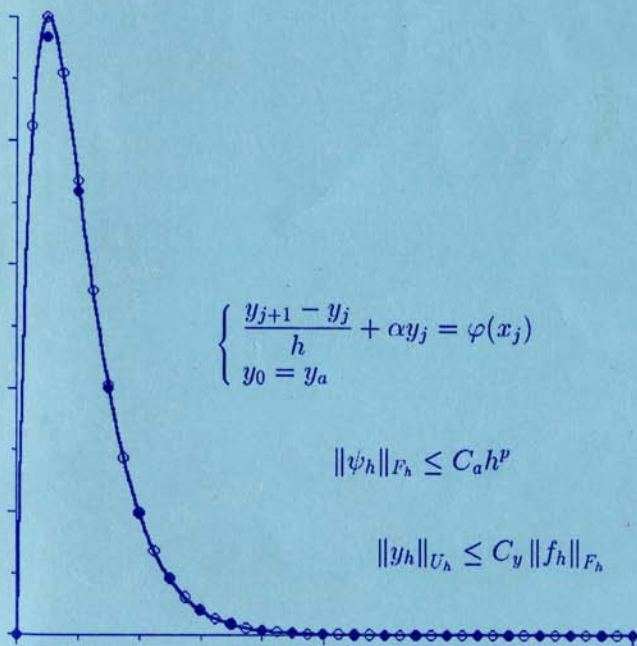


Г. С. Хакимзянов,
С. Г. Черный

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Часть 1



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Механико-математический факультет

Г. С. Хакимзянов, С. Г. Черный

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

**Часть 1. Численные методы решения задачи Коши
для обыкновенных дифференциальных уравнений**

Учебное пособие

Новосибирск
2003

ББК В192.162

УДК 518.61+517.949

Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: В 4 ч.: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2003. Часть 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. 160 с.

Учебное пособие соответствует программе курса лекций «Методы вычислений», который читается на механико-математическом факультете НГУ. В его первой части излагаются основы численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, формулируются задачи для семинарских занятий, приводятся примеры контрольных работ и заданий для практических занятий на ЭВМ.

Пособие предназначено для студентов и преподавателей математических специальностей высших учебных заведений.

Рецензент

кандидат физико-математических наук А. С. Лебедев

©Новосибирский государственный
университет, 2003

Оглавление

		Задачи
Предисловие	4	
§ 1. Метод Эйлера	5	12
§ 2. Методы Рунге—Кутты	13	20
§ 3. Многошаговые методы	20	26
§ 4. Конечно-разностные методы	26	35
§ 5. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной схемой	36	43
§ 6. Сходимость разностной схемы	46	50
§ 7. Устойчивость разностной схемы	51	70
§ 8. Спектральные признаки устойчивости	71	83
§ 9. Исследование устойчивости нелинейных задач	86	89
§ 10. Численное решение жестких систем дифференциальных уравнений	89	96
§ 11. Контрольная работа по теме «Локальная погрешность и аппроксимация»	97	
§ 12. Контрольная работа по теме «Устойчивость конечно-разностных схем»	99	
§ 13. Задания для практических занятий	101	
Ответы, указания, решения	128	
Библиографический список	158	

Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе годового курса лекций, которые авторы читали в течение ряда лет на третьем курсе механико-математического факультета Новосибирского государственного университета. В пособии с единой методической точки зрения изложены теоретические вопросы, материалы семинарских и практических занятий на ЭВМ.

В первой части пособия излагаются основы численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и формулируются задачи по этой теме для семинарских занятий, приводятся примеры контрольных работ и заданий для практических занятий на ЭВМ, уделяется много внимания вопросам программной реализации алгоритмов решения задачи Коши. Эта часть курса осваивается студентами в начале пятого семестра.

Теоретические вопросы изложены достаточно кратко. Для более глубокого изучения рассматриваемых вопросов мы рекомендуем обратиться к учебнику С. К. Годунова и В. С. Рябенького [4], а также к книгам И. С. Березина и Н. П. Жидкова [3], А. А. Самарского [12, 13], Н. С. Бахвалова [2], Г. И. Марчука [8] и учебным пособиям, изданным в НГУ [1, 14].

Каждый параграф сопровождается задачами, которые необходимо решить на семинарских занятиях. Многие задачи снабжены указаниями и подробными решениями. Дополнительные материалы для этих занятий можно найти в задачнике [5].

Грамотное выполнение практических заданий предполагает не только умение разрабатывать программы и представлять результаты расчетов в виде графиков, но и умение правильно интерпретировать эти результаты, что невозможно без усвоения материалов лекций и семинарских занятий. В пособии приводятся примеры заданий, даются основные рекомендации по их выполнению, обсуждаются вопросы, связанные с разработкой программ и представлением результатов. Отметим, что каждое приведенное в пособии задание допускает многочисленные варианты, что позволит преподавателям сформулировать для каждого студента индивидуальное задание. Дополнительные задания можно взять из методического пособия [9].

§ 1. Метод Эйлера

1.1. Некоторые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка — соотношения, связывающие независимую переменную $x \in [a, b]$, неизвестные функции этой переменной $y_i(x)$ и их первые производные $y'_i(x)$. Общий вид системы таких уравнений следующий:

$$F_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x)) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad a \leq x \leq b.$$

Мы будем рассматривать уравнения, разрешенные относительно производных

$$y'_i = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $[a, b]$ называются дифференцируемые функции $y_i = y_i(x)$, обращающие эту систему в тождество на $[a, b]$.

Далее для простоты изложения будем рассматривать одно скалярное уравнение

$$y' = f(x, y). \quad (1.1)$$

Численные методы для этого уравнения легко обобщаются и на системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнение (1.1) имеет бесконечное множество решений, точнее, однопараметрическое семейство решений $y = y(x, C)$, где C — некоторый параметр. Для того чтобы выделить одно из них, нужно задать дополнительное условие. Потребуем, чтобы решение в точке $x = a$ принимало заданное значение:

$$y(a) = y_a. \quad (1.2)$$

Задача о нахождении решения уравнения (1.1), удовлетворяющего начальному условию (1.2), называется задачей Коши.

Известно [11], что если функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b]$ по первому аргументу и удовлетворяет условию Липшица по второму, то задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение.

В дальнейшем мы во всех случаях будем предполагать, что решение рассматриваемой задачи Коши существует и является единственным, а функция $f(x, y)$ является достаточно гладкой, т.е. имеет столько производных по x и y , сколько требуется по ходу изложения. Отметим, что если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные производные по x и y до k -го

порядка, то решение $y(x)$ задачи Коши (1.1), (1.2) имеет непрерывные производные по x до $(k+1)$ -го порядка [11].

1.2. Метод последовательных приближений. Лишь для некоторых дифференциальных уравнений удается выразить их решение в явном виде через элементарные функции. Поэтому нужны методы, позволяющие приближенно вычислять решения произвольных дифференциальных уравнений.

Одним из приближенных методов решения задачи Коши (1.1), (1.2) является *метод последовательных приближений*. Напомним его суть. При некоторых условиях [11] рассматриваемая задача Коши эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_a + \int_a^x f(s, y(s)) ds, \quad a \leq x \leq b. \quad (1.3)$$

На основе этого уравнения (1.3) строится последовательность функций $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$, рекуррентно определяемых по формуле

$$y_n(x) = y_a + \int_a^x f(s, y_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

В качестве $y_0(x)$ может задаваться, например, функция $y_0(x) \equiv y_a$. Можно показать [11], что последовательность функций $y_n(x)$ *равномерно по x сходится* к решению задачи Коши $y(x)$, поэтому в качестве приближенного решения можно взять функцию $y_n(x)$ с достаточно большим номером n .

Однако на практике метод последовательных приближений не используется из-за сложности (или даже невозможности) вычисления интеграла в формуле (1.4). Он играет больше теоретическую роль — применяется при доказательстве существования решения задачи Коши и при доказательстве других теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.3. Метод степенных рядов. Рассмотрим еще один приближенный метод — *метод степенных рядов*. Разобьем отрезок $[a, b]$ на N интервалов точками $x_j = a + jh$, где $h = (b - a)/N$, $j = 0, \dots, N$. Обозначим через y_j — приближенное решение в точке x_j и положим $y_0 = y_a$. Пусть процесс решения с помощью данного метода доведен до некоторой точки x_j , $j > 0$ и требуется найти значение y_{j+1} приближенного решения в точке $x_{j+1} = x_j + h$.

Если решение $y(x)$ задачи Коши (1.1), (1.2) имеет производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно, то для него справедлива формула Тейлора

$$y(x_{j+1}) = y(x_j + h) = \\ = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_j) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(x_j + \xi_j h).$$

Здесь последнее слагаемое есть остаточный член в форме Лагранжа, $0 < \xi_j < 1$. Отбрасывая остаточный член, получаем следующую формулу для вычисления приближенного решения

$$y_{j+1} = y_j + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_j). \quad (1.5)$$

Для окончательной формулировки метода степенных рядов необходимо найти производные в правой части равенства (1.5). Используя уравнение (1.1), имеем

$$y'(x_j) = f(x_j, y(x_j)), \quad (1.6)$$

$$y''(x_j) = \{f_x + ff_y\}(x_j, y(x_j)), \quad (1.7)$$

$$y'''(x_j) = \{f_{xx} + f_x f_y + 2ff_{xy} + ff_y^2 + f^2 f_{yy}\}(x_j, y(x_j)) \quad (1.8)$$

и так далее. Заменяя в этих соотношениях значение $y(x_j)$ точного решения на значение y_j приближенного решения в точке x_j , получаем следующие формулы метода степенных рядов

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j), \quad (1.9)$$

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} \{f_x + ff_y\}(x_j, y_j), \quad (1.10)$$

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} \{f_x + ff_y\}(x_j, y_j) + \\ + \frac{h^3}{6} \{f_{xx} + f_x f_y + 2ff_{xy} + ff_y^2 + f^2 f_{yy}\}(x_j, y_j) \quad (1.11)$$

и так далее. Видно, что метод степенных рядов требует выполнения большого объема аналитической работы, поскольку для применения метода необходимо предварительно получить формулы для частных производных функции f .

Выясним теперь, с какой точностью мы находим приближенное решение. В общем случае мы отбрасываем остаточный член порядка $O(h^{n+1})$. Поэтому если бы в узле x_j мы имели точное равенство $y_j = y(x_j)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши, то погрешность вычисления y_{j+1} была бы равна $O(h^{n+1})$. Эту погрешность будем называть *локальной погрешностью* — ошибкой, с которой определяется y_{j+1} по y_j , если допустить, что по счастливой случайности y_j вычислено точно: $y_j = y(x_j)$. Так, метод степенных рядов (1.9) имеет локальную погрешность $O(h^2)$, метод (1.10) — локальную погрешность $O(h^3)$, а метод (1.11) — $O(h^4)$.

Однако в действительности равенство $y_j = y(x_j)$ не выполняется, так как y_j уже вычислено с погрешностью (за исключением $y_0 = y_a$). Поэтому локальная погрешность является некоторой искусственной характеристикой метода и важнее оценить общую или так называемую *глобальную погрешность метода*. А именно надо оценить величину $\max_j |y_j - y(x_j)|$ при $h \rightarrow 0$.

Такую оценку можно получить следующим образом. На каждом шаге метода мы вносим погрешность $O(h^{n+1})$. Пусть мы сделали N шагов, пройдя весь отрезок $[a, b]$. Тогда суммарная погрешность к концу вычислений будет равна

$$N \cdot O(h^{n+1}) = \frac{b-a}{h} O(h^{n+1}) = O(h^n),$$

т.е. показатель степени h в глобальной погрешности метода будет на единицу меньше, чем в локальной.

1.4. Глобальная погрешность метода Эйлера. Докажем этот факт строго для метода степенных рядов (1.9), называемого *методом Эйлера*, а именно докажем, что *глобальная погрешность метода Эйлера имеет первый порядок по h* .

Пусть точное решение задачи Коши $y(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ ограниченную вторую производную

$$\max_{a \leq x \leq b} |y''(x)| \leq K,$$

а функция $f(x, y)$ имеет ограниченную частную производную по второй переменной:

$$\max_{a \leq x \leq b, |y| < \infty} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq S.$$

Раскладывая точное решение в точке x_{j+1} в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} y(x_{j+1}) &= y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j + \theta_j h) = \\ &= y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) + \frac{h^2}{2}y''(x_j + \theta_j h), \end{aligned}$$

где последнее слагаемое есть остаточный член в форме Лагранжа, $0 < \theta_j < 1$.

Вычитая из полученного равенства равенство (1.9), получим

$$y(x_{j+1}) - y_{j+1} = y(x_j) - y_j + h[f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j)] + \frac{h^2}{2}y''(x_j + \theta_j h). \quad (1.12)$$

По теореме Лагранжа о среднем (о конечных приращениях), имеем

$$f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, \bar{y}_j)(y(x_j) - y_j),$$

где $\bar{y}_j = \omega_j y(x_j) + (1 - \omega_j)y_j$, $0 < \omega_j < 1$.

Обозначим ошибку (погрешность решения) в точке x_j через $\varepsilon_j = y(x_j) - y_j$. Тогда из равенства (1.12) следует

$$\varepsilon_{j+1} = (1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, \bar{y}_j))\varepsilon_j + \frac{h^2}{2}y''(x_j + \theta_j h).$$

Отсюда мы видим, что погрешность решения в точке x_{j+1} складывается из двух ошибок: из локальной погрешности $\frac{h^2}{2}y''(x_j + \theta_j h)$ вычисления y_{j+1} и распространяемой ошибки, которая получается умножением погрешности ε_j решения в точке x_j на число $1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, \bar{y}_j)$.

Из последнего равенства получаем

$$|\varepsilon_{j+1}| \leq (1 + hS)|\varepsilon_j| + Ch^2, \quad C = \frac{1}{2}K. \quad (1.13)$$

Таким образом, получена оценка погрешности текущего шага по локальной погрешности и по погрешности предыдущего шага. Теперь можно сформулировать теорему о точности метода Эйлера.

Теорема. Если функция f имеет ограниченную частную производную по второй переменной и если решение задачи Коши (1.1), (1.2) имеет ограниченную вторую производную, то глобальная погрешность метода Эйлера имеет первый порядок по h .

Доказательство. Покажем, что из неравенства (1.13) вытекает оценка

$$|\varepsilon_m| \leq h \frac{C}{S} (e^{mhS} - 1), \quad 0 \leq m \leq N. \quad (1.14)$$

Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. Пусть $m = 0$, тогда $\varepsilon_0 = y(x_0) - y_0 = y_a - y_a = 0$, т.е. неравенство выполняется. Пусть неравенство выполняется для m -го узла. Тогда

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{m+1}| &\leq (1 + hS)|\varepsilon_m| + Ch^2 \leq (1 + hS)h \frac{C}{S} (e^{mhS} - 1) + Ch^2 = \\ &= h \frac{C}{S} [(1 + hS)(e^{mhS} - 1) + hS] = h \frac{C}{S} [(1 + hS)e^{mhS} - 1] \leq \\ &\leq h \frac{C}{S} \left[\left(1 + hS + \frac{(hS)^2}{2} + \frac{(hS)^3}{6} + \dots \right) e^{mhS} - 1 \right] = \\ &= h \frac{C}{S} [e^{(m+1)hS} - 1] = h \frac{C}{S} [e^{(m+1)hS} - 1], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В силу доказанного получаем неравенство $\max_{0 \leq j \leq N} |y(x_j) - y_j| \leq Mh$, причем постоянная $M = \frac{C}{S} [e^{(b-a)S} - 1]$ не зависит от h . А это означает, что глобальная погрешность или, другими словами, точность метода Эйлера, имеет первый порядок по h . ■

1.5. Методы Эйлера с пересчетом. Рассмотрим еще одну схему метода Эйлера — *модифицированный метод Эйлера (или двушаговый метод Эйлера, или метод Эйлера с пересчетом)* для решения задачи Коши:

$$y' = f(x, y), \quad a < x \leq b. \quad (1.15)$$

$$y(a) = y_a. \quad (1.16)$$

В формуле (1.5) при $n = 2$

$$y_{j+1} = y_j + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) \quad (1.17)$$

заменяем вторую производную разностью

$$y''(x_j) \approx \frac{y'(x_{j+1}) - y'(x_j)}{h}.$$

После этой замены формула (1.17) переписывается так

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (y'(x_j) + y'(x_{j+1}))$$

или

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (f(x_j, y(x_j)) + f(x_{j+1}, y(x_{j+1}))). \quad (1.18)$$

После замены значений точного решения на приближенные значения формула (1.18) примет вид:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})) \quad (1.19)$$

и мы получаем *неявный метод* для вычисления y_{j+1} . Обычно это уравнение неразрешимо в явном виде относительно y_{j+1} .

Модифицированный метод Эйлера — одна из возможных реализаций полученного неявного метода: сначала с помощью метода Эйлера первого порядка вычисляется величина y_{j+1} , а затем она используется в правой части формулы (1.19). В результате получаются следующие формулы модифицированного метода Эйлера:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{j+1} &= y_j + hf(x_j, y_j), \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_j + h, \tilde{y}_{j+1})] \end{aligned} \quad (1.20)$$

или, после исключения \tilde{y} ,

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_j + hf(x_j, y_j))]. \quad (1.21)$$

Выясним, какова локальная погрешность модифицированного метода Эйлера. Представим функцию в последнем слагаемом (1.21) через ее значения и значения ее производных в точке (x_j, y_j) с точностью $O(h^2)$:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f + f + hf_x + hff_y + O(h^2)]$$

или

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} \{f_x + ff_y\}(x_j, y_j) + O(h^3). \quad (1.22)$$

Метод степенных рядов с локальной погрешностью $O(h^3)$ имеет вид (1.10), откуда получаем, что (1.22) и (1.10) совпадают вплоть до членов

порядка $O(h^2)$, т.е. модифицированный метод Эйлера, так же как и метод степенных рядов (1.10), имеет локальную погрешность порядка $O(h^3)$.

Можно показать, что глобальная погрешность модифицированного метода Эйлера будет второго порядка по h (см. задачу 1.8).

Если сравнивать по эффективности метод степенных рядов (1.10) и модифицированный метод Эйлера (1.21), то последний требует меньше вычислительных затрат, так как при его использовании надо вычислять только одну функцию f в двух точках: $f(x_j, y_j)$ и $f(x_{j+1}, y_j + hf(x_j, y_j))$ вместо вычисления значений трех различных функций $f(x_j, y_j)$, $f_x(x_j, y_j)$ и $f_y(x_j, y_j)$ в методе степенных рядов.

Известна еще одна модификация метода Эйлера:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{j+1/2} &= y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j), \\ y_{j+1} &= y_j + hf \left(x_j + \frac{h}{2}, \tilde{y}_{j+1/2} \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

или

$$y_{j+1} = y_j + hf \left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) \right).$$

Локальная погрешность этого метода тоже имеет порядок $O(h^3)$ (см. задачу 1.6), а глобальная — $O(h^2)$.

Итак, модифицированные методы Эйлера более точны по сравнению с обычным методом Эйлера, при этом повышение точности достигается за счет дополнительных вычислений правой части f .

ЗАДАЧИ

1.1. Методом последовательных приближений найти несколько первых приближений решения задачи Коши

$$\begin{aligned} y' &= x^2 - y^2, \quad 0 < x \leq 1, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

1.2. Методом последовательных приближений найти несколько первых приближений решения задачи Коши

$$\begin{aligned} y' &= ay, \quad 0 < x \leq 1, \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

1.3. Методом степенных рядов (1.11) найти приближенное решение задачи Коши (1.24).

1.4. Методом Эйлера приближенно решить задачу Коши (1.24).

1.5. С помощью модифицированного метода Эйлера (1.20) решить задачу Коши (1.24).

1.6. Показать, что модифицированный метод Эйлера (1.23) для задачи Коши (1.15), (1.16) имеет локальную погрешность порядка $O(h^3)$.

1.7. Оценить локальную погрешность метода

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{3}hf(x_j, y_j) + \frac{2}{3}hf\left(x_j + \frac{3}{4}h, y_j + \frac{3}{4}hf(x_j, y_j)\right), \quad (1.25)$$
$$y_0 = y_a, \quad j = 0, \dots, N-1$$

для решения задачи Коши (1.15), (1.16).

1.8. Показать, что модифицированный метод Эйлера (1.20) для задачи Коши (1.15), (1.16) имеет глобальную погрешность порядка $O(h^2)$.

1.9. Оценить локальную и глобальную погрешность метода

$$y_{j+1} = y_j - \frac{3}{2}hf(x_j, y_j) + \frac{5}{2}hf\left(x_j + \frac{1}{5}h, y_j + \frac{1}{5}hf(x_j, y_j)\right),$$
$$y_0 = y_a, \quad j = 0, \dots, N-1$$

для решения задачи Коши (1.15), (1.16).

§ 2. Методы Рунге—Кутты

2.1. Повышение точности модифицированных методов Эйлера было достигнуто за счет дополнительных по сравнению с обычным методом Эйлера вычислений функции $f(x, y)$ из правой части дифференциального уравнения. При этом вычислять частные производные от функции f не требовалось. На этой идее дополнительных вычислений правой части основаны методы Рунге—Кутты высокой точности. В этих методах правая часть дифференциального уравнения вычисляется в нескольких точках, составляется линейная комбинация вычисленных значений, которая и используется при определении значения y_{j+1} . Например, к классу методов Рунге—Кутты относится метод

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2, \\ \varphi_1 &= hf(x_j, y_j), \\ \varphi_2 &= hf(x_j + B_1h, y_j + B_2\varphi_1), \end{aligned} \quad (2.1)$$

в котором правую часть надо вычислять дважды. Поскольку здесь значение y_j уже известно, то можно определить значение φ_1 , а затем по явной формуле вычислить и φ_2 . Выбор постоянных A_1, A_2, B_1, B_2 производится так, чтобы получить наибольшую возможную точность при произвольной гладкой функции $f(x, y)$ и произвольном шаге $h > 0$. Подчеркнем еще раз, что при использовании методов Рунге—Кутты, в отличие от метода степенных рядов, не требуется вычислять производные от функции f .

Оказывается, что модифицированные методы Эйлера тоже можно записать в виде (2.1). Действительно, при $A_1 = A_2 = 1/2, B_1 = B_2 = 1$ имеем метод (1.21), а при $A_1 = 0, A_2 = 1, B_1 = B_2 = 1/2$ — метод (1.23). Поэтому модифицированные методы Эйлера можно назвать и методами Рунге—Кутты второго порядка точности (их глобальная погрешность имеет порядок $O(h^2)$, локальная — $O(h^3)$).

Возможны ли в методе (2.1) другие варианты для коэффициентов? Представим функцию $f(x_j + B_1 h, y_j + B_2 h f_j)$ через ее значения в точке (x_j, y_j) :

$$f(x_j + B_1 h, y_j + B_2 h f_j) = f_j + B_1 h (f_x)_j + B_2 h (f f_y)_j + O(h^2),$$

перепишем формулу метода (2.1):

$$y_{j+1} = y_j + (A_1 + A_2) h f_j + h^2 (A_2 B_1 f_x + A_2 B_2 f f_y)_j + O(h^3)$$

и потребуем совпадения в ней членов первого и второго порядка с соответствующими членами формулы метода степенных рядов (1.10), имеющего локальную погрешность $O(h^3)$. Тогда получим

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ A_2 B_1 = 1/2, \\ A_2 B_2 = 1/2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Поскольку в этой системе 4 неизвестных, а уравнений только 3, то одну неизвестную величину можно выбрать в качестве параметра, например, $A_2 = A \neq 0$, а другие коэффициенты выразить через A :

$$A_1 = 1 - A, \quad B_1 = \frac{1}{2A}, \quad B_2 = \frac{1}{2A}.$$

Тогда метод Рунге—Кутты (2.1) можно переписать так:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + (1 - A)\varphi_1 + A\varphi_2, \quad A = \text{const} \neq 0, \\ \varphi_1 &= hf(x_j, y_j), \\ \varphi_2 &= hf(x_j + \frac{1}{2A}h, y_j + \frac{1}{2A}\varphi_1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Итак, метод Рунге—Кутты (2.3) имеет локальную погрешность порядка по крайней мере $O(h^3)$. Легко показать, что подбором параметра A повысить порядок погрешности невозможно, если функция f произвольна (см. задачу 2.1). Таким образом, максимальный порядок точности, который можно получить из обобщения модифицированных методов Эйлера, пользуясь введенными четырьмя коэффициентами A_1, A_2, B_1, B_2 , равен $O(h^2)$.

Для того чтобы получить методы Рунге—Кутты более высокого порядка точности, необходимо ввести дополнительные коэффициенты и выполнить дополнительные вычисления правой части уравнения. Так, для построения методов Рунге—Кутты с локальной погрешностью четвертого порядка рассмотрим следующую формальную запись:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_3\varphi_3, \\ \varphi_1 &= hf(x_j, y_j), \\ \varphi_2 &= hf(x_j + B_1h, y_j + B_2\varphi_1), \\ \varphi_3 &= hf(x_j + B_3h, y_j + B_4\varphi_1 + B_5\varphi_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для определения коэффициентов представим правые части формул через значения функции f и ее производных в точке (x_j, y_j) :

$$\varphi_1 = hf(x_j, y_j) \equiv hf,$$

$$\varphi_2 = h[f + B_1hf_x + B_2\varphi_1f_y +$$

$$+ \frac{1}{2}(B_1^2h^2f_{xx} + 2B_1hB_2\varphi_1f_{xy} + B_2^2\varphi_1^2f_{yy})] + O(h^4) =$$

$$= hf + h^2(B_1f_x + B_2ff_y) + \frac{h^3}{2}(B_1^2f_{xx} + 2B_1B_2ff_{xy} + B_2^2f^2f_{yy}) + O(h^4),$$

$$\varphi_3 = h\{f + B_3hf_x + (B_4hf + B_5\varphi_2)f_y +$$

$$+ \frac{1}{2}[B_3^2h^2f_{xx} + 2B_3h(B_4hf + B_5\varphi_2)f_{xy} + (B_4hf + B_5\varphi_2)^2f_{yy}]\} + O(h^4) =$$

$$= h\{f + B_3hf_x + [B_4hf + B_5hf + B_5h^2(B_1f_x + B_2ff_y)]f_y +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[B_3^2 h^2 f_{xx} + 2B_3 h (B_4 h f + B_5 h f) f_{xy} + (B_4 h f + B_5 h f)^2 f_{yy} \right] \} + O(h^4) = \\
& = h f + h^2 [B_3 f_x + (B_4 + B_5) f f_y] + \frac{h^3}{2} [2B_5 (B_1 f_x + B_2 f f_y) f_y + B_3^2 f_{xx} + \\
& \quad + 2B_3 (B_4 + B_5) f f_{xy} + (B_4 + B_5)^2 f^2 f_{yy}] + O(h^4).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& y_{j+1} = y_j + h(A_1 + A_2 + A_3)f(x_j, y_j) + \\
& + h^2 \{ (A_2 B_1 + A_3 B_3) f_x + [A_2 B_2 + A_3 (B_4 + B_5)] f f_y \} (x_j, y_j) + \\
& \quad + \frac{h^3}{2} [(A_2 B_1^2 + A_3 B_3^2) f_{xx} + 2A_3 B_1 B_5 f_x f_y + \\
& \quad + 2(A_2 B_1 B_2 + A_3 B_3 (B_4 + B_5)) f f_{xy} + 2A_3 B_2 B_5 f f_y^2 + \\
& \quad + (A_2 B_2^2 + A_3 (B_4 + B_5)^2) f^2 f_{yy}] (x_j, y_j) + O(h^4).
\end{aligned}$$

Теперь потребуем совпадения членов первого, второго и третьего порядка по h с соответствующими членами формулы (1.11) метода степенных рядов, имеющего локальную погрешность порядка $O(h^4)$. Для этого достаточно приравнять коэффициенты при степенях h (вплоть до h^3). В результате получим систему уравнений для восьми неизвестных коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 = 1, \\ A_2 B_1 + A_3 B_3 = 1/2, \\ A_2 B_2 + A_3 (B_4 + B_5) = 1/2, \\ A_2 B_1^2 + A_3 B_3^2 = 1/3, \\ A_3 B_1 B_5 = 1/6, \\ A_2 B_1 B_2 + A_3 B_3 (B_4 + B_5) = 1/3, \\ A_3 B_2 B_5 = 1/6, \\ A_2 B_2^2 + A_3 (B_4 + B_5)^2 = 1/3. \end{array} \right.$$

После проведения эквивалентных преобразований получаем систему из шести уравнений для восьми искомых коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 = 1, \\ A_2 B_1 + A_3 B_3 = 1/2, \\ A_2 B_1^2 + A_3 B_3^2 = 1/3, \\ A_3 B_1 B_5 = 1/6, \\ B_2 = B_1, \\ B_4 + B_5 = B_3. \end{array} \right. \quad (2,5)$$

Эта система имеет неединственное решение. Возьмем $B_1 = 1/2$, $B_3 = 1$. Тогда система (2.5) будет иметь решение

$$A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{2}{3}, A_3 = \frac{1}{6}, B_1 = B_2 = \frac{1}{2}, B_3 = 1, B_4 = -1, B_5 = 2$$

и метод Рунге—Кутты (2.4) примет вид:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{6}(\varphi_1 + 4\varphi_2 + \varphi_3), \\ \varphi_1 &= hf(x_j, y_j), \\ \varphi_2 &= hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{\varphi_1}{2}\right), \\ \varphi_3 &= hf(x_j + h, y_j - \varphi_1 + 2\varphi_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для другого решения системы (2.5)

$$A_1 = \frac{1}{4}, A_2 = 0, A_3 = \frac{3}{4}, B_1 = B_2 = \frac{1}{3}, B_3 = \frac{2}{3}, B_4 = 0, B_5 = \frac{2}{3}$$

формулы метода Рунге—Кутты будут такими:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{4}(\varphi_1 + 3\varphi_3), \\ \varphi_1 &= hf(x_j, y_j), \\ \varphi_2 &= hf\left(x_j + \frac{h}{3}, y_j + \frac{\varphi_1}{3}\right), \\ \varphi_3 &= hf\left(x_j + \frac{2}{3}h, y_j + \frac{2}{3}\varphi_2\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Приведем формулы метода Рунге—Кутты, имеющего локальную погрешность порядка $O(h^5)$, а глобальную — порядка $O(h^4)$:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{6}(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 + \varphi_4), \\ \varphi_1 &= hf(x_j, y_j), \\ \varphi_2 &= hf(x_j + h/2, y_j + \varphi_1/2), \\ \varphi_3 &= hf(x_j + h/2, y_j + \varphi_2/2), \\ \varphi_4 &= hf(x_j + h, y_j + \varphi_3). \end{aligned} \quad (2.8)$$

При использовании этого метода для вычисления y_{j+1} надо четыре раза вычислять правую часть. Поэтому такой метод называется *четырёхстадийным* методом Рунге—Кутты. Соответственно, формулы (2.1) определяют двухстадийный метод, а (2.4) — трёхстадийный метод Рунге—Кутты.

В общем случае формулы p -стадийного метода Рунге—Кутты имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
 y_{j+1} &= y_j + A_1\varphi_1 + \cdots + A_p\varphi_p, \\
 \varphi_1 &= hf(x_j, y_j), \\
 \varphi_2 &= hf(x_j + B_2h, y_j + B_{21}\varphi_1), \\
 \varphi_3 &= hf(x_j + B_3h, y_j + B_{31}\varphi_1 + B_{32}\varphi_2), \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 \varphi_p &= hf(x_j + B_ph, y_j + B_{p1}\varphi_1 + \cdots + B_{p,p-1}\varphi_{p-1}).
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Коэффициенты метода находятся на основе требования получения наименьшей для данного p локальной погрешности.

Рассмотренные нами методы Рунге—Кутты относятся к классу так называемых *одношаговых методов*. *Одношаговыми* называются методы решения задачи Коши (1.15), (1.16), в которых для нахождения решения в точке x_{j+1} , $j = 0, \dots, N - 1$ используется только значение y_j приближенного решения в предыдущей точке x_j . В общем виде одношаговые методы можно записать так:

$$y_{j+1} = Y(x_j, y_j). \tag{2.10}$$

2.2. Правило Рунге для контроля погрешности одношаговых методов. При проведении вычислений весьма желательна информация о величине погрешности, вносимой на каждом шаге. С одной стороны, мы должны следить, чтобы погрешность не была слишком большой, чтобы в результате не получить решение с неудовлетворяющей нас точностью. С другой стороны, необходимо стремиться к уменьшению объема вычислительной работы.

Один из способов контроля точности вычислений заключается в контроле локальной погрешности. Если локальная погрешность излишне мала, шаг h можно увеличить, если велика — уменьшить. Но как оценить локальную погрешность, если точное решение $y = y(x)$ неизвестно?

Проведем асимптотическую оценку погрешности приближенного решения на шаге. Будем рассуждать так. Пусть $y_{h,j+1}$ — приближенное решение в точке x_{j+1} , вычисленное, например, методом Рунге—Кутты p -го порядка точности. Тогда справедливо равенство

$$y(x_{j+1}) = y_{h,j+1} + \nu(x_j, y_j)h^{p+1} + O(h^{p+2}), \tag{2.11}$$

где $\nu(x_j, y_j)$ — не зависящий от h коэффициент *главного члена локальной погрешности*, $y = y(x)$ — точное решение задачи Коши.

Можно показать [1, 2], что при переходе от x_j к x_{j+1} за два шага с величиной шага $h/2$ получается следующий аналог выражения (2.11):

$$y(x_{j+1}) = y_{\frac{h}{2},j+1} + 2\nu(x_j, y_j) \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + O(h^{p+2}). \quad (2.12)$$

Вычитая из (2.12) равенство (2.11), получим

$$y_{\frac{h}{2},j+1} - y_{h,j+1} = \nu(x_j, y_j) h^{p+1} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + O(h^{p+2})$$

или

$$\nu(x_j, y_j) h^{p+1} = \frac{2^p}{2^p - 1} \left[y_{\frac{h}{2},j+1} - y_{h,j+1} \right] + O(h^{p+2}). \quad (2.13)$$

Левая часть этого выражения, как следует из (2.11), есть не что иное, как главный член локальной погрешности данного метода

$$y(x_{j+1}) - y_{h,j+1} \approx \frac{2^p}{2^p - 1} \left[y_{\frac{h}{2},j+1} - y_{h,j+1} \right], \quad (2.14)$$

т.е. по решениям, полученным с двумя разными шагами, мы можем оценить локальную погрешность в данном узле. Такая оценка и называется *правилом Рунге*.

Расчет с двумя разными шагами можно использовать не только для определения локальной погрешности решения, но и для повышения точности приближенного решения. В самом деле, запишем формулу (2.12) с учетом равенства (2.13)

$$y(x_{j+1}) = y_{\frac{h}{2},j+1} + \frac{y_{\frac{h}{2},j+1} - y_{h,j+1}}{2^p - 1} + O(h^{p+2}). \quad (2.15)$$

Тогда численный метод

$$y_{j+1} = y_{\frac{h}{2},j+1} + \frac{y_{\frac{h}{2},j+1} - y_{h,j+1}}{2^p - 1}. \quad (2.16)$$

имеет уже локальную погрешность $y(x_{j+1}) - y_{j+1}$ порядка $O(h^{p+2})$, в то время как для исходного метода она была порядка $O(h^{p+1})$. Формулу (2.16) будем называть *правилом увеличения точности приближенного решения* на один порядок по h .

Отметим, что сравнение результатов расчетов с различными шагами является основным способом для получения суждения о величине реальной погрешности и используется довольно часто.

ЗАДАЧИ

2.1. Вывести условия на параметр A и функцию $f(x, y)$, при выполнении которых схема Рунге—Кутты (2.3) будет иметь локальную погрешность порядка $O(h^4)$.

2.2. Метод Рунге—Кутты (2.6) имеет локальную погрешность порядка $O(h^4)$. Показать, что если правая часть $f(x, y)$ не зависит от y , т.е. $f_y \equiv 0$, то локальная погрешность метода (2.6) имеет порядок $O(h^5)$.

2.3. Вывести формулы метода Рунге—Кутты (2.7), имеющего локальную погрешность порядка $O(h^4)$.

2.4. Показать, что схема Рунге—Кутты (2.8) имеет локальную погрешность порядка $O(h^5)$.

2.5. Показать справедливость формулы (2.14) для метода Эйлера.

2.6. Показать справедливость формулы (2.14) для модифицированного метода Эйлера (1.20).

§ 3. Многошаговые методы

3.1. Перейдем теперь к рассмотрению *многошаговых* методов. Пусть в точках x_0, x_1, \dots, x_j приближенное решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad a < x \leq b, \quad (3.1)$$

$$y(a) = y_a. \quad (3.2)$$

уже найдено и требуется определить y_{j+1} в точке x_{j+1} . *Многошаговыми* будем называть методы, расчетная формула которых может быть записана в виде

$$y_{j+1} = Y(x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-M}, y_j, y_{j-1}, \dots, y_{j-M}) \quad (3.3)$$

для *явных* $(M + 1)$ -шаговых методов и в виде

$$y_{j+1} = Y(x_{j+1}, x_j, \dots, x_{j-M}, y_{j+1}, y_j, \dots, y_{j-M}) \quad (3.4)$$

для *неявных* $(M + 1)$ -шаговых методов, где $M > 0$ (случай $M = 0$ не рассматриваем, поскольку при $M = 0$ методы (3.3) и (3.4) будут одношаговыми).

Для построения многошаговых методов можно поступать следующим образом. Проинтегрируем уравнение (3.1) на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$

$$y(x_{j+1}) - y(x_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx,$$

или

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} F(x) dx,$$

где $F(x) = f(x, y(x))$. Далее заменим неизвестную подынтегральную функцию $F(x)$ интерполяционным полиномом, например, полиномом Лагранжа, построенным по узлам $x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-M}$ для явных методов и по узлам $x_{j+1}, x_j, \dots, x_{j-M}$ — для неявных:

$$F(x) \approx L_M(x), \quad L_M(x_k) = F(x_k) = f_k \equiv f(x_k, y_k),$$

где $k = j, j-1, \dots, j-M$ для явных методов и $k = j+1, j, \dots, j-M$ — для неявных.

После такой замены приходим к общей формуле многошаговых методов Адамса:

$$y_{j+1} = y_j + \int_{x_j}^{x_{j+1}} L_M(x) dx. \quad (3.5)$$

Конкретные методы получаются после вычисления коэффициентов интерполяционного полинома и интеграла в (3.5).

3.2. Явные методы Адамса. Выпишем сначала формулы некоторых явных многошаговых методов Адамса. Для явных $(M+1)$ -шаговых методов полином Лагранжа имеет степень M и записывается так:

$$L_M(x) = \sum_{k=j}^{j-M} f_k \frac{(x-x_j) \cdots (x-x_{k+1})(x-x_{k-1}) \cdots (x-x_{j-M})}{(x_k-x_j) \cdots (x_k-x_{k+1})(x_k-x_{k-1}) \cdots (x_k-x_{j-M})}.$$

При равномерном разбиении отрезка $[a, b]$ узлами $x_j = a + hj$, $h = (b-a)/N$ имеем для $M=1$:

$$L_1(x) = f_j \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} + f_{j-1} \frac{x-x_j}{x_{j-1}-x_j} = \frac{1}{h} [(x-x_{j-1})f_j - (x-x_j)f_{j-1}].$$

Подставляя это выражение в формулу (3.5), получим:

$$\begin{aligned}
 y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [(x - x_{j-1})f_j - (x - x_j)f_{j-1}] dx = \\
 &= y_j + \frac{1}{h} \left\{ f_j \left[\left(\frac{x_{j+1}^2}{2} - \frac{x_j^2}{2} \right) - x_{j-1}(x_{j+1} - x_j) \right] - \right. \\
 &\left. - f_{j-1} \left[\left(\frac{x_{j+1}^2}{2} - \frac{x_j^2}{2} \right) - x_j(x_{j+1} - x_j) \right] \right\} = y_j + \frac{1}{2} (3hf_j - hf_{j-1}),
 \end{aligned}$$

поэтому формула двухшагового ($M = 1$) явного метода Адамса имеет вид

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (3f_j - f_{j-1}). \quad (3.6)$$

Совершенно аналогично можно вывести формулы других явных методов Адамса. Для трехшагового метода Адамса ($M = 2$) получаем

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12} (23f_j - 16f_{j-1} + 5f_{j-2}), \quad (3.7)$$

а формула четырехшагового метода ($M = 3$) выглядит так:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24} (55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3}). \quad (3.8)$$

На основании оценок интерполяционной формулы Лагранжа можно показать, что для данного M глобальная погрешность метода Адамса есть $O(h^{M+1})$ [1, 3].

Сравнивая одношаговые методы Рунге—Кутты p -го порядка точности с явными методами Адамса того же порядка, можно отметить следующие их отличительные особенности:

— метод Рунге—Кутты p -го порядка точности требует вычисления функции $f(x, y)$ по крайней мере p раз, метод Адамса на каждом шаге требует вычисления функции f дополнительно к имеющимся значениям только один раз;

— метод Рунге—Кутты может быть использован для вычисления решения в первых узлах после начального, метод Адамса p -го порядка требует для начала счета значения решения в первых p узлах (включая начальные данные);

— при использовании метода Рунге—Кутты можно изменять шаг интегрирования h на каждом шаге расчета, в методе Адамса для этого потребуются применять другие формулы, специально полученные для неравномерного разбиения отрезка $[a, b]$.

3.3. Неявные методы Адамса. В неявных методах степень полинома больше, она равна $M + 1$. Теперь выражение для полинома имеет вид

$$L_M(x) = \sum_{k=j+1}^{j-M} f_k \frac{(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_{k+1})(x - x_{k-1}) \cdots (x - x_{j-M})}{(x_k - x_{j+1}) \cdots (x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k-1}) \cdots (x_k - x_{j-M})}.$$

Например, при $M = 1$ полином Лагранжа строится по узлам x_{j+1} , x_j , x_{j-1} , причем $L_1(x_k) = f_k \equiv f(x_k, y_k)$, где $k = j - 1, j, j + 1$:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= f_{j+1} \frac{(x - x_j)(x - x_{j-1})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j-1})} + \\ &+ f_j \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j-1})} + f_{j-1} \frac{(x - x_{j+1})(x - x_j)}{(x_{j-1} - x_{j+1})(x_{j-1} - x_j)} = \\ &= \frac{1}{2h^2} [(x - x_j)(x - x_{j-1})f_{j+1} - 2(x - x_{j+1})(x - x_{j-1})f_j + \\ &\quad + (x - x_{j+1})(x - x_j)f_{j-1}]. \end{aligned}$$

Подставляя $L_1(x)$ в формулу (3.5), получим формулу двухшагового неявного метода Адамса

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{12} (5f_{j+1} + 8f_j - f_{j-1}). \quad (3.9)$$

Глобальная погрешность этого метода равна $O(h^3)$ [3].

Аналогично можно получить формулы неявного метода Адамса и для $M = 2, 3, \dots$. Например, при $M = 2$ получается такая формула:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24} (9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2}). \quad (3.10)$$

В общем случае глобальная погрешность неявного метода равна $O(h^{M+2})$ [3]. Неявные методы Адамса несколько точнее явных методов того же порядка, так как у них меньше коэффициент при степени

h^p в выражении для ошибки. Причина этого в том, что в неявных методах для определения f на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ используется интерполяция, а в явных — экстраполяция, которая всегда менее точна, чем интерполяция.

3.4. Отметим, что реализация неявных многошаговых методов сложнее, чем явных, поскольку формула (3.4), в отличие от явного метода (3.3), не является явной формулой для вычисления y_{j+1} , а представляет собой уравнение, в общем случае нелинейное, которое должно быть разрешено относительно y_{j+1} .

В качестве примера рассмотрим реализацию неявного метода Адамса четвертого порядка (3.10). Вначале с использованием начального условия (3.2) методом Рунге—Кутты четвертого порядка вычисляются значения функции y_j в узлах сетки x_1, x_2 и x_3 . В узлах $x_j, j \geq 4$ расчет осуществляется по формуле (3.10) с помощью итерационного метода. Приближенное решение на n -ой итерации будем обозначать через y_{j+1}^n , а начальное приближение для итерационного метода вычислим по явному методу Адамса четвертого порядка (3.8):

$$y_{j+1}^0 = y_j + \frac{h}{24} (55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3}). \quad (3.11)$$

Этот этап вычислений называется *прогнозом*. На втором этапе, называемом *коррекцией*, производится итерационное уточнение по формулам (3.10) значения, полученного на этапе прогноза. Здесь могут использоваться различные итерационные процессы. Наиболее популярными являются метод Ньютона и метод последовательных приближений. При применении последнего шаг коррекции выглядит так:

$$y_{j+1}^n = y_j + \frac{h}{24} (9f(x_{j+1}, y_{j+1}^{n-1}) + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

Итерационный процесс прекращается при выполнении условия

$$|y_{j+1}^n - y_{j+1}^{n-1}| < \varepsilon \quad (3.13)$$

для некоторого малого положительного ε . После окончания итераций полагается

$$y_{j+1} = y_{j+1}^n.$$

Рассмотренный алгоритм называется *методом прогноза — коррекции*.

Сходится ли построенный итерационный процесс в том смысле, что существует ли n , при котором условие (3.13) будет выполнено? Ответ на этот вопрос дает теорема 3.1.

Теорема 3.1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по переменной y и

$$\max_{x, y} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M < \infty. \quad (3.14)$$

Тогда выполнение условия

$$h < \frac{8}{3M} \quad (3.15)$$

достаточно для сходимости метода прогноза - коррекции (3.11), (3.12).

Доказательство. Наряду с итерационной формулой (3.12) запишем еще одну для следующей итерации:

$$y_{j+1}^{n+1} = y_j + \frac{h}{24} (9f(x_{j+1}, y_{j+1}^n) + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2})$$

и вычтем из нее предыдущую (3.12):

$$y_{j+1}^{n+1} - y_{j+1}^n = \frac{3h}{8} [f(x_{j+1}, y_{j+1}^n) - f(x_{j+1}, y_{j+1}^{n-1})].$$

Из теоремы о среднем следует, что

$$y_{j+1}^{n+1} - y_{j+1}^n = \frac{3h}{8} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot [y_{j+1}^n - y_{j+1}^{n-1}],$$

при этом производная $\partial f/\partial y$ вычисляется при $x = x_{j+1}$ и некотором y , лежащем между y_{j+1}^{n-1} и y_{j+1}^n .

С учетом условия (3.14) получим

$$\begin{aligned} |y_{j+1}^{n+1} - y_{j+1}^n| &\leq \frac{3h}{8} M |y_{j+1}^n - y_{j+1}^{n-1}| \leq \\ &\leq \left(\frac{3h}{8} M\right)^2 |y_{j+1}^{n-1} - y_{j+1}^{n-2}| \leq \dots \leq \left(\frac{3h}{8} M\right)^n |y_{j+1}^1 - y_{j+1}^0|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если величина шага h выбирается так, чтобы удовлетворялось условие (3.15), то разность между последовательными скорректированными значениями стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и при некотором n условие (3.13) будет выполнено. ■

ЗАДАЧИ

3.1. Вывести формулу (3.7) явного метода Адамса третьего порядка точности.

3.2. Вывести формулу (3.9) неявного метода Адамса третьего порядка точности.

3.3. При каком условии на шаг h итерационный метод прогноза – коррекции для неявного двухшагового метода Адамса (3.9) сходится?

§ 4. Конечно-разностные методы

Эти методы являются наиболее универсальными как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Мы начнем знакомство с основными понятиями конечно-разностных методов на примере задачи Коши (3.1), (3.2) для обыкновенного дифференциального уравнения. Затем рассмотрим конечно-разностные методы для более сложных задач.

4.1. Разностные уравнения. Первое, что мы делаем при построении конечно-разностного метода, это заменяем область $[a, b]$ непрерывного изменения аргумента x дискретным набором точек, называемым *расчетной сеткой*. В случае рассматриваемой сейчас задачи Коши сеткой будет последовательность точек x_j на отрезке $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{j-1} < x_j < \dots < x_N = b. \quad (4.1)$$

Точки сетки называются *узлами*. Расстояние между двумя соседними узлами сетки называется *шагом сетки*:

$$h_j = x_j - x_{j-1} > 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Сетка называется *равномерной*, если все шаги равны между собой:

$$h_j \equiv h = \frac{b-a}{N}, \quad j = 1, \dots, N.$$

В противном случае сетка называется *неравномерной*. Для равномерной сетки координаты узлов вычисляются по формуле

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, \dots, N.$$

Равномерную сетку, соответствующую конкретному шагу h , будем обозначать через $\bar{\omega}_h$.

Функцию, областью определения которой является сетка, будем называть *сеточной функцией*. Для сеточных функций будет использоваться обозначение y_h . Когда надо будет указывать значение сеточной функции в конкретном узле x_j , то будем пользоваться обозначением $y_{h,j}$ или более кратким обозначением y_j .

Значения сеточной функции y_h в узлах сетки можно рассматривать как компоненты вектора $y_h = (y_0, y_1, \dots, y_N)$, являющегося элементом $(N+1)$ -мерного линейного пространства сеточных функций U_h . С помощью сеточной функции $y_h \in U_h$ мы приближаем функцию непрерывного аргумента $y(x)$, являющуюся элементом некоторого функционального пространства U .

Далее нужно получить уравнение для нахождения значений y_j . Один из способов следует из определения производной:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

и состоит в приближенной замене производной *конечной разностью*:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_j} \approx \frac{y_{j+1} - y_j}{h}.$$

Правую часть уравнения (3.1) в узле x_j положим равной

$$f(x, y)|_{x=x_j} = f(x_j, y_j).$$

В результате получим *разностное уравнение*

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j) \quad (4.2)$$

для каждого узла x_j , $j = 0, \dots, N-1$, а в совокупности для всех узлов — *систему разностных уравнений*. Замыкая эту систему начальным условием

$$y_0 = y_a, \quad (4.3)$$

мы получаем *разностную схему* (или *разностную задачу*) для нахождения приближенного решения y_h :

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} &= f(x_j, y_j), \quad j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Возникает вопрос о единственности способа замены производной и правой части уравнения (3.1). Оказывается, можно предложить очень много способов таких приближенных замен. Например, вместо разностного уравнения (4.2) и начального условия (4.3) можно использовать следующие:

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} &= f(x_j, y_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_1 &= y_a. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отметим, что для выделения единственного решения разностного уравнения (4.2) достаточно задать значение y_j в одном узле. Такие уравнения называются *разностными уравнениями первого порядка*. Для выделения единственного решения разностного уравнения схемы (4.5) нужно задать значения решения в двух последовательных узлах. Поэтому такие уравнения называются *разностными уравнениями второго порядка*. Пример схемы (4.5) для решения задачи (3.1), (3.2) показывает, что порядок разностного уравнения может быть *больше* порядка дифференциального уравнения. В этом примере дифференциальное уравнение имеет первый порядок и для него мы задаем только одно начальное условие, а соответствующее ему разностное уравнение — второй порядок, и для его решения мы задаем два начальных условия: $y_0 = y_a$ и $y_1 = y_a$.

Приведем еще один пример схемы для сеточной функции y_h :

$$\begin{aligned} \frac{-3y_j + 4y_{j+1} - y_{j+2}}{2h} &= f(x_j, y_j), \quad j = 0, \dots, N-2, \\ y_0 &= y_a, \\ y_1 &= y_a. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Как видим, одним из источников многообразия разностных уравнений является неединственность замены производной конечной разностью. В случае (4.2), чтобы аппроксимировать (приближать) производную y' в узле x_j , мы взяли так называемую *двухточечную направленную вперед разность*, во втором случае (4.5) — *центральный разность*, а в случае (4.6) — *трехточечную направленную вперед разность*.

В каждом из рассмотренных случаев к фиксированному узлу сетки x_j , в котором мы приближаем уравнение, добавляются несколько соседних узлов. Взаимное расположение узлов сетки, значения сеточных функций в которых входят в разностное уравнение, называется *шабло-*

ном разностного уравнения. Шаблоны разностных уравнений позволяют отличать одно уравнение от другого и характеризовать эти уравнения.

Итак, при переходе от дифференциального уравнения к разностному уравнению возможны различные способы приближения производной. Рассмотрим подробнее эти способы и выясним, какую погрешность мы при этом вносим.

4.2. Локальная аппроксимация дифференциального оператора. Далее будет использоваться *операторная форма* записи дифференциального оператора. Например, если в дифференциальное уравнение входит лишь производная y' , то ее будем записывать в следующем операторном виде:

$$Ly \equiv \frac{dy}{dx}. \quad (4.7)$$

Таким образом, L — линейный дифференциальный оператор, действующий на функцию $y = y(x)$, дифференцируемую на $[a, b]$. Операторная запись позволит перенести на более сложные обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными те понятия, которые мы введем для производной первого порядка.

Заменяя входящую в Ly производную разностным отношением, мы получим вместо Ly разностное выражение, которое будем (аналогично дифференциальному оператору) символически записывать в виде $L_h y_h$. Значение сеточной функции $L_h y_h$ в фиксированном узле x_j будем обозначать через $L_h y_{h,j}$. Мы уже использовали следующие *разностные операторы*:

$$L_h y_{h,j} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h}, \quad (4.8)$$

$$L_h y_{h,j} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}, \quad (4.9)$$

$$L_h y_{h,j} = \frac{-3y_j + 4y_{j+1} - y_{j+2}}{2h}. \quad (4.10)$$

Значение $L_h y_{h,j}$ разностного оператора в фиксированном узле x_j представляет собой линейную комбинацию значений сеточной функции y_h на шаблоне Π_j разностного оператора в узле x_j :

$$L_h y_{h,j} = \sum_{x_i \in \Pi_j} \beta_i y_i. \quad (4.11)$$

Приближенная замена дифференциального оператора L разностным оператором L_h называется *аппроксимацией дифференциального оператора разностным оператором*. Когда мы хотим построить разностный оператор в фиксированном узле x_j , мы должны сначала выбрать шаблон. Но уже для первой производной мы выписали несколько разностных операторов (4.8) — (4.10), т.е. выбор шаблона неоднозначен. Возникает вопрос: какую ошибку мы допускаем, используя ту или иную разностную аппроксимацию и можем ли мы аппроксимировать с заранее заданной сколь угодно малой погрешностью. Чтобы это было возможно, естественно потребовать, чтобы $L_h y_h \rightarrow Ly$ при $h \rightarrow 0$. Таким образом, нам важно оценить близость $L_h y_h$ к Ly . Но как это сделать, если эти функции принадлежат разным пространствам: $L_h y_h$ — сеточная функция, а Ly — функция непрерывного аргумента x ?

Для оценки близости функций из разных пространств введем оператор проектирования, с помощью которого будем отображать U на U_h

$$(\)_h : U \rightarrow U_h,$$

т.е. установим правило, по которому каждому элементу $y \in U$ сопоставляется определенный элемент $y_h \in U_h$. В результате проектирования функции $y \in U$ получится некоторая сеточная функция, которую будем обозначать $(y)_h$. Например, если $y(x)$ — непрерывная функция, то в качестве $(y)_h$ можно взять сеточную функцию, совпадающую с $y(x)$ в узлах сетки

$$(y)_{h,j} = y(x_j). \quad (4.12)$$

Однако совсем не обязательно, чтобы получаемая при проектировании сеточная функция совпадала в узлах сетки с функцией $y(x)$. Например, можно определить значение проекции $(y)_{h,j}$ по формуле

$$(y)_{h,j} = \frac{1}{2h} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} y(x) dx, \quad (4.13)$$

т.е. как интегральное среднее значение $y(x)$ по некоторой окрестности данного узла x_j . Такой способ установления соответствия удобен в случае, когда $y(x)$ не является непрерывной функцией, но известно, что интеграл от нее по любому отрезку существует. В дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать, что $y(x)$ — непрерывная функция, а под оператором проектирования будем понимать оператор, определенный в (4.12).

Для оценки ошибки, которую мы допускаем, используя ту или иную разностную аппроксимацию, рассмотрим разность

$$\psi_h = L_h(y)_h - (Ly)_h.$$

Определение. Сеточная функция ψ_h называется погрешностью аппроксимации дифференциального оператора L разностным L_h на функции $y(x)$.

Функция $y(x)$ в определении погрешности аппроксимации должна быть достаточно гладкой. Согласно определению, в разностный оператор подставляется проекция гладкой функции и из результата вычитается проекция функции Ly .

Определение. Оператор L_h локально аппроксимирует в узле x_j оператор L на функции $y(x)$ с порядком p , если существуют такие положительные константы \tilde{h} и C , что для всех $h \leq \tilde{h}$ выполняется неравенство

$$\left| (L_h(y)_h - (Ly)_h)_{x=x_j} \right| \leq Ch^p. \quad (4.14)$$

Определение. Погрешность аппроксимации в узле x_j имеет порядок $O(h^p)$, если

$$\psi_{h,j} = O(h^p). \quad (4.15)$$

Пример 4.1. С каким порядком разностный оператор (4.8) аппроксимирует в узле x_j дифференциальный оператор (4.7)?

Решение. Так как функция $y(x)$ в определении погрешности аппроксимации является достаточно гладкой, то ее можно разложить в ряд Тейлора, поэтому для погрешности аппроксимации в узле x_j получим

$$\begin{aligned} \psi_{h,j} &= (L_h(y)_h - (Ly)_h)_j = \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} - y'(x_j) = \\ &= \frac{y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + O(h^3) - y(x_j)}{h} - y'(x_j) = \\ &= y'(x_j) + O(h) - y'(x_j) = O(h). \end{aligned}$$

Таким образом, порядок локальной аппроксимации — первый.

Мы определили порядок погрешности аппроксимации, но не оценили величину константы C в неравенстве (4.14), которое для рассматриваемого примера имеет вид $|\psi_{h,j}| \leq Ch$. Оценку можно получить, если иметь больше информации о функции $y(x)$. Попробуем это сделать,

применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned}\psi_{h,j} &= \frac{y(x_j + h) - y(x_j)}{h} - y'(x_j) = \\ &= \frac{y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j + \xi_j h) - y(x_j)}{h} - y'(x_j) = \frac{1}{2}y''(x_j + \xi_j h)h.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$C = \frac{1}{2} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |y''(x)|.$$

Итак, если известна оценка для второй производной функции $y(x)$, то можно оценить ошибку (погрешность аппроксимации), с которой мы приближаем дифференциальный оператор разностным. ■

Пример 4.2. С каким порядком разностный оператор (4.9) аппроксимирует дифференциальный оператор (4.7) в узле x_j ?

Решение.

$$\begin{aligned}\psi_{h,j} &= (L_h(y))_h - (Ly)_h = \frac{y(x_j + h) - y(x_j - h)}{2h} - y'(x_j) = \\ &= \frac{1}{2h} \left\{ y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \frac{h^3}{6}y'''(x_j + \xi^+ h) - \right. \\ &\quad \left. - y(x_j) + hy'(x_j) - \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \frac{h^3}{6}y'''(x_j - \xi^- h) \right\} - y'(x_j) = \\ &= \frac{h^2}{12} [y'''(x_j + \xi^+ h) + y'''(x_j - \xi^- h)],\end{aligned}$$

где $\xi^+, \xi^- \in (0, 1)$. Таким образом, порядок аппроксимации — второй, а постоянная в (4.14) равна

$$C = \frac{1}{12} \left[\max_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} |y'''(x)| + \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |y'''(x)| \right]$$

или, что менее точно,

$$C = \frac{1}{6} \max_{x_{j-1} \leq x \leq x_{j+1}} |y'''(x)|.$$

4.3. Метод неопределенных коэффициентов. В примере 4.1 было показано, что оператор, соответствующий двухточечной направленной вперед разности, локально аппроксимирует первую производную y'

с первым порядком по h . Оператор центральной разности, как показано в примере 4.2, локально аппроксимирует ту же производную со вторым порядком по h . В этих примерах мы исследовали конкретные разностные операторы. А как строить другие разностные операторы с заданным порядком аппроксимации?

Рассмотрим это на примере первой производной. Оказывается, что производную $y'(x_j)$ можно заменить разностным оператором

$$L_h y_{h,j} = \frac{1}{h} \sum_{s=-s_1}^{s_2} a_s y_{j+s} \quad (4.16)$$

так, чтобы погрешность от такой замены для произвольных достаточно гладких функций $y(x)$ была любого заранее заданного порядка p относительно шага h . Покажем это. Поскольку

$$\psi_{h,j} = (L_h(y))_h - (Ly)_h = O(h^p),$$

то на выбранном шаблоне

$$y'(x_j) = \frac{1}{h} \sum_{s=-s_1}^{s_2} a_s y(x_j + sh) + O(h^p). \quad (4.17)$$

Подберем не зависящие от h коэффициенты a_s , $s = -s_1, -s_1 + 1, \dots, s_2$ (всего их $s_1 + s_2 + 1$) так, чтобы это равенство оказалось справедливым. Значения $s_1 \geq 0$ и $s_2 \geq 0$ будем брать произвольными, но так, чтобы $s_1 + s_2 \geq p$. По формуле Тейлора

$$\begin{aligned} & y(x_j + sh) = \\ &= y(x_j) + shy'(x_j) + \frac{(sh)^2}{2} y''(x_j) + \dots + \frac{(sh)^p}{p!} y^{(p)}(x_j) + \frac{(sh)^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi_s), \end{aligned}$$

где ξ_s лежит между точками x_j и $x_j + sh$. Подставим это выражение в сумму (4.17) и приведем подобные

$$\begin{aligned} y'(x_j) &= \frac{1}{h} \left[y(x_j) \sum a_s + y'(x_j) h \sum s a_s + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(x_j) \sum s^p a_s \right] + \\ &+ \frac{h^p}{(p+1)!} \sum \left(s^{p+1} a_s y^{(p+1)}(\xi_s) \right) + O(h^p). \quad (4.18) \end{aligned}$$

Чтобы равенство (4.18) выполнялось для произвольной гладкой функции $y(x)$, достаточно приравнять коэффициенты при одинаковых

степенях h^s , $s = -1, 0, 1, \dots, p-1$ в его левой и правой частях:

$$\begin{cases} \sum a_s = 0, \\ \sum s a_s = 1, \\ \sum s^2 a_s = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum s^p a_s = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Получилась линейная система $(p+1)$ уравнений для определения a_s . Если $s_1 + s_2 = p$, то число выписанных уравнений совпадает с числом неизвестных a_s . Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -s_1 & -s_1 + 1 & \dots & s_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-s_1)^p & (-s_1 + 1)^p & \dots & s_2^p \end{vmatrix}$$

этой системы (определитель Вандермонда) отличен от нуля. Следовательно, существует единственный набор коэффициентов a_s , удовлетворяющий системе (4.19). Если $s_1 + s_2 > p$, то система (4.19) имеет неединственное решение.

Таким образом, расширяя шаблон, можно получать разностные операторы любого заданного порядка аппроксимации.

Пример 4.3. Зададим порядок аппроксимации $p = 2$ и трехточечный шаблон x_{j-1}, x_j, x_{j+1} , т.е. положим $s_1 = 1, s_2 = 1$. В этом случае система для коэффициентов a_s

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0, \\ -a_{-1} + a_1 = 1, \\ a_{-1} + a_1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $a_{-1} = -1/2, a_0 = 0, a_1 = 1/2$. Следовательно,

$$y'(x_j) = \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1}))}{2h} + O(h^2),$$

т.е. разностный оператор с центральной разностью (4.9) локально аппроксимирует дифференциальный оператор первой производной со вторым порядком по h . ■

Отметим, что для построения разностного оператора, аппроксимирующего в узле x_j производную $y^{(k)}$ k -го порядка, следует вместо

равенства (4.16) использовать следующее

$$L_h y_{h,j} = \frac{1}{h^k} \sum_{s=-s_1}^{s_2} a_s y_{j+s}. \quad (4.20)$$

Например, при $p = 2$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ получаем разностный оператор

$$L_h y_{h,j} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2}, \quad (4.21)$$

который на гладких функциях локально аппроксимирует дифференциальный оператор второй производной

$$Ly \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (4.22)$$

со вторым порядком по h .

В случае неравномерной сетки с узлами $x_{j+1} = x_j + h_{j+1}$ для построения методом неопределенных коэффициентов разностного оператора L_h , локально аппроксимирующего производную $y^{(k)}$, вместо (4.20) будем использовать следующее выражение

$$L_h y_{h,j} = \sum_{s=-s_1}^{s_2} a_s y_{j+s}. \quad (4.23)$$

Отметим, что в этом случае коэффициенты a_s будут зависеть от шагов сетки, причем

$$a_s = O\left(\frac{1}{h^k}\right), \quad h = \max_{-s_1+1 \leq j \leq s_2} h_j.$$

ЗАДАЧИ

4.1. С каким порядком разностный оператор (4.10) с трехточечной направленной вперед разностью аппроксимирует в узле x_j дифференциальный оператор первой производной (4.7)?

4.2. На равномерной сетке методом неопределенных коэффициентов построить разностный оператор с трехточечной направленной назад разностью, который на шаблоне x_{j-2} , x_{j-1} , x_j локально аппроксимирует в узле x_j дифференциальный оператор (4.7) со вторым порядком.

4.3. На неравномерной сетке с узлами $x_{j+1} = x_j + h_{j+1}$ методом неопределенных коэффициентов построить разностный оператор с трехточечной направленной вперед разностью, который на шаблоне x_j , x_{j+1} , x_{j+2} локально аппроксимирует в узле x_j дифференциальный оператор (4.7) со вторым порядком.

§ 5. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной схемой

При замене дифференциального оператора L разностным оператором L_h мы допускаем ошибку в каждом узле, которую назвали локальной погрешностью аппроксимации дифференциального оператора. Но нам нужно решить задачу на всем отрезке и оценить порядок разностной аппроксимации на всей сетке, в том числе и порядок аппроксимации начальных условий. Поэтому далее дифференциальные задачи и соответствующие им разностные задачи мы будем записывать в виде символических равенств $Ly = f$ и $L_h y_h = f_h$ соответственно, при этом в L и L_h будем включать не только дифференциальные и разностные операторы во внутренних точках и узлах, но также и заданные начальные условия дифференциальной задачи и аппроксимирующие их разностные начальные условия разностной задачи.

Например, чтобы записать задачу

$$\begin{cases} y' + \alpha y = \varphi(x), & a < x \leq b, & \alpha = \text{const}, \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (5.1)$$

в операторном виде $Ly = f$, положим

$$Ly \equiv \begin{cases} y' + \alpha y, & a < x \leq b, \\ y(a), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \varphi(x), & a < x \leq b, \\ y_a. \end{cases}$$

Для ее приближенного решения можно воспользоваться разностной схемой:

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha y_j = \varphi(x_j), & j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a, \end{cases} \quad (5.2)$$

которую тоже можно представить в операторном виде $L_h y_h = f_h$, если положить

$$L_h y_h \equiv \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha y_j, & j = 0, \dots, N-1, \\ y_0, \end{cases} \quad f_h \equiv \begin{cases} \varphi(x_j), & j = 0, \dots, N-1, \\ y_a. \end{cases} \quad (5.3)$$

Итак, пусть дифференциальная задача $Ly = f$ приближается (заменяется) разностной схемой $L_h y_h = f_h$.

Определение. Невязка ψ_h , возникающая при подстановке решения дифференциальной задачи y в разностную схему $L_h(y)_h = f_h + \psi_h$, называется погрешностью аппроксимации разностной схемы.

Величиной погрешности аппроксимации будем называть ее норму $\|\psi_h\|$. Возникает вопрос, в каком пространстве рассматривается погрешность аппроксимации, и, следовательно, выбирается норма?

У нас есть $(N + 1)$ -мерное линейное пространство сеточных функций $y_h \in U_h$. После того как мы подействуем на функцию y_h разностным оператором L_h , возникнет элемент $L_h y_h$, принадлежащий также $(N + 1)$ -мерному линейному пространству, которое обозначим F_h . Пространству F_h принадлежит и вектор f_h правых частей. При одинаковой размерности линейных пространств U_h и F_h они, вообще говоря, являются разными, поскольку нормы в этих пространствах могут быть разными.

Напомним, что некоторое линейное пространство R называется *нормированным*, если каждому элементу $x \in R$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$, причем выполнены следующие три аксиомы нормы:

- 1) $\|x\| \geq 0$, $x \in R$, причем $\|x\| = 0$ только при $x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $x \in R$, λ — произвольное число;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x \in R$, $y \in R$.

Норма в U_h может быть определена различными способами, например, так:

$$\|y_h\|_{U_h} = \max_{0 \leq j \leq N} |y_j|. \quad (5.4)$$

Это так называемая *локальная* или *кубическая* норма.

Далее мы всегда будем выбирать норму в пространстве сеточных функций U_h так, чтобы при $h \rightarrow 0$ сеточная норма переходила в ту или иную норму пространства U , то есть чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(y)_h\|_{U_h} = \|y\|_U, \quad (5.5)$$

где $y = y(x)$ — произвольная функция непрерывного аргумента $x \in [a, b]$ из пространства U , $\|y\|_U$ — ее норма в пространстве U , $(y)_h$ — проекция функции y на U_h . Если условие (5.5) выполняется, то говорят, что нормы $\|\cdot\|_{U_h}$ и $\|\cdot\|_U$ *согласованы*. Например, норма (5.4) согласована с нормой пространства непрерывных функций (см. задачу 5.1)

$$\|y\|_U = \max_{a \leq x \leq b} |y(x)| = \|y\|_{C[a, b]}. \quad (5.6)$$

Часто используют *среднеквадратичную (или сферическую) норму*

$$\|y_h\|_{U_h} = \left(h \sum_{j=0}^N y_j^2 \right)^{1/2}, \quad (5.7)$$

согласованную (см. задачу 5.2) с нормой пространства функций с интегрируемым квадратом

$$\|y\|_U = \left(\int_a^b y^2(x) dx \right)^{1/2} = \|y\|_{L_2[a,b]}. \quad (5.8)$$

Перейдем теперь к рассмотрению норм в пространстве F_h . Этому пространству принадлежит правая часть схемы f_h , а также погрешность аппроксимации разностной схемы

$$\psi_h = L_h(y)_h - f_h. \quad (5.9)$$

Например, правая часть (5.3) разностной схемы (5.2) принадлежит пространству F_h , которое состоит из элементов вида

$$g_h = \begin{cases} \chi_j, & j = 0, \dots, N-1, \\ \beta, & \end{cases} \quad (5.10)$$

где $\chi_0, \dots, \chi_{N-1}, \beta$ — произвольный упорядоченный набор чисел.

В другой схеме для задачи (5.1)

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + \alpha y_j = \varphi(x_j), & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a, \\ y_1 = y_a \end{cases} \quad (5.11)$$

правая часть

$$f_h = \begin{cases} \varphi(x_j), & j = 1, \dots, N-1, \\ y_a, \\ y_a \end{cases} \quad (5.12)$$

принадлежит пространству F_h , которое состоит из элементов вида

$$g_h = \begin{cases} \chi_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ \beta_1, \\ \beta_2, \end{cases} \quad (5.13)$$

представляющих $(N - 1)$ -мерную сеточную функцию и упорядоченную пару чисел.

Норма в F_h может быть введена разными способами. Например, для разностной схемы (5.2) можно положить

$$\|g_h\|_{F_h} = \max \left(|\beta|, \max_{0 \leq j \leq N-1} |\chi_j| \right), \quad (5.14)$$

а для схемы (5.11) —

$$\|g_h\|_{F_h} = \max \left(|\beta_1|, |\beta_2|, \max_{1 \leq j \leq N-1} |\chi_j| \right). \quad (5.15)$$

Замечание. Пусть $\|\cdot\|_F$ — норма в пространстве F правых частей дифференциальной задачи $Ly = f$, а $\|\cdot\|_{F_h}$ — норма пространства F_h , которому принадлежит правая часть разностной схемы $L_h y_h = f_h$. Назовем разностную схему *регулярной*, если для любого элемента $f \in F$ и соответствующего ему элемента $f_h \in F_h$ выполняется равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f_h\|_{F_h} = \|f\|_F. \quad (5.16)$$

Пусть, например, для решения задачи Коши $Ly = f$, где

$$Ly \equiv \begin{cases} y'' - y, & a < x \leq b, \\ y(a), \\ y'(a), \end{cases} \quad f \equiv \begin{cases} \varphi(x), & a < x \leq b, \\ y_a \\ \alpha, \end{cases} \quad (5.17)$$

$\varphi \in C[a, b]$, используется схема $L_h y_h = f_h$,

$$L_h y_h \equiv \begin{cases} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - y_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0, \\ \frac{y_1 - y_0}{h}, \end{cases} \quad f_h \equiv \begin{cases} \varphi(x_j), \\ y_a, \\ \alpha. \end{cases} \quad (5.18)$$

Введем в F равномерную норму

$$\|f\|_F = \max \left(|y_a|, |\alpha|, \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| \right),$$

а в F_h , состоящем из элементов вида (5.13), норму (5.15). Тогда рассматриваемая схема будет регулярной, поскольку равенство (5.16) для нее выполняется.

Рассмотрим теперь другую форму $\bar{L}_h y_h = \bar{f}_h$ той же схемы (5.18), полученную умножением второго начального условия на h . В этом случае

$$\bar{L}_h y_h \equiv \begin{cases} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - y_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0, \\ y_1 - y_0, \end{cases} \quad \bar{f}_h \equiv \begin{cases} \varphi(x_j), \\ y_a, \\ \alpha h. \end{cases} \quad (5.19)$$

Для новой схемы

$$\|\bar{f}_h\|_{F_h} = \max \left(|y_a|, |\alpha h|, \max_{1 \leq j \leq N-1} |\varphi(x_j)| \right),$$

поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\bar{f}_h\|_{F_h} = \max \left(|y_a|, \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| \right) \neq \|f\|_F.$$

Следовательно, схема (5.19) не является регулярной. Далее рассматриваемые схемы будут предполагаться регулярными. ■

Теперь определим понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной.

Определение. Разностная схема $L_h y_h = f_h$ аппроксимирует задачу $Ly = f$ на ее решении y , если

$$\|\psi_h\|_{F_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (5.20)$$

Определение. Разностная схема $L_h y_h = f_h$ аппроксимирует задачу $Ly = f$ на ее решении y с порядком p по h , если существуют такие положительные константы \tilde{h} и C_a , что для всех $h \leq \tilde{h}$ имеет место неравенство

$$\|\psi_h\|_{F_h} \leq C_a h^p. \quad (5.21)$$

Пример 5.1. Определить, с каким порядком разностная схема (5.11) аппроксимирует дифференциальную задачу (5.1).

Решение. Представим разностную схему (5.11) в операторном виде $L_h y_h = f_h$, где

$$L_h y_h \equiv \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + \alpha y_j = 0, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0, \\ y_1, \end{cases} \quad f_h \equiv \begin{cases} \varphi(x_j), & j = 1, \dots, N-1, \\ y_a, \\ y_a \end{cases} \quad (5.22)$$

и рассмотрим погрешность аппроксимации

$$\psi_h = L_h(y_h) - f_h = \begin{cases} \chi_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ \beta_1, \\ \beta_2. \end{cases}$$

Чтобы оценить порядок по h величины погрешности аппроксимации $\|\psi_h\|_{F_h} = \|L_h(y)_h - f_h\|_{F_h}$, рассмотрим по отдельности уравнения и начальные данные.

Для погрешности аппроксимации уравнения χ_j , $j = 1, \dots, N-1$ имеем выражение:

$$\begin{aligned} \chi_j &= \frac{y(x_{j+1}) - y(x_{j-1}))}{2h} + \alpha y(x_j) - \varphi(x_j) = \\ &= \frac{1}{2h} \left\{ y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2} y''(x_j) + \frac{h^3}{6} y'''(x_j + \xi^+ h) - \right. \\ &\quad \left. - y(x_j) + hy'(x_j) - \frac{h^2}{2} y''(x_j) + \frac{h^3}{6} y'''(x_j - \xi^- h) \right\} + \alpha y(x_j) - \varphi(x_j) = \\ &= y'(x_j) + \alpha y(x_j) - \varphi(x_j) + \frac{h^2}{12} (y'''(x_j + \xi^+ h) + y'''(x_j - \xi^- h)). \end{aligned}$$

На решении $y = y(x)$ сумма первых трех членов в правой части этого равенства обращается в нуль, поэтому

$$\max_{1 \leq j \leq N-1} |\chi_j| \leq C_1 h^2, \quad (5.23)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{6} \max_{a \leq x \leq b} |y'''(x)|. \quad (5.24)$$

Рассмотрим теперь погрешность аппроксимации начальных условий. Для условия в узле $x_0 = a$ имеем:

$$\beta_1 = y(x_0) - y_a = 0. \quad (5.25)$$

Для погрешности аппроксимации второго начального условия получим:

$$\beta_2 = y(x_1) - y_a = y(a+h) - y_a = y(a) + hy'(a+\xi h) - y_a = hy'(a+\xi h). \quad (5.26)$$

Следовательно,

$$\max(|\beta_1|, |\beta_2|) \leq Ch, \quad C = \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)|. \quad (5.27)$$

Поскольку пространство F_h правых частей схемы состоит из элементов вида (5.13), а норму в F_h мы ввели по формуле (5.15), то величина общей погрешности аппроксимации будет

$$\|\psi_h\|_{F_h} = \max\left(|\beta_1|, |\beta_2|, \max_{1 \leq j \leq N-1} |\chi_j|\right) \leq Ch. \quad (5.28)$$

Таким образом, общий порядок аппроксимации схемы — первый, и, что досадно, только из-за одной компоненты β_2 вектора погрешности аппроксимации. Но этот недостаток легко устранить.

Для этого правую часть схемы $L_h y_h = f_h$ возьмем в следующем виде:

$$f_h \equiv \begin{cases} \varphi(x_j), & j = 1, \dots, N-1, \\ y_a, \\ y_*, \end{cases} \quad (5.29)$$

где y_* подлежит определению. Для погрешности аппроксимации в узле x_1 получим выражение

$$\beta_2 = y(a+h) - y_* = y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2} y''(a + \xi h) - y_*. \quad (5.30)$$

Следовательно, если мы положим $y(a) + hy'(a) - y_* = 0$, то и компонента β_2 вектора погрешности будет иметь второй порядок по h . Таким образом, в правой части (5.29) разностной схемы надо брать

$$y_* = y(a) + hy'(a) = y_a + h[-\alpha y_a + \varphi(a)]. \quad (5.31)$$

Последнее равенство получается, если допустить, что дифференциальное уравнение выполняется на решении $y(x)$ не только при $x > a$, как это указано в задаче (5.1), но и в начальной точке $x = a$, т.е. вплоть до границы.

Таким образом,

$$\max(|\beta_1|, |\beta_2|) \leq C_2 h^2, \quad (5.32)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |y''(x)|, \quad (5.33)$$

а величина общей погрешности аппроксимации схемы будет оцениваться так:

$$\|\psi_h\|_{F_h} \leq C_a h^2, \quad C_a = \max(C_1, C_2), \quad (5.34)$$

при этом постоянные C_1 и C_2 вычисляются по формулам (5.24) и (5.33) соответственно. ■

Замечание. Приведенное определение аппроксимации дифференциальной задачи $Ly = f$ на ее решении $y = y(x)$ разностной схемой $L_h y_h = f_h$ может быть обобщено на случай произвольных функций $v = v(x)$, непрерывных вместе с достаточным числом своих производных и при этом не обязательно являющихся решением дифференциальной задачи. Для класса таких функций $v(x)$ погрешность аппроксимации рассматривается как разность между разностной задачей и дифференциальной:

$$\psi_h = L_h(v)_h - f_h - (Lv - f)_h. \quad (5.35)$$

Определение. Разностная схема $L_h y_h = f_h$ аппроксимирует задачу $Ly = f$ на функции $v = v(x)$, если

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|_{F_h} &= \|L_h(v)_h - f_h - (Lv - f)_h\|_{F_h} = \\ &= \|L_h(v)_h - (Lv)_h + (f)_h - f_h\|_{F_h} = O(h^p). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Отсюда видим, что погрешность аппроксимации разностной схемы складывается из погрешности аппроксимации дифференциального оператора и погрешности аппроксимации правой части. Очевидно, что аппроксимация на решении $y(x)$ имеет порядок не ниже, чем на произвольной достаточно гладкой функции $v(x)$.

Отметим, что приведенные определения аппроксимации переносятся без изменений и на краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. задачи 5.9, 5.11).

ЗАДАЧИ

5.1. Доказать, что норма (5.4) пространства U_h согласована с нормой (5.6) пространства U непрерывных функций.

5.2. Доказать, что норма (5.7) пространства U_h согласована с нормой (5.8) пространства $U = L_2[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций.

5.3. Определить, с каким порядком разностная схема

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + y_j = x_j + 1, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

аппроксимирует на равномерной сетке $x_j = a + jh$ с шагом $h = (b-a)/N$ дифференциальную задачу

$$\begin{cases} y' + y = x + 1, & a < x \leq b, \\ y(a) = 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

5.4. Определить, с каким порядком разностная схема

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + y_j = x_j + 1, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, \\ y_1 = h(a+1) \end{cases}$$

аппроксимирует на равномерной сетке $x_j = a + jh$ с шагом $h = (b-a)/N$ дифференциальную задачу (5.37).

5.5. Определить, с каким порядком разностная схема

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f_j + \frac{h}{2}f'_j + \frac{h^2}{6}f''_j, & j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a \end{cases}$$

аппроксимирует дифференциальную задачу

$$\begin{cases} y' = f(x), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_a. \end{cases} \quad (5.38)$$

5.6. Определить, с каким порядком разностная схема

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{2}{3}f_j + \frac{5}{12}f_{j+1} - \frac{1}{12}f_{j-1}, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a, \\ y_1 = y_a + h \frac{f(a) + f(a+h)}{2} \end{cases}$$

аппроксимирует дифференциальную задачу (5.38).

5.7. Формулу (3.6) двухшагового явного метода Адамса можно переписать в виде разностного уравнения. Тогда для решения задачи

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (5.39)$$

получим следующую разностную схему (явную двухшаговую схему Адамса):

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{3}{2}f(x_j, y_j) - \frac{1}{2}f(x_{j-1}, y_{j-1}), & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a, \\ y_1 = y_*. \end{cases}$$

При каком y_* эта схема аппроксимирует задачу (5.39) с порядком $O(h^2)$?

5.8. Дана дифференциальная задача

$$\begin{cases} y'(x) + A(x)y(x) = f(x), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

и разностная схема на равномерной сетке x_j :

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + (\alpha_1 A(x_j) + \alpha_2 A(x_{j+1})) \cdot (\beta_1 y_j + \beta_2 y_{j+1}) = \\ = \gamma_1 f(x_j) + \gamma_2 f(x_{j+1}), & j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a. \end{cases}$$

Как следует выбрать постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ и γ_2 , чтобы получить второй порядок аппроксимации?

5.9. При каких α, β, γ разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} - (\alpha y_{j-1} + \beta y_j + \gamma y_{j+1}) &= -f_j - \frac{h^2 f_j''}{12}, \\ j &= 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_N &= y_b \end{aligned}$$

аппроксимирует краевую дифференциальную задачу

$$\begin{cases} y'' - y = -f(x), & a < x < b, \\ y(a) = y_a, & y(b) = y_b \end{cases}$$

с порядком $O(h^4)$?

5.10. При каких α , β , γ и y_* разностная схема

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} - (\alpha y_{j-1} + \beta y_j + \gamma y_{j+1}) = -2 \left(1 - \frac{h^2}{12}\right) \sin x_j,$$

$$j = 1, \dots, N-1,$$

$$y_0 = 0,$$

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = y_*$$

аппроксимирует дифференциальную задачу Коши

$$y'' - y = -2 \sin x, \quad 0 < x \leq 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

с порядком $O(h^4)$?

5.11. Для дифференциальной краевой задачи

$$y'' - y = \cos x, \quad 0 < x < \pi,$$

$$y(0) = 0,$$

$$y(\pi) = 1$$

построить разностную схему, которая на трехточечном шаблоне x_{j-1} , x_j , x_{j+1} равномерной сетки аппроксимирует дифференциальную задачу с 10-м порядком по h .

5.12. Показать, что регулярная разностная схема (5.18) для решения задачи (5.17) имеет первый порядок аппроксимации по h , а нерегулярная (5.19) — второй. Таким образом, две эквивалентные формы одной и той же схемы могут иметь разные порядки аппроксимации.

§ 6. Сходимость разностной схемы

Итак, у нас есть дифференциальная задача $Ly = f$, для приближенного решения которой используем разностную схему $L_h y_h = f_h$. Будем предполагать, что эта разностная схема при каждом достаточно малом h имеет решение $y_h \in U_h$. Чтобы мы могли находить приближенное решение дифференциальной задачи с любой заранее заданной точностью, естественно потребовать выполнения условия $y_h \rightarrow y$ при $h \rightarrow 0$. Если это условие выполняется, то говорят, что решение разностной задачи при измельчении сетки *сходится* к решению дифференциальной задачи или просто *схема сходится*.

Уточним смысл понятия сходимости схемы.

Определение. Решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи при $h \rightarrow 0$, если

$$\|y_h - (y)_h\|_{U_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (6.1)$$

Если сверх того

$$\|y_h - (y)_h\|_{U_h} \leq Ch^p, \quad (6.2)$$

где $C > 0$ и $p > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от h , то говорят, что имеет место сходимость порядка h^p или разностная схема имеет p -ый порядок точности.

Обладание свойством сходимости является основным требованием, предъявляемым к разностным схемам. Из всевозможных разностных схем, которые могут быть построены для дифференциальной задачи, мы можем использовать для нахождения приближенного решения только сходящиеся.

Заметим, что в определении сходящейся разностной схемы участвует норма пространства сеточных функций U_h . Разностная схема может сходиться в одной норме и не сходиться в другой. Выбор той или иной нормы в конкретной задаче определяется двумя соображениями:

— желательно, чтобы искомая сеточная функция y_h была близка к точному решению y в возможно более сильной норме;

— чем слабее норма, тем легче найти сходящееся в этой норме приближенное решение y_h .

Сходимость разностной схемы в смысле локальной нормы (5.4) называется *равномерной сходимостью*. Сходимость схемы в смысле среднеквадратичной нормы (5.7) называется *сходимостью в среднем*.

Из равномерной сходимости следует сходимость в среднем. Действительно, пусть имеет место равномерная сходимость, т.е.

$$\max_{0 \leq j \leq N} |y_j - y(x_j)| \leq Ch^p.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{h \sum_{j=0}^N (y_j - y(x_j))^2} &\leq \sqrt{h \sum_{j=0}^N C^2 h^{2p}} = \sqrt{h(N+1)C^2 h^{2p}} = \\ &= Ch^p \sqrt{hN+1} = Ch^p \sqrt{b-a+h} < Ch^p \sqrt{(b-a) + (b-a)} = C_1 h^p, \end{aligned}$$

где $C_1 = C\sqrt{2(b-a)}$. Следовательно, сходимость в среднем также имеет место.

Покажем на примере, что обратное не верно, т.е. из сходимости в среднем, вообще говоря, не следует равномерная сходимость.

Пример 6.1. Пусть $y(x) \equiv 1$ для $a \leq x \leq b$. В качестве y_h возьмем такую сеточную функцию:

$$y_j = \begin{cases} 1 + \frac{1}{h^{1/4}}, & j = 0, \\ 1, & j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Рассмотрим среднеквадратичную норму:

$$\|y_h - (y)_h\|_{U_h} = \sqrt{h \sum_{j=0}^N (y_j - y(x_j))^2} = \sqrt{h \left(\frac{1}{h^{1/4}}\right)^2} = \sqrt{h^{1/2}} = h^{1/4}.$$

Таким образом, $\|y_h - (y)_h\|_{U_h} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, т.е. сходимость в среднем имеет место.

В случае локальной нормы (5.4) для той же разности будем иметь:

$$\|y_h - (y)_h\|_{U_h} = \frac{1}{h^{1/4}} \rightarrow \infty \text{ при } h \rightarrow 0,$$

т.е. равномерной сходимости нет. Следовательно, локальная норма более сильная, чем среднеквадратичная. ■

В простейших случаях сходимость схемы можно проверить непосредственно.

Пример 6.2. Для дифференциальной задачи

$$\begin{aligned} y' + \alpha y &= 0, & 0 < x \leq 1, & \alpha = \text{const}, \\ y(0) &= \beta \end{aligned} \quad (6.3)$$

возьмем разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha y_j &= 0, & j &= 0, \dots, N-1, \\ y_0 &= \beta. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Прежде чем использовать такую схему, надо исследовать ее на сходимость. В данном «удачном» (но нетипичном) случае мы можем выписать точное решение дифференциальной задачи:

$$y(x) = \beta e^{-\alpha x}. \quad (6.5)$$

Из разностной схемы имеем:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= (1 - \alpha h)y_j = (1 - \alpha h)^2 y_{j-1} = \dots = (1 - \alpha h)^{j+1} \beta = \\ &= \beta(1 - \alpha h)^{x_{j+1}/h}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Таким образом, $y(x_j) = \beta e^{-\alpha x_j}$ — точное решение, спроецированное на U_h , $y_j = \beta(1 - \alpha h)^{x_j/h}$ — приближенное решение.

Преобразуем выражение $(1 - \alpha h)^{x_j/h}$, учитывая равенство $\exp(x) = 1 + x + O(x^2)$ и предполагая, что при $\alpha > 0$ шаг сетки удовлетворяет условию $h < 1/\alpha$:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha h)^{x_j/h} &= \exp\left\{\frac{x_j}{h} \ln(1 - \alpha h)\right\} = \exp\left\{\frac{x_j}{h} \left[-\alpha h - \frac{\alpha^2 h^2}{2} + O(h^3)\right]\right\} = \\ &= \exp(-\alpha x_j) \cdot \exp\left(-h \frac{\alpha^2 x_j}{2}\right) \cdot \exp[O(h^2)] = \\ &= \exp(-\alpha x_j) \cdot \left[1 - h \frac{\alpha^2 x_j}{2} + O(h^2)\right] \cdot [1 + O(h^2)] = \\ &= \exp(-\alpha x_j) \cdot \left[1 - h \frac{\alpha^2 x_j}{2} + O(h^2)\right] = \\ &= \exp(-\alpha x_j) - h \frac{\alpha^2 x_j}{2} \exp(-\alpha x_j) + O(h^2). \end{aligned}$$

Теперь можем найти погрешность в узле x_j :

$$y_j - y(x_j) = -h\beta \frac{\alpha^2 x_j}{2} \exp(-\alpha x_j) + O(h^2).$$

Отсюда:

$$\max_{0 \leq j \leq N} |y_j - y(x_j)| \leq h|\beta| \frac{\alpha^2}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} e^{-\alpha x} + O(h^2)$$

или

$$\|y_h - (y)_h\|_{U_h} \leq hC + O(h^2), \quad (6.7)$$

где C — независимая от h константа,

$$C = |\beta| \frac{\alpha^2}{2} \exp\left(\frac{|\alpha| - \alpha}{2}\right). \quad (6.8)$$

Таким образом, доказано, что разностная схема (6.4) сходится. ■

В рассмотренном примере при доказательстве сходимости схемы мы использовали знание точного решения $y(x)$ и приближенного решения y_j . Как быть, если точное решение дифференциальной задачи нам не известно? В § 1 мы, не зная точного решения дифференциальной задачи, получили оценку погрешности приближенного решения

$$\max_{0 \leq j \leq N} |y(x_j) - y_j| \leq Mh \quad (6.9)$$

при использовании метода Эйлера, который можно записать и в виде разностной схемы

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} = f(x_j, y_j), & 0 \leq j \leq N - 1, \\ y_0 = y_a. \end{cases} \quad (6.10)$$

Оценка (6.9) и означает сходимость этой простейшей схемы (см. также задачу 1.8). В общем случае, для более сложных разностных схем, непосредственно оценить погрешность (6.2) удается очень редко. Но оказывается, что этот трудный процесс проверки сходимости разностной схемы можно разбить на два более простых этапа: проверить аппроксимацию дифференциальной задачи разностной схемой и проверить устойчивость разностной схемы.

ЗАДАЧИ

6.1. Установить, сходится ли и с каким порядком по h сеточная функция

$$y_j = \frac{y(x_j + h/2) + y(x_j - h/2)}{2}$$

к функции $y = y(x)$ в локальной норме (5.4), если

- 1) $y(x) \in C$;
- 2) $y(x) \in C^1$;
- 3) $y(x) \in C^k$, где $k \geq 2$.

6.2. Определить порядок точности разностной схемы

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha y_{j+1} = 0, & j = 0, \dots, N - 1, \\ y_0 = \beta, \end{cases}$$

построенной для решения задачи (6.3).

§ 7. Устойчивость разностной схемы

7.1. Определения устойчивости разностной схемы. Качественное определение устойчивой разностной схемы следующее.

Разностная схема называется устойчивой, если она имеет единственное решение и малые возмущения в начальных данных и правой части разностной схемы приводят к малому изменению решения.

Теперь приведем строгое определение устойчивости. Пусть для дифференциальной задачи $Ly = f$ построена разностная схема $L_h y_h = f_h$.

Определение 1. *Разностная схема $L_h y_h = f_h$ устойчива, если существуют числа $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при любом $h < h_0$ и любом $\varepsilon_h \in F_h$, для которого $\|\varepsilon_h\|_{F_h} < \delta$, разностная задача $L_h z_h = f_h + \varepsilon_h$, полученная из исходной разностной задачи добавлением к правой части возмущения ε_h , имеет единственное решение z_h и*

$$\|z_h - y_h\|_{U_h} \leq C_y \|\varepsilon_h\|_{F_h}, \quad (7.1)$$

где C_y — некоторая постоянная, не зависящая от h .

Это определение дано для произвольного разностного оператора L_h , в общем случае нелинейного. Если оператор L_h — линейный, то данное определение устойчивости равносильно следующему.

Определение 2. *Разностная схема $L_h y_h = f_h$ с линейным оператором L_h устойчива, если существует число $h_0 > 0$ такое, что при любом $h < h_0$ и при любом $f_h \in F_h$ она имеет единственное решение $y_h \in U_h$, причем*

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h}, \quad (7.2)$$

где C_y — некоторая постоянная, не зависящая от h .

Отметим, что если проверка аппроксимации производится на точном решении y исходной задачи $Ly = f$, то при исследовании устойчивости точное решение дифференциальной задачи не привлекается. Таким образом, устойчивость связана только с внутренними свойствами самих разностных схем.

7.2. Равносильность определений устойчивости. Покажем, что в случае линейного оператора L_h первое и второе определения устойчивости действительно равносильны.

Пусть разностная схема $L_h y_h = f_h$ устойчива в смысле определения 2, т.е. при всех рассматриваемых $h < h_0$ и произвольном $f_h \in F_h$ имеет единственное решение y_h , причем выполнена оценка (7.2).

Возьмем схему с возмущенной правой частью $L_h z_h = f_h + \varepsilon_h$ и вычтем из нее исходную разностную схему:

$$L_h(z_h - y_h) = \varepsilon_h.$$

По определению 2 последняя схема будет иметь единственное решение при произвольном $\varepsilon_h \in F_h$, и будет иметь место оценка

$$\|z_h - y_h\|_{U_h} \leq C_y \|\varepsilon_h\|_{F_h},$$

а это и означает, что схема устойчива в смысле определения 1.

Допустим обратное: разностная схема $L_h y_h = f_h$ устойчива в смысле определения 1. Тогда при некоторых $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ и произвольных $h < h_0$ и $\varepsilon_h \in F_h$, $\|\varepsilon_h\|_{F_h} < \delta$ существуют и единственны решения уравнений

$$\begin{aligned} L_h z_h &= f_h + \varepsilon_h, \\ L_h y_h &= f_h. \end{aligned}$$

Вычтем эти равенства почленно:

$$L_h w_h = \varepsilon_h,$$

где $w_h = z_h - y_h$. Последняя схема имеет единственное решение и в силу устойчивости в смысле определения 1 будет выполняться неравенство

$$\|w_h\|_{U_h} \leq C_y \|\varepsilon_h\|_{F_h}.$$

Очевидно, что, изменив обозначения решения и правой части уравнения $L_h w_h = \varepsilon_h$ на $L_h y_h = f_h$, полученный результат можно сформулировать так:

при произвольных $h < h_0$ и $f_h \in F_h$, $\|f_h\|_{F_h} < \delta$ разностная схема $L_h y_h = f_h$ имеет единственное решение y_h и это решение удовлетворяет оценке

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h}. \quad (7.3)$$

Если мы теперь покажем, что схема $L_h y_h = f_h$ будет иметь единственное решение, и для него будет выполняться оценка (7.3) не только для всех f_h , таких что $\|f_h\|_{F_h} < \delta$, но и вообще для всех $f_h \in F_h$, то тем самым покажем, что будет иметь место устойчивость в смысле определения 2.

В самом деле, пусть $\|f_h\|_{F_h} \geq \delta$. Докажем однозначную разрешимость и оценку (7.3) в этом случае. Положим

$$y_h = \lambda \tilde{y}_h, \quad f_h = \lambda \tilde{f}_h, \quad \lambda = \frac{2\|f_h\|_{F_h}}{\delta}. \quad (7.4)$$

Тогда для \tilde{y}_h получим уравнение

$$L_h \tilde{y}_h = \tilde{f}_h, \quad (7.5)$$

причем

$$\|\tilde{f}_h\|_{F_h} = \frac{\delta}{2\|f_h\|_{F_h}} \|f_h\|_{F_h} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Поэтому в силу полученного выше результата уравнение (7.5) однозначно разрешимо и выполняется неравенство

$$\|\tilde{y}_h\|_{U_h} \leq C_y \|\tilde{f}_h\|_{F_h}.$$

Согласно формулам (7.4), устанавливающим однозначную связь между y_h и \tilde{y}_h , а также между f_h и \tilde{f}_h , отсюда следует однозначная разрешимость задачи $L_h y_h = f_h$ и справедливость оценки

$$\frac{1}{\lambda} \|y_h\|_{U_h} \leq C_y \frac{1}{\lambda} \|f_h\|_{F_h},$$

или

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h}$$

при произвольном рассматриваемом $f_h \in F_h$. Таким образом, устойчивость в смысле определения 2 имеет место.

7.3. Зависимость между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью. Покажем теперь, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость разностной схемы.

Теорема (о сходимости). Пусть разностная схема $L_h y_h = f_h$ аппроксимирует дифференциальную задачу $Ly = f$ на ее решении y с порядком h^p и устойчива. Тогда решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи, причем имеет место оценка

$$\|(y)_h - y_h\|_{U_h} \leq Ch^p, \quad (7.6)$$

где C — некоторая константа, не зависящая от h .

Доказательство. Пусть \bar{h} — минимальное из чисел \tilde{h} и h_0 , введенных в определениях аппроксимации и устойчивости. Из условия теоремы о том, что разностная схема аппроксимирует, следует, что при $h < \bar{h}$ для погрешности аппроксимации ψ_h выполняется неравенство

$$\|\psi_h\|_{F_h} \leq C_a h^p, \quad (7.7)$$

при этом сеточная функция $(y)_h$ является решением задачи

$$L_h (y)_h = f_h + \psi_h, \quad (7.8)$$

Найдем $h_* > 0$ такое, что для всех $h < h_*$ будет справедливым неравенство

$$C_a h^p < \delta,$$

где δ — число, введенное в определении 1 устойчивости. Следовательно, выбрав $h_{**} = \min(\bar{h}, h_*)$, получим: для всех $h < h_{**}$ выполняется неравенство $\|\psi_h\|_{F_h} < \delta$, поэтому благодаря устойчивости схемы для разности решения y_h исходной схемы и решения $(y)_h$ схемы (7.8) с возмущенной правой частью будет справедлива оценка

$$\|(y)_h - y_h\|_{U_h} \leq C_y \|\psi_h\|_{F_h} \leq C_a C_y h^p,$$

где C_y — постоянная из условия устойчивости (7.1). Полагая

$$C = C_a \cdot C_y, \quad (7.9)$$

получаем требуемую оценку (7.6) и сходимость. ■

Таким образом, *аппроксимация и устойчивость являются достаточными условиями сходимости разностной схемы*. Подчеркнем, что при доказательстве теоремы о сходимости не использовалось предположение о том, что задача $Lu = f$ является задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Под $Lu = f$ можно понимать краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения или начально-краевую задачу для уравнения в частных производных и другие задачи, т.е. схема доказательства имеет общий характер, поэтому и в общем случае изучение сходимости и порядка точности схемы сводится к изучению погрешности аппроксимации и устойчивости.

Замечание. Знание величины постоянной C из оценки (7.6) имеет практическое значение, поскольку позволяет выбрать шаг h сетки

так, чтобы получить численное решение с заданной точностью. Из доказательства теоремы о сходимости следует, что эта постоянная вычисляется по формуле (7.9) через постоянную C_a из неравенства (7.7) для погрешности аппроксимации и постоянную C_y из условия устойчивости (7.1). Таким образом, при исследовании аппроксимации и устойчивости желательно точнее оценить обе эти постоянные.

Пример 7.1 (на исследование устойчивости и сходимости схемы). Покажем, что схема Эйлера

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - G(x_j, y_j) = \varphi(x_j), & j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a \end{cases} \quad (7.10)$$

для задачи Коши

$$\begin{cases} y' - G(x, y) = \varphi(x), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (7.11)$$

сходится с первым порядком.

Решение. Будем считать, что решение $y(x)$ задачи Коши (7.11) имеет ограниченную вторую производную, функция $\varphi(x)$ — непрерывна, а функция $G(x, y)$ непрерывна по x и имеет ограниченную производную по y :

$$\left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| \leq M.$$

Запишем схему (7.10) в виде $L_h y_h = f_h$, положив

$$L_h y_h \equiv \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - G(x_j, y_j), & j = 0, \dots, N-1, \\ y_0, \end{cases} \quad f_h \equiv \begin{cases} \varphi(x_j), \\ y_a. \end{cases}$$

Легко проверить, что разностная схема $L_h y_h = f_h$ аппроксимирует задачу (7.11) с первым порядком по h , при этом для погрешности аппроксимации выполняется неравенство

$$\|\psi_h\|_{F_h} \leq C_a h, \quad C_a = \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |y''(x)|,$$

где F_h — линейное нормированное пространство правых частей с нормой

$$\|f_h\|_{F_h} = \max \left\{ |y_a|, \max_{0 \leq j \leq N-1} |\varphi(x_j)| \right\}. \quad (7.12)$$

Докажем устойчивость рассматриваемой схемы. В данном примере оператор L_h нелинейный, если функция $G(x, y)$ нелинейна по второму аргументу y , поэтому будем пользоваться первым определением устойчивости. Внесем в схему возмущение входных данных

$$L_h z_h = f_h + \varepsilon_h,$$

что в подробной записи выглядит так:

$$\frac{z_{j+1} - z_j}{h} - G(x_j, z_j) = \varphi(x_j) + \varepsilon_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (7.13)$$

$$z_0 = y_a + \varepsilon,$$

$$\varepsilon_h \equiv \begin{cases} \varepsilon_j, & j = 0, \dots, N-1, \\ \varepsilon. & \end{cases}$$

Вычитая почленно из схемы с возмущениями (7.13) схему без возмущений (7.10), получим

$$\frac{w_{j+1} - w_j}{h} - [G(x_j, z_j) - G(x_j, y_j)] = \varepsilon_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (7.14)$$

$$w_0 = \varepsilon,$$

где $w_j = z_j - y_j$. Для исследования устойчивости надо оценить w_j .

Используя равенство

$$G(x_j, z_j) - G(x_j, y_j) = \frac{\partial G}{\partial y}(x_j, \theta_j z_j + (1 - \theta_j) y_j) w_j = M_j w_j,$$

где $0 < \theta_j < 1$, перепишем схему (7.14) для w_j так:

$$w_{j+1} = (1 + hM_j) w_j + h\varepsilon_j,$$

$$w_0 = \varepsilon.$$

Учитывая, что $|M_j| \leq M$, можем записать:

$$\begin{aligned} |w_{j+1}| &\leq (1 + hM) |w_j| + h |\varepsilon_j| \leq \\ &\leq (1 + hM)^2 |w_{j-1}| + h(1 + hM) |\varepsilon_{j-1}| + h |\varepsilon_j| \leq \\ &\leq (1 + hM)^2 |w_{j-1}| + 2h(1 + hM) \|\varepsilon_h\|_{F_h} \leq \\ &\leq (1 + hM)^3 |w_{j-2}| + h(1 + hM)^2 |\varepsilon_{j-2}| + 2h(1 + hM) \|\varepsilon_h\|_{F_h} \leq \end{aligned}$$

$$\leq (1 + hM)^3 |w_{j-2}| + 3h(1 + hM)^2 \|\varepsilon_h\|_{F_h} \leq$$

$$\dots \dots \dots \leq (1 + hM)^{j+1} |w_0| + (j+1)h(1 + hM)^j \|\varepsilon_h\|_{F_h} \leq$$

$$\leq (1 + hM)^{j+1} \|\varepsilon_h\|_{F_h} + l(1 + hM)^j \|\varepsilon_h\|_{F_h} \leq$$

$$\leq (1+l)(1 + hM)^N \|\varepsilon_h\|_{F_h} \leq (1+l)e^{hMN} \|\varepsilon_h\|_{F_h} = (1+l)e^{lM} \|\varepsilon_h\|_{F_h},$$

где $l = b - a$. Таким образом, для всех $0 \leq j \leq N$

$$|w_j| \leq C_2 \|\varepsilon_h\|_{F_h},$$

где $C_2 = (1+l)e^{lM}$.

Введя в U_h норму

$$\|y_h\|_{U_h} = \max_{0 \leq j \leq N} |y_j|,$$

запишем окончательно:

$$\|z_h - y_h\|_{U_h} \leq C_2 \|\varepsilon_h\|_{F_h}.$$

Итак, $C_y = C_2$ и схема (7.10) устойчива. Следовательно, в силу теоремы о сходимости схема равномерно сходится с первым порядком и для достаточно малых h справедливо неравенство $\|(y)_h - y_h\|_{U_h} \leq C_a C_y h$. ■

7.4. Достаточный признак устойчивости линейной разностной схемы решения задачи Коши. Итак, для того чтобы решение разностной схемы $L_h y_h = f_h$, построенной для задачи $Ly = f$, сходилось к решению этой задачи, достаточно, чтобы *схема была аппроксимирующей и устойчивой*. Тогда, если схема аппроксимирует с порядком p , то она и сходится с таким же порядком.

Из двух требований — аппроксимации и устойчивости, которые в совокупности являются достаточными для сходимости разностной схемы, — второе является более трудным для проверки. Посмотрим, как можно провести исследование устойчивости *линейной разностной схемы для решения задачи Коши с постоянными коэффициентами*.

При решении задачи Коши сеточную функцию y_h обычно вычисляют последовательно, переходя от одного узла сетки к другому, с ним соседнему. Если при каждом таком шаге вычислительного процесса определять оценку роста решения y_h , то получится один из наиболее употребительных способов исследования устойчивости.

Для использования этого способа нужно предварительно переписать разностную схему в так называемой *канонической форме*. Покажем, как это делается, на следующем простом примере.

Пример 7.2 (на использование канонической формы для доказательства устойчивости). Для решения задачи Коши (5.1) возьмем схему Эйлера (5.2). Запишем эту схему в рекуррентной форме:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= (1 - \alpha h) y_j + h \varphi_j, \quad j = 0, \dots, N - 1, \\ y_0 &= y_a. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Введем обозначения $R_h = 1 - \alpha h$, $\rho_j = \varphi_j$ и перепишем (7.15):

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= R_h y_j + h \rho_j, \quad j = 0, \dots, N - 1, \\ y_0 &= y_a. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Такая форма записи разностной схемы называется *канонической*.

Оценка роста решения на каждом шаге определяется теперь величиной $|R_h|$. Действительно,

$$\begin{aligned} y_1 &= R_h y_0 + h \rho_0, \\ y_2 &= R_h^2 y_0 + h [R_h \rho_0 + \rho_1], \\ y_3 &= R_h^3 y_0 + h [R_h^2 \rho_0 + R_h \rho_1 + \rho_2], \\ &\dots \dots \dots \\ y_j &= R_h^j y_0 + h [R_h^{j-1} \rho_0 + R_h^{j-2} \rho_1 + \dots + \rho_{j-1}]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Отсюда имеем:

$$\max_j |y_j| \leq \max_j |R_h^j| \cdot \left[|y_0| + h N \max_j |\rho_j| \right].$$

Введем нормы в пространствах сеточных функций U_h и F_h :

$$\begin{aligned} \|y_h\|_{U_h} &= \max_j |y_j|, \\ \|f_h\|_{F_h} &= \max \left[|y_a|, \max_j |\varphi_j| \right] \end{aligned} \quad (7.18)$$

и учитывая, что $hN = b - a = l$, окончательно запишем:

$$\|y_h\|_{U_h} \leq \max_j |R_h^j| \cdot (1 + l) \|f_h\|_{F_h}. \quad (7.19)$$

Так как рассматриваемая схема $L_h y_h = f_h$ по условию *линейная*,

то ее устойчивость означает, что при любом $f_h \in F_h$ она имеет единственное решение $y_h \in U_h$ и

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h}. \quad (7.20)$$

Единственность вытекает из однозначной разрешимости расчетных формул (7.17). Выполнение неравенства (7.20) будет доказано, если будет установлена равномерная относительно h ограниченность совокупности чисел $|R_h^j|$, то есть установлена оценка

$$|R_h^j| \leq C^1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (7.21)$$

Но в данном случае

$$\begin{aligned} |R_h^j| &= |(1 - \alpha h)^j| = |1 - \alpha h|^j \leq (1 + |\alpha| h)^j \leq \\ &\leq \left(1 + |\alpha| h + \frac{(\alpha h)^2}{2} + \dots\right)^j = e^{|\alpha| h j} \leq e^{|\alpha| h N} = e^{|\alpha| l}, \end{aligned}$$

т.е.

$$|R_h^j| \leq e^{|\alpha| l} = C^1. \quad (7.22)$$

Следовательно, в качестве постоянной C_y в неравенстве (7.20) можно взять число $C^1(1 + l)$. Тем самым устойчивость схемы (5.2) доказана.

Замечание. В некоторых случаях оценка (7.22) является слишком грубой. Так, при $\alpha > 0$, $h \leq 2/\alpha$ вместо (7.22) имеет место оценка $|R_h^j| \leq 1$, поэтому $C_y = 1 + l$.

Итак, запись разностной схемы в канонической форме (7.16) позволила свести доказательство устойчивости к получению оценки для $|R_h^j|$, т.е. к доказательству ограниченности модулей степеней *множителя перехода* R_h . Поэтому при исследовании устойчивости и всех других линейных разностных схем, предназначенных для решения задач с начальными условиями, мы будем приводить их к каноническому виду (7.16), понимая под y_j , ρ_j и R_h различные выражения, в каждом случае свои.

В рассмотренном примере каноническая форма представляла собой скалярное уравнение $y_{j+1} = R_h y_j + h \rho_j$. Обобщим теперь понятие канонической формы для схем, аппроксимирующих системы дифференциальных уравнений.

Пример 7.3. Пусть для задачи Коши $Ly = f$, где

$$y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad Ly \equiv \begin{cases} \frac{du}{dx} + Au + Bv, & a < x \leq b \\ \frac{dv}{dx} + Cu + Dv, & a < x \leq b \\ u(a) \\ v(a) \end{cases}, \quad f \equiv \begin{cases} p(x) \\ q(x) \\ u_a \\ v_a \end{cases}$$

построена схема $L_h y_h = f_h$, где

$$L_h y_h \equiv \begin{cases} \frac{u_{j+1} - u_j}{h} + Au_j + Bv_j, & j = 0, \dots, N-1 \\ \frac{v_{j+1} - v_j}{h} + Cu_j + Dv_j \\ u_0 \\ v_0 \end{cases}, \quad f_h \equiv \begin{cases} p(x_j) \\ q(x_j) \\ u_a \\ v_a \end{cases}$$

Тогда, введя векторы y_j , y_a , p_j и матрицу G :

$$y_j = \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}, \quad y_a = \begin{pmatrix} u_a \\ v_a \end{pmatrix}, \quad p_j = \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

разностную схему можем записать в виде

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} + G y_j = p_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (7.23)$$

$$y_0 = y_a.$$

Перепишем векторное разностное уравнение этой схемы в рекуррентном виде:

$$y_{j+1} = (E - hG) y_j + h p_j$$

и положим

$$R_h = (E - hG) = \begin{pmatrix} 1 - hA & -hB \\ -hC & 1 - hD \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

$$\bar{p}_j = p_j.$$

Тогда каноническая форма схемы (7.23) будет иметь такой вид:

$$\begin{cases} y_{j+1} = R_h y_j + h \bar{p}_j, \\ y_0 = y_a. \end{cases} \quad (7.25)$$

Приведем еще один пример записи разностной схемы в канонической форме.

Пример 7.4. Для задачи Коши (5.1) рассмотрим схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + \alpha y_j = \varphi_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a, \\ y_1 = y_* \equiv (1 - \alpha h)y_a + h\varphi(a). \end{cases} \quad (7.26)$$

Она имеет второй порядок аппроксимации по h (см. пример 5.1).

Как записать эту схему в канонической форме? Ведь уравнение связывает не два, а три последовательных значения: y_{j-1} , y_j и y_{j+1} . Покажем, как преодолеть эту трудность. Перепишем разностное уравнение:

$$y_{j+1} = y_{j-1} - 2\alpha h y_j + 2h\varphi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (7.27)$$

добавим к нему тождество

$$y_j = y_j, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (7.28)$$

и введем векторы

$$y_j = \begin{pmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Тогда систему уравнений (7.27), (7.28)

$$\begin{pmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_j \\ y_{j-1} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 2\varphi_j \\ 0 \end{pmatrix}$$

можно записать в векторном виде:

$$y_j = R_h y_{j-1} + h \vec{\rho}_{j-1}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (7.29)$$

где

$$R_h = \begin{pmatrix} -2\alpha h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho}_{j-1} = \begin{pmatrix} 2\varphi_j \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

Следовательно, каноническая форма схемы (7.26) имеет вид (7.25), где

$$y_a = \begin{pmatrix} y_* \\ y_a \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Таким образом, в последних двух примерах мы перешли в двумерное пространство Y векторов y и $\vec{\rho}$, при этом R_h — линейный матричный оператор $R_h : Y \rightarrow Y$ и

$$y_j = R_h^j y_0 + h \left[R_h^{j-1} \vec{\rho}_0 + R_h^{j-2} \vec{\rho}_1 + \dots + \vec{\rho}_{j-1} \right]. \quad (7.31)$$

Пусть в пространстве Y введена какая-либо норма $\|\cdot\|_Y$. Тогда из равенства (7.31) следует оценка:

$$\|y_j\|_Y \leq \|R_h^j\|_Y \cdot \|y_0\|_Y + h \left[\|R_h^{j-1}\|_Y \cdot \|\bar{\rho}_0\|_Y + \dots + \|\bar{\rho}_{j-1}\|_Y \right]. \quad (7.32)$$

На основе этой оценки можно доказать, что достаточным признаком устойчивости схемы является ограниченность норм степеней оператора перехода R_h .

Теорема 7.1 (о достаточном признаке устойчивости). Пусть линейная разностная схема $L_h y_h = f_h$ приведена к каноническому виду

$$\begin{aligned} y_j &= R_h y_{j-1} + h \bar{\rho}_{j-1}, \\ y_0 &= y_a, \end{aligned} \quad (7.33)$$

и пусть нормы, введенные в пространствах U_h , F_h , Y , подобраны так, что выполняются неравенства

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_1 \max_j \|y_j\|_Y, \quad y_j \in Y, \quad (A1)$$

$$\|y_0\|_Y \leq C_2 \|f_h\|_{F_h}, \quad (A2)$$

$$\|\bar{\rho}_j\|_Y \leq C_3 \|f_h\|_{F_h}. \quad (A3)$$

Тогда для устойчивости

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h} \quad (7.34)$$

достаточно, чтобы нормы степеней $\|R_h^j\|_Y$ оператора R_h были равномерно по h ограничены, т.е. чтобы выполнялось условие

$$\|R_h^j\|_Y \leq C_4, \quad j = 1, \dots, N. \quad (7.35)$$

При этом для постоянной C_y , входящей в определение устойчивости (7.34), справедлива оценка

$$C_y \leq C_1 C_4 (C_2 + l C_3), \quad (7.36)$$

где $l = b - a$.

Доказательство. Из оценки (7.32) следует неравенство

$$\max_j \|y_j\|_Y \leq \max_j \|R_h^j\|_Y \left[\|y_0\|_Y + Nh \max_j \|\bar{\rho}_j\|_Y \right].$$

А из него с учетом условий (A1) — (A3) имеем

$$\begin{aligned} \|y_h\|_{U_h} &\leq C_1 \max_j \|y_j\|_Y \leq C_1 \max_j \|R_h^j\|_Y \cdot [C_2 + lC_3] \cdot \|f_h\|_{F_h} \leq \\ &\leq C_1 C_4 [C_2 + lC_3] \|f_h\|_{F_h}, \end{aligned}$$

что и означает выполнение условия устойчивости (7.34) с некоторой постоянной C_y , удовлетворяющей неравенству (7.36). ■

Лемма 7.1. *Для того, чтобы нормы степеней оператора R_h были равномерно по h ограничены, достаточно выполнения неравенства*

$$\|R_h\|_Y \leq 1 + C'h, \quad (7.37)$$

где C' не зависит от h .

Доказательство. При выполнении условия (7.37) имеем

$$\|R_h^j\|_Y \leq \|R_h\|_Y^j \leq (1 + C'h)^j \leq e^{C'hj} \leq e^{C'hN} = e^{C'l} \equiv C_4. \quad \blacksquare$$

Займемся теперь анализом устойчивости рассмотренных ранее схем. Покажем выполнение условий теоремы 7.1 для схемы (7.23) из примера 7.3, каноническая форма которой имеет вид равенства (7.25). Введем нормы в пространствах U_h , F_h и в двумерном пространстве Y :

$$\|y_h\|_{U_h} = \left\| \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \right\|_{U_h} = \max \left[\max_j |u_j|, \max_j |v_j| \right], \quad (7.38)$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \left\| \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \\ u_a \\ v_a \end{pmatrix} \right\|_{F_h} = \max \left[|u_a|, |v_a|, \max_j |p_j|, \max_j |q_j| \right], \quad (7.39)$$

$$\|y\|_Y = \left\| \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \right\|_Y = \max \left[|y^{(1)}|, |y^{(2)}| \right]. \quad (7.40)$$

Теперь проверим, выполняются ли оценки для норм в условиях (A1) — (A3) теоремы 7.1. Очевидно, что

$$\|y_h\|_{U_h} \leq \max_{0 \leq j \leq N} \|y_j\|_Y,$$

$$\|y_0\|_Y \leq \|f_h\|_{F_h},$$

$$\|\tilde{\rho}_j\|_Y \leq \|f_h\|_{F_h},$$

т.е. $C_1 = C_2 = C_3 = 1$. Поэтому для доказательства устойчивости рассматриваемой схемы достаточно убедиться в справедливости неравенства (7.35).

Линейный оператор R_h действует из пространства Y в Y . Выпишем формулу для вычисления нормы этого оператора. Напомним, что нормой $\|T\|_X$ линейного оператора T , отображающего линейное нормированное пространство X в себя, называется число

$$\|T\|_X = \max_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X} \quad (7.41)$$

или

$$\|T\|_X = \max_{\|x\|=1, x \in X} \|Tx\|_X. \quad (7.42)$$

Для нормы оператора выполняются следующие свойства:

$$\|Tx\|_X \leq \|T\|_X \|x\|_X, \quad \forall x \in X, \quad (7.43)$$

$$\|\lambda T\|_X = |\lambda| \|T\|_X, \quad \lambda - \text{произвольное число}, \quad (7.44)$$

$$\|T^m\|_X \leq \|T\|_X^m. \quad (7.45)$$

Для вычисления нормы оператора R_h используем следующую лемму о норме матрицы.

Лемма 7.2 (о норме матричного оператора). Пусть T — произвольный линейный оператор, действующий из двумерного пространства Y в Y , заданный матрицей

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}.$$

Если в Y выбрана норма (7.40), то норма оператора T задается формулой:

$$\|T\|_Y = \max(|t_{11}| + |t_{12}|, |t_{21}| + |t_{22}|). \quad (7.46)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in Y$ и $\|\mathbf{y}\|_Y = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{y}\|_Y &= \max \left(\left| t_{11}y^{(1)} + t_{12}y^{(2)} \right|, \left| t_{21}y^{(1)} + t_{22}y^{(2)} \right| \right) \leq \\ &\leq \max \left(|t_{11}| |y^{(1)}| + |t_{12}| |y^{(2)}|, |t_{21}| |y^{(1)}| + |t_{22}| |y^{(2)}| \right) \leq \\ &\leq \max(|t_{11}| + |t_{12}|, |t_{21}| + |t_{22}|) \cdot \max \left(|y^{(1)}|, |y^{(2)}| \right) = \\ &= \max(|t_{11}| + |t_{12}|, |t_{21}| + |t_{22}|) \cdot \|\mathbf{y}\|_Y. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Отсюда

$$\|T\|_Y \leq \max(|t_{11}| + |t_{12}|, |t_{21}| + |t_{22}|).$$

С другой стороны, для любых $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}$ можно подобрать вектор $\mathbf{y} \in Y$, на котором неравенства (7.47) обращаются в равенства. Пусть, например, сумма модулей элементов в первой строке не меньше, чем во второй, т.е.

$$\max(|t_{11}| + |t_{12}|, |t_{21}| + |t_{22}|) = |t_{11}| + |t_{12}|. \quad (7.48)$$

Если элементы в первой строке матрицы T одного знака, то взяв вектор

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

получим

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{y}\|_Y &= \max \left(\left| t_{11}y^{(1)} + t_{12}y^{(2)} \right|, \left| t_{21}y^{(1)} + t_{22}y^{(2)} \right| \right) = \\ &= \max(|t_{11} + t_{12}|, |t_{21} + t_{22}|) = \max(|t_{11}| + |t_{12}|, |t_{21} + t_{22}|). \end{aligned}$$

Но $|t_{21} + t_{22}| \leq |t_{21}| + |t_{22}| \leq |t_{11}| + |t_{12}|$, поэтому

$$\|T\|_Y = |t_{11}| + |t_{12}|. \quad (7.49)$$

Если же элементы первой строки имеют разные знаки, то равенство будет достигаться на векторе

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В самом деле,

$$\|T\mathbf{y}\|_Y = \max(|t_{11} - t_{12}|, |t_{21} - t_{22}|) = \max(|t_{11}| + |t_{12}|, |t_{21} - t_{22}|)$$

и $|t_{21} - t_{22}| \leq |t_{11}| + |t_{12}|$, поэтому вновь получаем равенство (7.49). Таким образом, в случае (7.48)

$$\max_{\|\mathbf{y}\|=1, \mathbf{y} \in Y} \|T\mathbf{y}\|_Y = \max(|t_{11}| + |t_{12}|, |t_{21}| + |t_{22}|).$$

Это же равенство справедливо и в том случае, когда сумма модулей элементов в первой строке меньше, чем во второй.

Таким образом, норме (7.40) в Y соответствует норма (7.46) матричного оператора. ■

Вернемся к оценке нормы оператора R_h (7.24). Имеем

$$\begin{aligned} \|R_h\|_Y &= \left\| \begin{array}{cc} 1 - hA & -hB \\ -hC & 1 - hD \end{array} \right\|_Y = \\ &= \max[|1 - hA| + |hB|, |1 - hD| + |hC|] \leq 1 + hC', \end{aligned}$$

где $C' = \max[|A| + |B|, |D| + |C|]$. Согласно лемме 7.1 для норм степенной оператора R_h получим

$$\|R_h^j\|_Y \leq C_4 = e^{jC'}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, все условия теоремы 7.1 выполнены и устойчивость схемы (7.23) доказана. При этом для постоянной C_y в определении устойчивости (7.34) справедлива следующая оценка сверху:

$$C_y \leq (1 + l) e^{lC'}.$$

И наконец, докажем устойчивость разностной схемы (7.26) с канонической формой (7.29), (7.30) из примера 7.4. Нормы для этой схемы введем по формулам:

$$\|y_h\|_{U_h} = \max_j |y_j|, \quad (7.50)$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \left\| \begin{pmatrix} \varphi_j \\ y_a \\ y_* \end{pmatrix} \right\|_{F_h} = \max \left[|y_a|, |y_*|, \max_j |\varphi_j| \right], \quad (7.51)$$

$$\|y\|_Y = \left\| \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \right\|_Y = \max \left[|y^{(1)}|, |y^{(2)}| \right]. \quad (7.52)$$

Проверим теперь выполнение неравенств (A1) — (A3) из условия теоремы 7.1. Имеем

$$\|y_h\|_{U_h} \leq \max_{0 \leq j \leq N-1} \|y_j\|_Y,$$

$$\|y_0\|_Y \leq \|f_h\|_{F_h},$$

$$\|\vec{\rho}_j\|_Y \leq 2\|f_h\|_{F_h}.$$

Таким образом, указанные неравенства выполняются с постоянными $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ и $C_3 = 2$ соответственно.

Остается доказать неравенство (7.35). Но

$$\|R_h\|_Y = 1 + 2|\alpha|h,$$

что, согласно лемме 7.1, приводит к неравенству

$$\left\| R_h^j \right\|_Y \leq C_4 = e^{2|\alpha|h}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, схема (7.26) устойчива. Для нее выполняется неравенство (7.34) с постоянной

$$C_y \leq e^{2|\alpha|h} (1 + 2l).$$

7.5. Ограниченность норм степеней оператора перехода необходима для устойчивости. Итак, мы показали, что приведение разностной схемы $L_h y_h = f_h$ решения задачи Коши с постоянными коэффициентами к каноническому виду

$$y_{j+1} = R_h y_j + h \vec{\rho}_j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

y_0 — задано

может быть использовано для доказательства устойчивости: при условиях (A1) — (A3) оценка

$$\left\| R_h^j \right\|_Y \leq C, \quad j = 1, \dots, N \quad (7.53)$$

достаточна для устойчивости. Оказывается, при некоторых дополнительных условиях ограниченность норм степеней $\left\| R_h^j \right\|_Y$ становится также необходимым условием устойчивости.

Теорема 7.2 (необходимый признак устойчивости). Пусть существуют постоянные $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ такие, что выполняются неравенства

$$\|y_h\|_{U_h} \geq M_1 \max_j \|y_j\|_Y, \quad (B1)$$

$$\|y_0\|_Y \geq M_2 \|f_h\|_{F_h} \text{ при } \vec{\rho}_j \equiv 0. \quad (B2)$$

Тогда условие

$$\|R_h^j\|_Y \leq C, \quad j = 1, \dots, N \quad (7.54)$$

необходимо для устойчивости.

Доказательство. Пусть схема

$$y_j = R_h y_{j-1} + h \vec{\rho}_{j-1}$$

устойчива. В таком случае она должна быть устойчива и при $\vec{\rho}_j \equiv 0$ (нулевой правой части):

$$y_j = R_h y_{j-1}.$$

Перепишем последнюю схему в следующем виде:

$$y_j = R_h^j y_0.$$

В силу неравенства (B1) из условия теоремы получим оценку

$$\|y_h\|_{U_h} \geq M_1 \max_j \|y_j\|_Y = M_1 \max_j \|R_h^j y_0\|_Y.$$

Подберем теперь специальным образом вектор y_0 . Из определения нормы линейного оператора следует, что существует такой вектор $y_0^{(j)}$ из конечномерного пространства Y , что для данного j будет выполняться равенство $\|R_h^j y_0^{(j)}\|_Y = \|R_h^j\|_Y \cdot \|y_0^{(j)}\|_Y$. Пусть

$$\max_j \|R_h^j\|_Y = \|R_h^{j_0}\|_Y$$

и $y_0 = y_0^{(j_0)}$. При таком выборе y_0 получим:

$$\max_j \|R_h^j y_0\|_Y \geq \|R_h^{j_0} y_0\|_Y = \|R_h^{j_0}\|_Y \cdot \|y_0\|_Y = \max_j \|R_h^j\|_Y \cdot \|y_0\|_Y.$$

Следовательно,

$$\|y_h\|_{U_h} \geq M_1 \max_j \|R_h^j\|_Y \cdot \|y_0\|_Y \geq M_1 M_2 \max_j \|R_h^j\|_Y \cdot \|f_h\|_{F_h}.$$

Но поскольку схема устойчива, то

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h},$$

и, следовательно, постоянная C_y должна удовлетворять оценке

$$C_y \geq M_1 M_2 \cdot \max_j \|R_h^j\|_Y. \quad (7.55)$$

Отсюда и следует необходимость для устойчивости условия ограниченности (7.54) норм степеней оператора перехода. ■

Следствие. Пусть линейная разностная схема $L_h y_h = f_h$ приведена к каноническому виду и пусть нормы, введенные в пространствах U_h , F_h , Y , подобраны так, что выполняются неравенства (A1) — (A3), (B1), (B2). Тогда для устойчивости схемы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (7.53).

Возвратимся к нашим примерам 7.3 и 7.4 и покажем, что требуемые условия (B1), (B2) выполняются.

В примере 7.3 решение y_h схемы (7.25)

$$y_{j+1} = R_h y_j + h \vec{p}_j, \quad (7.56)$$

где

$$y_j = \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} u_a \\ v_a \end{pmatrix}, \quad R_h = \begin{pmatrix} 1 - hA & -hB \\ -hC & 1 - hD \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_j = \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix}$$

удовлетворяет оценке

$$\|y_h\|_{U_h} = \max \left[\max_j |u_j|, \max_j |v_j| \right] = \max_j [\max(|u_j|, |v_j|)] = \max_j \|y_j\|_Y,$$

т.е. в неравенстве (B1) можно взять постоянную $M_1 = 1$.

При $p_j \equiv 0$, $q_j \equiv 0$ имеем

$$\|y_0\|_Y = \max(|u_a|, |v_a|) = \max \left(|u_a|, |v_a|, \max_j |p_j|, \max_j |q_j| \right) = \|f_h\|_{F_h},$$

т.е. $M_2 = 1$. Таким образом, для схемы (7.25) условия (B1) и (B2) выполнены.

В примере 7.4 рассматривалась схема (7.26) с центральной разностью, которую мы записали в канонической форме (7.29). Для решения y_h легко получаем такие оценки:

$$\|y_h\|_{U_h} = \max_j |y_j| = \max_j [\max(|y_{j+1}|, |y_j|)] = \max_j \|y_j\|_Y,$$

т.е. $M_1 = 1$. Если $\varphi_j \equiv 0$, то

$$\|y_0\|_Y = \max(|y_a|, |y_*|) = \max\left(|y_a|, |y_*|, \max_j |\varphi_j|\right) = \|f_h\|_{F_h}.$$

Таким образом, постоянная в неравенстве (B2) равна $M_2 = 1$.

Из этих примеров видно, что, как правило, ограниченность норм степеней оператора перехода является необходимым и достаточным условием устойчивости. Однако получить оценку (7.53) ограниченности норм удается не всегда. Поэтому в §8 мы рассмотрим другие признаки устойчивости.

ЗАДАЧИ

7.1. Доказать устойчивость разностной схемы

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha y_{j+1} = \varphi_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

$$y_0 = y_a$$

и оценить сверху константу C_y , входящую в определение устойчивости.

7.2. Исследовать на сходимость разностную схему

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha \frac{y_j + y_{j+1}}{2} = \varphi(x_{j+1/2}), \quad j = 0, \dots, N-1,$$

$$y_0 = y_a,$$

для задачи Коши

$$\begin{aligned} y'(x) + \alpha y(x) &= \varphi(x), & a < x \leq b, & \quad \alpha = \text{const} > 0, \\ y(a) &= y_a. \end{aligned} \tag{7.57}$$

Здесь $hN = b - a$, $x_{j+1/2} = x_j + 0.5h$.

7.3. Показать, что решение разностной схемы

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + \alpha \frac{y_{j-1} + y_{j+1}}{2} &= \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_1 &= y_* \equiv (1 - \alpha h)y_a + h\varphi(a) \end{aligned} \quad (7.58)$$

сходится к решению дифференциальной задачи (7.57) со вторым порядком. Здесь $hN = b - a$, $\alpha = \text{const} > 0$.

7.4. Для решения задачи

$$\begin{aligned} y''(x) + \alpha y' + \beta y(x) &= \varphi(x), \quad a < x \leq b, \\ y(a) &= y_a, \\ y'(a) &= D, \quad \alpha = \text{const}, \beta = \text{const} \end{aligned}$$

построить устойчивую разностную схему.

7.5. Для задачи Коши (7.57) построена разностная схема с весами

$$\begin{aligned} \sigma \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + (1 - \sigma) \frac{y_j - y_{j-1}}{h} + \alpha y_j &= \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_1 &= y_* \equiv (1 - \alpha h)y_a + h\varphi(a), \end{aligned} \quad (7.59)$$

где $h = (b - a)/N$, $0 < \sigma < 1$. Показать, что 1) при $0,5 \leq \sigma < 1$ достаточные условия устойчивости для этой схемы выполняются и 2) найти оценку сверху для постоянной C_y , входящей в условие устойчивости.

§ 8. Спектральные признаки устойчивости

8.1. В этом параграфе мы рассмотрим два спектральных признака устойчивости. Но вначале будет доказана теорема о необходимом признаке ограниченности норм степеней оператора перехода, основанном на исследовании спектра оператора R_h .

Теорема 8.1 (необходимый признак ограниченности норм степеней оператора перехода). *Для выполнения при произвольном N оценки*

$$\|R_h^j\|_Y \leq C, \quad j = 1, \dots, N \quad (8.1)$$

необходимо, чтобы спектр $\sigma(R_h)$ матрицы R_h лежал на комплексной плоскости в круге

$$|\lambda| \leq 1 + C'h, \quad (8.2)$$

где C' не зависит от h , λ — корень уравнения $\det(R_h - \lambda E) = 0$.

Доказательство. Если $\lambda \in \sigma(R_h)$, то существует такой вектор y , что $R_h y = \lambda y$. Тогда очевидно, что $R_h^j y = \lambda^j y$ и, следовательно, $\|R_h^j y\|_Y = |\lambda|^j \|y\|_Y$. Из определения нормы отсюда получим:

$$\|R_h^j\|_Y \geq \frac{\|R_h^j y\|_Y}{\|y\|_Y} = |\lambda|^j. \quad (8.3)$$

Таким образом, для ограниченности $\|R_h^j\|_Y$ необходимо, чтобы были ограничены степени собственных значений

$$|\lambda|^j \leq C, \quad j = 1, \dots, N. \quad (8.4)$$

Для завершения доказательства теоремы докажем утверждение.

Лемма 8.1. Условие (8.4) выполняется тогда и только тогда, когда

$$|\lambda| \leq 1 + C'h, \quad (8.5)$$

где C' — некоторая постоянная, не зависящая от h .

Доказательство. Пусть неравенство (8.5) верно. Тогда

$$|\lambda|^j \leq (1 + C'h)^j \leq e^{C'hj} \leq e^{C'hN} = e^{C'l} \equiv C,$$

т.е. верным будет и неравенство (8.4).

Пусть, наоборот, выполняется условие (8.4). Если $C \leq 1$, то (8.5) очевидно выполняется. Рассмотрим теперь случай $C > 1$. Из того, что $|\lambda|^N \leq C$ следует

$$|\lambda| \leq C^{\frac{1}{N}} = C^{\frac{1}{d}} = e^{\frac{1}{d} \ln C} = e^{hd},$$

где $d = \frac{1}{l} \ln C$. Пусть h_0 — произвольное положительное число. Тогда для $h \in [0, h_0]$ верно неравенство $e^{hd} \leq 1 + C'h$, где постоянная $C' = \frac{e^{h_0 d} - 1}{h_0}$ не зависит от h . Таким образом, условие (8.5) выполнено. ■

Замечание. Расположение спектра $\sigma(R_h)$ внутри круга $|\lambda| \leq 1 + C'h$ не гарантирует устойчивость (см. пример из [4], с. 142).

Теорема 8.2 (необходимый спектральный признак устойчивости). Пусть линейная разностная схема $L_h u_h = f_h$ приведена к каноническому виду (7.33) и пусть нормы, введенные в пространствах U_h , F_h , Y , подобраны так, что выполняются неравенства (B1) и (B2). Тогда условие (8.2) необходимо для устойчивости.

Доказательство. Согласно теореме 7.2, для устойчивости схемы необходимо выполнение условия (7.54), а для этого, как следует из теоремы 8.1, необходимо, чтобы выполнялось условие (8.2). ■

Следствие. Пусть выполнены условия согласования норм (A1) — (A3), (B1), (B2) и разностная схема устойчива. Тогда для постоянной C_y , входящей в определение устойчивости, справедлива оценка

$$M_1 M_2 \cdot \max_{1 \leq j \leq N, \lambda \in \sigma(R_h)} |\lambda|^j \leq C_y \leq C_1 C_4 (C_2 + l C_3). \quad (8.6)$$

Доказательство. Оценка сверху доказана в теореме 7.1. С другой стороны, из неравенства (7.55), выведенного при доказательстве теоремы 7.2, и неравенства (8.3) получаем:

$$C_y \geq M_1 M_2 \cdot \max_j \left\| R_h^j \right\|_Y \geq M_1 M_2 \cdot |\lambda|^j,$$

где λ — произвольное число из спектра оператора R_h . ■

Пример 8.1 (на применение спектрального метода для исследования устойчивости). Для задачи Коши (5.1) рассмотрим схему первого порядка аппроксимации:

$$\begin{cases} 4 \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - 3 \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha y_j = \varphi_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a, \\ y_1 = y_* \equiv y_a. \end{cases} \quad (8.7)$$

Положив

$$y_j = \begin{pmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{pmatrix}, \quad y_a = \begin{pmatrix} y_a \\ y_a \end{pmatrix}, \quad R_h = \begin{pmatrix} 3 + \alpha h & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho}_{j-1} = \begin{pmatrix} -\varphi_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

запишем ее в канонической форме:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_j = R_h \mathbf{y}_{j-1} + h \vec{\rho}_{j-1}, \\ \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_a. \end{cases} \quad (8.9)$$

Нормы в пространствах U_h , F_h и Y введем по формулам (7.50) — (7.52). Очевидно, что условия (B1) и (B2) из теоремы 8.2 выполнены. Следовательно, для устойчивости схемы (8.7) необходимо, чтобы спектр оператора перехода R_h лежал в круге (8.2).

Собственные значения матрицы R_h вычисляются по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 + \alpha h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3 + \alpha h}{2}\right)^2 - 2}. \quad (8.10)$$

Отсюда видно, что второй корень λ_2 (со знаком «+») при $h \rightarrow 0$ стремится к числу 2, поэтому при малых h он не лежит в круге (8.2) и устойчивость схемы не имеет места. ■

8.2. Итак, мы получили необходимый спектральный признак устойчивости. При его использовании приходится приводить схему к каноническому виду и оценивать спектр оператора перехода.

Рассмотрим сейчас другой подход к исследованию устойчивости линейных разностных схем, который часто используется на практике и не требует построения оператора перехода. При применении этого метода требуется вычислять и оценивать корни *характеристического уравнения*.

Пусть есть разностная схема $L_h y_h = f_h$ с *постоянными коэффициентами*, причем разностное уравнение этой схемы является скалярным, однородным и имеет в узле x_j следующий вид:

$$a_{-s_1} y_{j-s_1} + \dots + a_0 y_j + \dots + a_{s_2} y_{j+s_2} = 0. \quad (8.11)$$

Характеристическим уравнением для разностного уравнения (8.11) называется алгебраическое уравнение степени $s_1 + s_2$ относительно λ :

$$a_{-s_1} + a_{-s_1+1} \lambda + \dots + a_0 \lambda^{s_1} + \dots + a_{s_2} \lambda^{s_1+s_2} = 0. \quad (8.12)$$

Оказывается, что общее решение разностного уравнения (8.11) выражается через корни $\lambda_1, \dots, \lambda_{s_1+s_2}$ характеристического уравнения (8.12), а частное решение однозначно определяется заданием значений y_j в $s_1 + s_2$ последовательных узлах.

Сейчас мы строго докажем последнее утверждение для разностных уравнений второго порядка с постоянными действительными коэффициентами

$$Ay_{j-1} + By_j + Cy_{j+1} = 0, \quad (8.13)$$

где $A \neq 0, C \neq 0$. Решение уравнения (8.13) однозначно определяется заданием y_j в любых двух последовательных узлах. Таким образом, общее решение однородного уравнения (8.13) зависит от двух параметров.

Пусть λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \quad (8.14)$$

соответствующего разностному уравнению (8.13). Очевидно, что $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

Лемма 8.2. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — различные действительные корни характеристического уравнения (8.14). Тогда решение разностной задачи

$$\begin{aligned} Ay_{j-1} + By_j + Cy_{j+1} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_1 &= y_* \end{aligned} \quad (8.15)$$

дается формулой

$$y_j = \alpha\lambda_1^j + \beta\lambda_2^j, \quad j = 0, \dots, N, \quad (8.16)$$

где

$$\beta = \frac{y_* - y_a\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \alpha = y_a - \beta. \quad (8.17)$$

Доказательство. Покажем, что сеточная функция (8.16) является решением разностного уравнения задачи (8.15) при любых α и β :

$$\begin{aligned} A(\alpha\lambda_1^{j-1} + \beta\lambda_2^{j-1}) + B(\alpha\lambda_1^j + \beta\lambda_2^j) + C(\alpha\lambda_1^{j+1} + \beta\lambda_2^{j+1}) &= \\ = \alpha\lambda_1^{j-1}(A + B\lambda_1 + C\lambda_1^2) + \beta\lambda_2^{j-1}(A + B\lambda_2 + C\lambda_2^2) &= 0. \end{aligned}$$

Параметры α и β , входящие в это решение, однозначно определяются заданием начальных данных в двух последовательных узлах x_0 и x_1 . В самом деле,

$$y_0 = \alpha\lambda_1^0 + \beta\lambda_2^0 = \alpha + \beta = y_a,$$

поэтому $\alpha = y_a - \beta$,

$$y_1 = \alpha \lambda_1^1 + \beta \lambda_2^1 = (y_a - \beta) \lambda_1 + \beta \lambda_2 = y_a \lambda_1 + \beta (\lambda_2 - \lambda_1) = y_*,$$

следовательно, $\beta = (y_* - y_a \lambda_1) / (\lambda_2 - \lambda_1)$. Таким образом, формулы (8.16), (8.17) определяют единственное решение задачи (8.15), а формула (8.16) задает общее решение уравнения (8.13). ■

Лемма 8.3. Если корни характеристического уравнения (8.14) кратные $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то решение задачи (8.15) на сетке $x_j = a + jh$, $h = (b - a)/N$, $j = 0, \dots, N$ записывается в виде

$$y_j = (\alpha + \beta x_j) \lambda^j, \quad j = 0, \dots, N, \quad (8.18)$$

где

$$\beta = \frac{y_* - y_a \lambda}{h \lambda}, \quad \alpha = y_a - \beta a. \quad (8.19)$$

Доказательство. Пусть α и β — произвольные постоянные. Тогда

$$\begin{aligned} A(\alpha + \beta(x_j - h)) \lambda^{j-1} + B(\alpha + \beta x_j) \lambda^j + C(\alpha + \beta(x_j + h)) \lambda^{j+1} = \\ = \alpha \lambda^{j-1} (A + B\lambda + C\lambda^2) + \beta x_j \lambda^{j-1} (A + B\lambda + C\lambda^2) + \\ + \beta h \lambda^{j-1} (-A + C\lambda^2) = 0, \end{aligned}$$

поскольку λ — корень характеристического уравнения и по теореме Виета $A/C = \lambda^2$.

Параметры α и β однозначно определяются заданными начальными условиями:

$$y_0 = (\alpha + \beta x_0) \lambda^0 = \alpha + \beta a = y_a,$$

$$y_1 = (\alpha + \beta(a + h)) \lambda = y_*.$$

Следовательно, общее решение уравнения (8.13) при $B^2 - 4AC = 0$ задается формулой (8.18), а формулы (8.18), (8.19) определяют в этом случае единственное решение разностной задачи (8.15). ■

Запишем теперь решение задачи (8.15) для случая комплексно-сопряженных корней $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$,

$$\lambda \equiv \lambda_1 = |\lambda| e^{i\varphi}, \quad \lambda_2 = |\lambda| e^{-i\varphi}, \quad |\lambda| = \sqrt{\frac{A}{C}}, \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{B}{2\sqrt{AC}}\right). \quad (8.20)$$

Лемма 8.4. Если корни характеристического уравнения (8.14) являются комплексно-сопряженными, то решение задачи (8.15) записывается в виде

$$y_j = \alpha \operatorname{Re} \lambda^j + \beta \operatorname{Im} \lambda^j, \quad j = 0, \dots, N, \quad (8.21)$$

где

$$\alpha = y_a, \quad \beta = \frac{y_* - y_a \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda}. \quad (8.22)$$

Доказательство. Пусть α и β — произвольные действительные постоянные. Подставим функцию y_j в левую часть уравнения (8.13):

$$\begin{aligned} & A(\alpha \operatorname{Re} \lambda^{j-1} + \beta \operatorname{Im} \lambda^{j-1}) + B(\alpha \operatorname{Re} \lambda^j + \beta \operatorname{Im} \lambda^j) + \\ & + C(\alpha \operatorname{Re} \lambda^{j+1} + \beta \operatorname{Im} \lambda^{j+1}) = \\ & = \alpha \operatorname{Re} [\lambda^{j-1} (A + B\lambda + C\lambda^2)] + \beta \operatorname{Im} [\lambda^{j-1} (A + B\lambda + C\lambda^2)] = 0. \end{aligned}$$

Выполнение начальных условий также очевидно:

$$y_0 = \alpha = y_a,$$

$$y_1 = \alpha \operatorname{Re} \lambda + \beta \operatorname{Im} \lambda = y_a \operatorname{Re} \lambda + \frac{y_* - y_a \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} \operatorname{Im} \lambda = y_*.$$

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения (8.13) задается формулой (8.21). ■

Итак, в любом случае решение однородного разностного уравнения второго порядка представляется через степени корней характеристического уравнения. В общем случае однородного уравнения (8.11) порядка $s_1 + s_2$ его общее решение также представляется тем или иным способом через степени корней $\lambda_1, \dots, \lambda_{s_1+s_2}$ характеристического уравнения (8.12). Эти корни отыскиваются в комплексной плоскости и могут быть как простыми, так и кратными.

Пусть разностная схема с постоянными коэффициентами и скалярным разностным уравнением $L_h y_h = f_h$ устойчива. Если схема устойчива, то она должна быть устойчивой и при нулевой правой части разностных уравнений. Решения таких однородных разностных уравнений представляются через степени корней характеристического уравнения и должны быть ограничены. А это приводит к требованию ограниченности степеней $|\lambda|^j$ для всех $j = 0, \dots, N$. Последнее, согласно лемме 8.1,

будет тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенству

$$|\lambda| \leq 1 + C'h. \quad (8.23)$$

Подведем итог приведенных выше рассуждений.

Для устойчивости разностной схемы с постоянными коэффициентами и скалярным разностным уравнением необходимо, чтобы корни характеристического уравнения удовлетворяли неравенству (8.23).

Пример 8.2. Для задачи Коши (5.1) возьмем схему (7.26) второго порядка аппроксимации. Характеристическое уравнение

$$-1 + 2\alpha h\lambda + \lambda^2 = 0, \quad (8.24)$$

соответствующее разностному уравнению этой схемы, имеет корни

$$\lambda_1 = -\alpha h - \sqrt{1 + \alpha^2 h^2}, \quad \lambda_2 = -\alpha h + \sqrt{1 + \alpha^2 h^2}. \quad (8.25)$$

Очевидно, что

$$|\lambda_{1,2}| \leq 1 + 2|\alpha|h,$$

т.е. необходимый признак (8.23) выполнен. ■

Пример 8.3. Для задачи Коши (5.1) рассмотрим схему (8.7). Характеристическое уравнение

$$2 - (\alpha h + 3)\lambda + \lambda^2 = 0 \quad (8.26)$$

имеет корни

$$\lambda_1 = \frac{3 + \alpha h}{2} - \sqrt{\left(\frac{3 + \alpha h}{2}\right)^2 - 2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 + \alpha h}{2} + \sqrt{\left(\frac{3 + \alpha h}{2}\right)^2 - 2}.$$

При малых h корень $\lambda_2 > 3/2$, т.е. условие (8.23) не выполняется и, следовательно, схема (8.7) не может быть устойчивой. ■

Замечание. Из примеров 8.1 и 8.3 следует, что множество корней характеристического уравнения (8.26) и спектр (8.10) оператора перехода R_h в канонической записи (8.9) совпадают. В примере 8.2

оператор перехода (7.30)

$$R_h = \begin{pmatrix} -2\alpha h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

также имеет спектр, совпадающий с множеством корней (8.25) характеристического уравнения (см. также задачу 8.6).

При подходящей записи канонической формы разностной схемы этот факт, как правило, имеет место и в общем случае, т.е. множество корней характеристического уравнения совпадает со спектром оператора перехода R_h . Поэтому необходимый признак устойчивости, основанный на исследовании корней характеристического уравнения, также называется *спектральным*.

8.3. Количественная характеристика устойчивости. Доказывая теорему о сходимости, мы получили для погрешности решения неравенство

$$\|y_h - (y)_h\|_{U_h} \leq C_a C_y h^p, \quad (8.27)$$

где C_a — постоянная из оценки погрешности аппроксимации

$$\|L_h(y_h) - f_h\|_{F_h} \leq C_a h^p, \quad (8.28)$$

а C_y — из оценки устойчивости

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h}. \quad (8.29)$$

Чем больше p , тем точнее схема. Однако из формулы (8.27) видно, что постоянные C_a и C_y также влияют на величину погрешности решения. Поэтому оценку практической пригодности той или иной разностной схемы можно делать, оценивая эти коэффициенты. В частности, мало знать, что схема устойчива, еще надо приблизительно знать величину коэффициента C_y . Надо, чтобы эта постоянная не была слишком большой. Для оценки коэффициента C_y будем использовать неравенства (8.6).

В качестве примера рассмотрим две схемы для задачи Коши:

$$\begin{cases} y' + \alpha y = 0, & 0 < x \leq 1, & \alpha = \text{const} > 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (8.30)$$

Ранее было показано, что схема Эйлера

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha y_j = 0, & j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad (8.31)$$

имеет первый порядок точности, а схема

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + \alpha y_j = 0, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = 1, \\ y_1 = y_* = 1 - \alpha h \end{cases} \quad (8.32)$$

— второй.

Для схемы (8.31) $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ и при $h < h_0 = 1/\alpha$

$$|R_h^j| = (1 - \alpha h)^j < 1,$$

т.е. $C_4 = 1$ (ср. с примером 7.2, в котором не предполагалось, что $\alpha > 0$), $M_1 = M_2 = 1$, $\lambda = 1 - \alpha h$, поэтому согласно (8.6) получим оценку $1 - \alpha h \leq C_y \leq 2$. Поскольку это неравенство должно выполняться при произвольном шаге h , откуда:

$$1 \leq C_y \leq 2. \quad (8.33)$$

Получим аналогичную оценку для схемы (8.32), основываясь на значениях постоянных, полученных в примере 7.4:

$$C_1 = C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = e^{2\alpha}, M_1 = 1, M_2 = 1.$$

Спектр оператора перехода

$$R_h = \begin{pmatrix} -2\alpha h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

этой схемы совпадает с множеством корней (8.25) характеристического уравнения (8.24). Поскольку $\alpha > 0$, то из теоремы Виета следует, что

$$\lambda_1 < -1, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad (8.34)$$

поэтому

$$\max_j (|\lambda_1|^j, |\lambda_2|^j) = |\lambda_1|^N = \left(\alpha h + \sqrt{1 + \alpha^2 h^2} \right)^{1/h}.$$

Следовательно (см. задачи 8.1, 8.2),

$$C_y \geq \sup_{0 < h \leq 1} \left(\alpha h + \sqrt{1 + \alpha^2 h^2} \right)^{1/h} = e^\alpha.$$

Итак, для схемы (8.32) оценка (8.6) выглядит так:

$$e^\alpha \leq C_y \leq 3e^{2\alpha}. \quad (8.35)$$

Отсюда следует, что при больших значениях α постоянная C_y второй схемы может иметь существенно большее значение, чем в первой схеме. Например, при $\alpha = 20$ для схемы (8.31) $C_y \leq 2$, а для схемы (8.32) $C_y \geq e^{20} > 10^8$. Значит, при одном и том же шаге h погрешность решения по схеме (8.32) второго порядка точности может оказаться существенно большей, чем погрешность решения, полученного по схеме (8.31) первого порядка точности.

Покажем, что это действительно может реализоваться. Точное решение

$$y(x) = e^{-\alpha x} \quad (8.36)$$

задачи Коши (8.30) убывает при возрастании x . При $h < h_0$ решение (8.37) схемы (8.31)

$$y_j = (1 - \alpha h)^j, \quad (8.37)$$

тоже убывает с ростом j , при этом (см. пример 6.2)

$$y_j = e^{-\alpha x_j} - h \frac{\alpha^2 x_j}{2} e^{-\alpha x_j} + O(h^2). \quad (8.38)$$

Согласно лемме 8.2 решение разностной схемы (8.32) выражается через корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения по формуле

$$y_j = \gamma \lambda_1^j + \beta \lambda_2^j, \quad (8.39)$$

где

$$\beta = \frac{y_* - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 + \alpha^2 h^2}},$$

$$\gamma = 1 - \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1 + \alpha^2 h^2}}.$$

Если учесть неравенства (8.34), то из формулы (8.39) следует, что в решении (8.39) схемы (8.32) присутствует «правильная» (убывающая)

составляющая решения λ_2^j , а также «паразитическая» (возрастающая) составляющая решения λ_1^j . Составляющая λ_1^j возрастает осциллируя и обуславливает большое значение C_y для схемы (8.32).

Чтобы сравнить численное и точное решения, перепишем решение (8.39) с точностью до членов порядка $O(h^3)$. Пусть по-прежнему $h < h_0 = 1/\alpha$. Тогда:

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2 h^2}{2} + O(h^4)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2 h^2}{2} + O(h^4)\right) = 1 - \frac{\alpha^2 h^2}{4} + O(h^4),$$

$$\gamma = 1 - \beta = \frac{\alpha^2 h^2}{4} + O(h^4),$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^j &= (-1)^j \left(\alpha h + \sqrt{1 + \alpha^2 h^2}\right)^j = (-1)^j \left(1 + \alpha h + O(h^2)\right)^j = \\ &= (-1)^j e^{\frac{x_j}{h} \ln(1 + \alpha h + O(h^2))} = (-1)^j e^{\frac{x_j}{h} (\alpha h + O(h^2))} = (-1)^j e^{\alpha x_j + O(h)} = \\ &= (-1)^j e^{\alpha x_j} + O(h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^j &= \left(-\alpha h + \sqrt{1 + \alpha^2 h^2}\right)^j = \left(-\alpha h + 1 + \frac{\alpha^2 h^2}{2} + O(h^4)\right)^j = \\ &= e^{\frac{x_j}{h} \ln\left(1 - \alpha h + \frac{\alpha^2 h^2}{2} + O(h^4)\right)} = e^{\frac{x_j}{h} \left[-\alpha h + \frac{\alpha^2 h^2}{2} - \frac{1}{2}(\alpha^2 h^2 - \alpha^3 h^3) - \frac{\alpha^3 h^3}{3} + O(h^4)\right]} = \\ &= e^{-\alpha x_j} \cdot e^{\frac{\alpha^3 h^2}{6} + O(h^3)} = e^{-\alpha x_j} \left(1 + \frac{\alpha^3 h^2}{6} x_j + O(h^3)\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} y_j &= \left(\frac{\alpha^2 h^2}{4} + O(h^4)\right) \left((-1)^j e^{\alpha x_j} + O(h)\right) + \\ &+ \left(1 - \frac{\alpha^2 h^2}{4} + O(h^4)\right) \left(e^{-\alpha x_j} + \frac{\alpha^3 h^2}{6} x_j e^{-\alpha x_j} + O(h^3)\right) = \\ &= e^{-\alpha x_j} + \frac{\alpha^2 h^2}{4} \left(-1 + \frac{2}{3} \alpha x_j\right) e^{-\alpha x_j} + (-1)^j \frac{\alpha^2 h^2}{4} e^{\alpha x_j} + O(h^3). \quad (8.40) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при больших значениях параметра α численное решение будет близко к точному только при очень малых шагах h . Посмотрим, например, какие шаги нужно брать, чтобы при $\alpha = 20$

относительная погрешность решения в точке $x = 1$ получилась не более 1 %:

$$\left| \frac{y_N - y(1)}{y(1)} \right| < 0.01,$$

где y_N — численное решение в узле $x_N = 1$, $y(1)$ — точное решение в точке $x = 1$. Из формулы (8.40) следует, что для этого надо взять шаг $h \approx 10^{-10}$. Чтобы достичь такой же точности по схеме (8.31), достаточно взять $h \approx 10^{-4}$.

Таким образом, для некоторых задач схемы первого порядка точности могут оказаться выгоднее схем второго порядка. Отметим, что при $\alpha = 1$ для достижения точности в 1 % по схеме (8.31) первого порядка точности надо взять $h < 0,005$, а при использовании схемы (8.32) второго порядка точности расчет можно вести с более крупным шагом $h \approx 0,07$.

Подводя итог нашим рассуждениям, можно сказать, что при изучении вопроса о пригодности или непригодности схемы для конкретной задачи надо не только исследовать аппроксимацию и устойчивость схемы, но и попытаться оценить значения постоянных, входящих в неравенство (8.27) для погрешности решения.

ЗАДАЧИ

8.1. Пусть $0,5 \leq \sigma < 1$. Тогда схема с весами (7.59) устойчива (см. решение задачи 7.5). Получить оценку снизу для постоянной C_y , входящей в условие устойчивости.

8.2. Показать, что схема с центральной разностью (7.26) является частным случаем схемы с весами и выписать оценки снизу и сверху для постоянной C_y , входящей в условие устойчивости.

8.3. При $\sigma = 1$ схема (7.59) переходит в схему для разностного уравнения первого порядка. Для такой схемы нужно ставить только одно граничное условие $y_0 = y_a$. Показать, что схема с весами (7.59) при $\sigma = 1$ устойчива. Получить оценку снизу и сверху для постоянной C_y , входящей в условие устойчивости.

8.4. Показать, что схема (7.58) является частным случаем схемы с весами и выписать оценки снизу и сверху для постоянной C_y , входящей в условие устойчивости.

8.5. Показать, что при $0 < \sigma < 1/2$ схема с весами (7.59) неустойчива.

8.6. Показать, что множество корней характеристического уравнения для разностного уравнения

$$dy_{j-2} + ay_{j-1} + by_j + cy_{j+1} = 0$$

и спектр оператора перехода совпадают, если разностное уравнение записать в канонической форме:

$$y_j = R_h y_{j-1},$$

где

$$y_j = \begin{pmatrix} y_{j+1} \\ y_j \\ y_{j-1} \end{pmatrix}, \quad y_{j-1} = \begin{pmatrix} y_j \\ y_{j-1} \\ y_{j-2} \end{pmatrix}, \quad R_h = \begin{pmatrix} -b/c & -a/c & -d/c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.7. Выписать решение разностной задачи

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - y_j &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ \frac{y_1 - y_0}{h} &= D, \end{aligned}$$

аппроксимирующей дифференциальную задачу

$$\begin{aligned} y''(x) - y &= 0, \quad a < x \leq b, \\ y(a) &= y_a, \\ y'(a) &= D. \end{aligned}$$

Проверить необходимое условие устойчивости, исследуя корни характеристического уравнения.

8.8. Выписать решение разностной задачи

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ \frac{y_1 - y_0}{h} &= D, \end{aligned}$$

аппроксимирующей дифференциальную задачу

$$\begin{aligned}y''(x) &= 0, & a < x \leq b, \\y(a) &= y_a, \\y'(a) &= D.\end{aligned}$$

Проверить необходимое условие устойчивости, исследуя корни характеристического уравнения.

8.9. Выписать решение разностной задачи

$$\begin{aligned}\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + y_j &= 0, & j = 1, \dots, N-1, \\y_0 &= 1, \\ \frac{y_1 - y_0}{h} &= 2,\end{aligned}$$

аппроксимирующей дифференциальную задачу

$$\begin{aligned}y''(x) + y(x) &= 0, & 0 < x \leq 1, \\y(0) &= 1, \\y'(0) &= 2.\end{aligned}$$

Проверить необходимое условие устойчивости, исследуя корни характеристического уравнения.

8.10. Рассмотрим две схемы (7.26) и (7.58), аппроксимирующие задачу Коши (7.57) с одинаковым вторым порядком по h и устойчивые. При больших значениях α постоянная C_y первой схемы имеет существенно большее значение, чем во второй схеме (см. задачи 8.2 и 8.4). На основе рассуждений, изложенных в пункте 8.3, можно сделать вывод, что при одном и том же шаге h погрешность решения по схеме (7.26) будет существенно большей, чем погрешность решения, полученного по схеме (7.58). Показать, что это действительно так, сравнив решения этих схем при малых h с точным решением задачи (8.30).

1.8.11. Предположим, что для решения задачи Коши (8.30) выбрана неустойчивая схема (8.7) первого порядка аппроксимации:

$$\begin{cases} 4 \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - 3 \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha y_j = 0, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = 1, \\ y_1 = 1. \end{cases} \quad (8.41)$$

Найти решение разностной задачи (8.41) и показать, что оно не сходится при $h \rightarrow 0$ к точному решению дифференциальной задачи (8.30). Таким образом, неустойчивая схема не является сходящейся, несмотря на то, что она аппроксимирует дифференциальную задачу.

§ 9. Исследование устойчивости нелинейных задач

Рассмотренные выше способы исследования устойчивости предназначены для разностных схем с постоянными коэффициентами, аппроксимирующих линейные уравнения. Пусть теперь схема построена для нелинейного уравнения

$$y' = f(x, y). \quad (9.1)$$

Простейший из методов исследования устойчивости нелинейных схем или схем с переменными коэффициентами состоит в исследовании устойчивости схем с постоянными коэффициентами, аппроксимирующих линеаризованные уравнения. Делается это следующим образом. Пусть интересующая нас интегральная кривая уравнения (9.1) проходит через точку (x_0, y_0) . Вблизи этой точки имеем

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Поэтому исходное уравнение с определенной точностью можем заменить на линейное уравнение (с постоянными коэффициентами):

$$y' + \alpha y = \varphi(x), \quad (9.2)$$

где

$$\alpha = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

$$\varphi(x) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Естественно, что схема, которую мы хотим применять для уравнения (9.1) должна быть устойчивой и при решении уравнения (9.2), аппроксимирующего исходное вблизи точки (x_0, y_0) , через которую проходит интегральная кривая. Для разных точек интегральной кривой величина коэффициента α будет различной. Поэтому схему надо проверить на уравнении (9.2) с целым набором значений α , достаточно полно описывающим диапазон изменения $\partial f/\partial y$ вдоль интегральной кривой.

Уравнение

$$y' + \alpha y = 0. \quad (9.3)$$

называется *модельным* для уравнения (9.1), и устойчивость схемы для нелинейного уравнения (9.1) проверяют на модельном уравнении (9.3).

При этом на практике часто ограничиваются лишь проверкой необходимого спектрального признака устойчивости. Если он выполнен, то дальнейшую проверку пригодности нелинейной схемы устанавливают путем численных расчетов по ней тестовых нелинейных задач.

Пример 9.1 (на исследование устойчивости модифицированного метода Эйлера). Формулу (1.21) модифицированного метода Эйлера для уравнения (9.1) можно переписать в виде разностного уравнения

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{1}{2}f(x_j, y_j) + \frac{1}{2}f(x_j + h, y_j + hf(x_j, y_j)), \quad (9.4)$$

поэтому устойчивость метода Эйлера можно исследовать методами, применяемыми для исследования устойчивости разностных схем.

Для модельного уравнения (9.3), т.е. при $f(x, y) \equiv -\alpha y$, разностное уравнение (9.4) запишется так:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = -\frac{1}{2}\alpha y_j - \frac{1}{2}\alpha (y_j - h\alpha y_j),$$

или

$$y_{j+1} = a(h)y_j,$$

где $a(h) = 1 - \alpha h (1 - 0.5\alpha h)$.

Характеристическое уравнение такой схемы

$$\lambda - a(h) = 0$$

имеет корень $\lambda = a(h)$, поэтому

$$|\lambda| \leq 1 + Ch. \quad (9.5)$$

Таким образом, для модельного уравнения необходимый спектральный признак устойчивости модифицированного метода Эйлера выполняется. ■

Пример 9.2. Формулу (3.6) двухшагового явного метода Адамса тоже можно записать в виде разностного уравнения:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{3}{2}f(x_j, y_j) - \frac{1}{2}f(x_{j-1}, y_{j-1}).$$

Для модельного уравнения последняя формула примет такой вид:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = -\frac{3}{2}\alpha y_j + \frac{1}{2}\alpha y_{j-1}. \quad (9.6)$$

Для разностного уравнения (9.6) второго порядка

$$y_{j+1} - \left(1 - \frac{3\alpha h}{2}\right) y_j - \frac{\alpha h}{2} y_{j-1} = 0$$

характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \left(1 - \frac{3\alpha h}{2}\right) \lambda - \frac{\alpha h}{2} = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\alpha h \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \alpha h + \frac{9\alpha^2 h^2}{4}}.$$

Используя разложение в ряд Тейлора

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots,$$

отсюда получим

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\alpha h \pm \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha h}{2}\right) + O(h^2).$$

Таким образом,

$$\lambda_1 = O(h), \quad \lambda_2 = 1 - \alpha h + O(h^2).$$

Поэтому необходимое условие устойчивости (9.5) также будет выполнено.

Общее решение разностного уравнения (9.6) имеет вид

$$y_j = \gamma \lambda_1^j + \beta \lambda_2^j,$$

Следовательно, составляющая численного решения λ_2^j ведет себя, как и решение дифференциальной задачи $y(x) = e^{-\alpha x}$, а «паразитическое» решение λ_1^j , вызванное выбором разностного уравнения второго порядка, стремится к нулю и на устойчивость не влияет. ■

ЗАДАЧИ

9.1. Формулы (2.6) трехстадийного метода Рунге—Кутты можно записать в виде одного разностного уравнения

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{1}{6} \left[f_j + 4f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f_j\right) + f\left(x_j + h, y_j - hf_j + 2f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f_j\right)\right) \right], \quad (9.7)$$

где $f_j = f(x_j, y_j)$. Исследовать устойчивость этой разностной схемы Рунге—Кутты.

9.2. Формулу (3.9) двухшагового неявного метода Адамса можно записать в виде разностного уравнения

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = \frac{1}{12} (5f(x_{j+1}, y_{j+1}) + 8f(x_j, y_j) - f(x_{j-1}, y_{j-1})). \quad (9.8)$$

Исследовать устойчивость этой неявной схемы Адамса.

§ 10. Численное решение жестких систем дифференциальных уравнений

Определение. Система m линейных дифференциальных уравнений

$$y' = Ay \quad (10.1)$$

называется жесткой, если все собственные значения μ_i , $i = 1, \dots, m$ матрицы A имеют отрицательную вещественную часть и

$$s = \frac{\min_{1 \leq i \leq m} \operatorname{Re} \mu_i}{\max_{1 \leq i \leq m} \operatorname{Re} \mu_i} \gg 1. \quad (10.2)$$

Число s называется коэффициентом жесткости.

На практике к жестким относятся системы, когда $s \geq 100$. Часто (в теории электрических цепей, в химической кинетике) встречаются системы с $s \approx 10^6$.

Пусть, например, поставлена задача Коши для такой системы:

$$\begin{aligned} y' &= \mu_1 y, & 0 < x \leq 1, \\ z' &= \mu_2 z, \\ y(0) &= 1, & z(0) = 1, \end{aligned} \quad (10.3)$$

при этом $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -10^6$. Она имеет точное решение

$$y(x) = e^{-x}, \quad z(x) = e^{-10^6 x}. \quad (10.4)$$

Попробуем использовать для этой задачи схему Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} &= \mu_1 y_j, \\ \frac{z_{j+1} - z_j}{h} &= \mu_2 z_j, & j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 &= 1, & z_0 = 1. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Легко убедиться в том, что эта схема устойчива (доказательство аналогично доказательству устойчивости схемы (7.23) из примера 7.3), постоянная C_y , введенная в определении устойчивости, удовлетворяет оценке (см. задачу 10.1)

$$e^{10^6/3.6} < C_y \leq 2e^{10^6}, \quad (10.6)$$

а спектр оператора перехода состоит из чисел $\lambda_1 = 1 + \mu_1 h$ и $\lambda_2 = 1 + \mu_2 h$. Большое значение константы C_y приводит к тому, что схема Эйлера будет пригодна для решения рассматриваемой задачи только при очень малых шагах h .

К тому же выводу можно прийти по-другому. Поскольку точное решение разностной задачи (10.5) вычисляется по формулам

$$y_j = (1 + \mu_1 h)^j = (1 - h)^j, \quad z_j = (1 + \mu_2 h)^j = (1 - 10^6 h)^j, \quad (10.7)$$

то при $|1 - 10^6 h| > 1$, т.е. когда $h > 2 \cdot 10^{-6}$, значения z_j с увеличением j начинают быстро расти и очень сильно отклоняться от точного решения (10.4). Величина z_j является хорошим приближением решения $z(x)$ при малых значениях h , например, при $h < 10^{-6}$. Таким образом, мы видим, что для того чтобы решения y_j и z_j хотя бы не возрастали с ростом j и тем самым схему Эйлера можно было бы использовать на практике,

должны выполняться неравенства

$$|1 + \mu_1 h| \leq 1, \quad |1 + \mu_2 h| \leq 1,$$

или

$$|\lambda_1| \leq 1, \quad |\lambda_2| \leq 1. \quad (10.8)$$

Отсюда получаем, что для практического применения схемы Эйлера для решения задачи (10.3), надо потребовать, чтобы

$$h \leq \frac{2}{-\mu_2} = 2 \cdot 10^{-6}.$$

С другой стороны, при $x > 2 \cdot 10^{-5}$, т.е. после десяти шагов расчета с $h = 2 \cdot 10^{-6}$, для точного решения $z(x)$ будем иметь

$$z(x) = e^{-10^6 x} < e^{-20} < 10^{-8},$$

и по существу после десяти шагов второе уравнение уже не нуждается в решении. Первая же компонента может интегрироваться с шагом $h \leq 2$. Таким образом, за выбор шага интегрирования системы отвечает та компонента, поведение которой несущественно за исключением малого интервала на оси Ox .

Эта ситуация характерна для дифференциальных уравнений, решение которых содержит члены, вклад которых очень мал, но для сохранения фактической устойчивости их нужно аппроксимировать очень точно (т.е. выбирать очень мелкий шаг). Уравнения с таким поведением решения выделяются в теории численных методов понятием *жестких уравнений*.

Мы рассмотрели случай системы двух независимых уравнений. Более сложные и интересные примеры относятся к системам связанных уравнений. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' + 101y' + 100y = 0, \quad 0 < x \leq 1. \quad (10.9)$$

Оно может быть преобразовано в эквивалентную систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= -101z - 100y, \end{aligned} \quad (10.10)$$

или

$$y' = Ay, \quad (10.11)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -101 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет собственные значения $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = -100$. Следовательно, коэффициент жесткости равен $s = 100$.

Если для уравнения (10.9) поставить начальные условия

$$\begin{aligned} y(0) &= 1,01, \\ y'(0) &= -2, \end{aligned}$$

то решением будет функция

$$y(x) = \frac{1}{100}e^{-100x} + e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (10.12)$$

После того, как x достигнет значения порядка 0,1, вклад первого члена в решение будет ничтожным. Однако при использовании метода Эйлера придется шаг выбирать очень малым, чтобы точнее аппроксимировать член e^{-100x} . Покажем, что это действительно так.

Перепишем схему Эйлера:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = Ay_j, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (10.13)$$

в каноническом виде

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= R_h y_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a \end{aligned} \quad (10.14)$$

где

$$y_j = \begin{pmatrix} y_j \\ z_j \end{pmatrix}, \quad y_a = \begin{pmatrix} y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,01 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R_h = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -100h & 1 - 101h \end{pmatrix},$$

и найдем спектр матрицы R_h , т.е. решим уравнение

$$\det(R_h - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & h \\ -100h & 1 - \lambda - 101h \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(1 - \lambda)^2 - 101h(1 - \lambda) + 100h^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = 1 - 100h, \quad \lambda_2 = 1 - h, \quad (10.15)$$

поэтому необходимый признак устойчивости схемы (10.13) будет выполняться (см. теорему 8.2).

Запишем решение разностной схемы (10.14) (см. задачу 10.2)

$$y_j = \frac{1}{100}\lambda_1^j + \lambda_2^j, \quad z_j = -\lambda_1^j - \lambda_2^j, \quad j = 0, \dots, N \quad (10.16)$$

и потребуем, чтобы сеточная функция y_j хотя бы не возрастала при увеличении j (как и решение (10.12) дифференциальной задачи). Тогда (как и в предыдущем примере) мы приходим к выводу, что числа λ_1 и λ_2 должны удовлетворять неравенствам (10.8). Отсюда возникает следующее ограничение на шаг интегрирования: $h \leq 0.02$.

Посмотрим, как можно избежать ограничений на шаг h при решении жестких систем уравнений. Возьмем несколько иную схему для той же системы (10.10)

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = Ay_{j+1}, \quad (10.17)$$

которая называется *неявной схемой Эйлера*. Из (10.17) следует

$$(E - hA)y_{j+1} = y_j.$$

Следовательно, каноническая форма схемы (10.17) имеет вид

$$y_{j+1} = (E - hA)^{-1}y_j,$$

т.е. $R_h = (E - hA)^{-1}$.

Для оценки устойчивости неявной схемы (10.17) вновь воспользуемся необходимым спектральным признаком устойчивости. Имеем

$$E - hA = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 100h & 1 + 101h \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$R_h = (E - hA)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 + 101h & h \\ -100h & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = 1 + 101h + 100h^2 > 0$.

Собственные значения матрицы R_h являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 + 101h - \Delta \cdot \lambda & h \\ -100h & 1 - \Delta \cdot \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (10.18)$$

Отсюда находим, что

$$\lambda_1 = \frac{1 + 100h}{\Delta}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + h}{\Delta}. \quad (10.19)$$

Видим, что необходимое условие устойчивости $|\lambda| \leq 1 + C'h$ выполняется, более того, при любом h выполняется неравенство $|\lambda| < 1$, т.е. условия (10.8) не накладывают ограничений на шаг интегрирования h и в этом смысле применение неявной схемы (10.17) для решения жесткой системы (10.10) предпочтительнее, чем использование явной схемы (10.13).

В заключение покажем, что для неявной схемы (10.17) выполняются и достаточные условия устойчивости, сформулированные в теореме 7.1.

Введем нормы в пространствах U_h , F_h и Y :

$$\|y_h\|_{U_h} = \left\| \begin{pmatrix} y_j \\ z_j \end{pmatrix} \right\|_{U_h} = \max \left[\max_j |y_j|, \max_j |z_j| \right], \quad (10.20)$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \left\| \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \right\|_{F_h} = \max \left[|y_a|, |z_a|, \max_j |p_j|, \max_j |q_j| \right], \quad (10.21)$$

$$\|y\|_Y = \left\| \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \right\|_Y = \max \left[|y^{(1)}|, |y^{(2)}| \right]. \quad (10.22)$$

Тогда получим очевидные неравенства:

$$\|y_h\|_{U_h} \leq \max_j \|y_j\|_Y, \quad \|y_0\|_Y \leq \|f_h\|_{F_h},$$

т.е. неравенства (A1), (A2) из теоремы 7.1 выполняются с постоянными $C_1 = C_2 = 1$. Очевидно, что неравенство (A3)

$$\|\bar{p}_j\|_Y \leq C_3 \|f_h\|_{F_h}$$

тоже выполняется, причем можно положить $C_3 = 0$.

Оценим теперь нормы степеней оператора R_h . Пусть \mathbf{v}^1 и \mathbf{v}^2 — собственные векторы матрицы R_h , отвечающие найденным собственным значениям (10.19):

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Представим матрицу R_h в виде $R_h = SDS^{-1}$, где столбцы матрицы S составлены из собственных векторов \mathbf{v}^1 и \mathbf{v}^2 , а диагональная матрица D образована из собственных значений λ_1 и λ_2 :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 100 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1+100h}{\Delta} & 0 \\ 0 & \frac{1+h}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\|R_h^j\| = \|SD^jS^{-1}\| \leq \|S\| \|S^{-1}\| \|D^j\|. \quad (10.23)$$

Согласно формуле (7.46), норме (10.22) в Y соответствуют следующие нормы матричных операторов:

$$\|D^j\| = \left| \frac{1+100h}{\Delta} \right|^j \leq 1,$$

$$\|S\| = 101,$$

$$\|S^{-1}\| = \left\| \frac{1}{99} \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{101}{99}.$$

Поэтому

$$\|S\| \|S^{-1}\| < 104.$$

Следовательно,

$$\|R_h^j\| \leq C_4 = 104.$$

Итак, получаем, что все условия теоремы 7.1 выполнены и, следовательно, рассматриваемая схема устойчива, при этом величина постоянной C_y в неравенстве

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h}$$

достаточно мала:

$$C_y \leq C_1 C_4 (C_2 + lC_3) = C_1 C_2 C_4 = 104.$$

Таким образом, общий подход к решению жестких систем дифференциальных уравнений заключается в использовании неявных методов, которые устойчивы при любой величине шага.

Замечание. При переходе к неявным методам, как правило, значительно усложняются методы решения получаемых разностных уравнений по сравнению с явными методами. Но, несмотря на это, неявные методы эффективнее явных и в настоящее время лучшей альтернативы им нет. Почти во всех стандартных программах решения жестких систем уравнений реализованы именно неявные методы.

ЗАДАЧИ

10.1. Доказать справедливость оценки (10.6).

10.2. Пусть собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы R_h задачи

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= R_h y_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a \end{aligned} \quad (10.24)$$

являются различными вещественными числами. Показать, что в таком случае решение разностной задачи (10.24) записывается в виде

$$y_j = \alpha_1 \lambda_1^j u_1 + \alpha_2 \lambda_2^j u_2, \quad (10.25)$$

где u_1, u_2 — собственные векторы матрицы R_h , соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2 , α_1 и α_2 — коэффициенты разложения $y_a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Показать, что решение задачи (10.14) задается формулой (10.16).

§ 11. Контрольная работа по теме «Локальная погрешность и аппроксимация»

ВАРИАНТ 1

11.v1.1. Доказать, что метод Рунге—Кутты

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{6}(\varphi_1 + 4\varphi_2 + \varphi_3), \\ \varphi_1 &= hf(x_j, y_j), \\ \varphi_2 &= hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{\varphi_1}{2}\right), \\ \varphi_3 &= hf(x_j + h, y_j - \varphi_1 + 2\varphi_2) \end{aligned} \quad (11.1)$$

для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \quad a < x \leq b, \\ y(a) &= y_a \end{aligned} \quad (11.2)$$

имеет локальную погрешность порядка $O(h^4)$.

11.v1.2. На равномерной сетке методом неопределенных коэффициентов построить разностный оператор, который на шаблоне x_{j-1}, x_j, x_{j+1} локально аппроксимирует в узле x_j дифференциальный оператор

$$Ly \equiv \frac{d^2y}{dx^2} \quad (11.3)$$

со вторым порядком.

11.v1.3. Дана дифференциальная задача:

$$\begin{cases} y'(x) + A(x)y(x) = f(x), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (11.4)$$

и разностная схема на равномерной сетке x_j :

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + (\alpha_1 A(x_j) + \alpha_2 A(x_{j+1})) \cdot (\beta_1 y_j + \beta_2 y_{j+1}) = f(x_j + \frac{h}{2}), \\ y_0 = y_a, & j = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (11.5)$$

Как следует выбрать постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ и β_2 , чтобы получить второй порядок аппроксимации дифференциальной задачи?

ВАРИАНТ 2

11.v2.1. Доказать, что метод Рунге—Кутты

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{4}(\varphi_1 + 3\varphi_3), \\ \varphi_1 &= hf(x_j, y_j), \\ \varphi_2 &= hf\left(x_j + \frac{h}{3}, y_j + \frac{\varphi_1}{3}\right), \\ \varphi_3 &= hf\left(x_j + \frac{2}{3}h, y_j + \frac{2}{3}\varphi_2\right) \end{aligned} \quad (11.6)$$

для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \quad a < x \leq b, \\ y(a) &= y_a. \end{aligned} \quad (11.7)$$

имеет локальную погрешность порядка $O(h^4)$.

11.v2.2. На неравномерной сетке с узлами $x_{j+1} = x_j + h_{j+1}$ методом неопределенных коэффициентов построить разностный оператор, который на шаблоне x_{j-1}, x_j, x_{j+1} локально аппроксимирует в узле x_j дифференциальный оператор

$$Ly \equiv \frac{dy}{dx} \quad (11.8)$$

со вторым порядком.

11.v2.3. Дана дифференциальная задача

$$\begin{cases} y'(x) + A(x)y(x) = f(x), & a < x \leq b, \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (11.9)$$

и разностная схема на равномерной сетке x_j :

$$\begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + A\left(x_j + \frac{h}{2}\right)(\beta_1 y_j + \beta_2 y_{j+1}) = \gamma_1 f(x_j) + \gamma_2 f(x_{j+1}), \\ y_0 = y_a, \quad j = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (11.10)$$

Как следует выбрать постоянные $\beta_1, \beta_2, \gamma_1$ и γ_2 , чтобы получить второй порядок аппроксимации дифференциальной задачи?

§ 12. Контрольная работа по теме «Устойчивость конечно-разностных схем»

ВАРИАНТ 1

12.v1.1. Доказать, что разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + \alpha y_{j+1} &= \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_1 &= y_a \end{aligned} \quad (12.1)$$

аппроксимирует дифференциальную задачу

$$\begin{aligned} y'(x) + \alpha y(x) &= \varphi(x), \quad a < x \leq b, \quad \alpha = \text{const} > 0, \\ y(a) &= y_a \end{aligned} \quad (12.2)$$

на ее решении $y(x)$ с первым порядком по h и устойчива. Получить оценки сверху и снизу для постоянной C_y , входящей в условие устойчивости.

12.v1.2. Доказать, что разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{-3y_j + 4y_{j+1} - y_{j+2}}{2h} + \alpha y_j &= \varphi_j, \quad j = 0, \dots, N-2, \\ y_0 &= y_a, \\ y_1 &= y_a \end{aligned} \quad (12.3)$$

аппроксимирует дифференциальную задачу (12.2) на ее решении $y(x)$ с первым порядком по h , но неустойчива.

12.v1.3. Предположим, что для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} y'(x) + \alpha y(x) &= 0, \quad 0 < x \leq 1, \quad \alpha = \text{const} > 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \quad (12.4)$$

выбрана неустойчивая схема (12.3) первого порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} \frac{-3y_j + 4y_{j+1} - y_{j+2}}{2h} + \alpha y_j &= 0, \quad j = 0, \dots, N-2, \\ y_0 &= 1, \\ y_1 &= 1. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Найти решение разностной задачи (12.5) и показать, что оно не сходится при $h \rightarrow 0$ к точному решению $y(x) = e^{-\alpha x}$ дифференциальной задачи (12.4). Таким образом, неустойчивая схема не является сходящейся, несмотря на то, что она аппроксимирует дифференциальную задачу.

ВАРИАНТ 2

12.v2.1. Доказать, что разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + \alpha y_{j-1} &= \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_1 &= y_a \end{aligned} \quad (12.6)$$

аппроксимирует дифференциальную задачу

$$\begin{aligned} y'(x) + \alpha y(x) &= \varphi(x), \quad a < x \leq b, \quad \alpha = \text{const} > 0, \\ y(a) &= y_a \end{aligned} \quad (12.7)$$

на ее решении $y(x)$ с первым порядком по h и устойчива. Для $h < 1/\alpha$ получить оценки сверху и снизу для постоянной C_y , входящей в условие устойчивости.

12.v2.2. Доказать, что разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} + 2y_j - 3y_{j-1}}{4h} + \alpha y_j &= \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_1 &= y_a \end{aligned} \quad (12.8)$$

аппроксимирует дифференциальную задачу (12.7) на ее решении $y(x)$ с первым порядком по h , но неустойчива.

12.v2.3. Предположим, что для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} y'(x) + \alpha y(x) &= 0, \quad 0 < x \leq 1, \quad \alpha = \text{const} > 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \quad (12.9)$$

выбрана неустойчивая схема (12.8) первого порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} + 2y_j - 3y_{j-1}}{4h} + \alpha y_j &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= 1, \\ y_1 &= 1. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Найти решение разностной задачи (12.10) и показать, что оно не сходится при $h \rightarrow 0$ к точному решению $y(x) = e^{-\alpha x}$ дифференциальной задачи (12.9). Таким образом, неустойчивая схема не является сходящейся, хотя и аппроксимирует дифференциальную задачу.

§ 13. Задания для практических занятий

В данном параграфе приведены задания к практическим занятиям на ЭВМ по теме «Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения». Основная цель этих заданий состоит в экспериментальной проверке тех свойств численных методов, которые были установлены теоретически на лекциях и семинарских занятиях, выявлении новых, важных для практики особенностей используемых методов, экспериментальном сравнении методов, имеющих одинаковую теоретическую точность, экспериментальном определении условий применимости численных методов.

По каждому заданию готовится **краткий отчет**, содержащий следующие пункты:

- постановка задачи;
- описание численного метода и алгоритма решения;
- сведения о теоретической точности используемых методов и их устойчивости;
- логическая схема программы;
- описание тестовых задач, таблицы и графики с результатами расчетов;
- анализ результатов численных экспериментов и выводы;
- ответы на дополнительные вопросы, приведенные в комментариях к заданиям.

При проверке преподавателем задания студенту необходимо:

- представить отчет;
- продемонстрировать работу программы на своих тестовых задачах и задачах, предложенных преподавателем;
- ответить на вопросы преподавателя по тексту программы, созданной студентом.

Задание 1. Для указанного преподавателем метода Рунге—Кутты p -го порядка точности, $p \geq 3$, экспериментально подтвердить, что этот метод имеет порядок точности, предсказываемый теорией.

На лекциях и семинарских занятиях мы рассмотрели методы Рунге—Кутты различного порядка точности. Было показано, что трехстадийные методы (2.6) и (2.7) имеют локальную погрешность порядка $O(h^4)$ (см. решения задач 11.v1.1 и 11.v2.1), четырехстадийный (2.8) —

$O(h^5)$ (задача 2.4). Относительно точности (глобальной погрешности) этих методов было указано, что она имеет порядки $O(h^3)$ и $O(h^4)$ соответственно. Модифицированные методы Эйлера (1.20) и (1.23) также относятся к классу методов Рунге—Кутты, поскольку их можно записать в виде двухстадийных методов (см. пункт 2.1). Глобальная погрешность этих методов имеет порядок $O(h^2)$ (см., например, решение задачи 1.8). Цель первого задания состоит в экспериментальной проверке порядка точности.

Если метод имеет p -й порядок точности, то при достаточно малых шагах интегрирования должно выполняться неравенство (6.2)

$$\|y_h - (y)_h\|_{U_h} \leq Ch^p.$$

Обозначим через $\varepsilon_h = y_h - (y)_h$ погрешность численного решения, полученного с шагом h , а через $\varepsilon_{\frac{h}{2}}$ — с уменьшенным вдвое шагом $h/2$. Тогда будут справедливы неравенства

$$\|\varepsilon_h\|_{U_h} \leq Ch^p, \quad \|\varepsilon_{\frac{h}{2}}\|_{U_h} \leq C \left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{Ch^p}{2^p},$$

т.е. с известной осторожностью можно утверждать, что при уменьшении шага интегрирования вдвое погрешность численного решения должна уменьшаться в 2^p раз, по крайней мере при малых h . Таким образом, стратегия численных экспериментов будет заключаться в решении выбранным методом тестовых задач с известными гладкими решениями на последовательности измельчающихся вдвое сеток и проверке соотношения

$$k = \frac{\|\varepsilon_{\frac{h}{2}}\|_{U_h}}{\|\varepsilon_h\|_{U_h}} \approx \frac{1}{2^p}. \quad (13.1)$$

Для проведения экспериментов необходимо выбрать достаточно широкий круг тестовых задач. Чем шире будет класс тестовых задач, тем достовернее будут выводы, сделанные на основе экспериментов. Таким образом, класс тестовых задач должен быть достаточно представительным, включающим в себя как задачи с плавно меняющимися решениями, так и задачи, решения которых могут быстро изменяться в малых зонах отрезка $[a, b]$, как линейные задачи, так и нелинейные. Например, задача Коши

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= xe^{-x^2}, & 0 < x \leq 2, \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (13.2)$$

имеет плавно меняющееся решение $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2}$, показанное на рис. 1. Задача Коши

$$\begin{aligned} y' + \alpha y &= \alpha e^{1-\alpha x}, & 0 < x \leq 1, & \quad \alpha = \text{const} > 1, \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (13.3)$$

имеет решение $y(x) = \alpha x e^{1-\alpha x}$, производные которого при больших значениях параметра α велики в окрестности внутренней точки $x_0 = 1/\alpha$, $0 < x_0 < 1$ (рис. 2).

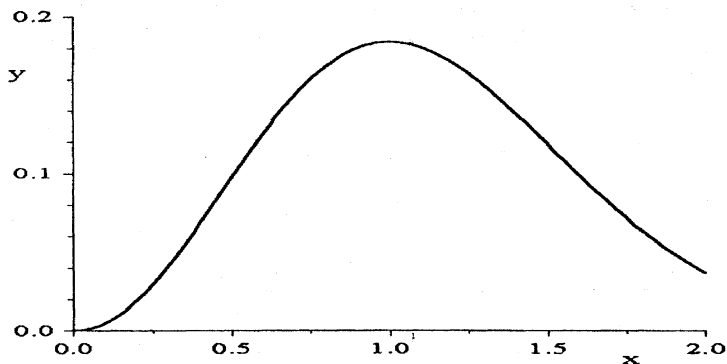


Рис. 1. График решения задачи (13.2)

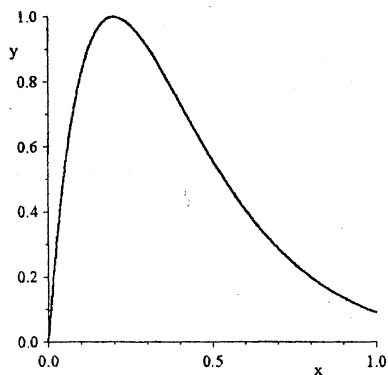


Рис. 2. График решения задачи (13.3) при $\alpha = 5$

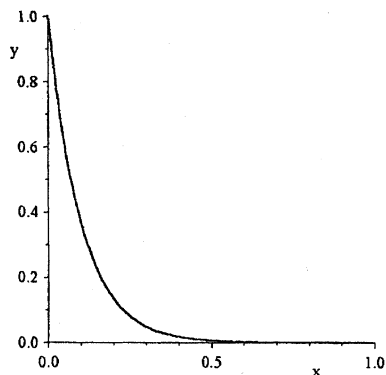


Рис. 3. График решения задачи (13.4) при $\alpha = 10$

Решение $y(x) = e^{-\alpha x}$ задачи Коши

$$\begin{aligned} y' + \alpha y &= 0, & 0 < x \leq 1, & \alpha = \text{const} > 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \quad (13.4)$$

при больших значениях параметра α резко меняется в окрестности начальной точки $x = 0$ (рис. 3).

В качестве примера в табл. 1 приведены результаты тестовых расчетов с применением метода Рунге—Кутты (2.8), теоретический порядок точности p которого равен четырем. Величина $1/k$ показывает, во сколько раз уменьшается локальная норма (5.4) погрешности численного решения на сетке с шагом $h/2$ по сравнению с величиной погрешности на сетке с шагом h .

Таблица 1

Результаты экспериментов по определению точности метода Рунге—Кутты (2.8)

N	Задача (13.2)		Задача (13.3) $\alpha = 20$		Задача (13.4) $\alpha = 20$	
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$
10	$0.565 \cdot 10^{-4}$	—	0.853	—	0.198	—
20	$0.313 \cdot 10^{-5}$	18.1	$0.331 \cdot 10^{-1}$	25.8	$0.712 \cdot 10^{-2}$	27.8
40	$0.181 \cdot 10^{-6}$	17.3	$0.122 \cdot 10^{-2}$	27.1	$0.291 \cdot 10^{-3}$	24.5
80	$0.108 \cdot 10^{-7}$	16.8	$0.610 \cdot 10^{-4}$	20	$0.148 \cdot 10^{-4}$	19.7
160	$0.662 \cdot 10^{-9}$	16.3	$0.335 \cdot 10^{-5}$	18.2	$0.831 \cdot 10^{-6}$	17.8
320	$0.409 \cdot 10^{-10}$	16.2	$0.196 \cdot 10^{-6}$	17.1	$0.493 \cdot 10^{-7}$	16.9
640	$0.254 \cdot 10^{-11}$	16.1	$0.119 \cdot 10^{-7}$	16.5	$0.300 \cdot 10^{-8}$	16.4
1280	$0.156 \cdot 10^{-12}$	16.3	$0.729 \cdot 10^{-9}$	16.3	$0.185 \cdot 10^{-9}$	16.2

Анализируя результаты расчетов, убеждаемся, что порядок точности метода (2.8) равен четырем, поскольку при малых h соотношение (13.1) выполняется.

? Объясните, почему при одном и том же числе шагов N глобальная погрешность численного решения задач (13.3) и (13.4) имеет существенно большее значение, чем для задачи (13.2).

На рис. 4 показаны графики точного решения задачи (13.3) и численного решения. Видно, что уже на сравнительно грубой сетке с числом узлов $N = 40$ эти графики почти не различимы. Для более детального исследования погрешности численного решения необходимо выводить

погрешность $\varepsilon(x_j) = |y(x_j) - y_j|$ в каждом узле в файл результатов расчетов, а также изобразить погрешность графически, используя логарифмический масштаб на оси ординат. На рис. 5 такие графики приведены на трех сетках. Видно, что погрешность численного решения при измельчении сетки действительно уменьшается, причем на любой сетке погрешность получается больше там, где решение задачи меняется резко, т.е. там, где велики производные решения дифференциальной задачи.

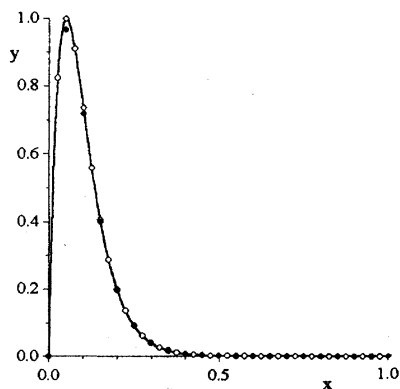


Рис. 4. Графики точного решения задачи (13.3) при $\alpha = 20$ (сплошная линия) и численного решения (\bullet — $N = 20$; \circ — $N = 40$)

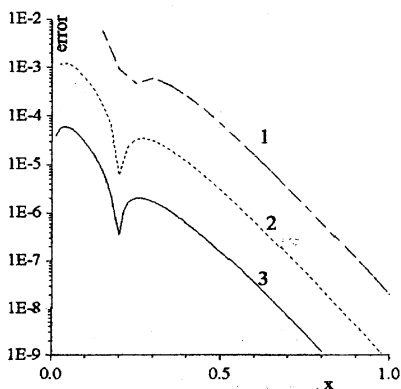


Рис. 5. Графики погрешности $\varepsilon(x_j)$ численного решения задачи (13.3) при $\alpha = 20$. 1 — $N = 20$; 2 — $N = 40$; 3 — $N = 80$

Логическая схема программы, реализующей любой из методов первого задания, может состоять из следующих предписаний:

- описать константы, переменные, массивы;
- ввести исходные данные;
- выполнить расчет;
- вывести результаты расчетов в файлы;
- нарисовать графики.

Ниже приведен пример программы, написанной на языке программирования Fortran и разработанной в соответствии с приведенной логической схемой. По этой программе проводились расчеты, результаты которых отражены в табл. 1.

PROGRAM rk

Головная программа для решения задачи Коши четырехстадийным методом Рунге—Кутты. Вводятся исходные данные, производится расчет, результаты записываются в файлы, строятся графики приближенного и точного решения.

```
PARAMETER (Nmax=10000)
INTEGER(4) N
REAL(8):: a, b, y_a, error, x(0:Nmax), y(0:Nmax), y_exact(0:Nmax),
=          er(0:Nmax)
EXTERNAL f
```

a — начальная точка интегрирования

b — конечная точка интегрирования

y_a — заданное начальное значение

N — количество узлов

Nmax — максимальное допустимое число узлов

error — глобальная погрешность.

Абсциссы узлов x_j запоминаются в массиве x(0:N)

Значения y_j приближенного решения запоминаются в массиве y(0:N)

Значения точного решения запоминаются в массиве y_exact(0:N)

Значения абсолютной погрешности в узлах x_j запоминаются в массиве er(0:N)

Функция f=f(x,y) задается пользователем в подпрограмме-функции f.

При переходе к другой задаче необходимо внести изменения:

в подпрограмму — функцию f(x,y), вычисляющую правую часть,
в подпрограмму — функцию exact(x), вычисляющую точное решение,
в файл init1.dat, в котором содержатся исходные данные для конкретной задачи:

a — начальная точка интегрирования

b — конечная точка интегрирования

y_a — заданное начальное значение

N — количество узлов

```
INTEGER(4) j
```

```
REAL(8) z
```

```
open(1,file='init1.dat') ! открывается файл с исходными данными
```

```
read(1,*) a ! вводятся исходные данные
```

```
read(1,*) b
```

```
read(1,*) y_a
```

```
read(1,*) N
```

```
close(1) ! закрывается файл с исходными данными
```

```
call RunK(a, b, y_a, N, x, y, f) ! расчет приближенного решения
```

```
error=0.d0
```

```
do j=0, N
```

```

    y_exact(j)=exact(x(j)) ! вычисляется точное решение в узлах x_j
    z=dabs(y(j)-y_exact(j)) ! определяется погрешность в точке x_j
    er(j)=z
    if(z.gt.error) error=z ! вычисляется глобальная погрешность
end do

!
open(2, file='results.dat') ! открывается файл для записи результатов
write(2,9900)
9900 format(4X,'j',9X,'x',14X,'y',12X,'exact',10X,'error')
9901 format(2X,I4,F15.3,2F15.7,E15.4)
9902 format(2X,'||y-y_h||=',E15.5)
9903 format(3F15.4,E15.4)
do j=0,N
    write(2,9901) j, x(j), y(j), y_exact(j), er(j) ! запись результатов
end do
write(2,9902) error
close(2) ! закрывается файл с результатами расчетов

!
call graph1(x,y,N) ! рисуются графики численного и точного решений

!
open(3,file='graphics.dat') ! открывается файл для записи результатов
! для последующей отрисовки графиков
! в системах визуализации
do j=0, N
    write(3,9903) x(j), y(j), y_exact(j), er(j)
end do
close(3)
END PROGRAM rk ! конец программы

```

Отметим, что приведенная здесь программа и все программы, которые встретятся нам позже, не являются идеальными, поскольку их можно в значительной мере усовершенствовать. Например, в блоке ввода исходных данных можно проводить анализ входной информации, организовать сообщения о результатах такого анализа и прекращение работы программы в случае ввода ошибочных данных (например, при $b \leq a$ или $N > N_{\max}$). Одна из возможностей выработать хороший стиль программирования — разбирать готовые программы, написанные на высоком профессиональном уровне [6, 15]. Безусловно, программа должна сопровождаться достаточно подробными комментариями.

Для работы приведенной головной программы (или программы верхнего уровня) нужен файл с исходными данными и программы среднего уровня, которые вызываются из головной:

- подпрограмма-функция f , вычисляющая правую часть дифференциального уравнения,
- подпрограмма-функция y_exact , вычисляющая точное решение,

— подпрограмма `Runk` для получения численного решения методом Рунге—Кутты,

— подпрограмма `graph1` для вывода графиков.

Исходные данные рекомендуется вводить из файла. В приведенном примере этот файл имеет имя `init1.dat` и содержит четыре числа с соответствующими комментариями. Например, при решении задачи (13.2) с $N = 10$ содержимое файла `init1.dat` будет следующим:

```
0.0d0      ! a — начальная точка интегрирования
2.0d0      ! b — конечная точка интегрирования
0.0d0      ! y_a — заданное начальное значение
10         ! N — количество узлов
```

Удобство ввода исходной информации из файла заключается в том, что для перехода к другому варианту решения той же задачи, например, с $N = 20$, нет необходимости заново вводить с клавиатуры все данные, достаточно лишь исправить в файле одно число:

```
0.0d0      ! a — начальная точка интегрирования
2.0d0      ! b — конечная точка интегрирования
0.0d0      ! y_a — заданное начальное значение
20         ! N — количество узлов
```

Недопустимо задавать исходную информацию непосредственно в программе, поскольку в таком случае при каждом исправлении входных данных программу придется перетранслировать.

Помимо входных данных, тестовая задача характеризуется правой частью дифференциального уравнения и точным решением. В программе и то и другое должно быть оформлено в виде отдельных программных модулей. Тогда можно будет легко осуществлять переход от одной тестовой задачи к другой, заменяя несколько операторов лишь в этих модулях и не исправляя расчетную часть программы. Например, при решении задачи (13.2) указанные модули среднего уровня могут иметь такой вид:

```
REAL FUNCTION f*8(x, y)      ! Правая часть задачи (13.2)
REAL(8):: x, y
f=x*(dexp(-x*x))-2.d0*y)
RETURN
END
```

```
REAL FUNCTION exact*8(x)    ! Точное решение задачи (13.2)
REAL(8) x
exact=0.5d0*x*x*dexp(-x*x)
RETURN
END
```

Если необходимо перейти, например, к тестированию методов на задаче (13.3), то изменения будут вноситься только в эти модули:

```
REAL FUNCTION f*8(x, y)      ! Правая часть задачи (13.3)
REAL(8):: x, y, alpha
PARAMETER (alpha=20.d0)
f=alpha*(dexp(1-alpha*x)-y)
RETURN
END
```

```
REAL FUNCTION exact*8(x)    ! Точное решение задачи (13.3)
REAL(8):: x, alpha
PARAMETER (alpha=20.d0)
exact=alpha*x*dexp(1-alpha*x)
RETURN
END
```

Расчетная часть программы реализована в подпрограмме среднего уровня RunK. Она может иметь такой вид:

```
SUBROUTINE RunK(a, b, y_a, N, x, y, f)
INTEGER(4) N
REAL(8):: a, b, y_a, x(0:N), y(0:N)
EXTERNAL f
```

НАЗНАЧЕНИЕ:

подпрограмма RunK предназначена для численного решения с помощью четырехстадийного метода Рунге—Кутты (2.8) задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$dy/dx=f(x,y), \quad a < x \leq b,$$
$$y(a)=y_a.$$

Абсциссы узлов x_j запоминаются в массиве $x(0:N)$

Значения y_j приближенного решения запоминаются в массиве $y(0:N)$

Функция $f=f(x,y)$ задается пользователем в подпрограмме-функции f .

ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

a — начальная точка интегрирования

b — конечная точка интегрирования

y_a — заданное начальное значение

N — заданное количество шагов

ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

x — массив с координатами узлов, $x(j)=a+jh$, $j = 0, \dots, N$, $h=(b-a)/N$

y — массив значений приближенного решения в узлах равномерной сетки

```
INTEGER(4) j
REAL(8):: x_j, y_j, h, xnew, ynew
x_j = a
y_j = y_a
```

```

x(0)= x_j
y(0)= y_j
h=(b-a)/N
do j=0, N-1
  call rk4 (x_j, y_j, h, xnew, ynew, f)
  x_j=xnew
  y_j=ynew
  x(j+1)=x_j
  y(j+1)=y_j
end do
RETURN
END

```

Из этой подпрограммы вызывается подпрограмма нижнего уровня **rk4**, в которой запрограммированы формулы метода Рунге—Кутты (2.8) для выполнения одного шага:

```

SUBROUTINE rk4 (x_j, y_j, h, xnew, ynew, f)
REAL(8):: x_j, y_j, h, xnew, ynew
EXTERNAL f

```

```

!
! НАЗНАЧЕНИЕ:
! с помощью метода Рунге—Кутты (2.8) по значению y_j
! приближенного решения в точке x_j вычисляется значение ynew
! приближенного решения в следующей точке xnew=x_j+h.
! Функция f=f(x,y) задается пользователем в подпрограмме-функции f.
!

```

```

REAL(8):: hh, xhh, f1, f2, f3, f4
hh=0.5d0*h
xhh=x_j+hh
xnew=x_j+h
f1=f(x_j, y_j)
f2=f(xhh, y_j+hh*f1)
f3=f(xhh, y_j+hh*f2)
f4=f(xnew, y_j+ h*f3)
ynew=y_j+h/6.d0*(f1+2.d0*(f2+f3)+f4)
RETURN
END

```

В приведенном примере программы верхнего уровня **rk** выдача результатов осуществляется в файл **results.dat** в пять колонок. Желательно выводить номер узла j , координату узла x_j , значение y_j численного решения, значение $y(x_j)$ точного решения в j -м узле и погрешность в каждом узле $\epsilon_j = |y(x_j) - y_j|$. В конце выдачи желательно напечатать значение глобальной погрешности. Для удобства изучения результатов расчетов желательно колонки озаглавить. Ниже приведено содержимое файла **results.dat**, полученного при тестировании метода на задаче (13.2) с $N = 10$:

j	x	y	exact	error
0	0.000	0.0000000	0.0000000	0.0000E+00
1	0.200	0.0192152	0.0192158	0.6011E-06
2	0.400	0.0681693	0.0681715	0.2220E-05
3	0.600	0.1255757	0.1255817	0.6060E-05
4	0.800	0.1687183	0.1687336	0.1523E-04
5	1.000	0.1839092	0.1839397	0.3057E-04
6	1.200	0.1705427	0.1705880	0.4527E-04
7	1.400	0.1379948	0.1380413	0.4649E-04
8	1.600	0.0989248	0.0989501	0.2527E-04
9	1.800	0.0634598	0.0634455	0.1432E-04
10	2.000	0.0366878	0.0366313	0.5653E-04

$\|y-y_h\| = 0.56529E-04$

Кроме выдачи результатов в файл, необходимо представить результаты расчетов в виде графиков, поскольку они дают наглядную информацию о поведении решения и об отклонении численного решения от точного. При этом надо учесть, что визуализация с хорошим качеством результатов расчетов требует очень больших усилий по программированию. С другой стороны, в настоящее время имеется очень много программных средств, позволяющих очень качественно отрисовать графики функций, заданных в виде таблицы. Это можно сделать, например, с помощью графической системы **Grapher** [16], процессора электронных таблиц **Excel** [17], системы символьных вычислений **Maple** [16], системы **Matlab** [10] и многих других. Поэтому в своей программе рекомендуется использовать простейшие приемы вывода графической информации и, кроме того, необходимо записывать результаты расчетов в отдельный файл, чтобы при необходимости (например, для подготовки отчета) иметь возможность получения высококачественных иллюстраций с помощью доступных графических систем.

В приведенном выше примере головной программы **rk** для отрисовки графиков вызывается подпрограмма среднего уровня **graph1**, в которой рисуются оси координат и сплошными линиями разных цветов изображаются графики численного и точного решений:

```

SUBROUTINE graph1(x, y, N)
  use dflib
  INTEGER N
  REAL(8):: x(0:N), y(0:N)

```

```

!
! подпрограмма для отрисовки графиков приближенного и точного решений
!

```

```

REAL(8):: x1, y1, h_exact, xmin, xmax, ymin, ymax
INTEGER(2):: status2, xpix, ypix
INTEGER(4):: status4

```

```

LOGICAL(2):: res, finvert=.true.
TYPE(wxycoord)wxy
TYPE(windowconfig) wc

```

```

!
res = setwindowconfig(wc)
if(.not. res) res = setwindowconfig(wc)
res=getwindowconfig(wc)
status4=setbkcolorrgb(#ffffff)
call clearscreen(%gclearscreen)
xpix=wc.numxpixels
ypix=wc.numypixels

```

! **Вычисляются максимальное и минимальное значения функций**

```

!
h_exact=(x(N)-x(0))/xpix
x1=x(0)
ymin=exact(x1)
ymax=ymin
do j=1, xpix
  x1=x1+h_exact
  ymin=min(exact(x1),ymin)
  ymax=max(exact(x1),ymax)
end do
y1 =minval(y)
ymin=min(ymin, y1)
y1 =maxval(y)
ymax=max(ymax, y1)
if(ymin.gt.0.d0) ymin=0.d0
if(ymax.lt.0.d0) ymax=0.d0
xmin=x(0)
xmax=x(N)

```

```

!
call setviewport(xpix/10, 10, xpix/2, ypix/3)
status2= setwindow(finvert, xmin, ymin, xmax, ymax)

```

```

!
x1=0.
y1=0.
status2=setcolor(8.2)
call moveto_w(x1, y1, wxy)
x1=xmax
y1=0.
status2=lineto_w(x1, y1)      ! рисуется ось абсцисс
x1=0.
y1=ymin
call moveto_w(x1, y1, wxy)
x1=0.
y1=ymax
status2=lineto_w(x1, y1)     ! рисуется ось ординат
status2=setcolor(9.2)
x1=x(0)
y1=y(0)

```

```

call moveto_w(x1, y1, wxy)
do j=1,N
  x1=x(j)
  y1=y(j)
  status2=lineto_w(x1, y1) ! рисуется график численного решения
end do
status2=setcolor(5,2)
x1=x(0)
y1=exact(x1)
call moveto_w(x1, y1, wxy)
do j=1, xpix
  x1=x1+h_exact
  y1=exact(x1)
  status2=lineto_w(x1, y1) ! рисуется график точного решения
end do
RETURN
END

```

Пример подпрограммы на языке Pascal, выполняющей аналогичные действия, можно найти в пособии [7].

Для высококачественной отрисовки графиков результаты расчетов записываются в файл `graphics.dat`. Например, при решении той же задачи (13.2) при $N = 10$ этот файл, содержащий 4 колонки со значениями x_j , y_j , $y(x_j)$ и ε_j , будет таким:

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000E+00
0.2000	0.0192	0.0192	0.6011E-06
0.4000	0.0682	0.0682	0.2220E-05
0.6000	0.1256	0.1256	0.6060E-05
0.8000	0.1687	0.1687	0.1523E-04
1.0000	0.1839	0.1839	0.3057E-04
1.2000	0.1705	0.1706	0.4527E-04
1.4000	0.1380	0.1380	0.4649E-04
1.6000	0.0989	0.0990	0.2527E-04
1.8000	0.0634	0.0634	0.1432E-04
2.0000	0.0367	0.0366	0.5653E-04

Рисунки 4 и 5 нарисованы с использованием графической системы Grapher по данным, записанным в нескольких файлах типа `graphics.dat`.

Задание 2. Для указанного преподавателем метода Эйлера докажите экспериментально, что этот метод, имея порядок точности, предсказываемый теорией, является менее точным, чем использованный Вами метод Рунге—Кутты из первого задания.

В качестве такого доказательства могли бы послужить результаты численного решения тестовых задач с помощью двух выбранных методов. Например, если для первого задания выбран метод Рунге—Кутты (2.8) и эксперименты проведены на задачах (13.2) – (13.4), то на этих же задачах надо провести и эксперименты с методом Эйлера. Возьмем, к примеру, модифицированный метод Эйлера (1.20), имеющий второй порядок точности по h . Результаты расчетов с помощью этого метода сведены в табл. 2. Они подтверждают второй порядок точности метода (1.20). Сравнение с табл. 1 показывает, что метод Рунге—Кутты является более точным, как и предсказывает теория. Отметим, что если Ваша программа структурирована в соответствии с приведенной выше логической схемой, то переход от метода Рунге—Кутты к методу Эйлера потребует лишь замены подпрограммы нижнего уровня `rk4`.

Таблица 2

Результаты экспериментов по определению точности модифицированного метода Эйлера (1.20)

N	Задача (13.2)		Задача (13.3) $\alpha = 20$		Задача (13.4) $\alpha = 20$	
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$
10	$0.663 \cdot 10^{-2}$	—	3.086	—	1.0	—
20	$0.154 \cdot 10^{-2}$	4.3	0.5	6.2	0.132	7.6
40	$0.371 \cdot 10^{-3}$	4.2	$0.739 \cdot 10^{-1}$	6.8	$0.227 \cdot 10^{-1}$	5.8
80	$0.912 \cdot 10^{-4}$	4.1	$0.148 \cdot 10^{-1}$	5.0	$0.465 \cdot 10^{-2}$	4.9
160	$0.226 \cdot 10^{-4}$	4.0	$0.323 \cdot 10^{-2}$	4.6	$0.105 \cdot 10^{-2}$	4.4
320	$0.562 \cdot 10^{-5}$	4.0	$0.757 \cdot 10^{-3}$	4.3	$0.251 \cdot 10^{-3}$	4.2
640	$0.140 \cdot 10^{-5}$	4.0	$0.183 \cdot 10^{-3}$	4.1	$0.613 \cdot 10^{-4}$	4.1
1280	$0.350 \cdot 10^{-6}$	4.0	$0.450 \cdot 10^{-4}$	4.1	$0.151 \cdot 10^{-4}$	4.1

Задание 3. Для выбранного метода Эйлера примените правило увеличения точности приближенного решения и экспериментально докажете, что порядок точности метода действительно повышается на один порядок по h .

Формула метода повышенного порядка точности имеет вид (2.16). Для реализации метода интегрирование от x_j к x_{j+1} проводится дважды: первый раз с шагом h , а потом с использованием двух шагов длины $h/2$. Затем берется линейная комбинация (2.16) полученных в узле x_{j+1} приближенных значений. В качестве примера в табл. 3 приведены результаты расчетов с помощью модифицированного метода Эйлера (1.20)

второго порядка точности, к которому применено правило повышения точности. Анализируя результаты экспериментов, можно сделать вывод о том, что новый метод имеет уже третий порядок точности.

Таблица 3

Результаты экспериментов по определению точности модифицированного метода Эйлера (1.20) после применения правила повышения точности

N	Задача (13.2)		Задача (13.3) $\alpha = 20$		Задача (13.4) $\alpha = 20$	
	$\ \varepsilon_h\ U_h$	1/k	$\ \varepsilon_h\ U_h$	1/k	$\ \varepsilon_h\ U_h$	1/k
10	$0.264 \cdot 10^{-3}$	—	0.626	—	0.135	—
20	$0.290 \cdot 10^{-4}$	9.1	$0.681 \cdot 10^{-1}$	9.2	$0.137 \cdot 10^{-1}$	9.9
40	$0.337 \cdot 10^{-5}$	8.6	$0.580 \cdot 10^{-2}$	11.7	$0.129 \cdot 10^{-2}$	10.6
80	$0.406 \cdot 10^{-6}$	8.3	$0.619 \cdot 10^{-3}$	9.4	$0.139 \cdot 10^{-3}$	9.3
160	$0.499 \cdot 10^{-7}$	8.1	$0.702 \cdot 10^{-4}$	8.8	$0.161 \cdot 10^{-4}$	8.6
320	$0.618 \cdot 10^{-8}$	8.1	$0.836 \cdot 10^{-5}$	8.4	$0.194 \cdot 10^{-5}$	8.3
640	$0.769 \cdot 10^{-9}$	8.0	$0.102 \cdot 10^{-5}$	8.2	$0.238 \cdot 10^{-6}$	8.2
1280	$0.959 \cdot 10^{-10}$	8.0	$0.126 \cdot 10^{-6}$	8.1	$0.295 \cdot 10^{-7}$	8.1

Ниже приведен пример подпрограммы среднего уровня с реализацией метода повышения точности:

```
SUBROUTINE Eul2Ac(a, b, y_a, N, x, y, f)
INTEGER(4) N
REAL(8):: a, b, y_a, x(0:N), y(0:N)
EXTERNAL f
```

! НАЗНАЧЕНИЕ:

! подпрограмма Eul2Ac предназначена для численного решения
! задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения
! первого порядка

! $dy/dx=f(x,y), \quad a < x \leq b,$
! $y(a)=y_a$

! модифицированным методом Эйлера с применением правила
! увеличения точности на один порядок по h.
! Абсциссы узлов x_j запоминаются в массиве $x(0:N)$
! Значения y_j приближенного решения запоминаются в массиве $y(0:N)$
! Функция $f=f(x,y)$ задается пользователем в подпрограмме-функции f.

! ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

! a — начальная точка интегрирования
! b — конечная точка интегрирования
! y_a — заданное начальное значение


```

!   N — заданное количество шагов
!   ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
!   x — массив с координатами узлов, x(j)=a+jh, j = 0, ..., N, h=(b-a)/N
!   y — массив значений приближенного решения в узлах равномерной сетки
!
INTEGER(4) j
REAL(8):: x-j, y-j, h, hh, xhh, yhh, xnew1, ynew1, xnew2, ynew2
x-j = a
y-j = y-a
x(0) = a
y(0) = y-a
h = (b-a)/N
hh = 0.5d0*h
do j=0, N-1
!
!   трижды вызывается подпрограмма нижнего уровня EulMod, в которой
!   реализованы формулы (1.20) модифицированного метода Эйлера
!   call EulMod (x-j, y-j, h, xnew1, ynew1, f)
!   call EulMod (x-j, y-j, hh, xhh, yhh, f)
!   call EulMod (xhh, yhh, hh, xnew2, ynew2, f)
!
!   используется правило (2.16) повышения точности
!   ynew1=ynew2+1.d0/3.d0*(ynew2-ynew1)
!
!   x-j = xnew1
!   y-j = ynew1
!   x(j+1) = x-j
!   y(j+1) = y-j
!   end do
!   RETURN
!   END

```

Задание 4. *Используя правило Рунге, провести расчеты по методу Рунге—Кутты из первого задания с контролем локальной погрешности численного решения.*

Правило Рунге для контроля локальной погрешности одношаговых методов описано в пункте 2.2. Локальная ошибка не должна быть ни слишком большой, ни слишком маленькой. Добиться этого можно регулировкой шага h . Желаемое значение ε_{loc} локальной погрешности задается пользователем и на каждом шаге локальная погрешность, вычисляемая по формуле (2.14)

$$\varepsilon_{loc,j+1} = \frac{2^p}{2^p - 1} \left[y_{\frac{h}{2},j+1} - y_{h,j+1} \right], \quad (13.5)$$

сравнивается с ее желаемым значением. Если

$$|\varepsilon_{loc,j+1}| \leq \varepsilon_{loc}, \quad (13.6)$$

то приближенное решение в узле x_{j+1} полагается равным $y_{\frac{1}{2},j+1}$, расчет в узле x_{j+1} заканчивается, а в качестве «пробного» шага для вычисления следующего приближенного значения y_{j+2} берется удвоенный текущий шаг, т.е. полагается $x_{j+2} = x_{j+1} + 2h$ (большинство стандартных программ устроено однако так, чтобы сделать несколько равных шагов, прежде чем разрешить смену шага). Если же неравенство (13.6) не выполняется, то текущий шаг уменьшается вдвое, вычисляется новое значение локальной погрешности (13.5) и вновь проверяется неравенство (13.6). И так до тех пор, пока оно не будет выполнено. При этом задается некоторое минимальное допустимое значение шага h_{min} . Таким образом, главная цель счета с контролем точности заключается в том, чтобы провести расчет с максимально большими шагами и с приблизительно одинаковой заданной погрешностью на каждом шаге расчета, т.е. чтобы получить заданную точность с минимальными вычислительными затратами. Известны и другие стратегии контроля локальной погрешности [6].

Таблица 4

Результаты экспериментов по применению метода Рунге—Кутты (2.8) с контролем локальной погрешности

ϵ_{loc}	Задача (13.2)		Задача (13.3) $\alpha = 20$		Задача (13.4) $\alpha = 20$	
	$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	N	$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	N	$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	N
10^{-4}	$0.900 \cdot 10^{-5}$	10	$0.603 \cdot 10^{-5}$	25	$0.573 \cdot 10^{-5}$	19
10^{-5}	$0.644 \cdot 10^{-6}$	16	$0.730 \cdot 10^{-6}$	40	$0.831 \cdot 10^{-6}$	28
10^{-6}	$0.252 \cdot 10^{-6}$	22	$0.161 \cdot 10^{-6}$	60	$0.126 \cdot 10^{-6}$	44
10^{-7}	$0.110 \cdot 10^{-7}$	35	$0.166 \cdot 10^{-7}$	94	$0.216 \cdot 10^{-7}$	69
10^{-8}	$0.294 \cdot 10^{-8}$	61	$0.309 \cdot 10^{-8}$	158	$0.300 \cdot 10^{-8}$	106
10^{-9}	$0.509 \cdot 10^{-9}$	86	$0.614 \cdot 10^{-9}$	234	$0.459 \cdot 10^{-9}$	173
10^{-10}	$0.472 \cdot 10^{-10}$	140	$0.637 \cdot 10^{-10}$	377	$0.839 \cdot 10^{-10}$	272
10^{-11}	$0.109 \cdot 10^{-10}$	241	$0.118 \cdot 10^{-10}$	629	$0.115 \cdot 10^{-10}$	416
10^{-12}	$0.196 \cdot 10^{-11}$	346	$0.241 \cdot 10^{-11}$	925	$0.179 \cdot 10^{-11}$	687

В табл. 4 приведены результаты расчетов по методу Рунге—Кутты четвертого порядка точности с контролем локальной погрешности при задании различных значений ϵ_{loc} . Величина $\|\epsilon_h\|_{U_h}$ по-прежнему обозначает глобальную погрешность, количество выполненных шагов обозначено через N . Отметим, что в отличие от расчетов на равномерных сетках, здесь число N не задается до проведения расчета, оно определяется в ходе расчета и зависит от заданной желаемой локальной

погрешности ε_{loc} . Естественно, что число выполненных шагов будет тем больше, чем меньше задано значение ε_{loc} . Сравнение с табл. 1 показывает, что для получения сопоставимой точности нужно задавать гораздо большее число узлов равномерной сетки, чем того требует метод с контролем локальной погрешности. Так, при решении задачи (13.3) на равномерной сетке с 1280 узлами глобальная погрешность равна $0.729 \cdot 10^{-9}$, а на неравномерной сетке примерно такая же погрешность ($0.614 \cdot 10^{-9}$) получается на 234 узлах.

На рис. 6 показано, как изменяется погрешность на отрезке $[a, b]$ при задании различных допустимых значений ε_{loc} . Сравнивая его с рис. 5, видим, что она действительно ведет себя более равномерно, чем при расчете с постоянным шагом h . На рис. 7 показано, как изменяется шаг интегрирования. Видно, что в зонах быстрого изменения решения шаги малы, а при переходе к области плавного поведения решения шаг интегрирования растет.

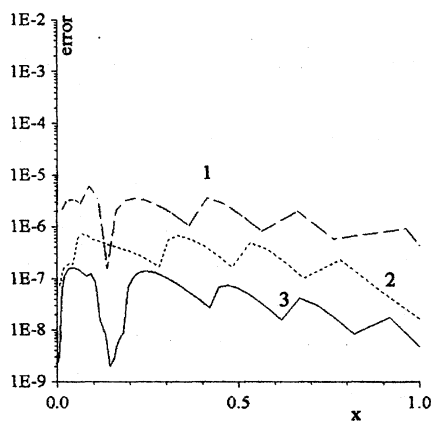


Рис. 6. Поведение погрешности $\varepsilon(x_j)$ численного решения задачи (13.3) при $\alpha = 20$. 1 - $\varepsilon_{loc} = 10^{-4}$; 2 - $\varepsilon_{loc} = 10^{-5}$; 3 - $\varepsilon_{loc} = 10^{-6}$

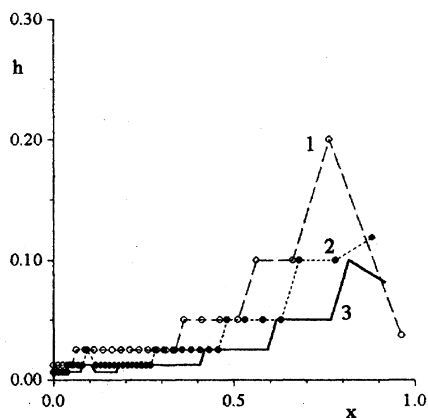


Рис. 7. Величина шага интегрирования при решении задачи (13.3) с $\alpha = 20$. 1 - $\varepsilon_{loc} = 10^{-4}$; 2 - $\varepsilon_{loc} = 10^{-5}$; 3 - $\varepsilon_{loc} = 10^{-6}$

? Составьте логическую схему подпрограммы RunKSt.

```
SUBROUTINE RunKSt(a, b, y_a, hmin, loc_err, Nmax, x, y, N, f)
INTEGER(4):: N, Nmax
REAL(8):: a, b, y_a, hmin, loc_err, x(0:Nmax), y(0:Nmax)
EXTERNAL f
```

НАЗНАЧЕНИЕ:

подпрограмма RunKSt предназначена для численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$dy/dx=f(x,y), \quad a < x \leq b, \\ y(a)=y_a$$

методом Рунге—Кутты четвертого порядка точности с использованием контроля локальной погрешности на каждом шаге. Абсциссы узлов x_j запоминаются в массиве $x(0:N)$ Значения y_j приближенного решения запоминаются в массиве $y(0:N)$ Функция $f=f(x,y)$ задается пользователем в подпрограмме-функции f .

ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

a — начальная точка интегрирования
 b — конечная точка интегрирования
 y_a — заданное начальное значение
 $hmin$ — минимально допустимый шаг
 loc_err — желаемая локальная погрешность
 $Nmax$ — максимально допустимое количество шагов
 N — желаемое количество шагов

ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

x — массив с координатами узлов
 y — массив значений пригл. решения в узлах неравномерной сетки
 N — число выполненных шагов

```
INTEGER(4) j
REAL(8):: x_j, y_j, h, hh, xhh, yhh, xnew1, ynew1, xnew2, ynew2, err, k
PARAMETER (k=16.d0/15.d0)
h=(b-a)/N ! h — желаемый шаг интегрирования
x_j = a
y_j = y_a
j = 0
x(j)= x_j
y(j)= y_j
1 if(x_j+h.gt.b) h=b-x_j ! если шаг h оказался слишком большим,
! то он уменьшается
j = j + 1
call rk4 (x_j, y_j, h, xnew1, ynew1, f) ! y_{j+1} вычисляется с шагом h
hh = 0.5d0*h
2 call rk4 (x_j, y_j, hh, xhh, yhh, f) ! значение y_{j+1} вычисляется с
call rk4 (xhh, yhh, hh, xnew2, ynew2, f) ! уменьшенным вдвое шагом
err = k*dabs(ynew2-ynew1) ! вычисляется локальная погрешность
if (err .gt. loc_err .and. hh .ge. hmin) then
h = hh
xnew1 = xhh
ynew1 = yhh
goto 2
```

else

```

x.j = xnew2
y.j = ynew2
x(j) = x.j
y(j) = y.j
h = 2.d0*h
N = j
if(j .eq. Nmax) RETURN
if(dabs(x.j - b) .gt. 1.d-10) goto 1
end if
RETURN
END

```

Задание 5. Сравнить точность метода Рунге—Кутты из первого задания и явного метода Адамса, имеющего такую же теоретическую точность.

В качестве примера рассмотрим явный четырехшаговый метод Адамса (3.8). В начальном узле $x_0 = a$ значение приближенного решения задано: $y_0 = y_a$. В следующих трех узлах x_1, x_2 и x_3 значения функции y_j будем вычислять методом Рунге—Кутты четвертого порядка точности. В узлах $x_j, j \geq 4$ расчет осуществляется по формулам Адамса (3.8).

Таблица 5

Результаты экспериментов по определению точности явного четырехшагового метода Адамса (3.8)

N	Задача (13.2)		Задача (13.3) $\alpha = 20$		Задача (13.4) $\alpha = 20$	
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$
10	$0.463 \cdot 10^{-2}$	—	$0.835 \cdot 10^{-4}$	—	$0.105 \cdot 10^{-4}$	—
20	$0.440 \cdot 10^{-3}$	10.5	$0.805 \cdot 10^{-6}$	0.01	$0.829 \cdot 10^{-5}$	0.01
40	$0.307 \cdot 10^{-4}$	14.3	$0.724 \cdot 10^{-4}$	112.2	$0.617 \cdot 10^{-3}$	134.6
80	$0.200 \cdot 10^{-5}$	15.4	$0.432 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{+6}$	$0.373 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{+6}$
160	$0.127 \cdot 10^{-6}$	15.7	$0.312 \cdot 10^{-3}$	13.8	$0.264 \cdot 10^{-4}$	14.1
320	$0.798 \cdot 10^{-8}$	15.9	$0.216 \cdot 10^{-4}$	14.4	$0.180 \cdot 10^{-5}$	14.7
640	$0.500 \cdot 10^{-9}$	16.0	$0.143 \cdot 10^{-5}$	15.1	$0.117 \cdot 10^{-6}$	15.4
1280	$0.313 \cdot 10^{-10}$	16.0	$0.915 \cdot 10^{-7}$	15.6	$0.748 \cdot 10^{-8}$	15.6
2560	$0.196 \cdot 10^{-11}$	16.0	$0.580 \cdot 10^{-8}$	15.8	$0.473 \cdot 10^{-9}$	15.8
5120	$0.122 \cdot 10^{-12}$	16.1	$0.365 \cdot 10^{-9}$	15.9	$0.297 \cdot 10^{-10}$	15.9

Результаты расчетов, приведенные в табл. 5, свидетельствуют о том, что рассматриваемый метод Адамса действительно имеет четвертый порядок точности, однако погрешность численного решения больше,

чем при использовании метода Рунге—Кутты (ср. с табл. 1). Для задач с быстро меняющимися решениями приемлемая точность достигается лишь при большом числе узлов.

Задание 6. На тестовых задачах сравнить точность явного и неявного методов Адамса, имеющих одинаковый порядок точности.

При использовании неявного метода Адамса нужно применить метод прогноза — коррекции, описанный в § 3. Кроме входных данных a , b , y_a и N , которые вводятся пользователем из файла исходных данных при использовании явного метода Адамса, для неявного метода Адамса необходимо ввести еще два дополнительных числа: ε — малое положительное число из критерия (3.13) окончания итераций и n_{max} — максимально допустимое количество итераций для вычисления y_{j+1} методом последовательных приближений (3.12). Таким образом, итерационный процесс будет закончен либо при выполнении условия (3.13), либо когда $n = n_{max}$.

Таблица 6

Результаты экспериментов по определению точности неявного трехшагового метода Адамса (3.10). $\varepsilon = 10^{-10}$, $n_{max} = 1000$

N	Задача (13.2)			Задача (13.3) $\alpha = 20$		
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$n_{сред}$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$n_{сред}$
10	$0.231 \cdot 10^{-3}$	—	10.9	0.853	—	74.5
20	$0.308 \cdot 10^{-4}$	7.5	5.8	$0.331 \cdot 10^{-1}$	25.8	15.7
40	$0.232 \cdot 10^{-5}$	13.3	3.5	$0.156 \cdot 10^{-2}$	21.2	7.2
80	$0.152 \cdot 10^{-6}$	15.3	2	$0.214 \cdot 10^{-3}$	7.3	3.6
160	$0.963 \cdot 10^{-8}$	15.8	1	$0.197 \cdot 10^{-4}$	10.9	1.9
320	$0.608 \cdot 10^{-9}$	15.8	0.2	$0.150 \cdot 10^{-5}$	13.1	0.9
640	$0.384 \cdot 10^{-10}$	15.8	0	$0.103 \cdot 10^{-6}$	14.6	0.3
1280	$0.239 \cdot 10^{-11}$	16.1	0	$0.678 \cdot 10^{-8}$	15.2	0.1
2560	$0.149 \cdot 10^{-12}$	16.0	0	$0.446 \cdot 10^{-9}$	15.2	0
5120	$0.935 \cdot 10^{-14}$	15.9	0	$0.280 \cdot 10^{-10}$	15.9	0

В файл с результатами расчетов рекомендуем в дополнение к величинам j , x_j , y_j , $y(x_j)$, ε_j записывать количество итераций n_j ,

выполненных при вычислении y_j , и среднее на один узел количество итераций $n_{\text{сред}}$, которое можно определить по формуле

$$n_{\text{сред}} = \frac{1}{N-p} \sum_{j=0}^N n_j,$$

где p — порядок точности неявного метода.

В качестве примера в таблице 6 представлены результаты расчетов по неявному методу Адамса (3.10). Сравнивая ее с табл. 5, видим, что неявный метод несколько точнее явного метода того же порядка.

? Составьте логическую схему подпрограммы AdIm, в которой реализован итерационный процесс прогноза-коррекции для метода Адамса (3.10).

```
SUBROUTINE AdIm(a, b, y_a, N, eps, x, y, kiter, kiter_max, f)
  INTEGER(4):: N, kiter_max, kiter(0:N)
  REAL(8):: a, b, y_a, eps, x(0:N), y(0:N)
  EXTERNAL f
```

! НАЗНАЧЕНИЕ:

! подпрограмма AdIm предназначена для численного решения
! задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения
! первого порядка

! $dy/dx=f(x,y), \quad a < x \leq b,$
! $y(a)=y_a$

! с помощью неявного метода Адамса четвертого порядка точности
! с использованием итерационного метода прогноза-коррекции.
! Абсциссы узлов x_j запоминаются в массиве $x(0:N)$
! Значения y_j приближенного решения запоминаются в массиве $y(0:N)$
! Функция $f=f(x,y)$ задается пользователем в подпрограмме-функции f .

! ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

! a — начальная точка интегрирования
! b — конечная точка интегрирования
! y_a — заданное начальное значение
! N — количество узлов
! eps — малая положительная постоянная
! из условия окончания итераций метода прогноза-коррекции
! $kiter_max$ — максимально допустимое количество итераций
! на шаге

! ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

! x — массив с координатами узлов, $x(j)=a+jh, \quad j = 0, \dots, N, \quad h=(b-a)/N$
! y — массив значений прил. решения в узлах равномерной сетки
! $kiter$ — массив, в котором запоминается количество итераций,

выполненных в узле x_j при вычислении y_j

```

INTEGER(4) j
REAL(8):: h, f0, f1, f2, f3, xnew, ynew, fnew, knew, k0, k1, k2
PARAMETER (knew= 3.d0/8.d0, k0=19.d0/24.d0,
=          k1 =-5.d0/24.d0, k2=1.d0/24.d0 )

h=(b-a)/N                ! h — шаг равномерной сетки
do j=0, N
    x(j) = a+j*h          ! вычисляются координаты узлов
end do
y(0)= y_a
kiter(0)=0

call rk4 (x(0), y(0), h, xnew, y(1), f) ! в первых трех узлах
call rk4 (x(1), y(1), h, xnew, y(2), f) ! после начального используется
call rk4 (x(2), y(2), h, xnew, y(3), f) ! метод Рунге—Кутты
kiter(1)=0
kiter(2)=0
kiter(3)=0
f3=f(x(0),y(0))          ! f_{j-3}
f2=f(x(1),y(1))          ! f_{j-2}
f1=f(x(2),y(2))          ! f_{j-1}

do j=3, N-1
    call Adam4(x(j), y(j), h, f1, f2, f3, f0, ynew, f) ! шаг прогноза
    kiter(j+1)=0
    fnew=f(x(j+1), ynew)
    y(j+1)=y(j) + h*(knew*fnew + k0*f0 + k1*f1 + k2*f2) ! коррекция
    if(dabs(y(j+1) - ynew).gt.eps) then ! условие по eps ?
        ynew=y(j+1)
        kiter(j+1)=kiter(j+1) + 1
        if (kiter(j+1) .lt. kiter_max) goto 100 ! условие по kiter_max ?
    end if
    f3=f2                ! переприсваивание значений f
    f2=f1
    f1=f0
end do
RETURN
END

```

Из этой подпрограммы вызывается подпрограмма нижнего уровня Adam4, в которой реализованы формулы явного метода Адамса (3.8):

```

SUBROUTINE Adam4(x-j, y-j, h, f1, f2, f3, f-j, ynew, f)
REAL(8):: x-j, y-j, h, f1, f2, f3, f-j, ynew, k0, k1, k2, k3
EXTERNAL f
PARAMETER (k0 = 55.d0/24.d0, k1 = -59.d0/24.d0,
=          k2 = 37.d0/24.d0, k3 = -9.d0/24.d0)

```


! НАЗНАЧЕНИЕ:

! с помощью явного метода Адамса 4-го порядка точности по значению y_{-j}
! приближенного решения в точке x_{-j} вычисляется значение $f_{-j}=f(x_{-j}, y_{-j})$
! и с использованием известных значений f_1, f_2, f_3 правой части в 3-х узлах,
! расположенных слева от x_{-j} , вычисляется значение y_{new}
! приближенного решения в следующей точке $x_{new}=x_{-j}+h$.
! Функция $f=f(x, y)$ задается пользователем в подпрограмме-функции f .

```
f.j = f(x.j, y.j)
ynew = y.j + h*(k0*f.j + k1*f1 + k2*f2 + k3*f3)
RETURN
END
```

Из табл. 6 видно, что для выбранного значения $\varepsilon = 10^{-10}$ потребовалось довольно много итераций при использовании грубых сеток и, наоборот, на мелких сетках количество итераций равно нулю. Поэтому интересно определить значение ε , меньше которого брать его не имеет смысла. Иначе говоря, для сетки с заданным количеством узлов N необходимо экспериментально найти такое значение $\varepsilon_{opt}(N)$, что при задании $\varepsilon < \varepsilon_{opt}(N)$ точность численного решения тестовой задачи практически не улучшается. В качестве примера такого экспериментального исследования в табл. 7 приведены результаты расчетов тестовой нелинейной задачи

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3y^3 - 2xy, & 0 < x \leq b, \\ y(0) &= 0.5, \end{aligned} \quad (13.7)$$

график решения

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x^2 + 3e^{2x^2}}}$$

которой показан на рис. 8.

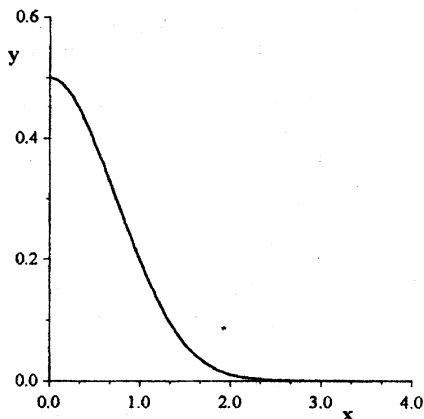


Рис. 8. График решения задачи (13.7) при $b = 4$

Анализируя данные, приведенные в этой таблице, можно сделать вывод о том, что при использовании мелких сеток надобность в итерационном улучшении на этапе коррекции вообще отпадает, т.е. на таких

сетках можно ограничиться этапом прогноза (3.11) и последующей коррекцией (3.12):

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24} (9f(x_{j+1}, y_{j+1}^0) + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2}).$$

На грубых сетках итерации на этапе коррекции улучшают точность численного решения. При $N = 10$ для рассматриваемой задачи не стоит брать ϵ меньшим, чем 10^{-6} , поскольку для меньших значений ϵ точность численного решения уже не возрастает, а вычислительные затраты существенно увеличиваются. При слишком малых значениях ϵ итерационный процесс может и не сойтись (эти случаи обозначены в таблице символом ∞).

Таблица 7

Результаты экспериментов по определению $\epsilon_{\text{опт}}$ для метода прогноза-коррекции (3.11), (3.12). Задача (13.7). $b = 2$

ϵ	N=10			N=160			N=1280		
	$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	$n_{\text{сред}}$		$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	$n_{\text{сред}}$		$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	$n_{\text{сред}}$	
10^{-1}	$0.384 \cdot 10^{-3}$	0		$0.634 \cdot 10^{-8}$	0		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-2}	$0.384 \cdot 10^{-3}$	0		$0.634 \cdot 10^{-8}$	0		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-3}	$0.147 \cdot 10^{-3}$	0.3		$0.634 \cdot 10^{-8}$	0		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-4}	$0.809 \cdot 10^{-4}$	1.4		$0.634 \cdot 10^{-8}$	0		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-5}	$0.533 \cdot 10^{-4}$	3		$0.634 \cdot 10^{-8}$	0		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-6}	$0.507 \cdot 10^{-4}$	4.4		$0.634 \cdot 10^{-8}$	0		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-7}	$0.505 \cdot 10^{-4}$	5.9		$0.634 \cdot 10^{-8}$	0		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-8}	$0.505 \cdot 10^{-4}$	7.1		$0.634 \cdot 10^{-8}$	0		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-9}	$0.505 \cdot 10^{-4}$	8.6		$0.615 \cdot 10^{-8}$	0.2		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-10}	$0.505 \cdot 10^{-4}$	10		$0.615 \cdot 10^{-8}$	1		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-12}	$0.505 \cdot 10^{-4}$	12.9		$0.615 \cdot 10^{-8}$	1.9		$0.152 \cdot 10^{-11}$	0	
10^{-16}	$0.505 \cdot 10^{-4}$	18.4		$0.615 \cdot 10^{-8}$	3.6		$0.152 \cdot 10^{-11}$	1	
10^{-18}	$0.505 \cdot 10^{-4}$	20		—	∞		—	∞	

? Чем можно объяснить, что при $\epsilon = 10^{-18}$ итерационный процесс не сходится в некоторых узлах.

Задание 7. На задаче (13.4) экспериментально исследовать свойства разностной схемы с весами (7.59) при различных значениях весового параметра σ .

С учетом замечания в условии задачи 8.3 конечно-разностную схему Эйлера (8.31) можно рассматривать как схему с весами при $\sigma = 1$. Схема с центральной разностью (8.32) также является схемой с весами, но при $\sigma = 1/2$. Схема (7.58) совпадает со схемой с весами при $\sigma = 1/2 + \alpha h/2$. Схема (12.8) есть схема с весами при $\sigma = 1/4$. В качестве примера в табл. 8 приведены результаты экспериментов по первым трем схемам. Эти эксперименты подтверждают, что схема Эйлера (8.31) имеет первый порядок точности по h , а схема с центральной разностью (8.32) — второй. Схема (7.58) также сходится со вторым порядком, как и предсказывает теория (см. задачу 7.3).

Таблица 8

Результаты экспериментов по определению точности схемы с весами (7.59). Задача (13.4), $\alpha = 1$

N	$\sigma = 1$		$\sigma = 1/2$		$\sigma = 1/2 + \alpha h/2$	
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$
10	$0.192 \cdot 10^{-1}$	—	$0.650 \cdot 10^{-2}$	—	$0.484 \cdot 10^{-2}$	—
20	$0.939 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.170 \cdot 10^{-2}$	3.8	$0.123 \cdot 10^{-2}$	3.9
40	$0.465 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.435 \cdot 10^{-3}$	3.9	$0.310 \cdot 10^{-3}$	4.0
80	$0.231 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.110 \cdot 10^{-3}$	4.0	$0.778 \cdot 10^{-4}$	4.0
160	$0.115 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.276 \cdot 10^{-4}$	4.0	$0.195 \cdot 10^{-4}$	4.0
320	$0.576 \cdot 10^{-3}$	2.0	$0.692 \cdot 10^{-5}$	4.0	$0.488 \cdot 10^{-5}$	4.0
640	$0.286 \cdot 10^{-3}$	2.0	$0.173 \cdot 10^{-5}$	4.0	$0.122 \cdot 10^{-5}$	4.0
1280	$0.144 \cdot 10^{-3}$	2.0	$0.433 \cdot 10^{-6}$	4.0	$0.305 \cdot 10^{-6}$	4.0

Проведите эксперименты с другими значениями параметра α , например, с $\alpha = 5$ и $\alpha = 20$.

? Объясните, почему с увеличением α точность численного решения падает (при фиксированном количестве узлов N).

? Объясните, почему при $\alpha = 20$ и $N = 5120$ погрешность численного решения, полученного по схеме (8.32) второго порядка точности, имеет существенно большее значение (во сколько раз?), чем при использовании схемы Эйлера (8.31) первого порядка точности. Для этого же значения α оцените число узлов N , при котором погрешность

решения по схеме (8.32) станет меньше, чем при использовании схемы (8.31).

На рис. 9 тонкой линией изображен график численного решения задачи (13.4), полученного по схеме (8.32) на сетке с количеством узлов $N = 40$. Видно, что численное решение осциллирует, что согласуется с теоретическими выводами (см. § 8). При увеличении N амплитуда осцилляций уменьшается (см. рис. 10) и численное решение при возрастании N все более и более приближается к точному решению задачи (докажите экспериментально).

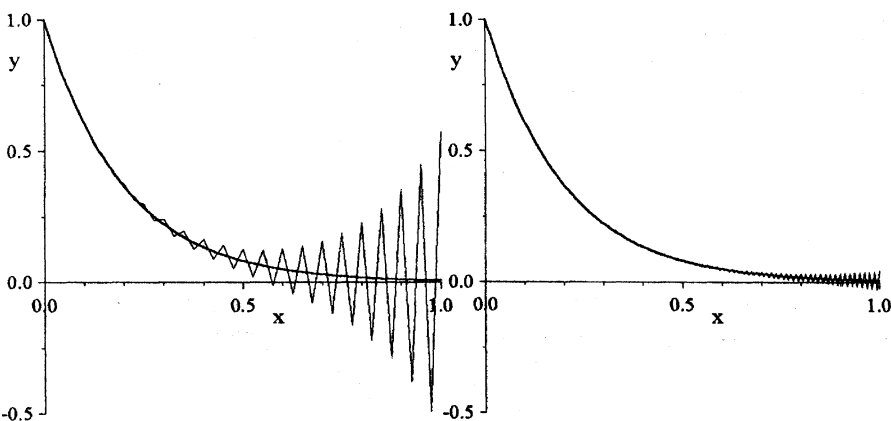


Рис. 9. Графики точного решения задачи (13.4) (жирная линия) и численного решения, полученного по схеме (8.32) (тонкая линия). $\alpha = 5$, $N = 40$

Рис. 10. Графики точного решения задачи (13.4) (жирная линия) и численного решения, полученного по схеме (8.32) (тонкая линия). $\alpha = 5$, $N = 160$

? Объясните причину возникновения осцилляций при использовании схемы (8.32).

? Экспериментально докажите, что схема (12.8) не является стабилизирующей. Дайте теоретическое объяснение этому факту.

Ответы, указания, решения

$$1.1. \quad y_0(x) = 0, \quad y_1(x) = \frac{x^3}{3}, \quad y_2(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} - \frac{x^{15}}{59535}, \dots$$

$$1.2. \quad y_0(x) = y_0, \quad y_1(x) = y_0(1 + ax), \quad y_2(x) = y_0 \left(1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2} \right),$$

$$y_3(x) = y_0 \left(1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^3 x^3}{6} \right) \approx y_0 e^{ax}.$$

$$1.3. \quad y_j = y_0 \left(1 + ah + \frac{a^2 h^2}{2} + \frac{a^3 h^3}{6} \right)^j \approx y_0 e^{ax_j}.$$

$$1.4. \quad y_j = y_0 (1 + ha)^j \approx y_0 e^{ax_j}.$$

$$1.5. \quad y_j = y_0 \left(1 + ha + \frac{a^2 h^2}{2} \right)^j \approx e^{ax_j}.$$

$$1.7. \quad O(h^3).$$

1.8. Решение. Предположим, что точное решение задачи Коши $y(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ ограниченную третью производную

$$\max_{a \leq x \leq b} |y'''(x)| \leq K,$$

а функция $f(x, y)$ ограничена и имеет ограниченные частные производные:

$$\max_{a \leq x \leq b} \left(|f(x, y)|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right| \right) \leq S, \quad |y| < \infty.$$

Раскладывая точное решение в точке x_{j+1} в ряд Тейлора, получим

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \frac{h^3}{6}y'''(x_j + \theta h) =$$

$$= y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y)(x_j, y(x_j)) + \frac{h^3}{6}y'''(x_j + \theta h), \quad (14.1)$$

где последнее слагаемое есть остаточный член в форме Лагранжа, а $0 < \theta < 1$.

Представим (1.21) в следующем виде:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} (f_x + ff_y)(x_j, y_j) + \\ + \frac{h^3}{4} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy})(x_j + \bar{\theta}h, y_j + \bar{\theta}hf(x_j, y_j)). \quad (14.2)$$

Здесь последнее слагаемое есть остаточный член формулы Тейлора функции $f(x, y)$ двух переменных, записанный в форме Лагранжа, $0 < \bar{\theta} < 1$.

Вычитая из (14.1) равенство (14.2) и обозначая погрешность решения через $\varepsilon_j = y(x_j) - y_j$, получим

$$\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j + h [f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j)] + \\ + \frac{h^2}{2} [(f_x + ff_y)(x_j, y(x_j)) - (f_x + ff_y)(x_j, y_j)] + \\ + \frac{h^3}{6} y'''(x_j + \theta h) - \frac{h^3}{4} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy})(x_j + \bar{\theta}h, y_j + \bar{\theta}hf(x_j, y_j)). \quad (14.3)$$

По теореме Лагранжа о среднем (о конечных приращениях) имеем при некотором $0 < \omega_j < 1$

$$|f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j)| = \\ = \left| \frac{\partial f}{\partial y} [x_j, \omega_j y(x_j) + (1 - \omega_j)y_j] (y(x_j) - y_j) \right| \leq S |y(x_j) - y_j| = S |\varepsilon_j|.$$

Аналогично

$$|(f_x + ff_y)(x_j, y(x_j)) - (f_x + ff_y)(x_j, y_j)| = \\ \left| (f_x + ff_y)_y [x_j, \bar{\omega}_j y(x_j) + (1 - \bar{\omega}_j)y_j] (y(x_j) - y_j) \right| = \\ |(f_{xy} + f_y^2 + ff_{yy}) [x_j, \bar{\omega}_j y(x_j) + (1 - \bar{\omega}_j)y_j]| |\varepsilon_j| \leq (S + 2S^2) |\varepsilon_j|.$$

Тогда из равенства (14.3) следует

$$|\varepsilon_{j+1}| \leq (1 + hS) |\varepsilon_j| + \frac{h^2}{2} (S + 2S^2) |\varepsilon_j| + \frac{h^3}{6} K + \frac{h^3}{4} (S + 2S^2 + S^3).$$

При малых h справедливо неравенство $h^2(S + 2S^2)/2 < hS$, поэтому

$$|\varepsilon_{j+1}| \leq (1 + 2hS)|\varepsilon_j| + Ch^3, \quad (14.4)$$

где $C = K/6 + S(1 + 2S + S^2)/4$.

Далее покажем, что из неравенства (14.4) следует, что

$$|\varepsilon_m| \leq h^2 \frac{C}{2S} (e^{2mhS} - 1), \quad 0 \leq m \leq N.$$

Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. Пусть $m = 0$, тогда $\varepsilon_0 = y(x_0) - y_0 = y_a - y_a = 0$, т.е. неравенство выполняется.

Пусть неравенство выполняется для m -го узла. Тогда:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{m+1}| &\leq (1 + 2hS)|\varepsilon_m| + Ch^3 \leq (1 + 2hS)h^2 \frac{C}{2S} (e^{2mhS} - 1) + Ch^3 = \\ &= h^2 \frac{C}{2S} [(1 + 2hS)(e^{2mhS} - 1) + 2hS] = h^2 \frac{C}{2S} [(1 + 2hS)e^{2mhS} - 1] \leq \\ &\leq h^2 \frac{C}{2S} \left[\left(1 + 2hS + \frac{(2hS)^2}{2} + \frac{(2hS)^3}{6} + \dots \right) e^{2mhS} - 1 \right] = \\ &= h^2 \frac{C}{2S} [e^{2hS} e^{2mhS} - 1] = h^2 \frac{C}{2S} [e^{(m+1)2hS} - 1], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В силу доказанного получаем неравенство $\max_{0 \leq j \leq N} |y(x_j) - y_j| \leq Mh^2$, причем постоянная $M = \frac{C}{2S} [e^{2(b-a)S} - 1]$ не зависит от h . А это означает, что глобальная погрешность модифицированного метода Эйлера имеет второй порядок по h .

1.9. Локальная погрешность — $O(h^3)$, глобальная — $O(h^2)$.

2.1. $A = 3/4$, $f_y(f_x + ff_y) = 0$.

2.5. Решение. Для точного решения в точке x_{j+1} имеем

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y)(x_j, y_j) + O(h^3).$$

Тогда локальная погрешность вычисляется по формуле

$$\varepsilon \equiv y(x_{j+1}) - y_{h,j+1} = \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y)(x_j, y_j) + O(h^3) = \nu(x_j, y_j)h^2 + O(h^3),$$

где

$$\nu(x_j, y_j) = \frac{1}{2} (f_x + ff_y)(x_j, y_j).$$

Слагаемое $\nu(x_j, y_j)h^2$ в выражении для локальной погрешности есть *главный член локальной погрешности*.

Рассмотрим теперь приближенное решение $y_{\frac{h}{2}, j+1}$. Оно получается за два шага. После первого шага

$$y_{\frac{h}{2}, j+1/2} = y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j), \quad (14.5)$$

после второго:

$$y_{\frac{h}{2}, j+1} = y_{\frac{h}{2}, j+1/2} + \frac{h}{2} f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{\frac{h}{2}, j+1/2}\right).$$

С учетом (14.5) получим

$$\begin{aligned} y_{\frac{h}{2}, j+1} &= y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) + \frac{h}{2} f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j)\right) = \\ &= y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) + \frac{h}{2} \left[f(x_j, y_j) + \frac{h}{2} f_x(x_j, y_j) + \frac{h}{2} f f_y(x_j, y_j) + O(h^2) \right] = \\ &= y_j + h f(x_j, y_j) + \frac{h^2}{4} [f_x + f f_y](x_j, y_j) + O(h^3) = \\ &= y_{h, j+1} + \frac{1}{2} \nu(x_j, y_j) h^2 + O(h^3). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\nu(x_j, y_j) h^2 = 2 \cdot [y_{\frac{h}{2}, j+1} - y_{h, j+1}] + O(h^3),$$

т.е.

$$\varepsilon \approx 2 \cdot [y_{\frac{h}{2}, j+1} - y_{h, j+1}],$$

что и доказывает формулу (2.14), поскольку для метода Эйлера $p = 1$.

2.6. Решение. Представим точное решение в точке x_{j+1} :

$$\begin{aligned} y(x_{j+1}) &= y_j + h f(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} (f_x + f f_y)(x_j, y_j) + \\ &+ \frac{h^3}{6} (f_{xx} + f_x f_y + 2 f f_{xy} + f f_y^2 + f^2 f_{yy})(x_j, y_j) + O(h^4). \end{aligned}$$

Для приближенного решения, полученного с шагом h , имеем:

$$y_{h,j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} (f_x + ff_y)(x_j, y_j) + \\ + \frac{h^3}{4} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy})(x_j, y_j) + O(h^4).$$

Тогда локальная погрешность вычисляется по формуле:

$$\varepsilon \equiv y(x_{j+1}) - y_{h,j+1} = \nu(x_j, y_j)h^3 + O(h^4),$$

где

$$\nu(x_j, y_j) = -\frac{1}{12} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy})(x_j, y_j) + \frac{1}{6} (f_x f_y + f f_y^2)(x_j, y_j).$$

Рассмотрим теперь приближенное решение $y_{\frac{h}{2},j+1}$ в точке x_{j+1} , полученное с уменьшенным в два раза шагом:

$$y_{\frac{h}{2},j+1/2} = y_j + \frac{h}{4} \left[f(x_j, y_j) + f \left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) \right) \right],$$

$$y_{\frac{h}{2},j+1} = y_{\frac{h}{2},j+1/2} + \frac{h}{4} \left[f \left(x_j + \frac{h}{2}, y_{\frac{h}{2},j+1/2} \right) + \right. \\ \left. f \left(x_j + h, y_{\frac{h}{2},j+1/2} + \frac{h}{2} f \left(x_j + \frac{h}{2}, y_{\frac{h}{2},j+1/2} \right) \right) \right].$$

Разложения в ряды Тейлора в точках (x_j, y_j) и $(x_j + h/2, y_{\frac{h}{2},j+1/2})$ выглядят так:

$$y_{\frac{h}{2},j+1/2} = y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) + \frac{h^2}{8} (f_x + ff_y)(x_j, y_j) + \\ + \frac{h^3}{32} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy})(x_j, y_j) + O(h^4), \quad (14.6) \\ y_{\frac{h}{2},j+1} = y_{\frac{h}{2},j+1/2} + \left\{ \frac{h}{2} f + \frac{h^2}{8} (f_x + ff_y) + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{32} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) \right\} \left(x_j + \frac{h}{2}, y_{\frac{h}{2},j+1/2} \right) + O(h^4).$$

С учетом (14.6) последняя формула может быть переписана так:

$$\begin{aligned}
 y_{\frac{h}{2},j+1} &= y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2} (f_x + ff_y)(x_j, y_j) + \\
 &+ \frac{3h^3}{16} (f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2f_{yy})(x_j, y_j) + \frac{h^3}{8} (f_x f_y + ff_y^2)(x_j, y_j) + O(h^4) = \\
 &= y_{h,j+1} + \frac{3}{4} \nu(x_j, y_j) h^3 + O(h^4).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\nu(x_j, y_j) h^3 = \frac{4}{3} \cdot [y_{\frac{h}{2},j+1} - y_{h,j+1}] + O(h^4),$$

т.е.

$$\varepsilon \approx \frac{4}{3} \cdot [y_{\frac{h}{2},j+1} - y_{h,j+1}],$$

что и доказывает формулу (2.14), поскольку для модифицированного метода Эйлера (1.20) $p = 2$.

3.3. $h < \frac{12}{5M}$.

4.1. Указание. Так как функция $y(x)$ в определении погрешности аппроксимации является достаточно гладкой, то ее можно разложить в ряд Тейлора, поэтому для погрешности аппроксимации в узле x_j получим

$$\begin{aligned}
 \psi_{h,j} &= (L_h(y)_h - (Ly)_h)_j = \frac{-3y(x_j) + 4y(x_{j+1}) - y(x_{j+2}))}{2h} - y'(x_j) = \\
 &= \frac{1}{2h} \left\{ -3y(x_j) + 4 \left(y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2} y''(x_j) + \frac{h^3}{6} y'''(x_j + \xi_1 h) \right) - \right. \\
 &- \left. \left(y(x_j) + 2hy'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2} y''(x_j) + \frac{(2h)^3}{6} y'''(x_j + \xi_2 2h) \right) \right\} - y'(x_j) = \\
 &= \frac{h^2}{3} [y'''(x_j + \xi_1 h) - 2y'''(x_j + \xi_2 2h)],
 \end{aligned}$$

где $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$.

Таким образом, $\psi_{h,j} = O(h^2)$, т.е. порядок локальной аппроксимации — второй. Кроме того, в качестве постоянной C в неравенстве (4.14) можно взять

$$C = \max_{x_j \leq x \leq x_{j+2}} |y'''(x)|.$$

Тогда для рассматриваемого примера неравенство (4.14) имеет следующий вид:

$$|\psi_{h,j}| \leq Ch^2.$$

4.2. Указание. Для указанного шаблона равенство (4.17) принимает вид:

$$y'(x_j) = \frac{1}{h} \sum_{s=-2}^0 a_s y(x_j + sh) + O(h^2),$$

По формуле Тейлора

$$y(x_j + sh) = y(x_j) + shy'(x_j) + \frac{(sh)^2}{2} y''(x_j) + \frac{(sh)^3}{6} y'''(\xi_s),$$

где ξ_s лежит между точками x_j и $x_j + sh$. Тогда

$$y'(x_j) = \frac{1}{h} \left[y(x_j) \sum a_s + y'(x_j) h \sum sa_s + \frac{h^2}{2} y''(x_j) \sum s^2 a_s \right] + \frac{h^2}{6} \sum (s^3 a_s y'''(\xi_s)) + O(h^2).$$

Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенях h^s , $s = -1, 0, 1$ в левой и правой частях этого равенства. В результате получим линейную невырожденную систему трех уравнений для определения коэффициентов a_s :

$$\begin{cases} a_{-2} + a_{-1} + a_0 = 0, \\ (-2)a_{-2} + (-1)a_{-1} = 1, \\ (-2)^2 a_{-2} + (-1)^2 a_{-1} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, разностный оператор

$$L_h y_{h,j} = \frac{3y_j - 4y_{j-1} + y_{j-2}}{2h}$$

локально аппроксимирует первую производную в узле x_j со вторым порядком по h .

4.3. Решение. В случае неравномерной сетки разностный оператор отыскивается в виде (4.23). Тогда для выбранного шаблона, $p = 2$

и произвольной гладкой функции $y(x)$ должно выполняться равенство

$$y'(x_j) = \sum_{s=0}^2 a_s y(x_{j+s}) + O(h^2).$$

Здесь $h = \max(h_{j+1}, h_{j+2})$. По формуле Тейлора

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h_{j+1}y'(x_j) + \frac{h_{j+1}^2}{2}y''(x_j) + \frac{h_{j+1}^3}{6}y'''(\xi_1),$$

$$y(x_{j+2}) = y(x_j) + (h_{j+1} + h_{j+2})y'(x_j) + \frac{(h_{j+1} + h_{j+2})^2}{2}y''(x_j) + \frac{(h_{j+1} + h_{j+2})^3}{6}y'''(\xi_2),$$

где ξ_1 лежит между точками x_j и x_{j+1} , а ξ_2 — между x_j и x_{j+2} . Следовательно,

$$\begin{aligned} y'(x_j) = & y(x_j)(a_0 + a_1 + a_2) + y'(x_j)[a_1 h_{j+1} + a_2(h_{j+1} + h_{j+2})] + \\ & + y''(x_j) \left[a_1 \frac{h_{j+1}^2}{2} + a_2 \frac{(h_{j+1} + h_{j+2})^2}{2} \right] + \\ & + a_1 \frac{h_{j+1}^3}{6} y'''(\xi_1) + a_2 \frac{(h_{j+1} + h_{j+2})^3}{6} y'''(\xi_2) + O(h^2). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты a_s удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 h_{j+1} + a_2 (h_{j+1} + h_{j+2}) = 1, \\ a_1 \frac{h_{j+1}^2}{2} + a_2 \frac{(h_{j+1} + h_{j+2})^2}{2}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} a_0 = & -\frac{2h_{j+1} + h_{j+2}}{h_{j+1}(h_{j+1} + h_{j+2})}, \\ a_1 = & \frac{h_{j+1} + h_{j+2}}{h_{j+1}h_{j+2}}, \quad a_2 = -\frac{h_{j+1}}{h_{j+2}(h_{j+1} + h_{j+2})}. \end{aligned}$$

Так как $a_s = O(1/h)$, то

$$a_1 \frac{h_{j+1}^3}{6} y'''(\xi_1) + a_2 \frac{(h_{j+1} + h_{j+2})^3}{6} y'''(\xi_2) = O(h^2),$$

поэтому разностный оператор $L_h y_{h,j} \equiv$

$$\equiv -\frac{2h_{j+1} + h_{j+2}}{h_{j+1}(h_{j+1} + h_{j+2})} y_j + \frac{h_{j+1} + h_{j+2}}{h_{j+1}h_{j+2}} y_{j+1} - \frac{h_{j+1}}{h_{j+2}(h_{j+1} + h_{j+2})} y_{j+2}$$

аппроксимирует дифференциальный оператор (4.7) со вторым порядком.

5.3. $O(h)$. Указание. В пространстве F_h с элементами вида (5.13) ввести норму (5.15) и показать, что

$$\|\psi_h\|_{F_h} \leq C_a h, \quad C_a = \max_{a \leq x \leq b} |y'(x)|.$$

5.4. $O(h^2)$.

5.5. $O(h^3)$.

5.6. $O(h^3)$. Указание. Для погрешности аппроксимации разностного уравнения имеем

$$\begin{aligned} \psi_{h,j} &= (L_h(y)_h - f_h)_{x=x_j} = \\ &= \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} - \frac{2}{3}f(x_j) - \frac{5}{12}f(x_{j+1}) + \frac{1}{12}f(x_{j-1}) = \\ &= \frac{1}{h} \left\{ y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \frac{h^3}{6}y'''(x_j) + O(h^4) - y(x_j) \right\} - \\ &\quad - \frac{2}{3}f(x_j) - \frac{5}{12} \left(f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2}f''(x_j) + O(h^3) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{12} \left(f(x_j) - hf'(x_j) + \frac{h^2}{2}f''(x_j) + O(h^3) \right) = O(h^3), \end{aligned}$$

поскольку для решения дифференциального уравнения справедливы равенства

$$y'(x_j) = f(x_j), \quad y''(x_j) = f'(x_j), \quad y'''(x_j) = f''(x_j).$$

5.7. $y_* = y_a + hf(a, y_a)$.

5.8. $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$. Указание. Для локальной погрешности аппроксимации в узле x_j получается выражение

$$\begin{aligned} \psi_{h,j} = & (1 - \gamma_1 - \gamma_2) f(x_j) + [-1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot (\beta_1 + \beta_2)] (Ay)(x_j) + \\ & + h \left(\frac{1}{2} - \gamma_2 \right) f'(x_j) + h \left[-\frac{1}{2} + \alpha_2(\beta_1 + \beta_2) \right] (A'y)(x_j) + \\ & + h \left[-\frac{1}{2} + \beta_2(\alpha_1 + \alpha_2) \right] (A(f - Ay))(x_j) + O(h^2). \end{aligned}$$

Для выполнения неравенства $\|\psi_h\|_{F_h} \leq C_a h^2$ необходимо, чтобы коэффициенты схемы удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot (\beta_1 + \beta_2) = 1, \\ \gamma_2 = 1/2, \\ \alpha_2(\beta_1 + \beta_2) = 1/2, \\ \beta_2(\alpha_1 + \alpha_2) = 1/2. \end{cases}$$

Находим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4\alpha}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, где $\alpha \neq 0$ — параметр. Подставляя найденные коэффициенты в разностное уравнение схемы, убеждаемся, что это уравнение принимает такой вид:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \frac{A(x_j) + A(x_{j+1})}{2} \cdot \frac{y_j + y_{j+1}}{2} = \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}.$$

5.9. $\alpha = \gamma = \frac{1}{12}$, $\beta = \frac{5}{6}$. Указание. Пусть $y(x)$ — точное достаточно гладкое решение дифференциальной задачи. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1}))}{h^2} &= y''(x_j) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(x_j) + O(h^4) = \\ &= y(x_j) - f(x_j) + \frac{h^2}{12} (y(x_j) - f(x_j) - f''(x_j)) + O(h^4). \end{aligned}$$

Для погрешности аппроксимации уравнения получим

$$\begin{aligned} \psi_{h,j} = (L_h(y)_h - f_h)|_{x=x_j} &= y(x_j) - f(x_j) + \frac{h^2}{12} (y(x_j) - f(x_j) - f''(x_j)) - \\ &- (\alpha + \beta + \gamma) y(x_j) - h(-\alpha + \gamma) y'(x_j) - \frac{h^2}{2} (\alpha + \gamma) y''(x_j) - \\ &- \frac{h^3}{6} (-\alpha + \gamma) y'''(x_j) + f(x_j) + \frac{h^2}{12} f''(x_j) + O(h^4). \end{aligned}$$

Следовательно, для определения коэффициентов α, β, γ имеем систему

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1, \\ -\alpha + \gamma = 0, \\ \alpha + \gamma = \frac{1}{6} \end{cases}$$

5.10. $\alpha = \gamma = \frac{1}{12}, \beta = \frac{5}{6}, y_* = 1 - \frac{h^2}{6}$. Указание. Дифференциальное и разностное уравнения настоящей задачи совпадают с соответствующими уравнениями предыдущей задачи, если в ней положить

$$f(x) = 2 \sin x.$$

Пусть δ — погрешность аппроксимации второго граничного условия. Тогда

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{y(h) - y(0)}{h} - y_* = \\ &= y'(0) + \frac{h}{2}y''(0) + \frac{h^2}{6}y'''(0) + \frac{h^3}{24}y^{(4)}(0) + O(h^4) - y_*. \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно положить

$$y_* = 1 + \frac{h}{2}[y(0) - f(0)] + \frac{h^2}{6}[y'(0) - f'(0)] + \frac{h^3}{24}[y''(0) - f''(0)].$$

5.11.

$$\begin{cases} \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} - \left[1 + \frac{h^2}{12} \left(1 + \frac{h^2}{30} + \frac{h^4}{1680} + \frac{h^6}{151200} \right) \right] y_j = \\ = \cos(x_j) \left[1 + \frac{h^2}{30} \left(1 + \frac{h^4}{5040} \right) \right], \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = 0, \\ y_N = 1. \end{cases}$$

7.1. $C_y \leq 1 + b - a$. Указание. Запишем схему в операторном виде $L_h y_h = f_h$, где

$$L_h y_h \equiv \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \alpha y_{j+1}, & j = 0, \dots, N-1, \\ y_0, \end{cases} \quad f_h \equiv \begin{cases} \varphi(x_j), \\ y_a. \end{cases}$$

Каноническая форма схемы имеет вид (7.16), при этом

$$R_h = \frac{1}{1 + \alpha h}, \quad \rho_j = \frac{\varphi_j}{1 + \alpha h}.$$

Нормы в пространствах сеточных функций U_h и F_h введем по формулам (7.18). Неравенства для норм (A1) – (A3) из теоремы 7.1 о достаточном признаке устойчивости принимают такой вид:

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_1 \max_{0 \leq j \leq N} |y_j|, \quad (14.7)$$

$$|y_0| \leq C_2 \|f_h\|_{F_h}, \quad (14.8)$$

$$|\rho_j| \leq C_3 \|f_h\|_{F_h}. \quad (14.9)$$

Очевидно, что они выполняются с постоянными $C_1 = C_2 = C_3 = 1$.

Неравенство (7.35) запишется так:

$$\left| R_h^j \right| \leq C_4, \quad j = 1, \dots, N, \quad (14.10)$$

при этом в качестве постоянной в правой части можно взять $C_4 = 1$. Таким образом, все условия теоремы 7.1 выполнены, поэтому рассматриваемая схема устойчива. Из формулы (7.36) следует, что $C_y \leq 1 + b - a$.

7.2. Указание. Показать, что при выборе норм по формулам

$$\begin{aligned} \|y_h\|_{U_h} &= \max_{0 \leq j \leq N} |y_j|, \\ \|f_h\|_{F_h} &= \max \left[|y_a|, \max_{0 \leq j \leq N-1} |\varphi_{j+1/2}| \right]. \end{aligned}$$

имеет место оценка

$$|\psi_{h,j}| = \left| (L_h(y)_h - f_h)_j \right| \leq C_a h^2, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

где

$$C_a = \max_{a \leq x \leq b} \left(\frac{1}{6} |y'''(x)|, \frac{1}{4} |y''(x)|, \frac{1}{8} |\varphi''(x)| \right).$$

Так как начальное условие аппроксимируется точно, то разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу со вторым порядком по h :

$$\|\psi_h\|_{F_h} \leq C_a h^2.$$

Каноническая форма схемы имеет вид (7.16), где

$$R_h = \frac{1 - \alpha h/2}{1 + \alpha h/2}, \quad \rho_j = \frac{\varphi_{j+1/2}}{1 + \alpha h/2}.$$

Неравенства (14.7) – (14.10) выполняются с постоянными $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$. Следовательно, по теореме 7.1 рассматриваемая линейная схема устойчива и для ее решения выполняется оценка

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h}$$

с постоянной $C_y = 1 + b - a$. По теореме о сходимости она сходится и

$$\|(y)_h - y_h\|_{U_h} \leq Ch^2,$$

где $C = C_a C_y$.

7.3. Указание. Покажите, что схема имеет второй порядок аппроксимации.

Для исследования устойчивости сначала запишем схему в канонической форме. Для этого перепишем разностное уравнение:

$$y_{j+1} = \frac{1 - \alpha h}{1 + \alpha h} y_{j-1} + h \frac{2}{1 + \alpha h} \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

добавим к нему тождество $y_j = y_j$, $j = 1, \dots, N-1$ и введем векторы

$$y_j = \begin{pmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Тогда систему, состоящую из уравнения и тождества,

$$\begin{pmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1 - \alpha h}{1 + \alpha h} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_j \\ y_{j-1} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{2}{1 + \alpha h} \varphi_j \\ 0 \end{pmatrix}$$

можно записать в векторном виде:

$$y_j = R_h y_{j-1} + h \vec{\rho}_{j-1}, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

где

$$R_h = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1 - \alpha h}{1 + \alpha h} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho}_{j-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1 + \alpha h} \varphi_j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каноническая форма рассматриваемой схемы имеет вид (7.25), где

$$y_a = \begin{pmatrix} y_* \\ y_a \end{pmatrix}.$$

В пространствах U_h , F_h и в двумерном пространстве Y векторов y и $\vec{\rho}$ введем нормы (7.50) – (7.52) и проверим выполнение неравенств (A1) – (A3) из условия теоремы 7.1. Имеем:

$$\|y_h\|_{U_h} \leq \max_{0 \leq j \leq N-1} \|y_j\|_Y,$$

$$\|y_0\|_Y \leq \|f_h\|_{F_h},$$

$$\|\vec{\rho}_j\|_Y \leq 2\|f_h\|_{F_h}.$$

Таким образом, указанные неравенства выполняются с постоянными $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ и $C_3 = 2$ соответственно.

Остается доказать неравенство (7.35). Используя лемму 7.2 о норме матричного оператора, получим:

$$\|R_h\|_Y = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-\alpha h}{1+\alpha h} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|_Y = \max \left(\left| \frac{1-\alpha h}{1+\alpha h} \right|, 1 \right) = 1.$$

Из леммы 7.1 тогда следует, что $\|R_h^j\|_Y \leq 1$, т.е. $C_4 = 1$. Следовательно, $C_y \leq 1 + 2(b-a)$. Таким образом, схема устойчива, а значит, она сходится со вторым порядком.

7.4. Указание. Перейти к задаче для системы уравнений первого порядка и построить для новой задачи разностную схему, аналогичную одной из схем, рассмотренных в задачах 7.1 – 7.3.

$$7.5. \quad C_y \leq \left(1 + \frac{l}{\sigma}\right) \cdot \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{1}{2} < \sigma < 1 \text{ и } 0 < h \leq \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \frac{4}{\alpha} \equiv h_0, \\ e^{al/\sigma}, & \text{при } \frac{1}{2} < \sigma < 1 \text{ и } h_0 < h \leq l, \\ e^{2a l}, & \text{при } \sigma = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $l = b-a$. **Указание.** Схема записывается в канонической форме (7.25), при этом

$$y_j = \begin{pmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{pmatrix}, \quad R_h = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma - 1 - \alpha h}{\sigma} & \frac{1 - \sigma}{\sigma} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} \varphi_{j+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При выборе норм в пространствах U_h , F_h и в двумерном пространстве Y векторов u и \vec{p} в виде (7.50) – (7.52) неравенства (A1) – (A3) из теоремы 7.1 выполняются с постоянными $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 1/\sigma$.

Для вычисления постоянной C_4 , входящей в (7.35), оценим вначале норму оператора перехода $\|R_h\|_Y$. Для этого используем лемму 7.2 о норме матричного оператора. Тогда получим, что при $\frac{1}{2} < \sigma < 1$

$$\text{и } h \leq h_0 = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \frac{4}{\alpha}$$

$$\|R_h\|_Y = \max\left(\frac{1 - \sigma + |2\sigma - 1 - \alpha h|}{\sigma}, 1\right) = 1,$$

при $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ и $h > h_0$

$$\|R_h\|_Y = \max\left(\frac{1 - \sigma + |2\sigma - 1 - \alpha h|}{\sigma}, 1\right) = \frac{2 - 3\sigma + \alpha h}{\sigma} < 1 + \frac{\alpha h}{\sigma},$$

при $\sigma = \frac{1}{2}$ и произвольном h , $0 < h \leq l = b - a$

$$\|R_h\|_Y = \max\left(\frac{1 - \sigma + |2\sigma - 1 - \alpha h|}{\sigma}, 1\right) = 1 + 2\alpha h.$$

Согласно лемме 7.1 следует, что неравенство (7.35) выполняется с постоянной

$$C_4 = \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{1}{2} < \sigma < 1 \text{ и } 0 < h \leq h_0, \\ e^{\alpha l/\sigma}, & \text{при } \frac{1}{2} < \sigma < 1 \text{ и } h_0 < h \leq l, \\ e^{2\alpha l}, & \text{при } \sigma = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$8.1. \quad C_y \geq \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{1}{2} < \sigma < 1 \text{ и } h \leq \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \frac{4}{\alpha} \equiv h_0, \\ \sup_{h \in (h_0, l]} \left(\frac{1 + \alpha h}{2\sigma} - 1 + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha h}{2\sigma} - 1\right)^2 + \frac{1 - \sigma}{\sigma}} \right)^{l/h}, & \text{при } \frac{1}{2} < \sigma < 1 \text{ и } h_0 < h \leq l, \\ e^{\alpha l}, & \text{при } \sigma = \frac{1}{2}, 0 < h \leq l. \end{cases}$$

Решение. Для постоянной C_y справедлива оценка (8.6). Для схемы (7.59) $M_1 = M_2 = 1$. Спектр оператора R_h состоит из двух собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы R_h , которые являются корнями квадратного уравнения:

$$\lambda^2 - \left(\frac{2\sigma - 1 - \alpha h}{\sigma} \right) \lambda - \frac{1 - \sigma}{\sigma} = 0,$$

т.е.

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1 + \alpha h}{2\sigma} + \sqrt{\left(1 - \frac{1 + \alpha h}{2\sigma} \right)^2 + \frac{1 - \sigma}{\sigma}},$$

$$\lambda_2 = 1 - \frac{1 + \alpha h}{2\sigma} - \sqrt{\left(1 - \frac{1 + \alpha h}{2\sigma} \right)^2 + \frac{1 - \sigma}{\sigma}}.$$

Имеют место следующие свойства:

- корни вещественные;
- разных знаков: $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \leq 0$;
- $\lambda_1 < 1$;
- $\lambda_2 \geq -1$ при $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $h \leq h_0 = \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{4}{\alpha}$;
- $\lambda_2 < -1$ при $\sigma = \frac{1}{2}$ и при $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $h_0 < h \leq l$.

Если $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ и $h \leq \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{2}{\alpha}$, то $\lambda_1 \geq |\lambda_2|$, поэтому

$$\max_{1 \leq j \leq N} |\lambda|^j = \max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_1|^j = \lambda_1.$$

Если $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ и $\left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{2}{\alpha} \leq h \leq h_0$, то $\lambda_1 \leq |\lambda_2|$, поэтому

$$\max_{1 \leq j \leq N} |\lambda|^j = \max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_2|^j = |\lambda_2|.$$

Если $\sigma = \frac{1}{2}$, либо $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $h_0 < h \leq l$, то $|\lambda_2| > 1$, поэтому

$$\max_{1 \leq j \leq N} |\lambda|^j = \max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_2|^j = |\lambda_2|^N.$$

Следовательно,

$$C_y \geq \begin{cases} \lambda_1, & \text{при } \frac{1}{2} < \sigma < 1 \text{ и } h \leq \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \frac{2}{\alpha}, \\ |\lambda_2|, & \text{при } \frac{1}{2} < \sigma < 1 \text{ и } \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \frac{2}{\alpha} \leq h \leq h_0, \\ |\lambda_2|^N, & \text{при } \sigma = \frac{1}{2}, \text{ либо } \frac{1}{2} < \sigma < 1, h_0 < h \leq l. \end{cases} \quad (14.11)$$

Поскольку корни λ_1 и λ_2 зависят от h , а постоянная C_y не должна зависеть от h , то оценка (14.11) требует уточнения. При выполнении первого условия в (14.11), т.е. при

$$\frac{1}{2} < \sigma < 1, \quad h \leq \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \frac{2}{\alpha}$$

функция $\lambda_1(h)$ является монотонно убывающей функцией от h , поэтому

$$C_y \geq \sup_{0 < h \leq \frac{2\sigma-1}{\alpha}} \lambda_1(h) = \lambda_1(0) = 1.$$

При выполнении второго условия в (14.11), т.е. при

$$\frac{1}{2} < \sigma < 1, \quad \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \frac{2}{\alpha} \leq h \leq \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \frac{4}{\alpha}$$

функция $|\lambda_2(h)|$ является монотонно возрастающей функцией от h , поэтому

$$C_y \geq \sup_{\frac{2\sigma-1}{\alpha} \leq h \leq \frac{4\sigma-2}{\alpha}} |\lambda_2(h)| = |\lambda_2(h)|_{h=\frac{4\sigma-2}{\alpha}} = 1.$$

Пусть теперь $\sigma = 1/2$. Тогда

$$|\lambda_2|^N = \left(\alpha h + \sqrt{1 + \alpha^2 h^2}\right)^{1/h} \equiv f(h). \quad (14.12)$$

Легко проверить, что функция $f(h)$ является при $h > 0$ монотонно убывающей функцией (см. рис. 11), поэтому

$$C_y \geq \sup_{0 < h \leq l} f(h) = e^{\alpha l}.$$

И, наконец, при $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $h_0 < h \leq l$ будем иметь

$$C_y \geq \sup_{h_0 < h \leq l} g(h),$$

где

$$g(h) = |\lambda_2(h)|^N = \left(\frac{1 + \alpha h}{2\sigma} - 1 + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha h}{2\sigma} - 1 \right)^2 + \frac{1 - \sigma}{\sigma}} \right)^{l/h}. \quad (14.13)$$

График функции $g(h)$ показан на рис. 12.

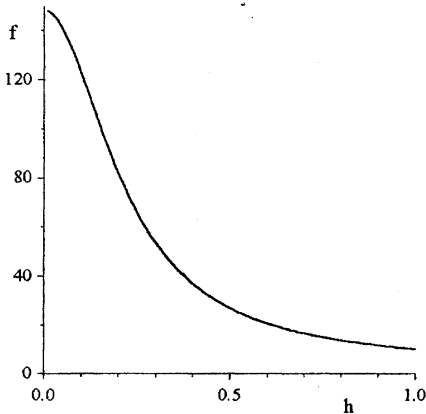


Рис. 11. График функции $f(h)$.

$\alpha = 5, l = 1$

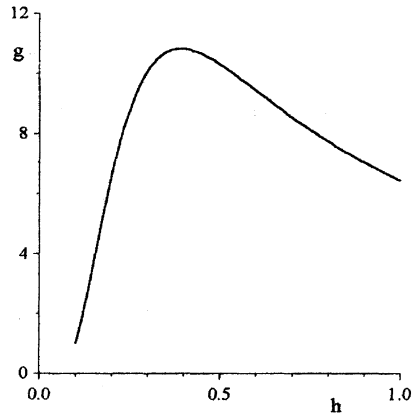


Рис. 12. График функции $g(h)$.

$\alpha = 4, \sigma = 0.6, l = 1, h_0 < h \leq l$

8.2. $e^{\alpha l} \leq C_y \leq (1 + 2l)e^{2\alpha l}$. Указание. Схема с центральной разностью (7.26) совпадает со схемой с весами (7.59) при $\sigma = 1/2$.

8.3.
$$\begin{cases} 1 \leq C_y \leq 1 + l, & \text{при } 0 < h \leq \frac{2}{\alpha} \equiv h_0, \\ \alpha l - 1 \leq C_y \leq (1 + l)e^{\alpha l}, & \text{при } h_0 < h \leq l \leq \frac{x_0}{\alpha}, \\ e^{\frac{\alpha l}{x_0 - 1}} \leq C_y \leq (1 + l)e^{\alpha l}, & \text{при } h_0 < h \leq l, \frac{x_0}{\alpha} \leq l, \end{cases}$$

где $x_0 \approx 4.591121478$ — корень уравнения

$$\frac{x}{x-1} = \ln(x-1).$$

Указание. Покажите, что при $0 < h \leq 2/\alpha \equiv h_0$ имеют место соотношения

$$|1 - \alpha h| \leq 1, \quad \sup_{h \in (0, h_0)} |1 - \alpha h| = 1, \quad 1 \leq C_y \leq 1 + l.$$

Пусть теперь $h_0 < h \leq l$. В этом случае $|R_h| = |1 - \alpha h| \leq 1 + \alpha h$. Следовательно, $C_y \leq (1 + l)e^{\alpha l}$. При получении оценки снизу

$$C_y \geq \max_j |1 - \alpha h|^j = (\alpha h - 1)^N = (\alpha h - 1)^{l/h} \equiv g(h)$$

учтите, что функция $g(h)$ принимает наибольшее значение при $h = h_*$, где h_* — корень уравнения

$$\frac{\alpha h_*}{\alpha h_* - 1} = \ln(\alpha h_* - 1),$$

$\alpha h_* \approx 4.591121478$, $h_* > h_0$. Если $l \leq h_*$, то

$$C_y \geq \sup_{h \in (h_0, l]} g(h) = g(l) = \alpha l - 1.$$

Если же $h_* \leq l$, то

$$C_y \geq \sup_{h \in (h_0, l]} g(h) = g(h_*) = (\alpha h_* - 1)^{l/h_*} = \exp\left(\frac{\alpha l}{\alpha h_* - 1}\right).$$

Поведение функции $g(h)$ показано на рис. 13.

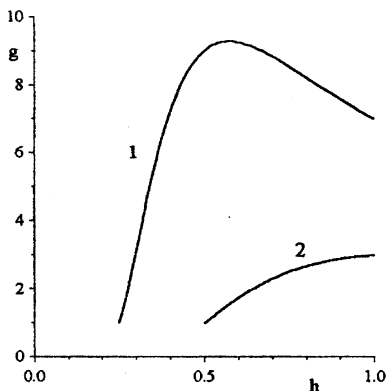


Рис. 13. График функции $g(h)$. $l = 1$, $h_0 \leq h \leq l$, $\alpha = 8$ (1), $\alpha = 4$ (2)

8.4. $1 \leq C_y \leq 1 + 2l$. Указание. Покажите, что схема (7.58) совпадает со схемой с весами (7.59) при $\sigma = 1/2 + \alpha h/2$.

8.5. Указание. Согласно теореме 8.2 о спектральном признаке устойчивости для устойчивости схемы необходимо выполнение условия (8.2).

Собственное значение λ_2 оператора перехода не лежит в указанном круге, так как

$$|\lambda_2| = \frac{1}{\sigma} - 1 + \alpha h \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) + O(h^2)$$

и

$$\frac{1}{\sigma} - 1 > 1.$$

8.7. Указание. Для нахождения решения воспользуйтесь леммой 8.2. Для проверки необходимого условия устойчивости (8.23) оцените корни характеристического уравнения.

8.8. $y_j = y_a + D(x_j - a)$. **Указание.** Для нахождения решения воспользуйтесь леммой 8.3.

8.9. $y_j = \cos j\varphi + \frac{4+h}{\sqrt{4-h^2}} \sin j\varphi$, где $\varphi = \arccos \left(1 - \frac{h^2}{2} \right)$. **Указание.** Для нахождения решения воспользуйтесь леммой 8.4.

8.10. Решение. Разностная схема (7.26), аппроксимирующая задачу (8.30), записывается в виде (8.32) и имеет решение (8.40). Следовательно, погрешность решения в точке x_j будет равна

$$\varepsilon_j = y_j - y(x_j) = \frac{\alpha^2 h^2}{4} \left(-1 + \frac{2}{3} \alpha x_j \right) e^{-\alpha x_j} + (-1)^j \frac{\alpha^2 h^2}{4} e^{\alpha x_j} + O(h^3). \quad (14.14)$$

Схема (7.58), аппроксимирующая задачу (8.30), выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + \alpha \frac{y_{j-1} + y_{j+1}}{2} &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= 1, \\ y_1 &= y_* \equiv 1 - \alpha h. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$(1 + \alpha h)\lambda^2 - (1 - \alpha h) = 0$$

имеет при $h < h_0 = 1/\alpha$ различные вещественные корни

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{1 - \alpha h}{1 + \alpha h}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{1 - \alpha h}{1 + \alpha h}},$$

при этом $|\lambda_{1,2}| < 1$.

Согласно лемме 8.2 решение разностной задачи (14.15) задается формулой

$$y_j = \gamma \lambda_1^j + \beta \lambda_2^j, \quad (14.16)$$

где

$$\beta = \frac{y_* - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \alpha^2 h^2},$$

$$\gamma = 1 - \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \alpha^2 h^2}.$$

При $h < h_0 = 1/\alpha$ имеем следующие представления:

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2 h^2}{2} + O(h^4) \right) = 1 - \frac{\alpha^2 h^2}{4} + O(h^4),$$

$$\gamma = 1 - \beta = \frac{\alpha^2 h^2}{4} + O(h^4),$$

$$\lambda_2^j = \left(\sqrt{\frac{1 - \alpha h}{1 + \alpha h}} \right)^j = \exp \left[\frac{x_j}{2h} \ln \left(\frac{1 - \alpha h}{1 + \alpha h} \right) \right] =$$

$$= \exp \left[\frac{x_j}{2h} \ln \left((1 - \alpha h)(1 - \alpha h + \alpha^2 h^2 - \alpha^3 h^3 + O(h^4)) \right) \right] = \exp \left[\frac{x_j}{2h} \cdot \right.$$

$$\left. \left(-2\alpha h + 2\alpha^2 h^2 - 2\alpha^3 h^3 - \frac{1}{2}(4\alpha^2 h^2 - 8\alpha^3 h^3) - \frac{1}{3}8\alpha^3 h^3 + O(h^4) \right) \right] =$$

$$= \exp \left[\frac{x_j}{2h} \left(-2\alpha h - \frac{2}{3}\alpha^3 h^3 + O(h^4) \right) \right] = e^{-\alpha x_j} \left(1 - \frac{\alpha^3 h^2 x_j}{3} + O(h^3) \right) =$$

$$= e^{-\alpha x_j} - \frac{\alpha^3 h^2 x_j}{3} e^{-\alpha x_j} + O(h^3),$$

$$\lambda_1^j = (-1)^j \lambda_2^j = (-1)^j e^{-\alpha x_j} + O(h^2).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (14.16), будем иметь

$$y_j = e^{-\alpha x_j} - \frac{\alpha^2 h^2}{4} \left(1 + \frac{4}{3} \alpha x_j - (-1)^j \right) e^{-\alpha x_j} + O(h^3),$$

поэтому при применении схемы (14.15) погрешность численного решения вычисляется по формуле

$$\delta_j = y_j - y(x_j) = -\frac{\alpha^2 h^2}{4} \left(1 + \frac{4}{3} \alpha x_j - (-1)^j \right) e^{-\alpha x_j} + O(h^3). \quad (14.17)$$

Сравнивая формулы (14.14) и (14.17), видим, что при больших значениях α погрешность схемы (8.32) будет существенно бóльшей, чем погрешность решения, полученного по схеме (14.15), поскольку в выражении для погрешности первой схемы содержится быстро возрастающая функция $e^{\alpha x}$. Например, при $\alpha = 20$, $h = 0.01$ ($N = 100$), $x_j = 1$ ($j = N$) имеют место такие оценки:

$$\varepsilon_j = -\frac{37}{3}10^{-2}e^{-20} + 10^{-2}e^{20} + O(h^3), \quad \delta_j = -\frac{4}{3}10^{-2}e^{-20} + O(h^3).$$

8.11. Указание. Используя формулу (8.10) для корней характеристического уравнения, покажите, что решение разностной задачи (8.41) имеет вид:

$$y_j = e^{-\alpha x_j} + (\alpha h + O(h^2)) 2^{x_j/h} e^{\alpha x_j} + O(h),$$

поэтому погрешность ε_j численного решения вычисляется по формуле

$$\varepsilon_j = y_j - y(x_j) = (\alpha h + O(h^2)) 2^{x_j/h} e^{\alpha x_j} + O(h).$$

Если точку $x_j \in (0, 1]$ зафиксировать, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} h 2^{x_j/h} = \infty,$$

поэтому при измельчении сетки численное решение не будет сходиться к точному решению дифференциальной задачи.

9.1. Решение. Для модельного уравнения (9.3) разностное уравнение (9.7) запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} &= -\frac{\alpha}{6} \left[y_j + 4\left(y_j - \frac{\alpha h}{2} y_j\right) + y_j + \alpha h y_j - 2\alpha h \left(y_j - \frac{\alpha h}{2} y_j\right) \right] = \\ &= -\frac{\alpha y_j}{6} \left[1 + 4\left(1 - \frac{\alpha h}{2}\right) + 1 + \alpha h - 2\alpha h \left(1 - \frac{\alpha h}{2}\right) \right] = \\ &= -\alpha y_j \left(1 - \frac{\alpha h}{2} + \frac{\alpha^2 h^2}{6} \right). \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой схемы имеет корень

$$\lambda = 1 - \alpha h \left(1 - \frac{\alpha h}{2} + \frac{\alpha^2 h^2}{6} \right),$$

поэтому необходимое условие устойчивости (9.5) выполняется.

9.2. Указание. Покажите, что характеристическое уравнение схемы Адамса (9.8), рассматриваемой для модельного уравнения (9.3), имеет вид:

$$\left(1 + \frac{5}{12}\alpha h\right)\lambda^2 - \left(1 - \frac{2}{3}\alpha h\right)\lambda - \frac{1}{12}\alpha h = 0.$$

Покажите, что при малых h (например, при $h < 1/|\alpha|$) корни характеристического уравнения будут действительными числами, причем

$$\lambda_1 = \frac{1 - \frac{2}{3}\alpha h - \sqrt{1 - \alpha h + \frac{21}{36}\alpha^2 h^2}}{2\left(1 + \frac{5}{12}\alpha h\right)} = -\frac{\alpha h}{12} + O(h^2),$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - \frac{2}{3}\alpha h + \sqrt{1 - \alpha h + \frac{21}{36}\alpha^2 h^2}}{2\left(1 + \frac{5}{12}\alpha h\right)} = 1 - \alpha h + O(h^2).$$

10.1. Указание. Воспользуйтесь решением задачи 8.3.

10.2. Указание. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то система собственных векторов \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 составляет базис в R^2 . Следовательно, вектор \mathbf{y}_a можно разложить по этому базису. Далее воспользуйтесь равенством $\mathbf{y}_j = R_h^j \mathbf{y}_a$.

11.v1.1. Вычислим правые части формулы (11.1) через значения функции f и ее производных в точке (x_j, y_j) :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= hf, & \varphi_2 &= h \left[f + \frac{h}{2}f_x + \frac{hf}{2}f_y + \right. \\ & & & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4}f_{xx} + 2\frac{h}{2}\frac{hf}{2}f_{xy} + \left(\frac{hf}{2}\right)^2 f_{yy} \right) + O(h^3) \right] = \\ &= hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + \frac{h^3}{8}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) + O(h^4), \\ \varphi_3 &= hf [x_j + h, y_j - hf + 2hf + h^2(f_x + ff_y) + \\ & \quad + \frac{h^3}{4}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) + O(h^4)] = \\ &= h [f + hf_x + (hf + h^2(f_x + ff_y))f_y + \\ & \quad + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2h hf_{xy} + h^2 f^2 f_{yy}) + O(h^3)] = \\ &= hf + h^2(f_x + ff_y) + h^3(f_x + ff_y)f_y + \frac{h^3}{2}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) + O(h^4). \end{aligned}$$

Используя полученные выражения в формуле (11.1), получим:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y)(x_j, y_j) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + f_x f_y + 2ff_{xy} + ff_y^2 + f^2 f_{yy})(x_j, y_j) + O(h^4), \quad (14.18)$$

что совпадает с точностью до слагаемых порядка $O(h^4)$ с формулой (1.11) метода степенных рядов, имеющего локальную погрешность порядка $O(h^4)$.

11.v1.2. $L_h y_{h,j} = \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2}$. Разностный оператор будем искать в виде (4.20):

$$L_h y_{h,j} = \frac{1}{h^2}(\alpha y_{j-1} + \beta y_j + \gamma y_{j+1}).$$

Подберем коэффициенты α, β, γ так, чтобы для произвольной гладкой функции оказалось справедливым равенство

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x_j) = L_h(y)_{h,j} + O(h^2). \quad (14.19)$$

По формуле Тейлора

$$y(x_{j\pm 1}) = y(x_j) \pm hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) \pm \frac{h^3}{6}y'''(x_j) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_{\pm}),$$

где точки ξ_{\pm} лежат между точками x_j и $x_j \pm h$. Подставив эти выражения в (14.19), получим систему для нахождения неопределенных коэффициентов

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ -\alpha + \gamma = 0, \\ \alpha + \gamma = 2. \end{cases} \quad (14.20)$$

11.v1.3. $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$. Для локальной погрешности аппроксимации в узле x_j получается выражение

$$\psi_{h,j} = \frac{y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + O(h^3) - y}{h} + (\alpha_1 A + \alpha_2(A + hA' + O(h^2))) \cdot (\beta_1 y + \beta_2(y + hy' + O(h^2))) - \left(f + \frac{h}{2}f' + O(h^2)\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= y' + \frac{h}{2}y'' + [(\alpha_1 + \alpha_2)A + h\alpha_2A'] \cdot [(\beta_1 + \beta_2)y + h\beta_2y'] - f - \frac{h}{2}f' + O(h^2) = \\
&= y' + (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)Ay - f + \\
&+ \frac{h}{2} [y'' + 2\alpha_2(\beta_1 + \beta_2)A'y + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\beta_2Ay' - f'] + O(h^2).
\end{aligned}$$

Так как функция $y(x)$ является решением задачи (11.4), то она удовлетворяет следствию дифференциального уравнения

$$y''(x) + A'(x)y(x) + A(x)y'(x) = f'(x). \quad (14.21)$$

Для выполнения неравенства $\|\psi_h\|_{F_h} \leq Ch^2$ необходимо, чтобы коэффициенты схемы (11.5) удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot (\beta_1 + \beta_2) = 1, \\ \alpha_2(\beta_1 + \beta_2) = 1/2, \\ \beta_2(\alpha_1 + \alpha_2) = 1/2. \end{cases}$$

Находим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4\alpha}$, где $\alpha \neq 0$ — параметр. Подставляя найденные коэффициенты в разностное уравнение схемы, убеждаемся, что это уравнение принимает такой вид:

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \frac{A(x_j) + A(x_{j+1})}{2} \cdot \frac{y_j + y_{j+1}}{2} = f(x_j + \frac{h}{2}).$$

11.v2.1. В этой задаче

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= hf + \frac{h^2}{3}(f_x + ff_y) + O(h^3), \\
\varphi_3 &= hf \left[x_j + \frac{2}{3}h, y_j + \frac{2}{3}hf + \frac{2h^2}{9}(f_x + ff_y) + O(h^3) \right] = \\
&= h \left[f + \frac{2}{3}hf_x + \left(\frac{2}{3}hf + \frac{2h^2}{9}(f_x + ff_y) \right) f_y + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}h^2 f_{xx} + 2 \frac{2h}{3} \frac{2h}{3} ff_{xy} + \frac{4}{9}h^2 f^2 f_{yy} \right) + O(h^3) \right] = hf + \\
&+ \frac{2h^2}{3}(f_x + ff_y) + \frac{2h^3}{9}(f_x f_y + ff_y^2) + \frac{2h^3}{9}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) + O(h^4).
\end{aligned}$$

Используя полученные выражения в формуле (11.6), получим такую же формулу (14.18), как в первом варианте.

11.v2.2.

$$L_h y_{h,j} = -\frac{h_{j+1}}{h_j(h_j + h_{j+1})} y_{j-1} + \frac{h_{j+1} - h_j}{h_j h_{j+1}} y_j + \frac{h_j}{h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} y_{j+1}.$$

В случае неравномерной сетки разностный оператор отыскивается в виде (4.23). Для указанного шаблона и произвольной гладкой функции $y(x)$ должно выполняться равенство

$$\frac{dy}{dx}(x_j) = \alpha y(x_{j-1}) + \beta y(x_j) + \gamma y(x_{j+1}) + O(h^2), \quad (14.22)$$

где $h = \max(h_{j+1}, h_j)$. По формуле Тейлора

$$y(x_{j-1}) = y(x_j) - h_j y'(x_j) + \frac{h_j^2}{2} y''(x_j) + O(h_j^3),$$

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + h_{j+1} y'(x_j) + \frac{h_{j+1}^2}{2} y''(x_j) + O(h_{j+1}^3).$$

Тогда для неопределенных коэффициентов получим систему

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ -h_j \alpha + h_{j+1} \gamma = 1, \\ \alpha h_j^2 + \gamma h_{j+1}^2 = 0. \end{cases} \quad (14.23)$$

11.v2.3. $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$. Для локальной погрешности аппроксимации в узле x_j получается выражение

$$\begin{aligned} \psi_{h,j} &= \frac{y + hy' + \frac{h^2}{2} y'' + O(h^3) - y}{h} + \left(A + \frac{h}{2} A' + O(h^2) \right) \cdot \\ &\cdot (\beta_1 y + \beta_2 (y + hy' + O(h^2))) - \gamma_1 f - \gamma_2 (f + hf' + O(h^2)) = \\ &= y' + \frac{h}{2} y'' + \left[A + \frac{h}{2} A' \right] \cdot [(\beta_1 + \beta_2) y + h\beta_2 y'] - (\gamma_1 + \gamma_2) f - \gamma_2 h f' + O(h^2) = \\ &= y' + (\beta_1 + \beta_2) A y - (\gamma_1 + \gamma_2) f + \\ &+ \frac{h}{2} [y'' + (\beta_1 + \beta_2) A' y + 2\beta_2 A y' - 2\gamma_2 f'] + O(h^2). \end{aligned}$$

Далее учесть следствие (14.21).

12.v1.1. $1 \leq C_y \leq 1 + 2l$. Указание. Каноническая форма схемы (12.1) имеет вид (7.25), где

$$y_j = \begin{pmatrix} y_{j+1} \\ y_j \end{pmatrix}, \quad y_a = \begin{pmatrix} y_a \\ y_a \end{pmatrix},$$

$$R_h = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1 + 2\alpha h} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho}_{j-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1 + 2\alpha h} \varphi^j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При выборе норм в пространствах U_h , F_h и в двумерном пространстве Y векторов y и $\bar{\rho}$ в виде (7.50) – (7.52) неравенства (A1) – (A3) из теоремы 7.1 о достаточном условии устойчивости выполняются с постоянными $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 2$. Согласно лемме 7.2 о норме матричного оператора

$$\|R_h\|_Y = \max \left(\frac{1}{1 + 2\alpha h}, 1 \right) = 1,$$

поэтому

$$\|R_h^j\|_Y \leq \|R_h\|_Y^j = 1 = C_4.$$

Тогда по теореме 7.1 схема (12.1) устойчива и $C_y \leq 1 + 2l$.

Постоянная C_y оценивается снизу так:

$$C_y \geq M_1 M_2 \max_j |\lambda|^j,$$

где λ — произвольное число из спектра оператора R_h , M_1 и M_2 — постоянные, входящие в условия (B1) и (B2) теоремы 7.2 о необходимом условии устойчивости. Очевидно, что для схемы (12.1) $M_1 = M_2 = 1$.

Спектр оператора R_h состоит из двух собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы R_h :

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha h}}$$

Отсюда

$$\max_{1 \leq j \leq N} |\lambda|^j = |\lambda_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha h}}.$$

Следовательно,

$$C_y \geq \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha h}}.$$

Поскольку постоянная C_y в определении устойчивости не должна зависеть от h , то из последней оценки следует, что $C_y \geq 1$.

12.v1.2. Указание. По теореме Виета корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 2\alpha h = 0,$$

соответствующего разностному уравнению задачи (12.3), удовлетворяют равенству $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$. Следовательно, $|\lambda_1| + |\lambda_2| \geq 4$. Отсюда следует, что хотя бы для одного из корней выполняется неравенство $|\lambda| \geq 2$, т.е. нарушается необходимое условие устойчивости (8.23).

12.v1.3. Решение. По условию $\alpha > 0$, поэтому корни

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{1 + 2\alpha h}, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{1 + 2\alpha h}$$

характеристического уравнения являются различными вещественными числами. По лемме 8.2 решение разностной схемы (12.5) записывается в виде

$$y_j = \gamma \lambda_1^j + \beta \lambda_2^j, \quad j = 0, \dots, N, \quad (14.24)$$

где

$$\beta = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1 + 2\alpha h}}, \quad \gamma = 1 - \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 + 2\alpha h}}.$$

Чтобы иметь возможность сравнить полученное решение разностной схемы с точным решением дифференциальной задачи, заменим коэффициенты γ , β и степени λ_1^j , λ_2^j более простыми выражениями. Имеем:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 + \alpha h + O(h^2))} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \alpha h + O(h^2)) = \frac{\alpha h}{2} + O(h^2),$$

$$\gamma = 1 - \beta = 1 - \frac{\alpha h}{2} + O(h^2),$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^j &= e^{j \ln(2 - \sqrt{1 + 2\alpha h})} = e^{\frac{\pi j}{h} \ln(2 - 1 - \alpha h + O(h^2))} = \\ &= e^{\frac{\pi j}{h}(-\alpha h + O(h^2))} = e^{-\alpha x_j} e^{O(h)} = e^{-\alpha x_j} (1 + O(h)) = e^{-\alpha x_j} + O(h). \end{aligned}$$

Коэффициент β имеет порядок $O(h)$, поэтому в представлении λ_2^j ограничимся лишь членами порядка $O(1)$:

$$\begin{aligned} \lambda_2^j &= (2 + 1 + O(h))^j = (3 + O(h))^j = 3^j (1 + O(h))^j = \\ &= 3^j e^{\frac{\pi j}{h} \ln(1 + O(h))} = 3^j e^{\frac{\pi j}{h} O(h)} = 3^j e^{O(1)} = 3^j O(1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}y_j &= \left(1 - \frac{\alpha h}{2} + O(h^2)\right) (e^{-\alpha x_j} + O(h)) + \left(\frac{\alpha h}{2} + O(h^2)\right) 3^j O(1) = \\&= e^{-\alpha x_j} + O(h) + \left(\frac{\alpha h}{2} + O(h^2)\right) 3^{\frac{x_j}{h}}.\end{aligned}$$

Отсюда для погрешности ε_j численного решения получаем выражение

$$\varepsilon_j = y_j - y(x_j) = \left(\frac{\alpha h}{2} + O(h^2)\right) 3^{\frac{x_j}{h}} + O(h).$$

Для фиксированной точки $x_j \in (0, 1]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h 3^{\frac{x_j}{h}} = \infty,$$

поэтому при измельчении сетки численное решение не будет сходиться к точному решению дифференциальной задачи.

12.v2.1. $1 \leq C_y \leq 1 + 2l$. Указание. Для схемы (12.6) оператор перехода имеет вид:

$$R_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 2\alpha h \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\|R_h\|_Y = \max(|1 - 2\alpha h|, 1) < 1 + 2\alpha h,$$

откуда и следует устойчивость.

Пусть $h < 1/\alpha$. Тогда $|1 - 2\alpha h| < 1$ и $\|R_h\|_Y = 1$. Следовательно, в случае $h < 1/\alpha$ постоянные C_k , $k = 1, 2, 3, 4$ для схемы (12.6) будут такими же, как для схемы (12.1).

Спектр оператора R_h состоит из собственных значений

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{1 - 2\alpha h},$$

которые при условии $h < 1/\alpha$ могут быть как вещественными, так и комплексно сопряженными. Но в любом из этих случаев $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{|1 - 2\alpha h|}$, поэтому

$$\max_{1 \leq j \leq N} |\lambda|^j = \max_{1 \leq j \leq N} \left(\sqrt{|1 - 2\alpha h|}\right)^j = \sqrt{|1 - 2\alpha h|}.$$

(Последнее равенство вытекает из неравенства $|1 - 2\alpha h| < 1$). Отсюда получаем, что $C_y \geq \sqrt{|1 - 2\alpha h|}$ для произвольных малых h , т.е. $C_y \geq 1$.

12.v2.2. Указание. Для корней характеристического уравнения справедливо равенство $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3$. Отсюда следует, что один из корней удовлетворяет неравенству $|\lambda| \geq \sqrt{3}$, т.е. нарушается необходимое условие устойчивости (8.23).

12.v2.3. Решение. Решение разностной задачи (12.10) задается формулой (14.24), где

$$\lambda_1 = -1 - 2\alpha h - 2\sqrt{1 + \alpha h + \alpha^2 h^2}, \quad \lambda_2 = -1 - 2\alpha h + 2\sqrt{1 + \alpha h + \alpha^2 h^2}$$

— корни характеристического уравнения,

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{1 + \alpha h}{2\sqrt{1 + \alpha h + \alpha^2 h^2}}, \quad \gamma = 1 - \beta = \frac{1}{2} - \frac{1 + \alpha h}{2\sqrt{1 + \alpha h + \alpha^2 h^2}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} + \frac{1 + \alpha h}{2(1 + \frac{\alpha h}{2} + O(h^2))} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \alpha h) \left(1 - \frac{\alpha h}{2} + O(h^2)\right) = \\ &= 1 + \frac{\alpha h}{4} + O(h^2), \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha h}{2} + O(h^2)\right) = -\frac{\alpha h}{4} + O(h^2),$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^j &= \left(-1 - 2\alpha h - 2 \left(1 + \frac{\alpha h}{2} + O(h^2)\right)\right)^j = (-3 + O(h))^j = \\ &= (-3)^j (1 + O(h))^j = (-3)^j O(1), \end{aligned}$$

$$\lambda_2^j = e^{\frac{\alpha j}{k} \ln(-1 - 2\alpha h + 2(1 + \frac{\alpha h}{2} + O(h^2)))} = e^{-\alpha x_j} + O(h).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} y_j &= \left(-\frac{\alpha h}{4} + O(h^2)\right) (-3)^j O(1) + \left(1 + \frac{\alpha h}{4} + O(h^2)\right) (e^{-\alpha x_j} + O(h)) = \\ &= e^{-\alpha x_j} + O(h) + \left(-\frac{\alpha h}{4} + O(h^2)\right) (-1)^j (3)^{\frac{\alpha j}{k}}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_j = y_j - y(x_j) = \left(-\frac{\alpha h}{4} + O(h^2)\right) (-1)^j 3^{\frac{\alpha j}{k}} + O(h).$$

Видим, что погрешность численного решения не стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, и, следовательно, численное решение не будет сходиться к точному решению дифференциальной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ахмеров Р. Р. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1994.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: В 2 т. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. Т. 2.
4. Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
5. Дробышевич В. И. и др. Задачи по вычислительной математике / В. И. Дробышевич, В. П. Дымников, Г. С. Ривин. М.: Наука, 1980.
6. Каханер Д. и др. Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. М.: Мир, 1998.
7. Лебедев А. С., Черный С. Г. Практикум по численному решению уравнений в частных производных. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2000.
8. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
9. Михайлов А. П. Задания вычислительного практикума на ЭВМ. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1998.
10. Паасонен В. И. Инструмент научных исследований MATLAB. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2000.
11. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964.
12. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.
13. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
14. Смелов В. В. Основы методов вычислительной математики. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1986. Вып. 2.
15. Форсайт Дж. и др. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. М.: Мир, 1980.
16. Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б. Аналитические вычисления и визуализация результатов. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1998.
17. Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б. Анализ данных и подготовка публикаций. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1999.

*Хакимзянов Гаяз Салимович,
Черный Сергей Григорьевич*

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Часть 1. Численные методы решения задачи Коши
для обыкновенных дифференциальных уравнений

Учебное пособие

Редактор С. В. Исакова

Подписано в печать 14.11.2003 г.
Формат 60×84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 10. Тираж 250 экз.
Заказ № 551

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.