

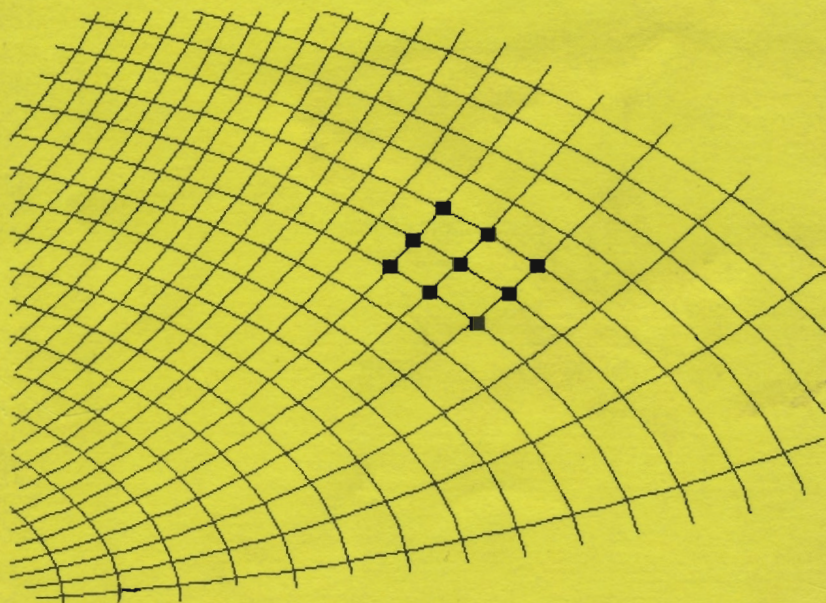
В. И. Паасонен

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Часть 1. Классические схемы и их обобщения

$$A_1 u + A_2 u + \dots + A_m u = f$$

$$A_i = \left(E + \frac{h_i^2}{12} \Lambda_i \right)^{-1} \quad \Lambda_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + O(h_i^4)$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

В. И. Паасонен

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Часть 1. Классические схемы и их обобщения

Учебное пособие

Новосибирск
2006

ББК В193.2я73-1
УДК 519.632.4+519.633.6
П120

Паасонен В. И. Компактные разностные схемы: В 3 ч.: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2006. Ч. 1: Классические схемы и их обобщения. 68 с.

Учебное пособие соответствует программе специального курса лекций “Компактные разностные схемы”, практически ежегодно читаемого на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета. В предлагаемой вниманию читателя первой части пособия формулируются основные идеи теории компактных схем, излагаются классические результаты, полученные для основных типов уравнений математической физики, проводятся обобщения на уравнения в частных производных с переменными коэффициентами и уравнения в криволинейных ортогональных системах координат.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников математических специальностей.

Рецензент
д-р физ.-мат. наук Б. И. Квасов

©Новосибирский государственный
университет, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
§ 1. Основные понятия	8
§ 2. Разностные схемы	15
§ 3. Компактные аппроксимации операторов ..	25
§ 4. Способы построения компактных схем	31
§ 5. Компактные схемы для эволюционных уравнений	41
§ 6. Обобщения на уравнения с переменными коэффициентами	50
§ 7. Обобщения на уравнения с конвективными членами	59
Библиографический список	67

Предисловие

Для приближенного решения вычислительных задач применяется множество разнообразных численных методов, различных по назначению. Как сами методы, так и в целом технология вычислений во все времена постоянно находятся в процессе совершенствования. В настоящее время известны различные пути достижения экономичности численных методов, из которых можно выделить несколько основных направлений.

Во-первых, это применение метода дробных шагов (расщепления), сводящего многомерную задачу к совокупности одномерных. Концепция расщепления возникла почти полвека назад, и с тех пор связанная с ней технология занимает такое прочное место в практике вычислений, что ее использование обычно подразумевается и особо не отмечается. Во-вторых, применение неравномерных сеток, особенно адаптивных, также повышает качество и экономичность вычислений. Неравномерные сетки позволяют экономить ресурсы памяти, имея сгущения в активных зонах решения и, напротив, крупный шаг в тех подобластях, где решение меняется слабо и нет необходимости в детализации. Далее, экономичность может быть повышена за счет применения параллельных технологий, при которых большая задача разделяется на более простые задачи, решаемые одновременно отдельными процессорами. Наконец, едва ли не главным направлением в этом перечне путей достижения эффективности численных алгоритмов является применение методов повышенного порядка точности.

Действительно, практическая точность метода и его экономичность по таким показателям, как требуемые ресурсы памяти и время счета, в первую очередь зависят именно от

порядка точности. Каждый студент, когда-либо выполнявший задачи вычислительного практикума, имел возможность на собственном опыте убедиться в этом. Достаточно сопоставить высокоточные методы интегрирования Симпсона и Гаусса с простейшими квадратурными формулами прямоугольников. Первые дают на достаточно грубой сетке прекрасные результаты, достижимые для вторых только на весьма детальной сетке, причем за ощутимое время. Аналогичный довольно очевидный пример представляет сравнение методов Рунге—Кутты высоких порядков точности с простым методом Эйлера решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Вообще попытки модификации методов, не сопровождающиеся повышением порядка точности, несмотря на большие усилия обычно лишь незначительно (максимум на десятки процентов) способны улучшить их качество. В противоположность этому повышение порядка точности является радикальным средством, существенно улучшающим качество расчетов.

Особое место среди разностных методов высокого порядка точности занимают компактные схемы. В них высокий порядок точности гармонично сочетается с простотой реализации вычислений, присущей простым методам первого-второго порядков аппроксимации, чем и объясняется их привлекательность. Наибольшее распространение получили компактные схемы третьего-четвертого порядков точности, так как именно для этой группы методов характерно структурное совпадение с простыми разностными схемами. При использовании таких компактных схем не возникает дополнительных проблем, так как благодаря простоте шаблона, не занимающего более трех точек по каждому координатному направлению, реализация граничных условий обычно не выходит за рамки привычной процедуры. По этой же причине ком-

компактные схемы ограниченных порядков точности (до четвертого, иногда до шестого) совершенно стандартным образом расщепляются с использованием метода приближенной факторизации на одномерные разностные задачи, реализуемые трехточечной прогонкой.

Построение компактных схем достигается путем использования продолженной системы уравнений, т. е. следствий дифференциального уравнения, полученных дифференцированием исходных уравнений. Продолженная система позволяет выразить слагаемые погрешности аппроксимации исходной разностной схемы через производные более низкого порядка, что и обеспечивает достижение компактности создаваемой схемы путем формирования аппроксимационных поправок на ограниченном шаблоне сеточной области.

Первые компактные схемы для уравнения Пуассона построены Микеладзе в 1937–1941 гг., а затем опубликованы его дальнейшие результаты, в том числе уже и для уравнения теплопроводности. Следует заметить, что в то время вычисления проводились на арифмометрах, без применения электронно-вычислительной техники, с дополнительными вычислительными затратами на контроль правильности вычислений и записью вручную значений решения на текущей итерации в таблицу, представляющую собой большой разграфленный лист бумаги. Трудно переоценить появившиеся именно в то время компактные схемы, позволившие, например, без ущерба для точности перейти от сетки 25×25 к сетке 5×5 , что давало колоссальную экономию объема трудоемких ручных вычислений.

В некоторых монографиях по численным методам освещаются отдельные аспекты, касающиеся схем повышенного порядка точности, однако основная часть результатов по этой теме содержится в огромном потоке старых и свежих

журнальных статей. Это обстоятельство затрудняет самостоятельное изучение предмета студентами, в то время как владение методологией компактных схем представляется полезным в качестве одного из компонентов современного образования специалистов в области вычислительной математики. В связи с этим на кафедре математического моделирования механико-математического факультета Новосибирского государственного университета в течение многих лет автором читается годовой спецкурс по компактным разностным схемам, в котором излагаются классические результаты и фрагменты современных достижений в этой области, включая вопросы построения компактных схем на неравномерных сетках и применения параллельных технологий для решения с высокой точностью краевых задач в неоднородных областях.

Настоящее учебное пособие (первая часть) отражает приблизительно треть содержания этого специального курса лекций и включает в себя вводный материал, описание основных способов построения компактных схем, результаты систематизации классических результатов для уравнений с постоянными коэффициентами и обобщения на случай переменных коэффициентов и на криволинейные ортогональные системы координат. При написании пособия ¹ не преследовалась цель изложить все известные подходы и результаты, однако стиль и мера подробности выбирались так, чтобы формировалась целостная картина и чтобы материал был пригоден для самостоятельного изучения темы. Хочется выразить уверенность, что пособие будет полезным и удобным средством для освоения читателем этого специального раздела вычислительной математики и для применения высокоточных технологий при решении конкретных вычислительных задач.

¹При поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 05-01-00146-а.

§ 1. Основные понятия

В настоящем параграфе вводятся основные понятия, такие как разделенная разность, сеточная область, индексная и операторная запись разностных выражений, шаблон разностного оператора; изучаются общие свойства разностных операторов.

1.1. Разностные аппроксимации производных. По определению производной

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

при этом для достаточно гладкой функции $y(x)$ справедливо разложение

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x) + \frac{h}{2}y''(x) + \frac{h^2}{6}y'''(x) + \dots \quad (1.1)$$

При малом приращении h , удовлетворившись погрешностью первого порядка, получим

$$y'(x) \simeq \frac{y(x+h) - y(x)}{h}. \quad (1.2)$$

Ясно, что приращение не обязано быть положительным. Учитывая это и заменяя в (1.2) h на $-h$, получим

$$y'(x) \simeq \frac{y(x) - y(x-h)}{h}. \quad (1.3)$$

Простейшие разделенные разности (1.2), (1.3) называют разностью вперед и разностью назад соответственно. Из разложения (1.1) видно, что обе они аппроксимируют производную с погрешностью первого порядка. Их полусумма, называемая центральной разностью, в силу разложения

$$\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = y'(x) + \frac{h^2}{6}y'''(x) + O(h^4) \quad (1.4)$$

аппроксимирует $y'(x)$ со вторым порядком.

Заметим, что порядок аппроксимации разностного отношения зависит от того, в какой точке оно оценивается. Например, разность вперед, определенную в точке x , можно считать также центральной разностью с половинным шагом $h/2$, записанную в точке $z = x + h/2$. Из представления

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{y(z+h/2) - y(z-h/2)}{2(h/2)} = y'(z) + O(h^2)$$

следует, что в точке z порядок аппроксимации второй, хотя в любой другой точке он только первый.

Разностные аппроксимации производных более высокого порядка строятся как разделенные разности от разделенных разностей предыдущего порядка. Например, симметричная аппроксимация второй производной строится так:

$$\begin{aligned} y''(x) &\simeq \frac{y'(x+h/2) - y'(x-h/2)}{h} \simeq \\ &\simeq \frac{1}{h} \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right) = \\ &= \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

С помощью разложения в ряд Тейлора легко получить равенство

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = y''(x) + \frac{h^2}{12} y^{(IV)}(x) + O(h^4),$$

из которого видно, что приближение (1.5) в центральной точке имеет второй порядок.

Функции, зависящие от значений функции и разделенных разностей от нее, называются разностными выражениями. Ясно, что в разностных выражениях переменная x может принимать непрерывные значения, и тогда выражения

можно считать принадлежащими тому же пространству, в котором определены исходные функции. В частности, раздельные разности любого порядка можно считать функциями непрерывного аргумента x , параметрически зависящими также от приращения h .

Однако в численных алгоритмах переменная x в разностных выражениях обычно принимает дискретные значения. Простейший пример сеточной области представляет равномерная сетка на отрезке $[a, b]$ с шагом $h = (b - a)/N$:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, N.$$

Функция, определенная в узлах сеточной области, является табличной функцией $\{(x_i, y_i), i = 0, \dots, N\}$. В сеточной области разностные отношения могут быть записаны в индексном виде, например,

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Заметим, что обычно разностные выражения определены не во всей сеточной области, а только в ее части. Так, в данном примере первое выражение не определено на правой границе (при $i = N$), а второе — на обеих (при $i = 0$ и $i = N$).

1.2. Разностные операторы. Кроме индексной записи используется также операторная. Ее основу составляют оператор сдвига T_h (сдвига аргумента на h) и единичный оператор E :

$$T_h y(x) = y(x + h), \quad E y(x) = y(x).$$

Обратным по отношению к оператору сдвига T_h является оператор сдвига на противоположное по знаку приращение:

$$T_h^{-1} y(x) = T_{-h} y(x) = y(x - h).$$

Индекс h при операторе сдвига всюду ниже будем опускать.

В операторной форме рассмотренные выше простейшие разделенные разности (1.2)–(1.3), (1.5) имеют вид

$$\Delta_{\pm} = \pm \frac{T^{\pm 1} - E}{h}, \quad \Lambda = \frac{T - 2E + T^{-1}}{h^2}. \quad (1.6)$$

Целые степени оператора сдвига также являются операторами сдвига. Например, квадрат оператора сдвига

$$T^2 y(x) = TTy(x) = Ty(x+h) = y(x+h+h) = y(x+2h)$$

осуществляет сдвиг на удвоенное приращение. Более высокие степени имеют аналогичный смысл:

$$T^k y(x) = y(x+kh).$$

Ввиду существования обратного оператора T^{-1} степень k может быть здесь также отрицательной. Поэтому вообще любой линейный разностный оператор на равномерной сетке можно представить в виде ряда по целым степеням оператора сдвига

$$R = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k T^k. \quad (1.7)$$

Заметим, что обычно в выражении (1.7) лишь конечное число коэффициентов α_k отлично от нуля. Множество таких индексов k , для которых $\alpha_k \neq 0$, определяет так называемый шаблон разностного оператора, т. е. множество узлов сетки, используемых при записи разностного выражения $Ry(x)$ в фиксированной точке x сеточной области. Если разностное выражение в каждом внутреннем узле сетки пишется единообразно, разностный оператор называется однородным, в противном случае — неоднородным. Для неоднородных операторов структура шаблона может меняться от точки к точке.

Из определений следует, что операции сложения и перемножения разностных операторов, а также умножения их на число не выводят из пространства линейных разностных операторов. Например, квадрат разности вперед дает односторонний аналог двойного дифференцирования

$$\Delta_+ \Delta_+ = \left(\frac{T - E}{h} \right)^2 = \frac{T^2 - 2T + E}{h^2},$$

а линейная комбинация односторонних разностей

$$\Delta_\alpha = \frac{1 + \alpha}{2} \Delta_+ + \frac{1 - \alpha}{2} \Delta_- = \Delta + \frac{\alpha h}{2} \Lambda$$

представляет собой однопараметрическое семейство трехточечных аналогов оператора дифференцирования, совпадающее при частных значениях параметра с рассмотренными выше односторонними разделенными разностями ($\alpha = \pm 1$) и центральной разностью ($\alpha = 0$).

Ввиду справедливости на достаточно гладких функциях разложения оператора сдвига по степеням оператора дифференцирования

$$T = E + hD + \frac{h^2}{2} D^2 + \frac{h^3}{6} D^3 + \dots, \quad D = \frac{\partial}{\partial x}$$

любой линейный разностный оператор может быть разложен в ряд по степеням D .

1.3. Разностные операторы в многомерном случае. Для простоты рассмотрим m -мерный параллелепипед

$$a^j < x^j < b^j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Определим сеточную область по аналогии с одномерной равномерной сеткой:

$$(x_{l_1}^1, \dots, x_{l_m}^m), \quad 0 \leq l_j \leq N_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$x_{l_j}^j = a^j + l_j h_j, \quad h_j = (b^j - a^j)/N_j.$$

Операторы сдвига в многомерном случае будем снабжать индексом, указывающим номер переменной, по которой осуществляется сдвиг. Например,

$$T_j y(x^1, \dots, x^{j-1}, x^j, x^{j+1}, \dots) = y(x^1, \dots, x^{j-1}, x^j + h_j, x^{j+1}, \dots).$$

Аналогично будем поступать с одномерными разностными операторами в многомерном пространстве. Так, односторонние разностные аналоги оператора дифференцирования по переменной x^j обозначим

$$\Delta_{\pm j} = \pm \frac{T_j^{\pm 1} - E}{h_j} = D_j + O(h_j), \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (1.8)$$

а разностный аналог двойного дифференцирования —

$$\Lambda_j = \frac{T_j - 2E + T_j^{-1}}{h_j^2} = D_j^2 + O(h_j^2). \quad (1.9)$$

Смешанные производные можно аппроксимировать, например, как произведения разностных аналогов операторов дифференцирования по отдельным направлениям.

Все сказанное выше для одномерных операторов остается в силе и в многомерном случае. Так, общий вид разностного оператора в многомерном пространстве полностью сохраняет форму одномерного (1.7), нужно лишь сделать обычные обобщения: индекс суммирования k считать мультииндексом $k = (k_1, \dots, k_m)$, а степень T^k понимать как произведение степеней по отдельным переменным $T^k = T_1^{k_1} \dots T_m^{k_m}$.

В заключение данного параграфа сформулируем равенства, которые предлагается доказать в качестве самостоятельного упражнения:

$$\begin{aligned}
TT^{-1} &= T^{-1}T = E, \\
\Lambda &= \Delta_+\Delta_- = \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{h}, \\
\Delta_+ - \frac{h}{2}\Lambda &= \Delta_- + \frac{h}{2}\Lambda = \Delta, \\
\Delta_\alpha &= D + \frac{\alpha h}{2}D^2 + \frac{h^2}{6}D^3 + \frac{\alpha h^3}{24}D^4 + O(h^4), \\
\Lambda &= D^2 + \frac{2h^2}{4!}D^4 + \frac{2h^4}{6!}D^6 + \frac{2h^6}{8!}D^8 + O(h^8).
\end{aligned}$$

§ 2. Разностные схемы

2.1. Основные определения. Пусть дифференциальная задача

$$Ly = f \quad (2.1)$$

приближается разностной схемой

$$L_h y_h = f_h, \quad (2.2)$$

где L_h — некоторый разностный аналог дифференциального оператора L , а f_h — приближение правой части f .

Определение 1. Сеточная функция f_h аппроксимирует функцию непрерывного аргумента f , если в некоторой сеточной норме

$$\|f_h - [f]\| \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$. Если при этом

$$\|f_h - [f]\| \leq Ch^k,$$

где константа C не зависит от h , то говорят, что порядок аппроксимации равен k .

Здесь квадратными скобками обозначен оператор проектирования функции непрерывного аргумента на сетку, например, сканирующий локальные значения функции в узлах сетки. Всюду, кроме определений, квадратные скобки в операторах проектирования будем опускать.

Определение 2. Разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L , если для любой достаточно гладкой функции w в некоторой сеточной норме

$$\|L_h[w] - [Lw]\| \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$.

Порядок аппроксимации равен k , если при этом

$$\|L_h[w] - [Lw]\| \leq Ch^k,$$

где константа C не зависит от h .

Определение 3. Разностная схема (2.2) аппроксимирует на решениях дифференциальную задачу (2.1), если для достаточно гладких решений задачи (2.1)

$$\|L_h[y] - f_h\| \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$. Невязка $\psi_h = L_h[y] - f_h$ разностной задачи на решении дифференциальной задачи называется погрешностью аппроксимации схемы (2.2).

Порядок аппроксимации равен k , если при этом

$$\|\psi\| \leq Ch^k,$$

где C не зависит от h .

Определение 4. Разностная схема (2.2) аппроксимирует дифференциальную задачу (2.1), если оператор L_h аппроксимирует L и правая часть f_h аппроксимирует f .

Порядком аппроксимации схемы называется наименьшее из двух чисел — порядков аппроксимации разностного оператора и правой части схемы.

Общепринятым является определение 3, так как обычно интерес представляет аппроксимация именно на решениях дифференциальной задачи, а не на более широком классе всех гладких функций, хотя для многих традиционных схем определения 3 и 4 оказываются эквивалентными. Архаичное определение 4 дано здесь с той целью, чтобы иметь возможность отличать обычные схемы от компактных схем. Для обычных, как мы увидим ниже, порядок аппроксимации

одинаков в смысле обоих определений, а для компактных порядок аппроксимации на решении всегда больше, чем порядок в смысле отдельной аппроксимации оператора и правой части.

Определение 5. Разностная схема (2.2) с линейным оператором L_h устойчива, если при любом f_h уравнение (2.2) имеет единственное решение такое, что

$$\|y_h\|_1 \leq M \|f_h\|,$$

где число M не зависит от h . Нормы для решения и правой части обычно различны.

Определение 6. Решение разностной схемы (2.2) сходится к решению дифференциальной задачи (2.1), если в некоторой сеточной норме

$$\|[y] - y_h\|_1 \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$.

Порядок точности схемы (2.2) равен k , если при этом

$$\|[y] - y_h\|_1 \leq Ch^k,$$

где константа C не зависит от h . Величина $z_h = [y] - y_h$ называется ошибкой схемы.

При сходимости решения говорят также, что схема (2.2) сходится.

Из аппроксимации и устойчивости в линейном случае следует сходимость схемы. В самом деле, подействуем на ошибку z_h разностным оператором L_h :

$$L_h z_h = L_h[y] - L_h y_h = L_h[y] - f_h = \psi_h.$$

Отсюда следует, что ошибка схемы является решением разностной схемы (2.2) с правой частью ψ_h , являющейся погрешностью аппроксимации схемы. Благодаря аппроксимации при $h \rightarrow 0$ погрешность $\psi_h \rightarrow 0$, а ввиду устойчивости вместе с ψ_h к нулю стремится и ошибка z_h . Можно также утверждать, что из аппроксимации с порядком k и устойчивости схемы следует ее сходимость с порядком k . Это вытекает из оценок, данных в определениях 3 и 5.

Заметим, что дифференциальная задача включает совокупность всех уравнений — уравнение или систему уравнений, граничные и начальные условия. Аналогично в понятие “разностная схема” входит совокупность разностных аналогов дифференциальных уравнений во внутренних узлах сетки, разностные аппроксимации граничных и начальных условий. Таким образом, операторы L и L_h в (2.1)–(2.2) составные, включающие операторы, действующие внутри сеточной области, и операторы, действующие на границах области. Точно так же функции f и f_h составные, включающие правые части дифференциального уравнения и соответствующего ему разностного аналога и входные данные задач на границах области.

2.2. Пример разностной схемы. Для краевой задачи

$$y'' = g, \quad x \in (a, b), \quad (2.3)$$

$$y(a) = \phi_0, \quad y(b) = \phi_1 \quad (2.4)$$

оператор L и правая часть f определяются следующим образом:

$$Ly = \begin{cases} y(a), & x = a; \\ y'', & x \in (a, b); \\ y(b), & x = b, \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} \varphi_0, & x = a; \\ g(x), & x \in (a, b); \\ \varphi_1, & x = b. \end{cases}$$

Аналогично оператор L_h и функция f_h для разностного аналога задачи (2.3)–(2.4)

$$\Lambda y_h = g_h, \quad (2.5)$$

$$(y_h)_0 = \varphi_0, \quad (y_h)_N = \varphi_1 \quad (2.6)$$

имеют вид

$$(L_h y_h)_i = \begin{cases} (y_h)_0, & i = 0; \\ (\Lambda y_h)_i, & i = 1, \dots, N - 1; \\ (y_h)_N, & i = N, \end{cases}$$

$$(f_h)_i = \begin{cases} \varphi_0, & i = 0; \\ g_i, & i = 1, \dots, N - 1; \\ \varphi_1, & i = N. \end{cases}$$

Заметим, что на сетках, согласованных с границами, для задачи Дирихле граничные условия обычно ставятся точно, поэтому анализ аппроксимации в таких случаях сводится к проверке аппроксимации внутри области. Так, в данном примере достаточно оценить лишь составляющую погрешности во внутренних узлах, т. е. $\Lambda[y] - g$. Всюду ниже будем рассматривать именно такого рода задачи, поэтому для простоты условимся не выписывать составных операторов.

Заметим также, что приведенные выше определения остаются верными и в случае многомерных задач. Роль параметра h при этом играет норма вектора набора шагов по всем переменным, например $h = \max(h_1, \dots, h_m)$, где m — размерность задачи. Для динамических задач обычно полагают, что

зафиксировано поведение временного шага τ при $h \rightarrow 0$. Чаще всего $\tau = O(h)$ для гиперболических задач и $\tau = O(h^2)$ для параболических. Фиксация определенного предельного перехода обеспечивает стремление τ к нулю при $h \rightarrow 0$, так что все определения остаются в силе и для динамических задач.

За более строгими формулировками, учитывающими понятие согласованности норм входных данных дифференциальной и разностной задач и включающими понятие регулярной схемы, отсылаем читателя к учебникам по численным методам.

2.3. Два способа повышения порядка разностных схем. Очевидно, разностное уравнение (2.5) аппроксимирует (2.3) со вторым порядком. Выделим главный член погрешности. Имеем

$$\psi = \Lambda y - g = y'' + \frac{h^2}{12}y^{(IV)} + O(h^4) - g.$$

В силу уравнения (2.3) $y'' - g = 0$. Следовательно, на достаточно гладких решениях задачи (2.3)–(2.4)

$$\Lambda y - g = \frac{h^2}{12}y^{(IV)} + O(h^4). \quad (2.7)$$

Первый способ повышения точности основан на замене старшей производной в правой части (2.7) разностным отношением

$$y^{(IV)} = (y'')'' = \Lambda(\Lambda y) + O(h^2)$$

и переносом соответствующего слагаемого в левую часть:

$$\left(\Lambda - \frac{h^2}{12}\Lambda^2\right)y - g = O(h^4).$$

Отсюда по определению аппроксимации на решении немедленно следует, что схема

$$\bar{\Lambda}y_h = g_h, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda - \frac{h^2}{12}\Lambda^2 \quad (2.8)$$

имеет четвертый порядок аппроксимации.

Другой способ состоит в понижении (с помощью следствий дифференциального уравнения) порядка производной в главном члене погрешности аппроксимации

$$y^{(IV)} = (y'')'' = g'',$$

откуда следует, что схема

$$\Lambda y_h = g + \frac{h^2}{12}g'' \quad (2.9)$$

аппроксимирует уравнение (2.3) на его гладких решениях с четвертым порядком.

Общим свойством простой схемы (2.5) и схемы повышенного порядка (2.8) является совпадение порядков аппроксимации в смысле определений 3 и 4. Действительно, схема (2.5) в смысле обоих определений имеет второй порядок аппроксимации, а схема (2.8) — четвертый. Это обстоятельство сближает схемы повышенной точности типа (2.8) с ординарными схемами. Схемы (2.5) и (2.8) можно назвать схемами с отдельной аппроксимацией, когда оператор дифференциальной задачи и ее правая часть аппроксимируются отдельно на множестве гладких функций. В данном случае правая часть точна, а для оператора $\bar{\Lambda}$ порядок аппроксимации четвертый.

Заметим, что схема (2.8) имеет некоторые отрицательные качества. Она занимает пятиточечный шаблон и поэтому не определена в приграничных узлах. Для замыкания системы

уравнений требуется либо придумывать дополнительные соотношения в этих узлах, либо мириться с наличием фиктивных точек сетки, называемых еще “законтурными”, и для исключения значений решения в них привлекать неустойчивую процедуру экстраполяции. Это усложняет схему и портит свойства разностного оператора.

Совершенно иная ситуация в случае схем вида (2.9), называемых компактными разностными схемами. Их характерной особенностью является компактная структура при повышенном порядке аппроксимации. Компактные схемы записываются на шаблоне, совпадающем или не очень отличающемся от шаблона, характерного для схем обычной точности. В данном примере шаблон в точности совпадает с трехточечным шаблоном обычной схемы (2.5). Как будет установлено ниже, полное совпадение шаблонов характерно только для одномерных задач. Для многомерных аналогов схемы (2.9) полного совпадения нет, тем не менее габариты шаблонов по координатным направлениям обычно совпадают, а этого достаточно, чтобы избежать проблем, характерных для схемы (2.8).

Второй особенностью компактной схемы является использование при ее построении продолженной системы уравнений (иначе говоря, следствий дифференциального уравнения, полученных его дифференцированием). Это позволяет понизить порядок производных, входящих в главную часть погрешности аппроксимации, что и приводит к компактному шаблону. В данном примере в качестве такового использовалось уравнение, полученное двойным дифференцированием исходного уравнения, т. е. $(y'')'' = g''$.

Третий признак компактной схемы — несовпадение порядков аппроксимации в смысле определений 3 и 4. Ввиду

равенств

$$\Lambda = D^2 + O(h^2), \quad g + \frac{h^2}{12}g'' = g + O(h^2)$$

схема (2.9) имеет только второй порядок в смысле отдельной аппроксимации, тем не менее по построению она аппроксимирует уравнение (2.3) на его решениях с четвертым порядком.

Каждый из этих признаков можно принять за определение компактной схемы.

Строго говоря, все эти три признака характерны не только для схем повышенной точности, но также для целого ряда схем второго порядка, таких как модифицированная схема Эйлера, симметричный вариант схемы бегущего счета, схема Лакса—Вендроффа и других. Таким образом, есть все основания считать их простейшими компактными схемами. Это представляется нам правильным и будет проиллюстрировано в следующем параграфе. Однако часто их не относят к числу компактных. Причина заключается в следующем. Некомпактные схемы повышенной точности типа (2.8) являются большой редкостью в практике вычислений, поскольку в их использовании мало смысла, таким образом объединение множества существующих *компактных схем* повышенного порядка аппроксимации и множества *обычных схем* повышенного порядка аппроксимации практически совпадает с первым из них. В связи с этим в терминологии произошло ошибочное отождествление понятий “компактная схема” и “схема повышенной точности”, приведшее к тому, что еще одним признаком компактных схем, причем главным, стало принято считать повышенный (выше второго) порядок аппроксимации. Абсолютизация именно этого признака вполне понятна, если принять во внимание цель, ради которой создаются компактные схемы, — это безусловно повышение порядка точности. Названные выше классические схемы второ-

го порядка точности этим свойством не обладают, поэтому и не попали в число компактных.

Следует заметить, что сам термин “компактная схема” появился в результате усилий наших англоязычных коллег значительно позже, чем схемы были построены и исследованы для основных типов уравнений математической физики. До появления этого выразительного краткого термина (до середины 1970-х гг.) такие методы длинно называли “схемами повышенной точности, построенными без (существенного) расширения шаблона”.

§ 3. Компактные аппроксимации операторов

3.1. Компактная аппроксимация второй производной. Запишем схему (2.9) в эквивалентном по порядку аппроксимации виде, воспользовавшись заменой

$$g'' = \Lambda g + O(h^2).$$

В результате для нашего дифференциального уравнения

$$y'' = g \tag{3.1}$$

получится компактная разностная схема

$$\Lambda y_h = Sg, \quad S = E + \frac{h^2}{12}\Lambda. \tag{3.2}$$

Очевидно, смысл оператора S заключается в симметричном осреднении правой части с весом $1/12$ по трем соседним точкам. В самом деле, запишем локальное значение правой части в индексном виде

$$(Sg)_i = g_i + \frac{h^2}{12} \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{12}g_{i+1} + \frac{5}{6}g_i + \frac{1}{12}g_{i-1}.$$

Поскольку оператор S симметричен и при малых h близок к тождественному оператору, то он имеет ограниченный обратный S^{-1} , и из анализа погрешности схемы (3.2) следует

$$S^{-1}\Lambda y = g + O(h^4).$$

Вспоминая, что в силу уравнения (3.1) $g = y''$, имеем

$$S^{-1}\Lambda y = y'' + O(h^4). \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) означает, что оператор

$$A = S^{-1}\Lambda = \left(E + \frac{h^2}{12}\Lambda\right)^{-1}\Lambda \quad (3.4)$$

аппроксимирует с четвертым порядком оператор двойного дифференцирования D^2 . Оператор A называется компактной аппроксимацией оператора D^2 .

Особое внимание следует обратить на то обстоятельство, что для построенной компактной аппроксимации равенство (3.3) имеет место уже независимо от каких бы то ни было дифференциальных уравнений и их решений. Оно справедливо для всех достаточно гладких функций y .

3.2. Компактные аппроксимации первой производной. Дифференциальное уравнение

$$y' = g \quad (3.5)$$

аппроксимируем с первым порядком с использованием разности вперед

$$\Delta_+ y_h = g.$$

Погрешность схемы приводится к виду

$$\psi = \Delta y - g = \left(y' + \frac{h}{2}y'' + O(h^2)\right) - g = \frac{h}{2}g' + O(h^2).$$

Отсюда следует, что схема

$$\Delta_+ y_h = Pg, \quad P = E + \frac{h}{2}\Delta_+$$

представляет собой компактную схему второго порядка аппроксимации, а разностный оператор

$$W = P^{-1}\Delta_+ = \left(E + \frac{h}{2}\Delta_+\right)^{-1}\Delta_+, \quad W \simeq D + O(h^2) \quad (3.6)$$

является компактной аппроксимацией оператора однократного дифференцирования.

Очевидно, оператор P выполняет симметричное осреднение по двум точкам:

$$(Pg)_i = g_i + \frac{h}{2} \frac{g_{i+1} - g_i}{h} = \frac{g_{i+1} + g_i}{2}.$$

Построим теперь компактную аппроксимацию четвертого порядка аппроксимации для оператора дифференцирования. С этой целью уравнение (3.5) аппроксимируем сначала со вторым порядком с использованием центральной разности

$$\Delta y_h = g.$$

Погрешность этой исходной схемы имеет вид

$$\psi = \Delta y - g = (y' + \frac{h^2}{6}y''' + O(h^4)) - g = \frac{h^2}{6}g'' + O(h^4).$$

Отсюда следует, что схема с поправочным слагаемым в правой части

$$\Delta y_h = \Sigma g, \quad \Sigma = E + \frac{h^2}{6}\Lambda \quad (3.7)$$

представляет собой компактную схему четвертого порядка аппроксимации для уравнения (3.5), а разностный оператор

$$B = \Sigma^{-1}\Delta = \left(E + \frac{h^2}{6}\Lambda\right)^{-1} \Delta, \quad B \simeq D + O(h^4) \quad (3.8)$$

является искомой компактной аппроксимацией оператора однократного дифференцирования.

Обращаем внимание на полную аналогию процедуры построения компактных аппроксимаций второго (3.6) и четвертого (3.8) порядков. Это свидетельствует о том, что схемы

второго порядка, построение которых опирается на использование продолженной системы уравнений, вероятно, не следует исключать из множества компактных схем.

Аналогично строятся компактные аппроксимации более сложных одномерных операторов. В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор

$$P = D^2 + aD, \quad a = \text{const.} \quad (3.9)$$

Рассмотрим связанное с ним дифференциальное уравнение $Pu = g$ или

$$y'' + ay' = g$$

и соответствующее ему разностное уравнение второго порядка

$$\Lambda y_h + a\Delta y_h = g.$$

Вычислим и преобразуем погрешность разностного уравнения

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{h^2}{12}y^{(IV)} + a\frac{h^2}{6}y''' + O(h^4) = \frac{h^2}{12}[(g - ay')'' + 2ay'''] + O(h^4) = \\ &= \frac{h^2}{12}[g'' + a(g - ay')'] + O(h^4) = \\ &= \frac{h^2}{12}(ag' + g'' - a^2y'') + O(h^4) = \frac{h^2}{12}(a\Delta g + \Lambda g - a^2\Lambda y) + O(h^4). \end{aligned}$$

Вводя главные члены погрешности с обратным знаком в исходную схему, получим уточненную схему

$$Ru = \Omega g, \quad R = \left(1 + \frac{a^2 h^2}{12}\right)\Lambda + a\Delta, \quad \Omega = E + \frac{h^2}{12}\Lambda + \frac{ah^2}{12}\Delta,$$

которая является компактной и аппроксимирует наше уравнение с четвертым порядком.

Таким образом, для дифференциального оператора (3.9) построена трехточечная компактная аппроксимация

$$C = \Omega^{-1}R = P + O(h^4)$$

четвертого порядка.

Следует заметить, что здесь в отличие от более простых примеров, рассмотренных выше, при построении компактной схемы потребовалась поправка не только правой части схемы, но также и разностного оператора в левой части. В данном случае этого никак нельзя было избежать, так как старшие производные решения выражаются не только через производные правой части, но и через младшие производные решения. Из последнего примера можно также заключить, что компактная аппроксимация заданного порядка на данном шаблоне не является непременно единственной. В самом деле, если, например, на последнем этапе преобразования погрешности производную y'' заменить на $g - ay'$, то в результате последующих преобразований получится другой вариант схемы. А именно, в операторе R исчезнет коэффициент при Λ , но появится некий коэффициент при Δ , одновременно несколько изменится оператор правой части Ω .

В заключение параграфа несколько упражнений:

Постройте вариант компактной аппроксимации четвертого порядка, отличный от указанного выше, для оператора $D^2 + aD$, $a = \text{const}$.

Постройте компактную аппроксимацию второго порядка для оператора дифференцирования D , взяв в качестве исход-

ной схему $\Delta_- y_h = g$ с разностью назад Δ_- .

При $a = \text{const}$ постройте компактную аппроксимацию четвертого порядка для оператора $D^2 + aE$.

В случае постоянных коэффициентов a, b, c постройте компактную аппроксимацию четвертого порядка для оператора $aD^2 + bD + cE$.

В случае переменного коэффициента $a = a(x)$ постройте компактную аппроксимацию четвертого порядка для оператора $D^2 + aE$.

§ 4. Способы построения компактных схем

4.1. Метод исчерпания погрешности. Метод по существу уже продемонстрирован в предыдущих параграфах на одномерных задачах. При большем числе измерений сама идея метода остается неизменной, лишь выкладки становятся несколько более громоздкими. Метод основан на выделении главного члена погрешности более простой исходной схемы с последующей его заменой разностными выражениями от искомой функции и правой части. Включение полученных слагаемых погрешности с обратным знаком в исходную схему дает новую схему с более высоким порядком аппроксимации. Увеличение порядка обычно происходит на единицу, если схема несимметрична, и на две единицы, если схема симметрична. С полученной в результате компактной схемой можно проводить аналогичные манипуляции, повышая порядок еще более путем компенсации членов погрешности более высокого порядка.

Применим этот метод для двумерного уравнения Пуассона

$$\nabla u = f, \quad \nabla = (D_1^2 + D_2^2), \quad (4.1)$$

где D_1, D_2 — операторы дифференцирования по пространственным переменным x_1 и x_2 . Исходную схему возьмем в виде

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)u_h = f, \quad (4.2)$$

где Λ_1, Λ_2 — обычные трехточечные разностные аналоги двойного дифференцирования.

Вычислим и преобразуем погрешность схемы (4.2) на решениях уравнения (4.1), при этом сетку будем считать квадратной ($h_1 = h_2 = h$).

$$\begin{aligned}
\psi &= \Lambda_1 u + \Lambda_2 u - f \approx \left(D_1^2 u + \frac{h^2}{12} D_1^4 u \right) + \left(D_2^2 u + \frac{h^2}{12} D_2^4 u \right) - f = \\
&= \frac{h^2}{12} (D_1^4 u + D_2^4 u) = \frac{h^2}{12} (D_1^2 (f - D_2^2 u) + D_2^2 (f - D_1^2 u)) = \\
&= \frac{h^2}{12} (D_1^2 f + D_2^2 f) - \frac{h^2}{6} D_1^2 D_2^2 u \approx \\
&\approx \frac{h^2}{12} (D_1^2 f + D_2^2 f) - \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 u. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Здесь знак " \approx " означает приближенные равенства с погрешностью $O(h^4)$.

Из представления погрешности (4.3) немедленно следует, что схема

$$\Omega u = \Sigma f, \tag{4.4}$$

где

$$\Omega = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2, \quad \Sigma = E + \frac{h^2}{12} (D_1^2 + D_2^2),$$

является компактной схемой четвертого порядка аппроксимации для уравнения (4.1).

Попробуем повысить порядок аппроксимации до шестого. Для этого вычислим погрешность схемы (4.4), пренебрегая членами $O(h^6)$.

$$\begin{aligned}
\psi &\approx \left(D_1^2 + \frac{2h^2}{4!} D_1^4 + \frac{2h^4}{6!} D_1^6 \right) u + \left(D_2^2 + \frac{2h^2}{4!} D_2^4 + \frac{2h^4}{6!} D_2^6 \right) u + \\
&+ \frac{h^2}{6} \left(D_1^2 + \frac{2h^2}{4!} D_1^4 \right) \left(D_2^2 + \frac{2h^2}{4!} D_2^4 \right) u - \Sigma f =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Sigma (D_1^2 u + D_2^2 u - f) + \frac{h^4}{360} (D_1^6 + D_2^6 + 5D_1^4 D_2^2 + 5D_1^2 D_2^4) u = \\
&= \frac{h^4}{360} [D_1^4 (f - D_2^2 u) + D_2^4 (f - D_1^2 u) + 5D_1^4 D_2^2 u + 5D_1^2 D_2^4 u] = \\
&= \frac{h^4}{360} (D_1^4 f + D_2^4 f) + \frac{h^4}{90} D_1^2 D_2^2 (D_1^2 + D_2^2) u = \\
&= \frac{h^4}{360} (D_1^4 + D_2^4 + 4D_1^2 D_2^2) f.
\end{aligned}$$

Из приведенных выкладок следует, что схема вида (4.4) будет аппроксимировать уравнение (4.1) с шестым порядком, если в ее правой части учесть слагаемые четвертого порядка, полученные в качестве главного члена погрешности. Иначе говоря, оператор Σ следует заменить на

$$\bar{\Sigma} = E + \frac{h^2}{12} (D_1^2 + D_2^2) + \frac{h^2}{360} (D_1^4 + 4D_1^2 D_2^2 + D_2^4).$$

Заметим, что в случае прямоугольной сетки ($h_1 \neq h_2$) повышение порядка до шестого на шаблоне (3×3) выполнить не удастся.

4.2. Метод неопределенных коэффициентов. Метод заключается в том, что в искомую схему вводятся неопределенные коэффициенты (а иногда и неопределенные функции, а также операторы), которые определяются из условий аппроксимации с заданным порядком. Иначе говоря, при разложении погрешности схемы в ряд по степеням операторов дифференцирования с учетом следствий дифференциального уравнения неопределенные коэффициенты выбираются так, чтобы обратились в нуль главные члены разложения погрешности.

Продемонстрируем применение метода на примере схемы

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \gamma(h_1^2 + h_2^2)\Lambda_1\Lambda_2)u_h = Sf \quad (4.5)$$

с неопределенным параметром γ и неопределенным оператором S . Сетку не будем предполагать квадратной. Потребуем, чтобы схема (4.5) аппроксимировала уравнение (4.1) с погрешностью четвертого порядка. Вычислим погрешность на решениях уравнения (4.1)

$$\begin{aligned}\psi &\approx \frac{h_1^2}{12}D_1^4u + \frac{h_2^2}{12}D_2^4u + \gamma(h_1^2 + h_2^2)D_1^2D_2^2u - (S - E)f = \\ &= (h_1^2 + h_2^2)\left(\gamma - \frac{1}{12}\right)D_1^2D_2^2u - \left(S - E - \frac{h_1^2}{12}D_1^2 - \frac{h_2^2}{12}D_2^2\right)f.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что выбор

$$\gamma = \frac{1}{12}, \quad S = E + \frac{h_1^2}{12}D_1^2 + \frac{h_2^2}{12}D_2^2$$

обеспечивает обращение в нуль всех членов погрешности второго порядка. Таким образом, на прямоугольной сетке уравнение (4.1) аппроксимируется с погрешностью $O(h^4)$ схемой

$$\Omega u_h = Sf, \tag{4.6}$$

где

$$\Omega = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2, \quad S = E + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_1 + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_2.$$

Здесь дифференциальное представление оператора S заменено разностным представлением, эквивалентным по порядку остаточных членов.

4.3. Замечания о сходимости. Схема (4.2) на неравномерной сетке в индексах имеет вид

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = f_{i,j}.$$

Отсюда следует, что значение решения в центре шаблона схемы выражается в виде линейной комбинации значений решения в соседних узлах

$$u_{i,j} = b_{1,0} u_{i+1,j} + b_{-1,0} u_{i-1,j} + b_{0,1} u_{i,j+1} + b_{0,-1} u_{i,j-1} + \\ + \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} f_{i,j}, \quad r^2 = \frac{2 h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$$

с положительными коэффициентами

$$b_{1,0} = b_{-1,0} = \frac{r^2}{4 h_1^2}, \quad b_{0,1} = b_{0,-1} = \frac{r^2}{4 h_2^2},$$

сумма которых равна единице.

Такие схемы называют схемами с положительными коэффициентами. Из общей теории разностных схем известно, что для них справедлив принцип максимума, из которого следует устойчивость в сеточной максимум-норме. Таким образом, схема (4.2) сходится со вторым порядком.

Установим достаточный критерий сходимости компактной схемы (4.6). Запишем ее в индексном виде

$$\sum_{k,m=-1}^1 a_{k,m} u_{i+k,j+m} = g_{i,j}, \quad g = S f,$$

где

$$a_{0,0} = -\frac{10}{3} \frac{1}{r^2}, \quad a_{1,1} = a_{-1,1} = a_{1,-1} = a_{-1,-1} = \frac{1}{6} \frac{1}{r^2}, \\ a_{1,0} = a_{-1,0} = \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{r^2}, \quad a_{0,1} = a_{0,-1} = \frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{r^2}.$$

Выразим значение решения в центре шаблона через значения в соседних узлах

$$u_{i,j} = \sum_{k^2+m^2 \neq 0} b_{k,m} u_{i+k,j+m} + \frac{1}{|a_{0,0}|} g_{i,j}, \quad b_{k,m} = \frac{a_{k,m}}{|a_{0,0}|}.$$

Нетрудно проверить, что сумма коэффициентов линейной комбинации в правой части равна единице, а условия их положительности сводятся к системе неравенств

$$h_1^2 \leq 3 r^2, \quad h_2^2 \leq 3 r^2, \quad r^2 = \frac{2 h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2},$$

которые выполняются при ограничении на степень вытянутости прямоугольной ячейки сетки

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}.$$

Это ограничение гарантирует выполнение принципа максимума и сходимость схемы с четвертым порядком.

4.4. Метод компактных аппроксимаций. Аппроксимируем слагаемые в левой части уравнения (4.1) с помощью построенных выше компактных аппроксимаций вторых производных

$$A_1 = S_1^{-1} \Lambda_1 = (E + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1)^{-1} \Lambda_1 = D_1^2 + O(h_1^4),$$

$$A_2 = S_2^{-1} \Lambda_2 = (E + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2)^{-1} \Lambda_2 = D_2^2 + O(h_2^4).$$

В результате получим компактную схему вида

$$S_1^{-1} \Lambda_1 u + S_2^{-1} \Lambda_2 u_h = f \tag{4.7}$$

четвертого порядка аппроксимации.

Конечно, при реальных расчетах схема не применяется непосредственно в форме (4.7). Эта форма удобна лишь для быстрой формальной записи схемы через одномерные компактные аппроксимации вторых производных. Для реализации вычислений схема (4.7) приводится умножением на произведение $S_1 S_2$ к виду

$$S_2 \Lambda_1 u + S_1 \Lambda_2 u = S_1 S_2 f, \tag{4.8}$$

не содержащему обратных операторов. Заметим, что левые части схем (4.6) и (4.8) совершенно совпадают ввиду равенства

$$(E + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_2)\Lambda_1 + (E + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_1)\Lambda_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}\Lambda_1\Lambda_2,$$

а их правые части отличаются на величину порядка погрешности аппроксимации:

$$S_1S_2 = (E + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_1)(E + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_2) = S + O(h^4).$$

Метод компактных аппроксимаций в отличие от метода исчерпания погрешности очень технологичен, он элементарно распространяется на многомерные задачи с оператором, представляющим собой сумму любых одномерных дифференциальных операторов. Пусть известны компактные аппроксимации A_i одномерных дифференциальных операторов P_i ($i = 1, \dots, m$), действующих по переменной x_i . Тогда компактная схема для дифференциального уравнения

$$(P_1 + P_2 + \dots + P_m)u = f,$$

записывается тривиально в виде

$$(A_1 + \dots + A_m)u_h = f.$$

Например, для многомерного уравнения Пуассона получим схему

$$\sum_{i=1}^m S_i^{-1}\Lambda_i u_h = f, \quad S_i = E + \frac{h_i^2}{12}\Lambda_i.$$

Приведем ее к виду, удобному для расчетов. Для этого умножим ее слева на произведение операторов $S_1 \dots S_m$. В результате получим эквивалентную запись схемы

$$\sum_{i=1}^m \prod_{j \neq i} S_j \Lambda_i u_h = \prod_{j=1}^m S_j f.$$

Отбрасывая в разностных операторах этой схемы слагаемые четвертого порядка малости согласно формуле

$$\prod(1 + z_i) = 1 + \sum z_i + O(\max|z_i|^2),$$

получим компактную схему, удобную для проведения расчетов, в форме

$$\sum_{i=1}^m \left(E + \sum_{j \neq i} \frac{h_j^2}{12} \Lambda_j \right) \Lambda_i u_h = \left(E + \sum_{j=1}^m \frac{h_j^2}{12} \Lambda_j \right) f.$$

4.5. Схема для эллиптического уравнения со смешанной производной. Рассмотрим уравнение

$$(aD_1^2 - 2cD_1D_2 + bD_2^2)u = f, \quad (4.9)$$

удовлетворяющее условию эллиптичности

$$a > 0, \quad a b - c^2 = d > 0.$$

Данный пример интересен тем, что оператор уравнения не представляет собой сумму одномерных операторов, и поэтому для него неприменим метод компактных аппроксимаций. Но метод исчерпания погрешности остается в силе. Определим условия, при которых возможна аппроксимация уравнения (4.9) с четвертым порядком на компактном шаблоне (3×3) . Запишем исходную схему второго порядка, аппроксимируя смешанную производную произведением центральных разностей

$$\Lambda_{12} = \Delta_1 \Delta_2 \approx D_1 D_2 + \frac{h_1^2}{6} D_1^3 D_2 + \frac{h_2^2}{6} D_1 D_2^3,$$

и вычислим ее погрешность

$$\Psi = a\Lambda_1 u - 2c\Lambda_{12} u + b\Lambda_2 u - f \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx a \frac{h_1^2}{12} D_1^4 u - c \frac{h_1^2}{3} D_1^3 D_2 u - c \frac{h_2^2}{3} D_1 D_2^3 + b \frac{h_2^2}{12} D_2^4 u = \\ &= \frac{h_1^2}{12} D_1^2 (f - 2c D_1 D_2 u - b D_2^2 u) + \frac{h_2^2}{12} D_2^2 (f - 2c D_1 D_2 u - a D_1^2 u). \end{aligned}$$

Здесь “чистые” четвертые производные уже выражены исходя из следствий уравнения (4.9), полученных двойным дифференцированием его по каждой из переменных. Однако в полученном выражении имеются еще производные порядков $(3+1)$ и $(1+3)$, которые не могут быть аппроксимированы на нашем шаблоне (3×3) . Для исключения одной из них можно воспользоваться следствием уравнения (4.9), полученного смешанным дифференцированием его по x и y . Однако одновременно обе они в общем случае не могут быть исключены из выражения для погрешности, так как каждая из них выражается через другую. Необходимое и достаточное условие одновременного их исключения состоит, как нетрудно видеть, в жестком ограничении на соотношение шагов

$$\frac{h_1^2}{a} = \frac{h_2^2}{b}.$$

Обозначив через h^2 каждое из этих отношений, получим

$$\Psi \approx \frac{h_1^2}{12} D_1^2 f + \frac{h_2^2}{12} D_2^2 f - c \frac{h^2}{6} D_1 D_2 f - (ab + 2c^2) \frac{h^2}{6} D_1^2 D_2^2 u.$$

Заменив в разложении погрешности дифференциальные операторы разностными, приходим к компактной схеме четвертого порядка аппроксимации

$$\hat{\Omega} u_h = \hat{S} f,$$

где

$$\hat{\Omega} = a\Lambda_1 - 2c\Lambda_{12} + b\Lambda_2 + (ab + 2c^2) \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2,$$

$$\hat{S} = E + \frac{h_1^2}{12}\Lambda_1 + \frac{h_2^2}{12}\Lambda_2 - c\frac{h^2}{6}\Lambda_{12}.$$

По существу полученное ограничение на соотношение шагов означает, что если осуществить линейное растяжение координат так, чтобы коэффициенты при вторых производных стали единичными, то в этой (канонической) системе координат искомую компактную схему можно построить только на квадратной сетке.

Полученный результат справедлив также и в многомерном случае. Докажите это утверждение в качестве самостоятельного упражнения.

§ 5. Компактные схемы для эволюционных уравнений

5.1. Схема для одномерного уравнения теплопроводности. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D^2 u + f. \quad (5.1)$$

Предположим, что при численном решении краевой задачи для уравнения (5.1) используется равномерная сетка, причем шаг τ по временной переменной t связан квадратичной зависимостью с пространственным шагом h . Для аппроксимации производной по времени построим оператор вида (3.6) второго порядка, а для второй производной по пространственной переменной возьмем компактную аппроксимацию четвертого порядка (3.4). Для построения компактной схемы, аппроксимирующей уравнение (5.1) с погрешностью $O(\tau^2 + h^4)$, воспользуемся методом компактных аппроксимаций. Очевидно, схема имеет вид

$$P_t^{-1} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = S^{-1} \Lambda u^n + f^n, \quad (5.2)$$

где n — индекс временного слоя $t^n = n\tau$, а P_t и S — операторы осреднения по t и x соответственно:

$$P_t u^n = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \quad S = E + \frac{h^2}{12} \Lambda.$$

Способом, описанным выше, приведем схему (5.2) к форме, не содержащей обратных операторов. Для этого умножим ее слева на произведение P_t и S . В результате, предполагая перестановочность операторов, получим

$$S \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda P_t u^n + S P_t f^n$$

или, в развернутой форме,

$$S \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} + S \frac{f^{n+1} + f^n}{2}.$$

Наконец, в силу тождества

$$\frac{u^{n+1} + u^n}{2} = u^n + \frac{\tau}{2} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}$$

схема приводится к канонической форме

$$(E - \sigma \tau \Lambda) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + F^n, \quad (5.3)$$

где

$$F^n = (E + \frac{h^2}{12} \Lambda) \frac{f^{n+1} + f^n}{2}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}. \quad (5.4)$$

Заметим, что правую часть (5.4) можно без нарушения порядка аппроксимации заменить также любым из выражений

$$F^n = \left(E + \frac{h^2}{12} \Lambda \right) f^{n+1/2}, \quad F^n = \frac{f^{n+1} + f^n}{2} + \frac{h^2}{12} \Lambda f^n$$

или их дифференциальным представлением

$$F^n = \left(E + \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f^n,$$

так как все эти варианты выбора правой части схемы различаются на величины, сравнимые с погрешностью $O(\tau^2 + h^4)$.

Известно, что схема с весом σ для уравнения теплопроводности при $\sigma \geq 1/2$ абсолютно устойчива (т. е. устойчива при любых значениях τ и h), а при $\sigma < 1/2$ условно устойчива при ограничении

$$2(1 - 2\sigma) \frac{\tau}{h^2} \leq 1.$$

Нетрудно проверить, что последнее неравенство при специальном значении веса (5.4), соответствующем схеме (5.3), выполняется для любого соотношения шагов. Следовательно, компактная схема (5.3) абсолютно устойчива, несмотря на то, что для нее вес лежит в области $\sigma < 1/2$.

5.2. Схема для многомерного уравнения теплопроводности. Для простоты рассмотрим уравнение теплопроводности лишь с двумя пространственными переменными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla u + f, \quad \nabla = D_1^2 + D_2^2. \quad (5.5)$$

Двумерным аналогом схемы (5.2) является компактная схема

$$P_t^{-1} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (S_1^{-1} \Lambda_1 + S_2^{-1} \Lambda_2) u^n + f^n. \quad (5.6)$$

Умножая ее слева на произведение разностных операторов P_t , S_1 , S_2 , пользуясь их предполагаемой коммутативностью и отбрасывая несущественное слагаемое порядка $O(h^4)$ в произведении

$$S_1 S_2 \approx S = E + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2,$$

получим схему в форме

$$S \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega \frac{u^{n+1} + u^n}{2} + S \frac{f^{n+1} + f^n}{2},$$

где

$$\Omega = S_2 \Lambda_1 + S_1 \Lambda_2 = (E + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2) \Lambda_1 + (E + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1) \Lambda_2.$$

Далее описанным выше способом схема приводится к каноническому виду. При этом, в отличие от одномерного случая, возникает дополнительное слагаемое

$$\frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 \left(\frac{\tau}{2} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right),$$

которое, конечно, следует отбросить как величину порядка погрешности аппроксимации.

После приведения схемы к каноническому виду и последующей приближенной факторизации оператора в левой части с погрешностью $O(\tau^2)$ окончательно получается компактная факторизованная схема

$$(E - \sigma_1 \tau \Lambda_1) (E - \sigma_2 \tau \Lambda_2) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n + F^n, \quad (5.7)$$

где

$$F^n = (E + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2) \frac{f^{n+1} + f^n}{2}, \quad \sigma_i = \frac{1}{2} - \frac{h_i^2}{12\tau}. \quad (5.8)$$

Заметим, что схема обычной точности $O(\tau + h^2)$ также имеет форму схемы (5.7), только в ней веса σ_1, σ_2 произвольны и несколько проще выражения в правой части. Отсюда следует, что компактная схема (5.7) по технологии расчета краевой задачи, т. е. по степени сложности процедуры обращения оператора на верхнем слое, вполне равноценна обычной схеме. При этом незаметное усложнение правой части с избытком компенсируется существенным выигрышем в порядке точности. Что же касается устойчивости схемы, то, как и в случае одной пространственной переменной, она остается абсолютной, по крайней мере для двумерных и трехмерных задач.

5.3. Компактная схема для уравнения колебаний.

Для простоты ограничимся двумя пространственными переменными. Рассмотрим уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla u + f, \quad \nabla = (D_1^2 + D_2^2). \quad (5.9)$$

Уравнение (5.9) содержит только вторые производные, для которых компактные аппроксимации с погрешностью четвертого порядка построены выше. По аналогии с оператором

двойного дифференцирования по пространственной переменной строится компактная аппроксимация второй производной по времени

$$A_t = S_t^{-1} \Lambda_t = \left(E + \frac{\tau^2}{12} \Lambda_t \right)^{-1} \Lambda_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + O(\tau^4),$$

где

$$\Lambda_t u^n = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2}.$$

Зафиксируем естественное для гиперболических задач соотношение шагов $\tau = O(h)$. Следуя методу компактных аппроксимаций, запишем компактную схему, аппроксимирующую уравнение (5.9) с погрешностью $O(\tau^4 + h^4)$:

$$S_t^{-1} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} = (S_1^{-1} \Lambda_1 + S_2^{-1} \Lambda_2) u^n + f^n.$$

Умножение ее слева на произведение $S_t S_1 S_2$, предположение о коммутативности и замена $S_1 S_2 \approx S$ приводит схему к форме, не содержащей обратных операторов:

$$S \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} = \Omega S_t u^n + S S_t f^n.$$

Приводя подобные и пренебрегая при этом слагаемыми четвертого порядка малости в правой части схемы, как это сделано выше в случае параболического уравнения, перейдем к канонической форме, а затем факторизуем приближенно оператор в левой части. В результате этих преобразований получим экономичную компактную схему для уравнения колебаний четвертого порядка точности по всем переменным:

$$R \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} = \Omega u^n + \Gamma f^n, \quad (5.10)$$

где

$$R = (E - \alpha_1 \tau^2 \Lambda_1) (E - \alpha_2 \tau^2 \Lambda_2), \quad \alpha_i = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{\tau^2}{h_i^2}\right),$$

$$\Gamma = E + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 + \frac{\tau^2}{12} \Lambda_t.$$

Аналогично выглядит компактная схема для многомерного уравнения колебаний:

$$\prod_{i=1}^m R_i \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} = \Omega u^n + \Gamma f^n,$$

где

$$\Omega = \sum_{i=1}^m \left(E + \sum_{j \neq i} \frac{h_j^2}{12} \Lambda_j \right) \Lambda_i,$$

$$\Gamma = E + \sum_{i=1}^m \frac{h_i^2}{12} \Lambda_i + \frac{\tau^2}{12} \Lambda_t.$$

5.2. Замечания о реализации начальных и граничных условий. Предположим, что решается задача Дирихле для уравнения колебаний в прямоугольной области. Условия на границах имеют вид

$$u|_{\Gamma} = \phi, \quad u(x, y, 0) = \Phi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \Psi(x, y).$$

Схема (5.10) трехслойная, поэтому требует задания начальных данных на первых двух слоях u^0 и u^1 . На нулевом слое (в момент времени $t = 0$) решение может быть задано из начального условия точно: $u^0 = \Phi$. Для определения решения на первом слое воспользуемся разложением в окрестности нуля

$$u(\tau) \approx \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\tau^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) \Big|_{t=0}.$$

В силу начальных данных и следствий дифференциального уравнения (5.9) при $t = 0$ находим:

$$u = \Phi, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Psi, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla\Phi + f,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \nabla\Psi + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \nabla(\nabla\Phi + f) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Теперь для вычисления приближения $u^1 \approx u(\tau)$ с достаточной точностью необходимо лишь подставить все эти выражения в слагаемые разложения.

Граничные условия разностной задачи для задачи Дирихле ставятся на всех целых шагах точно. Схематично расщепленная система одномерных уравнений имеет вид

$$R_1 u^{n+1/2} = G^n,$$

$$R_2 w^{n+1} = u^{n+1/2},$$

где

$$w^{n+1} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2},$$

G^n — правая часть схемы, включающая результат применения разностных операторов на нижних шагах и разностную аппроксимацию правой части дифференциального уравнения, а R_1, R_2 — трехточечные разностные операторы, требующие обращения.

Для решения первого уравнения системы методом прогонки необходимо предварительно задать граничные условия на вертикальных участках границы прямоугольной области для вспомогательной величины на дробном шаге. Они находятся из самого определения дробной величины, т. е. из

второго уравнения системы, явным вычислением трехточечных выражений $R_2 w^{n+1}$ по всем точкам вертикальных участков границы с использованием информации о значениях на границе u^{n-1} , u^n и u^{n+1} . Затем решаются уравнения второго дробного шага системы прогонками по вертикалям с заданными значениями w^{n+1} на горизонтальных участках границы. В заключение всюду в области явно находятся значения решения на верхнем слое

$$u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} + \tau^2 w^{n+1}.$$

Описанный способ реализации граничных условий обеспечивает эквивалентность схемы в целых шагах и схемы в дробных шагах и поэтому исключает потерю точности при расщеплении. Иные способы расщепления схемы и задания граничных условий, допустимые для схем второго порядка точности, для компактных схем могут оказаться неприемлемы по причине потери точности в схеме расщепления. Именно поэтому для компактных схем в многомерном случае чаще всего применяется метод приближенной факторизации оператора на верхнем слое и связанный с ним естественный способ реализации граничных условий, обеспечивающий эквивалентность при расщеплении.

Совершенно аналогично реализуются граничные условия в задачах Дирихле в случае двухслойных факторизованных схем. Так, в случае компактной схемы для уравнения теплопроводности отличие структуры расщепленной схемы состоит лишь в определении функции w и, как следствие, в формуле вычисления решения на верхнем слое

$$w^{n+1} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}, \quad u^{n+1} = u^n + \tau w^{n+1}.$$

Заметим, что итерационные процессы численного решения эллиптических уравнений имеют форму схем для пара-

болических уравнений, где веса σ_i , не связанные зависимостью (5.8), и число τ , не являющееся временным шагом, играют роль итерационных параметров. Легко заметить, что описанная выше процедура расщепления пригодна без изменений для стационарных краевых задач. Отличие состоит лишь в том, что на любом дробном шаге граничные условия нет необходимости вычислять, так как очевидно, что они всегда нулевые в силу независимости граничных условий на целых шагах от номера слоя.

§ 6. Обобщения на уравнения с переменными коэффициентами

6.1. Шаблонный функционал. Разностный аналог Λ второй производной $L = D^2$ обладает тем свойством, что главный член погрешности представляет собой степень аппроксимируемого дифференциального оператора L :

$$\Lambda u = Lu + \frac{h^2}{12}L(Lu) + O(h^4). \quad (6.1)$$

Именно внутреннее вхождение L во второе слагаемое (6.1) позволяет строить компактную схему, заменяя Lu из уравнения Пуассона на правую часть в одномерном случае и дополнительно на сумму вторых производных по другим координатным направлениям в многомерном случае.

Идея обобщения компактных схем на случай переменных коэффициентов заключается в конструировании для дифференциального оператора

$$\hat{L} = \frac{1}{a(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

такого разностного оператора

$$\hat{\Lambda}u(x) = \frac{1}{a(x)} \frac{c(x + h/2) \Delta_+ - c(x - h/2) \Delta_-}{h} u(x),$$

чтобы для этой пары операторов также выполнялось разложение (6.1). Заметим, что благодаря выбору множителя дифференциальный оператор \hat{L} максимально напоминает вторую производную D^2 . При постоянстве функции a они совпадают, а в общем случае оператор $\hat{\Lambda}$ по крайней мере содержит D^2 в качестве слагаемого.

Переформулируем задачу в терминах операторов в дивергентной форме

$$L = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (6.2)$$

$$\Lambda u(x) = \frac{c(x + h/2) \Delta_+ - c(x - h/2) \Delta_-}{h} u(x). \quad (6.3)$$

Очевидно, для них в силу равенств $L = a\hat{L}$, $\Lambda = a\hat{\Lambda}$ разложение (6.1) преобразуется к виду

$$\Lambda u = Lu + \frac{h^2}{12} L (a^{-1} Lu) + O(h^4). \quad (6.4)$$

Выполнив дифференцирование, запишем разложение (6.4) с точностью до членов $O(h^4)$ в более подробной форме

$$\Lambda u \approx Lu + \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(a^{-1}a')' \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (6.5)$$

Необходимость построения разностных операторов, удовлетворяющих условию (6.4), связана с тем, что при конструировании компактной схемы выполнение этого разложения по каждой из переменных позволило бы в случае переменных коэффициентов действовать так же, как при постоянных коэффициентах, сохраняя при этом дивергентную форму разностных операторов. Речь идет о возможности с помощью следствий уравнения выражать “сложные четвертые” производные $L(a^{-1}Lu)$ по каждой из переменных через “сложные смешанные” производные порядка $(2 + 2)$, обеспечивая полную аналогию со случаем постоянных коэффициентов. Вид разложения оператора (6.3) определяется выбором зависимости коэффициентов $c(y)$ ($y = x \pm h/2$) от одного или нескольких значений функции a дифференциального оператора L .

Эта зависимость называется, согласно терминологии, введенной А. А. Самарским, шаблонным функционалом. Для простых схем шаблонный функционал обычно выбирается в одной из форм

$$c(y) = a(y), \quad c(y) = \frac{a(y + h/2) + a(y - h/2)}{2}.$$

Нетрудно заметить, что обе простейшие формы шаблонного функционала, равно как и любые их линейные комбинации, линейны относительно функции a и ее производных и поэтому теоретически не могут иметь разложения вида (6.5).

6.2. Шаблонный функционал специального вида.

Займемся задачей построения шаблонного функционала, для которого выполнялось бы разложение (6.5). Предположим, что шаблонный функционал симметричен относительно середины ячейки равномерной сетки. Тогда разложение функционала в окрестности точки $y = x \pm h/2$ содержит лишь четные степени h и его можно отыскивать в виде:

$$c(y) = a(y) + \frac{h^2}{12}\sigma(y) + O(h^4),$$

где σ — пока неопределенный функционал. Путем выбора σ можно влиять на коэффициенты разностного оператора (6.3). Таким образом, задача сводится к определению условий на σ , при выполнении которых разложение (6.4) имело бы место. Разложением функционала в окрестности точки x получим

$$c(x \pm \frac{h}{2}) = A \pm \frac{h}{2}B + O(h^4),$$

где

$$A = a + \frac{h^2}{24}(3a'' + 2\sigma), \quad B = a' + \frac{h^2}{24}(a''' + 2\sigma').$$

С другой стороны, для односторонних разностей справедливо разложение

$$\Delta_{\pm} u = \alpha \pm \frac{h}{2} \beta + O(h^4),$$

где

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \beta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Тогда погрешностью $O(h^4)$ получим

$$\begin{aligned} \Lambda u &\approx \frac{1}{h} \left((A + \frac{h}{2} B)(\alpha + \frac{h}{2} \beta) - (A - \frac{h}{2} B)(\alpha - \frac{h}{2} \beta) \right) = \\ &= A\beta + B\alpha = \\ &= Lu + \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\sigma + \frac{a''}{2}) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Непосредственно сравнивая полученное выражение с (6.5), нетрудно убедиться в их совпадении тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\sigma = \frac{a''}{2} + a(a^{-1})'a' + O(h^2)$$

или, что то же,

$$\sigma = \frac{a''}{2} - a'a^{-1}a' + O(h^2).$$

Таким образом, полученный критерий означает, что с точностью до членов $O(h^4)$ шаблонный функционал должен представляться в виде

$$c = a + \frac{h^2}{12} \left(\frac{a''}{2} - a'a^{-1}a' \right). \quad (6.6)$$

Следует заметить, что формула (6.6) справедлива как для скалярного, так и для матричного оператора Λ , когда a —

матрица, имеющая обратную. В последнем случае в произведении $a'a^{-1}a'$ нельзя менять порядок сомножителей и нельзя записывать a^{-1} в виде дроби.

Очевидно, существует бесчисленное множество функционалов, удовлетворяющих условию (6.6). Ясно, что друг от друга они отличаются величинами $O(h^4)$.

В качестве самостоятельного упражнения покажите, что разложение (6.6) выполняется для шаблонных функционалов

$$\begin{aligned} c &= 6 (a_+^{-1} + 4a_0^{-1} + a_-^{-1})^{-1}, \\ c &= \frac{2}{3} (a_0 + a_-(a_- + a_+)^{-1}a_+), \\ c &= c_0 - \frac{1}{12}(a_+ - a_-) a_0^{-1} (a_+ - a_-), \\ c &= c_0 - \frac{1}{24}(a_+ - a_-) (a_+ + a_-)^{-1} (a_+ - a_-), \end{aligned}$$

где

$$c_0 = \frac{a_+ + 4a_0 + a_-}{6}, \quad a_0 = a(y), \quad a_{\pm} = a(y \pm h/2).$$

Из (6.6) вытекает невозможность в общем случае обойтись без точки с полуцелым индексом, если, конечно, не привлекать при этом более удаленных точек, так как вторую производную функции a невозможно аппроксимировать лишь по двум точкам. Если же функция a и ее производные не зависят от решения и их зависимость от x задана аналитически, в качестве шаблонного функционала можно использовать непосредственно выражение (6.6).

Из (6.6) можно также извлечь важные частные случаи для операторов

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

входящих в уравнения с постоянными коэффициентами в цилиндрической ($a(x) = x$) и сферической ($a(x) = x^2$) системах координат. Вот соответствующие этим двум случаям шаблонные функционалы с произволом до величин $O(h^4)$

$$c_1(y) = y - \frac{h^2}{12} y, \quad c_2(y) = y^2 - \frac{h^2}{4},$$

удовлетворяющие условию (6.6). Докажите это.

Следует заметить, что в действительности для построения компактной схемы достаточно представимости оператора Λ в более общей, чем (6.4), форме:

$$\Lambda u = Lu + h^2 M(Lu) + O(h^4),$$

где M — произвольный дифференциальный оператор второго порядка. Достаточность такого разложения становится очевидной, если учесть, что именно внутреннее вхождение L во второе слагаемое позволяет выразить члены погрешности с четвертыми производными по одноименным переменным через четвертые смешанные порядка $(2 + 2)$.

Не останавливаясь на этом, ограничимся лишь тем, что приведем пример оператора, разложение которого имеет указанный вид, но не совпадает с (6.4). Пусть $\Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3$ — одномерные разностные операторы с коэффициентами соответственно

$$c^1 = a_0, \quad c^2 = \frac{a_+ + a_-}{2},$$

$$c^3 = a_0 \frac{a_+^{-1} + a_-^{-1}}{2} a_0.$$

Тогда нетрудно показать, что линейная комбинация

$$\Lambda = \frac{4}{3}\Lambda^1 - \frac{1}{4}\Lambda^2 - \frac{1}{12}\Lambda^3$$

имеет указанное выше разложение, при этом в качестве M выступает оператор

$$M = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial(a^{-1})}{\partial x} E \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Более общая форма разложения в сравнении с (6.4) предоставляет дополнительную степень свободы при построении компактной схемы. Вероятно, она может быть использована разумным образом для придания схеме тех или иных свойств.

6.3. Компактная схема в ортогональной криволинейной системе координат. Известно, что в произвольной ортогональной криволинейной системе координат оператор Лапласа не содержит смешанных производных. Рассмотрим соответствующую этому случаю многомерную эллиптическую систему уравнений без производных первого порядка:

$$Du = F, \quad Du = \sum b_i L_i u, \quad L_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Здесь u и F — вектор-функции, а a_i, b_i — матрицы, зависящие от координат точки пространства.

Построим компактную схему. Для этого предположим, что Λ_i — трехточечные одномерные аппроксимации операторов L_i , для которых выполнен критерий (6.6) по соответствующей координате, обеспечивающий разложение

$$\Lambda_i = L_i + \frac{h_i^2}{12} L_i (a_i^{-1} L_i) + O(h_i^4), \quad L_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

где h_i — шаг сетки в i -м координатном направлении. Тогда нижеследующая компактная схема аппроксимирует уравнение с погрешностью $O(h^4)$ и, благодаря специальному разложению (6.4), строится аналогично схеме для уравнения Пуассона:

$$\Lambda u = GF, \tag{6.7}$$

где

$$\Lambda = \sum b_i \Lambda_i \left(E + \frac{h_i^2}{12} a_i^{-1} b_i^{-1} \sum_{j \neq i} b_j \Lambda_j \right),$$

$$G = E + \sum \frac{h_i^2}{12} b_i \Lambda_i.$$

Построение схемы (6.7) базируется на компактных аппроксимациях

$$A_i^{-1} (b_i \Lambda_i) = \left(E + \frac{h_i^2}{12} b_i \Lambda_i (a_i^{-1} b_i^{-1} E) \right)^{-1} (b_i \Lambda_i)$$

операторов

$$b_i L_i = b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Следует заметить, что описанная ранее процедура приведения формальной компактной схемы к виду, не содержащему обратных операторов, в случае переменных коэффициентов, казалось бы, наталкивается на проблему некоммутативности операторов A_i . Однако степень их некоммутативности, как нетрудно заметить, находится в пределах погрешности аппроксимации, так как все они являются суммами единичного оператора и операторов с множителями второго порядка малости.

Таким образом, любая эллиптическая система уравнений второго порядка без младших производных в ортогональной системе координат может быть аппроксимирована компактной схемой четвертого порядка на шаблоне, не более чем трехточечном по каждому координатному направлению.

Если конвективных членов и производных по времени в исходной системе уравнении нет, то (6.7) — искомая компактная схема для эллиптической системы без смешанных производных на шаблоне, ограниченном тремя точками по каждому из координатных направлений. При наличии же таковых

можно формально включить слагаемые с первыми производными по пространству и, может быть, также производными по времени в правую часть F и воспользоваться формой схемы (6.7) для построения компактных схем в этих более общих случаях. Для достижения этой цели дополнительные слагаемые в правой части следует корректно, без потери порядка точности, выразить с использованием продолженной системы через разностные отношения, не выходя при этом за габариты указанного шаблона. Этим построениям посвящен следующий параграф, где рассматриваются произвольные эллиптические системы уравнений без смешанных производных с конвективными членами в двух различных формах, а также соответствующие параболические и гиперболические системы.

§ 7. Обобщения на уравнения с конвективными членами

7.1. Конвективные члены в дивергентной форме.

Рассмотрим систему уравнений в случае, когда конвективные члены записаны в дивергентной форме. Систему уравнений можно представить в виде

$$Du = F, \quad F = f + Ku = f + \sum \frac{\partial p_i}{\partial x_i},$$

где $p_i(u)$ — вектор-функции, зависящие от решения, и формально выписать для нее схему (6.7). Заменяя в ее правой части конвективные члены центральными разностями и учитывая возникающие при этом погрешности второго порядка, можем с точностью до членов порядка $O(h^4)$ записать

$$Lu = Gf + \Delta p + \sum \frac{h_i^2}{12}(b_i Q_i^0 p + \xi_i p),$$

где

$$\Delta p = \sum \Delta_i p_i, \quad \Delta_i = \frac{T_i - T_i^{-1}}{2h_i},$$

$$Q_i^0 p = L_i \left(a_i^{-1} b_i^{-1} \sum_{j \neq i} \frac{\partial p_j}{\partial x_j} \right),$$

$$\xi_i p = b_i L_i \left(a_i^{-1} b_i^{-1} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \right) - 2 \frac{\partial^3 p_i}{\partial x_i^3}.$$

Здесь собраны производные третьего порядка, которые без предварительных преобразований невозможно аппроксимировать трехточечными разностными отношениями. Однако первое слагаемое удастся выразить через второе

$$b_i L_i \left(a_i^{-1} b_i^{-1} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^3 p_i}{\partial x_i^3} + b_i (Q_i^1 p_i + Q_i^2 p_i),$$

где

$$Q_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \frac{\partial (a_i^{-1} b_i^{-1})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad Q_i^2 = \frac{\partial (b_i^{-1})}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

а третья производная представляется в виде суммы

$$\frac{\partial^3 p_i}{\partial x_i^3} = \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i a_i^{-1} L_i u) + R_i^1 u,$$

где

$$B_i = \frac{\partial p_i}{\partial u}, \quad R_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (B_i a_i^{-1}) a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Так как в силу уравнения

$$b_i L_i u = f + \frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_j} - b_j L_j u \right),$$

то на гладких решениях третью производную можно переписать в виде

$$\frac{\partial^3 p_i}{\partial x_i^3} = R_i^1 u + S_i f + Q_i^3 p - R_i^2 u,$$

где R_i^1 определено выше, а

$$R_i^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} (c_i \sum_{j \neq i} b_j L_j), \quad S_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (c_i E),$$

$$Q_i^3 p = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial p_j}{\partial x_j} \right) \right), \quad c_i = B_i a_i^{-1} b_i^{-1}.$$

Заметим, что перед выражениями R_i^1 , Q_i^1 , S_i имеются множители h_i^2 , поэтому их достаточно аппроксимировать со вторым

порядком. Это можно сделать не выходя за пределы шаблона, так как каждое из них состоит из слагаемых простых типов, которые аппроксимируются естественным образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(d \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \approx \Delta_{-i} \{ (T_i^{1/2} d) \Delta_{+i} w \}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \approx \Delta_i (d \Delta_j w),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(d \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \approx \Delta_{-i} \{ (T_i^{1/2} d) (\Delta_{+i} q) \Delta_{+i} w \}, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} \approx \Delta_i w,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} \approx \Delta_{-i} \Delta_{+i} w, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (d L_j w) \approx \Delta_i (d \Lambda_j w).$$

Здесь оператор $T_i^{1/2}$ осуществляет сдвиг аргумента на полшага по i -й координате, Δ_i без знака — оператор центральной, а $\Delta_{\pm i}$ — операторы односторонних разделенных разностей.

Если теперь пересчитать полную погрешность с помощью выведенных выше формул, а затем выполнить замену всех слагаемых разностными отношениями по приведенным образцам, то получим окончательно компактную схему для эллиптического уравнения на основе дивергентной записи конвективных членов

$$\hat{\Lambda} u = \hat{\Delta} p + \hat{G} f, \quad (7.1)$$

где

$$\hat{\Lambda} = \Lambda + \sum \frac{h_i^2}{12} \hat{R}_i, \quad \hat{R}_i \approx R_i^1 - R_i^2,$$

$$\hat{\Delta} = \Delta + \sum \frac{h_i^2}{12} \hat{Q}_i, \quad \hat{Q}_i \approx b_i (Q_i^0 + Q_i^1 + Q_i^2) - Q_i^3,$$

$$\hat{G} = G - \sum \frac{h_i^2}{12} \hat{S}_i, \quad \hat{S}_i \approx S_i.$$

Таким образом, наличие младших производных в эллиптической системе второго порядка, записанной в любой ортогональной криволинейной системе координат, не мешает аппроксимировать ее с помощью компактной схемы четвертого порядка аппроксимации, не выходя при этом за габариты трехточечного шаблона по каждому направлению.

7.2. Недивергентная форма записи конвективных членов. В некоторых случаях интерес могут представлять недивергентные схемы. Например, в качестве предварительного шага в схемах предиктор-корректор. Применяя описанный выше способ исключения погрешности в случае системы с недивергентной записью конвективных членов

$$Ku = Du - f, \quad Ku = \sum B_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

получим равенство

$$\Lambda u = Gf + \sum B_i \Delta_i u + \sum \frac{h_i^2}{12} (b_i Q_i^0 u + \xi_i u)$$

с несколько иными, чем в предыдущем пункте, выражениями для компенсирующих слагаемых

$$Q_i^0 u = L_i (a_i^{-1} b_i^{-1} \sum_{j \neq i} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j}),$$

$$\xi_i u = b_i L_i (a_i^{-1} b_i^{-1} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i}) - 2B_i \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^3}.$$

Здесь первое слагаемое в силу уравнения выражается в виде

$$b_i L_i (a_i^{-1} b_i^{-1} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i}) = b_i (S_i^1 f + Q_i^1 u + Q_i^2 u),$$

где

$$Q_i^1 u = \frac{\partial}{\partial x_i} \left((c_i B_i + a_i \frac{\partial q_i}{\partial x_i} a_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

$$Q_i^2 u = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_i \sum_{j \neq i} (B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - b_j L_j u) \right),$$

$$S_i^1 f = \frac{\partial}{\partial x_i} (c_i f), \quad c_i = b_i^{-1} B_i a_i^{-1} b_i^{-1}, \quad q_i = a_i^{-1} b_i^{-1} B_i a_i^{-1},$$

а второе — в виде

$$-2B_i \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^3} = -2B_i (S_i^2 f + R_i^1 u + R_i^2 u),$$

где

$$R_i^1 u = \frac{\partial}{\partial x_i} \left((d_i B_i + \frac{\partial (a_i^{-1})}{\partial x_i} a_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

$$R_i^2 u = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_i \sum_{j \neq i} (B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - b_j L_j u) \right),$$

$$S_i^2 f = \frac{\partial}{\partial x_i} (d_i f), \quad d_i = a_i^{-1} b_i^{-1}.$$

Собирая все слагаемые и заменяя производные разностными отношениями, как описано выше, получим компактную схему для эллиптического уравнения в случае недивергентной записи младших производных

$$\hat{\Lambda} u = \Delta u + \hat{G} f,$$

где

$$\hat{\Lambda} = \Lambda + \sum \frac{h_i^2}{12} (b_i \hat{Q}_i - 2B_i \hat{R}_i), \quad \Delta u = \sum B_i \Delta_i u,$$

$$\hat{Q}_i \approx Q_i^0 + Q_i^1 + Q_i^2, \quad \hat{R}_i \approx R_i^1 + R_i^2,$$

$$\hat{G} = G + \sum \frac{h_i^2}{12} (b_i \hat{S}_i^1 - 2B_i \hat{S}_i^2), \quad \hat{S}_i^l \approx S_i^l,$$

а Λ , G — операторы компактной схемы для соответствующего уравнения без конвективных членов.

Таким образом, сказанное выше для системы с конвективными членами в дивергентной форме справедливо также и при недивергентной их записи.

7.3. Схема для параболической системы. При построении схемы для параболической системы уравнений воспользуемся стандартным приемом, формально заменив правую часть f на $f + u_t$:

$$Ku = Du - F, \quad F = f + u_t.$$

На разностном уровне такую операцию нужно проделать с компактной схемой (7.1). Прежде чем сделать это, представляется целесообразным операторы $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Delta}$, \hat{G} схемы (7.1) записать в виде сумм главных частей (членов нулевого порядка) и компенсирующих членов второго порядка малости:

$$\hat{\Lambda} = \sum b_i \Lambda_i + \sum \frac{h_i^2}{12} \tilde{\Lambda}_i, \quad \tilde{\Lambda}_i = b_i \Lambda_i a_i^{-1} b_i^{-1} \sum_{j \neq i} b_j \Lambda_j + \hat{R}_i,$$

$$\hat{\Delta} = \sum \Delta_i + \sum \frac{h_i^2}{12} \hat{Q}_i,$$

$$\hat{G} = E + \sum \frac{h_i^2}{12} \tilde{G}_i, \quad \tilde{G}_i = b_i \Lambda_i (a_i^{-1} b_i^{-1} E) - \hat{S}_i.$$

Для достижения точности $O(\tau^2 + h^4)$ главные члены необходимо аппроксимировать симметрично по времени, т. е. их следует применять к полусуммам значений решения на верхнем и нижнем слое, а поправочные допустимо аппроксимировать как угодно, но удобнее всего делать это на нижнем временном слое. В результате получается компактная схема для параболического уравнения

$$(E + \sum \frac{h_i^2}{12} \tilde{G}_i) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \sum \Delta_i \frac{p_i^{n+1} + p_i^n}{2} =$$

$$= \sum b_i \Lambda_i \frac{u^{n+1} + u^n}{2} + \Phi^n,$$

где

$$\Phi^n = - \left(\frac{f^{n+1} + f^n}{2} + \sum \frac{h_i^2}{12} \tilde{G}_i f^n \right) + \sum \frac{h_i^2}{12} (\tilde{\Lambda}_i u^n - \hat{Q}_i p^n)$$

объединяет результаты операций над правой частью и функциями на нижнем слое.

Полученная компактная схема по форме совершенно аналогична традиционным неявным схемам, для нее применимы обычные методы линеаризации в нелинейном случае и методы приближенной факторизации, использование которых сохраняет порядок аппроксимации и приводит к системе одномерных разностных уравнений, реализуемых трехточечными матричными прогонками.

Проведенное построение свидетельствует о том, что компактная схема для уравнения теплопроводности естественным образом обобщается на случай любой криволинейной ортогональной системы координат, причем наличие конвективных членов также не мешает построению.

7.4. Схема для гиперболической системы. Гиперболическую систему второго порядка можно представить как эллиптическую систему с измененной правой частью

$$Ku = Du - F, \quad F = f + u_{tt}.$$

Ввиду того, что (7.1) — схема четвертого порядка аппроксимации по h для эллиптического уравнения, и в силу следствия уравнения, полученного дифференцированием его дважды по времени, с точностью $O(\tau^4 + h^4)$ получим равенство

$$\hat{\Lambda} u^n = \hat{\Delta} p^n + \hat{G}(f^n + Au^n - \frac{\tau^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{tt})^n),$$

где A — обычный разностный аналог второй производной по времени

$$Au^n = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2}.$$

Аппроксимируя u_{tt} со вторым порядком

$$u_{tt} = Du - Ku - f \approx \sum (b_i \Lambda_i u - \Delta_i p_i) - f,$$

а внешний оператор двойного дифференцирования по времени — оператором A , и пренебрегая членами четвертого порядка малости, получим трехслойную компактную схему для гиперболической системы, имеющую погрешность $O(h^4 + \tau^4)$:

$$\hat{G}(Au^n) - \frac{\tau^2}{12} Av^n + \hat{\Delta} p^n = \Psi^n,$$

где

$$\Psi^n = \hat{\Lambda} u^n - \left(\hat{G} + \frac{\tau^2}{12} A \right) f^n, \quad v^n = \sum (b_i \Lambda_i u^n - \Delta_i p_i^n).$$

После приближенной факторизации оператора на верхнем слое получится компактная схема, реализуемая трехточечными прогонками.

Таким образом, нами построено обобщение компактной схемы для уравнения колебаний на случай гиперболической системы второго порядка в любой ортогональной криволинейной системе координат при наличии в системе слагаемых с производными первого порядка. Иначе говоря, вывод, полученный для эллиптической и параболической систем уравнений, справедлив также и для гиперболической системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Валиуллин А. Н. Схемы повышенной точности для задач математической физики. Новосибирск: НГУ, 1973.

Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.

Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

Пинчук В. И., Шу Ч. В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2000.

Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.

Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003.

Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их приложения в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.

Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1: Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Шайдуров В. В. О повышении точности разностных решений. М.: Наука, 1980.

Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.

Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.

Паасонен Виктор Иванович

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Часть 1. Классические схемы и их обобщения

Учебное пособие

Редактор *С. В. Исакова*

Подписано в печать 20.02.2006 г.
Формат 60 x 84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 4,25. Тираж 200 экз.
Заказ №

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.
Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.

В. И. Паасонен

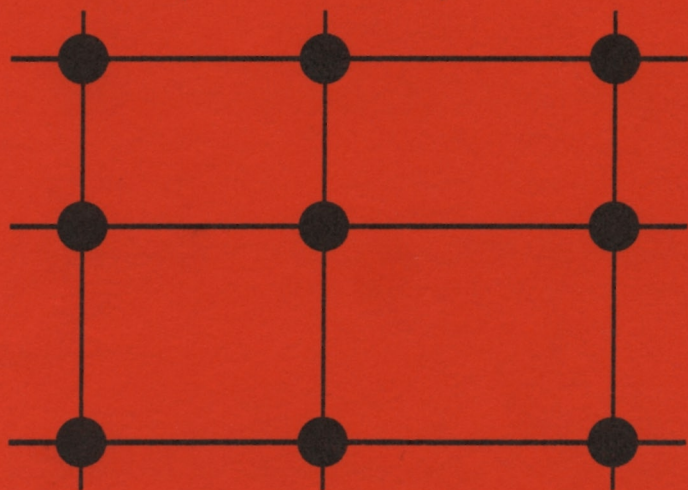
КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Часть 2. Схемы на неравномерных сетках

$$A = S^{-1}\Lambda, \quad \Lambda = \frac{2}{h_- + h_+} (\Delta_+ - \Delta_-)$$

$$S = E + \frac{h_+ - h_-}{3} \Delta + \frac{h_- h_+ + (h_+ - h_-)^2}{12} \Lambda$$

$$\Delta = \frac{h_-}{h_- + h_+} \Delta_+ + \frac{h_+}{h_- + h_+} \Delta_-$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

В. И. Паасонен

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ
Часть 2. Схемы на неравномерных сетках

Учебное пособие

Новосибирск
2007

ББК В193.2я73-1
УДК 519.632.4+519.633.6
П120

Паасонен В. И. Компактные разностные схемы: В 3 ч.: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. Ч. 2: Схемы на неравномерных сетках. 65 с.

Учебное пособие соответствует программе специального курса лекций “Компактные разностные схемы”, практически ежегодно читаемого на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета. В предлагаемой вниманию читателя второй части пособия представлены обобщения компактных схем для основных типов уравнений математической физики на неравномерные прямоугольные, а также на более общие нерегулярные сетки.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников математических специальностей.

Рецензент

д - р физ.-мат. наук, профессор Г. Г. Черных

Издание подготовлено в рамках выполнения инновационно - образовательной программы "Инновационные и образовательные программы и технологии, реализуемые на принципах партнерства классического университета, науки, бизнеса и государства" национального проекта "Образование"

©Новосибирский государственный
университет, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Разностные операторы на неравномерных сетках	4
§ 2. Разностные схемы на неравномерных сетках	12
§ 3. Компактные аппроксимации операторов	23
§ 4. Построение компактных схем	28
§ 5. Компактные схемы на нерегулярных сетках	40
Библиографический список	48

§ 1. Разностные операторы на неравномерных сетках

1.1. Аппроксимации производных на неравномерной сетке. Пусть задана произвольная строго возрастающая последовательность $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ значений вещественной переменной x на отрезке $[a, b]$, не обязательно равноотстоящих. Эти точки будем называть узлами сетки. Для бесконечного или полу-бесконечного промежутка сетка определяется аналогично, при этом число узлов сетки оказывается счетным множеством. Степень детальности сетки определяется значением нормы $h = \max\{h_i\}$ последовательности шагов сетки $h_i = x_i - x_{i-1}$. Обозначим через x любую внутреннюю точку сетки x_i , ($i = 1, \dots, n - 1$), а через h_- , h_+ — локальные значения шагов слева и справа от данной точки сетки.

По определению производной

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

поэтому при малом приращении h_+ , удовлетворившись погрешностью первого порядка, получим разделенную разность или, иначе говоря, разностное отношение

$$y'(x) \simeq \Delta_+ y(x) = \frac{y(x+h_+) - y(x)}{h_+}. \quad (1.1)$$

Заменяя в (1.1) h_+ на отрицательное приращение $-h_-$, получим иначе ориентированную разделенную разность

$$y'(x) \simeq \Delta_- y(x) = \frac{y(x) - y(x-h_-)}{h_-}. \quad (1.2)$$

Простейшие разностные отношения (1.1)–(1.2) на неравномерной сетке, как и в случае равномерной сетки, называют

разделенной разностью вперед и разделенной разностью назад соответственно, а Δ_+ , Δ_- при этом означают символические обозначения соответствующих односторонних разностных операторов.

Для достаточно гладкой функции $y(x)$ в окрестности точки x имеют место разложения

$$\Delta_+ y(x) = y' + \frac{h_+}{2} y'' + \frac{h_+^2}{6} y''' + \frac{h_+^3}{24} y^{IV} + \dots, \quad (1.3)$$

$$\Delta_- y(x) = y' - \frac{h_-}{2} y'' + \frac{h_-^2}{6} y''' - \frac{h_-^3}{24} y^{IV} + \dots \quad (1.4)$$

Из разложений (1.3)–(1.4) видно, что обе разделенные разности (1.1)–(1.2) аппроксимируют производную с погрешностью первого порядка малости относительно нормы шага сетки. Поэтому и их линейная комбинация — разностная производная с весами

$$\beta \Delta_+ y(x) + (1 - \beta) \Delta_- y(x)$$

в общем случае аппроксимирует производную как минимум с тем же порядком. При этом в аппроксимации имеется однопараметрический произвол. Однако при специальном выборе весового параметра

$$\beta = \frac{h_-}{h_- + h_+}$$

достигается второй порядок аппроксимации производной. Для шаблона из трех произвольно расположенных узлов сетки это разностное отношение

$$\Delta y(x) = \frac{h_- \Delta_+ + h_+ \Delta_-}{h_- + h_+} y(x) \quad (1.5)$$

является наилучшим по порядку приближением первой производной и притом единственным.

Докажите это утверждение.

Заметим, что порядок аппроксимации разностного отношения зависит от того, в какой точке оно оценивается. Например, разность вперед (1.1) в окрестности точки $x + h_+/2$ аппроксимирует производную со вторым порядком, а разность (1.5) имеет второй порядок только в окрестности текущего узла сетки, а в окрестности любой другой точки достигается лишь первый порядок.

Разностные аппроксимации производных более высокого порядка можно строить, например, как разделенные разности от разделенных разностей предыдущего порядка. Однако при таком рекурсивном построении возникают нюансы, связанные с неконтролируемой неоднозначностью определений и невозможностью предсказать порядок аппроксимации результирующего выражения. Тем не менее такой способ часто применяется для небольших порядков. Например, аппроксимация второй производной может быть построена с привлечением на промежуточном этапе воображаемой сетки, узлы которой лежат посередине между узлами основной сетки, т. е. в узлах с полуцелыми индексами. А именно

$$\begin{aligned} y''(x) &\simeq \frac{y'(x + h_+/2) - y'(x - h_-/2)}{(h_- + h_+)/2} \simeq \Lambda y(x) = \\ &= \frac{2}{h_- + h_+} \left(\frac{y(x + h_+) - y(x)}{h_+} - \frac{y(x) - y(x - h_-)}{h_-} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Очевидно, при совпадении шагов h_- и h_+ разностные отношения (1.5)–(1.6) превращаются соответственно в центральную разность и симметричный аналог второй производной на равномерной сетке.

Введем обозначения для суммы, разности и произведения

шагов справа и слева от данного узла:

$$s = h_+ + h_-, \quad d = h_+ - h_-, \quad p = h_+ h_-.$$

В этих обозначениях с помощью разложения в ряд Тейлора получим равенства

$$\Delta y(x) = y' + \frac{p}{6} y''' + \frac{pd}{24} y^{IV} + O(h^4), \quad (1.7)$$

$$\Lambda y(x) = y'' + \frac{d}{3} y''' + \frac{p + d^2}{12} y^{IV} + \frac{d(2p + d^2)}{60} y^V + O(h^4), \quad (1.8)$$

из которых видно, что первая производная аппроксимируется выражением (1.5) со вторым порядком, тогда как вторая производная аппроксимируется разностным аналогом (1.6) лишь с первым порядком. В случае равномерной сетки $d = 0$, $p = h^2$, и мы приходим к привычным разложениям

$$\Delta y(x) = y' + \frac{h^2}{6} y''' + O(h^4), \quad \Lambda y(x) = y'' + \frac{h^2}{12} y^{IV} + O(h^4)$$

по четным степеням шага. Однако в общем случае в разложениях (1.7)–(1.8) представлены производные как четных так и нечетных порядков. Практически это означает, что при построении компактных схем методом исчерпания погрешности следует ожидать повышения порядка аппроксимации лишь на единицу, в то время как для равномерных сеток типичным является повышение порядка на две единицы при каждом компенсировании главного члена разложения погрешности поправкой в форме разностного выражения.

1.2.Разностные выражения. В общем случае произвольной сетки можно использовать различные способы записи разностных выражений.

Если переменная x принимает дискретные значения, то разностные выражения могут быть записаны в соответствии с их нумерацией в индексном виде, например,

$$\Delta_+ y(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_+}.$$

Кроме индексной записи используется также операторная. В общем виде линейный разностный оператор на неравномерной сетке, записанный в точке x , представляется в виде

$$Ry(x_i) = \sum_j \alpha_j T_{x_j - x_i} y(x_i) = \sum_j \alpha_j y_j,$$

где T — оператор сдвига

$$T_z y(x) = y(x + z).$$

Обычно в разностном выражении лишь конечное число коэффициентов α_j отлично от нуля. Множество индексов, для которых $\alpha_j \neq 0$, определяет шаблон разностного оператора, т. е. множество узлов сетки, используемых при записи разностного выражения в данной точке x сеточной области. Если разностное выражение в каждом внутреннем узле сетки пишется единообразно, разностный оператор называется однородным, в противном случае — неоднородным. Для неоднородных операторов структура шаблона может меняться от точки к точке.

Заметим, что в случае неравномерной сетки не представляется возможным записать разностный оператор в виде линейной комбинации целых степеней оператора сдвига, так как для совокупности приращений $x_j - x_i$ локальный шаг сетки не является общей мерой с целым коэффициентом. По этой же причине в определении разностной аппроксимации производной порядка m на неравномерной сетке из коэффициентов α_j

разностного оператора R не удается вынести за знак суммы общий множитель в виде степени обратной величины шага, как это делается для равноотстоящих узлов. Таким образом, при исследовании порядка аппроксимации разностных операторов или разностных схем с неопределенными коэффициентами на произвольной сетке следует учитывать, что порядок малости коэффициентов разностного оператора зависит от аппроксимируемого выражения и может быть не определен заранее.

Разностные выражения, аппроксимирующие производные или линейные дифференциальные выражения на заданном шаблоне, можно отыскивать методом неопределенных коэффициентов исходя из общего вида линейного разностного оператора. Определим, например, произвольное линейное разностное выражение на шаблоне, включающем i -й узел и q узлов слева и p узлов справа от него:

$$\Delta y_i = \sum_{j=-q}^p \alpha_j y_{i+j}. \quad (1.9)$$

Коэффициенты α_j разностного оператора определяются после разложения правой части (1.9) в окрестности точки x_i и сравнения полученного разложения с аппроксимируемым дифференциальным выражением.

Разлагая формально y_{i+j} в выражении (1.9) в бесконечный ряд Тейлора и меняя затем порядок суммирования, получим

$$\Delta y_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=-q}^p \alpha_j (x_j - x_i)^m \right) \frac{dy^m}{dx^m}. \quad (1.10)$$

Предположим, что выражение (1.9) должно аппроксимировать первую производную. Тогда из (1.10) следует система

условий на коэффициенты

$$\sum_{j=-q}^p \alpha_j (x_j - x_i)^m = \delta_{1m}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (1.11)$$

где M — некоторое натуральное число. Матрица системы (1.11) является матрицей Вандермонда с различными столбцами, поэтому ее ранг

$$\text{rank} = \min\{p + q + 1, M + 1\}.$$

Следовательно, разность $(p + q) - M$ определяет число свободных параметров в разностной аппроксимации, а число M равно порядку аппроксимации первой производной выражением (1.9). Максимально возможный порядок M равен $p + q$, при больших M система (1.11) оказывается переопределенной. При $M = p + q$ параметрический произвол в аппроксимации исчезает, значения коэффициентов α_j полностью определяются расположением узлов сетки, принадлежащих выбранному шаблону разностного оператора.

Если выражение (1.9) аппроксимирует не первую производную, а производную порядка k , то вместо (1.11) получим систему с той же матрицей, но с другой правой частью:

$$\sum_{j=-q}^p \alpha_j (x_j - x_i)^m = \delta_{km} k!, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (1.12)$$

В этом случае порядок аппроксимации k -ой производной равен $M - k + 1$, параметрический произвол по-прежнему составляет $(p + q) - M$ свободных параметров, а максимально возможный порядок достигается при $M = p + q$ и равен $p + q - k + 1$. В частности, производная порядка $p + q$ на указанном шаблоне аппроксимируется с первым порядком,

а производные более высокого порядка на этом шаблоне аппроксимированы быть не могут — число узлов недостаточно.

Заметим, что сформулированные утверждения о порядке аппроксимации справедливы для произвольных шаблонов, не обладающих симметрией. Однако для симметричных шаблонов порядок аппроксимации производных четного порядка всегда оказывается большим на единицу. Докажите это.

§ 2. Разностные схемы на неравномерных сетках

2.1. Разностная схема. Запишем краевую задачу

$$y'' = g, \quad x \in (a, b), \quad (2.1)$$

$$y(a) = \phi_0, \quad y(b) = \phi_1, \quad (2.2)$$

в операторной форме

$$Ly = f,$$

где оператор L и правая часть f имеют вид

$$Ly = \begin{cases} y(a), & x = a; \\ y'', & x \in (a, b); \\ y(b), & x = b, \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} \varphi_0, & x = a; \\ g(x), & x \in (a, b); \\ \varphi_1, & x = b. \end{cases}$$

Для численного решения задачи (2.1)–(2.2) рассмотрим разностную краевую задачу

$$\Lambda y_h = g_h, \quad (2.3)$$

$$(y_h)_0 = \varphi_0, \quad (y_h)_N = \phi_1, \quad (2.4)$$

где Λ — трехточечный разностный аналог второй производной на неравномерной сетке, определенный формулой (1.6). Разностная задача (2.3)–(2.4) может быть сформулирована также в операторной форме

$$L_h y_h = f_h,$$

где оператор L_h и правая часть f_h имеют вид

$$(L_h y_h)_i = \begin{cases} (y_h)_0, & i = 0; \\ (\Lambda y_h)_i, & i = 1, \dots, N-1; \\ (y_h)_N, & i = N, \end{cases}$$

$$(f_h)_i = \begin{cases} \varphi_0, & i = 0; \\ g_i, & i = 1, \dots, N-1; \\ \varphi_1, & i = N. \end{cases}$$

По определению погрешность аппроксимации есть невязка разностной задачи на решении дифференциальной задачи, т. е. $L_h y - f_h$. Однако для краевых задач на сетках, согласованных с границами, с точно заданными значениями решения на границах исследование аппроксимации сводится к анализу аппроксимации дифференциального уравнения разностным. Поскольку нами будут рассматриваться только такие задачи, то здесь и в дальнейшем нам потребуется только оценка погрешности во внутренних узлах $\psi = \Lambda y - g$.

2.3. Повышение точности разностных схем. В силу (1.8) разностное уравнение (2.3) аппроксимирует (2.1) с первым порядком. Выделим несколько членов разложения погрешности. Имеем

$$\psi = \Lambda y - g = y'' + \frac{d}{3}y''' + \frac{p+d^2}{12}y^{IV} + \frac{d(2p+d^2)}{60}y^V + O(h^4) - g.$$

В силу уравнения (2.1) $y'' - g = 0$. Следовательно, на достаточно гладких решениях задачи (2.1)–(2.2)

$$\Lambda y - g = \frac{d}{3}y''' + \frac{p+d^2}{12}y^{IV} + \frac{d(2p+d^2)}{60}y^V + O(h^4). \quad (2.5)$$

Один из способов повышения точности основан на последовательной замене старших производных в правой части

(2.5) достаточно точными разностными отношениями типа (1.9) с коэффициентами, удовлетворяющими системе уравнений (1.12). В результате по определению аппроксимации получится схема более высокого порядка аппроксимации, которая однако не относится к числу компактных схем.

Другой способ состоит в понижении с помощью следствий дифференциального уравнения порядка производной в главном члене погрешности аппроксимации

$$y''' = g', \quad y^{IV} = g'', \quad y^V = g''''.$$

Эта замена приводит к разностным схемам

$$\Lambda y_h = g + \frac{d}{3}g', \quad (2.6)$$

$$\Lambda y_h = g + \frac{d}{3}g' + \frac{p+d^2}{12}g'', \quad (2.7)$$

$$\Lambda y_h = g + \frac{d}{3}g' + \frac{p+d^2}{12}g'' + \frac{d(2p+d^2)}{60}g''', \quad (2.8)$$

аппроксимирующим уравнение (2.1) на его гладких решениях со вторым, третьим и четвертым порядком соответственно.

Если правая часть задана аналитически и ее старшие производные существуют и достаточно просто вычисляются в конечном виде, то, удерживая члены погрешности более высокого порядка и заменяя их производными от правой части, можем продолжить ряд схем (2.6)–(2.8) компактными 3-точечными разностными схемами еще более высоких порядков точности.

Если же правая часть уравнения (2.1) задана таблично на той же сетке, где ищется численное решение, то, заменяя производные в правой части разностными отношениями,

получим компактные схемы второго и третьего порядка точности

$$\Lambda y_h = g + \frac{d}{3}\Delta g, \quad (2.9)$$

$$\Lambda y_h = g + \frac{d}{3}\Delta g + \frac{p+d^2}{12}\Lambda g, \quad (2.10)$$

где Δ и Λ определены формулами (1.5), (1.6), эквивалентные по порядку аппроксимации схемам (2.6)–(2.7).

Ясно, что замена производных разностями в обоих случаях вызывает изменение коэффициента при третьей производной в разложении погрешности. Проверим, может ли он быть нулевым. Тем самым мы выясним, можно ли на 3-точечном шаблоне неравномерной сетки построить схему четвертого порядка точности. С этой целью оценим погрешность схемы третьего порядка (2.7). Имеем

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda y - \left(g + \frac{d}{3}g' + \frac{p+d^2}{12}g'' + \frac{d(2p+d^2)}{60}g''' \right) = \\ &= \left(y'' + \frac{d}{3}y''' + \frac{p+d^2}{12}y^{IV} + \frac{d(2p+d^2)}{60}y^V + O(h^4) \right) - \\ &= \left(g + \frac{d}{3}(g' + \frac{p}{6}g''') + \frac{p+d^2}{12}(g'' + \frac{d}{3}g''') + O(h^4) \right) = \\ &= -\frac{d}{180}(9p+2d^2)g''' + O(h^4). \end{aligned}$$

Из полученного результата следует, что главный член погрешности третьего порядка обращается в нуль только при $d = 0$, т. е. при равных шагах h_- и h_+ или, иначе говоря, при условии равномерности сетки. С другой стороны очевидно, что третью производную g''' аппроксимировать разностным

отношением по трем узлам невозможно, т. е. для компенсации с обратным знаком погрешности третьего порядка разностным аналогом требуется минимум четыре узла. Отсюда следует вывод, что без расширения шаблона для искомой функции или шаблона для правой части на неравномерной сетке построить компактную схему четвертого порядка точности для рассматриваемого уравнения невозможно.

4.2. Метод неопределенных коэффициентов. В линейном случае построение компактных разностных схем произвольного порядка всегда можно провести методом неопределенных коэффициентов. Применение метода для построения разностных схем состоит из нескольких этапов. Сначала принимается решение о характере шаблона схемы и определяется, какие величины (например, коэффициенты, главные члены разностного оператора и прочее) будут считаться известными заранее, и какие величины (коэффициенты, операторы, функции) будут искомыми неопределенными. Затем вычисляется необходимое число членов разложения погрешности с учетом дифференциальных следствий и формулируются условия аппроксимации с заданным порядком. Иногда в систему, определяющую искомые параметры схемы, включают некоторые дополнительные условия, способные повлиять на качества будущей схемы. Совокупность всех сформулированных условий представляют некоторую систему уравнений на неопределенные параметры, после решения которой устанавливается конкретный вид схемы. Таким образом, при разложении погрешности в ряд с привлечением продолженной системы уравнений неопределенные коэффициенты выбираются так, чтобы в нуль обратилось несколько членов разложения погрешности, расположенных в порядке возрастания порядка малости, начиная с главных членов.

Продемонстрируем применение метода на примере схемы

$$A(q, p)y = B(r, t)f \quad (2.11)$$

с многоточечными операторами

$$A(q, p)y_i = \sum_{j=-q}^p \alpha_j y_{i+j}, \quad B(r, t)f_i = \sum_{j=-r}^t \beta_j f_{i+j}$$

на неравномерной сетке с пока неопределенными параметрами α_j и β_j .

Предположим, что мы строим схему (2.11) для дифференциального уравнения

$$y'' = f.$$

В выбранной модели схемы уже определены различные шаблоны для оператора $A(q, p)$, требующего обращения, и для осредняющего оператора правой части $B(r, t)$. Для первого это (q, p) -шаблон, включающий данный узел сетки плюс q точек слева и p точек справа от него, для второго в общем случае отличный от первого (r, t) -шаблон. Границы шаблонов определяются любыми фиксированными целыми параметрами q, p, r, t . Условимся, что искомыми будут все коэффициенты оператора схемы и все коэффициенты линейной комбинации значений правой части.

Вычислим погрешность схемы на достаточно гладких решениях уравнения. Имеем

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{j=-q}^p \alpha_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_j^m}{m!} y^{(m)} - \sum_{j=-r}^t \beta_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_j^m}{m!} f^{(m)} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=-q}^p \alpha_j z_j^m \right) y^{(m)} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=-r}^t \beta_j z_j^m \right) f^{(m)} \quad (2.12) \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $z_j = x_j - x_i$, где x_i — координата данного узла — условной точки привязки шаблона.

В первой сумме разложения (2.12) не должно быть слагаемых с индексами $m = 0$ и $m = 1$, так как в нашем дифференциальном уравнении не содержатся члены с искомой функцией и ее первой производной, а коэффициент при второй производной должен быть равен единице, если выбрать естественную нормировку схемы. Следовательно коэффициенты должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{j=-q}^p \alpha_j = \sum_{j=-q}^p \alpha_j z_j = 0, \quad \frac{1}{2} \sum_{j=-q}^p \alpha_j z_j^2 = 1. \quad (2.13)$$

Отсутствие в первой сумме выражения (2.12) первых двух слагаемых позволяет сдвинуть в ней индекс суммирования на две единицы, а затем воспользоваться уравнениями продолженной системы $y^{(m+2)} = f^m$. Приводя затем подобные, приходим к системе условий

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)} \sum_{j=-q}^p \alpha_j z_j^{m+2} - \sum_{j=-r}^t \beta_j z_j^m = 0, \quad (2.14)$$

где $m = 0, 1, \dots, M - 1$.

Система условий (2.13)–(2.14) гарантирует аппроксимацию исходного уравнения с порядком не ниже M . В зависимости от значения M система может быть неопределенной, однозначно разрешимой или переопределенной. Однозначная разрешимость имеет место при

$$M = \overline{M} = p + q + r + t - 1.$$

Это число есть максимально возможный порядок аппроксимации на данном шаблоне (порядок будет выше на единицу,

если шаблон симметричен). При бóльших значениях M система неразрешима, а при меньших имеется параметрический произвол в коэффициентах схемы с числом произвольных параметров $\bar{M} - M$. Число M в системе условий аппроксимации означает, сколько дифференциальных следствий использовано при построении схемы. При $M = 0$ ни одно уравнение продолженной системы не используется, и схема имеет первый порядок.

Если M в системе (2.14) меньше своего возможного наибольшего значения \bar{M} , то произвол в параметрах также можно употребить для повышения порядка без привлечения очередных следствий дифференциального уравнения, но тогда рост порядка аппроксимации на каждую единицу накладывает не по одному условию вида (2.14), а по два условия

$$\sum_{j=-q}^p \alpha_j z_j^{m+2} = 0, \quad \sum_{j=-r}^t \beta_j z_j^m = 0 \quad (2.15)$$

для каждого значения $m = M, \dots, \tilde{M} - 1$, так как в этом случае требуется занулять очередные члены разложения погрешности в выражении (2.14) для искомой функции и правой части. Ясно, что в этом случае максимально возможный порядок аппроксимации \tilde{M} будет меньше максимума \bar{M} , так как общее число уравнений в системе (2.13)–(2.15) будет возрастать с уменьшением M .

Это утверждение можно обратить: чем больше число M использованных дифференциальных следствий при фиксированном порядке точности $\tilde{M} \geq M$, тем меньше общее число уравнений в системе (2.13)–(2.15) и тем меньшим числом неизвестных можно достичь этого порядка точности. Таким образом, увеличение M при фиксированном требуемом порядке точности позволяет сократить размеры шаблонов одного или обоих операторов схемы. Поэтому число M может

служить мерой или рангом компактности схем повышенной точности. При нулевом ранге схема не компактна вовсе (все уравнения (2.14) выпадают из системы), а при максимально возможном ранге схема на данном шаблоне оказывается максимально точной и единственной с точностью до малых возмущений коэффициентов схемы (группа уравнений (2.15) исчезает из общей системы). При возрастании ранга число уравнений группы (2.14) увеличивается, а группы (2.15) — уменьшается, поэтому при фиксированных параметрах шаблонов для искомой функции и правой части порядок аппроксимации повышается, а при фиксированном порядке аппроксимации шаблоны схемы могут быть уменьшены, в этом смысле схема становится все более компактной с ростом ранга компактности.

Решая систему уравнений и подставляя найденные коэффициенты в операторы схемы, получим семейство компактных схем любого порядка точности на произвольных шаблонах. Как и в случае равномерной сетки, в результате могут быть определены компактные аппроксимации

$$K(q, p, r, t) = (B(r, t))^{-1} A(q, p)$$

произвольного порядка $M \leq p + q + r + t + 1$ для второй производной на произвольном шаблоне.

Аналогично решается задача построения компактных разностных схем на произвольных шаблонах для более общего уравнения $y^{(K)} = f$ и соответствующая задача определения компактных аппроксимаций производной любого порядка. Повторяя проведенные выше рассуждения для общего случая, сформулируем условия аппроксимации с порядком M , аналогичные условиям системы (2.13)–(2.14):

$$\sum_{j=-q}^p \alpha_j z_j^k = K! \delta_{kK}, \quad k = 0, \dots, K, \quad (2.16)$$

$$\frac{m!}{(m+K)!} \sum_{j=-q}^p \alpha_j z_j^{m+K} - \sum_{j=-r}^t \beta_j z_j^m = 0, \quad m = 0, \dots, M-1 \quad (2.17)$$

где $m = 0, 1, \dots, M-1$. Максимально возможный порядок аппроксимации в случае уравнения с производной порядка K равен

$$M = \overline{M} = p + q + r + t - K + 1.$$

При меньших значениях M имеющийся произвол в параметрах схемы можно использовать как описано выше для дополнительного повышения порядка точности до значения \tilde{M} без привлечения следующих уравнений продолженной системы, налагая по два условия

$$\sum_{j=-q}^p \alpha_j z_j^{m+K} = 0, \quad \sum_{j=-r}^t \beta_j z_j^m = 0 \quad (2.18)$$

для каждого значения $m = M, \dots, \tilde{M} - 1$

Докажите, что при $K = 2$, $q = p = r = t = 1$ и $M = 3$ получается рассмотренная выше схема третьего порядка (2.10).

Проанализируйте, можно ли в в условиях предыдущей задачи при $M = 2$ подобрать свободный параметр так, чтобы получилась схема (2.9) второго порядка аппроксимации.

Постройте на том же шаблоне компактную аппроксимацию максимального порядка для первой производной.

Постройте на шаблоне с параметрами $q = r = t = 1$ и $p = 0$ компактную схему для уравнения $y' = f$.

Решите ту же задачу в случае $p = r = t = 1$ и $g = 0$.

При $p = r = 1$ постройте компактную аппроксимацию третьего порядка аппроксимации первой производной в случаях двухточечных осредняющих операторов $B(1, 0)$ и $B(0, 1)$ в правой части схемы.

§ 3. Компактные аппроксимации операторов

3.1. Компактные аппроксимации второй производной. Запишем схему третьего порядка точности (2.10) для уравнения $y'' = g$ в форме

$$\Lambda y_h = Sg, \quad S = E + \frac{d}{3}\Delta + \frac{p+d^2}{12}\Lambda. \quad (3.1)$$

Оператор S осуществляет осреднение значений правой части по трем точкам шаблона. Правая часть (3.1) в индексах имеет вид

$$Sg_i = ag_{i+1} + bg_i + cg_{i-1},$$

где

$$a = \frac{1}{6} \left(\frac{d}{h_+} + \frac{h_-}{s} \right), \quad b = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \frac{d^2}{p}, \quad c = \frac{1}{6} \left(\frac{h_+}{s} - \frac{d}{h_-} \right).$$

Именно благодаря удачному выбору коэффициентов осреднения погрешность схемы имеет третий порядок малости.

Умножая разностное уравнение (3.1) слева на оператор, обратный к осредняющему оператору, получим

$$S^{-1}\Lambda y = g + O(h^3).$$

Отсюда в силу уравнения следует

$$S^{-1}\Lambda y = y'' + O(h^3). \quad (3.2)$$

Равенство (3.2) означает, что оператор

$$A = S^{-1}\Lambda = \left(E + \frac{d}{3}\Delta + \frac{p+d^2}{12}\Lambda \right)^{-1}\Lambda \quad (3.3)$$

аппроксимирует с третьим порядком оператор двойного дифференцирования D^2 . Оператор A называется компактной аппроксимацией третьего порядка для оператора D^2 .

Заметим, что в равенство (3.2) функция g не входит явно. Поэтому равенство (3.2) имеет место для любой достаточно гладкой функции y совершенно независимо от того, решением какого уравнения она является.

Действуя аналогично в отношении более простой схемы (2.9), приходим к компактной аппроксимации второго порядка для второй производной

$$A = S^{-1}\Lambda = \left(E + \frac{d}{3}\Delta\right)^{-1}\Lambda. \quad (3.4)$$

3.2. Компактная аппроксимация первой производной. Дифференциальное уравнение

$$y' = g \quad (3.5)$$

аппроксимируем со вторым порядком схемой

$$\Delta y_h = g,$$

где Δ — трехточечный оператор (1.5) со специальным выбором весовых коэффициентов. Погрешность схемы приводится к виду

$$\psi = \Delta y - g = y' + \frac{p}{6}y''' + O(h^3) - g = \frac{p}{6}g'' + O(h^3)$$

Отсюда следует, что схема

$$\Delta y_h = P g, \quad P = E + \frac{p}{6}\Lambda$$

представляет собой компактную схему третьего порядка аппроксимации, а разностный оператор

$$W = P^{-1}\Delta = \left(E + \frac{p}{6}\Lambda\right)^{-1}\Delta, \quad W \simeq D + O(h^2) \quad (3.6)$$

является компактной аппроксимацией третьего порядка для оператора дифференцирования D , где оператор P выполняет осреднение по трем узлам с коэффициентами

$$a = \frac{1}{3} \frac{h_-}{s}, \quad c = -\frac{1}{3} \frac{h_+}{s}, \quad b = 1 + \frac{1}{3} \frac{d}{s}.$$

3.3. Компактные аппроксимация сложных операторов. Для более сложных одномерных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами компактные аппроксимации третьего порядка строятся аналогично. В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор

$$P = D^2 + aD, \quad a = \text{const}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим связанное с ним дифференциальное уравнение $Pu = g$ или

$$y'' + ay' = g$$

и соответствующее ему разностное уравнение

$$\Lambda y_h + a\Delta y_h = g,$$

первого порядка аппроксимации.

Используя следствия дифференциального уравнения

$$y''' = g' - ay'', \quad y^{IV} = g'' - ay''',$$

вычислим погрешность разностного уравнения на гладких решениях дифференциального уравнения. В результате получим

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{p + d^2}{12} y^{IV} + \frac{2d + ap}{6} y''' + O(h^3) = \\ &= \frac{p + d^2}{12} (g'' - ay''') + \frac{2d + ap}{6} y''' + O(h^3) = \end{aligned}$$

$$= \frac{p + d^2}{12}g'' + m(g' - ay'') + O(h^3),$$

где

$$m = \frac{d}{3} + a\frac{p - d^2}{12}.$$

Выражая вторую производную из самого дифференциального уравнения и заменяя затем производные разностными отношениями, получим

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{p + d^2}{12}g'' + mg' - am(g - ay') + O(h^3) = \\ &= \frac{p + d^2}{12}\Lambda g + m\Delta g - amg + a^2m\Delta y + O(h^3).\end{aligned}$$

Вводя главные члены погрешности с обратным знаком в исходную схему первого порядка точности, получим компактную разностную схему

$$Ru = \Omega g, \quad R = \Lambda + a(1 - am)\Delta,$$

$$\Omega = (1 - am)E + m\Delta + \frac{p + d^2}{12}\Lambda,$$

аппроксимирующую уравнение с третьим порядком, так как замена на последнем этапе производных разностями не приводит к снижению порядка. Это верно благодаря тому, что $\Delta = D + O(h^2)$, $\Lambda = D^2 + O(h)$, и коэффициенты при первых производных имеют первый порядок малости ($d = O(h)$, $m = O(h)$), а при второй производной — второй ($p = O(h^2)$, $p + d^2 = O(h^2)$).

Таким образом, для дифференциального оператора (3.7) построена трехточечная компактная аппроксимация

$$C = \Omega^{-1}R = P + O(h^3)$$

третьего порядка.

Следует заметить, что в отличие от простых примеров, рассмотренных выше, при построении данной компактной схемы потребовалась поправка не только правой части схемы, но также и разностного оператора в левой части. В данном случае, как и в случае равномерных сеток, это было неизбежно, так как дифференциальные следствия образуют цепочку, в которой старшие производные выражаются не только через производные правой части, но также через младшие производные решения.

Совершенно аналогично строятся компактные аппроксимации для любых других линейных дифференциальных операторов.

Постройте компактные аппроксимации третьего порядка для операторов $D^2 + aE$, $D^2 - (aD + bE)$ с постоянными коэффициентами.

§ 4. Построение компактных схем

4.1. Метод исчерпания погрешности. Метод заключается в том, что вначале выделяют главный член в разложении погрешности какой-нибудь простой схемы первого или второго порядка, затем упрощают его, применяя следствия дифференциального уравнения, и аппроксимируют полученное дифференциальное выражение разностным выражением от значений искомой функции и правой части на компактном шаблоне. Включение его с обратным в исходную схему порождает новую схему более высокого порядка аппроксимации. В сущности, эта технология для одномерных задач была применена нами в предыдущих параграфах. При большем числе измерений сама идея метода остается неизменной, лишь выкладки становятся несколько более громоздкими.

На равномерной сетке при условии симметрии исходной схемы в результате применения одного акта метода исчерпания погрешности порядок обычно растет на две единицы, так как погрешность симметричных операторов разлагается в ряд по четным степеням шага. На неравномерной сетке следует ожидать роста порядка точности всего лишь на единицу. Порядок точности можно и далее пытаться повышать описанным выше способом, компенсируя главный член погрешности модифицированной схемы новыми поправками.

Применим этот метод для двумерного уравнения Лапласа

$$\nabla u = 0, \quad \nabla = (D_1^2 + D_2^2), \quad (4.1)$$

где D_1, D_2 — операторы дифференцирования по пространственным переменным x_1 и x_2 .

Введем прямоугольную сетку, неравномерную по обоим переменным. Исходную схему на такой сетке возьмем в виде

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)u_h = 0, \quad (4.2)$$

где Λ_1, Λ_2 — трехточечные разностные аналоги вида (1.6) операторов двукратного дифференцирования по соответствующей переменной.

Используя разложение (1.8) вычислим главный член погрешности схемы (4.2) на решениях уравнения (4.1) и преобразуем ее, выражая третьи производные решения с помощью следствий уравнения Лапласа, полученных его дифференцированием. Имеем

$$\begin{aligned}
\psi &= \Lambda_1 u + \Lambda_2 u = \\
&\left(D_1^2 + \frac{d_1}{3} D_1^3 \right) u + \left(D_2^2 u + \frac{d_2}{3} D_2^3 \right) u + O(h^2) = \\
&= -\frac{d_1}{3} D_1 D_2^2 u - \frac{d_2}{3} D_1^2 D_2 u + O(h^2) = \\
&= -\frac{d_1}{3} D_1 \left(\Lambda_2 - \frac{d_2}{3} D_2^3 \right) u - \frac{d_2}{3} D_2 \left(\Lambda_1 - \frac{d_1}{3} D_1^3 \right) u + O(h^2) = \\
&= -\frac{d_1}{3} \Delta_1 \Lambda_2 u - \frac{d_2}{3} \Delta_2 \Lambda_1 u + \frac{d_1 d_2}{9} D_1 D_2 (D_1^2 + D_2^2) u + O(h^2) = \\
&= -\frac{d_1}{3} \Delta_1 \Lambda_2 u - \frac{d_2}{3} \Delta_2 \Lambda_1 u + O(h^2). \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Здесь $d_1 = h_+^1 - h_-^1$, $d_2 = h_+^2 - h_-^2$ — разности соседних шагов сетки на данном шаблоне по переменным x_1, x_2 соответственно.

Из представления погрешности (4.3) следует, что схема

$$\Omega_2 u_h = 0, \tag{4.4}$$

где

$$\Omega_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{d_1}{3} \Delta_1 \Lambda_2 + \frac{d_2}{3} \Delta_2 \Lambda_1,$$

является компактной схемой второго порядка аппроксимации для уравнения (4.1).

Попробуем повысить порядок аппроксимации схемы до третьего. С этой целью вычислим главный член погрешности схемы (4.4)

$$\begin{aligned}
\psi &= \left(E + \frac{d_2}{3}\Delta_2\right) \Lambda_1 u + \left(E + \frac{d_1}{3}D_1\right) \Lambda_2 u = \\
&= \left(E + \frac{d_2}{3}D_2\right) \left(D_1^2 + \frac{d_1}{3}D_1^3 + \frac{p_1 + d_1^2}{12}D_1^4\right) u + \\
&+ \left(E + \frac{d_1}{3}D_1\right) \left(D_2^2 + \frac{d_2}{3}D_2^3 + \frac{p_2 + d_2^2}{12}D_2^4\right) u + O(h^3) = \\
&= \left(E + \frac{d_1}{3}D_1\right) \left(E + \frac{d_2}{3}D_2\right) (D_1^2 + D_2^2) u - \\
&\quad - \left(\frac{p_1 + d_1^2}{12} + \frac{p_2 + d_2^2}{12}\right) D_1^2 D_2^2 u + O(h^3). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Выражение в предпоследней строке (4.5) равно нулю в силу уравнения (4.1), поэтому для повышения порядка нужно компенсировать лишь последнее слагаемое, заменяя в нем произведение дифференциальных операторов $D_1^2 D_2^2$ произведением разностных операторов $\Lambda_1 \Lambda_2$. В результате получается компактная схема

$$\Omega_3 u_h = 0, \tag{4.6}$$

где

$$\Omega_3 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{d_1}{3}\Delta_1\Lambda_2 + \frac{d_2}{3}\Delta_2\Lambda_1 + \left(\frac{p_1 + d_1^2}{12} + \frac{p_2 + d_2^2}{12}\right)\Lambda_1\Lambda_2,$$

имеющая третий порядок аппроксимации на решениях уравнения (4.1).

Докажите, что схема вида (4.6), но с правой частью

$$Sf = f + \frac{d_1}{3}\Delta_1 f + \frac{d_2}{3}\Delta_2 f + \frac{d_1 d_2}{9}\Delta_1 \Delta_2 f + \frac{p_1 + d_1^2}{12}\Lambda_1 f + \frac{p_2 + d_2^2}{12}\Lambda_2 f, \quad (4.7)$$

аппроксимирует с третьим порядком уравнение Пуассона.

4.2. Схема для эллиптического уравнения со смешанной производной. Рассмотрим уравнение

$$(aD_1^2 - 2cD_1D_2 + bD_2^2)u = f, \quad (4.8)$$

удовлетворяющее условию эллиптичности

$$a > 0, \quad ab - c^2 = d > 0.$$

Запишем исходную схему первого порядка

$$(a\Lambda_1 - 2c\Delta_1\Delta_2 + b\Lambda_2)u = f \quad (4.9)$$

и вычислим ее погрешность

$$\begin{aligned} \Psi &= a\Lambda_1 u - 2c\Delta_1\Delta_2 u + b\Lambda_2 u - f = \\ &= a\frac{d_1}{3}D_1^3 u + b\frac{d_2}{3}D_2^3 u + O(h^2) = \\ &= \frac{d_1}{3}(D_1 f + 2cD_1^2 D_2 u - aD_1 D_2^2 u) + \\ &+ \frac{d_2}{3}(D_2 f + 2cD_1 D_2^2 u - aD_1^2 D_2 u) + O(h^2). \end{aligned}$$

Заменяя в вычисленной главной части погрешности дифференциальные операторы разностными и вводя в схему (4.9)

компенсирующие слагаемые с обратным знаком, получим более точную компактную разностную схему

$$\hat{\Omega}u_h = \hat{S}f, \quad (4.10)$$

где

$$\hat{\Omega} = a\Lambda_1 - 2c\Delta_1\Delta_2 + b\Lambda_2 + \frac{2cd_1 - ad_2}{3}\Lambda_1\Delta_2 + \frac{2cd_2 - ad_1}{3}\Lambda_2\Delta_1,$$

$$\hat{S} = E + \frac{d_1}{3}\Delta_1 + \frac{d_2}{3}\Delta_2.$$

Заметим, что попытка повысить с помощью продолженной системы порядок аппроксимации до третьего на шаблоне (3×3) не удастся, так как в общем случае обе трети производные одновременно не представляется возможным удалить из выражения погрешности третьего порядка.

Докажите, что условием существования компактной схемы на шаблоне (3×3) является условие пропорциональности

$$\frac{3p_1 - d_1^2}{a} = \frac{3p_2 - d_2^2}{b}.$$

Докажите, что сформулированное условие эквивалентно требованию равномерности сетки и известному условию пропорциональности квадратов шагов сетки по координатам коэффициентам уравнения при повторных производных:

$$\frac{h_1^2}{a} = \frac{h_2^2}{b}.$$

Выполните обобщение схемы (4.10) на многомерный случай.

4.3. Метод компактных аппроксимаций. Аппроксимируем слагаемые в левой части уравнения (4.1) с помощью построенных выше компактных аппроксимаций (3.3) вторых производных

$$A_1 = S_1^{-1}\Lambda_1 = \left(E + \frac{d_1}{3}\Delta_1 + \frac{p_1 + d_1^2}{12}\Lambda_1 \right)^{-1} \quad \Lambda_1 = D_1^2 + O(h^3),$$

$$A_2 = S_2^{-1}\Lambda_2 = \left(E + \frac{d_2}{3}\Delta_2 + \frac{p_2 + d_2^2}{12}\Lambda_2 \right)^{-1} \quad \Lambda_2 = D_2^2 + O(h^3).$$

В результате получим компактную схему вида

$$S_1^{-1}\Lambda_1 u + S_2^{-1}\Lambda_2 u_h = f \quad (4.11)$$

третьего порядка аппроксимации.

Так же, как в случае равномерной сетки, схема (4.11) умножением слева на произведение операторов $S_1 S_2$ приводится к форме

$$S_2 \Lambda_1 u + S_1 \Lambda_2 u = S_1 S_2 f, \quad (4.12)$$

не содержащей обратных операторов и удобной для реализации вычислений.

Заметим, что левая часть схемы (4.12) алгебраически совпадает с левой частью схемы (4.6) для уравнения Лапласа, отличаясь от нее лишь группировкой слагаемых, а правая часть эквивалентна выражению (4.7) с точностью до величин порядка погрешности аппроксимации:

$$S_1 S_2 = S + O(h^3).$$

Таким образом, на данном примере можно убедиться, что применение метода компактных аппроксимаций на неравномерной сетке по своей технологии ничем не отличается от

его применения на равномерной сетке. При этом его формулировка в двумерном и многомерном случае абсолютно аналогична. Требуется лишь, чтобы многомерный дифференциальный оператор представлялся в виде суммы одномерных.

Применяя описанную технологию, например, для многомерного уравнения Пуассона, получим компактную схему вида

$$\sum_{i=1}^m S_i^{-1} \Lambda_i u_h = f, \quad S_i = E + \frac{d_i}{3} \Delta_i + \frac{p_i + d_i^2}{12} \Lambda_i.$$

Умножая ее слева на произведение операторов $S_1 \dots S_m$, получим эквивалентную компактную схему

$$\sum_{i=1}^m \prod_{j \neq i} S_j \Lambda_i u_h = \prod_{j=1}^m S_j f.$$

В качестве другого примера построим компактную схему третьего порядка аппроксимации для уравнения неразрывности

$$D_1 u + D_2 v + D_3 w = 0.$$

Формально заменяя в уравнении первые производные компактными аппроксимациями вида (3.6), получим компактную схему третьего порядка

$$P_1^{-1} \Delta_1 u + P_2^{-1} \Delta_2 v + P_3^{-1} \Delta_3 w = 0,$$

где

$$P_j = E + \frac{p_j}{6} \Lambda_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Другая форма компактной схемы получается в результате умножения схемы на произведение $P_1 P_2 P_3$:

$$P_2 P_3 \Delta_1 u + P_1 P_3 \Delta_2 v + P_1 P_2 \Delta_3 w = 0.$$

4.5. Сходимость. Схема (4.2) на равномерной сетке в индексах имеет вид

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = f_{i,j}.$$

Отсюда следует, что значение решения в центре шаблона схемы выражается в виде линейной комбинации значений решения в соседних узлах

$$u_{i,j} = b_{1,0} u_{i+1,j} + b_{-1,0} u_{i-1,j} + b_{0,1} u_{i,j+1} + b_{0,-1} u_{i,j-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} f_{i,j}, \quad r^2 = \frac{2 h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$$

с положительными коэффициентами

$$b_{1,0} = b_{-1,0} = \frac{r^2}{4 h_1^2}, \quad b_{0,1} = b_{0,-1} = \frac{r^2}{4 h_2^2},$$

сумма которых равна единице.

Такие схемы называют схемами с положительными коэффициентами. Из общей теории разностных схем известно, что для них справедлив принцип максимума, из которого следует устойчивость в сеточной максимум-норме. Таким образом, схема (4.4) сходится со вторым порядком.

Установим достаточный критерий сходимости компактной схемы. Запишем ее в индексном виде

$$\sum_{k,m=-1}^1 a_{k,m} u_{i+k,j+m} = g_{i,j}, \quad g = S f,$$

где

$$a_{0,0} = -\frac{10}{3} \frac{1}{r^2}, \quad a_{1,1} = a_{-1,1} = a_{1,-1} = a_{-1,-1} = \frac{1}{6} \frac{1}{r^2},$$

$$a_{1,0} = a_{-1,0} = \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{r^2}, \quad a_{0,1} = a_{0,-1} = \frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{r^2}.$$

Выразим значение решения в центре шаблона через значения в соседних узлах

$$u_{i,j} = \sum_{k^2+m^2 \neq 0} b_{k,m} u_{i+k,j+m} + \frac{1}{|a_{0,0}|} g_{i,j}, \quad b_{k,m} = \frac{a_{k,m}}{|a_{0,0}|}.$$

Нетрудно проверить, что сумма коэффициентов линейной комбинации в правой части равна единице, а условия их положительности сводятся к системе неравенств

$$h_1^2 \leq 3 r^2, \quad h_2^2 \leq 3 r^2, \quad r^2 = \frac{2 h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2},$$

которые выполняются при ограничении на степень вытянутости прямоугольной ячейки сетки

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}.$$

Это ограничение гарантирует выполнение принципа максимума и сходимость схемы с четвертым порядком.

Установим знаки коэффициентов схемы (2.1). Для этого сначала запишем операторы A_v и Λ_v в индексах. Первый из них

$$A_v w_i = a_v^- w_{i-1} + a_v^0 w_i + a_v^+ w_{i+1}$$

имеет коэффициенты

$$a_v^\pm = \frac{1}{6 s_v h_{\pm v}} (d_v^2 + p_v \pm 2 d_v h_{\mp v}), \quad a_v^0 = \frac{5}{6} + \frac{d_v^2}{6 p_v}. \quad (2.2)$$

Коэффициенты второго

$$\lambda_v^\pm = \frac{2}{s_v h_{\pm v}}, \quad \lambda_v^0 = -\frac{2}{p_v}. \quad (2.3)$$

Коэффициенты оператора $A_y \Lambda_x + A_x \Lambda_y$ определяются через коэффициенты (2.2)–(2.3). Их выражения удобнее всего представить, в соответствии с размером шаблона, в виде матрицы 3×3 , направив ось x вправо, а ось y вверх:

$$\begin{array}{ccc} a_y^+ \lambda_x^- + a_x^- \lambda_y^+ & a_y^+ \lambda_x^0 + a_x^0 \lambda_y^+ & a_y^+ \lambda_x^+ + a_x^+ \lambda_y^+ \\ a_y^0 \lambda_x^- + a_x^- \lambda_y^0 & a_y^0 \lambda_x^0 + a_x^0 \lambda_y^0 & a_y^0 \lambda_x^+ + a_x^+ \lambda_y^0. \\ a_y^- \lambda_x^- + a_x^- \lambda_y^- & a_y^- \lambda_x^0 + a_x^0 \lambda_y^- & a_y^- \lambda_x^+ + a_x^+ \lambda_y^- \end{array} \quad (2.4)$$

Так как коэффициенты λ_v^0 отрицательны, а λ_v^0 положительны, то центральный элемент матрицы (2.4), очевидно, отрицателен. Если потребовать неотрицательность всех остальных коэффициентов схемы, то для нее будет справедлив принцип максимума.

Угловые коэффициенты матрицы (2.4) в силу (2.2)–(2.3) с точностью до различных, но в каждом случае положительных, множителей приводятся, с учетом определений (1.2), к виду

$$p_x + p_y + \sigma_x d_x s_x + \sigma_y d_y s_y,$$

где параметры σ_x и σ_y принимают значения ± 1 . Различные четыре сочетания знаков соответствуют разным углам шаблона. Отсюда следует, что угловые коэффициенты неотрицательны при условии

$$|h_{+x}^2 - h_{-x}^2| + |h_{+y}^2 - h_{-y}^2| \leq h_{+x} h_{-x} + h_{+y} h_{-y}. \quad (2.5)$$

Заметим, что даже замена (2.5) более грубым условием

$$|h_{+v}^2 - h_{-v}^2| \leq h_{+v} h_{-v}, \quad v = x, y \quad (2.6)$$

дает приемлемое ограничение на коэффициент изменения шага $q_v = h_{-v}/h_{+v}$: допускается изменение не быстрее, чем в геометрической прогрессии с множителем, принадлежащем промежутку

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leq q_v \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

В числах это приблизительно отрезок $[0.62, 1.62]$. Заметим, что не обязательно соблюдать это условие для каждой переменной. Если для одной переменной неравенство (2.6) не выполняется, для другой оно должно выполняться с запасом, лишь бы в целом выполнялось условие (2.5). Отметим также частный случай, когда сетка равномерна по одной из переменных. Тогда, очевидно, для пары последовательно расположенных шагов по другому направлению условие (2.5) превращается в еще более мягкое.

Оставшиеся четыре коэффициента матрицы (2.4) (на гранях шаблона), опять-таки с точностью до различных положительных множителей, приводятся к выражению

$$s_x^2 + p_x \pm d_y s_y - p_y$$

либо к аналогичному выражению, полученному из него взаимной заменой индексов x и y . Две независимые возможности для индекса и знака ' \pm ' дают все четыре различные выражения, по числу граней шаблона. Требование их неотрицательности в силу (1.2) приводит к условиям

$$\begin{aligned} h_{+x}h_{-x} + |h_{+x}^2 - h_{-x}^2| &\leq h_{+y}^2 + h_{-y}^2 + 3h_{+y}h_{-y}, \\ h_{+y}h_{-y} + |h_{+y}^2 - h_{-y}^2| &\leq h_{+x}^2 + h_{-x}^2 + 3h_{+x}h_{-x}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Симметричная система неравенств (2.7) означают, что средние местные шаги по различным переменным не должны резко отличаться. В предельном случае равномерной сетки по

обоим направлениям условия (2.7) эквивалентны известному ограничению для схемы Микеладзе

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_x}{h_y} \leq \sqrt{5}.$$

Таким образом, условия устойчивости схемы (2.1) для уравнения Пуассона, рассматриваемой отдельно, задаются неравенствами (2.5), (2.7). Первое из них ограничивает характер изменения шага сетки по каждой переменной, а второе — отклонение сетки от квадратной. ■

§ 5. Компактные схемы на нерегулярных сетках

5.1. Постановка задачи. Представляет интерес исследование структуры обычных и компактных аппроксимаций в самом общем случае сеточной области. Речь идет о схемах любого порядка точности на произвольной сетке, которая вообще говоря не удовлетворяет никаким условиям симметрии и не обязательно является регулярной.

Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f \quad (5.1)$$

удовлетворяющими условиям эллиптичности $a > 0$, $ab - c^2 > 0$. Предположим, что для уравнения (5.1) поставлена корректная краевая задача в некоторой области D на плоскости (x, y) . Предположим, на плоскости определено в общем случае нерегулярное множество точек D_h , представляющее некоторую дискретизацию континуальной области D .

Зафиксируем некоторую точку $r_0 = (x_0, y_0)$ сеточной области D_h , которая может быть как внутренней, так и граничной. Во внутренних узлах будем аппроксимировать уравнение (5.1), а в граничных узлах — краевые условия, предполагая достаточную гладкость решения и привлекая продолженную систему уравнений. Локально разностное уравнение на произвольном шаблоне, состоящем из $J + 1$ точки, включая фиксированную точку r_0 , в самой общей форме имеет вид

$$\sum_{j=0}^J \alpha_j u_j = F, \quad u_j = u(r_j), \quad r_j = (x_j, y_j) \quad (5.2)$$

где неопределенные коэффициенты схемы $\alpha_j (j = 0, \dots, J)$ и правая часть F могут быть определены в зависимости от типа точки (внутренняя или граничная), числа $J + 1$ точек шаблона, степени гладкости решения исходной краевой задачи и необходимого порядка аппроксимации. В качестве параметра, характеризующего локальную степень детальности сетки, примем число $h = \max_{j=0, \dots, J} (|q_j|, |w_j|)$, где $q_j = x_j - x_0$, $w_j = y_j - y_0$ — проекции вектора $r_j - r_0$ на оси x, y .

Задача состоит в определении условий на коэффициенты схемы и ее правую часть, при которых на достаточно гладких решениях порядок аппроксимации был бы максимален.

5.2. Обычные и компактные схемы. Пусть дифференциальное уравнение

$$Lv = f \tag{5.3}$$

аппроксимируется некоторой разностной схемой с погрешностью ¹ порядка $O(h^k)$

$$\Lambda u = F. \tag{5.4}$$

Выделим разложением в ряд Тейлора главный член погрешности схемы (5.4)

$$\psi = \Lambda v - F = h^k Dv + O(h^{k+r}).$$

Предположим, что дифференциальный оператор D удалось выразить в виде $D = PL + R + O(h^r)$, где P и R некоторые разностные операторы. Тогда главный член погрешности схемы выразится исключительно через разностные отношения искомой функции и правой части

$$\psi = h^k Rv + h^k Pf + O(h^{k+r}).$$

¹Порядок аппроксимации для традиционных схем обычно первый или второй

Отсюда непосредственно следует, что схема

$$(\Lambda - h^k R)u = (E + h^k P)f \quad (5.5)$$

где E единичный оператор, имеет порядок аппроксимации $k + r$, более высокий, чем исходная схема (5.4). Оператор $\hat{\Lambda} = (E + h^k P)^{-1}(\Lambda - h^k R)$ по определению называется компактной аппроксимацией дифференциального оператора L , а разностная схема (5.5) (или эквивалентная ей схема $\hat{\Lambda}u = f$) называется компактной. Заметим, что для схемы (5.5) можно выписать главный член погрешности и снова пытаться повысить порядок аппроксимации. Результатом будет компактная схема еще более высокого порядка.

Некоторой особенностью приведенного выше определения является то, что оно дано непосредственно по отношению к "сложному" дифференциальному оператору L . В классическом определении [9] приведенные рассуждения проводятся обычно для элементарных (одномерных) дифференциальных операторов $L_i (i = 1, \dots, m)$, с каждым из которых связывается уравнение $L_i v = f_i$, и по описанному выше правилу определяются компактные разностные аппроксимации $\hat{\Lambda}_i$ операторов L_i . Когда же сложный оператор L представляет собой сумму $L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$ более простых, то компактная схема строится аддитивно в виде

$$\sum_{i=1}^m \hat{\Lambda}_i u = f, \quad f = \sum_{i=1}^m f_i$$

Классическое определение удобно, когда и сетка, и отдельные слагаемые оператора $L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$ связаны непосредственно с координатными направлениями. В данном случае такое определение неудобно по двум причинам. Во-первых, произвольная сетка, не ориентированная по ко-

ординатным направлениям, не располагает к отдельной аппроксимации слагаемых дифференциального уравнения. Во-вторых, помехой является разнородность слагаемых: смешанная производная, в отличие от других слагаемых, не является одномерным оператором. Поэтому представляется целесообразным определить понятие компактной схемы как-то иначе. Это можно сделать довольно простым способом, воспользовавшись двумя различными определениями аппроксимации для разностных схем — на классе гладких функций [11] и на классе гладких решений дифференциального уравнения.

Определение 1. Схема (5.4) аппроксимирует с порядком k уравнение (5.3), если для всех $h \leq h_0$ и для достаточно гладких функций v, f имеют место равномерные по h оценки $\|\Lambda v - Lv\| \leq C_1 h^k$, $\|F - f\| \leq C_2 h^k$.

Определение 2. Схема (5.4) аппроксимирует с порядком k уравнение (5.3), если для всех $h \leq h_0$ и для достаточно гладких решений v уравнения (5.3) имеет место равномерная по h оценка $\|\Lambda v - F\| \leq C h^k$.

Определение 1 означает близость разностного и дифференциального операторов и близость правых частей соответствующих уравнений. Определение 2 означает, что решение дифференциального уравнения, подставленное в разностную схему, обращает ее в почти истинное равенство. Обычные схемы имеют одинаковый порядок аппроксимации в смысле обоих определений. Это связано с операторным характером аппроксимации: в традиционных схемах каждое слагаемое дифференциального уравнения, в том числе правая часть, аппроксимируется отдельно с использованием разностных аналогов тождественного оператора и производных.

В случае компактных схем аппроксимация является более сложной: обычные разностные аналоги производных и

правая часть дополнительно осредняются по различным координатным направлениям, а параметры осреднения выбираются из соображений повышения порядка аппроксимации. Поэтому порядок аппроксимации в смысле второго определения для них всегда выше, чем в смысле первого определения. Это легко проверить, обратившись к компактной схеме (5.5). В смысле определения 2 она по построению аппроксимирует уравнение (5.3) с порядком $k + r$, в то время как в смысле определения 1 порядок, очевидно, остается равным k . Это свойство является неотъемлемым признаком компактности и может быть принято в качестве определения компактных схем.

Определение 3. Схема, аппроксимирующая дифференциальное уравнение в смысле определения 2 с более высоким порядком, чем в смысле определения 1, называется компактной.

Это определение, отличаясь краткостью, между прочим четко разграничивает иногда смешиваемые понятия компактной схемы и обычной схемы, но высокого порядка аппроксимации. ■

5.3. Обычная аппроксимация уравнения. Пусть r_0 внутренняя точка сеточной области D_h . Вычислим локальную погрешность аппроксимации схемы (5.2) в смысле второго определения на решениях уравнения (5.1). Используя разложение в ряд Тейлора по двум переменным в окрестности точки r_0 , получим

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \psi^m - F, \quad \psi^m = \sum_{k=0}^m z_k^m \frac{\partial^m v}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \quad (5.6)$$

где коэффициенты разложения при производных m -го по-

рядка представляют собой выражения

$$z_k^m = \sum_{j=0}^J \frac{1}{k! (m-k)!} \alpha_j q_j^k w_j^{m-k} \quad k = 0, \dots, m. \quad (5.7)$$

При фиксированном m и любом $k = 0, \dots, m$ коэффициенты (5.7) имеют одинаковый порядок малости относительно h . Так как уравнение (5.1) имеет второй порядок, то при естественной нормировке порядок коэффициентов α_j разностной схемы (5.2) будет $O(h^{-2})$, поэтому выражения (5.7) имеют порядок $O(h^{m-2})$. Самым минимальными условиями аппроксимации (с первым порядком) являются равенство нулю слагаемых погрешности (5.6) порядков $O(h^{-2})$, $O(h^{-1})$ и совпадение коэффициентов уравнения (5.1) с соответствующими коэффициентами при членах (5.6) порядка $O(1)$, а также аппроксимация правой части по меньшей мере с первым порядком $F = f + O(h)$. Для определения неизвестных коэффициентов схемы $\alpha_j (j = 0, \dots, J)$ в результате получается система, состоящая из шести уравнений

$$z_0^0 = z_0^1 = z_1^1 = 0, \quad z_0^2 = b, \quad z_1^2 = -2c, \quad z_2^2 = a. \quad (5.8)$$

В развернутом виде система (5.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J \alpha_j &= \sum_{j=0}^J \alpha_j q_j = \sum_{j=0}^J \alpha_j w_j = 0 \\ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^J \alpha_j q_j^2 &= b, \quad \sum_{j=0}^J \alpha_j q_j w_j = -2c, \quad \frac{1}{2} \sum_{j=0}^J \alpha_j w_j^2 = a. \end{aligned}$$

Для обычных разностных схем, никак не опирающихся на использование продолженной системы уравнений, повышение

порядка аппроксимации на единицу сопряжено с требованием обращения в нуль всех выражений (5.7) при очередном значении m , а также с требованием более точной аппроксимации правой части $F = f + O(h^{m-1})$. Так, аппроксимацию со вторым порядком обеспечивает система (5.8), дополненная уравнениями

$$z_0^3 = z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 = 0$$

или, что то же,

$$\frac{1}{6} \sum_{j=0}^J \alpha_j q_j^3 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^J \alpha_j q_j^2 w_j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^J \alpha_j q_j w_j^2 = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^J \alpha_j w_j^3 = 0.$$

Ясно, что с ростом m число добавляемых к системе уравнений растет в арифметической прогрессии. Поэтому система, формально обеспечивающая порядок s , состоит из

$$K_{ord}^u = 1 + 2 + 3 + \dots + (s + 2) = \frac{(s + 2)(s + 3)}{2}$$

уравнений. Следовательно для обычных схем первого, второго третьего и т. д. порядков аппроксимации коэффициенты схемы определяются системой 6, 10, 15 и т. д. уравнений. Но в каждом из этих случаев для аппроксимации правой части достаточно всего одно условие ($K_{ord}^F = 1$), так как задание правой части в виде $F = f$ очевидно обеспечивает бесконечный порядок.

5.4. Компактная аппроксимация. Иная ситуация в случае компактных схем. Минимальные требования на коэффициенты в форме системы уравнений (5.8) остаются в силе, однако число уравнений, добавляемых к этой системе при увеличении порядка аппроксимации на единицу, меньше, чем для обычных схем. Причина заключается в том, что при

построении компактных схем используются следствия дифференциального уравнения, связывающие старшие производные. Так, в случае эллиптического уравнения (5.1) компонента разложения разностного оператора порядка $O(h^{m-2})$ выражается, согласно (5.6), в виде линейной комбинации производных порядка m функции v

$$z_0^m \frac{\partial^m v}{\partial y^m} + z_1^m \frac{\partial^m v}{\partial x^1 \partial y^{m-1}} + \dots + z_m^m \frac{\partial^m v}{\partial x^m} = \psi^m \quad (5.9)$$

которые не являются независимыми. Они связаны уравнениями продолженной системы

$$a \frac{\partial^m v}{\partial x^{k+1} \partial y^{m-k-1}} - 2c \frac{\partial^m v}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + b \frac{\partial^m v}{\partial x^{k-1} \partial y^{m-k+1}} = \frac{\partial^{m-2} f}{\partial x^{k-1} \partial y^{m-k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (5.10)$$

Вычтем из уравнения (5.9) линейную комбинацию уравнений (5.10) с неопределенными коэффициентами γ_k^m и потребуем, чтобы в левой части получился нуль. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} z_0^m - b\gamma_1^m &= 0 \\ z_1^m - b\gamma_2^m + 2c\gamma_1^m &= 0 \\ z_k^m - b\gamma_{k+1}^m + 2c\gamma_k^m - \gamma_{k-1}^m &= 0, \quad k = 2, \dots, m-2 \\ z_{m-1}^m + 2c\gamma_{m-1}^m - a\gamma_{m-2}^m &= 0 \\ z_m^m - a\gamma_{m-1}^m &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

и новое выражение для ψ^m , уже не зависящее от производных искомой функции

$$\psi^m = \sum_{k=0}^{m-2} \gamma_{k+1}^m \frac{\partial^{m-2} f}{\partial x^k \partial y^{m-2-k}}. \quad (5.12)$$

Очевидно выражения (5.12) суть слагаемые погрешности, которые необходимо компенсировать при формировании первой части схемы.

В системе (5.11), содержащей $m + 1$ уравнений, имеется $m - 1$ неопределенных параметров γ_k^m . Поэтому следует ожидать, что после исключения неопределенных параметров из системы (5.11) останется всего две независимые линейные связи для коэффициентов z_k^m ($k = 0, \dots, m$), которые в силу определения (5.7) и будут искомыми дополнительными уравнениями для определения коэффициентов α_j ($j = 0, \dots, J$).

Первое и последнее уравнения системы (5.11) зарезервируем в качестве этих дополнительных связей, а остальные решим относительно γ_k^m как систему уравнений с квадратной матрицей. Доопределяя для удобства совокупность неизвестных фиктивными значениями γ_0^m, γ_m^m , эквивалентным образом преобразуем упомянутую систему (систему (5.11) без первого и последнего уравнений) к трехточечному разностному уравнению

$$b\gamma_{k+1}^m - 2c\gamma_k^m + a\gamma_{k-1}^m = z_k^m \quad k = 1, \dots, m - 1 \quad (5.13)$$

с однородными граничными условиями

$$\gamma_0^m = 0, \quad \gamma_m^m = 0. \quad (5.14)$$

Не прибегая к аппарату фундаментальных решений разностных уравнений, решим уравнения (5.13), (5.14) непосредственно. Вычислим корни характеристического уравнения

$$\rho = \frac{c + i\sqrt{ab - c^2}}{b}, \quad \bar{\rho} = \frac{c - i\sqrt{ab - c^2}}{b}$$

и редуцируем с помощью факторизации трехточечное уравнение (5.13) к системе двух двухточечных уравнений

$$b(I_{k+1} - \bar{\rho}I_k) = z_k^m, \quad \gamma_{k+1}^m - \rho\gamma_k^m = I_k + 1.$$

Решая их последовательно как рекуррентные соотношения, с учетом первого из граничных условий (5.14) получим

$$\gamma_k^m = \gamma_1^m \sum_{l=0}^{k-1} \rho^{k-1-l} \bar{\rho}^l + \frac{1}{b} \sum_{l=1}^{k-1} \rho^{k-1-l} \sum_{j=1}^l \bar{\rho}^{l-j} z_j^m.$$

Изменяя порядок суммирования во втором слагаемом, приведем это выражение к виду

$$\gamma_k^m = \gamma_1^m R^{k-1} S_0^k(\phi) + \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-1-j} S_j^k(\phi) z_j^m$$

где

$$R = |\rho| = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \phi = \arg(\rho) = \arcsin \sqrt{1 - \frac{c^2}{ab}}$$

$$S_j^k(\phi) = \sum_{l=j}^{k-1} \exp[i(k-1+j-2l)\phi].$$

С помощью легко проверяемых тождеств

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin nx \cos nx}{\sin x}$$

$$1 + \cos 2x + \dots + \cos 2nx = \frac{\sin(n+1)x \cos nx}{\sin x}$$

приведем выражение $S_j^k(\phi)$ к простому виду

$$S_j^k(\phi) = \frac{\sin(k-j)\phi}{\sin \phi}$$

в результате чего для искоемых коэффициентов получим выражение

$$\gamma_k^m = \gamma_1^m R^{k-1} \frac{\sin k\phi}{\sin \phi} + \frac{1}{b \sin \phi} \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-j-1} \sin(k-j)\phi z_j^m. \quad (5.15)$$

Полагая в (5.15) $k = m$ и учитывая второе из граничных условий (5.14), вычислим

$$\gamma_1^m = -\frac{1}{b \sin m\phi} \sum_{j=1}^{m-1} R^{-j} \sin(m-j)\phi z_j^m$$

а затем, подставив это выражение в (5.15), получим решение системы (5.13), (5.14)

$$\gamma_k^m = \frac{R^{k-1}}{b \sin \phi \sin m\phi} \left[\sin(k-m)\phi \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\sin j\phi}{R^j} z_j^m - \sin k\phi \sum_{j=k}^{m-1} \frac{\sin(m-j)\phi}{R^j} z_j^m \right] \quad (5.16)$$

Подставляя значения выражений (5.16) при $k = 1$ и $k = m - 1$ в первое и последнее уравнения системы (5.11), получим искомые уравнения для определения коэффициентов компактной схемы

$$\frac{1}{\sin m\phi} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\sin(m-j)\phi}{R^j} z_j^m = 0, \quad \frac{1}{\sin m\phi} \sum_{j=1}^m \frac{\sin j\phi}{R^j} z_j^m = 0. \quad (5.17)$$

Выполнение соотношений (5.17) обеспечивает обращение в нуль членов погрешности, имеющих порядок $O(h^{m-2})$.

Однако сложность заключается в том, что при $\sin m\phi = 0$ уравнения (5.17) теряют смысл ввиду деления на нуль. Причина заключается в том, что в этом частном случае матрица системы (5.13), (5.14) оказывается вырожденной. Смысл вырождения легко понять на частном примере уравнения Пуассона ($R = 1$, $\phi = \pi/2$), когда вырождение имеет место при любом четном m . Система (5.11) в этом случае распадается на две не связанные между собой системы для четных

и нечетных компонент. Первая из них не имеет решения, так как оказывается перегруженной граничными условиями (5.14), а вторая имеет параметрическое семейство решений, так как для нее граничные условия не поставлены вовсе.

Это затруднение можно обойти, выбрав в качестве линейных связей другие два уравнения системы (5.11), например два последних. Доопределяя искомый вектор фиктивными компонентами γ_{-1}^m , γ_0^m , преобразуем остальные уравнения системы к задаче Коши для трехточечного разностного уравнения

$$b\gamma_{k+1}^m - 2c\gamma_k^m + a\gamma_{k-1}^m = z_k^m, \quad k = 0, \dots, m-2 \quad (5.18)$$

с начальными данными

$$\gamma_{-1}^m = 0, \quad \gamma_0^m = 0. \quad (5.19)$$

Решение системы (5.18), (5.19) имеет вид

$$\gamma_k^m = \frac{R^{k-1}}{b \sin \phi} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\sin(k-j)\phi}{R^j} z_j^m. \quad (5.20)$$

Подставляя (5.20) при значениях $k = m-2$ и $k = m-1$ в последние два уравнения системы (5.11), после приведения подобных получим искомые уравнения для определения коэффициентов компактной схемы

$$z_m^m = \frac{1}{\sin \phi} \sum_{j=0}^{m-2} \frac{\sin(m-1-j)\phi}{R^j} z_j^m, \quad \frac{1}{\sin \phi} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\sin(m-j)\phi}{R^j} z_j^m = 0. \quad (5.21)$$

Следовательно, в случае компактной схемы (5.2) для повышения порядка аппроксимации на единицу при очередном значении m исходную систему (5.8) необходимо дополнить парой уравнений (5.21) (или (5.17), когда они имеют смысл), а к правой части схемы необходимо прибавить выражение (5.12), компенсирующее погрешность. Таким образом, для достижения схемой порядка аппроксимации s ее коэффициенты α_j должны удовлетворять системе, состоящей из $K_{comp}^u = 2s + 4$ уравнений (шесть уравнений (5.8) и по два уравнения (5.21) для каждого значения $m = 3, 4, \dots, s + 1$), а правая часть F схемы должна формироваться в виде

$$F = f + \sum_{m=3}^{s+1} \sum_{k=0}^{m-2} \gamma_{k+1}^m \frac{\partial^{m-2} f}{\partial x^k \partial y^{m-2-k}} + O(h^s). \quad (5.22)$$

Заметим кстати, что в частном случае вырождения уравнения в гиперболическое ($c^2 = ab$, $\phi = 0$) неопределенность в (5.20), (5.21) благополучно раскрывается.

Преимуществом компактных схем перед традиционными является, в частности, линейная зависимость числа условий (или минимально необходимого числа точек шаблона) от порядка аппроксимации, тогда как для обычных схем она квадратичная. Например, для компактных схем второго и третьего порядков аппроксимации коэффициенты определяются линейной системой 8 и 10 условий, в то время как для обычных схем при тех же порядках требуется минимум 10 и 15 условий соответственно.

Однако уменьшение числа условий (или минимума числа точек шаблона схемы) при построении компактных аппроксимаций сопряжено с одновременным усложнением правой части схемы. Для обычных схем достаточно положить $F = f$, а для компактных необходимо аккуратно аппроксимировать все слагаемые, выписанные в (5.22). Для однородных урав-

нений ($f = 0$), а также для задач с аналитически заданной правой частью f , для которой производные до необходимого порядка можно считать известными функциями, усложнение правой части не имеет существенного значения. Если же функция f задана как сеточная, необходимо прибегать к ее интерполяции на некотором двумерном шаблоне (вообще говоря, ином, чем шаблон схемы) так, чтобы соблюдалось разложение (5.22). Очевидно, минимально необходимое число условий (точек шаблона) при порядке аппроксимации s равно сумме арифметической прогрессии

$$K_{comp}^F = 1 + 2 + \dots + s = \frac{s(s+1)}{2}.$$

В частности, в случае компактных схем второго и третьего порядков аппроксимации интерполяционная формула для правой части схемы должна подчиняться трем и шести условиям соответственно. Сводные данные о числе условий для определения параметров схемы в зависимости от порядка аппроксимации приведены в таблице 1. В первой паре строк приведены данные для обычных схем, а во второй — для компактных, причем в каждой паре верхняя строка соответствует искомой функции u , а нижняя относится к правой части F .

Таблица 1

Число условий на параметры схем для внутренних узлов								
	1	2	3	4	5	6	...	s
K_{ord}^u	6	10	15	21	28	36	...	$0.5(s+2)(s+3)$
K_{ord}^F	1	1	1	1	1	1	...	1
K_{comp}^u	-	8	10	12	14	16	...	$2s+4$
K_{comp}^F	-	3	6	10	15	21	...	$0.5s(s+1)$

5.5. Аппроксимация граничных условий. Пусть r_0 граничная точка сеточной области D_h , и пусть разностное уравнение (5.2) с неопределенными коэффициентами α_j и неопределенной правой частью F аппроксимирует граничное условие

$$\lambda \frac{\partial v}{\partial n}(\hat{r}_0) = \alpha v(\hat{r}_0) + g, \quad \hat{r}_0 = (\hat{x}_0, \hat{y}_0)$$

где \hat{r}_0 граничная точка области D , ассоциированная с точкой r_0 (например ближайшая к ней). В наиболее благоприятном случае, когда сетка является согласованной, точки \hat{r}_0 и r_0 совпадают, но в общем случае это не так.

Формальное разложение погрешности для граничного условия отличается от разложения (5.6) только тем, что осуществляется не в узле сетки r_0 , а в истинной точке границы \hat{r}_0 . Поэтому во всех приведенных выше формулах приращения аргументов должны иметь иное определение: $q_j = x_j - \hat{x}_0$, $w_j = y_j - \hat{y}_0$. Минимальные условия аппроксимации граничных условий состоят в том, что для коэффициентов разложения должны выполняться соотношения

$$z_0^0 = -\alpha, \quad z_0^1 = c_y \lambda, \quad z_1^1 = c_x \lambda \quad (5.23)$$

где c_x , c_y локальные значения направляющих косинусов нормали n , а для правых частей должно соблюдаться равенство $F = g + O(h)$. Ясно, что повышение точности до второго, третьего и т. д. порядка в рамках обычных схем требует подключения к системе уравнений (5.23) трех, затем еще четырех и т. д. уравнений, и одновременного уточнения правой части $F = g + O(h^m)$ ($m = 2, 3, \dots$), как это делалось в случае внутренних узлов области.

Для компактных граничных условий остается в силе не только способ исключения погрешности, основанный на использовании уравнений продолженной системы. На границе так же, как и во внутренних узлах сетки, на каждую последующую единицу повышения порядка к системе добавляется ровно два уравнения, причем это те же самые уравнения (5.21). Повышение порядка аппроксимации, конечно, сопровождается усложнением правой части:

$$F = g + \sum_{m=2}^{s+1} \sum_{k=0}^{m-2} \gamma_{k+1}^m \frac{\partial^{m-2} f}{\partial x^k \partial y^{m-2-k}} + O(h^s).$$

Отличие состоит только в том, что операции по исключению погрешности начинаются со значения $m = 2$, а не с $m = 3$, и, как отмечалось выше, приращения аргументов x, y в коэффициентах z_k^m определяются иначе.

Таблица 2

Число условий на параметры схем для граничных узлов								
	1	2	3	4	5	6	...	s
K_{ord}^u	3	6	10	15	21	28	...	$0.5(s+1)(s+2)$
K_{ord}^G	1	1	1	1	1	1	...	1
K_{comp}^u	-	5	7	9	11	13	...	$2s+2$
K_{comp}^G	-	1	3	6	10	15	...	$0.5(s-1)s$

Сводные данные о числе уравнений для определения коэффициентов граничных условий в зависимости от порядка аппроксимации в случае обычных и компактных схем приведены в таблице 2. Структуры таблиц 1 и 2 аналогичны.

5.6. Схемы в трехмерном пространстве. Оценка числа условий, определяющих коэффициенты схем в многомерном пространстве, проводится аналогично, однако сформулировать сами условия в виде простых уравнений в случае

произвольного порядка аппроксимации затруднительно. Рассмотрим трехмерный случай. Пусть $r_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3)$, ($j = 0, 1, \dots, J$) — множество точек трехмерного шаблона схемы. Формально схема с неопределенными коэффициентами в пространстве пишется так же, как и на плоскости. С использованием мультииндексов разложение погрешности можно записать в форме, аналогичной (5.6), (5.7)

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \psi^m - F, \quad \psi^m = \sum_{|k|=m} z_k^m \frac{\partial^m v}{\partial x^k}$$

где $k = (k^1, k^2, k^3)$, $|k| = k^1 + k^2 + k^3$, а коэффициенты разложения при производных порядка m представляют собой выражения

$$z_k^m = \sum_{j=0}^J \frac{1}{k!} \alpha_j (q_j)^k,$$

где

$$k! = k^1! k^2! k^3!, \quad (q_j)^k = (q_j^1)^{k^1} (q_j^2)^{k^2} (q_j^3)^{k^3}.$$

Число всевозможных производных порядка m в трехмерном пространстве равно C_{m+2}^2 , и в случае обычных схем их сумма по m определяет, очевидно, число условий на коэффициенты. Порядок аппроксимации s достигается, следовательно, при соблюдении

$$K_{ord}^u = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{6}$$

условий. Однако в случае компактных схем следует учитывать, что производные связаны уравнениями продолженной системы. Связи, содержащие производные порядка m , появляются исключительно в результате применения всевозможных вариантов $(m-2)$ -кратного дифференцирования исходного эллиптического уравнения по трем переменным. А их число, очевидно, равно C_m^2 . Следовательно, при данном m

число условий, добавляемых к системе, равно разности числа всех производных и числа связей, т. е.

$$C_{m+2}^2 - C_m^2 = 2m + 1.$$

Их суммирование дает

$$K_{comp}^u = (s + 2)^2 + 1$$

условий аппроксимации с порядком s . Отсюда видно, что в трехмерном пространстве для повышения порядка аппроксимации на каждую единицу требуется добавлять линейно растущее число условий на коэффициенты компактной схемы. Вспомним, что в двумерном случае для повышения порядка аппроксимации на каждую единицу независимо от значения m добавлялось ровно по два условия. Это различие становится понятным, если исследовать ситуацию в пространстве любого числа измерений. Несложный анализ показывает, что в n -мерном пространстве число условий, добавляемых к системе, равно

$$C_{m+2}^{n-1} - C_m^{n-1}.$$

При частном значении $n = 2$ это выражение дает именно двойку.

Опуская анализ зависимости от порядка аппроксимации числа условий, определяющих правую часть компактной схемы, приведем лишь сводные данные для трехмерного эллиптического уравнения. Структура этих данных, представленных в таблице 3, полностью повторяет структуру, принятую в таблице 1.

Таблица 3

Число условий на параметры схем в трехмерном случае							
	1	2	3	4	5	...	s
K_{ord}^u	10	20	35	56	84	...	$(s+2)(s+3)(s+4)/6$
K_{ord}^F	1	1	1	1	1	...	1
K_{comp}^u	-	17	26	37	50	...	$(s+2)^2 + 1$
K_{comp}^F	-	4	10	20	35	...	$s(s+1)(s+2)/6$

5.7. Примеры схем на регулярных сетках. Шеститочечная схема первого порядка аппроксимации заслуживает внимания как наиболее простая. Заметим, что сотовая система ячеек для нее не является единственно возможной. Определенный интерес для простых расчетов на криволинейных сетках представляет шеститочечный шаблон, который получается из искривленного шаблона размера 3×3 разрезанием его по любой из диагоналей и отбрасыванием трех точек выше (или ниже) диагонали. Такая схема ввиду геометрических особенностей шаблона удобна для решения краевых задач в областях, составленных из криволинейных четырехугольников и треугольников. Кроме того, простейшая схема легко расщепляется на одномерные задачи.

Восьмиточечный шаблон компактной схемы второго порядка аппроксимации можно представить себе как шаблон 3×3 неправильной формы, из которого выброшена одна из угловых точек. Соответствующая схема на шаблоне “без угла” по своей геометрии также хорошо подходит к сложным областям с криволинейно-треугольными частями. Схема третьего порядка аппроксимации на плоскости требует привлечения десяти точек. Для упомянутых выше областей возможности выбора геометрии шаблона в приграничных узлах становятся более разнообразными. Например, вблизи границ криволинейных четырехугольников к шаблону 3×3 целесообразно добавить точку со стороны, противоположной границе, а око-

ло косых границ (“гипотенуз криволинейных треугольников”) к восьмиточечному шаблону “без угла” следует добавить по одной точке со стороны обоих ребер, противоположных “срезанному” углу шаблона. При конструировании шаблонов для схем более высокого порядка аппроксимации степеней свободы становится больше.

Заметим, что отсутствие в уравнении члена со смешанной производной ($c = 0$) не снижает числа условий. В частности, простейшая схема и в этом случае требует наличия минимум шести точек, и это обстоятельство согласуется с тем фактом, что для уравнения Пуассона на сетке общего вида не существует аналога пятиточечной схемы “крест.”

В трехмерном пространстве простейшей схемой является схема на десятиточечном шаблоне. Его можно представить в форме искривленной треугольной пирамиды, на каждом из шести ребер которой и в четырех вершинах расположено по одной точке. Компактные схемы второго и третьего порядков аппроксимации в общем случае требуют наличия 17 и 26 точек соответственно. Шаблоны этих схем можно представить как некоторые части пространственного шаблона $3 \times 3 \times 3$ в форме искривленного параллелепипеда. В первом случае из него необходимо выбросить десять точек ($3^3 - 10 = 17$), связанных с одной из шести треугольных пирамид, которые построены на ребрах, исходящих из одной вершины параллелепипеда. Во втором случае достаточно удалить всего одну из угловых точек ($3^3 - 1 = 26$). Приведенные примеры показывают, что шаблоны компактных схем в трехмерном пространстве можно выбрать так, чтобы их геометрические особенности позволяли естественным образом аппроксимировать краевые задачи в областях, составленных из искривленных образов простых многогранников, в частности параллелепипедов и пирамид.

Приведенные таблицы содержат данные о числе уравнений в системах, определяющих параметры схемы. Но в определенном смысле это также данные о необходимом минимуме точек шаблона схемы для достижения заданного порядка точности. Точнее говоря, схема с числом точек шаблона, взятым из приведенных таблиц, при почти любом расположении этих точек и при подходящем выборе коэффициентов схемы будет иметь порядок аппроксимации, соответствующий табличным данным. Однако всегда можно подобрать такое неудачное расположение узлов, при котором декларируемый порядок достигаться не будет. Пример такого шаблона дает множество точек, расположенных на одной прямой. Ясно, что в этом случае ни при каком числе точек шаблона аппроксимации не будет вовсе, так как разложение погрешности не содержит производных по направлению, ортогональному к этой прямой. Аналогичный пример вырожденного шаблона представляет плоский шаблон в пространстве трех переменных.

С другой стороны, порядок аппроксимации может повыситься в сравнении с показанным в таблицах числом условий, если подобрать благоприятное расположение точек. Обычно это проявляется на симметричных в том или ином смысле шаблонах. Механизм повышения точности состоит в автоматическом занулении последующих членов разложения погрешности, происходящем именно ввиду симметрии. Применительно к приведенным данным можно утверждать, что при благоприятном расположении узлов и при заданном порядке аппроксимации число точек шаблона может быть меньше, чем указанное в таблицах число условий на коэффициенты схем.

Примеры известных схем позволяют заметить иерархию в уровнях симметрии шаблонов. В плоском случае это шабло-

ны на ортогональной криволинейной сетке, неравномерной прямоугольной, затем равномерной и, наконец, квадратной. По мере углубления уровня симметрии все более растет порядок (или все более ослабляются требования на размер шаблона). Так например, при двух измерениях на ортогональных равномерных сетках уравнение аппроксимируется с четвертым порядком при девяти точках, а не при двенадцати, как указано в таблице 1. На прямоугольной неравномерной сетке достигается третий порядок аппроксимации уже при девяти точках, тогда как согласно таблице 1 этот случай требует выполнения десяти условий на коэффициенты. Уравнение Пуассона на квадратной сетке аппроксимируется с шестым порядком при девяти точках [6], хотя таблица 1 в общем случае требует выполнения шестнадцати условий.

Задача исследования дополнительных условий на координаты узлов сетки, повышающих порядок аппроксимации, напоминает проблему повышения точности квадратурных формул путем выбора и коэффициентов, и узлов. В самом деле, построенные системы уравнений помимо коэффициентов схемы α_j содержат приращения q_j, w_j . Поэтому порядок системы уравнений, определяющих коэффициенты схем (а вместе с ним и порядок аппроксимации), может быть увеличен, если рассматривать эти приращения как переменные, частично связанные. Дополнительные уравнения системы и будут в таком случае связями для них, а для шаблонов схем они будут своеобразными симметризаторами. Увеличение числа дополнительных связей означает возрастание порядка аппроксимации и одновременно ужесточение требований на приращения q_j, w_j , что и вызывает углубление уровня симметризации шаблона. Подобным образом симметрия в определении узлов гауссовых квадратур позволяет повысить порядок их точности.

Далее, из проведенного анализа совершенно ясно, что при наличии в дифференциальном уравнении слагаемых с младшими производными систему уравнений, определяющую коэффициенты схемы, нужно строить в обратном направлении — от компонент погрешности старших порядков. Первая группа уравнений (5.21) при $m = s + 1$ остается без изменения, но привлечение продолженной системы изменяет коэффициенты разложения погрешности z_k^m при предыдущем значении $m = s$. Последующие группы уравнений при $m = s, s - 1, \dots$ сохраняют форму (5.21), но используют каждый раз линейно преобразованные переменные. Эта цепочка приводит к базовой системе уравнений (5.8), на переменных которой также отражаются все предыдущие преобразования. При небольших порядках эта цепочка построений легко осуществима, но в общем виде формулы получаются очень сложными даже в плоском случае.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Валиуллин А. Н. Схемы повышенной точности для задач математической физики. Новосибирск: НГУ, 1973.

Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.

Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

Пинчук В. И., Шу Ч. В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2000.

Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.

Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003.

Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их приложения в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.

Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1: Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Шайдуров В. В. О повышении точности разностных решений. М.: Наука, 1980.

Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.

Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.

Паасонен Виктор Иванович

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Часть 2. Схемы на неравномерных сетках

Учебное пособие

Редактор *С. В. Исакова*

Подписано в печать 20.12.2007 г.
Формат 60 x 84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 4,25. Тираж 150 экз.
Заказ №

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.
Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.