона.

3. Оценка погрешности алгебраической интерполяции с простыми узлами. Связь разделённых разностей функции с её производными.

4. Полиномы Чебышёва, их различные представления. Свойства полиномов Чебышёва. Применение полиномов Чебышёва в интерполировании.

5. Задача алгебраической интерполяции с кратными узлами, существование и единственность её решения. Оценка погрешности алгебраической интерполяции с кратными узлами.

6. Понятие интерполяционного процесса и его сходимости. Примеры Бернштейна и Рунге. Теорема Фабера и теорема Марцинкевича, их значение для теории интерполяции. Условия сходимости интерполяционных процессов по чебышёвским узлам.

7. Понятие о сплайне, мотивации конструкции сплайна. Степень сплайна, его дефект. Интерполяционный кубический сплайн (без построения), точность приближения им функции и её производных. Естественные кубические сплайны и их экстремальное свойство. Теорема Холладея.

8. Интерполяционные кубические сплайны и их построение.

9. Задача приближения функций. Единственность её решения для нормированных пространств. Наилучшее приближение в евклидовом пространстве. Метод наименьших квадратов. Выбор базисных функций в методе наименьших квадратов.

10. Псевдорешения систем линейных алгебраических уравнений. Метод наименьших квадратов для нахождения псевдорешений систем линейных уравнений. Трансформация Гаусса и нормальная система уравнений. Разрешимость нормальной системы уравнений.

11. Полиномы Лежандра, их свойства. Формула Родрига. Применение полиномов Лежандра в задачах приближения.

12. Задача численного интегрирования. Квадратурные формулы и их остаточные члены. Интерполяционные квадратурные формулы, формулы Ньютона-Котеса. Необходимое и достаточное условие принадлежности квадратурной формулы к интерполяционным. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций, оценка их погрешности.

13. Квадратурная формула Симпсона, оценка её погрешности. Составные квадратурные формулы, их погрешность. Простейшие составные квадратурные формулы и оценки их погрешности.

14. Алгебраическая степень точности квадратурных формул. Задача оптимизации квадратур и формулы Гаусса. Простейшие квадратуры Гаусса.

15. Выбор узлов для квадратурных формул Гаусса в общем случае. Построение квадратурных формул Гаусса. Погрешность квадратур Гаусса.

16. Сингулярные числа и сингулярные векторы матрицы. Сингулярное разложение матрицы. Спектральный радиус и его свойства. Связь спектрального радиуса матрицы и асимптотического поведения её степеней.

17. Нормы в пространствах векторов и матриц, их применение. Эквивалентность норм. Согласованные и подчинённые матричные нормы, их существование. Примеры согласования и подчинения. Подчинённые матричные нормы для популярных векторных норм.

18. Понятие об обусловленности математической задачи. Число обусловленности матрицы и оценка погрешности решения системы линейных алгебраических уравнений через погрешности входных данных. Примеры хорошо обусловленных и плохо обусловленных матриц.

19. Матрицы с диагональным преобладанием. Признак Адамара неособенности матриц. Круги Гершгорина. Теорема Гершгорина. Теорема Алберга-Нильсона.

20. Метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений, его матричная интерпретация. Различные способы выбора ведущего элемента. Выполнимость метода Гаусса с выбором ведущего элемента.

21. LU-разложение матрицы, его связь с методом Гаусса для решения систем линейных уравнений. Условия существования LU-разложения матриц. Сильно регулярные матрицы. Выполнимость метода Гаусса для систем линейных уравнений с сильно регулярными матрицами.

22. Разложение Холесского для матриц, его существование и единственность.

23. Метод Холесского (квадратного корня) для решения систем линейных уравнений.

24. Поведение числа обусловленности при матричных преобразованиях. Мотивация применения ортогональных преобразований в вычислительной линейной алгебре. QR-разложение матриц. Матрицы вращений и отражений, их свойства и применение.

25. Ортогональные матрицы отражения (матрицы Хаусхолдера), их свойства и применение.

26. Метод Хаусхолдера (отражений) для решения систем линейных уравнений. Ортогональные матрицы вращений (матрицы Гивенса), их применение. Метод вращений для решения систем линейных уравнений.

27. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Необходимое и достаточное условие сходимости стационарных одношаговых итерационных методов. Доказательство необходимости.

28. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Необходимое и достаточное условие сходимости стационарных одношаговых итерационных методов. Доказательство достаточности.

29. Способы подготовки системы линейных алгебраических уравнений к итерационному решению. Предобуславливание. Расщепление матрицы системы. Метод Ричардсона и оптимизация простейшего скалярного предобуславливателя.

30. Итерационный метод Якоби, условия его сходимости. Сходимость метода Якоби для линейных систем, матрицы которых имеют диагональное преобладание.

31. Итерационный метод Гаусса-Зейделя, его матричное представление. Сходимость метода Гаусса-Зейделя для линейных систем, матрицы которых имеют диагональное преобладание. Другие достаточные условия сходимости.

32. Итерационный метод релаксации для решения линейных систем уравнений. Необходимое условие его сходимости, лемма Кахана. Достаточные условия сходимости. Теорема Островского-Райха.

33. Нестационарные итерационные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений, различные подходы к их построению. Функционал энергии, взаимоотношение задачи его минимизации и решения линейной системы.

34. Метод наискорейшего спуска для решения систем линейных алгебраических уравнений, оценка его скорости сходимости.

35. Метод сопряжённых градиентов для линейных систем с симметричными положительно определёнными матрицами. Свойства его последовательных шагов, конечная сходимость. Общая оценка скорости сходимости.

36. Оценка погрешности приближённого решения системы линейных алгебраических уравнений. Оценка погрешности стационарного одношагового итерационного метода через последовательные итерации.

Литература

[1] Барахнин В.Б., Шапеев В.П. *Введение в численный анализ.* – Санкт-Петербург –Москва– Краснодар: Лань, 2005.

[2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы.* – Москва: Бином, 2003, а также другие издания этой книги.

[3] Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений. Т. 1–2.* – Москва: Наука, 1966.

[4] Вержбицкий В.М. *Численные методы. Части 1–2.* – Москва: «Оникс 21 век», 2005.

[5] Волков Е.А. *Численные методы.* – Москва: Наука, 1987.

[6] Демидович Б.П., Марон А.А. *Основы вычислительной математики.* – Москва: Наука, 1970.

[7] Деммель Дж. *Вычислительная линейная алгебра.* – Москва: Мир, 2001.

[8] Коновалов А.Н. *Введение в вычислительные методы линейной алгебры.* – Новосибирск: Наука, 1993.

[9] Крылов А.Н. *Лекции о приближённых вычислениях.* – Москва: ГИТТЛ, 1954, а также более ранние издания.

[10] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. *Вычислительные методы. Т. 1–2.* – Москва: Наука, 1976.

[11] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* – Москва: Наука, 1989.

[12] Тыртышников Е.Е. *Методы численного анализа.* – Москва: Академия, 2007.

[13] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры.* – Москва–Ленинград: Физматлит, 1963.

[14] Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – Москва: Мир, 1989.

[15] Шарый С.П. *Курс вычислительных методов.* – Новосибирск: НГУ, 2017. – Электронный учебник, доступный на `http://www.ict.nsc.ru/matmod/index.php?file=u_posobiya`