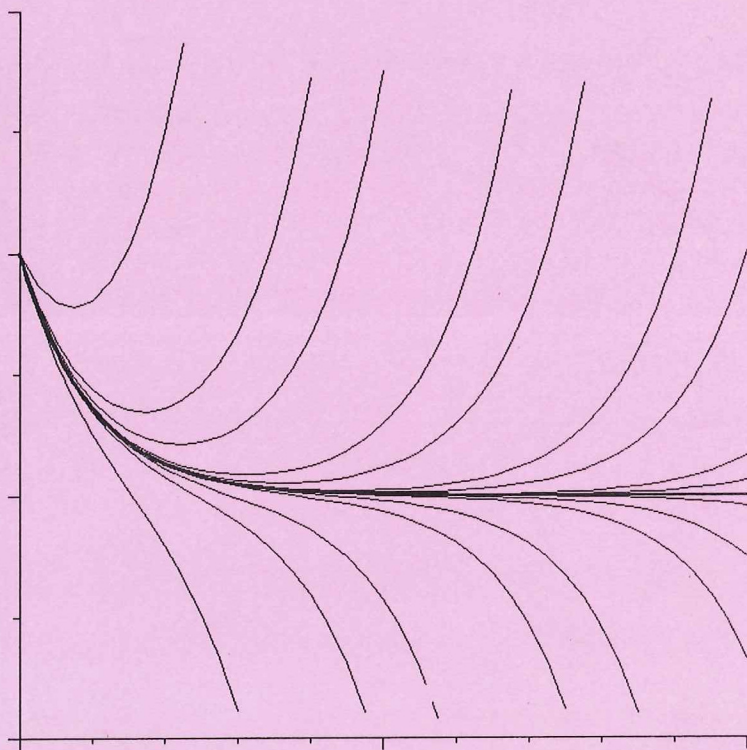


Г. С. Хакимзянов,
С. Г. Черный

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Часть 2



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Г. С. Хакимзянов, С. Г. Черный

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

**Часть 2. Численные методы решения краевых задач
для обыкновенных дифференциальных уравнений**

Учебное пособие

Новосибирск
2005

ББК В192.162

УДК 518.61+517.949

Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: В 4 ч.: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005. Ч. 2: Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. 158 с.

Учебное пособие соответствует программе курса лекций «Методы вычислений», который читается на механико-математическом факультете НГУ. В его второй части излагаются основы численных методов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, формулируются задачи для семинарских занятий, приводятся образцы заданий для практических занятий на ЭВМ и пример контрольной работы.

Пособие предназначено для студентов и преподавателей математических специальностей высших учебных заведений.

Рецензент

кандидат физико-математических наук А. С. Лебедев

©Новосибирский государственный
университет, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Задачи
Предисловие	4
§ 1. Метод стрельбы	5 9
§ 2. Конечно-разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	10 25
§ 3. Разностные тождества и неравенства	29 37
§ 4. Свойства оператора второй разностной производной	37 45
§ 5. Априорные оценки решений разностных схем	49 54
§ 6. Разностная схема для стационарного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами	55 59
§ 7. Конечно-разностные схемы на неравномерных сетках	60 75
§ 8. Метод конечных элементов	76 105
§ 9. Контрольная работа по теме «Конечно-разностные методы решения краевых задач».....	107
§ 10. Задания для лабораторной работы 2	109
§ 11. Задания для лабораторной работы 3	133
Ответы, указания, решения	142
Библиографический список	157

Предисловие

Во второй части пособия излагаются основы численных методов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и формулируются задачи по этой теме для семинарских занятий, приводятся задания для практических занятий на ЭВМ и пример контрольной работы. Эта часть курса осваивается студентами в середине V семестра.

Теоретические вопросы изложены достаточно кратко. Для более глубокого изучения рассматриваемых вопросов мы рекомендуем обратиться к учебнику С. К. Годунова и В. С. Рябенского [4], а также к книгам Н. С. Бахвалова [2], И. С. Березина и Н. П. Жидкова [3], Г. И. Марчука [9], А. А. Самарского [13], А. А. Самарского и А. В. Гулина [15] и учебным пособиям, изданным в НГУ [1; 8; 17]. На лекциях рассматриваются теоретические вопросы, связанные только с первой краевой задачей. Задачи с краевыми условиями второго и третьего рода вынесены на семинарские занятия. Кроме того, такие задачи имеются в заданиях лабораторных занятий на ЭВМ.

Каждый параграф сопровождается задачами, которые необходимо решить на семинарских занятиях. Многие задачи снабжены указаниями и подробными решениями. Дополнительные материалы для этих занятий можно найти в задачниках [5; 14].

В пособии приведены примеры практических заданий, даны основные рекомендации по их выполнению. Кроме того, обсуждаются вопросы, связанные с разработкой программ и представлением результатов. Каждое приведенное в пособии задание допускает многочисленные варианты, что позволит преподавателям сформулировать для каждого студента индивидуальное задание. Дополнительные задания можно взять из методического пособия [11].

Ссылки на формулы, леммы, теоремы из первой части пособия [19] даются добавлением спереди к их номеру цифры 1. Например, вместо «по формуле (4.2) из работы [19]» мы пишем «по формуле (1.4.2)».

§ 1. Метод стрельбы

1.1. Некоторые определения и теоремы. Обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка называется соотношение

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0,$$

связывающие независимую переменную x , неизвестную функцию $y(x)$, первую и вторую производные от $y(x)$.

Мы будем рассматривать уравнения, разрешенные относительно старшей производной

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (1.1)$$

Для уравнения (1.1), так же как и для уравнения первого порядка, может быть поставлена задача Коши:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), & a < x \leq b, \\ y(a) &= y_a, \\ y'(a) &= \alpha. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Перейдя в системе (1.2) от скалярного уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка, можно использовать для решения задачи Коши для полученной системы все те методы, которые мы рассмотрели в работе [19] для скалярного уравнения первого порядка.

Однако в математической физике для уравнений второго порядка наиболее типичными являются *краевые задачи* — задачи, в которых значения искомой функции или ее первых производных (или их комбинаций) задаются в нескольких различных точках. На лекциях мы, в основном, будем рассматривать численные методы решения первой краевой задачи

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), & a < x < b, \\ y(a) = y_a, \\ y(b) = y_b. \end{cases} \quad (1.3)$$

Теорема 1.1. Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна по x , удовлетворяет условию Липшица по второму и третьему аргументам и ограничена на всей области определения. Тогда краевая задача (1.3) имеет хотя бы одно решение.

Схема доказательства. Наряду с краевой задачей (1.3), рассмотрим задачу Коши (1.2), считая α параметром. Если ввести новую

переменную $z = y'$, то последнюю задачу можно переписать так:

$$\begin{cases} y' = g(x, y, z) \equiv z, \\ z' = f(x, y, z), \\ y(a) = y_a, \\ z(a) = \alpha \end{cases}$$

или в векторном виде

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), & a < x \leq b, \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a, \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_a = \begin{pmatrix} y_a \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

т. е. задача Коши (1.2) эквивалентна задаче Коши для системы уравнений первого порядка.

Известно [12], что если вектор-функция $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ непрерывна на $[a, b]$ по первому аргументу и удовлетворяет условию Липшица по второму, то задача Коши (1.4) имеет единственное решение. Поэтому решение $y(x, \alpha)$ на отрезке $[a, b]$ существует и единственно при любом α . Кроме того, решение непрерывно зависит от параметра α .

Покажем, что условие ограниченности функции f приводит к следующему асимптотическому поведению решения:

$$y(b, \alpha) \rightarrow \pm\infty \text{ при } \alpha \rightarrow \pm\infty. \quad (1.6)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} y(b, \alpha) &= y(a, \alpha) + \int_a^b y'(s, \alpha) ds = y_a + \int_a^b \left[y'(a, \alpha) + \int_a^s y''(\xi, \alpha) d\xi \right] ds = \\ &= y_a + \alpha l + \int_a^b \int_a^s f[\xi, y(\xi, \alpha), y'(\xi, \alpha)] d\xi ds, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $l = b - a$. По условию теоремы 1.1 $|f(x, y, z)| \leq M$, следовательно,

$$-Ml^2 \leq \int_a^b \int_a^s f[\xi, y(\xi, \alpha), y'(\xi, \alpha)] d\xi ds \leq Ml^2.$$

Но тогда из формулы (1.7) будут вытекать соотношения (1.6).

С учетом соотношений (1.6) и непрерывности функции $y(b, \alpha)$ по α получаем, что существует значение параметра α^* , удовлетворяющее равенству

$$y(b, \alpha^*) = y_b. \quad (1.8)$$

Тем самым, доказано существование решения краевой задачи (1.3). ■

1.2. Метод стрельбы. В основе этого численного метода лежит та же идея, что использовалась при доказательстве разрешимости задачи (1.3) — поиск решения краевой задачи (1.3) сводится к поиску решения задачи Коши (1.4), (1.5) с неизвестным параметром α . Решая указанную задачу Коши численно при различных значениях α , можно подобрать параметр $\alpha = \alpha^*$ так, чтобы для выбранного значения α^* интегральная кривая попала в точку (b, y_b) , или, другими словами, чтобы решение задачи Коши совпало с искомым решением краевой задачи. Покажем, как происходит этот подбор.

Пусть $y_h(x, \alpha)$ — численное решение задачи Коши (1.2) при некотором α . При $x = b$ это решение принимает значение $y_h(b, \alpha)$. Тогда решение краевой задачи (1.3) сводится к решению уравнения

$$F(\alpha) \equiv y_h(b, \alpha) - y_b = 0. \quad (1.9)$$

От обычного нелинейного уравнения оно отличается тем, что функция $F(\alpha)$ задается не аналитически, а с помощью численного решения задачи Коши (1.4), (1.5).

Для решения уравнения $F(\alpha) = 0$ можно использовать известные численные методы решения нелинейных уравнений [21].

Метод деления отрезка пополам (метод бисекции). Пробными "выстрелами" находятся α_1 и α_2 такие, что $F(\alpha_1) \cdot F(\alpha_2) < 0$. Если для численного решения справедливы соотношения (1.6), то такие α_1 и α_2 существуют. Далее полагаем $\alpha_3 = 0.5(\alpha_1 + \alpha_2)$ и из двух отрезков $[\alpha_1, \alpha_3]$ и $[\alpha_3, \alpha_2]$ выбираем тот, на котором $F(\alpha)$ меняет знак. Выбранный отрезок снова делится пополам и так далее, пока не будет выполнено неравенство

$$|F(\alpha_n)| \leq \varepsilon. \quad (1.10)$$

Метод Ньютона (метод касательных) выглядит следующим образом:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}.$$

Поскольку значение $F(\alpha)$ мы находим численно, то для определения $F'(\alpha_n)$ необходимо, задав некоторое приращение δ , дополнительно решить задачу Коши (1.2) при $\alpha = \alpha_n + \delta$. Полагая

$$F'(\alpha_n) \approx \frac{F(\alpha_n + \delta) - F(\alpha_n)}{\delta},$$

получаем окончательную формулу

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F(\alpha_n + \delta) - F(\alpha_n)} \cdot \delta. \quad (1.11)$$

Метод хорд. Расчетная формула метода хорд получается из формулы (1.11) при $\delta = \alpha_{n-1} - \alpha_n$:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F(\alpha_n) - F(\alpha_{n-1})} \cdot (\alpha_n - \alpha_{n-1}),$$

при этом должны быть заданы два начальных приближения α_1 и α_2 .

Замечание. Метод стрельбы решения краевой задачи (1.3) посредством вычисления решений задачи Коши (1.2) эффективен только в случае "слабой" зависимости ее решения $y(x, \alpha)$ от α . Приведем пример, иллюстрирующий сильную чувствительность решения от параметра α .

Пример 1.1. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\begin{aligned} y'' - a^2 y &= 0, & 0 < x < 1, & \quad a = \text{const} > 0, \\ y(0) &= 1, \\ y(1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Она имеет точное решение

$$y(x) = \frac{\text{sh}[a(1-x)]}{\text{sh } a}. \quad (1.13)$$

Для этого же уравнения рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} y'' - a^2 y &= 0, & 0 < x \leq 1, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= \alpha. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Она имеет такое решение:

$$y(x, \alpha) = \text{ch}(ax) + \frac{\alpha}{a} \text{sh}(ax). \quad (1.15)$$

Точное решение (1.13) краевой задачи мы получим из решения (1.15) задачи Коши, если положим $y(1, \alpha^*) = 0$, т. е.

$$\alpha^* = -a \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a}.$$

Пусть теперь производная при $x = 0$ в задаче Коши (1.14) задана с погрешностью δ , т. е. $\alpha = \alpha^* + \delta$. Тогда будем иметь следующее выражение для разности решений в точке $x = 1$ задачи Коши при двух близких значениях параметра α :

$$\Delta y(1) = y(1, \alpha^* + \delta) - y(1, \alpha^*) = \frac{\delta}{a} \operatorname{sh} a.$$

Возьмем $a = 10$, $\delta = 0.01$. Тогда $\Delta y(1) \approx 11$, т. е. малая неточность в задании α привела к значительному отклонению решения задачи Коши от решения краевой задачи. Таким образом, метод стрельбы при решении данной краевой задачи, будучи формально приемлемой процедурой, при больших a становится весьма неэффективным, поскольку для получения хорошего приближения к решению краевой задачи мы вынуждены будем определять значение параметра α очень точно. Для рассмотренной задачи предпочтительнее использовать *метод параллельной стрельбы* [1].

ЗАДАЧИ

1.1. Пусть при решении краевой задачи (1.12) методом стрельбы используется явная схема Эйлера для задачи Коши (1.4)

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} &= z_j, \\ \frac{z_{j+1} - z_j}{h} &= a^2 y_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \\ y_0 &= 1, \quad z_0 = \alpha. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Выписав точное решение задачи (1.16), найти корень α^* уравнения (1.9).

1.2. Пусть при решении краевой задачи (1.12) методом стрельбы используется модифицированная схема Эйлера для задачи Коши (1.4) (аналогичная схеме (1.9.4) для скалярного уравнения)

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} &= \frac{1}{2} [f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_j + hf(x_j, y_j))], \\ j &= 0, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$y_0 = y_a.$$

Выписав точное решение задачи (1.17), найти корень α^* уравнения (1.9).

§ 2. Конечно-разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

2.1. Основная идея конечно-разностных методов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка полностью аналогична идее конечно-разностных методов решения задачи Коши. Рассмотрим ее на примере простейшей линейной краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' - q(x)y &= -f(x), \quad a < x < b, \quad q(x) \geq m > 0, \\ y(a) &= y_a, \\ y(b) &= y_b. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Так же как и в случае задачи Коши, область непрерывного изменения аргумента x заменяем сеткой $\bar{\omega}_h$ с узлами x_j ($j = 0, \dots, N$). Вместо функции $y(x)$ рассматриваем сеточную функцию y_h , областью определения которой является сетка $\bar{\omega}_h$.

Для нахождения сеточной функции исходную краевую задачу заменим разностной схемой, при этом вторую производную аппроксимируем разностным оператором (1.4.21). В результате получим следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - q(x_j)y_j &= -f(x_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_N &= y_b. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так же как и в случае уравнения первого порядка, запишем дифференциальную краевую задачу (2.1) в символическом виде $Ly = f$, где

$$Ly = \begin{cases} y'' - q(x)y, & a < x < b, \\ y(a), \\ y(b), \end{cases} \quad f = \begin{cases} -f(x), \\ y_a, \\ y_b. \end{cases}$$

Введя обозначения

$$L_h y_h = \begin{cases} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - q(x_j)y_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0, \\ y_N, \end{cases} \quad f_h = \begin{cases} -f(x_j), \\ y_a, \\ y_b, \end{cases}$$

запишем в символическом виде $L_h y_h = f_h$ и разностную схему (2.2).

Понятия сходимости, аппроксимации и устойчивости повторяются дословно. Теорема сходимости также имеет место для краевой задачи. Поэтому для доказательства сходимости решения разностной схемы $L_h y_h = f_h$ к решению дифференциальной задачи $Ly = f$ достаточно показать, что схема аппроксимирует и устойчива.

При исследовании аппроксимации нужно оценить погрешность на решении $\|\psi_h\|_{F_h} = \|L_h(y)_h - f_h\|_{F_h}$. В нашем случае правая часть f_h принадлежит $(N+1)$ -мерному линейному пространству F_h . Если в F_h ввести норму

$$\|f_h\|_{F_h} = \max \left[|y_a|, |y_b|, \max_j |f_j| \right], \quad (2.3)$$

то легко показать, что $\|\psi_h\|_{F_h} = O(h^2)$.

Для доказательства устойчивости линейной разностной схемы необходимо установить существование единственного решения разностной схемы и справедливость оценки

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h}. \quad (2.4)$$

Иногда, как, например, в рассматриваемом случае, это можно сделать, основываясь на следующем утверждении.

Теорема 2.1. *Если коэффициенты разностной задачи*

$$\begin{aligned} a_j y_{j-1} + c_j y_j + b_j y_{j+1} &= f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_N &= y_b \end{aligned} \quad (2.5)$$

удовлетворяют условиям

$$|c_j| \geq |a_j| + |b_j| + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.6)$$

то эта задача имеет единственное решение при произвольных y_a, y_b, f_j , причем имеет место оценка

$$\|y_h\|_{U_h} \leq \max \left[|y_a|, |y_b|, \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max_j |f_j| \right], \quad (2.7)$$

где

$$\|y_h\|_{U_h} = \max_{0 \leq j \leq N} |y_j|. \quad (2.8)$$

Доказательство. Предположим сначала, что при заданных y_a, y_b, f_j задача (2.5) имеет решение, и докажем для него оценку (2.7).

Если наибольшее среди чисел $|y_j|$ ($j = 0, \dots, N$) есть $|y_0|$ или $|y_N|$, то неравенство (2.7) очевидно, так как $y_0 = y_a$, $y_N = y_b$. Если $\max_{0 \leq j \leq N} |y_j| = |y_k|$, где $0 < k < N$, то

$$\begin{aligned} |c_k| \cdot |y_k| &= |f_k - a_k y_{k-1} - b_k y_{k+1}| \leq |a_k| \cdot |y_{k-1}| + |b_k| \cdot |y_{k+1}| + |f_k| \leq \\ &\leq (|a_k| + |b_k|) |y_k| + |f_k| \end{aligned}$$

и для произвольного j

$$|y_j| \leq |y_k| \leq \frac{|f_k|}{|c_k| - |a_k| - |b_k|} \leq \frac{|f_k|}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_j |f_j|,$$

т. е. неравенство (2.7) также выполнено.

Осталось доказать, что задача (2.5) имеет, и притом только одно, решение при произвольных правых частях y_a , y_b , f_j . Задачу (2.5) можно рассматривать как систему $(N+1)$ линейных уравнений относительно такого же числа неизвестных $y_0, y_1, \dots, y_N$. Поэтому нужно установить, что определитель этой системы отличен от нуля. А это будет в том и только том случае, если соответствующая однородная система имеет лишь нулевое решение. Для задачи (2.5) однородная система получается при $y_a = y_b = f_j \equiv 0$. Из оценки (2.7), доказанной для каждого решения, видно, что в этом случае имеется только тривиальное решение $y_j \equiv 0$. ■

Чтобы применять эту теорему к нашей разностной схеме (2.2), перепишем разностное уравнение в виде трехточечного

$$\frac{1}{h^2} y_{j-1} - \left(\frac{2}{h^2} + q_j \right) y_j + \frac{1}{h^2} y_{j+1} = -f_j.$$

Тогда схема (2.2) примет вид (2.5), при этом

$$a_j = b_j = \frac{1}{h^2}, \quad c_j = - \left(\frac{2}{h^2} + q_j \right).$$

Очевидно, в данном случае условия теоремы 2.1 выполняются, причем

$$|c_j| - |a_j| - |b_j| = q_j \geq m > 0.$$

Из теоремы имеем оценку

$$|y_j| \leq \max \left[|y_a|, |y_b|, \frac{1}{m} \max_j |f_j| \right],$$

или

$$\|y_h\|_{U_h} \leq C_y \|f_h\|_{F_h},$$

где

$$C_y = \max \left(1, \frac{1}{m} \right).$$

Тогда по теореме сходимости схема (2.2) равномерно сходится со вторым порядком.

2.2. Принцип максимума. Для оценки решения краевой задачи

$$\begin{aligned} a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} &= -f_j, \\ y_0 &= y_a, \\ y_N &= y_b \end{aligned} \tag{2.9}$$

через заданные правые части f_j, y_a, y_b (т. е. через «входные данные») можно воспользоваться так называемым *принципом максимума*. Он имеет место для уравнений (2.9), когда $a_j > 0$, $b_j > 0$, $c_j > 0$.

Лемма 2.1 (принцип максимума). Пусть коэффициенты разностного оператора

$$\Delta y_j \equiv a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1$$

удовлетворяют неравенствам

$$a_j > 0, \quad b_j > 0, \quad c_j \geq a_j + b_j, \quad j = 1, \dots, N-1. \tag{2.10}$$

Если для некоторой сеточной функции y_h , отличной от постоянной, выполняются условия

$$\Delta y_j \geq 0 \quad (\Delta y_j \leq 0), \quad j = 1, \dots, N-1,$$

то она не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения во внутренних узлах.

Доказательство. Пусть

$$\Delta y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \tag{2.11}$$

Предположим, что в некотором внутреннем узле x_{j*} , $0 < j* < N$ функция y_h достигает наибольшего положительного значения:

$$y_{j*} = \max_{0 \leq j \leq N} y_j = M > 0.$$

Так как функция y_h по условию отлична от постоянной, то найдется узел с номером j_0 (j_0 может совпадать с j_*), в котором $y_{j_0} = y_{j_*} = M$, а в одном из соседних узлов, например в узле $j = j_0 - 1$, выполняется строгое неравенство $y_{j_0-1} < M$. В силу условий (2.10) получим

$$\begin{aligned}\Lambda y_{j_0} &= b_{j_0} (y_{j_0+1} - y_{j_0}) - a_{j_0} (y_{j_0} - y_{j_0-1}) - (c_{j_0} - a_{j_0} - b_{j_0}) y_{j_0} \leq \\ &\leq -b_{j_0} (y_{j_0} - y_{j_0+1}) - a_{j_0} (y_{j_0} - y_{j_0-1}) < 0.\end{aligned}$$

Это противоречит предположению (2.11).

Вторая часть леммы доказывается дословно, как это сделано в первой части, если мы заменим y_j на $-y_j$. ■

Лемма 2.2. Пусть коэффициенты краевой задачи для разностного уравнения второго порядка

$$\begin{aligned}\Lambda y_j &\equiv a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_N &= y_b\end{aligned}\tag{2.12}$$

удовлетворяют условиям (2.10). Тогда эта задача имеет единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность решения задачи (2.12) докажем от противного. Пусть существуют два решения y_h и $\tilde{y}_h$:

$$\begin{aligned}\Lambda y_j &= -f_j, & \Lambda \tilde{y}_j &= -f_j, \\ y_0 &= y_a, \quad y_N = y_b, & \tilde{y}_0 &= y_a, \quad \tilde{y}_N = y_b.\end{aligned}$$

Вычитая из первой разностной задачи вторую, получаем

$$\begin{aligned}\Lambda w_j &= 0, \\ w_0 &= 0, \quad w_N = 0,\end{aligned}$$

где $w_j = y_j - \tilde{y}_j$.

В силу леммы 2.1, w_j не может принимать наибольшего положительного, а также наименьшего отрицательного значения во внутренних узлах. Следовательно, $w_j \equiv 0$ для всех $j = 0, \dots, N$ и, значит, $y_h \equiv \tilde{y}_h$. Единственность доказана. Поскольку однородная задача имеет лишь нулевое решение, то определитель системы линейных уравнений (2.12) отличен от нуля, поэтому решение y_j неоднородной задачи (2.12) существует при произвольных значениях y_a , y_b и f_j . ■

Лемма 2.3 (о мажоранте для решения задачи (2.12)). Пусть для коэффициентов разностной задачи (2.12) выполнены условия (2.10), y_j — решение этой задачи. Пусть $\bar{y}_j$ — решение задачи

$$\begin{aligned}\Lambda \bar{y}_j &= -\bar{f}_j, \\ \bar{y}_0 &= \bar{y}_a, \\ \bar{y}_N &= \bar{y}_b,\end{aligned}\tag{2.13}$$

причем

$$\bar{f}_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad \bar{y}_a \geq 0, \quad \bar{y}_b \geq 0;\tag{2.14}$$

$$|f_j| \leq \bar{f}_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad |y_a| \leq \bar{y}_a, \quad |y_b| \leq \bar{y}_b.\tag{2.15}$$

Тогда справедлива оценка

$$|y_j| \leq \bar{y}_j, \quad j = 0, \dots, N.\tag{2.16}$$

Доказательство. В силу леммы 2.1, $\bar{y}_j \geq 0$ ($0 \leq j \leq N$). Складывая и вычитая задачи (2.12) и (2.13), получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}\Lambda v_j &= -(\bar{f}_j + f_j), & \Lambda u_j &= -(\bar{f}_j - f_j), \\ v_0 &= \bar{y}_a + y_a, & u_0 &= \bar{y}_a - y_a, \\ v_N &= \bar{y}_b + y_b, & u_N &= \bar{y}_b - y_b,\end{aligned}$$

где $v_j = \bar{y}_j + y_j$, $u_j = \bar{y}_j - y_j$.

Из условий (2.15) следует, что $\bar{f}_j \pm f_j \geq 0$ или $-(\bar{f}_j \pm f_j) \leq 0$, а также $v_0 \geq 0$, $v_N \geq 0$ и $u_0 \geq 0$, $u_N \geq 0$, поэтому в силу леммы 2.1 справедливы неравенства $u_j \geq 0$ и $v_j \geq 0$ или $y_j \leq \bar{y}_j$ и $y_j \geq -\bar{y}_j$, что и доказывает справедливость неравенства (2.16). ■

Определение. Функция $\bar{y}_h$, удовлетворяющая условию (2.16), называется мажорантой для решения y_h задачи (2.12).

В качестве примера использования принципа максимума для исследования сходимости разностных схем рассмотрим разностную задачу

$$\begin{aligned}\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - q_j y_j &= -f_j, \\ y_0 &= y_a, \\ y_N &= y_b,\end{aligned}\tag{2.17}$$

построенную для решения линейной краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' - q(x)y &= -f(x), \quad a < x < b, \\ y(a) &= y_a, \\ y(b) &= y_b. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ таковы, что решение задачи (2.18) существует, единственно и непрерывно дифференцируемо на $[a, b]$ до четвертого порядка включительно.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия

$$\max_{a \leq x \leq b} |p(x)| \leq P < \infty; \quad (2.19)$$

$$q(x) \geq 0 \text{ при } a \leq x \leq b. \quad (2.20)$$

Тогда разностная схема (2.17) равномерно сходится со вторым порядком.

Доказательство. Перепишем разностное уравнение схемы (2.17) следующим образом:

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_j}{2h}\right)y_{j-1} - \left(\frac{2}{h^2} + q_j\right)y_j + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_j}{2h}\right)y_{j+1} = -f_j.$$

Тогда схема (2.17) примет вид разностной задачи (2.12), при этом

$$a_j = \frac{1}{h^2} - \frac{p_j}{2h}, \quad b_j = \frac{1}{h^2} + \frac{p_j}{2h}, \quad c_j = a_j + b_j + q_j.$$

В силу ограниченности функции $p(x)$, для любого $h < h_* = 2/P$ удовлетворяются условия

$$-1 < 0.5hp_j < 1,$$

поэтому при $h < h_*$ имеем $a_j > 0$, $b_j > 0$ и вследствие условия (2.20) $c_j \geq a_j + b_j$, т. е. при $h < h_*$ выполняются условия леммы 2.2. Следовательно, разностная схема

$$\begin{aligned} \Delta y_j &= -f_j, \\ y_0 &= y_a, \quad y_N = y_b, \end{aligned} \quad (2.21)$$

имеет при $h < h_*$ единственное решение. Найти решение можно методом прогонки (см. задачу 2.4).

Докажем теперь, что это решение равномерно сходится со вторым порядком к решению дифференциальной задачи. Из условия теоремы о том, что дифференциальная задача имеет решение, непрерывно дифференцируемое на $[a, b]$ до четвертого порядка включительно, следует, что рассматриваемая схема имеет на решении второй порядок аппроксимации. Это означает, что, если в схему (2.21) подставить решение $y(x)$ исходной дифференциальной задачи, то получим следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} \Delta y(x_j) &= -f_j + \psi_j, \\ y(a) &= y_a, \quad y(b) = y_b, \end{aligned}$$

где ψ_j — погрешность аппроксимации схемы:

$$|\psi_j| \leq C_1 h^2, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

C_1 — постоянная, не зависящая от h . Вычитая из последней системы равенств исходную разностную краевую задачу, получаем систему разностных уравнений, описывающих поведение погрешности решения $z_j = y(x_j) - y_j$:

$$\begin{aligned} \Delta z_j &= \psi_j, \\ z_0 &= 0, \quad z_N = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Теперь займемся построением мажоранты для погрешности решения. Для этого наряду с исходной дифференциальной задачей рассмотрим следующую:

$$\begin{aligned} v'' + p(x)v' - q(x)v &= -1, \\ v(a) &= 0, \quad v(b) = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Дифференциальный оператор в этой задаче полностью совпадает с дифференциальным оператором исходной. Решение этой задачи положительно для всех $x \in (a, b)$, так как в противном случае существовала бы точка $\tilde{x}$ такая, что

$$a < \tilde{x} < b, \quad v(\tilde{x}) \leq 0, \quad v'(\tilde{x}) = 0, \quad v''(\tilde{x}) \geq 0.$$

Следовательно, в таком случае выполнялось бы неравенство

$$v''(\tilde{x}) + p(\tilde{x})v'(\tilde{x}) - q(\tilde{x})v(\tilde{x}) \geq 0,$$

что противоречило бы уравнению. Таким образом, $v(x) > 0$ при $x \in (a, b)$.

Для новой задачи (2.23) построим схему, аналогичную исходной, и подставим в нее решение $v(x)$. Тогда получим

$$\Lambda v(x_j) = -1 + \bar{\psi}_j,$$

где $|\bar{\psi}_j| \leq C_2 h^2$ для всех $j = 1, \dots, N-1$.

В качестве мажоранты для погрешности z_j попробуем взять сеточную функцию

$$\bar{z}_j = \alpha \cdot v(x_j) > 0,$$

где $\alpha > 0$ — положительное число, значение которого определим позже. Тогда для $\bar{z}_j$ получим разностную задачу

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{z}_j &= -\bar{f}_j \equiv -\alpha(1 - \bar{\psi}_j), \\ \bar{z}_0 &= \bar{z}_N = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Пусть δ — некоторое положительное число, меньшее 1. В силу того что $|\bar{\psi}_j| \leq C_2 h^2$, всегда найдется значение $h_0 < h_*$ такое, что для всех $h \leq h_0$

$$1 - \bar{\psi}_j \geq \delta > 0 \quad (2.25)$$

при любом знаке величины $\bar{\psi}_j$ и для всех j . Поэтому $\bar{f}_j > 0$ для всех $h \leq h_0$.

Осталось подобрать значение α таким, чтобы выполнялось условие $|\psi_j| \leq \bar{f}_j$ из леммы 2.3. Пусть

$$\alpha = \frac{C_1 h^2}{\delta}.$$

Тогда

$$|\psi_j| \leq C_1 h^2 = \alpha \delta \leq \alpha(1 - \bar{\psi}_j) = \bar{f}_j.$$

Итак, для погрешности решения z_j имеем задачу (2.22), а для сеточной функции $\bar{z}_j$ — задачу (2.24), при этом выполняются условия (2.14), (2.15) леммы 2.3. Поэтому

$$|z_j| \leq \bar{z}_j = \frac{C_1 h^2}{\delta} v(x_j)$$

для всех $j = 0, \dots, N$, т. е. функция $\bar{z}(x_j)$ действительно является мажорантой для z_j .

Функция $v(x)$ является решением исходной дифференциальной задачи в частном случае, когда $f(x) \equiv 1$, $y_a = y_b = 0$, и, следовательно, решение $v(x)$ непрерывно дифференцируемо на $[a, b]$. Значит, существует постоянная M такая, что

$$M = \max_{a \leq x \leq b} v(x).$$

Тогда можем записать неравенство

$$\max_j |z_j| \leq \frac{C_1 M}{\delta} h^2,$$

из которого следует оценка

$$\|(y)_h - y_h\|_{U_h} \leq C h^2,$$

где $C = C_1 M / \delta$, U_h — пространство сеточных функций с локальной нормой (2.8). Эта оценка и означает равномерную сходимость схемы со вторым порядком.

2.3. Разностный метод решения нелинейных краевых задач
рассмотрим на примере решения нелинейной задачи

$$\begin{aligned} y'' - g(x, y) &= 0, \quad a < x < b, \\ y(a) &= y_a, \\ y(b) &= y_b. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Будем предполагать, что решение этой дифференциальной задачи существует, единственно и является достаточно гладким. Для численного решения возьмем разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} - g(x_j, y_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_a, \\ y_N &= y_b. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Теорема 2.3. Пусть функция $g(x, y)$ непрерывно дифференцируема по переменной y и

$$g_y \geq m > 0. \quad (2.28)$$

Тогда разностная схема (2.27) равномерно сходится со вторым порядком.

Доказательство. Рассмотрим вначале погрешность аппроксимации схемы $\psi_{h,j} = L_h(y)_{h,j} - f_{h,j}$ ($j = 1, \dots, N-1$):

$$\begin{aligned} \psi_{h,j} &= \frac{y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1}))}{h^2} - g(x_j, y(x_j)) = \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ y(x_j) - h y'(x_j) + \frac{h^2}{2} y''(x_j) - \frac{h^3}{6} y'''(x_j) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\xi_-) - 2y(x_j) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2}y''(x_j) + \frac{h^3}{6}y'''(x_j) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_+)\} - g(x_j, y(x_j)) = \\
& = y''(x_j) - g(x_j, y(x_j)) + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{y^{(4)}(\xi_-) + y^{(4)}(\xi_+)}{2} = \\
& = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{y^{(4)}(\xi_-) + y^{(4)}(\xi_+)}{2}.
\end{aligned}$$

Поскольку $y^{(4)}(x)$ — непрерывна, то по теореме Больцано—Коши о промежуточных значениях непрерывной функции найдется точка $\xi_j \in (x_{j-1}, x_{j+1})$ такая, что

$$y^{(4)}(\xi_j) = \frac{y^{(4)}(\xi_-) + y^{(4)}(\xi_+)}{2}.$$

И окончательно получим

$$\psi_{h,j} = \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_j), \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (2.29)$$

Краевые условия аппроксимируются точно, поэтому общий порядок аппроксимации — второй

$$\|\psi_h\|_{E_h} \leq C_a h^2, \quad (2.30)$$

где

$$C_a = \frac{1}{12} \max_{a \leq x \leq b} |y^{(4)}(x)|.$$

Из определения погрешности аппроксимации следует, что $L_h(y)_{h,j} = f_{h,j} + \psi_{h,j}$ ($j = 1, \dots, N-1$) или

$$\begin{aligned}
& \frac{y(x_{j-1}) - 2y(x_j) + y(x_{j+1}))}{h^2} - g(x_j, y(x_j)) = \psi_{h,j}, \quad j = 1, \dots, N-1, \\
& y(x_0) = y_a, \\
& y(x_N) = y_b.
\end{aligned}$$

Вычитая из последних уравнений соответствующие уравнения задачи (2.27) и обозначая $z_j = y(x_j) - y_j$, получаем

$$\frac{z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}}{h^2} - [g(x_j, y(x_j)) - g(x_j, y_j)] = \psi_{h,j}.$$

Поскольку

$$g(x_j, y(x_j)) - g(x_j, y_j) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_j, \bar{y}_j) z_j,$$

где $\bar{y}_j = \omega_j y(x_j) + (1 - \omega_j) y_j$, $0 < \omega_j < 1$, то для z_j имеем задачу

$$\frac{1}{h^2} z_{j-1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{\partial g}{\partial y}(x_j, \bar{y}_j) \right) z_j + \frac{1}{h^2} z_{j+1} = \psi_{h,j}, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ z_0 = 0, \quad z_N = 0.$$

Ввиду неравенства (2.28) коэффициенты этой разностной задачи удовлетворяют условиям теоремы 2.1, поэтому для z_j имеет место оценка (2.7):

$$\|z_h\|_{U_h} \leq \frac{1}{m} \cdot \max_{1 \leq j \leq N-1} |\psi_{h,j}|,$$

или

$$\|(y)_h - y_h\|_{U_h} \leq \frac{C_a}{m} h^2,$$

что и требовалось доказать.

2.4. Метод последовательных приближений. Для нахождения решения нелинейной разностной схемы (2.27) перепишем ее в виде

$$y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1} = h^2 g(x_j, y_j), \\ y_0 = y_a, \quad y_N = y_b \quad (2.31)$$

и воспользуемся итерациями. Мы рассмотрим здесь лишь один из итерационных методов — *метод последовательных приближений*. Он выглядит следующим образом:

$$y_{j-1}^n - 2y_j^n + y_{j+1}^n = h^2 g(x_j, y_j^{n-1}), \\ y_0^n = y_a, \quad y_N^n = y_b, \quad (2.32)$$

где n — номер итерации. Таким образом, на каждой итерации решается линейная система уравнений с трехдиагональной матрицей. Начальное приближение y^0 можно задать, например, с помощью линейной функции, принимающей заданные значения на концах отрезка $[a, b]$:

$$y_j^0 = y_a + \frac{x_j - a}{b - a} (y_b - y_a), \quad j = 0, \dots, N. \quad (2.33)$$

Теорема 2.4. Пусть функция $g(x, y)$ непрерывно дифференцируема по переменной y и

$$\max_{x, y} \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right| \leq M_1 < \infty. \quad (2.34)$$

Тогда выполнение условия

$$r = \frac{M_1 (b - a)^2}{8} < 1 \quad (2.35)$$

достаточно для сходимости метода последовательных приближений (2.32).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для исследования сходимости вычтем уравнение (2.31) из уравнения (2.32) и обозначим $\varepsilon_j^n = y_j^n - y_j$. Получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j-1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j+1}^n &= d_j^n, \\ \varepsilon_0^n &= 0, \quad \varepsilon_N^n = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$d_j^n = h^2 [g(x_j, y_j^{n-1}) - g(x_j, y_j)] = h^2 \frac{\partial g}{\partial y}(x_j, \xi_j) \varepsilon_j^{n-1},$$

при этом $\xi_j = \omega_j y_j^{n-1} + (1 - \omega_j) y_j$, $0 < \omega_j < 1$.

Систему (2.36), описывающую поведение разности ε^n между текущей итерацией y^n и пределом y_h , решим методом прогонки. Общие формулы метода прогонки для уравнения

$$a_j \varepsilon_{j-1} - c_j \varepsilon_j + b_j \varepsilon_{j+1} = d_j, \quad j = 1, \dots, N-1$$

таковы:

$$\varepsilon_j = \xi_j \varepsilon_{j+1} + \eta_j, \quad j = N-1, \dots, 0; \quad (2.37)$$

$$\xi_j = \frac{b_j}{c_j - a_j \xi_{j-1}}, \quad \eta_j = \frac{a_j \eta_{j-1} - d_j}{c_j - a_j \xi_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (2.38)$$

В нашем случае

$$\xi_0 = \eta_0 = 0, \quad a_j \equiv 1, \quad b_j \equiv 1, \quad c_j \equiv 2.$$

Следовательно,

$$\xi_j = \frac{1}{2 - \xi_{j-1}}, \quad \eta_j = \frac{\eta_{j-1} - d_j^n}{2 - \xi_{j-1}} = \xi_j (\eta_{j-1} - d_j^n), \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Преобразуем эти формулы. Легко показать, что

$$\xi_j = \frac{j}{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (2.39)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0, \\ \xi_1 &= \frac{1}{2 - \xi_0} = \frac{1}{2}, \\ \xi_2 &= \frac{1}{2 - \xi_1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_{j+1} &= \frac{1}{2 - \xi_j} = \frac{1}{2 - \frac{j}{j+1}} = \frac{j+1}{j+2}. \end{aligned}$$

С учетом доказанной формулы (2.39) выражение для коэффициентов η_j принимает вид

$$\eta_j = \frac{j}{j+1} (\eta_{j-1} - d_j^n), \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 0, \\ \eta_1 &= \frac{1}{2} (-d_1^n) = -\frac{1}{2} d_1^n, \\ \eta_2 &= \frac{2}{3} (\eta_1 - d_2^n) = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} d_1^n - d_2^n \right) = \frac{1}{3} (-d_1^n - 2d_2^n) = -\frac{1}{3} \sum_{p=1}^2 p d_p^n \end{aligned}$$

и т. д. Поэтому

$$\eta_j = -\frac{1}{j+1} \sum_{p=1}^j p d_p^n, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (2.40)$$

Формулы (2.37) обратного хода метода прогонки можно преобразовать к виду

$$\varepsilon_j^n = -j \sum_{k=j+1}^N \frac{1}{k(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} p d_p^n, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (2.41)$$

Вначале проверим это равенство при $j = N-1$ и $j = N-2$:

$$\varepsilon_{N-1}^n = \xi_{N-1} \varepsilon_N^n + \eta_{N-1} = \eta_{N-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N-1} p d_p^n = -(N-1) \frac{1}{N(N-1)} \sum_{p=1}^{N-1} p d_p^n. \\
&\quad \varepsilon_{N-2}^n = \xi_{N-2} \varepsilon_{N-1}^n + \eta_{N-2} = \\
&= -\frac{N-2}{N-1} \left[\frac{N-1}{N(N-1)} \sum_{p=1}^{N-1} p d_p^n \right] - \frac{1}{N-1} \sum_{p=1}^{N-2} p d_p^n = \\
&= -(N-2) \left[\frac{1}{N(N-1)} \sum_{p=1}^{N-1} p d_p^n + \frac{1}{(N-1)(N-2)} \sum_{p=1}^{N-2} p d_p^n \right] = \\
&= -(N-2) \sum_{k=N-1}^N \frac{1}{k(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} p d_p^n.
\end{aligned}$$

Пусть ε_j^n найдено по формуле (2.41). Тогда

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{j-1}^n &= \xi_{j-1} \varepsilon_j^n + \eta_{j-1} = -\frac{j-1}{j} j \sum_{k=j+1}^N \frac{1}{k(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} p d_p^n - \frac{1}{j} \sum_{p=1}^{j-1} p d_p^n = \\
&= -(j-1) \left[\sum_{k=j+1}^N \frac{1}{k(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} p d_p^n + \frac{1}{j(j-1)} \sum_{p=1}^{j-1} p d_p^n \right] = \\
&= -(j-1) \left[\sum_{k=j}^N \frac{1}{k(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} p d_p^n \right],
\end{aligned}$$

что и доказывает формулу (2.41) для любого j .

Теперь можно оценить решение ε_j^n задачи (2.36). Поскольку $d_j^n = h^2 g_y \varepsilon_j^{n-1}$, то $|d_j^n| \leq q = h^2 M_1 \|\varepsilon^{n-1}\|_{U_h}$. Поэтому из формулы (2.41) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_j^n| &\leq q \cdot j \cdot \sum_{k=j+1}^N \frac{1}{k(k-1)} \sum_{p=1}^{k-1} p = \\
&= q \cdot j \cdot \sum_{k=j+1}^N \left[\frac{1}{k(k-1)} \cdot \frac{1+k-1}{2} (k-1) \right] = \\
&= q \cdot j \cdot \sum_{k=j+1}^N \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot j \cdot (N-j) = \frac{1}{2} \cdot q [jN - j^2] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} q N^2 \left(\frac{j}{N} - \left(\frac{j}{N} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} q N^2 \alpha (1 - \alpha) \leq \frac{q N^2}{8}, \quad (0 < \alpha < 1).$$

Отсюда следует

$$\|\varepsilon^n\|_{U_h} \leq \frac{M_1 h^2 N^2}{8} \|\varepsilon^{n-1}\|_{U_h},$$

или

$$\|\varepsilon^n\|_{U_h} \leq \frac{M_1 (b-a)^2}{8} \|\varepsilon^{n-1}\|_{U_h} \leq r^n \|\varepsilon^0\|_{U_h}.$$

Если условие (2.35) выполняется, то отсюда будет следовать сходимость итераций метода последовательных приближений. ■

Замечание. Условие (2.35) достаточно для сходимости итераций метода последовательных приближений. В работе [6] отмечается, что если

$$\frac{M_1 (b-a)^2}{\pi^2} > 1, \quad (2.42)$$

то итерации могут расходиться, т. е. условие (2.35) близко к необходимому.

З А Д А Ч И

2.1. Пусть сеточная функция y_h является решением разностной задачи

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} = -f(x_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_a, \quad y_N = y_b,$$

где $f(x_j) < 0$, $y_a \geq y_b > 0$. Найти $\max_{0 \leq j \leq N} y_j$.

2.2. Показать, что при $0 \leq \alpha \leq 1$ решение разностной схемы

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - q(x_j) \left[\alpha y_j + (1 - \alpha) \frac{y_{j+1} + y_{j-1}}{2} \right] = \\ = -f(x_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (2.43)$$

$$y_0 = y_a, \quad y_N = y_b$$

равномерно сходится со вторым порядком по h к решению дифференциальной задачи (2.1), в которой функция $q(x)$ предполагается ограниченной: $0 < m \leq q(x) \leq M < \infty$.

2.3. Показать, что решение разностной схемы

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{(qy)_{j+1} - 2(qy)_j + (qy)_{j-1}}{h^2} - q_j y_j =$$

$$= - \left(f_j + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{h^2} \right), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (2.44)$$

$$y_0 = y_a,$$

$$y_N = y_b$$

равномерно сходится с четвертым порядком по h к решению задачи (2.1), в которой функция $q(x)$ предполагается ограниченной: $0 < m \leq q(x) \leq M < \infty$. Таким образом, схема повышенного порядка точности может быть получена без расширения шаблона.

2.4. Выписать формулы метода прогонки для решения разностной краевой задачи (2.17) с краевыми условиями первого рода. Показать, что выполнение условий теоремы 2.2 достаточно для корректности и устойчивости метода прогонки, если $h < 2/P$.

Приведем достаточные условия [16] для корректности и устойчивости метода прогонки, применяемого для решения разностной задачи

$$\begin{aligned} -c_0 y_0 + b_0 y_1 &= d_0, \\ a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} &= d_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N &= d_N. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Решение этой задачи находим методом прогонки

$$y_j = \xi_j y_{j+1} + \eta_j, \quad j = N-1, \dots, 0, \quad (2.46)$$

при этом прогоночные коэффициенты вычисляются по формулам (2.38). Кроме того,

$$y_N = \frac{a_N \eta_{N-1} - d_N}{c_N - a_N \xi_{N-1}} \equiv \eta_N; \quad (2.47)$$

$$\xi_0 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \eta_0 = -\frac{d_0}{c_0}. \quad (2.48)$$

Справедливо следующее утверждение [16].

Пусть коэффициенты задачи (2.45) удовлетворяют условиям

$$c_0 \neq 0, \quad c_N \neq 0, \quad a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (2.49)$$

$$|c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (2.50)$$

$$|c_0| \geq |b_0|, \quad |c_N| \geq |a_N|, \quad (2.51)$$

причем хотя бы в одном из неравенств — (2.50) или (2.51) — выполняется строгое неравенство. Тогда метод прогонки (2.46), (2.38), (2.47), (2.48) корректен и устойчив (т. е. $c_j - a_j \xi_{j-1} \neq 0$ при $j = 1, \dots, N-1$ и $|\xi_j| \leq 1$ для всех $j = 0, \dots, N-1$).

2.5. Доказать, что разностная схема

$$\nu_j \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j^+ \cdot \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + p_j^- \cdot \frac{y_j - y_{j-1}}{h} - q_j y_j = -f_j, \quad (2.52)$$

$$y_0 = y_a, \quad y_N = y_b,$$

где

$$\nu_j = \left(1 + \frac{h}{2}|p_j|\right)^{-1}, \quad p_j^+ = \frac{p_j + |p_j|}{2}, \quad p_j^- = \frac{p_j - |p_j|}{2},$$

построенная для решения краевой задачи (2.18), аппроксимирует ее на гладких решениях со вторым порядком по h . Доказать, что выполнение условий теоремы 2.2 гарантирует для произвольного шага сетки $h > 0$ существование единственного решения разностной задачи (2.52), корректность и устойчивость метода прогонки. Показать, что при выполнении условий теоремы 2.2 и условий $f(x) > 0$, $x \in (a, b)$, $y_b < 0$, $y_a \geq y_b$, будет справедливым равенство

$$\min_{0 \leq j \leq N} y_j = y_b. \quad (2.53)$$

2.6. Доказать, что разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - q_j y_j &= -f_j, \\ \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2} q(a) y_0 &= \mu_a - \frac{h}{2} [f(a) + p(a) \mu_a], \\ y_N &= y_b, \end{aligned} \quad (2.54)$$

построенная для решения краевой задачи с условиями второго рода на левой границе и первого рода на правой

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' - q(x)y &= -f(x), \quad a < x < b, \\ y'(a) &= \mu_a, \quad y(b) = y_b, \end{aligned} \quad (2.55)$$

аппроксимирует ее на решении со вторым порядком по h . Выписать формулы метода прогонки для решения разностной задачи (2.54). Показать, что выполнение условий теоремы 2.2 достаточно для корректности и устойчивости метода прогонки, если $h < 2/P$.

2.7. Доказать, что разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - q_j y_j &= -f_j, \\ y_0 &= y_a, \\ \frac{y_N - y_{N-1}}{h} + \left[\gamma + \frac{h}{2} (q(b) + \gamma p(b)) \right] y_N &= \mu_b + \frac{h}{2} [f(b) + p(b) \mu_b], \end{aligned} \quad (2.56)$$

построенная для решения краевой задачи с условиями первого рода на левой границе и третьего рода на правой

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' - q(x)y &= -f(x), \quad a < x < b, \\ y(a) &= y_a, \\ y'(b) + \gamma y(b) &= \mu_b, \quad \gamma = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

аппроксимирует ее на решении со вторым порядком по h . Выписать формулы метода прогонки для решения разностной задачи (2.56). Показать, что выполнение условий теоремы 2.2 достаточно для корректности и устойчивости метода прогонки, если $h < 2/P$.

2.8. Пусть для решения нелинейной задачи

$$\begin{aligned} y'' - (y - ax)^3 - \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{y - ax}{\cos^2 \frac{\pi}{4} x} &= a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{4} x, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $a = \text{const} > 0$, используется схема (2.27). Доказать, что она сходится.

2.9. Пусть для решения нелинейной задачи

$$\begin{aligned} y'' - y^3 \operatorname{sh}^2 a - y &= \frac{\operatorname{sh} [a(1 - x)]}{\operatorname{sh} a} (a^2 - 1 - \operatorname{sh}^2 [a(1 - x)]), \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 1, \\ y(1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где $a = \text{const} > 0$, используется схема (2.27). Доказать, что она сходится.

2.10. Пусть для решения нелинейной задачи

$$\begin{aligned} y'' - \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} + ay - \left(\frac{a^2}{(1 + ax)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{(1 + ax)^2 + 2 + 1/(1 + ax)^2} + a \ln(1 + ax) \right) \right], \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = \ln(1 + ax), \quad a = \text{const} \geq 1 \end{aligned} \quad (2.60)$$

используется схема (2.27). Доказать, что она равномерно сходится со вторым порядком. Найдите значения параметра a , при которых гарантируется сходимость метода последовательных приближений (2.32).

§ 3. Разностные тождества и неравенства

Ранее было указано, что если схема аппроксимирует исходную задачу и устойчива, то она сходится, причем порядок точности схемы определяется ее порядком аппроксимации. Таким образом, изучение сходимости и порядка точности схемы сводится к получению оценок для решения и для погрешности аппроксимации. Отметим, что решение y_h и погрешность аппроксимации ψ_h принадлежат различным пространствам и оцениваются, вообще говоря, в различных нормах.

Мы познакомились с некоторыми частными приемами исследования устойчивости разностной схемы $L_h y_h = f_h$ для краевой задачи. Например, в теореме 2.1 были указаны условия на коэффициенты разностной задачи, при выполнении которых разностная схема (2.2) будет устойчивой в равномерной норме. Как быть, если для оценки устойчивости приходится выбирать другие нормы?

Далее мы познакомимся с математическим аппаратом, который позволит в общем случае изучать свойства разностных операторов, образующих схему, и получать оценки для этих операторов. Устойчивость схем можно будет устанавливать, используя полученные оценки.

3.1. Обозначения. До сих пор мы рассматривали задачи на отрезке $[a, b]$ оси x . Сделав преобразование $x' = x - a$, можно перейти к рассмотрению задачи на отрезке $[0, l]$, где $l = b - a$. Обозначение $\bar{\omega}_h$ будем использовать для равномерной сетки на отрезке $[0, l]$, $\bar{\omega}_h = \{x_j | x_j = jh, j = 0, \dots, N\}$, $hN = l$, обозначение ω_h — для множества внутренних узлов этой сетки, $\omega_h = \{x_j | x_j = jh, j = 1, \dots, N-1\}$. Введем обозначения для разностных производных в узле x_j :

$$y_{\bar{x},j} = \frac{y_j - y_{j-1}}{h}$$

для левой разностной производной в узлах $x_j \in \bar{\omega}_h \setminus \{x_0\}$;

$$y_{x,j} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h}$$

для правой разностной производной в узлах $x_j \in \bar{\omega}_h \setminus \{x_N\}$;

$$y_{\bar{x}x,j} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2}$$

для второй разностной производной в узлах $x_j \in \omega_h$. Очевидно, что

$$y_{x,j} = y_{\bar{x},j+1}, \quad y_{\bar{x},j} = y_{x,j-1}, \quad y_{\bar{x}x,j} = y_{x\bar{x},j}. \quad (3.1)$$

В дальнейшем индекс j будем часто опускать. Вводя обозначение $y^{\pm 1} = y_{j \pm 1}$, приведенные выше формулы для разностных производных можно переписать так:

$$y_{\bar{x}} = \frac{y - y^{-1}}{h}, \quad y_x = \frac{y^{+1} - y}{h}, \quad y_{\bar{x}x} = \frac{y^{+1} - 2y + y^{-1}}{h^2}.$$

3.2. Скалярные произведения и нормы. Пусть U_h — пространство сеточных функций, определенных на сетке ω_h . Введем в этом пространстве скалярное произведение и норму

$$(y, v) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j v_j h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad y, v \in U_h = \left\{ y_h \mid D(y_h) = \omega_h \right\}.$$

Следующие скалярные произведения введены в пространствах сеточных функций, в область определения которых не входит один из граничных узлов:

$$(y, v) = \sum_{j=1}^N y_j v_j h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad y, v \in U_h = \left\{ y_h \mid D(y_h) = \bar{\omega}_h \setminus \{x_0\} \right\},$$

$$[y, v] = \sum_{j=0}^{N-1} y_j v_j h, \quad \|[y]\| = \sqrt{[y, y]}, \quad y, v \in U_h = \left\{ y_h \mid D(y_h) = \bar{\omega}_h \setminus \{x_N\} \right\}.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{U}_h$ пространство сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$ и равных нулю при $j = 0$ и $j = N$. В этом пространстве скалярное произведение и норму можно ввести по любой из трех приведенных выше формул, поскольку

$$(y, v) = (y, v) = [y, v], \quad \|y\| = \|[y]\| = \|[y]\| \quad \forall y, v \in \overset{\circ}{U}_h.$$

Для отличия от введенных норм локальную норму будем обозначать индексом C :

$$\|y\|_C = \max_{0 \leq j \leq N} |y_j|.$$

Для всякой сеточной функции $y \in \overset{\circ}{U}_h$ справедливо неравенство (см. задачу 3.1)

$$\|y\| \leq \sqrt{l} \|y\|_C. \quad (3.2)$$

3.3. Формулы разностного дифференцирования. Формула дифференцирования произведения двух функций непрерывного аргумента $(yv)' = y'v + yv'$ имеет несколько аналогов разностного дифференцирования произведения двух сеточных функций. Например:

$$(yv)_x = \frac{y_{j+1}v_{j+1} - y_jv_j}{h} = \frac{y_{j+1}v_{j+1} - y_jv_{j+1} + y_jv_{j+1} - y_jv_j}{h} = \\ = y_xv^{+1} + yv_x.$$

Для правой разности можем записать еще одну формулу разностного дифференцирования произведения двух сеточных функций

$$(yv)_x = \frac{y_{j+1}v_{j+1} - y_jv_j}{h} = \frac{y_{j+1}v_j - y_jv_j + y_{j+1}v_{j+1} - y_{j+1}v_j}{h} = \\ = y_xv + y^{+1}v_x.$$

Таким образом, окончательно

$$(yv)_x = y_xv + y^{+1}v_x = y_xv^{+1} + yv_x. \quad (3.3)$$

Аналогично для левой разности (см. задачу 3.2)

$$(yv)_{\bar{x}} = y_{\bar{x}}v + y^{-1}v_{\bar{x}} = y_{\bar{x}}v^{-1} + yv_{\bar{x}}. \quad (3.4)$$

3.4. Формулы суммирования по частям. В интегральном исчислении формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int_0^l yv' dx = yv \Big|_0^l - \int_0^l y'v dx.$$

Используя правило (3.3) разностного дифференцирования произведения двух сеточных функций, получаем разностный аналог этой формулы — формулу суммирования по частям:

$$\sum_{j=1}^{N-1} (yv_x)_j h = \sum_{j=1}^{N-1} [(yv)_x - y_xv^{+1}]_j h = \sum_{j=1}^{N-1} (yv)_{x,j} h - \sum_{j=1}^{N-1} (y_xv^{+1})_j h = \\ = (yv)_2 - (yv)_1 + (yv)_3 - (yv)_2 + \dots + (yv)_N - (yv)_{N-1} - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} v_{j+1} h =$$

$$\begin{aligned}
&= (yv)_N - (yv)_1 - \sum_{j=2}^N \frac{y_j - y_{j-1}}{h} v_j h = \\
&= (yv)_N - (yv)_1 - \sum_{j=1}^N \frac{y_j - y_{j-1}}{h} v_j h + (y_1 - y_0) v_1 = \\
&= (yv)_N - y_0 v_1 - \sum_{j=1}^N (y_{\bar{x}} v)_j h.
\end{aligned}$$

С учетом введенных нами обозначений получаем разностный аналог формулы интегрирования по частям:

$$(y, v_x) = y_N v_N - y_0 v_1 - (y_{\bar{x}}, v]. \quad (3.5)$$

Аналогично можно получить еще одну подобную формулу с разностью назад (см. задачу 3.3):

$$(y, v_{\bar{x}}) = y_N v_{N-1} - y_0 v_0 - [y_x, v). \quad (3.6)$$

3.5. Первая формула Грина. Равенство

$$\int_0^l y (az')' dx = - \int_0^l ay' z' dx + (ayz') (l) - (ayz') (0)$$

называют *первой формулой Грина*. Получим разностный аналог этой формулы для сеточных функций a, y, z . Подставляя функцию $v = az_{\bar{x}}$ в формулу суммирования по частям (3.5), получаем

$$(y, (az_{\bar{x}})_x) = - (az_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] + a_N y_N z_{\bar{x}, N} - a_1 y_0 z_{\bar{x}, 1}.$$

Поскольку $z_{\bar{x}, 1} = z_{x, 0}$, то для первой разностной формулы Грина получаем такое окончательное выражение:

$$(y, (az_{\bar{x}})_x) = - (az_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] + a_N y_N z_{\bar{x}, N} - a_1 y_0 z_{x, 0}. \quad (3.7)$$

Для $y \in \overset{\circ}{U}_h$ из формулы (3.7) следует

$$(y, (az_{\bar{x}})_x) = - (az_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}]. \quad (3.8)$$

В частности, при $y \in \overset{\circ}{U}_h$ и $z = y$ имеем

$$((ay_{\bar{x}})_x, y) = - \left(a, (y_{\bar{x}})^2 \right]. \quad (3.9)$$

3.6. Вторая формула Грина. В интегральном исчислении равенство

$$\int_0^l y (az')' dx - \int_0^l z (ay')' dx = a (yz' - zy') \Big|_0^l$$

называется *второй формулой Грина*. Чтобы получить ее разностный аналог, напишем первую разностную формулу Грина для сеточных функций z и $ay_{\bar{x}}$:

$$(z, (ay_{\bar{x}})_x) = - (ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + a_N z_N y_{\bar{x}, N} - a_1 z_0 y_{x, 0}.$$

Вычитая последнее равенство из первой разностной формулы Грина (3.7), получаем разностный аналог второй формулы Грина:

$$(y, (az_{\bar{x}})_x) - (z, (ay_{\bar{x}})_x) = a_N (yz_{\bar{x}} - zy_{\bar{x}})_N - a_1 (yz_x - zy_x)_0. \quad (3.10)$$

Если $y, z \in \overset{\circ}{U}_h$, то получаем равенство

$$((ay_{\bar{x}})_x, z) = (y, (az_{\bar{x}})_x), \quad (3.11)$$

означающее (см. § 4) самосопряженность оператора $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$.

3.7. Неравенство Коши—Буняковского. Для любого линейного пространства, в котором введено скалярное произведение (y, v) (в частности, для пространств сеточных функций с введенными выше скалярными произведениями), выполняется неравенство

$$|(y, v)| \leq \|y\| \cdot \|v\|, \quad (3.12)$$

где $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$, $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

В самом деле, если $y = 0$, то неравенство (3.12) очевидно. Пусть $y \neq 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен от вещественного аргумента λ :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (\lambda y + v, \lambda y + v) = \lambda^2 (y, y) + 2\lambda (y, v) + (v, v) = \\ &= \|y\|^2 \lambda^2 + 2(y, v) \lambda + \|v\|^2. \end{aligned}$$

При всех λ выполняется неравенство $\varphi(\lambda) = \|\lambda y + v\|^2 \geq 0$. Следовательно, дискриминант уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ неположителен

$$(y, v)^2 - \|y\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq 0,$$

откуда и следует неравенство Коши—Буняковского (3.12).

Из неравенства (3.12) следует неравенство для сумм

$$\left| \sum_{j=m_1}^{m_2} y_j v_j h \right| \leq \left(\sum_{j=m_1}^{m_2} y_j^2 h \right)^{1/2} \left(\sum_{j=m_1}^{m_2} v_j^2 h \right)^{1/2}, \quad (3.13)$$

$1 \leq m_1 \leq m_2 \leq N-1$, которое также называется неравенством Коши—Буняковского.

3.8. ε -неравенство. Для любых чисел a, b и $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \quad (3.14)$$

Действительно,

$$\varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2 - |ab| = \left(\sqrt{\varepsilon} |a| - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} |b| \right)^2 \geq 0.$$

Из ε -неравенства (3.14) и неравенства Коши—Буняковского в частности следует

$$|(y, v)| \leq \|y\| \cdot \|v\| \leq \varepsilon \|y\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|v\|^2. \quad (3.15)$$

3.9. Сеточный аналог теоремы вложения. Напомним, что *пространством Соболева* $W_2^1(0, l)$ называется пространство, состоящее из функций пространства $L_2(0, l)$, имеющих на $(0, l)$ суммируемые с квадратом обобщенные производные первого порядка. Из теорем вложения [7; 18] следует, в частности, что всякая функция из пространства $W_2^1(0, l)$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, l]$. Кроме того, если функция $y \in W_2^1(0, l)$ обращается в нуль на концах отрезка $[0, l]$, то для нее справедлива оценка (8.25)

$$\|y\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_x\|_{L_2(0, l)}, \quad (3.16)$$

выведенная в § 8.

Докажем сеточный аналог оценки (3.16). В следующей теореме утверждается, что локальную норму функции $y \in \overset{\circ}{U}_h$ можно оценить через норму ее производной.

Теорема 3.1 (сеточный аналог теоремы вложения). *Для всякой сеточной функции $y \in \overset{\circ}{U}_h$ справедливо неравенство*

$$\|y\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_x\|. \quad (3.17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из равенств

$$\sum_{k=1}^j y_{\bar{x},k} h = \sum_{k=1}^j \frac{y_k - y_{k-1}}{h} h = y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \cdots + y_j - y_{j-1} = y_j - y_0$$

получаем тождество

$$y_j = \sum_{k=1}^j y_{\bar{x},k} h, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Если взять сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=j+1}^N y_{\bar{x},k} h &= \sum_{k=j+1}^N \frac{y_k - y_{k-1}}{h} h = \\ &= y_{j+1} - y_j + y_{j+2} - y_{j+1} + \cdots + y_N - y_{N-1} = y_N - y_j, \end{aligned}$$

то будем иметь другое тождество

$$y_j = - \sum_{k=j+1}^N y_{\bar{x},k} h.$$

Далее запишем ly_j^2 в виде

$$ly_j^2 = (l - x_j) y_j^2 + x_j y_j^2 = (l - x_j) \left(\sum_{k=1}^j y_{\bar{x},k} h \right)^2 + x_j \left(\sum_{k=j+1}^N y_{\bar{x},k} h \right)^2. \quad (3.18)$$

Перепишем квадрат первой суммы, учитывая неравенство Коши—Буняковского (3.13) и взяв $v_k \equiv 1$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^j y_{\bar{x},k} h \right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^j y_{\bar{x},k} v_k h \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^j y_{\bar{x},k}^2 h \right) \left(\sum_{k=1}^j v_k^2 h \right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^j h \right) \left(\sum_{k=1}^j y_{\bar{x},k}^2 h \right) = x_j \sum_{k=1}^j y_{\bar{x},k}^2 h. \end{aligned}$$

Вторая сумма оценивается аналогично:

$$\left(\sum_{k=j+1}^N y_{\bar{x},k} h \right)^2 \leq \left(\sum_{k=j+1}^N h \right) \left(\sum_{k=j+1}^N y_{\bar{x},k}^2 h \right) = (l - x_j) \sum_{k=j+1}^N y_{\bar{x},k}^2 h.$$

С учетом полученных неравенств из тождества (3.18) следует оценка

$$ly_j^2 \leq (l - x_j) x_j \sum_{k=1}^j y_{\bar{x},k}^2 h + x_j (l - x_j) \sum_{k=j+1}^N y_{\bar{x},k}^2 h$$

или

$$ly_j^2 \leq (l - x_j) x_j \|y_{\bar{x}}\|^2.$$

Поскольку $x_j (l - x_j) \leq l^2/4$, то для всех $j = 1, \dots, N - 1$ будет справедливым неравенство

$$ly_j^2 \leq \frac{l^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2, \quad (3.19)$$

откуда и следует требуемая оценка (3.17). ■

Теорема 3.2 (об оценках нормы производной). *Для всякой сеточной функции $y \in \overset{\circ}{U}_h$ справедливы неравенства*

$$\frac{4}{l^2} \|y\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|y\|^2. \quad (3.20)$$

Доказательство. Используя неравенство (3.2) и оценку (3.17), получаем

$$\|y\|^2 \leq l \|y\|_C^2 \leq \frac{l^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2.$$

Следовательно,

$$\frac{4}{l^2} \|y\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2. \quad (3.21)$$

С другой стороны, в силу неравенства $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|y_{\bar{x}}\|^2 &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right)^2 h = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^N (y_j - y_{j-1})^2 \leq \\ &\leq \frac{2}{h} \left(\sum_{j=1}^N y_j^2 + \sum_{j=1}^N y_{j-1}^2 \right) = \frac{2}{h} \cdot 2 \sum_{j=1}^{N-1} y_j^2 = \frac{4}{h^2} \sum_{j=1}^{N-1} y_j^2 h = \frac{4}{h^2} \|y\|^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

З А Д А Ч И

3.1. Доказать неравенство (3.2).

3.2. Доказать формулу (3.4) дифференцирования произведения двух сеточных функций.

3.3. Доказать формулу (3.6) суммирования по частям.

3.4. Вывести следующий аналог первой формулы Грина:

$$(y, (az_x)_{\bar{x}}) = -[az_x, y_x] + a_{N-1}y_N z_{\bar{x},N} - a_0 y_0 z_{x,0}. \quad (3.22)$$

§ 4. Свойства оператора второй разностной производной

4.1. Собственные значения и собственные функции оператора второй разностной производной. Введем в $\overset{\circ}{U}_h$ оператор $\overset{\circ}{A}$ второй разностной производной

$$\overset{\circ}{A} y_j = -y_{\bar{x}x,j}, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (4.1)$$

Доопределим его при $j = 0$ и $j = N$:

$$\overset{\circ}{A} y_j = \begin{cases} -y_{\bar{x}x,j}, & j = 1, \dots, N-1, \\ 0, & j = 0, N. \end{cases} \quad (4.2)$$

Таким образом, мы можем считать, что $\overset{\circ}{A}: \overset{\circ}{U}_h \rightarrow \overset{\circ}{U}_h$.

Рассмотрим для $\overset{\circ}{A}$ задачу на собственные значения, т. е. задачу о нахождении всех сеточных функций $y \in \overset{\circ}{U}_h$, не равных тождественно нулю, и чисел λ таких, что

$$\overset{\circ}{A} y_j = \lambda y_j, \quad j = 0, \dots, N. \quad (4.3)$$

Этой задаче соответствует разностное уравнение

$$-\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} = \lambda y_j, \quad j = 1, \dots, N-1$$

или

$$y_{j+1} - 2\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right)y_j + y_{j-1} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (4.4)$$

Докажем, что каждая из $(N - 1)$ сеточных функций $y^{(k)}$,

$$y_j^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{k\pi x_j}{l}\right), \quad j = 0, \dots, N \quad (4.5)$$

($k = 1, \dots, N - 1$) является решением задачи (4.3), при этом

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2l}\right), \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad (4.6)$$

Характеристическое уравнение

$$\mu^2 - 2\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right)\mu + 1 = 0, \quad (4.7)$$

соответствующее разностному уравнению (4.4) задачи (4.3), имеет корни

$$\mu_1 = 1 - \frac{\lambda h^2}{2} - h\sqrt{\frac{\lambda^2 h^2}{4} - \lambda}, \quad \mu_2 = 1 - \frac{\lambda h^2}{2} + h\sqrt{\frac{\lambda^2 h^2}{4} - \lambda}. \quad (4.8)$$

Возможны три случая.

1. $\lambda < 0$ или $\lambda > 4/h^2$. В этом случае корни характеристического уравнения (4.7) будут вещественными и различными. Тогда общее решение уравнения (4.4) задается формулой (см. лемму 1.8.2)

$$y_j = \alpha \mu_1^j + \beta \mu_2^j, \quad j = 0, \dots, N. \quad (4.9)$$

Краевые условия задачи (4.3) удовлетворяются при $\alpha = \beta = 0$. Но тогда $y_j \equiv 0$, что противоречит определению собственной функции, согласно которому она должна быть функцией, не равной тождественно нулю.

2. $\lambda = 0$ или $\lambda = 4/h^2$. В этих случаях характеристическое уравнение (4.7) имеет кратные корни, равные соответственно $\mu = 1$ или $\mu = -1$. По лемме 1.8.3 общее решение разностного уравнения (4.4) задается формулой

$$y_j = (\alpha + \beta x_j) \mu^j, \quad j = 0, \dots, N. \quad (4.10)$$

Поскольку $\mu \neq 0$, то краевые условия могут быть выполнены только при $\alpha = \beta = 0$. Поэтому указанные значения λ также не подходят.

3. $0 < \lambda < 4/h^2$. Для таких λ корни (4.8) являются комплексно-сопряженными числами $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \bar{\mu}$, $|\mu| = 1$, $\mu = e^{i\varphi}$, $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right)$, $0 < \varphi < \pi$. По лемме 1.8.4 общее решение уравнения (4.4) задается формулой

$$y_j = \alpha \operatorname{Re} \mu^j + \beta \operatorname{Im} \mu^j = \alpha \cos j\varphi + \beta \sin j\varphi. \quad j = 0, \dots, N. \quad (4.11)$$

Краевые условия удовлетворяются при $\alpha = 0$ и $\varphi = \varphi_k = \pi k/N$. В силу отмеченного выше неравенства $0 < \varphi < \pi$ получаем $0 < k < N$. Поэтому

$$y_j = \beta \sin j \frac{\pi k}{N} = \beta \sin \left(\frac{\pi k j h}{l} \right),$$

где β — произвольное действительное число. Формула (4.5) получается при $\beta = \sqrt{2/l}$. Кроме того,

$$\cos \varphi_k = \cos \frac{\pi k}{N} = 1 - \frac{\lambda_k h^2}{2},$$

откуда

$$\lambda_k = \frac{2}{h^2} (1 - \cos \varphi_k),$$

т. е. λ_k вычисляется по формуле (4.6), что и требовалось доказать.

Итак, функции (4.5) являются собственными функциями оператора $\overset{\circ}{A}$, а числа λ_k — его собственными значениями. Исследуем свойства собственных значений и собственных функций.

Лемма 4.1. *Для собственных значений выполняются неравенства*

$$\frac{8}{l^2} \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1} < \frac{4}{h^2}, \quad N \geq 2. \quad (4.12)$$

Доказательство. В силу монотонного возрастания функции $\sin x$ на интервале $(0, \pi/2)$ для собственных значений выполняются оценки

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1}. \quad (4.13)$$

Рассмотрим наименьшее собственное значение λ_1 и обозначим $\alpha = \frac{\pi h}{2l}$. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{1}{\frac{\pi^2 h^2}{4l^2}} \frac{\pi^2}{l^2} \sin^2 \left(\frac{\pi h}{2l} \right) = \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2.$$

Очевидно, что $h \leq l/2$, так как в противном случае сетка будет состоять всего из двух узлов, они будут граничными и невозможно будет определить оператор $\overset{\circ}{A}$. Следовательно $0 < \alpha = \frac{\pi h}{2l} \leq \frac{\pi}{4}$.

Функция $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ монотонно убывает на промежутке $(0, \pi/4]$

и принимает минимальное значение в точке $\alpha = \pi/4$. В самом деле,

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2} = \frac{\cos \alpha (\alpha - \operatorname{tg} \alpha)}{\alpha^2}$$

и $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$ при $0 < \alpha < \pi/2$, поэтому $f'(\alpha) < 0$ при $0 < \alpha < \pi/2$. Таким образом, на промежутке $(0, \pi/4]$ минимальное значение функции $f(\alpha)$ равно $4/\pi\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \geq \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{16}{2\pi^2} = \frac{8}{l^2}. \quad (4.14)$$

Для наибольшего собственного значения имеем

$$\lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi h (N-1)}{2l} \right) < \frac{4}{h^2}. \quad (4.15)$$

Оценка (4.12) следует из неравенств (4.13)—(4.15). ■

Далее в пространстве сеточных функций $\overset{\circ}{U}_h$ будем использовать следующие скалярное произведение и норму:

$$(y, v) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j v_j h, \quad y, v \in \overset{\circ}{U}_h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad y \in \overset{\circ}{U}_h. \quad (4.16)$$

Лемма 4.2. *Собственные функции $y^{(k)} \in \overset{\circ}{U}_h$ и $y^{(m)} \in \overset{\circ}{U}_h$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны, т. е.*

$$(y^{(k)}, y^{(m)}) = 0, \quad k \neq m. \quad (4.17)$$

Доказательство. Подставим во вторую разностную формулу Грина (3.11) функции $a_j \equiv -1$, $y = y^{(k)}$, $z = y^{(m)}$. Тогда она примет вид

$$(-y_{\bar{x}x}^{(k)}, y^{(m)}) = (y^{(k)}, -y_{\bar{x}x}^{(m)}).$$

Отсюда

$$\lambda_k (y^{(k)}, y^{(m)}) = \lambda_m (y^{(k)}, y^{(m)})$$

или $(\lambda_k - \lambda_m) (y^{(k)}, y^{(m)}) = 0$. По условию $\lambda_k - \lambda_m \neq 0$, поэтому $(y^{(k)}, y^{(m)}) = 0$. ■

Лемма 4.3. Собственные функции (4.5) образуют ортонормированную систему сеточных функций, т. е.

$$(y^{(k)}, y^{(m)}) = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (4.18)$$

Доказательство. В силу (4.17) достаточно рассмотреть случай $m = k$. Вычислим норму собственной функции

$$\begin{aligned} \|y^{(k)}\|^2 &= (y^{(k)}, y^{(k)}) = \sum_{j=1}^{N-1} (y_j^{(k)})^2 h = \frac{2}{l} h \sum_{j=1}^{N-1} \sin^2 \left(\frac{k\pi x_j}{l} \right) = \\ &= \frac{2}{l} h \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2k\pi x_j}{l} \right) \right] = \frac{h}{l} \left[N - 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{Re} q^j \right], \end{aligned}$$

где $q = e^{i\varphi}$, $\varphi = \frac{2\pi k}{N}$. Поскольку $q \neq 1$, $q^N = 1$ и

$$q^N - 1 = (q - 1)(1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1}),$$

то $1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = 0$. Отсюда получим, что

$$\sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{Re} q^j = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{N-1} q^j = -1,$$

поэтому

$$\|y^{(k)}\|^2 = \frac{h}{l} [N - 1 - (-1)] = \frac{hN}{l} = \frac{l}{l} = 1.$$

Из доказанного следует, что коэффициент $\sqrt{\frac{2}{l}}$ является нормирующим множителем каждой из собственных функций $y^{(k)}$. ■

Лемма 4.4. Для любой сеточной функции $f \in \overset{\circ}{U}_h$ имеет место разложение

$$f = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y^{(k)}, \quad (4.19)$$

где

$$f_k = (f, y^{(k)}). \quad (4.20)$$

Доказательство. Система собственных функций $y^{(k)}$ ($k = 1, \dots, N-1$) линейно независима. В самом деле, возьмем их линейную комбинацию и посмотрим, когда она равна нулю:

$$\sum_{m=1}^{N-1} c_m y^{(m)} = 0.$$

Умножая это равенство скалярно на $y^{(k)}$

$$\sum_{m=1}^{N-1} c_m \left(y^{(m)}, y^{(k)} \right) = 0$$

и учитывая равенства (4.18), получаем $c_k = 0$. Полагая $k = 1, \dots, N-1$, получаем, что все коэффициенты c_k равны нулю и, следовательно, векторы $y^{(k)}$ — линейно независимы. Поэтому эту совокупность из $(N-1)$ линейно независимых векторов можно выбрать в качестве базиса в $(N-1)$ -мерном пространстве $\overset{\circ}{U}_h$.

Таким образом, любую сеточную функцию $f = (f_0, f_1, \dots, f_N) \in \overset{\circ}{U}_h$ можно разложить по ортонормальному базису собственных векторов $y^{(k)}$ в сумму *конечного ряда Фурье* (4.19), при этом

$$f_j = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_j^{(k)}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (4.21)$$

Здесь f_j — значение сеточной функции f в узле x_j , а f_k — коэффициенты ряда Фурье (4.19), которые называются *коэффициентами Фурье*. Чтобы их найти, умножим обе части равенства (4.19) скалярно на функцию $y^{(m)}$:

$$\left(f, y^{(m)} \right) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k \delta_{km}.$$

Отсюда получаем, что

$$f_m = \left(f, y^{(m)} \right) = \sum_{j=1}^{N-1} f_j y_j^{(m)} h.$$

Лемма 4.5. Для сеточных функций $f \in \overset{\circ}{U}_h$ имеет место аналог равенства Парсеваля:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2. \quad (4.22)$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= (f, f) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k y^{(k)}, \sum_{m=1}^{N-1} f_m y^{(m)} \right) = \\ &= \sum_{k,m=1}^{N-1} f_k f_m (y^{(k)}, y^{(m)}) = \sum_{k,m=1}^{N-1} f_k f_m \delta_{km} = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2. \end{aligned}$$

4.2. Свойства оператора второй разностной производной.

Пусть в гильбертовом пространстве U со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ задан линейный ограниченный оператор $A : U \rightarrow U$.

Определение. Оператор A называется неотрицательным, если $(Ay, y) \geq 0$ для всех $y \in U$, причем равенство нулю допускается на элементе y , не равном тождественно нулю.

Условие неотрицательности оператора будем записывать в виде неравенства $A \geq 0$.

Определение. Если для всех $y \in U$, $y \neq 0$ выполняется строгое неравенство $(Ay, y) > 0$, то A называется положительным ($A > 0$).

Определение. Если для всех $y \in U$ выполняется неравенство $(Ay, y) \geq \delta \|y\|^2$, где $\delta > 0$ — некоторая положительная константа, общая для всех $y \in U$, то A называется положительно определенным.

Условие положительной определенности оператора A будем записывать в виде операторного неравенства $A \geq \delta E$.

Определение. Если для всех $y, z \in U$ выполняется равенство $(Ay, z) = (y, Az)$, то A называется самосопряженным оператором.

Далее рассмотрим оператор $\overset{\circ}{A}$ второй разностной производной, определенный формулой (4.1).

Теорема 4.1 (о свойствах оператора второй разностной производной). Оператор $\overset{\circ}{A}$ является самосопряженным и положительно определенным, причем имеет место оценка

$$\frac{8}{l^2} \|y\|^2 \leq (\overset{\circ}{A} y, y) \leq \frac{4}{h^2} \|y\|^2. \quad (4.23)$$

Доказательство. Самосопряженность оператора $\overset{\circ}{A}$ следует из второй формулы Грина (3.11) при $a_j \equiv -1$:

$$(\overset{\circ}{A} y, z) = (-y_{\bar{x}x}, z) = (y, -z_{\bar{x}x}) = (y, \overset{\circ}{A} z).$$

Докажем положительную определенность оператора $\overset{\circ}{A}$. Согласно лемме 4.4, любую функцию $y \in \overset{\circ}{U}_h$ можно разложить по ортонормальному базису собственных функций $y^{(k)}$ оператора $\overset{\circ}{A}$ в сумму конечного ряда Фурье

$$y = \sum_{k=1}^{N-1} c_k y^{(k)},$$

где $c_k = (y, y^{(k)})$ — коэффициенты Фурье. Тогда

$$(\overset{\circ}{A} y, y) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k y^{(k)}, \sum_{m=1}^{N-1} c_m y^{(m)} \right) = \sum_{k,m=1}^{N-1} c_k c_m \lambda_k \delta_{km} = \sum_{k=1}^{N-1} c_k^2 \lambda_k.$$

По лемме 4.1

$$\frac{8}{l^2} \leq \lambda_k < \frac{4}{h^2}, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

поэтому можно написать неравенство

$$\frac{8}{l^2} \sum_{k=1}^{N-1} c_k^2 \leq (\overset{\circ}{A} y, y) \leq \frac{4}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} c_k^2,$$

из которого при использовании равенства Парсеваля (4.22)

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k^2$$

и следуют оценки (4.23). Таким образом в оценке $(\overset{\circ}{A} y, y) \geq \delta \|y\|^2$ можно взять $\delta = 8/l^2$. ■

Замечание. Из первой формулы Грина (3.9) получаем при $a \equiv -1$

$$(\overset{\circ}{A} y, y) = (-y_{\bar{x}x}, y) = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}) = \|y_{\bar{x}}\|^2. \quad (4.24)$$

Таким образом, при доказательстве теоремы 4.1 выведена более точная, чем в теореме 3.2, оценка снизу для нормы производной $\|y_{\bar{x}}\|$. Поэтому вместо оценок (3.20) можно использовать следующие:

$$\frac{8}{l^2} \|y\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|y\|^2. \quad (4.25)$$

4.3. Рассмотрим в пространстве $\overset{\circ}{U}_h$ оператор A с переменными коэффициентами

$$Ay_j = \begin{cases} -(ay_{\bar{x}})_{x,j}, & j = 1, \dots, N-1, \\ 0, & j = 0, N, \end{cases} \quad (4.26)$$

где $0 < c_1 \leq a_j \leq c_2$, $j = 1, \dots, N-1$.

Теорема 4.2 (свойства оператора второй разностной производной с переменными коэффициентами). *Оператор A является самосопряженным и положительно определенным, причем имеет место оценка*

$$c_1 \frac{8}{l^2} \|y\|^2 \leq (Ay, y) \leq c_2 \frac{4}{h^2} \|y\|^2. \quad (4.27)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Самосопряженность оператора A следует из второй формулы Грина (3.11):

$$(Ay, z) = -(ay_{\bar{x}})_x, z) = -(y, (az_{\bar{x}})_x) = (y, Az).$$

Из первой разностной формулы Грина (3.9) имеем

$$(Ay, y) = -(ay_{\bar{x}})_x, y) = (a, y_{\bar{x}}^2] = (ay_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}) = (a, y_{\bar{x}}^2].$$

Тогда, в силу условий $c_1 \leq a_j \leq c_2$, получаем

$$c_1 \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq (Ay, y) \leq c_2 \|y_{\bar{x}}\|^2. \quad (4.28)$$

Отсюда и следует оценка (4.27), если учесть неравенства (4.25).

Таким образом, оператор A положительно определен и $\delta = 8c_1/l^2$. ■

З А Д А Ч И

4.1. Найти все нетривиальные решения задачи

$$\begin{aligned} y_{j+1} - 2py_j + y_{j-1} &= 0, & j &= 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_N = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$.

4.2. В пространстве функций $\overset{\circ}{U}_h$ решить задачу на собственные значения для оператора

$$Ay_j = \begin{cases} -y_{\bar{x},j} + b \frac{y_{j+1} + y_{j-1}}{2}, & j = 1, \dots, N-1, \\ 0, & j = 0, N, \end{cases} \quad (4.30)$$

где $hN = l$, $l = \text{const}$, $b = \text{const}$.

4.3. Представим оператор A , определенный по формуле (4.30), в виде суммы операторов $A = \overset{\circ}{A} + \bar{A}$, где

$$\bar{A}y_j = b \frac{y_{j+1} + y_{j-1}}{2}, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Показать, что операторы A , $\overset{\circ}{A}$ и $\bar{A}$ имеют одну и ту же систему (12.5) собственных функций, а каждое собственное значение λ_k оператора A равно сумме собственных значений с тем же номером k операторов $\overset{\circ}{A}$ и $\bar{A}$.

4.4. Показать, что разностная схема

$$\begin{aligned} y_{\bar{x},j} &= -f_j, & j &= 1, \dots, N-1, \\ y_{x,0} &= 0, & y_N &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$ аппроксимирует дифференциальную задачу

$$\begin{aligned} y''(x) &= -f(x), & 0 < x < l, \\ y'(0) &= 0, & y(l) &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

на ее решении $y(x)$ с первым порядком по h , а разностная схема

$$\begin{aligned} y_{\bar{x},j} &= -f_j, & j &= 1, \dots, N-1, \\ y_{x,0} &= -\frac{h}{2}f(0), & y_N &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

— со вторым.

4.5. Рассмотрим задачу на собственные значения, соответствующую схеме (4.33) второго порядка аппроксимации. Для этого положим $f = \lambda y$. Для такой правой части схема (4.33) запишется так:

$$\begin{aligned} y_{\bar{x},j} &= -\lambda y_j, & j &= 1, \dots, N-1, \\ y_{x,0} &= -\frac{h}{2}\lambda y_0, \\ y_N &= 0. \end{aligned}$$

Перепишем эту разностную задачу в операторном виде

$$Ay = \lambda y, \quad (4.34)$$

положив

$$Ay_j = \begin{cases} -y_{\bar{x}x,j}, & j = 1, \dots, N-1, \\ -\frac{2}{h}y_{x,0}, & j = 0, \\ 0, & j = N. \end{cases} \quad (4.35)$$

Пусть U_h — пространство функций, определенных на сетке $\bar{\omega}_h$ и равных нулю в узле $x_N = l$. Это пространство будем считать областью определения оператора A .

Найти все собственные числа λ_k и собственные функции $y^{(k)}$ оператора $A : U_h \rightarrow U_h$, заданного по формуле (4.35).

4.6. Показать, что разностная схема

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x,j} &= -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= 0, \quad y_{\bar{x},N} = \frac{h}{2}f(l) \end{aligned} \quad (4.36)$$

аппроксимирует на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$ дифференциальную задачу

$$\begin{aligned} y''(x) &= -f(x), \quad 0 < x < l, \\ y(0) &= 0, \quad y'(l) = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

на ее решении $y(x)$ со вторым порядком по h .

Пусть U_h — пространство функций, определенных на сетке $\bar{\omega}_h$ и равных нулю в узле $x_0 = 0$. Запишем схему (4.36) в операторном виде $Ay = f$ с помощью оператора $A : U_h \rightarrow U_h$, заданного по формуле

$$Ay_j = \begin{cases} -y_{\bar{x}x,j}, & j = 1, \dots, N-1, \\ 0, & j = 0, \\ \frac{2}{h}y_{\bar{x},N}, & j = N. \end{cases} \quad (4.38)$$

Для оператора A , заданного по формуле (4.38), решить задачу на собственные значения.

4.7. Показать, что разностная схема

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x,j} &= -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_{x,0} &= -\frac{h}{2}f(0); \quad y_{\bar{x},N} = \frac{h}{2}f(l) \end{aligned} \quad (4.39)$$

аппроксимирует дифференциальную задачу с однородными краевыми условиями второго рода

$$\begin{aligned} y''(x) &= -f(x), & 0 < x < l, \\ y'(0) &= 0, & y'(l) = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

со вторым порядком.

Схему (4.39) запишем в операторном виде $Ay = f$, где

$$Ay_j = \begin{cases} -\frac{y_{\bar{x},j}}{2}, & j = 1, \dots, N-1, \\ -\frac{2}{h}y_{x,0}, & j = 0, \\ \frac{2}{h}y_{\bar{x},N}, & j = N. \end{cases} \quad (4.41)$$

Будем считать, что областью определения оператора $A : U_h \rightarrow U_h$ является пространство U_h всех сеточных функций y_h , определенных на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$.

Найти все собственные числа λ_k и собственные функции $y^{(k)}$ оператора A , заданного формулой (4.41).

4.8. Методом Фурье решить разностную краевую задачу

$$\begin{aligned} y_{j+1} - 3y_j + y_{j-1} &= -\sin(2\pi x_j), & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_N = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Здесь $x_j = jh$, $h = 1/N$.

4.9. Рассмотрим первую краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} y''(x) - qy(x) &= -\left[\sin(3x) + q\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\right], & 0 < x < \pi, \\ y(0) &= 1, & y(\pi) = 2, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где $q = \text{const} > 0$. Для ее решения возьмем схему

$$\begin{aligned} y_{\bar{x},j} - qy_j &= -\left[\sin(3x_j) + q\left(1 + \frac{x_j}{\pi}\right)\right], & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= 1, & y_N = 2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Показать, что схема (4.44) на сетке $\bar{\omega}_h = \{x_j | x_j = jh, j = 0, \dots, N\}$, $h = \pi/N$, аппроксимирует дифференциальную задачу на ее решении $y(x)$ со вторым порядком по h . Решить разностную краевую задачу (4.44) методом Фурье.

§ 5. Априорные оценки решений разностных схем

Теперь, используя полученные разностные тождества, а также свойства разностных операторов, мы можем получать *априорные* оценки решений разностных схем. Эти оценки будут использоваться при доказательстве сходимости разностных схем. Одним из способов получения априорных оценок является так называемый *метод энергетических неравенств*. Мы рассмотрим его на примере простейшей линейной краевой задачи.

5.1. Метод энергетических неравенств. Пусть дифференциальная задача

$$\begin{aligned} y''(x) &= -f(x), & 0 < x < l, \\ y(0) &= y(l) = 0 \end{aligned}$$

аппроксимируется на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$ разностной схемой

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x,j} &= -f_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= y_N = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Умножим разностное уравнение на $y_j h$ и просуммируем по j :

$$\sum_{j=1}^{N-1} y_{\bar{x}x,j} y_j h = - \sum_{j=1}^{N-1} f_j y_j h.$$

Можно считать, что $f_0 = f_N = 0$, т. е. сеточная функция f_h лежит в пространстве $\overset{\circ}{U}_h$. Поэтому последнее равенство можно переписать в терминах скалярного произведения, введенного в $\overset{\circ}{U}_h$:

$$(y_{\bar{x}x}, y) = -(f, y),$$

или

$$(-y_{\bar{x}x}, y) = (f, y).$$

Используя следствие (4.24) из первой формулы Грина, получаем

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 = (f, y).$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, будем иметь так называемое *энергетическое неравенство*

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \|f\| \cdot \|y\|. \tag{5.2}$$

Используя неравенства (4.25) и (5.2), получаем оценку в среднеквадратичной норме:

$$\frac{8}{l^2} \|y\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \|f\| \cdot \|y\|.$$

Отсюда

$$\|y\| \leq \frac{l^2}{8} \|f\| \quad (5.3)$$

или

$$\|y\| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|, \quad (5.4)$$

где $\delta = 8/l^2$.

Используя теорему вложения 3.1 и неравенства (5.2), (5.3), можно получить априорную оценку для решения поставленной разностной задачи и в локальной норме:

$$\|y\|_C \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_{\bar{x}}\| \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \sqrt{\|f\| \cdot \|y\|} \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \sqrt{\|f\|} \frac{l}{2\sqrt{2}} \sqrt{\|f\|},$$

т. е.

$$\|y\|_C \leq \frac{l\sqrt{l}}{4\sqrt{2}} \|f\|. \quad (5.5)$$

Полученные неравенства (5.3) или (5.5) могут быть использованы для оценки сходимости разностной схемы (5.1). Докажем, например, сходимость схемы в локальной норме. Ранее, в § 2, мы доказали равномерную сходимость схемы (2.17), частным случаем которой является схема (5.1), но с использованием принципа максимума.

Если мы в разностное уравнение

$$y_{\bar{x}x,j} = -f_j$$

схемы (5.1) подставим проекцию $(y)_h$ решения дифференциальной задачи, то получим

$$(y)_{h,\bar{x}x,j} = -f_j + \psi_j,$$

при этом для погрешности аппроксимации ψ_h справедлива оценка (2.30), которую с учетом формулы (2.3) для нормы функций из F_h и равенств $\psi_0 = \psi_N = 0$ можно переписать так:

$$\|\psi_h\|_C \leq C_a h^2. \quad (5.6)$$

Вычитая теперь из второго уравнения первое, получаем уравнение для погрешности решения $z = (y)_h - y_h$:

$$z_{\bar{x}x,j} = \psi_j.$$

Для погрешности z_j получили задачу того же типа, что и для y_j . Поэтому для z справедлива оценка (5.5):

$$\|z\|_C \leq \frac{l\sqrt{l}}{4\sqrt{2}} \|\psi\|.$$

Отсюда с учетом неравенств (3.2) и (5.6) следует оценка

$$\|y_h - (y)_h\|_C \leq C_a \frac{l^2}{4\sqrt{2}} h^2,$$

т. е. решение разностной задачи равномерно сходится к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2)$.

Мы получили оценку скорости сходимости для очень простой модельной задачи. Достоинством рассмотренного метода энергетических неравенств является то, что он легко переносится на случай многомерных эллиптических уравнений, на случай переменных коэффициентов, на разностные схемы для параболических и гиперболических уравнений, в том числе и на схемы на неравномерных сетках.

5.2. Метод операторных неравенств является другим, также достаточно общим способом получения априорных оценок решений разностных схем. Пусть разностная схема записана в виде операторного уравнения $Ay = f$, где A — линейный разностный оператор, действующий в конечномерном пространстве сеточных функций U_h . Посмотрим, какие априорные оценки для решения разностной задачи $Ay = f$ можно получить в зависимости от тех или иных свойств оператора A .

5.2.1. Пусть A — положительно определенный оператор, т. е.

$$(Ay, y) \geq \delta \|y\|^2 \quad \forall y \in U_h. \quad (5.7)$$

Положительной определенности линейного оператора A , действующего в конечномерном пространстве, достаточно для существования обратного оператора A^{-1} [16]. Таким образом, в данном случае оператор A^{-1} существует и $y = A^{-1}f$.

Покажем, что для нормы обратного оператора справедлива оценка

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}. \quad (5.8)$$

В самом деле, для произвольного $x \in U_h$ справедливо неравенство

$$(x, A^{-1}x) - \delta \|A^{-1}x\|^2 \leq \|A^{-1}x\| \cdot \|x\| - \delta \|A^{-1}x\|^2.$$

С другой стороны, обозначая $y = A^{-1}x$, получаем

$$(x, A^{-1}x) - \delta \|A^{-1}x\|^2 = (Ay, y) - \delta \|y\|^2 \geq 0,$$

поэтому

$$\|A^{-1}x\| \cdot \|x\| - \delta \|A^{-1}x\|^2 = \delta \|A^{-1}x\| \left(\frac{1}{\delta} \|x\| - \|A^{-1}x\| \right) \geq 0,$$

т. е.

$$\|A^{-1}x\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|.$$

Отсюда, в силу произвольности x , и следует неравенство (5.8).

Используя это неравенство, получаем

$$\|y\| = \|A^{-1}f\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|f\| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|,$$

т. е. справедлива априорная оценка

$$\|y\| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|. \quad (5.9)$$

Понятно, что эта оценка может быть использована для доказательства сходимости схемы $Ay_h = f$. В самом деле,

$$A(y)_h = f + \psi,$$

где ψ — погрешность аппроксимации схемы на решении дифференциальной задачи. В силу линейности оператора A ,

$$Az = \psi,$$

где $z = (y)_h - y_h$ — погрешность решения. Использование оценки (5.9) приводит к неравенству

$$\|(y)_h - y_h\| \leq \frac{1}{\delta} \|\psi\|,$$

откуда и следует сходимость решения при $h \rightarrow 0$.

5.2.2. Пусть A — линейный самосопряженный и положительно определенный оператор. Тогда выражение

$$(x, y)_A = (Ax, y) \quad (5.10)$$

будет удовлетворять аксиомам скалярного произведения:

- $(x, y)_A = (y, x)_A$ (следует из самосопряженности оператора A);
- $(x + y, z)_A = (x, z)_A + (y, z)_A$;
- $(\lambda x, y)_A = \lambda (x, y)_A$;
- $(x, x)_A > 0$ при $x \neq 0$ (следует из положительности A), $(x, x)_A = 0$ только при $x = 0$.

Поэтому в U_h можно ввести норму

$$\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}, \quad (5.11)$$

порожденную оператором A . Эта норма называется *энергетической*, а пространство U_h с нормой (5.11) называется *энергетическим пространством*.

Получим оценку решения уравнения $Ay = f$ в энергетической норме. Используя неравенство Коши—Буняковского и доказанную выше оценку (5.9), будем иметь

$$\|y\|_A^2 = (Ay, y) = (f, y) \leq \|f\| \|y\| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|^2,$$

т. е.

$$\|y\|_A \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|f\|. \quad (5.12)$$

Эта априорная оценка может быть использована для доказательства сходимости приближенного решения в энергетической норме (см. § 6).

Замечание. Энергетическая норма сильнее локальной нормы. Покажем это на примере оператора $\overset{\circ}{A}$ второй разностной производной. Из оценки (3.17) теоремы вложения и равенства (4.24) следует

$$\|y\|_C \leq 0.5\sqrt{l}\|y_{\bar{x}}\| = 0.5\sqrt{l}\sqrt{(\overset{\circ}{A} y, y)} = 0.5\sqrt{l}\|y\|_{\overset{\circ}{A}},$$

т. е. из сходимости в энергетической норме $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{A}}$ следует сходимость в локальной норме $\|\cdot\|_C$.

З А Д А Ч И

5.1. С помощью метода энергетических неравенств доказать, что решение разностной схемы (2.2) сходится со вторым порядком по h в среднеквадратичной норме (4.16) к решению задачи (2.1), где $a = 0$, $b = l > 0$, $y_a = y_b = 0$.

5.2. Используя метод операторных неравенств, показать, что решение разностной схемы

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x,j} - \alpha \frac{y_{\bar{x},j} + y_{x,j}}{2} &= -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_N &= 0, \quad hN = l \end{aligned} \quad (5.13)$$

сходится со вторым порядком по h в среднеквадратичной норме (4.16) к решению задачи

$$\begin{aligned} y'' - \alpha y' &= -f(x), \quad 0 < x < l, \quad \alpha = \text{const} > 0, \\ y(0) &= y(l) = 0. \end{aligned}$$

5.3. С помощью метода операторных неравенств доказать, что решение разностной схемы

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x,j} - b^2 \left[\alpha y_j + (1 - \alpha) \frac{y_{j+1} + y_{j-1}}{2} \right] &= -f_j, \\ 0 \leq \alpha &\leq \text{const} \leq 1, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_N &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

сходится со вторым порядком по h в среднеквадратичной норме (4.16) к решению задачи

$$\begin{aligned} y''(x) - b^2 y(x) &= -f(x), \quad b = \text{const} \neq 0, \quad 0 < x < l, \\ y(0) &= y(l) = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

§ 6. Разностная схема для стационарного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

6.1. Рассмотрим первую краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} (p(x)y')' - q(x)y &= -f(x), \quad 0 < x < l, \\ y(0) &= \mu_0, \quad y(l) = \mu_l. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Предположим, что p , q , f являются достаточно гладкими функциями переменной x , причем

$$p(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0. \quad (6.2)$$

Будем аппроксимировать указанную задачу на равномерной сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_j \mid x_j = jh, \quad j = 0, \dots, N\}, \quad (6.3)$$

где $h = l/N$, следующей разностной схемой:

$$\begin{aligned} (ay_{\bar{x}})_{x,j} - d_j y_j &= -\varphi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= \mu_0, \quad y_N = \mu_l. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Подберем сеточные функции a_j , d_j , φ_j так, чтобы эта схема имела второй порядок аппроксимации. Для этого перепишем схему (6.4) в виде $L_h y_h = f_h$ и рассмотрим погрешность аппроксимации $\psi_{h,j}$ ($j = 1, \dots, N-1$) на решении $y(x)$ дифференциальной задачи:

$$\begin{aligned} \psi_{h,j} &= L_h(y)_{h,j} - f_{h,j} = \\ &= \frac{1}{h} \left(a_{j+1} \frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} - a_j \frac{y(x_j) - y(x_{j-1}))}{h} \right) - d_j y(x_j) + \varphi_j = \\ &= \frac{1}{h} \left[a_{j+1} \left(y'(x_j) + \frac{h}{2} y''(x_j) + \frac{h^2}{6} y'''(x_j) + O(h^3) \right) - \right. \\ &\quad \left. - a_j \left(y'(x_j) - \frac{h}{2} y''(x_j) + \frac{h^2}{6} y'''(x_j) + O(h^3) \right) \right] - d_j y(x_j) + \varphi_j = \\ &= \frac{a_{j+1} - a_j}{h} y'(x_j) + \frac{a_{j+1} + a_j}{2} y''(x_j) + \frac{a_{j+1} - a_j}{6} h y'''(x_j) - \\ &\quad - d_j y(x_j) + \varphi_j + O(h^2). \end{aligned}$$

Поскольку для решения задачи (6.1) выполняется равенство

$$p'(x)y'(x) + py''(x) - q(x)y(x) + f(x) = 0, \quad x \in (0, l),$$

то требование $\psi_{h,j} = O(h^2)$ будет выполнено, если

$$d_j = q(x_j) + O(h^2), \quad \varphi_j = f(x_j) + O(h^2); \quad (6.5)$$

$$\frac{a_{j+1} - a_j}{h} = p'(x_j) + O(h^2), \quad \frac{a_{j+1} + a_j}{2} = p(x_j) + O(h^2). \quad (6.6)$$

Легко проверить, что последние два соотношения выполняются, если задать

$$a_j = p_{j-1/2} = p(x_j - 0.5h). \quad (6.7)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{a_{j+1} - a_j}{h} &= \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{h} = p'(x_j) + O(h^2), \\ \frac{a_{j+1} + a_j}{2} &= \frac{p_{j+1/2} + p_{j-1/2}}{2} = p(x_j) + O(h^2). \end{aligned}$$

Полагая

$$d_j = q(x_j), \quad \varphi_j = f(x_j) \quad (6.8)$$

и учитывая выражение (6.7), получаем следующее разностное уравнение схемы (6.4):

$$\frac{1}{h} \left(p_{j+1/2} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - p_{j-1/2} \frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right) - q_j y_j = -f_j. \quad (6.9)$$

Можно a_j определить по-другому:

$$a_j = 0.5(p_j + p_{j-1}). \quad (6.10)$$

В этом случае также

$$\begin{aligned} \frac{a_{j+1} - a_j}{h} &= \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{2h} = p'(x_j) + O(h^2), \\ \frac{a_{j+1} + a_j}{2} &= \frac{p_{j+1} + 2p_j + p_{j-1}}{4} = p(x_j) + O(h^2), \end{aligned}$$

а разностное уравнение схемы (6.4) при условии (6.8) примет вид

$$\frac{1}{h} \left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} \cdot \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \cdot \frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right) - q_j y_j = -f_j. \quad (6.11)$$

Итак, получили схему (6.4), которая для сеточных функций d_j, φ_j, a_j , удовлетворяющих условиям (6.5), (6.6), аппроксимирует задачу (6.1) со вторым порядком.

6.2. Покажем, что построенная схема сходится со вторым порядком, при этом будем считать, что коэффициенты a_j вычисляются по формулам (6.7) или (6.10). Тогда

$$a_j \geq c_1 > 0. \quad (6.12)$$

Подставим в схему (6.4) решение дифференциальной задачи $u_j = y(x_j)$:

$$\begin{aligned} (au_{\bar{x}})_{x,j} - d_j u_j &= -\varphi_j + \psi_j, \\ u_0 &= \mu_0, \quad u_N = \mu_l, \end{aligned}$$

где $\psi_j = O(h^2)$, $j = 1, \dots, N-1$. Вычитая из последней разностной схемы исходную, получаем разностную задачу для погрешности решения $z_j = u_j - y_j$:

$$\begin{cases} (az_{\bar{x}})_{x,j} - d_j z_j = \psi_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ z_0 = 0, \quad z_N = 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

Теперь можно получить априорную оценку для z . Для этого запишем разностную задачу (6.13) в операторном виде

$$Az \equiv Bz + Dz = -\psi, \quad z \in \overset{\circ}{U}_h,$$

где $\psi = (0, \psi_1, \dots, \psi_{N-1}, 0) \in \overset{\circ}{U}_h$, $Dz_j = d_j z_j$, $j = 0, \dots, N$,

$$Bz_j = \begin{cases} -(az_{\bar{x}})_{x,j}, & j = 1, \dots, N-1, \\ 0, & j = 0, N \end{cases}$$

и исследуем свойства оператора A .

Используя свойство самосопряженности оператора $B : \overset{\circ}{U}_h \rightarrow \overset{\circ}{U}_h$ (теорема 4.2), получаем

$$(Az, v) = (Bz, v) + (Dz, v) = (z, Bv) + (z, Dv) = (z, Av),$$

т. е. $A : \overset{\circ}{U}_h \rightarrow \overset{\circ}{U}_h$ — также самосопряженный оператор.

Далее, в силу ограничений (6.12), оператор B является положительно определенным (теорема 4.2) и справедливо неравенство

$$(Az, z) = (Bz, z) + (Dz, z) \geq c_1 \frac{8}{l^2} \|z\|^2 + (d, z^2) \geq \left(c_1 \frac{8}{l^2} + \min_j d_j \right) \|z\|^2,$$

где $d = (0, d_1, \dots, d_{N-1}, 0) \in \mathring{U}_h$. Пусть ε_0 — произвольное положительное число, такое что

$$0 < \varepsilon_0 < \frac{4c_1}{l^2}. \quad (6.14)$$

Поскольку $\max_j |d_j - q(x_j)| = O(h^2)$ и $q(x) \geq 0$, то найдется $h_0 > 0$, такое что при всех $h < h_0$ будет верна оценка снизу

$$\min_j d_j > -\varepsilon_0. \quad (6.15)$$

Таким образом, при всех $h < h_0$

$$(Az, z) \geq \delta \|z\|^2, \quad \delta = \frac{8c_1}{l^2} - \varepsilon_0 > \frac{4c_1}{l^2} > 0, \quad (6.16)$$

т. е. A является положительно определенным оператором. Поэтому для погрешности решения выполняется неравенство (5.12):

$$\|z\|_A \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|\psi\|, \quad (6.17)$$

означающее сходимость схемы в энергетической норме со вторым порядком по h , так как $\psi = O(h^2)$.

Сходимость в среднем следует из оценки (5.9):

$$\|z\| \leq \frac{1}{\delta} \|\psi\|. \quad (6.18)$$

Нетрудно доказать и равномерную сходимость схемы. В силу неравенств (3.2) и (3.17), получаем

$$\begin{aligned} \|z\|_A^2 &= (Az, z) = (- (az_{\bar{x}})_x, z) + (d, z^2) \geq (a, z_{\bar{x}}^2) - \varepsilon_0 \|z\|^2 \geq \\ &\geq c_1 \|z_{\bar{x}}\|^2 - \varepsilon_0 l \|z\|_C^2 \geq \left(c_1 \frac{4}{l} - \varepsilon_0 l \right) \|z\|_C^2, \end{aligned} \quad (6.19)$$

при этом $4c_1/l - \varepsilon_0 l > 0$ (см. условие (6.14)). Из установленных

неравенств (6.17) и (6.19) следует, что при $h < h_0$ выполняется оценка

$$\|z\|_C \leq \frac{l\sqrt{l}}{2\sqrt{c_1(4c_1 - \varepsilon_0 l^2)}} \|\psi\| \leq \frac{l^2}{4c_1 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_0 l^2}{4c_1}}} \|\psi\|_C, \quad (6.20)$$

т. е. имеет место равномерная сходимость со вторым порядком по h .

З А Д А Ч И

6.1. Показать, что разностную схему (6.4), (6.8), (6.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[(py_{\bar{x}})_{x,j} + (py_x)_{\bar{x},j} \right] - q_j y_j &= -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= \mu_0, \quad y_N = \mu_l. \end{aligned}$$

6.2. Построить разностную схему второго порядка аппроксимации для решения краевой задачи с условиями второго рода на левой границе и первого рода на правой:

$$\begin{aligned} (p(x)y')' - q(x)y &= -f(x), \quad 0 < x < l, \\ p(0)y'(0) &= \mu_0, \quad y(l) = \mu_l. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Опишите алгоритм метода прогонки для решения полученной разностной задачи.

6.3. Построить разностную схему второго порядка аппроксимации для решения краевой задачи с условиями третьего рода на левой границе и первого рода на правой:

$$\begin{aligned} (p(x)y')' - q(x)y &= -f(x), \quad 0 < x < l, \\ p(0)y'(0) - \gamma_0 y(0) &= \mu_0, \quad \gamma_0 = \text{const} > 0, \\ y(l) &= \mu_l. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Опишите алгоритм метода прогонки для решения полученной разностной задачи.

§ 7. Конечно-разностные схемы на неравномерных сетках

Для сходящейся разностной схемы точность численного решения можно повышать, уменьшая шаг сетки. Для заданного количества узлов равномерной сетки большую точность могут дать схемы повышенного порядка аппроксимации. Например, для задачи (2.1) вместо схемы (2.2) второго порядка аппроксимации предпочтительнее использовать схему (2.44) четвертого порядка аппроксимации, которая и сходится с четвертым порядком по h (см. задачу 2.3). Однако в случае уравнений с переменными коэффициентами построение схем повышенного порядка аппроксимации затруднительно, особенно когда задача решается в многомерной области.

Еще один подход к уменьшению погрешности численного решения состоит в использовании схем на неравномерных сетках. Неравномерные сетки уже применялись нами в работе [19] при решении задачи Коши, когда выбор расчетных шагов производился на основе правила Рунге контроля локальной погрешности численного решения, при этом для получения одинаковой точности требовалось гораздо меньше узлов неравномерной сетки, чем равномерной. Применение неравномерных сеток при решении краевых задач тоже может привести к повышению точности численного решения по сравнению с решением, полученным на равномерной сетке. Имея некоторую информацию о поведении решения дифференциальной задачи, можно построить неравномерную сетку так, чтобы для заданного числа узлов обеспечить большую точность, чем на равномерной сетке. Например, в области быстрого изменения решения сетку можно сгустить, а там, где решение меняется медленно, можно взять разреженную сетку. Это может привести к более точному представлению решения. Сетки, при построении которых используется информация о решении задачи, будем называть *адаптивными*.

В настоящем параграфе мы рассмотрим примеры разностных схем на неравномерных сетках и укажем один из методов построения адаптивных сеток.

7.1. Схема на неравномерной сетке. Рассмотрим первую краевую задачу (6.1) для стационарного уравнения теплопроводности (далее — задача $Ly = f$). Будем предполагать, что выполняются неравенства (6.2) и рассматриваемая задача имеет достаточно гладкое решение.

В § 6 для этой задачи была построена схема (6.4) на равномерной сетке, сходящаяся как в среднем, так и равномерно со вторым порядком.

Прежде чем построить сходящуюся схему на неравномерной сетке, поясним, что мы будем понимать здесь под неравномерной сеткой, и приведем обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть

$$x = x(\xi), \quad \xi \in [0, 1] \quad (7.1)$$

— произвольное достаточно гладкое взаимно-однозначное отображение единичного отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[0, l]$, такое, что

$$x(0) = 0, \quad x(1) = l. \quad (7.2)$$

Далее из множества отображений (7.1) выделяются так называемые *допустимые* отображения, якобианы которых равномерно ограничены сверху и снизу некоторыми постоянными:

$$0 < J_m \leq J(\xi) \equiv \frac{dx}{d\xi}(\xi) \leq J_M < \infty, \quad \xi \in [0, 1]. \quad (7.3)$$

Обозначение $\bar{\omega}_h$ будем использовать для равномерной на отрезке $[0, 1]$ сетки с шагом $h = 1/N$, ω_h — для множества внутренних узлов этой сетки.

Определение. *Неравномерной сеткой $\bar{\Omega}_h$ на отрезке $[0, l]$ называется образ равномерной сетки $\bar{\omega}_h$ при отображении (7.1).*

Таким образом, координаты узлов неравномерной сетки вычисляются по формуле

$$x_j = x(\xi_j), \quad \xi_j \in \bar{\omega}_h, \quad (7.4)$$

где $\xi_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$). Кроме того, из условий (7.2) и (7.3) следует, что $x_0 = 0$, $x_N = l$ и $x_j < x_{j+1}$, поэтому

$$\bar{\Omega}_h = \left\{ x_j \mid 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{j-1} < x_j < \dots < x_N = l \right\}. \quad (7.5)$$

Шаги неравномерной сетки будем обозначать через $h_{j+1/2}$:

$$h_{j+1/2} = x_{j+1} - x_j > 0, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Из условий (7.3) следует, что

$$J_m h \leq h_{\min} = \min_{j=0, \dots, N-1} h_{j+1/2} \leq h_{\max} = \max_{j=0, \dots, N-1} h_{j+1/2} \leq J_M h, \quad (7.6)$$

и, следовательно,

$$h_{\max} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (7.7)$$

Совокупность внутренних узлов неравномерной сетки обозначается как Ω_h .

Отметим, что если отображение (7.1) является линейным

$$x(\xi) = \xi l, \quad \xi \in [0, 1], \quad (7.8)$$

то сетка $\bar{\Omega}_h$ будет равномерной. Координаты узлов равномерной на $[0, l]$ сетки однозначно определяются заданием числа узлов N . Для неравномерной сетки это не так. Для заданного N существует целое семейство неравномерных сеток Ω_h , а отдельный представитель этого семейства будет определяться заданием конкретного отображения (7.1).

Разностная схема на неравномерной сетке $\bar{\Omega}_h$ строится в три этапа. Сначала в исходной задаче производится переход к новой независимой переменной ξ , далее для полученной задачи строится схема на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$ и на последнем этапе в построенной схеме осуществляется обратный переход к независимой переменной x .

Согласно сказанному, перейдем в задаче $Ly = f$ к новой независимой переменной ξ . В результате получим задачу $\tilde{L}\tilde{y} = \tilde{f}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{p}(\xi)}{J} \cdot \frac{d\tilde{y}}{d\xi} \right) - \tilde{q}(\xi)\tilde{y} &= -\tilde{f}(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \\ \tilde{y}(0) = \mu_0, \quad \tilde{y}(1) &= \mu_1. \end{aligned} \quad (7.9)$$

В задаче (7.9) символом « $\sim$ » обозначены функции переменной $\xi \in [0, 1]$, индуцируемые отображением (7.1):

$$\tilde{y}(\xi) = y(x(\xi)), \quad \tilde{p}(\xi) = p(x(\xi)), \quad \tilde{q}(\xi) = q(x(\xi)), \quad \tilde{f}(\xi) = f(x(\xi)). \quad (7.10)$$

Например, $\tilde{y}(\xi)$ — это функция $y(x)$, рассматриваемая как функция независимой переменной ξ . Иначе говоря, функция $\tilde{y}(\xi)$ определяется как функция, принимающая в точке ξ такое же значение, что и функция $y(x)$ в точке $x(\xi)$. Таким образом, каждое отображение (7.1) индуцирует взаимно-однозначное соответствие между двумя множествами функций: функций, определенных на $[0, l]$ и на $[0, 1]$.

Теперь задачу (7.9) аппроксимируем на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$. Можно предложить, например, схему, схожую со схемой (6.4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_j} \frac{1}{h} \left(\frac{\tilde{p}_{j+1} + \tilde{p}_j}{2J_{j+1/2}} \frac{\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j}{h} - \frac{\tilde{p}_j + \tilde{p}_{j-1}}{2J_{j-1/2}} \frac{\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1}}{h} \right) - \tilde{q}_j \tilde{y}_j &= \\ &= -\tilde{f}_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\tilde{y}_0 = \mu_0, \quad \tilde{y}_N = \mu_1,$$

где $\tilde{p}_j = \tilde{p}(\xi_j)$, $\tilde{q}_j = \tilde{q}(\xi_j)$, $\tilde{f}_j = \tilde{f}(\xi_j)$,

$$J_{j+1/2} = \frac{x_{j+1} - x_j}{h}, \quad J_{j-1/2} = \frac{x_j - x_{j-1}}{h}, \quad J_j = \frac{J_{j-1/2} + J_{j+1/2}}{2}. \quad (7.12)$$

Полученную схему будем записывать в символическом виде $\tilde{L}_h \tilde{y}_h = \tilde{f}_h$.

Сеточные функции из схемы (7.11) определены на сетке $\bar{\omega}_h$. Взаимно-однозначным образом (на основе соответствия узлов (7.4)) им могут быть поставлены в соответствие сеточные функции, определенные на неравномерной сетке $\bar{\Omega}_h$. А именно функции $\tilde{y}_h : \bar{\omega}_h \rightarrow R$ ставится в соответствие функция $y_h : \bar{\Omega}_h \rightarrow R$, принимающая в каждом узле $x_j \in \bar{\Omega}_h$ такое же значение, что и функция $\tilde{y}_h$ в узле $\xi_j = x^{-1}(x_j) \in \bar{\omega}_h$. Таким образом, используя равенства

$$y_j = \tilde{y}_j, \quad p_j = \tilde{p}_j, \quad q_j = \tilde{q}_j, \quad f_j = \tilde{f}_j \quad (7.13)$$

и учитывая формулы (7.12), мы можем записать схему (7.11) как разностную схему на неравномерной сетке:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1/2}} - \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1/2}} \right) - q_j y_j = \\ = -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1,$$

где

$$h_j = \frac{h_{j-1/2} + h_{j+1/2}}{2}. \quad (7.15)$$

Полученную схему на неравномерной сетке будем записывать в краткой форме как $L_h y_h = f_h$.

7.2. Сходимость схемы. Исследуем сходимость построенной схемы (7.14), считая, что пространство U_h сеточных функций, определенных на неравномерной сетке $\bar{\Omega}_h$, снабжено некоторой нормой $\|\cdot\|_{U_h}$. Будем предполагать, что неравномерная сетка построена на основе некоторого допустимого отображения (7.1).

Определение. Решение разностной схемы $L_h y_h = f_h$ сходится к решению дифференциальной задачи $Ly = f$, если

$$\|y_h - (y)_h\|_{U_h} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (7.16)$$

Если, сверх того,

$$\|y_h - (y)_h\|_{U_h} \leq C h_{\max}^p, \quad (7.17)$$

где $C > 0$ и $p > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от N , то говорят, что имеет место сходимость порядка p или разностная схема имеет p -й порядок точности.

Оказывается, что схема $L_h y_h = f_h$ на неравномерной сетке сходится или не сходится одновременно с соответствующей схемой на равномерной сетке $\tilde{L}_h \tilde{y}_h = \tilde{f}_h$ и тем самым вопрос о сходимости схем на неравномерных сетках полностью решается исследованием сходимости соответствующих схем на равномерной сетке. Покажем это.

Как и в § 6, погрешность $z_h = (y)_h - y_h$ является решением разностной задачи с однородными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} \frac{z_{j+1} - z_j}{h_{j+1/2}} - \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \frac{z_j - z_{j-1}}{h_{j-1/2}} \right) - q_j z_j = \\ = \psi_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$z_0 = z_N = 0.$$

Здесь ψ — погрешность аппроксимации. Пусть $\overset{\circ}{U}_h$ — множество функций $z \in U_h$, равных нулю в крайних узлах x_0 и x_N . В пространстве $\overset{\circ}{U}_h$ будем использовать две нормы: локальную

$$\|z\|_{C(\Omega_h)} = \max_j |z_j|, \quad z \in \overset{\circ}{U}_h \quad (7.19)$$

и среднеквадратичную

$$\|z\|_{l_2(\Omega_h)} = \sqrt{(z, z)}, \quad z \in \overset{\circ}{U}_h, \quad (7.20)$$

где

$$(z, v) = \sum_{j=1}^{N-1} z_j v_j h_j, \quad z, v \in \overset{\circ}{U}_h. \quad (7.21)$$

В пространстве сеточных функций $\tilde{z}$, определенных на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$ и равных нулю в граничных узлах, локальная и среднеквадратичная нормы введены в § 3. Для этих норм будут использоваться прежние обозначения $\|\tilde{z}\|_C$ и $\|\tilde{z}\|$ соответственно.

Пусть $\tilde{z}_h = (\tilde{y})_h - \tilde{y}_h$ — погрешность численного решения задачи (7.9) по схеме (7.11). Учитывая связи (7.10) и (7.13), получаем равенство

$$\|z_h\|_{C(\Omega_h)} = \|\tilde{z}_h\|_C. \quad (7.22)$$

Для среднеквадратичной нормы имеем

$$\sqrt{J_m} \|\tilde{z}_h\| \leq \|z_h\|_{l_2(\Omega_h)} \leq \sqrt{J_M} \|\tilde{z}_h\|. \quad (7.23)$$

Из выражений (7.22) и (7.23) следует, что для сходимости схемы $L_h y_h = f_h$ на неравномерной сетке необходимо и достаточно, чтобы сходилась схема $\tilde{L}_h \tilde{y}_h = \tilde{f}_h$ на равномерной сетке. Таким образом, вопрос о сходимости схемы (7.14) свелся к исследованию сходимости схемы (7.11). Более того, из соотношений (7.6) получаем

$$\frac{h_{\max}}{J_M} \leq h \leq \frac{h_{\max}}{J_m}, \quad (7.24)$$

поэтому схемы $L_h y_h = f_h$ и $\tilde{L}_h \tilde{y}_h = \tilde{f}_h$ имеют один и тот же порядок точности.

Сходимость же схемы (7.11) следует из результатов, полученных в § 6. Чтобы это доказать, рассмотрим схему, полученную из схемы (7.11) умножением разностного уравнения на J_j :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{\tilde{p}_{j+1} + \tilde{p}_j}{2J_{j+1/2}} \frac{\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j}{h} - \frac{\tilde{p}_j + \tilde{p}_{j-1}}{2J_{j-1/2}} \frac{\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1}}{h} \right) - J_j \tilde{q}_j \tilde{y}_j = \\ = -J_j \tilde{f}_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\tilde{y}_0 = \mu_0, \quad \tilde{y}_N = \mu_1.$$

Эта схема совпадает со схемой (6.4), если в последней взять коэффициенты

$$a_j = \frac{\tilde{p}_j + \tilde{p}_{j-1}}{2J_{j-1/2}}, \quad d_j = J_j \tilde{q}_j, \quad \varphi_j = J_j \tilde{f}_j.$$

В § 6 было установлено, что при выполнении условий (6.6) схема (6.4) аппроксимирует задачу (6.1) со вторым порядком. В рассматриваемом сейчас случае это означает, что схема (7.25) будет аппроксимировать задачу

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{p}(\xi)}{J} \cdot \frac{d\tilde{y}}{d\xi} \right) - J(\xi) \tilde{q}(\xi) \tilde{y} = -J(\xi) \tilde{f}(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \\ \tilde{y}(0) = \mu_0, \quad \tilde{y}(1) = \mu_1 \end{aligned} \quad (7.26)$$

со вторым порядком, если будут выполнены условия

$$J_j = J(\xi_j) + O(h^2), \quad (7.27)$$

$$\frac{a_{j+1} - a_j}{h} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{p}}{J} \right) (\xi_j) + O(h^2), \quad \frac{a_{j+1} + a_j}{2} = \frac{\tilde{p}}{J} (\xi_j) + O(h^2).$$

Легко проверить, что эти условия действительно выполняются.

Для коэффициентов задачи (7.26) справедливы ограничения

$$\frac{\tilde{p}}{J}(\xi) \geq \frac{c_1}{J_M} > 0, \quad J(\xi)\tilde{q}(\xi) \geq 0, \quad (7.28)$$

означающие выполнение условий (6.2). Следовательно, для погрешности решения $\tilde{z}_h$ будут справедливы оценки (6.18) и (6.20), из которых и следует сходимость схемы (7.11) в среднеквадратичной и равномерной нормах.

Итак, на неравномерной сетке построена схема (7.14) второго порядка точности. Далее на примере задачи с постоянными коэффициентами будет показано, что при особой расстановке узлов схема (7.14) может стать точнее, чем схема (6.4) на равномерной сетке.

7.3. Пример схемы на неравномерной сетке. Рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{aligned} y'' - a^2 y &= 0, & 0 < x < l, & \quad a = \text{const} > 0, \\ y(0) &= \exp(-la), & y(l) &= 1. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Она имеет точное решение

$$\dot{y}(x) = e^{a(x-l)}, \quad (7.30)$$

график которого показан на рис. 1. Видно, что при больших значениях параметра a решение очень быстро изменяется в окрестности точки $x = l$. Эта окрестность имеет название *пограничного слоя решения*.

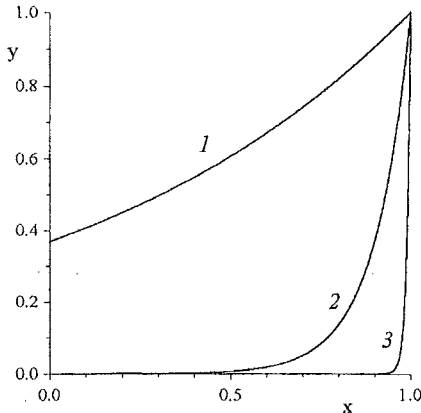


Рис. 1. Точное решение (7.30) при $l = 1$; кривая 1 соответствует $a = 1$; 2 — $a = 10$; 3 — $a = 100$

Аппроксимируем задачу (7.29) на равномерной сетке (6.3) конечно-разностной схемой вида (2.2):

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x,j} - a^2 y_j &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= \exp(-la), \quad y_N = 1. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Эта схема имеет второй порядок аппроксимации, устойчива и равномерно сходится со вторым порядком по h (см. п. 2.1). Погрешность аппроксимации в j -м узле вычисляется по формуле (2.29):

$$\psi_{h,j} = \frac{h^2}{12} y_{xxxx}(x_j) + O(h^4) = \frac{h^2}{12} a^4 e^{a(x_j-l)} + O(h^4), \quad (7.32)$$

из которой видно, что она велика в окрестности правой границы $x = l$. В то же время в левой части области погрешность аппроксимации мала даже на грубой сетке. Из формулы (7.32) следует также, что шаг сетки существенно влияет на величину погрешности аппроксимации, поэтому представляется разумным использовать в расчетах неравномерные сетки, имеющие мелкие шаги около точки $x = l$ и более крупные в окрестности $x = 0$.

Рассмотрим теперь для задачи (7.29) схему (7.14) на неравномерной сетке $\bar{\Omega}_h$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1/2}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1/2}} \right) - a^2 y_j &= 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= e^{-la}, \quad y_N = 1. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Согласно замечаниям, сделанным в п. 7.2, порядок точности этой схемы совпадает с порядком точности схемы (7.11):

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_j} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{J_{j+1/2}} \frac{\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j}{h} - \frac{1}{J_{j-1/2}} \frac{\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1}}{h} \right) - a^2 \tilde{y}_j &= 0, \\ \tilde{y}_0 &= e^{-la}, \quad \tilde{y}_N = 1, \end{aligned} \quad (7.34)$$

построенной на равномерной сетке $\bar{\omega}_h$ для решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{J} \cdot \frac{d\tilde{y}}{d\xi} \right) - a^2 \tilde{y} &= 0, \quad \xi \in (0, 1), \\ \tilde{y}(0) &= e^{-la}, \quad \tilde{y}(1) = 1. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Предполагая достаточную гладкость решения $y(x)$ и отображения (7.1), получаем следующее выражение для локальной погрешности аппроксимации схемы (7.34):

$$\psi_{h,j} = \frac{h^2}{3} \left[J_\xi y_{xxx} + \frac{1}{4} J^2 y_{xxxx} \right] (\xi_j) + O(h^4), \quad \xi_j \in \omega_h. \quad (7.36)$$

Для произвольной сетки $\bar{\Omega}_h$ порядок аппроксимации равен двум, но можно построить сетку, на которой порядок аппроксимации будет выше. Для этого потребуем, чтобы главный член Ψ_h погрешности аппроксимации (7.36) был равен нулю во всех точках $\xi \in (0, 1)$, т. е.

$$\Psi_h(\xi) \equiv \frac{h^2}{3} \left[J_\xi y_{xxx} + \frac{1}{4} J^2 y_{xxx} \right] (\xi) = 0, \quad \xi \in (0, 1)$$

или

$$x_{\xi\xi} y_{xxx} + \frac{1}{4} x_\xi y_{xxx\xi} = 0. \quad (7.37)$$

Уравнение (7.37) может рассматриваться как уравнение для определения отображения $x = x(\xi)$. Существование такого отображения означает, что на сетке $x_j = x(\xi_j)$ погрешность аппроксимации будет иметь порядок $O(h^4)$. Поскольку уравнение (7.37) можно переписать в виде

$$(y_{xxx})^{3/4} \left((y_{xxx})^{1/4} x_\xi \right)_\xi = 0, \quad (7.38)$$

то отсюда следует, что искомое отображение (7.1) является решением следующей нелинейной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(w(x) \frac{dx}{d\xi} \right) &= 0, \quad \xi \in (0, 1), \\ x(0) &= 0, \quad x(1) = l, \end{aligned} \quad (7.39)$$

где

$$w(x) = (y_{xxx})^{1/4}, \quad x \in (0, l). \quad (7.40)$$

Найдем решение задачи (7.39). Из уравнения этой задачи следует равенство

$$w(x(\xi)) x_\xi(\xi) = C = \text{const}, \quad \xi \in (0, 1). \quad (7.41)$$

Чтобы найти постоянную C , проинтегрируем это равенство по отрезку $[0, 1]$:

$$C = \int_0^1 C d\xi = \int_0^1 w(x(\xi)) J(\xi) d\xi = \int_0^l w(x) dx. \quad (7.42)$$

С учетом выражений (7.40) и (7.30) получим

$$C = \int_0^l a^{3/4} e^{a(x-l)/4} dx = \frac{4}{a^{1/4}} \left(1 - e^{-al/4} \right).$$

Следовательно, равенство (7.41) примет вид

$$a^{3/4} e^{a(x-l)/4} \frac{dx}{d\xi} = \frac{4}{a^{1/4}} \left(1 - e^{-al/4}\right),$$

откуда

$$x(\xi) = l + \frac{4}{a} \ln \left[\xi + (1 - \xi) e^{-al/4} \right], \quad \xi \in [0, 1]. \quad (7.43)$$

Из оценок (6.18) и (6.20) следует, что на сетке, задаваемой отображением (7.43), наша схема (7.33) будет иметь четвертый порядок точности.

7.4. Метод эквираспределения. Для решения задачи (7.29) нам удалось построить неравномерную сетку, на которой точность схемы (7.33) оказалась выше, чем на равномерной сетке. При этом была получена явная формула (7.43) для подсчета координат узлов, вывод которой был основан на условии равенства нулю главного члена погрешности аппроксимации $\Psi_h(\xi)$. Однако получить такие явные формулы удастся лишь в немногих частных случаях, только для самых простых задач. Поэтому рассмотрим сейчас *метод эквираспределения* (другое название — *метод равномерного распределения*) — более общий метод построения неравномерных сеток, в котором указанное условие $\Psi_h(\xi) \equiv 0$ не обязательно выполняться.

Для того чтобы воспользоваться этим методом, необходимо предварительно задать так называемую *управляющую* (или *мониторную*) функцию $w(x) > 0$, в которой каким-то образом должна быть учтена информация о поведении погрешности численного решения. Можно ожидать, что в подобластях, где велика погрешность аппроксимации, будет большой и погрешность численного решения. Так, при использовании схемы (7.31) можно ожидать, что погрешность численного решения будет велика в подобласти, где велика производная u_{xxxx} . В этой подобласти и управляющая функция должна принимать большие значения, чем в остальной части области решения. И в общем случае управляющую функцию задают зависящей от производных до некоторого порядка, причем функция w должна принимать большие значения в подобластях больших значений производных решения.

Идея метода эквираспределения заключается в том, чтобы при конструировании отображения (7.1) добиться выполнения *принципа эквираспределения*: произведение якобиана отображения на значение управляющей функции должно быть постоянным во всей области, т. е.

$$w(x(\xi))J(\xi) = C = \text{const}, \quad \xi \in (0, 1). \quad (7.44)$$

Уравнение (7.44) будем называть *принципом эквираспределения в дифференциальной форме*. Из уравнения (7.44) следует, что функции w и J обратно пропорциональны. Если, например, в некоторой подобласти управляющая функция принимает большие значения, то якобиан отображения, наоборот, принимает здесь малые значения, а это, в силу равенства

$$h_{j+1/2} = x(\xi_{j+1}) - x(\xi_j) = J(\theta_j)h, \quad \xi_j < \theta_j < \xi_{j+1},$$

дает малые шаги неравномерной сетки в рассматриваемой подобласти.

Интегрируя уравнение (7.44) по интервалу (ξ_j, ξ_{j+1}) , получаем равенство

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x) dx = Ch = \text{const}, \quad (7.45)$$

которое и объясняет название метода равномерного распределения: величина w (а значит, и неявно связанная с ней погрешность численного решения) равномерно распределена по всем ячейкам неравномерной сетки $\bar{\Omega}_h$.

Постоянная в уравнении (7.44) не может быть произвольной, она определяется равенством (7.42). Можно избавиться от постоянной C , если продифференцировать равенство (7.44). В результате для определения отображения (7.1) получается краевая задача (7.39). Итак, *методом эквираспределения* будем называть способ нахождения отображения (7.1), (7.2), основанный на решении уравнения (7.44) или задачи (7.39).

Отметим, что отображение (7.43) мы построили, решив краевую задачу (7.39). Таким образом, можно сказать, что отображение (7.43) получено методом эквираспределения с управляющей функцией (7.40). Поскольку для решения задачи (7.29) справедливо равенство $y_{xxx} = a^2 y_x$, то такое же отображение (7.43) получится при использовании управляющей функции

$$w(x) = (y_x(x))^{1/4}, \quad x \in (0, l). \quad (7.46)$$

Обе управляющие функции — (7.40) и (7.46) — дают оптимальную сетку в том смысле, что на ней погрешность аппроксимации схемы (7.33) имеет четвертый порядок.

Рассмотрим другие управляющие функции. Для функции

$$w(x) = (y_x(x))^{1/2} \quad (7.47)$$

метод эквираспределения дает отображение

$$x(\xi) = l + \frac{2}{a} \ln \left[\xi + (1 - \xi)e^{-al/2} \right], \quad \xi \in [0, 1]. \quad (7.48)$$

Для него локальная погрешность аппроксимации схемы (7.33) на неравномерной сетке $x_j = x(\xi_j)$ определяется формулой

$$\psi_{h,j} = -\frac{h^2}{12}4a^2 \left(1 - e^{-al/2}\right) + O(h^4), \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (7.49)$$

Видим, что на сетке, определяемой отображением (7.48), схема (7.33) имеет второй порядок аппроксимации. Интересной особенностью этого отображения является то, что главный член Ψ_h погрешности аппроксимации не зависит от номера узла, он постоянен и имеет меньшую величину, чем в схеме на равномерной сетке. Так, при $l = 1$ и $a = 10$ для схемы (7.31) на равномерной сетке имеем

$$\|\Psi_h\|_{C[0,1]} = \frac{h^2}{12}10^4,$$

а для схемы (7.33)

$$\|\Psi_h\|_{C[0,1]} \approx \frac{h^2}{12} \cdot 4 \cdot 10^2.$$

Следовательно, можно ожидать, что схема (7.33) на неравномерной сетке (7.48) будет давать более точные результаты, чем на равномерной.

И наконец, для

$$w(x) = y_x^2(x) \quad (7.50)$$

методом эквираспределения получим

$$x(\xi) = l + \frac{1}{2a} \ln [\xi + (1 - \xi)e^{-2al}], \quad \xi \in [0, 1]. \quad (7.51)$$

Анализируя график (рис. 2) отображения, обратного к (7.51), видим, что соответствующая (7.51) сетка будет сгущаться около правой границы значительно сильнее, чем сетки, соответствующие отображениям (7.43) и (7.48), и, наоборот, около левой границы она будет иметь более сильное разрежение и более крупные шаги (см. задачу 7.4). Для погрешности аппроксимации схемы на неравномерной сетке, заданной отображением (7.51), имеем следующее выражение:

$$\psi_{h,j} = -\frac{h^2}{12} \frac{7a^2}{4} (1 - e^{-2al}) e^{-3a(x_j-l)} + O(h^4), \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (7.52)$$

Сравнивая его с равенством (7.32), видим, что, в отличие от равномерной сетки, величина (7.52) имеет большие значения около левой границы. В частности, при $l = 1$, $a = 10$ и достаточно большом N получаем

$$\|\Psi_h\|_{C[0,1]} \approx \frac{h^2}{12} \cdot \frac{7}{4} \cdot 10^{15}.$$

Таким образом, хотя порядок точности схемы на сетке (7.51) по-прежнему второй, но слишком крупные шаги около левой границы приводят к росту величины погрешности решения, несмотря на то что решение меняется в этой подобласти крайне слабо. В результате схема (7.33) на неравномерной сетке (7.51) будет менее точной, чем схема на равномерной сетке.

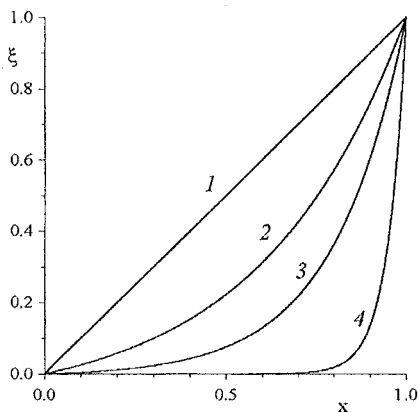


Рис. 2. График функции $\xi = \xi(x)$ при $l = 1$, $a = 10$; кривая 1 соответствует управляющей функции $w \equiv 1$; кривая 2 — (7.46); кривая 3 — (7.47); кривая 4 — (7.50)

Итак, на примере схемы (7.33) мы увидели, что выбор управляющей функции существенно влияет на точность численного решения. Результаты расчетов могут оказаться как лучше, так и хуже полученных на равномерной сетке.

Ясно, что управляющую функцию можно брать в виде (7.46) или (7.47) только в задачах с $y_x > 0$. В общем случае функция w может зависеть не только от первых производных, но и от старших производных или только от решения. Таким образом, имеется большой произвол в выборе функции w . Желательно подобрать ее так, чтобы сетка, построенная на основе отображения (7.1), давала бы большую точность численного решения y_h по сравнению с другими сетками с тем же количеством узлов. Отметим, что если $w \approx 0$ в достаточно большой подобласти (например, если w задано формулой (7.50)), то в эту подобласть, как следует из принципа эквираспределения (7.44), может не попасть ни одного узла, вследствие чего точность численного решения может

снизиться. Чтобы избежать этого, предлагается использовать положительную функцию w , отделенную от нуля некоторой постоянной, например, единицей. Так, при построении сетки для схемы (7.14) можно использовать управляющую функцию вида

$$w(x) = 1 + \alpha_1 |y_x(x)|^{\beta_1}, \quad (7.53)$$

или более общего вида

$$w(x) = 1 + \alpha_0 |y(x)|^{\beta_0} + \alpha_1 |y_x(x)|^{\beta_1} + \alpha_2 |y_{xx}(x)|^{\beta_2}, \quad (7.54)$$

где $\alpha_k \geq 0$, $\beta_k \geq 0$ ($k = 0, 1, 2$) — параметры, подбираемые экспериментальным путем.

7.5. Принцип эквираспределения в разностной форме. Даже если точное решение $y(x)$ дифференциальной задачи известно, получить решение $x = x(\xi)$ нелинейной задачи (7.39) в виде аналитической формулы удастся очень редко. Поэтому для поиска отображения (7.1) применим конечно-разностный метод. Для этого аппроксимируем задачу (7.39) разностной схемой (6.4), (6.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(w(x_{j+1/2}) \frac{x_{j+1} - x_j}{h} - w(x_{j-1/2}) \frac{x_j - x_{j-1}}{h} \right) &= 0, \\ j &= 1, \dots, N-1, \\ x_0 &= 0, \quad x_N = l. \end{aligned} \quad (7.55)$$

В результате получилась нелинейная разностная задача для вычисления координат узлов. Для ее решения x_j выполняется равенство

$$w(x_{j+1/2}) \frac{h_{j+1/2}}{h} = C_h = \text{const}, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

или при учете формул (7.12)

$$w(x_{j+1/2}) J_{j+1/2} = C_h = \text{const}, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (7.56)$$

где C_h — некоторая постоянная. Равенство (7.56) называется *принципом эквираспределения в разностной форме*. Он является разностным аналогом дифференциального уравнения (7.44) и задает наглядную зависимость сгущения сетки в определенных подобластях от тех свойств решения, которые учтены в управляющей функции w : длины ячеек сетки, удовлетворяющей принципу эквираспределения (7.56), будут малы

там, где w принимает большие значения, и, наоборот, сетка будет иметь разрежение в той части отрезка $[0, l]$, в которой функция w принимает малые значения.

7.6. Метод адаптивных сеток. При решении реальных задач точное решение заранее не известно, следовательно, невозможно вычислить значения управляющей функции и найти координаты узлов неравномерной сетки. Однако можно одновременно вести поиск решения y_j и построение сетки x_j с помощью какой-либо итерационной процедуры, например с помощью итерационного метода последовательных приближений. Рассмотрим этот итерационный метод на примере решения задачи (6.1) с помощью схемы (7.14).

В качестве начального итерационного приближения возьмем равномерную сетку, координаты x_j^0 узлов которой вычисляются с помощью отображения (7.8), и решение y_h^0 задачи (7.14) на этой сетке. Пусть n -е итерационное приближение x^n, y_h^n найдено. Тогда получение $(n+1)$ -го приближения распадается на два этапа. Сначала методом прогонки решается задача (7.55) по определению координат узлов x_j^{n+1} новой сетки, при этом управляющая функция $w_{j+1/2}$ вычисляется по известному решению y_h^n с n -й итерации. Например, если используется управляющая функция (7.53), то полагаем

$$w_{j+1/2} = 1 + \alpha_1 \left| \frac{y_{j+1}^n - y_j^n}{h_{j+1/2}} \right|^{\beta_1}, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (7.57)$$

Затем на построенной сетке x_j^{n+1} решается задача (7.14) и находятся значения y_h^{n+1} . Итерационный процесс продолжается до сходимости с заданной точностью величин y_h^n , например пока не будет выполнено условие окончания итераций

$$\|y_h^{n+1} - y_h^n\|_{U_h} < \varepsilon. \quad (7.58)$$

Описанный метод получения приближенного решения на неравномерной сетке, учитывающей поведение решения и зависящей от искомого решения, называется *методом адаптивных сеток*. При удачном выборе управляющей функции результаты расчета с помощью этого метода могут оказаться гораздо точнее результатов, полученных на равномерной сетке с тем же числом узлов.

З А Д А Ч И

7.1. Доказать равенства (7.27).

7.2. Вывести формулу (7.36) для погрешности аппроксимации схемы (7.34).

7.3. Методом эквираспределения найти отображения (7.1), соответствующие управляющим функциям (7.47) и (7.50), где $y(x)$ — точное решение (7.30) задачи (7.29).

7.4. Пусть при численном решении задачи (7.29) с параметрами $l = 1$, $a = 10$ используется неравномерная сетка, построенная с помощью отображения (7.51). Оценить снизу величину первого шага сетки $h_{1/2} = x_1 - x_0$ при: а) $N = 54$; б) $N = 2980$.

7.5. Показать, что для управляющей функции $w(x) = (y_x(x))^{\beta_1}$, где $\beta_1 = \text{const} \geq 0$, $y(x)$ — точное решение (7.30) задачи (7.29), метод эквираспределения приводит к отображению

$$x(\xi) = \begin{cases} l + \frac{1}{\beta_1 a} \ln [\xi + (1 - \xi)e^{-\beta_1 a l}], & \text{при } \beta_1 \neq 0, \\ \xi l, & \text{при } \beta_1 = 0, \end{cases} \quad \xi \in [0, 1]. \quad (7.59)$$

7.6. Пусть для решения задачи (1.12) используется схема (7.14):

$$\frac{1}{h_j} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1/2}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1/2}} \right) - a^2 y_j = 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (7.60)$$

$$y_0 = 1, \quad y_N = 0$$

на неравномерной сетке, построенной методом эквираспределения (7.44) с управляющей функцией

$$w(x) = |y_x(x)|^{1/4}, \quad (7.61)$$

где $y(x)$ — точное решение (1.13) задачи (1.12). Доказать, что (7.60) является схемой четвертого порядка точности.

7.7. Доказать, что разностная схема на неравномерной сетке $\bar{\Omega}_h$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1/2}} - \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1/2}} \right) - q_j y_j = \\ = -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (7.62) \\ \frac{p_0 + p_1}{2} \cdot \frac{y_1 - y_0}{h_{1/2}} - \frac{h_{1/2}}{2} q_0 y_0 = \mu_0 - \frac{h_{1/2}}{2} f_0, \end{aligned}$$

$$y_N = \mu_1,$$

построенная для решения краевой задачи (6.21), аппроксимирует ее на гладких решениях со вторым порядком по h .

§ 8. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) широко используется в настоящее время для решения различных задач математической физики. Преимущество МКЭ особенно проявляется в том случае, когда задача решается в многомерной области со сложной формой границы. В настоящем параграфе мы изложим основные идеи этого метода на примере решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

8.1. Переход к операторному уравнению. Рассмотрим первую краевую задачу для стационарного уравнения теплопроводности (6.1). Будем предполагать, что $p \in C^1[0, l]$, $q \in C[0, l]$ и выполняются неравенства (6.2). Здесь через $C[0, l]$ обозначено банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0, l]} |u(x)|$$

непрерывных на отрезке $[0, l]$ функций, а через $C^1[0, l]$ — банахово пространство непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций с нормой

$$\|u\|_{C^1[0,l]} = \max_{x \in [0, l]} (|u(x)| + |u'(x)|).$$

Задачу (6.1) можно свести к задаче с однородными краевыми условиями. В самом деле, поскольку линейная функция

$$v(x) = \mu_0 + \frac{x}{l} (\mu_l - \mu_0) \quad (8.1)$$

является решением задачи

$$\begin{aligned} (p(x)v')' - q(x)v &= \frac{\mu_l}{l} p'(x) - q(x) \left(\mu_0 + \frac{x}{l} (\mu_l - \mu_0) \right), \quad 0 < x < l, \\ v(0) &= \mu_0, \quad v(l) = \mu_l, \end{aligned} \quad (8.2)$$

то для разности решений $z = y - v$ линейных задач (6.1) и (8.2) получается задача с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} (p(x)z')' - q(x)z &= -f(x) - \frac{\mu_l}{l} p'(x) + q(x)v(x), \quad 0 < x < l, \\ z(0) &= 0, \quad z(l) = 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Поэтому далее вместо задачи (6.1) мы будем рассматривать задачу

$$\begin{aligned} (p(x)y')' - q(x)y &= -f(x), \quad 0 < x < l, \\ y(0) &= 0, \quad y(l) = 0, \end{aligned} \quad (8.4)$$

коэффициенты которой удовлетворяют условиям (6.2).

Обозначим через D_A множество функций, непрерывных на $[0, l]$ вместе со своими производными до второго порядка включительно, и равных нулю при $x = 0$ и $x = l$:

$$D_A = \{u \in C^2[0, l], \quad u(0) = u(l) = 0\}. \quad (8.5)$$

Определим на линейном множестве D_A линейный оператор A по правилу

$$Au(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x), \quad u \in D_A, \quad x \in (0, l). \quad (8.6)$$

Поскольку для всех $u \in D_A$ имеем $Au \in C[0, l] \subset L_2(0, l)$, то можно считать, что оператор A действует из своей области определения D_A в пространство $L_2(0, l)$:

$$A: D_A \rightarrow L_2(0, l). \quad (8.7)$$

Здесь $L_2(0, l)$ — гильбертово пространство функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^l u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L_2(0, l) \quad (8.8)$$

и нормой

$$\|u\|_{L_2(0, l)} = \left(\int_0^l u^2(x)dx \right)^{1/2}, \quad u \in L_2(0, l), \quad (8.9)$$

при этом интегралы понимаются в смысле Лебега [7; 18]. Для функций $u, v \in L_2(0, l)$ неравенство Коши—Буняковского (3.12) принимает вид

$$\left| \int_0^l u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\int_0^l u^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_0^l v^2(x)dx \right)^{1/2}. \quad (8.10)$$

Взяв произвольную функцию $f \in L_2(0, l)$, запишем задачу (8.4) в виде операторного уравнения

$$Ay = f. \quad (8.11)$$

Если для некоторого $f \in L_2(0, l)$ решение уравнения (8.11) принадлежит множеству D_A , то такое решение называется *классическим*. Ранее при исследовании разностных схем мы всегда предполагали существование достаточно гладкого классического решения уравнения (8.11). Однако классические решения существуют не при всех $f \in L_2(0, l)$ (см. задачу 8.1). Но оказывается, что на некотором расширении множества D_A решение уравнения (8.11) существует уже для любой функции $f \in L_2(0, l)$.

8.2. Энергетическое пространство. Поскольку $D_A \subset L_2(0, l)$, то для элементов множества D_A определено скалярное произведение пространства $L_2(0, l)$. Из формулы интегрирования по частям следует, что для любых функций $u, v \in D_A$ выполняется равенство

$$(Au, v) = \int_0^l \left[-(pu')' + qu \right] v dx = \int_0^l [pu'v' + quv] dx = (y, Av),$$

т. е.

$$(Au, v) = (u, Av), \quad (8.12)$$

поэтому оператор A , заданный по формуле (8.6), является *симметрическим* на D_A . Отметим, что ограниченные симметрические операторы будут самосопряженными (такие операторы рассматривались в § 4). Оператор A является неограниченным на D_A (см. задачу 8.2), поэтому из его симметричности самосопряженность не следует [18].

Покажем, что оператор A является положительно определенным на D_A . Для этого нам потребуется

Лемма 8.1. *Для любой функции $u \in C^1[0, l]$, такой что $u(0) = 0$, $u(l) = 0$, справедливы неравенства*

$$\|u\|_{C[0,l]} \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|u_x\|_{L_2(0,l)}, \quad (8.13)$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{l}{2} \|u_x\|_{L_2(0,l)}. \quad (8.14)$$

Доказательство. Из формулы Лейбница следуют равенства

$$u(x) = \int_0^x u_\xi(\xi) d\xi, \quad u(x) = - \int_x^l u_\xi(\xi) d\xi.$$

Возведя эти равенства в квадрат и применив неравенство Коши—Буняковского (8.10), получим

$$\begin{aligned} lu^2(x) &= (l-x)u^2(x) + xu^2(x) = (l-x) \left[\int_0^x u_\xi(\xi) d\xi \right]^2 + x \left[\int_x^l u_\xi(\xi) d\xi \right]^2 \leq \\ &\leq (l-x) \left[\left(\int_0^x d\xi \right)^{1/2} \left(\int_0^x u_\xi^2(\xi) d\xi \right)^{1/2} \right]^2 + x \left[\left(\int_x^l d\xi \right)^{1/2} \left(\int_x^l u_\xi^2(\xi) d\xi \right)^{1/2} \right]^2 = \\ &= (l-x)x \int_0^x u_\xi^2(\xi) d\xi + x(l-x) \int_x^l u_\xi^2(\xi) d\xi = x(l-x) \int_0^l u_x^2(x) dx \leq \frac{l^2}{4} \|u_x\|_{L_2(0,l)}^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$u^2(x) \leq \frac{l}{4} \|u_x\|_{L_2(0,l)}^2.$$

Отсюда следует оценка (8.13). Неравенство (8.14) получается из оценки (8.13), если учесть, что

$$\|u\|_{L_2(0,l)} \leq \sqrt{l} \|u\|_{C[0,l]}, \quad \forall u \in C[0, l]. \quad (8.15)$$

Замечание. Аналогами неравенств (8.13)—(8.15) для сеточных функций являются доказанные ранее неравенства (3.17), (3.21) и (3.2) соответственно.

Используя для произвольной функции $u \in D_A$ оценку (8.14), получаем аналог неравенства (6.16):

$$(Au, u) = \int_0^l (pu_x^2 + qu^2) dx \geq c_1 \int_0^l u_x^2(x) dx \geq \frac{4c_1}{l^2} (u, u),$$

т. е.

$$(Au, u) \geq \delta \|u\|_{L_2(0,l)}^2 \quad (8.16)$$

где $\delta = 4c_1/l^2$.

Таким образом, введенный по формуле (8.6) оператор A является симметрическим и положительно определенным на D_A . Следовательно,

на множестве D_A можно ввести скалярное произведение

$$(u, v)_A = \int_0^l [pu'v' + quv] dx, \quad u, v \in D_A \quad (8.17)$$

и норму

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A}, \quad u \in D_A. \quad (8.18)$$

Линейное множество D_A не является полным в норме (8.18), т. е. не всякая фундаментальная в норме (8.18) последовательность функций из D_A имеет предел, принадлежащий D_A (см. задачу 8.3). Неполное в норме (8.18) множество D_A можно замкнуть в этой норме, присоединив к нему пределы всех фундаментальных последовательностей функций из D_A . В результате такого замыкания получается гильбертово пространство, которое обозначим через H_A . Оно называется *энергетическим пространством* оператора A . Скалярное произведение (8.17) называется *энергетическим скалярным произведением*, а норма (8.18) — *энергетической нормой*.

Поскольку для каждой функции u из D_A выполняется неравенство

$$\|u\|_A^2 \geq \delta \|u\|_{L_2(0,l)}^2, \quad (8.19)$$

то такое же неравенство будет справедливым и для любой предельной функции $u \in H_A$. Отсюда будет следовать [8], что пространство H_A вложено в $L_2(0, l)$, т. е. $H_A \subset L_2(0, l)$, при этом

$$\|u\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|u\|_A = \frac{l}{2\sqrt{c_1}} \|u\|_A, \quad \forall u \in H_A. \quad (8.20)$$

8.3. Пространства Соболева. Пусть $C_0^\infty(0, l)$ — множество бесконечно дифференцируемых в $[0, l]$ финитных функций. Финитность означает, что носитель каждой функции из $C_0^\infty(0, l)$ лежит строго внутри интервала $(0, l)$. Такие функции и все их производные равны нулю при $x = 0$ и $x = l$. Множество $C_0^\infty(0, l)$ плотно в $L_2(0, l)$, т. е. для любой функции $u \in L_2(0, l)$ найдется такая последовательность функций $u_n \in C_0^\infty(0, l)$, что $\|u_n - u\|_{L_2(0,l)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение. Функция $v \in L_2(0, l)$ называется *обобщенной производной порядка m функции $u \in L_2(0, l)$* , если для любых $\varphi \in C_0^\infty(0, l)$ выполняется равенство

$$\int_0^l u(x) \frac{d^m \varphi}{dx^m}(x) dx = (-1)^m \int_0^l v(x) \varphi(x) dx. \quad (8.21)$$

Пространство $W_2^m(0, l)$ (m — натуральное число, $m \geq 1$) определяется как линейное нормированное пространство функций $u \in L_2(0, l)$, имеющих суммируемые с квадратом обобщенные производные до порядка m включительно, с нормой

$$\|u\|_{W_2^m(0,l)} = \left(\sum_{k=0}^m \int_0^l \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx \right)^{1/2}. \quad (8.22)$$

В одномерном случае из общих теорем вложения Соболева [7; 18] получаем следующее утверждение.

Теорема (вложения). *Пространство $W_2^m(0, l)$ вложено в $C[0, l]$, т. е. функции из $W_2^m(0, l)$ непрерывны на $[0, l]$.*

Пространство $W_2^m(0, l)$ получается в результате замыкания по норме (8.22) множества $C^\infty[0, l]$ бесконечно дифференцируемых в $[0, l]$ функций. В частности, так получается пространство $W_2^1(0, l)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)} = \left(\int_0^l [u^2(x) + u_x^2(x)] dx \right)^{1/2}, \quad (8.23)$$

при этом первые обобщенные производные функций из $W_2^1(0, l)$ являются пределами в $L_2(0, l)$ фундаментальных в $L_2(0, l)$ последовательностей первых производных функций из $C^\infty[0, l]$.

Если по норме пространства $W_2^1(0, l)$ замкнуть множество $C_0^\infty(0, l)$, являющееся подмножеством множества $C^\infty[0, l]$, то в результате получится замкнутое относительно нормы (8.23) подпространство $\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$ пространства $W_2^1(0, l)$. Все функции из $\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$ непрерывны. Кроме того, если $u_n \in C_0^\infty(0, l)$, $u \in W_2^1(0, l)$ и $\|u_n - u\|_{W_2^1(0,l)} \rightarrow 0$, то, в силу теоремы вложения, последовательность u_n будет равномерно сходиться к u на отрезке $[0, l]$, поэтому на его концах функция u будет принимать значения, равные нулю:

$$u \in C[0, l], \quad u(0) = u(l) = 0, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l). \quad (8.24)$$

Более того, поскольку для каждой функции $u_n \in C_0^\infty(0, l)$ выполняются

оценки (8.13) и (8.14), то эти же оценки будут справедливы и для предельных функций:

$$\|u\|_{C[0,l]} \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|u_x\|_{L_2(0,l)}, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l); \quad (8.25)$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{l}{2} \|u_x\|_{L_2(0,l)}, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l). \quad (8.26)$$

Из последней оценки следует, что

$$\|u_x\|_{L_2(0,l)} \leq \|u\|_{W_2^1(0,l)} \leq \sqrt{1 + \frac{l^2}{4}} \|u_x\|_{L_2(0,l)}, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l), \quad (8.27)$$

поэтому в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$ можно ввести другую норму, отличную от нормы (8.23), но эквивалентную ей:

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0,l)} = \|u_x\|_{L_2(0,l)} = \left(\int_0^l u_x^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l). \quad (8.28)$$

Тогда оценки (8.25), (8.26) примут вид

$$\|u\|_{C[0,l]} \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0,l)}, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l); \quad (8.29)$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{l}{2} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0,l)}, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l). \quad (8.30)$$

Лемма 8.2. *Энергетическое пространство H_A совпадает с пространством $\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$.*

До к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in D_A$. Тогда из условия $q(x) \geq 0$ следует

$$\|u\|_A^2 = \int_0^l (pu_x^2 + qu^2) dx \geq c_1 \int_0^l u_x^2(x) dx = c_1 \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0,l)}^2.$$

В силу непрерывности на $[0, l]$ функций $p(x)$ и $q(x)$, имеем

$$\max_{x \in [0, l]} p(x) \leq P < \infty, \quad \max_{x \in [0, l]} q(x) \leq Q < \infty, \quad (8.31)$$

поэтому с учетом неравенства (8.14) получим

$$\|u\|_A^2 \leq \left(P + Q \frac{l^2}{4} \right) \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0,l)}^2.$$

Следовательно, для любых u из D_A справедливы оценки

$$\sqrt{c_1} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0,l)} \leq \|u\|_A \leq \sqrt{P + Q \frac{l^2}{4}} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0,l)}, \quad (8.32)$$

т. е. на области определения D_A оператора A энергетическая норма и норма пространства $\overset{\circ}{W}_2^1$ эквивалентны.

Итак, H_A есть результат замыкания множества D_A в энергетической норме, пространство $\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$ получено замыканием множества $C_0^\infty(0, l)$ в норме (8.28). Но поскольку $C_0^\infty(0, l) \subset D_A \subset \overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$, то, замыкая множество D_A по норме (8.28), мы приходим к тому же самому пространству $\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$. Следовательно, пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$ и H_A получаются как результат замыкания одного и того же множества D_A по двум эквивалентным нормам, поэтому эти пространства совпадают: $H_A = \overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$.

8.4. Обобщенное решение задачи. Далее нам потребуются два утверждения, доказательство которых можно найти в работе [18].

Лемма 8.3. Пусть D — плотное в гильбертовом пространстве H множество, т. е. $D \subset H$ и $\bar{D} = H$. Если некоторый элемент $u \in H$ ортогонален к D , то $u = 0$.

Напомним, что два элемента — u и v — называются ортогональными в H , если $(u, v) = 0$. Элемент из H , ортогональный ко всем элементам множества $D \subset H$, называется ортогональным множеству D .

Теорема Рисса (о представлении линейного функционала). Для любого линейного ограниченного функционала $F(v)$ в гильбертовом пространстве H существует единственный элемент $u \in H$, такой, что $F(v) = (u, v)$, $\forall v \in H$.

Определение. Обобщенным решением задачи (8.4) называется функция $y \in H_A$, удовлетворяющая при всех $v \in H_A$ равенству

$$\int_0^l (py'v' + qyv) dx = \int_0^l f(x)v(x)dx. \quad (8.33)$$

Используя определение (8.17) скалярного произведения в H_A , равенство (8.33) можно записать короче:

$$(y, v)_A = (f, v), \quad \forall v \in H_A. \quad (8.34)$$

Теорема 8.1. Для любой функции $f \in L_2(0, l)$ обобщенное решение задачи (8.4) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|y\|_{W_2^1(0,l)} \leq \frac{l}{2c_1} \|f\|_{L_2(0,l)}. \quad (8.35)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим правую часть равенства (8.34) через $F(v)$. Поскольку $H_A \subset L_2(0, l)$, то функционал F определен для любой функции $v \in H_A$. Очевидно, что он является линейным на H_A . Используя неравенство Коши—Буняковского (3.12) и неравенство (8.20), получаем

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L_2(0,l)} \|v\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{l\|f\|_{L_2(0,l)}}{2\sqrt{c_1}} \|v\|_A, \quad \forall v \in H_A, \quad (8.36)$$

т. е. функционал F ограничен на H_A . Тогда по теореме Рисса существует единственный элемент $y \in H_A$, такой, что $F(v) = (y, v)_A$, $\forall v \in H_A$, т. е. существует единственный элемент $y \in H_A$, такой, что выполняется равенство (8.34).

Теперь в неравенстве (8.36) в качестве v возьмем найденное обобщенное решение $y \in H_A$:

$$|F(y)| = \|y\|_A^2 \leq \frac{l}{2\sqrt{c_1}} \|f\|_{L_2(0,l)} \|y\|_A, \quad (8.37)$$

т. е.

$$\|y\|_A \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|f\|_{L_2(0,l)},$$

где $\delta = 4c_1/l^2$. Это неравенство является аналогом полученного ранее неравенства (5.12) для сеточных функций. Оценка (8.35) следует из неравенства (8.37) и левого неравенства (8.32). ■

На основе леммы 8.3 нетрудно доказать (см. [8]), что если для некоторой $f \in L_2(0, l)$ задача (8.4) имеет классическое решение, то оно будет и обобщенным решением этой задачи. И наоборот, если функция $y \in H_A$ является обобщенным решением задачи (8.4) и известно, что $y \in D_A$, то $y(x)$ будет и классическим решением.

Оказывается, что обобщенное решение задачи (8.4) имеет не только первую, но и вторую обобщенную производную.

Теорема 8.2. Для любой функции $f \in L_2(0, l)$ обобщенное решение y задачи (8.4) принадлежит пространству $W_2^2(0, l)$, при этом выполняется оценка

$$\|y''\|_{L_2(0,l)} \leq c \|f\|_{L_2(0,l)}, \quad (8.38)$$

в которой постоянная c не зависит от f .

Доказательство. Покажем, что функция y' имеет первую обобщенную производную. Согласно определению, это означает, что существует функция $v \in L_2(0, l)$, удовлетворяющая тождеству (8.21):

$$\int_0^l y'(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^l v(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, l)$$

или

$$(y', \varphi') = -(v, \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, l). \quad (8.39)$$

Пусть $C_0^1(0, l)$ — множество финитных функций из $C^1[0, l]$. Поскольку $C_0^\infty(0, l) \subset C_0^1(0, l) \subset L_2(0, l)$ и $C_0^\infty(0, l)$ плотно в $L_2(0, l)$, то в определении (8.39) можно заменить множество $C_0^\infty(0, l)$ на другое плотное в $L_2(0, l)$ множество $C_0^1(0, l)$. Более того, ввиду условий $p \in C^1[0, l]$ и $p(x) \geq c_1 > 0$ тождество (8.39) будет эквивалентно следующему:

$$(y', (p\varphi)') = -(v, p\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^1(0, l). \quad (8.40)$$

Рассмотрим функцию

$$v(x) = \frac{1}{p(x)} (q(x)y(x) - p'(x)y'(x) - f(x)). \quad (8.41)$$

Принимая во внимание условия, которым удовлетворяют коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$, а также то, что $y' \in L_2(0, l)$, получаем $v \in L_2(0, l)$. В силу равенства (8.33) и включения $C_0^1(0, l) \subset H_A = W_2^1(0, l)$, левую часть равенства (8.40) можно записать так:

$$(y', (p\varphi)') = (y', p'\varphi) + (y', p\varphi') = (f + y'p' - qy, \varphi) = -(v, p\varphi),$$

т. е. действительно, для функции (8.41) тождество (8.40) выполнено. Поэтому функция y' имеет обобщенную производную, а обобщенное решение $y(x)$ задачи (8.4) принадлежит пространству $W_2^2(0, l)$.

Используя выражение (8.41) для второй обобщенной производной, получаем

$$\|y''\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{1}{c_1} (Q\|y\|_{L_2(0,l)} + P_1\|y'\|_{L_2(0,l)} + \|f\|_{L_2(0,l)}),$$

где $P_1 = \max_{x \in [0, l]} |p'(x)|$. Отсюда и из неравенства (8.30) следует

$$\|y''\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{1}{c_1} \left((Q\frac{l}{2} + P_1)\|y\|_{W_2^1(0,l)} + \|f\|_{L_2(0,l)} \right).$$

И наконец, используя оценку решения (8.35), получаем неравенство (8.38) с постоянной

$$c = \frac{1}{c_1} \left((Q\frac{l}{2} + P_1)\frac{l}{2c_1} + 1 \right). \quad (8.42)$$

8.5. Метод Галеркина. Обобщенное решение y задачи (8.4) принадлежит пространству $H_A = W_2^1(0, l)$. Это пространство является бесконечномерным и сепарабельным [18], следовательно, в нем существует счетный базис, т. е. полная линейно независимая система функций $\varphi_j \in H_A$ ($j = 1, 2, \dots$).

Пусть U_N — конечномерное пространство с базисом $\varphi_j \in H_A$ ($j = 1, \dots, N$). Это пространство является замкнутым подпространством пространства H_A и для любой функции $u \in U_N$ имеет место разложение

$$u(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x), \quad x \in [0, l] \quad (8.43)$$

с вещественными коэффициентами u_j .

Определение. Приближенным обобщенным решением задачи (8.4) называется функция $y_h \in U_N$, такая что

$$(y_h, u)_A = (f, u), \quad \forall u \in U_N. \quad (8.44)$$

Итак, мы вместо поиска обобщенного решения $y \in H_A$ можем перейти к поиску приближенного обобщенного решения, понимаемого в смысле данного определения. В этой замене задач поиска и состоит суть метода Галеркина, поэтому приближенные обобщенные решения будут называться также приближениями по Галеркину.

Легко доказать, что для любой функции $f \in L_2(0, l)$ приближенное решение y_h существует и единственно. Для этого достаточно в доказательстве теоремы 8.1 заменить энергетическое пространство H_A на его замкнутое подпространство U_N .

Лемма 8.4. *Для того чтобы функция y_h была приближенным обобщенным решением задачи (8.4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$(y_h, \varphi_k)_A = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (8.45)$$

Доказательство. Пусть y_h — приближенное решение, т. е. выполнено равенство (8.44). Взяв $u = \varphi_k$, получим равенства (8.45).

Пусть, наоборот, для некоторой функции $y_h \in U_N$ выполнены равенства (8.45), а u — произвольная функция из U_N с представлением (8.43). Тогда

$$(y_h, u)_A = (y_h, \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j)_A = \sum_{j=1}^N u_j (y_h, \varphi_j)_A = \sum_{j=1}^N u_j (f, \varphi_j) = (f, u),$$

т. е. выполнено равенство (8.44). ■

Таким образом, при определении приближенного обобщенного решения можно вместо равенств (8.44) пользоваться эквивалентными равенствами (8.45).

Приближенное решение принадлежит подпространству U_N , поэтому его тоже можно разложить по базису:

$$y_h(x) = \sum_{j=1}^N y_j \varphi_j(x). \quad (8.46)$$

Для определения коэффициентов y_j подставим это разложение в равенства (8.45). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных y_j :

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_k)_A y_j = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (8.47)$$

Квадратная матрица A этой системы с элементами $(\varphi_j, \varphi_k)_A$ симметрична. Кроме того, она невырождена, поскольку является матрицей

Грама для базиса φ_j относительно энергетического скалярного произведения. Следовательно, система (8.47) однозначно разрешима. Отметим, что в методе Галеркина матрицу системы (8.47) называют *матрицей жесткости*.

Для доказательства сходимости приближенного решения к точному обобщенному решению нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 8.5. *Приближенное решение y_h является ортогональной проекцией на U_N относительно скалярного произведения H_A обобщенного решения задачи, т. е.*

$$(y_h - y, u)_A = 0, \quad \forall u \in U_N. \quad (8.48)$$

Доказательство. Пусть $u \in U_N$. Тогда выполняется равенство (8.44). Поскольку $U_N \subset H_A$, то $u \in H_A$, поэтому равенство (8.34) при $v = u$ также имеет место. Вычитая последнее из первого, получаем тождество (8.48). ■

Таким образом, задача о поиске приближенного решения методом Галеркина сводится к задаче о нахождении ортогональной (относительно энергетического скалярного произведения) проекции обобщенного решения из H_A на замкнутое подпространство U_N . Поэтому метод Галеркина относится к группе *проекционных методов*, т. е. методов поиска проекций решений на подпространства.

Лемма 8.6. *Погрешность приближения по Галеркину равна расстоянию от точного решения до подпространства U_N , т. е.*

$$\|y_h - y\|_A = \inf_{u \in U_N} \|u - y\|_A. \quad (8.49)$$

Доказательство. Пусть u — произвольный элемент из U_N . Тогда $y_h - u \in U_N$ и, согласно лемме 8.5, будет верным равенство

$$(y_h - y, y_h - u)_A = 0.$$

Отсюда, используя тождество

$$(y_h - y, y_h - u)_A = (y_h - y, y_h - y)_A + (y_h - y, y - u)_A$$

и применяя неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$\|y_h - y\|_A^2 = (y_h - y, y_h - y)_A \leq \|y_h - y\|_A \|y_h - y\|_A.$$

Следовательно,

$$\|y_h - y\|_A \leq \|u - y\|_A, \quad \forall u \in U_N,$$

а на элементе $u = y_h \in U_N$ достигается равенство. ■

До сих пор мы рассматривали одно подпространство U_N размерности N , в котором и искали приближенное обобщенное решение $y_h \in U_N$. Будут ли решения $y_h(x)$ приближаться к точному решению $y(x)$ при увеличении размерности N ? Согласно лемме 8.6, это будет так, если расстояние между y и подпространствами U_N стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Говоря другими словами, подпространства U_N должны аппроксимировать H_A , должны в пределе давать все пространство H_A . Строгое определение упомянутой аппроксимации формулируется так.

Определение. Бесконечная последовательность замкнутых подпространств U_N предельно плотна в H_A , если $\forall \epsilon > 0$ и $\forall y \in H_A$ найдется номер $N_0 = N_0(\epsilon, y)$ такой, что $\forall N > N_0$ имеет место неравенство

$$\inf_{u \in U_N} \|u - y\|_A < \epsilon. \quad (8.50)$$

Теорема 8.3. Пусть последовательность замкнутых подпространств U_N предельно плотна в H_A . Тогда приближения по Галеркину сходятся в H_A и в $L_2(0, l)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\epsilon > 0$. Пусть $y \in H_A$ — обобщенное решение задачи (8.4). Тогда существует такое N_0 , что при всех $N > N_0$ выполняется неравенство (8.50). Тогда из леммы 8.6 получим

$$\|y_h - y\|_A < \epsilon, \quad (8.51)$$

т. е. приближенные решения сходятся в энергетической норме. Из неравенства (8.20) следует и сходимост в среднеквадратичной норме:

$$\|y_h - y\|_{L_2(0, l)} \leq \frac{l}{2\sqrt{c_1}} \epsilon. \quad (8.52)$$

Пример базиса в H_A . В § 4 была решена задача на собственные значения для оператора $\overset{\circ}{A}$ второй разностной производной. В рассматриваемом сейчас примере такое же обозначение $\overset{\circ}{A}$ будем использовать для оператора, определенного на множестве функций D_A по формуле (8.6) при $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, т. е.

$$\overset{\circ}{A} u(x) = -u'', \quad u \in D_A, \quad x \in (0, l). \quad (8.53)$$

Задача на собственные значения для оператора $\overset{\circ}{A}$ заключается в отыскании всех функций $u \in D_A$, не равных тождественно нулю, и чисел λ таких, что

$$\overset{\circ}{A}u(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0, l). \quad (8.54)$$

Оказывается, что собственные функции оператора $\overset{\circ}{A}$ вычисляются по той же формуле (4.5), что и для разностного оператора:

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.55)$$

а собственные значения

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.56)$$

являются предельными при $h \rightarrow 0$ значениями собственных чисел (4.6).

Легко показать, что система собственных функций $\varphi_k(x)$ является ортонормированной, линейно независимой и полной в $L_2(0, l)$ (см. задачу 8.4). Поэтому каждую функцию $u \in L_2(0, l)$ можно разложить по базису φ_k в ряд (ряд Фурье)

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k(x), \quad (8.57)$$

сходящийся в $L_2(0, l)$, при этом коэффициенты ряда вычисляются по формуле $u_k = (u, \varphi_k)$ и выполняется равенство Парсеваля

$$\|u\|_{L_2(0,l)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2. \quad (8.58)$$

Поскольку $H_A \subset L_2(0, l)$ и множество H_A плотно в $L_2(0, l)$, то система функций φ_k является базисом и в пространстве H_A . Пусть U_N — линейная оболочка первых N собственных функций φ_k ($k = 1, \dots, N$). Тогда приближения по Галеркину ищутся в виде конечного ряда Фурье (8.46), для определения коэффициентов которого нужно решить систему N линейных уравнений (8.47). В общем случае матрица $\mathcal{A}$ этой системы является полнозаполненной, т. е. все ее элементы отличны от нуля.

8.6. Метод конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями. Метод конечных элементов — это метод Галеркина с особым базисом в пространствах U_N . Достоинство МКЭ состоит в том, что матрица A системы (8.47) не является, в отличие от классического метода Галеркина, полнозаполненной, она имеет ленточную структуру, и тем самым для решения системы уравнений (8.47) могут применяться специальные экономичные методы, учитывающие разреженность матрицы жесткости.

В МКЭ при построении базиса пространства U_N используется сетка, покрывающая область решения. Поэтому МКЭ, являясь проекционным методом Галеркина, относится к группе проекционно-сеточных методов.

Итак, пусть $\bar{\Omega}_h$ — неравномерная сетка (7.5), покрывающая отрезок $[0, l]$. Согласно определению, данному в § 7, $\bar{\Omega}_h$ является образом равномерной сетки $\bar{\omega}_h$ с шагом h , покрывающей отрезок $[0, 1]$. При этом отображение (7.1), дающее неравномерную сетку, должно удовлетворять условиям (7.3) и тем самым шаги сетки подчиняются ограничению (7.6).

В качестве базисной функции $\varphi_j(x)$ ($j = 0, \dots, N$) возьмем кусочно-линейную функцию, которая в узле x_j равна единице, а в других узлах — нулю, т. е.

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h_{j-1/2}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1/2}}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & x \leq x_{j-1} \text{ или } x \geq x_{j+1}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (8.59)$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_{1/2}}, & 0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & x \geq x_1; \end{cases} \quad (8.60)$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h_{N-1/2}}, & x_{N-1} \leq x \leq x_N = l, \\ 0, & x \leq x_{N-1}. \end{cases} \quad (8.61)$$

Каждая из этих функций имеет локальный носитель в $[0, l]$. Кроме того, любая φ_j непрерывна на $[0, l]$, дифференцируема почти всюду в $(0, l)$ и имеет односторонние производные почти всюду в $(0, l)$, поэтому [18] функции φ_j имеют обобщенные производные, суммируемые в квадрате,

т. е. $\varphi_j \in W_2^1(0, l) \forall j = 0, \dots, N$, а для $j = 1, \dots, N - 1$ функции $\varphi_j \in W_2^1(0, l) = H_A$.

Легко проверить, что функции φ_j ($j = 0, \dots, N$) линейно независимы. В самом деле, если их линейная комбинация тождественно равна нулю

$$\sum_{j=0}^N c_j \varphi_j(x) \equiv 0, \quad x \in [0, l], \quad (8.62)$$

то и в узлах сетки

$$\sum_{j=0}^N c_j \varphi_j(x_k) = 0, \quad \forall k = 0, \dots, N,$$

а это, в силу равенства

$$\varphi_j(x_k) = \delta_{j,k}, \quad (8.63)$$

означает, что равенство (8.62) возможно только тогда, когда все коэффициенты c_k ($k = 0, \dots, N$) равны нулю.

Далее через U_{N-1} обозначим линейную оболочку функций $\varphi_j(x)$ при $j = 1, \dots, N - 1$. Тогда любая функция $u(x)$ из U_{N-1} принадлежит пространству H_A , непрерывна на $[0, l]$ и может быть представлена в виде линейной комбинации базисных функций

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j \varphi_j(x), \quad x \in [0, l].$$

Используя равенства (8.63), получаем, что $c_j = u(x_j)$. Таким образом,

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N-1} u(x_j) \varphi_j(x), \quad \forall u \in U_{N-1}. \quad (8.64)$$

Отметим, что на каждом элементе $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 0, \dots, N - 1$) (для разностных схем отрезки $[x_j, x_{j+1}]$ назывались *ячейкой сетки*) функция $u \in U_{N-1}$ является линейной

$$u(x) = u(x_j) \varphi_j(x) + u(x_{j+1}) \varphi_{j+1}(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad (8.65)$$

поэтому пространство U_{N-1} называется пространством кусочно-линейных функций. Заметим, что в представлении (8.65) функции φ_0 и φ_N фактически не участвуют, поскольку $u(x_0) = u(x_N) = 0$.

Далее методом Галеркина (8.46) ищется приближенное решение $y_h(x)$, лежащее в замкнутом подпространстве U_{N-1} пространства H_A :

$$y_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j \varphi_j(x). \quad (8.66)$$

Неизвестные коэффициенты разложения (8.66) определяются путем решения системы (8.47), которая в данном случае будет выглядеть так:

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\varphi_j, \varphi_k)_A y_j = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (8.67)$$

Учитывая локальность носителей базисных функций и равенства $y_0 = y_N = 0$, систему уравнений (8.67) можно переписать в следующем виде:

$$b_j y_{j-1} + (\varphi_j, \varphi_j)_A y_j + b_{j+1} y_{j+1} = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (8.68)$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0,$$

где

$$b_j = (\varphi_j, \varphi_{j-1})_A = \frac{1}{h_{j-1/2}^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [-p(x) + q(x)(x - x_{j-1})(x_j - x)] dx; \quad (8.69)$$

$$b_{j+1} = (\varphi_{j+1}, \varphi_j)_A = \frac{1}{h_{j+1/2}^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [-p(x) + q(x)(x - x_j)(x_{j+1} - x)] dx; \quad (8.70)$$

$$(\varphi_j, \varphi_j)_A = \frac{1}{h_{j-1/2}^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [p(x) + q(x)(x - x_{j-1})^2] dx +$$

$$+ \frac{1}{h_{j+1/2}^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [p(x) + q(x)(x_{j+1} - x)^2] dx. \quad (8.71)$$

Отсюда видно, что при использовании в МКЭ кусочно-линейных базисных функций получается трехдиагональная матрица A системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов y_j разложения (8.66). Для решения этой системы можно применить метод прогонки (см. задачу 8.5).

Коэффициенты y_j в разложении (8.66) можно рассматривать как значения сеточной функции $y_{h,j} \in \mathring{U}_h$, где $\mathring{U}_h$ — введенное в § 7 пространство сеточных функций, определенных на неравномерной сетке $\bar{\Omega}_h$ и равных нулю в граничных узлах. Тогда на систему (8.68) можно смотреть как на разностную задачу относительно искомой сеточной функции $y_{h,j}$. Какой разностной схеме соответствует эта задача? Чтобы написать эту схему, перепишем уравнения (8.68)

$$\begin{aligned} b_{j+1}(y_{j+1} - y_j) - b_j(y_j - y_{j-1}) + [(\varphi_j, \varphi_j)_A + b_j + b_{j+1}]y_j = \\ = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (8.72) \\ y_0 = 0, \quad y_N = 0 \end{aligned}$$

и введем новые сеточные функции

$$a_j = -h_{j-1/2}b_j, \quad d_j = \frac{(\varphi_j, \varphi_j)_A + b_j + b_{j+1}}{h_j}, \quad f_j = \frac{(f, \varphi_j)}{h_j}.$$

Тогда вместо задачи (8.72) получим разностную схему на неравномерной сетке:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \left(a_{j+1} \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1/2}} - a_j \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1/2}} \right) - d_j y_j = -f_j, \\ j = 1, \dots, N-1, \quad (8.73) \end{aligned}$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0,$$

где

$$a_j = \frac{1}{h_{j-1/2}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} [p(x) - q(x)(x - x_{j-1})(x_j - x)] dx; \quad (8.74)$$

$$d_j = \frac{1}{h_j} \left[\frac{1}{h_{j-1/2}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} q(x)(x - x_{j-1}) dx + \frac{1}{h_{j+1/2}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} q(x)(x_{j+1} - x) dx \right]; \quad (8.75)$$

$$f_j = \frac{1}{h_j} \left[\frac{1}{h_{j-1/2}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)(x - x_{j-1}) dx + \frac{1}{h_{j+1/2}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)(x_{j+1} - x) dx \right]. \quad (8.76)$$

В частности, если для вычисления интегралов использовать формулу трапеций, то

$$a_j = \frac{p(x_j) + p(x_{j-1})}{2}, \quad d_j = q(x_j), \quad f_j = f(x_j)$$

и схѐма (8.73) совпадает с рассмотренной ранее схемой (7.14) (см. задачу 8.6). Таким же способом, как это было сделано для схемы (7.14), можно доказать, что если функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ являются достаточно гладкими и задача (8.4) имеет достаточно гладкое решение, то разностный оператор схемы (8.73) является самосопряженным, положительно определенным и разностная схема (8.73) на неравномерной сетке сходится в среднем и равномерно со вторым порядком по h (см. задачу 8.7).

Таким образом, для одномерных задач можно считать, что МКЭ — это просто иной способ получения разностных схем, отличный от метода конечных разностей. В многомерном случае это не так, т. е. систему уравнений для нахождения коэффициентов разложения типа (8.66) уже не всегда можно отождествить с некоторой разностной схемой, аппроксимирующей дифференциальную задачу.

8.7. Сходимость. Из теоремы 8.3 следует, что достаточным условием сходимости в H_A приближенных решений, полученных по формуле (8.66), является условие предельной плотности подпространств U_{N-1} в H_A . На самом деле это условие слишком жесткое, поскольку доказательство теоремы 8.3 опирается на то, чтобы последовательность подпространств U_{N-1} была плотна лишь в $H_A \cap W_2^2(0, l)$, а не во всем H_A . Это замечание связано с тем, что нам надо приближать не все функции из H_A , а только обобщенные решения задачи (8.4), которые, согласно теореме 8.2, лежат в $H_A \cap W_2^2(0, l)$.

Вследствие непрерывности функций $u \in H_A$ можно ввести рассмотрение проекции этих функций на подпространства U_{N-1} . Проекции будем обозначать через $(u)_h$, т. е. так же, как и проекции на пространства сеточных функций [19], но, в отличие от последних, функции $(u)_h(x)$ не являются сеточными, они представляют собой кусочно-линейные функции непрерывного аргумента $x \in [0, l]$:

$$(u)_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} u(x_j) \varphi_j(x), \quad \forall u \in H_A. \quad (8.77)$$

Лемма 8.7. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l) \cap W_2^2(0, l)$. Тогда

$$\|(u)_h\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)} \leq \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)}. \quad (8.78)$$

Доказательство. Поскольку $u \in W_2^2(0, l)$, то функция u

и ее первая обобщенная производная u' непрерывны на $[0, l]$. Поэтому в соответствии с представлением (8.65) имеем

$$(u)_h(x) = u(x_j)\varphi_j(x) + u(x_{j+1})\varphi_{j+1}(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}]; \quad (8.79)$$

$$(u)'_h(x) = \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h_{j+1/2}} = \frac{1}{h_{j+1/2}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(\xi) d\xi, \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \quad (8.80)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |(u)'_h(x)|^2 &= \frac{1}{h_{j+1/2}^2} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} u'(\xi) d\xi \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{h_{j+1/2}^2} \left[\left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} |u'(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \right]^2 = \frac{1}{h_{j+1/2}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u'(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |(u)'_h(x)|^2 dx \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u'(x)|^2 dx$$

или

$$\sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |(u)'_h(x)|^2 dx \leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u'(x)|^2 dx,$$

т. е.

$$\int_0^l |(u)'_h(x)|^2 dx \leq \int_0^l |u'(x)|^2 dx,$$

что и требовалось доказать. ■

Оценка (8.78) используется при доказательстве следующего утверждения.

Лемма 8.8. *Последовательность подпространств U_{N-1} предельно плотна в $H_A \cap W_2^2(0, l)$.*

Доказательство. Пусть вначале $u \in C_0^\infty(0, l)$. Используя равенство (8.80), получаем следующее представление для производной от разности $z(x) = u(x) - (u)_h(x)$:

$$z'(x) = \frac{1}{h_{j+1/2}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (u'(x) - u'(\xi)) d\xi = \frac{1}{h_{j+1/2}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\int_{\xi}^x u''(\eta) d\eta \right) d\xi.$$

Отсюда, применив неравенство Коши—Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned}
 |z'(x)|^2 &\leq \frac{1}{h_{j+1/2}^2} \left[\left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\int_{\xi}^x u''(\eta) d\eta \right)^2 d\xi \right)^{1/2} \right]^2 = \\
 &= \frac{1}{h_{j+1/2}^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\int_{\xi}^x u''(\eta) d\eta \right)^2 d\xi \leq \\
 &\leq \frac{1}{h_{j+1/2}^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\left(\int_{\xi}^x d\eta \right)^{1/2} \left(\int_{\xi}^x |u''(\eta)|^2 d\eta \right)^{1/2} \right]^2 d\xi \leq \\
 &\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\int_{\xi}^x |u''(\eta)|^2 d\eta \right) d\xi \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} |u''(\eta)|^2 d\eta \right) d\xi = \\
 &= h_{j+1/2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u''(\eta)|^2 d\eta.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |z'(x)|^2 dx \leq h_{j+1/2}^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u''(x)|^2 dx.$$

Суммируя эти неравенства по всем элементам и учитывая неравенства (7.6) для шагов неравномерной сетки, получаем

$$\sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |z'(x)|^2 dx \leq J_M^2 h^2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u''(x)|^2 dx$$

или

$$\|z\|_{W_2^1(0,l)} \leq J_M h \|u''\|_{L_2(0,l)}. \quad (8.81)$$

Пусть теперь $u \in H_A \cap W_2^2(0, l)$. Тогда существует последовательность функций $u_n \in C_0^\infty(0, l)$, которая будет сходиться к функции u в нормах пространств $W_2^1(0, l)$ и $W_2^2(0, l)$. Используя неравенство треугольника, получаем

$$\|u - (u)_h\|_{W_2^1(0,l)} \leq \|u - u_n\|_{W_2^1(0,l)} + \|u_n - (u_n)_h\|_{W_2^1(0,l)} + \|(u_n - u)_h\|_{W_2^1(0,l)}.$$

Здесь учет оценок (8.78) и (8.81) приводит к неравенству

$$\|u - (u)_h\|_{W_2^1(0,l)} \leq 2\|u - u_n\|_{W_2^1(0,l)} + J_M h \|u_n''\|_{L_2(0,l)}.$$

Если в последнем неравенстве перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, то получаем аналог (8.81):

$$\|u - (u)_h\|_{W_2^1(0,l)} \leq J_M h \|u''\|_{L_2(0,l)}, \quad (8.82)$$

который, согласно неравенству (8.32), можно записать и так:

$$\|u - (u)_h\|_A \leq J_M h \sqrt{P + Q \frac{l^2}{4} \|u''\|_{L_2(0,l)}}, \quad (8.83)$$

при этом $(u)_h \in U_{N-1}$.

Поскольку $h = 1/N$, то из оценки (8.83) следует, что $\forall \varepsilon > 0$ существует номер $N_0 = N_0(\varepsilon, u)$ такой, что $\forall N > N_0$ имеет место неравенство

$$\|u - (u)_h\|_A < \varepsilon,$$

что и означает предельную плотность в $H_A \cap W_2^2(0, l)$ последовательности подпространств U_{N-1} . ■

Теорема 8.4. *Приближенное решение $y_h(x)$, полученное методом конечных элементов, сходится в H_A при $h \rightarrow 0$ к обобщенному решению $y(x)$ задачи (8.4).*

Доказательство. Согласно теореме 8.2, $y \in H_A \cap W_2^2(0, l)$. Из леммы 8.8 следует, что последовательность подпространств U_{N-1} предельно плотна в $H_A \cap W_2^2(0, l)$. Тогда сходимость в H_A будет следовать из теоремы 8.3. ■

Оценим теперь скорость сходимости в среднеквадратичной норме, т. е. оценим через величину h погрешность приближенного решения. Ранее уже говорилось, что если решение дифференциальной задачи (8.4) является достаточно гладким, то разностная схема (8.73) на неравномерной сетке, соответствующая применению МКЭ, сходится в среднем со вторым порядком по h . Оказывается, что такой же порядок точности имеет место и для приближений к обобщенному решению, полученных с помощью МКЭ.

Теорема 8.5. *Для погрешности приближенного решения имеет место оценка*

$$\|y - y_h\|_{L_2(0,l)} \leq (c'c)^2 h^2 \|f\|_{L_2(0,l)}, \quad (8.84)$$

где c — постоянная из теоремы 8.2, заданная формулой (8.42), $c' = J_M \sqrt{P + Ql^2/4}$ — постоянная, не зависящая от h и входящая в правую часть неравенства (8.83).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 8.5, погрешность приближенного решения ортогональна подпространству U_{N-1} , т. е.

$$(y - y_h, u)_A = 0, \quad \forall u \in U_{N-1}. \quad (8.85)$$

Пусть $\bar{y}$ — обобщенное решение уравнения $Ay = \bar{f}$ с правой частью $\bar{f} = y - y_h$, т. е., согласно определению (8.34),

$$(\bar{y}, v)_A = (\bar{f}, v), \quad \forall v \in H_A. \quad (8.86)$$

Поскольку $\bar{f} \in H_A \subset L_2(0, l)$, то из теоремы 8.2 следует, что $\bar{y} \in W_2^2(0, l)$ и

$$\|\bar{y}''\|_{L_2(0,l)} \leq c \|\bar{f}\|_{L_2(0,l)} = c \|y - y_h\|_{L_2(0,l)}. \quad (8.87)$$

В тождестве (8.86) можно взять $v = y - y_h \in H_A$. Тогда

$$(\bar{f}, v) = (y - y_h, y - y_h) = (\bar{y}, y - y_h)_A. \quad (8.88)$$

Принимая во внимание свойство ортогональности (8.85), последнее равенство можно переписать так:

$$\|y - y_h\|_{L_2(0,l)}^2 = (\bar{y}, y - y_h)_A - (u, y - y_h)_A = (\bar{y} - u, y - y_h)_A, \quad (8.89)$$

где u — произвольный элемент подпространства U_{N-1} . Применяя теперь неравенство Коши—Буняковского, будем иметь

$$\|y - y_h\|_{L_2(0,l)}^2 \leq \|\bar{y} - u\|_A \|y - y_h\|_A. \quad (8.90)$$

Оценим каждый из множителей правой части неравенства (8.90). Из леммы 8.6 следует, что

$$\|y - y_h\|_A = \inf_{u \in U_{N-1}} \|y - u\|_A \leq \|y - (y)_h\|_A,$$

где $(y)_h$ — проекция обобщенного решения y на U_{N-1} . Используя оценку (8.83) и неравенство (8.38) из теоремы 8.2, получаем

$$\|y - y_h\|_A \leq c'h \|\bar{y}''\|_{L_2(0,l)} \leq c'ch \|f\|_{L_2(0,l)}. \quad (8.91)$$

Далее, используя оценку (8.83) и неравенство (8.87), будем иметь

$$\|\bar{y} - (\bar{y})_h\|_A \leq c'h \|\bar{y}''\|_{L_2(0,l)} \leq c'ch \|y - y_h\|_{L_2(0,l)}. \quad (8.92)$$

В неравенстве (8.90) выберем $u = (\bar{y})_h$. Тогда с учетом оценок (8.91) и (8.92) получим

$$\|y - y_h\|_{L_2(0,l)}^2 \leq (c'c)^2 h^2 \|y - y_h\|_{L_2(0,l)} \|f\|_{L_2(0,l)},$$

откуда и следует оценка (8.84). ■

8.8. Задача со смешанными краевыми условиями. Разумеется, что МКЭ можно использовать для поиска приближенного решения не только первой краевой задачи. Рассмотрим, к примеру, задачу (6.21) со смешанными краевыми условиями. Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в п. 8.1. Пусть $v(x) = \mu_l + (x-l)\mu_0/p(0)$. Тогда для функции $z(x) = y(x) - v(x)$ получаем задачу с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} (p(x)z')' - q(x)z &= -f(x) - \frac{\mu_0}{p(0)}p'(x) + q(x)v(x), \quad 0 < x < l, \\ p(0)z'(0) &= 0, \quad z(l) = 0. \end{aligned}$$

Найдя решение $z(x)$ этой задачи, мы определим и решение $y(x) = z(x) + v(x)$ задачи (6.21). Таким образом, достаточно решить задачу (6.21) лишь с нулевыми краевыми значениями, т. е. задачу

$$\begin{aligned} (p(x)y')' - q(x)y &= -f(x), \quad 0 < x < l, \\ p(0)y'(0) &= 0, \quad y(l) = 0. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Задачу (8.93) также можно записать в виде операторного уравнения (8.11), в котором оператор A , заданный формулой (8.6), определен на множестве

$$D_A = \{u \in C^2[0, l], \quad p(0)u'(0) = 0, \quad u(l) = 0\}.$$

Пусть $u \in D_A$, $v \in C^1[0, l]$. Используя формулу интегрирования по частям, будем иметь

$$(Au, v) = \int_0^l [pu'v' + quv] dx + pu'v \Big|_{x=0} - pu'v \Big|_{x=l}.$$

Посмотрим, при каких дополнительных условиях на функцию v слагаемые с граничными значениями функций будут равны нулю. В силу условия $p(0)u'(0) = 0$, первое слагаемое $pu'v \Big|_{x=0}$ зануляется естественным образом, без каких-либо дополнительных условий на функцию v . Поэтому краевое условие второго рода $p(0)y'(0) = 0$ задачи (8.93) называется *естественным*. Второе слагаемое $pu'v \Big|_{x=l}$ не зануляется для произвольной функции $v \in C^1[0, l]$. Чтобы оно было равно нулю, надо потребовать выполнения дополнительного условия $v(l) = 0$, т. е. функция v должна подчиняться такому же краевому условию, что и решение задачи (8.93). Поэтому условие первого рода $y(l) = 0$ называется *главным*. Определения естественных и главных условий задачи в общем случае даны в книгах [9; 10].

Как и прежде, скалярное произведение элементов из D_A определяется по формуле (8.17), норма — по формуле (8.18) и множество D_A пополняется по этой норме до полного пространства H_A . Но в данном случае H_A уже не совпадает с пространством Соболева $W_2^1(0, l)$ (лемма 8.2 не верна), пространство H_A является замкнутым подпространством в $W_2^1(0, l)$ [7], при этом функции из H_A непрерывны, удовлетворяют главному краевому условию и не обязаны удовлетворять естественному краевому условию. Это означает, что и базисные функции в методе Галеркина и в МКЭ не обязаны подчиняться естественному краевому условию, но главному условию они должны удовлетворять. Поэтому в случае смешанной задачи (8.93) приближенное решение ищем в виде разложения

$$y_h(x) = \sum_{j=0}^{N-1} y_j \varphi_j(x), \quad (8.94)$$

в которое, в отличие от представления (8.66), входит еще одна базисная функция $\varphi_0(x)$, заданная формулой (8.60). При этом $y_h(l) = 0$, т. е. главное краевое условие удовлетворяется и для приближенного обобщенного решения.

Для определения коэффициентов y_j необходимо решить систему уравнений, аналогичную системе (8.67):

$$\sum_{j=0}^{N-1} (\varphi_j, \varphi_k)_A y_j = (f, \varphi_k), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (8.95)$$

Эту систему можно записать в виде задачи (8.68)

$$\begin{aligned} b_j y_{j-1} + (\varphi_j, \varphi_j)_A y_j + b_{j+1} y_{j+1} &= (f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ (\varphi_0, \varphi_0)_A y_0 + b_1 y_1 &= (f, \varphi_0), \quad y_N = 0, \end{aligned} \quad (8.96)$$

а аналогом разностной схемы (8.73) будет в данном случае такая схема:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \left(a_{j+1} \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1/2}} - a_j \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1/2}} \right) - d_j y_j &= -f_j, \\ j &= 1, \dots, N-1, \\ a_1 \frac{y_1 - y_0}{h_{1/2}} - \left[(\varphi_0, \varphi_0)_A - \frac{a_1}{h_{1/2}} \right] y_0 &= -(f, \varphi_0), \quad y_N = 0, \end{aligned} \quad (8.97)$$

где a_j ($j = 1, \dots, N$) вычисляются по формуле (8.74), d_j и f_j ($j = 1, \dots, N-1$) — по (8.75) и (8.76) соответственно:

$$(\varphi_0, \varphi_0)_A - \frac{a_1}{h_{1/2}} = \frac{1}{h_{1/2}} \int_0^{x_1} q(x)(x_1 - x) dx; \quad (8.98)$$

$$(f, \varphi_0) = \frac{1}{h_{1/2}} \int_0^{x_1} f(x)(x_1 - x) dx. \quad (8.99)$$

Таким образом, как и в случае первой краевой задачи, можно считать, что для смешанной задачи МКЭ тоже сводится (для одномерных задач!) к некоторой разностной схеме для определения сеточной функции, значения которой в узлах сетки совпадают с коэффициентами разложения (8.94). В частности, если для вычисления интегралов, содержащихся в выражениях для коэффициентов схемы (8.97), использовать формулу трапеций, то эта схема совпадет (см. задачу 8.8) с разностной схемой (7.62).

Для приближений (8.94), полученных с помощью МКЭ, выполняется [8] аналог неравенства (8.84), означающий их сходимость в $L_2(0, l)$ со вторым порядком по h к обобщенному решению задачи (8.93).

8.9. Метод конечных элементов с кусочно-квадратичными базисными функциями. Мы познакомились с МКЭ, в котором в качестве базисных выбирались кусочно-линейные функции. На самом деле, МКЭ обладает гораздо большими возможностями, поскольку он позволяет использовать более сложные финитные базисные функции, дающие большую точность приближенного решения. В частности,

базисными функциями могут быть кусочно-полиномиальные функции произвольной степени. В данном пункте мы рассмотрим применение кусочно-квадратичных базисных функций для представления приближенного решения первой краевой задачи (8.4).

Пусть по-прежнему $\bar{\Omega}_h$ — неравномерная сетка с узлами x_j , покрывающая отрезок $[0, l]$. Множество центров ячеек этой сетки обозначим через $\Omega_{h,0}$, т. е.

$$\Omega_{h,0} = \left\{ x_{j+1/2} \mid x_{j+1/2} = x_j + h_{j+1/2}/2, \quad j = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

С каждым узлом $x_j \in \bar{\Omega}_h$ ($j = 1, \dots, N-1$) свяжем функцию

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{2}{h_{j-1/2}^2} (x - x_{j-1})(x - x_{j-1/2}), & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{2}{h_{j+1/2}^2} (x - x_{j+1})(x - x_{j+1/2}), & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & x \leq x_{j-1} \text{ или } x \geq x_{j+1}. \end{cases}$$

Кроме того, введем еще две функции, связанные с граничными узлами сетки:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{2}{h_{1/2}^2} (x - x_1)(x - x_{1/2}), & 0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & x \geq x_1; \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{2}{h_{N-1/2}^2} (x - x_{N-1})(x - x_{N-1/2}), & x_{N-1} \leq x \leq x_N = l, \\ 0, & x \leq x_{N-1}. \end{cases}$$

Эти функции финитны, являются полиномами второй степени на каждой ячейке сетки и удовлетворяют равенствам

$$\varphi_j(x_k) = \delta_{j,k}, \quad x_k \in \bar{\Omega}_h; \quad \varphi_j(x_{k+1/2}) = 0, \quad x_{k+1/2} \in \Omega_{h,0}.$$

Введем также кусочно-квадратичные функции, связанные с центрами ячеек $x_{j+1/2} \in \Omega_{h,0}$ ($j = 0, \dots, N-1$):

$$\varphi_{j+1/2}(x) = \begin{cases} \frac{4}{h_{j+1/2}^2} (x - x_j)(x_{j+1} - x), & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & x \leq x_j \text{ или } x \geq x_{j+1}. \end{cases}$$

Носители этих функций совпадают с одной из ячеек сетки $\bar{\Omega}_h$ и для них выполняются равенства

$$\varphi_{j+1/2}(x_k) = 0, \quad x_k \in \bar{\Omega}_h; \quad \varphi_{j+1/2}(x_{k+1/2}) = \delta_{j,k}, \quad x_{k+1/2} \in \Omega_{h,0}.$$

Легко проверить, что множество, состоящее из функций φ_j ($j = 1, \dots, N-1$) и $\varphi_{j+1/2}$ ($j = 0, \dots, N-1$), является множеством линейно независимых функций, поэтому их можно взять в качестве базиса в конечномерном $(2N-1)$ -мерном линейном пространстве U_{2N-1} , натянутом на эти функции. Приближенное решение задачи, лежащее в подпространстве U_{2N-1} пространства H_A , ищем в виде разложения:

$$y_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j \varphi_j(x) + \sum_{j=0}^{N-1} y_{j+1/2} \varphi_{j+1/2}(x), \quad (8.100)$$

при этом коэффициенты y_j , $y_{j+1/2}$ определяются в результате решения системы (8.45), состоящей теперь из $2N-1$ уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} (\varphi_j, \varphi_k)_A y_j + \sum_{j=0}^{N-1} (\varphi_{j+1/2}, \varphi_k)_A y_{j+1/2} &= (f, \varphi_k), \\ k &= 1, \dots, N-1, \\ \sum_{j=1}^{N-1} (\varphi_j, \varphi_{k+1/2})_A y_j + \sum_{j=0}^{N-1} (\varphi_{j+1/2}, \varphi_{k+1/2})_A y_{j+1/2} &= (f, \varphi_{k+1/2}), \\ k &= 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Ввиду финитности базисных функций и условий $y_0 = y_N = 0$ эту систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\varphi_{j-1}, \varphi_j)_A y_{j-1} + (\varphi_j, \varphi_j)_A y_j + (\varphi_{j+1}, \varphi_j)_A y_{j+1} + (\varphi_{j-1/2}, \varphi_j)_A y_{j-1/2} + \\ + (\varphi_{j+1/2}, \varphi_j)_A y_{j+1/2} = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N-1; \end{aligned} \quad (8.101)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_j, \varphi_{j+1/2})_A y_j + (\varphi_{j+1}, \varphi_{j+1/2})_A y_{j+1} + \\ + (\varphi_{j+1/2}, \varphi_{j+1/2})_A y_{j+1/2} = (f, \varphi_{j+1/2}), \quad j = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (8.102)$$

Отсюда видно, что матрица полученной линейной системы уравнений имеет ленточную структуру. Интересной особенностью этой системы является то, что из нее, пользуясь уравнением (8.102), можно исключить неизвестные $y_{j+1/2}$:

$$y_{j+1/2} = \frac{(f, \varphi_{j+1/2}) - (\varphi_j, \varphi_{j+1/2})_A y_j - (\varphi_{j+1}, \varphi_{j+1/2})_A y_{j+1}}{\|\varphi_{j+1/2}\|_A^2}.$$

После исключения получается система с трехдиагональной матрицей для определения величин y_j ($j = 1, \dots, N-1$):

$$\begin{aligned} a_j y_{j-1} + b_j y_j + c_j y_{j+1} &= d_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= 0, \quad y_N = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_j &= (\varphi_{j-1}, \varphi_j)_A - \frac{(\varphi_j, \varphi_{j-1/2})_A (\varphi_{j-1}, \varphi_{j-1/2})_A}{\|\varphi_{j-1/2}\|_A^2}, \quad j = 1, \dots, N, \\ c_j &= a_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ b_j &= \|\varphi_j\|_A^2 - \frac{(\varphi_j, \varphi_{j-1/2})_A^2}{\|\varphi_{j-1/2}\|_A^2} - \frac{(\varphi_j, \varphi_{j+1/2})_A^2}{\|\varphi_{j+1/2}\|_A^2}, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ d_j &= (f, \varphi_j) - \frac{(\varphi_j, \varphi_{j-1/2})_A}{\|\varphi_{j-1/2}\|_A^2} (f, \varphi_{j-1/2}) - \frac{(\varphi_j, \varphi_{j+1/2})_A}{\|\varphi_{j+1/2}\|_A^2} (f, \varphi_{j+1/2}), \\ &\quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Можно доказать [8; 10], что найденное приближенное решение (8.100) сходится в среднеквадратичной норме с третьим порядком по h к обобщенному решению задачи (8.4), если последнее является достаточно гладким.

ЗАДАЧИ

8.1. Доказать, что уравнение (8.11) не имеет классического решения, если функция $f \in L_2(0, l)$ задана формулой

$$f = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq x \leq l/2, \\ -1, & \text{при } l/2 < x \leq l. \end{cases} \quad (8.103)$$

8.2. Доказать, что оператор A (8.7), (8.6) является неограниченным на D_A .

8.3. Пусть в задаче (8.4) $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ и D_A — область определения (8.5) оператора A , определенного по формуле (8.6). Рассмотрим

последовательность функций

$$u_n(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} - \frac{1}{n}, \\ a_n + b_n \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + c_n \left(x - \frac{l}{2}\right)^4, & \frac{l}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{l}{2} + \frac{1}{n}, \\ l - x, & \frac{l}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq l. \end{cases}$$

Подобрать коэффициенты a_n , b_n и c_n так, чтобы $u_n \in D_A$ для любого $n \geq 1$. Доказать, что последовательность функций $u_n \in D_A$ сходится в энергетической норме к функции

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} < x \leq l, \end{cases} \quad (8.104)$$

т. е. $\|u_n - u\|_A \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, при этом $u \notin D_A$.

8.4. Показать, что собственные функции оператора $\overset{\circ}{A}$, определенного по формуле (8.54), и его собственные значения вычисляются по формулам (8.55) и (8.56). Докажите, что эти собственные функции составляют в совокупности ортонормированную, линейно независимую и полную систему функций в $L_2(0, l)$. Пусть U_N — линейная оболочка первых N собственных функций (8.55). Доказать, что последовательность замкнутых подпространств U_N предельно плотна в H_A .

8.5. Пусть выполнены условия (6.2) и для решения задачи (8.68) используется метод прогонки. Показать, что выполнение условия

$$h_{\max} \leq \sqrt{6c_1/Q}, \quad (8.105)$$

где Q — постоянная из неравенства (8.31), достаточно для корректности и устойчивости метода прогонки.

8.6. Показать, что если для приближенного вычисления интегралов в формулах (8.74)—(8.76) использовать квадратурную формулу трапеций, то схема (8.73) совпадет со схемой (7.14).

8.7. Пусть функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ являются достаточно гладкими и задача (8.4) имеет достаточно гладкое решение. Показать, что разностная схема (8.73) на неравномерной сетке имеет второй порядок точности.

8.8. Показать, что если для вычисления коэффициентов схемы (8.97) используется формула трапеций, то эта схема совпадает с разностной схемой (7.62) на неравномерной сетке.

§ 9. Контрольная работа по теме «Конечно-разностные методы решения краевых задач»

ВАРИАНТ 1

9.v1.1. Для решения краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' + y' \operatorname{tg} x - \frac{y}{\cos^2 x} &= 2 + 4 \left(\cos^2 x - \frac{1}{\cos x} \right), \quad 0 < x < \pi/3, \\ y(0) &= 0, \\ y(\pi/3) &= 1/2. \end{aligned} \quad (9.1)$$

построить схему, равномерно сходящуюся со вторым порядком по h (h — шаг равномерной сетки).

9.v1.2. Для решения задачи

$$\begin{aligned} y''(x) - qy(x) &= - \left[2 \sin(2x) \sin\left(\frac{\pi - 2x}{2}\right) + q \frac{x}{\pi} \right], \quad 0 < x < \pi, \\ y(0) &= 0, \quad y(\pi) = 1, \quad q = \operatorname{const} > 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

используется схема

$$\begin{aligned} y_{xx,j} - qy_j &= - \left[2 \sin(2x_j) \sin\left(\frac{\pi - 2x_j}{2}\right) + q \frac{x_j}{\pi} \right], \\ y_0 &= 0, \quad y_N = 1, \end{aligned} \quad \begin{aligned} j &= 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где $x_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$), $h = \pi/N$. Методом Фурье найти решение разностной краевой задачи (9.3).

9.v1.3. Построить разностную схему второго порядка аппроксимации для решения краевой задачи с условиями первого рода на левой границе и второго рода на правой:

$$\begin{aligned} (p(x)y')' - q(x)y &= -f(x), \quad 0 < x < l, \\ y(0) &= \mu_0, \quad p(l)y'(l) = \mu_l. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Опишите алгоритм метода прогонки для решения полученной разностной задачи.

ВАРИАНТ 2

9.v2.1. Для решения краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' + 2xy' - x^2y &= (x^3 - x^2 + 4x - 2)e^{-x^2}, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 1, \\ y(1) &= 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

построить схему, равномерно сходящуюся со вторым порядком по h (h — шаг равномерной сетки).

9.v2.2. Для решения задачи

$$\begin{aligned} y''(x) - qy(x) &= -\left[q\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) - 2\sin(x)\cos(3x)\right], \quad 0 < x < \pi, \\ y(0) &= 1, \quad y(\pi) = 0, \quad q = \text{const} > 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

используется схема

$$\begin{aligned} y_{xx,j} - qy_j &= -\left[q\left(1 - \frac{x_j}{\pi}\right) - 2\sin(x_j)\cos(3x_j)\right], \\ j &= 1, \dots, N-1, \\ y_0 &= 1, \quad y_N = 0, \end{aligned} \quad (9.7)$$

где $x_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$), $h = \pi/N$. Методом Фурье найти решение разностной краевой задачи (9.7).

9.v2.3. Построить разностную схему второго порядка аппроксимации для решения краевой задачи с условиями первого рода на левой границе и третьего рода на правой:

$$\begin{aligned} (p(x)y')' - q(x)y &= -f(x), \quad 0 < x < l, \\ y(0) &= \mu_0, \\ p(l)y'(l) + \gamma y(l) &= \mu_l, \quad \gamma_l = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Опишите алгоритм метода прогонки для решения полученной разностной задачи.

§ 10. Задания для лабораторной работы 2

В данном параграфе приведены задания к практическим занятиям на ЭВМ по теме «Численные методы решения краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка». Основная цель этих заданий состоит в экспериментальной проверке тех свойств численных методов, которые были установлены теоретически на лекциях и семинарских занятиях, выявлении новых, важных для практики особенностей используемых методов, экспериментальном сравнении методов и экспериментальном определении условий применимости численных методов.

По каждому заданию готовится **краткий отчет** (о содержании отчета см. § 1.13).

***Задание 1.** Методом стрельбы решить первую краевую задачу (1.9) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Выполнить экспериментальное исследование свойств метода стрельбы.*

Логическая схема программы, реализующей метод стрельбы, может состоять из следующих предписаний:

- описать константы, переменные, массивы;
- ввести исходные данные;
- подготовить начальные приближения для параметра α ;
- итерационным методом решить уравнение (1.9);
- вывести результаты расчетов в файлы;
- нарисовать графики.

Поскольку как в настоящем задании, так и в последующих, расчеты придется выполнять с большой точностью, то данные (переменные и массивы переменных), принимающие вещественные значения и задаваемые стандартным типом, могут не обеспечить нужной точности. Поэтому при объявлении типа этих данных необходимо использовать вещественный тип двойной точности.

Исходные данные рекомендуется вводить из файла. Для решения задачи (1.3) методом стрельбы входными данными будут числа a , b , y_a , y_b , N , число ε из условия окончания итераций (1.10) и максимально допустимое количество итераций n_{max} для решения уравнения (1.9).

Например, при решении краевой задачи (9.5) для линейного уравнения второго порядка содержимое файла с исходными данными может быть следующим:

```
0.0d0      ! a — начальная точка интегрирования
1.0d0      ! b — конечная точка интегрирования
1.0d0      ! y_a — заданное краевое значение при x = a
0.0d0      ! y_b — заданное краевое значение при x = b
10         ! N — количество узлов
1.d-6      ! eps — число из условия окончания итераций
100        ! n_max — максимально допустимое количество итераций
```

Удобство ввода исходной информации из файла заключается в том, что при многократном тестировании алгоритма на выбранной задаче Вам не придется каждый раз вводить с клавиатуры все данные: достаточно будет лишь исправлять в файле исходных данных числа N , ε и, возможно, n_{max} .

Рекомендуется оформить в виде отдельных программных модулей функции для вычисления компонент правой части системы уравнений задачи Коши (1.4) и точного решения тестовой задачи. Тогда можно будет легко осуществлять переход от одной тестовой задачи к другой, заменяя несколько операторов лишь в этих модулях и не внося исправлений в другие части программы. Например, тестовая задача (9.5) имеет решение

$$y(x) = (1 - x)e^{-x^2} \quad (10.1)$$

и для нее компоненты вектора f из (1.5) вычисляются по формулам

$$g(x, y, z) = z, \quad f(x, y, z) = -2xz + x^2y + (x^3 - x^2 + 4x - 2)e^{-x^2},$$

поэтому программные модули для вычисления этих функций могут иметь на языке программирования Fortran такой вид:

```
REAL FUNCTION exact*8(x)      ! Точное решение задачи (9.5)
REAL(8) x
exact = (1.d0 - x)*dexp(-x*x)
RETURN
END

REAL FUNCTION g*8(x, y, z)    ! Первая компонента правой части
REAL(8):: x, y, z
g = z
RETURN
END
```

```

REAL FUNCTION f*8(x, y, z)      ! Вторая компонента правой части
REAL(8):: x, y, z
f = - 2.d0*x*z + x*x*y + (x*x*x - x*x + 4.d0*x - 2.d0)* dexp(-x*x)
RETURN
END

```

Предположим теперь, что мы хотим перейти к тестированию алгоритма на другой задаче, например на линейной краевой задаче (9.1), имеющей решение

$$y(x) = 2 \cos x (1 - \cos x). \quad (10.2)$$

Тогда изменениям в программе должны подвергнуться лишь указанные выше модули `exact` и `f`:

```

REAL FUNCTION exact*8(x)      ! Точное решение задачи (9.1)
REAL(8) x
exact = 2.d0*dcos(x)*(1.d0 - dcos(x))
RETURN
END

REAL FUNCTION f*8(x, y, z)      ! Вторая компонента правой части
REAL(8):: x, y, z, z0
z0 = dcos(x)*dcos(x)
f = - z*dtan(x) + y/z0 + 2.d0 + 4.d0*(z0 - 1.d0/dcos(x))
RETURN
END

```

При выполнении этого задания можно использовать любой из методов решения задачи Коши, рассмотренных в работе [19] для скалярного уравнения (1.1.1). И хотя теперь эти методы необходимо применять к задаче (1.4) для системы двух уравнений, расчетные формулы практически остаются неизменными. Например, формулы четырехстадийного метода Рунге—Кутты (1.2.8) принимают для системы (1.4) следующий вид:

$$\begin{aligned}
 y_{j+1} &= y_j + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \\
 k_1 &= hf(x_j, y_j), \quad j = 0, \dots, N-1, \\
 k_2 &= hf(x_j + h/2, y_j + k_1/2), \\
 k_3 &= hf(x_j + h/2, y_j + k_2/2), \\
 k_4 &= hf(x_j + h, y_j + k_3).
 \end{aligned} \quad (10.3)$$

Для ускорения отладки программы ее расчетную часть также желательно оформить в виде отдельных программных модулей. Так, если используется метод (10.3), причем с постоянным шагом $h = (b - a)/N$,

```

! ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
!   x — массив с координатами узлов,  $x(j) = a + jh$ ,  $j = 0, \dots, N$ 
!   N — заданное количество шагов
!   h — заданный шаг интегрирования,  $h = (b - a)/N$ 
!   y_a — заданное начальное значение,  $y_0 = y_a$ 
!   alpha — заданное начальное значение,  $z_0 = \alpha$ 
! ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
!   y, z — массивы значений приближенного решения
!
      INTEGER(4) j
      y(0) = y_a
      z(0) = alpha
      do j = 0, N - 1
        call rk42 (x(j), y(j), z(j), h, x(j + 1), y(j + 1), z(j + 1) )
      end do
      RETURN
      END

```

В методе стрельбы мы вместо решения краевой задачи (1.3) несколько раз решаем задачу Коши (1.4), последовательно подправляя значение параметра α так, чтобы итоговое значение этого параметра приблизительно удовлетворяло бы уравнению (1.9). Некоторые из способов итерационного уточнения значений α указаны в § 1. Для того чтобы воспользоваться этими итерационными методами решения уравнения (1.9), необходимо задать начальные приближения для α . Так, для применения метода деления отрезка пополам необходимо указать отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$, на концах которого функция F принимает значения разных знаков, т. е. указать отрезок, содержащий корень уравнения (1.9). В методе хорд также требуется два начальных приближения α_1 и α_2 . В методе Ньютона достаточно задать одно начальное приближение, но оно должно быть достаточно близким к искомому корню.

Приведем простейший алгоритм для определения отрезка $[\alpha_1, \alpha_2]$, содержащего корень уравнения (1.9).

1. Используя краевые условия задачи (1.3), полагаем

$$\alpha = \frac{y_b - y_a}{b - a}.$$

2. Отступая от α влево и вправо на одну и ту же заданную величину $\delta_\alpha > 0$, получаем начальное приближение $[\alpha_1, \alpha_2]$ к искомому отрезку,

$$\alpha_1 = \alpha - \delta_\alpha, \quad \alpha_2 = \alpha + \delta_\alpha.$$

3. Для полученного отрезка проверяется условие $F(\alpha_1) \cdot F(\alpha_2) < 0$. Если оно выполняется, то процесс поиска отрезка заканчивается. Если

```

REAL FUNCTION f*8(x, y, z)      ! Вторая компонента правой части
REAL(8):: x, y, z
f = - 2.d0*x*z + x*x*y + (x*x*x - x*x + 4.d0*x - 2.d0)* dexp(-x*x)
RETURN
END

```

Предположим теперь, что мы хотим перейти к тестированию алгоритма на другой задаче, например на линейной краевой задаче (9.1), имеющей решение

$$y(x) = 2 \cos x (1 - \cos x). \quad (10.2)$$

Тогда изменениям в программе должны подвергнуться лишь указанные выше модули `exact` и `f`:

```

REAL FUNCTION exact*8(x)      ! Точное решение задачи (9.1)
REAL(8) x
exact = 2.d0*dcos(x)*(1.d0 - dcos(x))
RETURN
END

REAL FUNCTION f*8(x, y, z)      ! Вторая компонента правой части
REAL(8):: x, y, z, z0
z0 = dcos(x)*dcos(x)
f = - z*dtan(x) + y/z0 + 2.d0 + 4.d0*(z0 - 1.d0/dcos(x))
RETURN
END

```

При выполнении этого задания можно использовать любой из методов решения задачи Коши, рассмотренных в работе [19] для скалярного уравнения (1.1.1). И хотя теперь эти методы необходимо применять к задаче (1.4) для системы двух уравнений, расчетные формулы практически остаются неизменными. Например, формулы четырехстадийного метода Рунге—Кутты (1.2.8) принимают для системы (1.4) следующий вид:

$$\begin{aligned}
 y_{j+1} &= y_j + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \\
 k_1 &= hf(x_j, y_j), \quad j = 0, \dots, N-1, \\
 k_2 &= hf(x_j + h/2, y_j + k_1/2), \\
 k_3 &= hf(x_j + h/2, y_j + k_2/2), \\
 k_4 &= hf(x_j + h, y_j + k_3).
 \end{aligned} \quad (10.3)$$

Для ускорения отладки программы ее расчетную часть также желательно оформить в виде отдельных программных модулей. Так, если используется метод (10.3), причем с постоянным шагом $h = (b - a)/N$,

то эти модули, являющиеся аналогами **rk4** и **RunK** из работы [19], могут быть, например, такими:

```
SUBROUTINE rk42 (x-j, y-j, z-j, h, xnew, ynew, znew)
  REAL(8):: x-j, y-j, z-j, h, xnew, ynew, znew
```

НАЗНАЧЕНИЕ:

с помощью четырехстадийного метода Рунге—Кутты по значениям y_j, z_j приближенного решения в точке x_j вычисляются значения y_{new}, z_{new} приближенного решения в следующей точке $x_{new} = x_j + h$.

```
  REAL(8):: hh, xhh, y, z, f11, f21, f31, f41, f12, f22, f32, f42
  hh = 0.5d0*h
  xhh = x-j + hh
  f11 = g(x-j, y-j, z-j)
  f12 = f(x-j, y-j, z-j)
  y = y-j + hh*f11
  z = z-j + hh*f12
  f21 = g(xhh, y, z)
  f22 = f(xhh, y, z)
  y = y-j + hh*f21
  z = z-j + hh*f22
  f31 = g(xhh, y, z)
  f32 = f(xhh, y, z)
  y = y-j + h*f31
  z = z-j + h*f32
  f41 = g(xnew, y, z)
  f42 = f(xnew, y, z)
  z = h/6.d0
  ynew = y-j + z*(f11 + 2.d0*(f21 + f31) + f41)
  znew = z-j + z*(f12 + 2.d0*(f22 + f32) + f42)
  RETURN
END
```

```
SUBROUTINE RunK2(x, y-a, alpha, N, h, y, z)
  INTEGER(4) N
  REAL(8):: y-a, alpha, h, x(0:N), y(0:N), z(0:N)
```

НАЗНАЧЕНИЕ:

подпрограмма **RunK2** предназначена для численного решения с помощью четырехстадийного метода Рунге—Кутты (10.3) задачи Коши (1.4) для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} dy/dx &= g(x, y, z), & a < x \leq b, \\ dz/dx &= f(x, y, z), \\ y(a) &= y_a, \\ z(a) &= \alpha, \end{aligned}$$

```

! ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
! x — массив с координатами узлов,  $x(j) = a + jh$ ,  $j = 0, \dots, N$ 
! N — заданное количество шагов
! h — заданный шаг интегрирования,  $h = (b - a)/N$ 
! y_a — заданное начальное значение,  $y_0 = y_a$ 
! alpha — заданное начальное значение,  $z_0 = \alpha$ 
! ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
! y, z — массивы значений приближенного решения
!

```

```

    INTEGER(4) j
    y(0) = y_a
    z(0) = alpha
    do j = 0, N - 1
        call rk42 (x(j), y(j), z(j), h, x(j + 1), y(j + 1), z(j + 1) )
    end do
    RETURN
END

```

В методе стрельбы мы вместо решения краевой задачи (1.3) несколько раз решаем задачу Коши (1.4), последовательно подправляя значение параметра α так, чтобы итоговое значение этого параметра приблизительно удовлетворяло бы уравнению (1.9). Некоторые из способов итерационного уточнения значений α указаны в § 1. Для того чтобы воспользоваться этими итерационными методами решения уравнения (1.9), необходимо задать начальные приближения для α . Так, для применения метода деления отрезка пополам необходимо указать отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$, на концах которого функция F принимает значения разных знаков, т. е. указать отрезок, содержащий корень уравнения (1.9). В методе хорд также требуется два начальных приближения α_1 и α_2 . В методе Ньютона достаточно задать одно начальное приближение, но оно должно быть достаточно близким к искомому корню.

Приведем простейший алгоритм для определения отрезка $[\alpha_1, \alpha_2]$, содержащего корень уравнения (1.9).

1. Используя краевые условия задачи (1.3), полагаем

$$\alpha = \frac{y_b - y_a}{b - a}.$$

2. Отступая от α влево и вправо на одну и ту же заданную величину $\delta_\alpha > 0$, получаем начальное приближение $[\alpha_1, \alpha_2]$ к искомому отрезку,

$$\alpha_1 = \alpha - \delta_\alpha, \quad \alpha_2 = \alpha + \delta_\alpha.$$

3. Для полученного отрезка проверяется условие $F(\alpha_1) \cdot F(\alpha_2) < 0$. Если оно выполняется, то процесс поиска отрезка заканчивается. Если

указанное условие не выполняется, то продолжаем поиск, переходя на п. 4.

4. Отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$ расширяется по закону геометрической прогрессии с заданным знаменателем $1 + q$, $q > 0$. Для этого проверяется условие $|F(\alpha_1)| < |F(\alpha_2)|$. Если оно выполняется, то левая граница отодвигается влево:

$$\alpha_1 := \alpha_1 - q(\alpha_2 - \alpha_1),$$

а правая остается на месте. В противном случае левая граница не изменяется, а правая смещается вправо:

$$\alpha_2 := \alpha_2 + q(\alpha_2 - \alpha_1).$$

5. Перейти на п. 3.

Таким образом, процесс поиска отрезка, содержащего корень уравнения (1.9), продолжается до тех пор, пока функция F не станет принимать на концах некоторого расширенного отрезка значения разных знаков. Отметим, что свойство (1.6) гарантирует, что такой отрезок существует.

Небольшая модификация описанного алгоритма реализована в приведенной ниже подпрограмме, в которой взяты значения $\delta_\alpha = 1$, $q = 1.5$.

```
SUBROUTINE BOUNDS(x, y, z, y-a, y-b, N, h, alpha-1, alpha-2, fnd)
  INTEGER(4):: N,nstep
  REAL(8):: y-a,y-b,h,alpha-1,alpha-2,delta-alpha,q, x(0:N),y(0:N),z(0:N)
  LOGICAL fnd
  PARAMETER (delta-alpha = 1.d0)
  PARAMETER (q = 1.5d0)
  PARAMETER (nstep = 50)
```

! НАЗНАЧЕНИЕ:

! подпрограмма BOUNDS предназначена для определения отрезка,

! в котором лежит корень уравнения (1.9).

! Начальный отрезок имеет длину $2 \cdot \delta_\alpha \cdot \alpha$. Этот отрезок

! расширяется по закону геометрической прогрессии

! со знаменателем $(1 + q)$ до тех пор, пока функция F из уравнения (1.9)

! не будет иметь значения разных знаков на концах итогового

! отрезка. Расширение осуществляется не более чем nstep раз.

! Если за nstep шагов отрезок не будет найден, то логическая

! переменная fnd примет значение "ложь", иначе — "истина".

! ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

! x — массив с координатами узлов, $x(j) = a + jh$, $j = 0, \dots, N$

! N — количество узлов сетки

```

! h — шаг сетки,  $h = (b - a) / N$ 
! y_a, y_b — заданные краевые значения задачи (1.3)
! y, z — вспомогательные массивы для хранения численного решения
! ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:
! alpha_1, alpha_2 — найденные границы отрезка, содержащего корень
! fnd — признак успешного окончания работы алгоритма
!
INTEGER(4) j
REAL(8):: z1, z2
!
fnd = .true.
z1 = (y_b - y_a) / (x(N) - x(0))
alpha_1 = z1 - delta_alpha
alpha_2 = z1 + delta_alpha
call RunK2(x, y_a, alpha_1, N, h, y, z)
z1 = y(N) - y_b ! вычисляется значение F(alpha_1)
call RunK2(x, y_a, alpha_2, N, h, y, z)
z2 = y(N) - y_b ! вычисляется значение F(alpha_2)
!
do j = 1, nstep
  if (z1*z2 .lt. 0.d0) RETURN
  if (dabs(z1) .lt. dabs(z2)) then
    alpha_1 = alpha_1 - q*(alpha_2 - alpha_1)
    call RunK2(x, y_a, alpha_1, N, h, y, z)
    z1 = y(N) - y_b ! вычисляется значение F(alpha_1)
  else
    alpha_2 = alpha_2 + q*(alpha_2 - alpha_1)
    call RunK2(x, y_a, alpha_2, N, h, x, y)
    z2 = y(N) - y_b ! вычисляется значение F(alpha_2)
  end if
end do
fnd = .false.
RETURN
END

```

Итерационные методы решения уравнения (1.9) желательно также оформить в виде отдельных программных модулей. Некоторые особенности этих методов, связанные с их сходимостью и тонкостями программной реализации, отмечены в работе [21]. В частности, для того чтобы итерационные процессы не «зацикливались», необходимо предусмотреть максимально допустимое число итераций.

Результаты расчетов тестовых задач необходимо записывать в файл. Для возможности анализа сходимости итерационных методов решения уравнения (1.9) необходимо после каждой итерации выводить в файл номер итерации и текущее значение параметра α . После завершения итерационного процесса необходимо записать в файл в виде таблицы результаты, позволяющие оценить точность приближенного решения.

Для этого в каждой строке таблицы можно вывести номер узла j , координату узла x_j , значение y_j численного решения, значение $y(x_j)$ точного решения в j -м узле и погрешность решения в j -м узле $|y(x_j) - y_j|$. Пример такой таблицы приведен в работе [19, с. 111]. В конце выдачи желательно напечатать значение глобальной погрешности

$$\|\varepsilon_h\|_{U_h} \equiv \|y_h - (y)_h\|_{U_h} = \max_{0 \leq j \leq N} |y_j - y(x_j)|. \quad (10.4)$$

Для получения более наглядного представления о работе алгоритмов желательно также представить результаты расчетов в виде графиков. На одном из графиков можно нарисовать точное решение тестовой задачи и численные решения, получаемые в ходе итерационного процесса решения уравнения (1.9) (рис. 8). На другом можно изобразить поведение параметра α или значений $y_h(b, \alpha)$ или значений $F(\alpha)$ в зависимости от номера итерации (рис. 9). Иллюстрации для отчета желательно подготовить с помощью специализированных графических систем (подробнее см. [19, с. 111]).

Метод стрельбы необходимо оттестировать как на линейных, так и на нелинейных задачах. В качестве тестовых можно взять некоторые рассмотренные ранее задачи или какие-либо другие. Линейные задачи (9.5) и (9.1) имеют плавно меняющиеся решения (рис. 3, 4). Задача (1.12) имеет решение (1.13), которое при больших значениях параметра a резко меняется в окрестности начальной точки $x = 0$ (рис. 5).

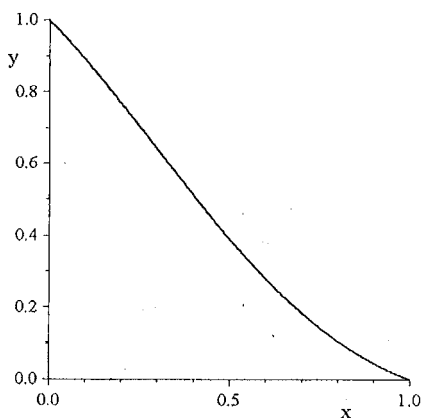


Рис. 3. График решения задачи (9.5)

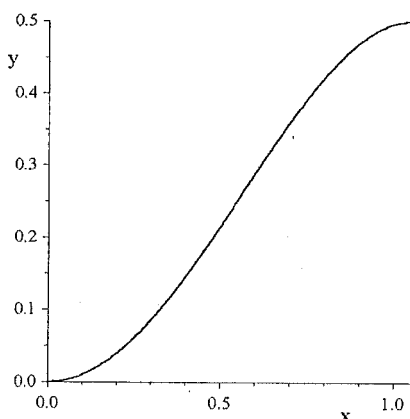


Рис. 4. График решения задачи (9.1)

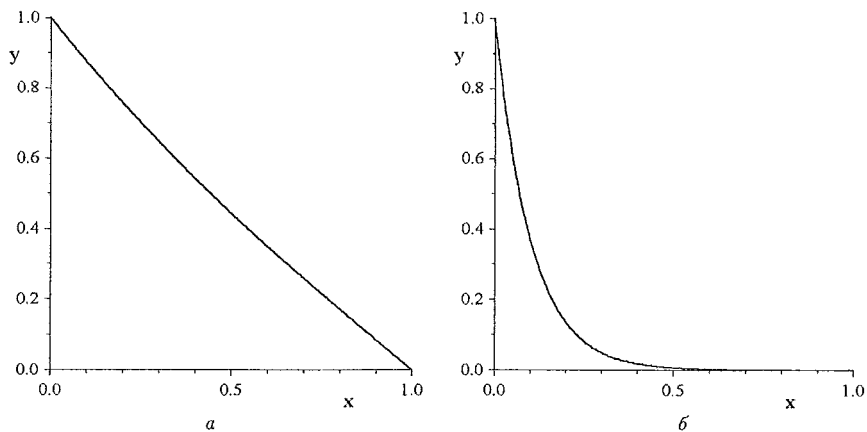


Рис. 5. График решения задачи (1.12): а — $a = 1$; б — $a = 10$

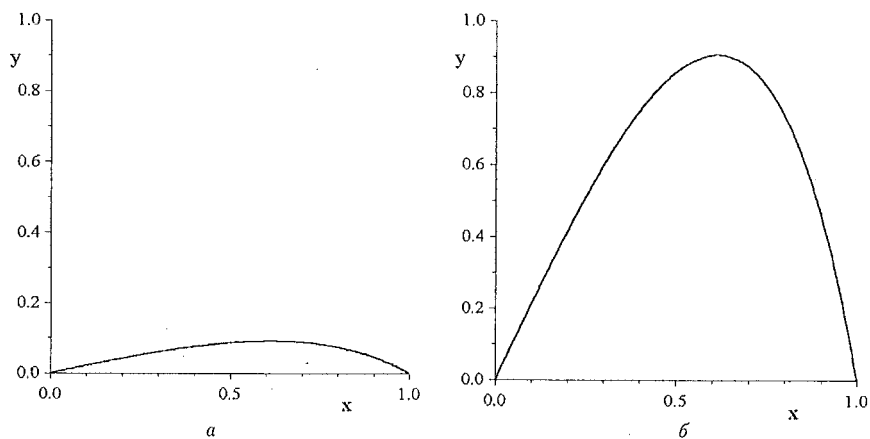


Рис. 6. График решения задачи (2.58): а — $a = 1$; б — $a = 10$

Краевая задача

$$\begin{aligned}
 y'' + y' \operatorname{tg} x + \frac{2y}{y - 2 \cos x} &= 2 + 4 \left(\cos^2 x - \frac{1}{\cos x} \right), \quad 0 < x < \pi/3, \\
 y(0) &= 0, \\
 y(\pi/3) &= 1/2
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

для нелинейного уравнения имеет решение (10.2). Нелинейная задача (2.58) имеет решение

$$y(x) = a \left(x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x \right), \quad (10.6)$$

изображенное на рис. 6. Нелинейная задача (2.59) имеет решение (1.13). Нелинейная задача (2.60) имеет решение

$$y(x) = \ln(1 + ax), \quad (10.7)$$

изображенное на рис. 7.

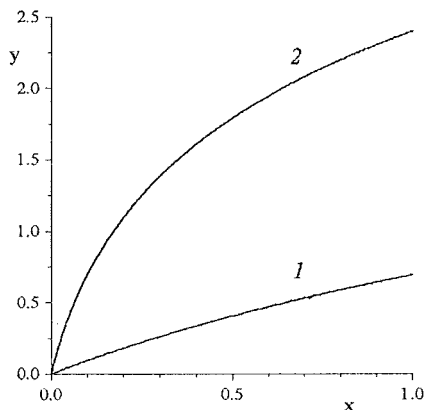


Рис. 7. График решения задачи (2.60): кривая 1 соответствует $a = 1$, кривая 2 — $a = 10$

1.1. Экспериментально исследуйте влияние значения ϵ из условия окончания итераций (1.10) на точность численного решения и на количество итераций метода бисекции, применяемого для решения уравнения (1.9).

В качестве примера в табл. 1 приведены результаты таких экспериментов на тестовой задаче (9.1) для трех расчетных сеток. С одной стороны, видно, что для грубых значений ϵ точность численного решения невозможно повысить даже измельчая сетку. С другой стороны, брать слишком малые значения ϵ также нецелесообразно, так как это может привести к существенному росту вычислительных затрат. Например, при $N = 160$ не следует брать ϵ меньшим, чем 10^{-10} , поскольку для меньших значений ϵ точность численного решения уже не улучшается, а итераций требуется больше.

Таблица 1

Результаты экспериментов по определению влияния ϵ на точность численного решения $\|\varepsilon_h\|_{U_h}$ и на количество итераций n .

Задача (9.1). Метод Рунге—Кутты (10.3)

ϵ	N = 10		N = 160		N = 1280	
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	n	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	n	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	n
10^{-1}	$0.250 \cdot 10^{-1}$	2	$0.250 \cdot 10^{-1}$	2	$0.250 \cdot 10^{-1}$	2
10^{-2}	$0.968 \cdot 10^{-2}$	6	$0.968 \cdot 10^{-2}$	6	$0.968 \cdot 10^{-2}$	6
10^{-3}	$0.992 \cdot 10^{-3}$	8	$0.825 \cdot 10^{-4}$	11	$0.825 \cdot 10^{-4}$	11
10^{-4}	$0.856 \cdot 10^{-4}$	11	$0.825 \cdot 10^{-4}$	11	$0.825 \cdot 10^{-4}$	11
10^{-5}	$0.120 \cdot 10^{-5}$	17	$0.227 \cdot 10^{-5}$	17	$0.227 \cdot 10^{-5}$	17
10^{-6}	$0.120 \cdot 10^{-5}$	17	$0.156 \cdot 10^{-6}$	20	$0.156 \cdot 10^{-6}$	20
10^{-7}	$0.172 \cdot 10^{-5}$	23	$0.231 \cdot 10^{-7}$	24	$0.232 \cdot 10^{-7}$	24
10^{-8}	$0.177 \cdot 10^{-5}$	25	$0.998 \cdot 10^{-8}$	26	$0.992 \cdot 10^{-8}$	26
10^{-9}	$0.178 \cdot 10^{-5}$	28	$0.367 \cdot 10^{-9}$	30	$0.430 \cdot 10^{-9}$	30
10^{-10}	$0.178 \cdot 10^{-5}$	33	$0.209 \cdot 10^{-10}$	34	$0.871 \cdot 10^{-10}$	32
10^{-12}	$0.178 \cdot 10^{-5}$	40	$0.293 \cdot 10^{-10}$	39	$0.166 \cdot 10^{-12}$	40
10^{-14}	$0.178 \cdot 10^{-5}$	45	$0.297 \cdot 10^{-10}$	45	$0.605 \cdot 10^{-14}$	46
10^{-16}	$0.178 \cdot 10^{-5}$	>100	$0.297 \cdot 10^{-10}$	50	$0.783 \cdot 10^{-14}$	52
10^{-18}	$0.178 \cdot 10^{-5}$	>100	$0.297 \cdot 10^{-10}$	>100	$0.783 \cdot 10^{-14}$	52

В последних строках этой таблицы обозначение > 100 указывает на то, что метод бисекции не сошелся за 100 итераций. Такое максимально допустимое число итераций было предусмотрено в экспериментах в подпрограмме решения уравнения (1.9) методом бисекции.

1.2. Сравнить эффективность различных методов решения уравнения (1.9).

В качестве основания для такого сравнения могли бы послужить результаты численного решения тестовых задач методом стрельбы с использованием итерационных методов, описанных в § 1. Пусть, например, для решения вспомогательной задачи Коши (1.4) опять используется метод Рунге—Кутты (10.3), начальный отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$ для метода бисекции определяется по описанному выше алгоритму (с помощью подпрограммы BOUNDS с параметрами $\delta_\alpha = 1$, $q = 1.5$), эти же значения α_1 и α_2 берутся в качестве первых двух начальных приближений в методе хорд, значение α_1 выбирается в качестве начального приближения для метода Ньютона и, кроме того, в последнем методе полагается $\delta = (\alpha_n - \alpha_{n-1})/10$. Тогда для погрешности численного решения $\|\varepsilon_h\|_{U_h}$ и требуемого количества итераций n получаются результаты, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетов методом стрельбы с использованием различных итерационных методов решения уравнения (1.9).

$$N = 40, \varepsilon = 10^{-10}$$

Тестовая задача	α^*	$[\alpha_1, \alpha_2]$	n			$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$
			Метод бисекции	Метод хорд	Метод Ньютона	
(9.5)	-1	$[-2, 0]$	32	1	1	$0.249 \cdot 10^{-9}$
(9.1)	0	$[-0.523, 1.478]$	34	1	1	$0.756 \cdot 10^{-8}$
(1.12), $a = 10$	-10	$[-12.5, 0]$	46	1	1	$0.148 \cdot 10^{-4}$
(10.5)	0	$[-0.523, 1.478]$	34	7	4	$0.852 \cdot 10^{-8}$
(2.58), $a = 1$	0.214	$[-1, 1]$	34	5	5	$0.437 \cdot 10^{-7}$
(2.58), $a = 10$	2.14	$[-1, 4]$	41	∞	∞	$0.107 \cdot 10^{-4}$
(2.59), $a = 1$	-1.313	$[-2, 0]$	34	6	4	$0.146 \cdot 10^{-8}$
(2.59), $a = 2$	-2.075	$[-5, 0]$	35	∞	∞	$0.999 \cdot 10^{-7}$

В этой таблице во второй колонке приведено значение α^* параметра α , при котором для отмеченных в первой колонке тестовых примеров решение задачи Коши (1.4) совпадает с решением краевой задачи (1.3), т. е. такое α^* , что выполняется равенство (1.8). В третьей колонке указан начальный отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$, содержащий корень уравнения (1.9) и автоматически определяемый в модуле BOUNDS. В последней колонке приведена погрешность численного решения. Интересно отметить, что она практически не зависит от используемого для решения уравнения (1.9) итерационного метода. Символ " ∞ " означает, что для задачи (2.58) при $a = 10$ и задачи (2.59) при $a = 2$ методы хорд и Ньютона расходятся. Для этих задач в последней колонке приведена погрешность численного решения при использовании метода бисекции. Из таблицы видно, что если методы хорд и Ньютона сходятся, то они сходятся быстрее, чем метод деления отрезка пополам. На рис. 8 показано, как приближается численное решение к точному в итерационном методе бисекции, на рис. 9 для этого же метода показана последовательность значений $F(\alpha_n)$.

? Объясните, почему для линейных задач метод хорд и метод Ньютона сходятся за одну итерацию.

У к а з а н и е. Покажите, что если для решения линейной задачи используется линейная разностная схема, то уравнение (1.9) является линейным относительно α . См. также решение задачи 1.1. Экспериментально указанное свойство подтверждается, например, данными табл. 2 для линейных задач (9.5), (9.1), (1.12).

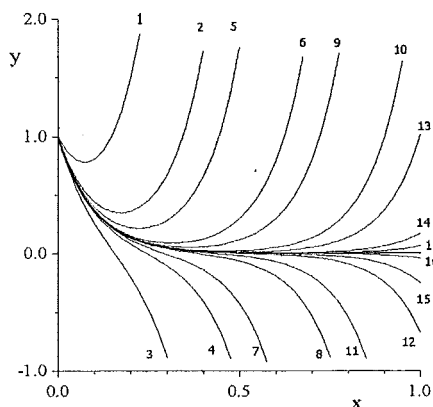


Рис. 8. Сходимость решений задачи Коши к решению краевой задачи (1.12); $a = 10$

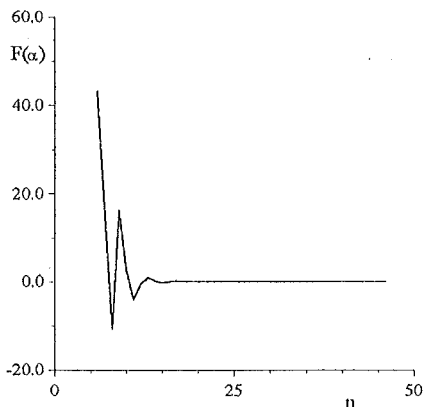


Рис. 9. Поведение функции $F(\alpha)$ в ходе итерационного процесса метода деления отрезка пополам; тестовая задача (1.12); $a = 10$

1.3. Для нелинейных тестовых задач выполните экспериментальное исследование сходимости итерационных методов, задавая более точное начальное приближение для отрезка $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Из табл. 2 видно, что на тестовых задачах (2.58) при $a = 10$ и (2.59) при $a = 2$ метод хорд и метод Ньютона не сходились. Причина этого может быть в том, что начальный отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$ был задан грубо. Для этих методов необходимо задавать довольно точное начальное приближение. Оно может быть уточнено различными способами. Например, можно несколько итераций выполнить с помощью метода бисекции и полученный отрезок взять в качестве начального для указанных итерационных методов. Можно поэкспериментировать, варьируя параметрами q и δ_α из подпрограммы BOUNDS. А можно поступить совсем просто: отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$, полученный с помощью подпрограммы BOUNDS, разделить на некоторое число N_α равных отрезков и затем выбрать из них тот, на котором функция $F(\alpha)$ меняет знак. Результаты расчетов с использованием последней процедуры определения начального приближения сведены в табл. 3. Видно, что для улучшенного начального приближения методы хорд и Неймана сходятся.

Результаты расчетов методом стрельбы с использованием
улучшенного начального приближения. $N = 40$, $\varepsilon = 10^{-10}$, $N_\alpha = 20$

Тестовая задача	α^*	$[\alpha_1, \alpha_2]$	n			$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$
			Метод бисекции	Метод хорд	Метод Ньютона	
(2.58), $\alpha = 10$	2.14	[2, 2.25]	37	12	12	$0.107 \cdot 10^{-4}$
(2.59), $\alpha = 2$	-2.075	[-2.25, -2]	31	5	4	$0.999 \cdot 10^{-7}$

Задание 2. Сравнить экспериментально точность схем (2.2) и (2.44) для первой краевой задачи (2.1).

В § 2 было доказано, что схема (2.2) имеет второй порядок точности. В задаче 2.3 была построена схема (2.44) четвертого порядка точности. Цель настоящего задания состоит в экспериментальном определении порядка точности этих схем. Для этого следует использовать тестовые задачи с известными аналитическими решениями. Решения разностных задач можно отыскивать методом прогонки.

В качестве тестовых можно взять линейные задачи типа (2.1), в которой функция $q(x)$ удовлетворяет условию задачи 2.3:

$$0 < m \leq q(x) \leq M < \infty.$$

Например, функция (10.1) является решением задачи

$$\begin{aligned} y'' - (1 + x^2)y &= (-3x^3 + 3x^2 + 7x - 3)e^{-x^2}, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 1, \\ y(1) &= 0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Задача

$$\begin{aligned} y'' - \frac{y}{\cos^2 x} &= 8 \cos^2 x - 2 \cos x - \frac{2}{\cos x} - 2, \quad 0 < x < \pi/3, \\ y(0) &= 0, \\ y(\pi/3) &= 0.5 \end{aligned} \quad (10.9)$$

имеет решение (10.2). Функция (10.6) является решением следующей линейной задачи:

$$\begin{aligned} y'' - \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{y}{\cos^2 \frac{\pi}{4} x} &= -\frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{ax}{\cos^2 \frac{\pi}{4} x}, \quad 0 < x < 1, \quad a = \text{const} > 0, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 0. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Как и в работе [19], обозначим через $\varepsilon_h = y_h - (y)_h$ погрешность численного решения, полученного с шагом h , а через $\varepsilon_{h/2}$ — с уменьшенным вдвое шагом $h/2$ и пусть

$$k = \frac{\|\varepsilon_{h/2}\|_{U_h}}{\|\varepsilon_h\|_{U_h}}, \quad (10.11)$$

где $\|\cdot\|_{U_h}$ — локальная норма (10.4). Величина $1/k$ показывает, во сколько раз уменьшается локальная норма погрешности численного решения на сетке с шагом $h/2$ по сравнению с величиной погрешности на сетке с шагом h . Для схемы второго порядка точности величина $1/k$ должна при достаточно малых значениях шага сетки быть близкой к 4, а для схемы четвертого порядка — к 16. Отметим, что при слишком малых шагах h погрешность численного решения может уже не уменьшаться в ожидаемое число раз, более того, она может даже, начиная с некоторого достаточно малого значения h возрастать вследствие роста вычислительной погрешности, обусловленной влиянием ошибок округлений [20].

Итак, для экспериментальной проверки порядка точности выбранных схем необходимо провести для каждой тестовой задачи расчеты на последовательности измельчающихся вдвое сеток и проанализировать поведение величины $1/k$. В качестве примера в табл. 4 приведены результаты экспериментов для тестовой задачи (10.8). Эти эксперименты подтверждают, что схемы (2.2) и (2.44) действительно имеют порядок точности, предсказываемый теорией.

Таблица 4

Результаты экспериментов по определению точности разностных схем (2.2) и (2.44). Задача (10.8)

N	Схема (2.44)		Схема (2.2)	
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$
10	$0.678 \cdot 10^{-5}$	—	$0.107 \cdot 10^{-2}$	—
20	$0.422 \cdot 10^{-6}$	16.1	$0.269 \cdot 10^{-3}$	4.0
40	$0.264 \cdot 10^{-7}$	16.0	$0.671 \cdot 10^{-4}$	4.0
80	$0.165 \cdot 10^{-8}$	16.0	$0.168 \cdot 10^{-4}$	4.0
160	$0.103 \cdot 10^{-9}$	16.0	$0.419 \cdot 10^{-5}$	4.0
320	$0.644 \cdot 10^{-11}$	16.0	$0.105 \cdot 10^{-5}$	4.0
640	$0.403 \cdot 10^{-12}$	16.0	$0.262 \cdot 10^{-6}$	4.0
1280	$0.113 \cdot 10^{-11}$	0.4	$0.655 \cdot 10^{-7}$	4.0

? Объясните, почему погрешность численного решения, полученного с помощью схемы (2.44) на мелкой сетке с 1280 узлами, оказалась больше, чем на более грубой сетке с 640 узлами.

Задание 3. Доказать экспериментально, что схема (2.17) сходится равномерно со вторым порядком.

В теореме 2.2 доказано, что если коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ первой краевой задачи (2.18) для дифференциального уравнения второго порядка являются достаточно гладкими функциями и удовлетворяют условиям (2.19), (2.20), то схема (2.17) сходится равномерно со вторым порядком по h . Цель настоящего задания — подтвердить этот факт экспериментально на тестовых задачах, для которых выполнены условия теоремы 2.2. В качестве таких задач можно взять, например, задачи (1.12), (9.1), (9.5).

Для решения разностной задачи (2.17) используйте метод прогонки. Вычисление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$, а также функции $f(x)$ из правой части дифференциального уравнения рекомендуется выполнять с помощью созданных для этого отдельных программных модулей. Результаты экспериментов оформите в виде таблицы, аналогичной табл. 1—3 из работы [19].

Задание 4. Экспериментально исследуйте свойства разностных схем, аппроксимирующих задачи для стационарного уравнения теплопроводности

$$(p(x)y')' - q(x)y = -f(x), \quad 0 < x < l \quad (10.12)$$

с краевыми условиями смешанного типа.

В § 6 для первой краевой задачи (6.1) была построена схема (6.4), для которой при выполнении условий (6.2) имеет место как сходимость в среднем, так и равномерная сходимость со вторым порядком. В смешанной краевой задаче для уравнения (10.12) на левой границе $x = 0$ может быть задано условие первого рода

$$y(0) = \mu_0; \quad (10.13)$$

второго рода

$$p(0)y'(0) = \mu_0 \quad (10.14)$$

или третьего рода

$$p(0)y'(0) - \gamma_0 y(0) = \mu_0, \quad \gamma_0 = \text{const} > 0. \quad (10.15)$$

На правой границе $x = l$ также может быть задано условие первого

$$y(l) = \mu_i; \quad (10.16)$$

второго

$$p(l)y'(l) = \mu_i \quad (10.17)$$

или третьего рода

$$p(l)y'(l) + \gamma_i y(l) = \mu_i, \quad \gamma_i = \text{const} > 0. \quad (10.18)$$

Разностные уравнения (6.9) и (6.11) аппроксимируют дифференциальное уравнение (10.12) со вторым порядком по h . Для того чтобы разностная схема для смешанной задачи имела второй порядок аппроксимации, необходимо аппроксимировать со вторым порядком не только дифференциальное уравнение, но и краевые условия (10.14), (10.15), (10.17) и (10.18). Подходящая аппроксимация для них приведена в ответах к задачам 6.2, 6.3, 9.v1.3 и 9.v2.3.

4.1. Пусть для решения смешанной краевой задачи для уравнения (10.12) используется разностная схема второго порядка аппроксимации с разностным уравнением (6.11). Экспериментально докажете, что используемая схема имеет второй порядок точности.

Эксперименты необходимо провести на тестовых краевых задачах для уравнения (10.12). Эти тестовые задачи будут отличаться друг от друга не только функциями $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$, но и различными комбинациями краевых условий в точках $x = 0$ и $x = l$. Каждую из разностных задач естественно решать методом прогонки. Поскольку формулы этого метода зависят от типа краевых условий, а программу необходимо разработать так, чтобы смена краевых условий не приводила к изменению ее текста, то отсюда с необходимостью следует, что алгоритм метода прогонки должен быть оформлен в виде отдельного программного модуля, в котором должны быть предусмотрены все типы краевых условий.

Напомним алгоритм метода прогонки для решения рассматриваемой разностной задачи при произвольных смешанных краевых условиях. Вначале разностная задача переписывается в виде системы уравнений (2.45). Коэффициенты этой системы при $j = 1, \dots, N - 1$ вычисляются по формулам (12.41), (12.42). Коэффициенты c_0 , b_0 , d_0 зависят от типа краевого условия, заданного при $x = 0$. Для условия первого рода (10.13) они вычисляются по формуле (12.47), второго рода (10.14) — по

формуле (12.43). Если при $x = 0$ задано условие третьего рода (10.15), то коэффициенты b_0 и d_0 вычисляются по формуле (12.43), а c_0 — по (12.45). Если при $x = l$ задано условие первого рода, то коэффициенты a_N , c_N , d_N следует вычислять по формуле (12.44). Формула (12.48) используется для подсчета этих коэффициентов при задании на правой границе условия второго рода (10.17). И наконец, для условия (10.18) третьего рода a_N и d_N вычисляются по формуле (12.48), а по формуле (12.50) вычисляется коэффициент c_N .

Решение системы уравнений (2.45) находим методом прогонки. Для этого вначале по формулам (2.48) вычисляем прогоночные коэффициенты ξ_0 и η_0 , а затем по формулам (2.38) — остальные коэффициенты ξ_j и η_j ($j = 1, \dots, N-1$). Далее по формулам (2.47) и (2.46) определяем y_j , $j = N, N-1, \dots, 0$.

Алгоритм метода прогонки можно реализовать в виде двух программных модулей, первый из которых служит для вычисления коэффициентов системы (2.45), а второй — для вычисления прогоночных коэффициентов и решения. Ниже приведен один из возможных вариантов текста этих модулей.

```
SUBROUTINE abcd(tip_0, tip_1, mu_0, mu_1, gamma_0, gamma_1,
=      x, h, N, a, b, c, d)
  INTEGER(4):: N, tip_0, tip_1
  REAL(8):: mu_0, mu_1, gamma_0, gamma_1, h,
=      x(0:N), a(0:N), b(0:N), c(0:N), d(0:N)
```

НАЗНАЧЕНИЕ:

подпрограмма abcd предназначена для вычисления коэффициентов системы (2.45).

ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

x — массив с координатами узлов сетки, $x(j) = jh$, $j = 0, \dots, N$
 N — количество узлов сетки
 h — шаг сетки, $h = l/N$
 $tip_0 = 1, 2, 3$ — тип краевого условия на левой границе $x = 0$
 $tip_1 = 1, 2, 3$ — тип краевого условия на правой границе $x = l$
 mu_0 — правая часть краевых условий (10.13)—(10.15)
 mu_1 — правая часть краевых условий (10.16)—(10.18)
 $gamma_0$ — коэффициент в краевом условии третьего рода (10.15)
 $gamma_1$ — коэффициент в краевом условии третьего рода (10.18)

ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

a, b, c, d — массивы со значениями коэффициентов системы (2.45)

```
  INTEGER(4) j
```

```
  do j = 1, N - 1
```

```

      a(j) = (p(x(j)) + p(x(j - 1)))/(2.d0*h*h)      ! формула (12.41)
      b(j) = (p(x(j)) + p(x(j + 1)))/(2.d0*h*h)      ! формула (12.41)
      c(j) = a(j) + b(j) + q(x(j))                  ! формула (12.42)
      d(j) = -f(x(j))                                ! формула (12.42)
    end do

!
    if (tip_0 .eq. 1) then                            ! формула (12.47):
      b(0) = 0.d0
      c(0) = 1.d0
      d(0) = - mu_0
    else                                              ! формула (12.43):
      b(0) = (p(x(0)) + p(x(1)))/(2.d0*h)
      c(0) = b(0) + 0.5d0*h*q(x(0))
      d(0) = mu_0 - 0.5d0*h*f(x(0))
      if (tip_0 .eq. 3) c(0) = c(0) + gamma_0        ! формула (12.45)
    end if

!
    if (tip_1 .eq. 1) then                            ! формула (12.44):
      a(N) = 0.d0
      c(N) = 1.d0
      d(N) = - mu_1
    else                                              ! формула (12.48):
      a(N) = - (p(x(N)) + p(x(N - 1)))/(2.d0*h)
      c(N) = a(N) - 0.5d0*h*q(x(N))
      d(N) = mu_1 + 0.5d0*h*f(x(N))
      if (tip_1 .eq. 3) c(N) = c(N) - gamma_1        ! формула (12.50)
    end if
    RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE PROG_123(a, b, c, d, xi, eta, y, N)
  INTEGER(4) N
  REAL(8):: a(0:N), b(0:N), c(0:N), d(0:N), xi(0:N), eta(0:N), y(0:N)

```

! НАЗНАЧЕНИЕ:

! в подпрограмме PROG_123 реализован алгоритм метода прогонки
 ! решения системы (2.45),
 ! xi, eta — прогоночные коэффициенты

! ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

! a, b, c, d — массивы со значениями коэффициентов системы (2.45)
 ! N — количество узлов равномерной сетки

! ВЫХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ:

! y — массив со значениями решения системы (2.45)

```

  INTEGER(4) j
  REAL(8) z

```

```

  xi(0) = b(0)/c(0)                                ! формулы (2.48)
  eta(0) = - d(0)/c(0)

```

```

do j = 1, N - 1                                     ! формулы (2.38):
  z = c(j) - a(j)*xi(j - 1)
  xi(j) = b(j)/z
  eta(j) = (a(j)*eta(j - 1) - d(j))/z
end do
!
z = c(N) - a(N)*xi(N - 1)
y(N) = (a(N)*eta(N - 1) - d(N))/z                 ! формула (2.47)
!
do j = N - 1, 0, -1
  y(j) = xi(j)*y(j + 1) + eta(j)                   ! формула (2.46)
end do
RETURN
END

```

Для облегчения анализа результаты экспериментов необходимо свести в таблицы. К примеру, в табл. 5 приведены результаты расчетов трех смешанных краевых задач. В первой задаче

$$\begin{aligned}
 & ((1+x)y')' - 2(2x^3 + 2x^2 - 2x + 1)y = \\
 & = (4x^2 + 8x - 5)e^{-x^2}, \quad 0 < x < 1, \\
 & y(0) = 1, \\
 & p(1)y'(1) = -2/e, \quad p(x) = 1 + x,
 \end{aligned} \tag{10.19}$$

имеющей решение (10.1), на левой границе задано условие первого рода, а на правой — второго. В задачах

$$\begin{aligned}
 & \left(y' \cos^2 \frac{\pi}{4} x\right)' - y \cdot \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} x = \\
 & = -a \frac{\pi}{4} \left(\sin \frac{\pi}{2} x + x \cos \frac{\pi}{4} x - \sin \frac{\pi}{4} x\right), \quad 0 < x < 1, \\
 & p(0)y'(0) = a(1 - \frac{\pi}{4}), \quad p(x) = \cos^2 \frac{\pi}{4} x, \\
 & y(1) = 0
 \end{aligned} \tag{10.20}$$

и

$$\begin{aligned}
 & \left(y' \cos^2 \frac{\pi}{4} x\right)' - y \cdot \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} x = \\
 & = -a \frac{\pi}{4} \left(\sin \frac{\pi}{2} x + x \cos \frac{\pi}{4} x - \sin \frac{\pi}{4} x\right), \quad 0 < x < 1, \\
 & p(0)y'(0) - \gamma_0 y(0) = a(1 - \frac{\pi}{4}), \quad p(x) = \cos^2 \frac{\pi}{4} x, \\
 & y(1) = 0
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

на левой границе заданы условия второго и третьего рода соответственно, а на правой — первого. Последние две задачи имеют решение (10.6).

Отметим, что для выписанных тестовых задач условия (6.2) выполняются. Из табл. 5 видно, что используемые схемы второго порядка аппроксимации сходятся в равномерной норме со вторым порядком по h .

Таблица 5

Результаты экспериментов по определению точности разностных схем со смешанными краевыми условиями

N	Задача (10.19)		Задача (10.20) $a = 10$		Задача (10.21) $a = 10, \gamma_0 = 10$	
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}^{-2}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}^{-1}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}^{-2}$	$1/k$
10	$0.134 \cdot 10^{-2}$	—	$0.207 \cdot 10^{-1}$	—	$0.199 \cdot 10^{-2}$	—
20	$0.334 \cdot 10^{-3}$	4.0	$0.517 \cdot 10^{-2}$	4.0	$0.497 \cdot 10^{-3}$	4.0
40	$0.835 \cdot 10^{-4}$	4.0	$0.129 \cdot 10^{-2}$	4.0	$0.124 \cdot 10^{-3}$	4.0
80	$0.209 \cdot 10^{-4}$	4.0	$0.323 \cdot 10^{-3}$	4.0	$0.311 \cdot 10^{-4}$	4.0
160	$0.522 \cdot 10^{-5}$	4.0	$0.806 \cdot 10^{-4}$	4.0	$0.775 \cdot 10^{-5}$	4.0
320	$0.130 \cdot 10^{-5}$	4.0	$0.199 \cdot 10^{-4}$	4.1	$0.192 \cdot 10^{-5}$	4.0
640	$0.326 \cdot 10^{-6}$	4.0	$0.477 \cdot 10^{-5}$	4.2	$0.459 \cdot 10^{-6}$	4.2
1280	$0.815 \cdot 10^{-7}$	4.0	$0.984 \cdot 10^{-6}$	4.8	$0.437 \cdot 10^{-6}$	1.1

? Объясните, почему используемая схема не сходится при $q(x) \equiv 0$ для краевых задач с условиями второго рода на обоих концах отрезка $[0, l]$. Испытайте свою программу на задаче

$$\begin{aligned} y'' &= 12(1-x)^2, \quad 0 < x < 1, \\ y'(0) &= -4, \\ y'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (10.22)$$

предварительно найдя ее точное решение.

4.2. Пусть для решения смешанной краевой задачи для уравнения (10.12) используется разностная схема с разностным уравнением (6.11), в которой, в отличие от предыдущего задания, краевые условия второго и третьего рода аппроксимируются только с первым порядком. Экспериментально исследуйте порядок точности такой схемы.

В предыдущем задании использовалась разностная схема, в которой как разностное уравнение, так и разностные краевые условия имели второй порядок аппроксимации. Теперь мы рассматриваем схему с тем же разностным уравнением второго порядка аппроксимации, но с другими разностными краевыми условиями:

$$p_0 \cdot \frac{y_1 - y_0}{h} = \mu_0; \quad (10.23)$$

$$p_0 \cdot \frac{y_1 - y_0}{h} - \gamma_0 y_0 = \mu_0; \quad (10.24)$$

$$p_N \cdot \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \mu_i; \quad (10.25)$$

$$p_N \cdot \frac{y_N - y_{N-1}}{h} + \gamma y_N = \mu_i. \quad (10.26)$$

Нетрудно показать, что эти разностные условия аппроксимируют условия (10.14), (10.15), (10.17), (10.18) дифференциальной задачи с первым порядком по h (см., например, задачу 4.4).

Таблица 6

Результаты экспериментов по определению точности разностных схем с аппроксимацией первого порядка краевых условий второго рода

N	Задача (10.19)		Задача (10.27)		Задача (10.20) $a = 10$	
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$
10	$0.617 \cdot 10^{-1}$	—	$0.530 \cdot 10^{-1}$	—	$0.150 \cdot 10^{-1}$	—
20	$0.295 \cdot 10^{-1}$	2.1	$0.267 \cdot 10^{-1}$	2.0	$0.369 \cdot 10^{-2}$	4.1
40	$0.144 \cdot 10^{-1}$	2.0	$0.134 \cdot 10^{-1}$	2.0	$0.913 \cdot 10^{-3}$	4.0
80	$0.712 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.672 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.227 \cdot 10^{-3}$	4.0
160	$0.354 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.336 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.564 \cdot 10^{-4}$	4.0
320	$0.176 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.168 \cdot 10^{-2}$	2.0	$0.139 \cdot 10^{-4}$	4.1
640	$0.880 \cdot 10^{-3}$	2.0	$0.841 \cdot 10^{-3}$	2.0	$0.326 \cdot 10^{-5}$	4.3
1280	$0.440 \cdot 10^{-3}$	2.0	$0.421 \cdot 10^{-3}$	2.0	$0.605 \cdot 10^{-6}$	5.4

В табл. 6 приведены результаты расчетов с использованием разностных краевых условий (10.23)—(10.26) для трех тестовых задач: задачи (10.19), задачи с условием второго рода на левой границе и первого — на правой:

$$\begin{aligned} & ((1+x)y')' - 2(2x^3 + 2x^2 - 2x + 1)y = \\ & = (4x^2 + 8x - 5)e^{-x^2}, \quad 0 < x < 1, \\ & p(0)y'(1) = -1, \quad p(x) = 1 + x, \\ & y(1) = 0, \end{aligned} \quad (10.27)$$

имеющей решение (10.1), и задачи (10.20). Видно, что для первых двух тестовых задач порядок точности действительно понизился до первого. Парадоксальными кажутся результаты экспериментов для третьей тестовой задачи.

? Объясните, почему используемая схема первого порядка аппроксимации проявляет себя на тестовой задаче (10.20) как схема второго порядка точности. (См. задачу 4.4 и указание к ее решению.)

Задание 5. Экспериментально исследуйте свойства метода последовательных приближений для решения разностной задачи (2.27), которая аппроксимирует нелинейную дифференциальную задачу (2.26) с краевыми условиями первого рода.

Входные данные для программы, реализующей метод последовательных приближений (2.32), будут такими же, как при использовании метода стрельбы (см. Задание 1). Только в данном случае число ε участвует в другом условии окончания итераций

$$r^n < \varepsilon, \quad (10.28)$$

где

$$r^n = \|y_h^n - y_h^{n-1}\|_{U_h} = \max_{0 \leq j \leq N} |y_j^n - y_j^{n-1}|, \quad (10.29)$$

где y_h^n — n -е итерационное приближение, т. е. решение задачи (2.32), y_h^0 — начальное итерационное приближение, задаваемое формулой (2.33).

5.1. Экспериментально исследуйте, как влияет выбор значения ε из условия окончания итераций (10.28) на точность численного решения и на количество итераций метода последовательных приближений (2.32).

В качестве тестовых возьмите нелинейные задачи с известными решениями, например (2.58)—(2.60). Результаты экспериментов оформите в виде таблицы, аналогичной табл. 1.

5.2. Экспериментально докажите, что схема (2.27) сходится равномерно со вторым порядком.

Для доказательства достаточно провести эксперименты на последовательности измельчающихся вдвое сеток, при этом следует учитывать, что при измельчении сетки необходимо уменьшать и значения ε из условия окончания итераций (10.28). Результаты экспериментов оформите в виде таблицы наподобие табл. 5.

5.3. Найдите экспериментально область значений параметра a , в которой метод последовательных приближений для нелинейных задач (2.58)—(2.60) сходится.

В экспериментах, зафиксировав число узлов N и число ε из условия окончания итераций (10.28), проведите ряд расчетов, увеличивая каждый раз значение параметра a . Установите, что с ростом a растет и количество итераций, необходимых для выполнения условия (10.28). Найдите первое целое значение a , при котором метод последовательных приближений перестает сходиться.

В качестве примера в табл. 7 приведены результаты экспериментов на тестовой задаче (2.60) при $\epsilon = 10^{-10}$. Максимально допустимое число итераций задавалось равным 1 000. Случаи, когда процесс сходился (т. е. в ходе итераций отклонение (10.29) уменьшалось), но не успевал сойтись за 1 000 шагов, обозначены в таблице как > 1000 . Символ " ∞ " применен в таблице для обозначения расходимости итерационного процесса (т. е. когда в ходе итераций отклонение (10.29) увеличивалось). Из результатов экспериментов можно сделать вывод, что метод последовательных приближений для рассматриваемой задачи сходится при $a \leq 9$ и расходится при $a \geq 11$, что качественно соответствует замечанию, сделанному в конце § 2, а также теоретическим оценкам для a , полученным при решении задачи 2.10.

Таблица 7

Результаты экспериментов по определению значений параметра a , для которых метод последовательных приближений сходится

a	$N = 40$		$N = 160$	
	$\ \epsilon_h\ u_h$	n	$\ \epsilon_h\ u_h$	n
1	$0.949 \cdot 10^{-5}$	8	$0.594 \cdot 10^{-6}$	8
2	$0.642 \cdot 10^{-4}$	12	$0.402 \cdot 10^{-5}$	12
3	$0.175 \cdot 10^{-3}$	17	$0.110 \cdot 10^{-4}$	17
4	$0.345 \cdot 10^{-3}$	22	$0.217 \cdot 10^{-4}$	22
5	$0.573 \cdot 10^{-3}$	30	$0.361 \cdot 10^{-4}$	30
6	$0.862 \cdot 10^{-3}$	41	$0.544 \cdot 10^{-4}$	41
7	$0.121 \cdot 10^{-2}$	59	$0.767 \cdot 10^{-4}$	59
8	$0.162 \cdot 10^{-2}$	94	$0.103 \cdot 10^{-3}$	93
9	$0.210 \cdot 10^{-2}$	190	$0.133 \cdot 10^{-3}$	189
10	—	>1000	—	>1000
11	—	∞	—	∞

5.4. Экспериментально исследуйте, как влияет выбор начального приближения на количество итераций метода последовательных приближений при решении нелинейных задач.

Эксперименты можно провести, например, с начальными приближениями, задаваемыми по формуле

$$y_j^{0,\lambda} = \lambda y(x_j) + (1 - \lambda)y_j^0, \quad j = 0, \dots, N. \quad (10.30)$$

Здесь y_j^0 — начальное итерационное приближение, задаваемое формулой (2.33), $y(x)$ — точное решение тестовой задачи, λ — варьируемый параметр, $0 \leq \lambda \leq 1$. При $\lambda = 0$ начальное приближение (10.30) совпадает с функцией (2.33), а при $\lambda = 1$ — с точным решением $y(x)$.

§ 11. Задания для лабораторной работы 3

В данном параграфе приведены задания к практическим занятиям на ЭВМ по теме «Численные методы на неравномерных сетках решения краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка». Основная цель этих заданий состоит в экспериментальной проверке тех свойств численных методов, которые были установлены теоретически на лекциях и семинарских занятиях, а также в экспериментальном сравнении методов расчета на равномерных и неравномерных сетках.

По каждому заданию готовится **краткий отчет** (о содержании отчета см. § 1.13).

Задание 1. Экспериментально исследовать, как влияет выбор неравномерной сетки для схемы (7.14) на величину и распределение погрешности численного решения задачи (7.29).

В этом задании сетка строится по формуле (7.4) на основе заданного заранее отображения (7.1), т. е. вначале строится сетка, а затем на ней ищется численное решение.

Для задачи (7.29) схема (7.14) записывается в более простом виде (7.33), однако в программе следует реализовать алгоритм расчета сразу по общей схеме (7.14). Тогда после небольшой модификации эту программу можно будет использовать и для выполнения других заданий. Как и в предыдущей лабораторной работе, вычисление коэффициентов $p(x)$, $q(x)$ и правой части $f(x)$ следует реализовать в виде отдельных программных модулей. Это облегчит переход от одной тестовой задачи к другой. Для задачи (7.29) в этих модулях достаточно положить $p(x) = 1$, $q(x) = a^2$, $f(x) = 0$.

Для выполнения задания необходимо задать некоторое отображение $x = x(\xi)$ и с его помощью построить сетку. Например, можно провести расчеты на сетках, узлы которых определяются на основе отображения (7.59).

В качестве примера в табл. 8 приведены результаты расчетов на равномерной сетке и на неравномерных сетках, построенных с помощью отображений (7.43), (7.48), (7.51), являющихся частными случаями отображения (7.59). В этой таблице $\varepsilon_h = y_h - (y)_h$ — погрешность численного решения, полученного на сетке с N узлами, $\|\varepsilon_h\|_{U_h}$ — локальная норма (10.4) погрешности, величина k вычисляется по формуле (10.11),

в которой $\varepsilon_{\frac{h}{2}}$ — погрешность численного решения на сетке с $2N$ узлами. Величина $1/k$ показывает, во сколько раз уменьшается локальная норма погрешности численного решения при удвоении числа узлов.

Расчеты подтверждают, что схема (7.14) на равномерной сетке имеет второй порядок сходимости, а на неравномерной сетке (7.43) — четвертый, т. е. действительно порядок точности, предсказываемый теорией, в этих экспериментах подтверждается. Также подтверждается предположение, высказанное в § 7, о том, что схема (7.33) на неравномерной сетке (7.48), обеспечивающей постоянство на всем отрезке $[0, l]$ главного члена погрешности аппроксимации, будет несколько точнее схемы на равномерной сетке. И наконец, эксперименты с управляющей функцией $w = y_x^2(x)$ подтверждают предположение о том, что чрезмерное сгущение сетки приводит к потере точности, схема на такой неравномерной сетке дает большую погрешность, чем схема на равномерной сетке.

Таблица 8

Результаты экспериментов по определению порядка точности
схемы (7.14). Задача (7.29). $l = 1$, $a = 10$

N	$w = 1$			$w = (y_x(x))^{1/4}$			$w = (y_x(x))^{1/2}$			$w = y_x^2(x)$		
	$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$		$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$		$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$		$\ \varepsilon_h\ _{U_h}$	$1/k$	
10	$0.141 \cdot 10^{-1}$	—		$0.146 \cdot 10^{-4}$	—		$0.456 \cdot 10^{-2}$	—		0.193	—	
20	$0.375 \cdot 10^{-2}$	3.8		$0.883 \cdot 10^{-6}$	16.5		$0.101 \cdot 10^{-2}$	4.5		0.137	1.4	
40	$0.953 \cdot 10^{-3}$	3.9		$0.548 \cdot 10^{-7}$	16.1		$0.220 \cdot 10^{-3}$	4.6		$0.960 \cdot 10^{-1}$	1.4	
80	$0.239 \cdot 10^{-3}$	4.0		$0.342 \cdot 10^{-8}$	16.0		$0.512 \cdot 10^{-4}$	4.3		$0.668 \cdot 10^{-1}$	1.4	
160	$0.599 \cdot 10^{-4}$	4.0		$0.214 \cdot 10^{-9}$	16.0		$0.127 \cdot 10^{-4}$	4.0		$0.463 \cdot 10^{-1}$	1.4	
320	$0.150 \cdot 10^{-4}$	4.0		$0.136 \cdot 10^{-10}$	15.7		$0.317 \cdot 10^{-5}$	4.0		$0.319 \cdot 10^{-1}$	1.5	
640	$0.374 \cdot 10^{-5}$	4.0		$0.836 \cdot 10^{-12}$	16.3		$0.792 \cdot 10^{-6}$	4.0		$0.220 \cdot 10^{-1}$	1.5	
1280	$0.936 \cdot 10^{-6}$	4.0		$0.112 \cdot 10^{-12}$	7.5		$0.198 \cdot 10^{-6}$	4.0		$0.151 \cdot 10^{-1}$	1.5	

Отметим, что, как явствует из табл. 8, для получения на равномерной сетке такой же точности, как на неравномерной (7.43) при $N = 20$, потребуется не менее 1 280 узлов равномерной сетки, т. е. в 64 раза больше, что говорит о явном преимуществе адаптивных сеток.

Для исследования распределения погрешности $\varepsilon(x_j) = |y_j - y(x_j)|$ численного решения задачи (7.29) необходимо, как и в предыдущих лабораторных работах, записать в файл таблицу результатов расчета. Например, можно для каждого узла записать его номер, координату, значение y_j численного решения, значение $y(x_j)$ точного решения в j -м узле и погрешность решения в j -м узле $\varepsilon(x_j)$ (пример выдачи результатов приведен в работе [19, с. 111]). Для наглядности можно нарисовать

и графики погрешности. В качестве примера на рис. 10 показаны графики погрешности, получаемой на той или иной сетке. Они подтверждают предположение, сделанное в п. 7.4 о том, что в подобластях, где велика погрешность аппроксимации, будет большой и погрешность численного решения. Более того, постоянство главного члена погрешности аппроксимации приводит и к почти постоянным во всей области значениям погрешности численного решения (кривая 3 на рис. 10).

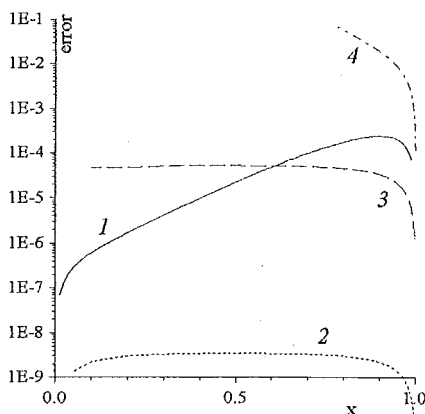


Рис. 10. Поведение погрешности $\varepsilon(x_j)$ численного решения задачи (7.29) при использовании различных сеток: $l = 1$, $a = 10$, $N = 80$; кривая 1 соответствует управляющей функции $w \equiv 1$, кривая 2 — (7.46), 3 — (7.47), 4 — (7.50)

Задание 2. Методом адаптивных сеток решить первую краевую задачу (6.1) для стационарного уравнения теплопроводности. Подобрать управляющую функцию так, чтобы результаты расчетов на неравномерной сетке были точнее, чем на равномерной с тем же числом узлов.

В методе адаптивных сеток, описанном в п. 7.6, сетка не строится заранее, она вычисляется вместе с решением в ходе итерационного процесса согласно заданной управляющей функции $w(x)$.

Настоящее задание распадается на два подзадания. Вначале надо провести тестирование алгоритма на задачах (6.1) с постоянными коэффициентами $p(x) \equiv 1$, $q(x) = \text{const}$. Для таких задач погрешность аппроксимации определяется формулой (7.36), поэтому можно предположить, что оптимальная сетка получится для управляющей функции ви-

да (7.46). Это было так при решении задачи (7.29). Однако такая функция оказывается непригодной, например, при решении задачи (1.12), поскольку для ее решения $y'(x) < 0$. При решении задачи (1.12) с помощью схемы (7.14) оптимальная сетка (на которой порядок аппроксимации равен четырем вместо двух на равномерной) получается при выборе управляющей функции (7.61) (см. задачу 7.6). Но такую управляющую функцию нельзя брать при решении задачи

$$\begin{aligned} y'' - a^2 y &= 0, & 0 < x < 1, & \quad a = \text{const} > 0, \\ y(0) &= 1, \quad y(1) = 1, \end{aligned} \quad (11.1)$$

точное решение которой (рис. 11)

$$y(x) = \frac{\text{ch}[a(x - 1/2)]}{\text{ch}(a/2)} \quad (11.2)$$

имеет производную, равную нулю во внутренней точке $x = 1/2$, чего не допускает метод эквираспределения (7.44): управляющая функция должна быть строго положительной внутри отрезка $[0, 1]$.

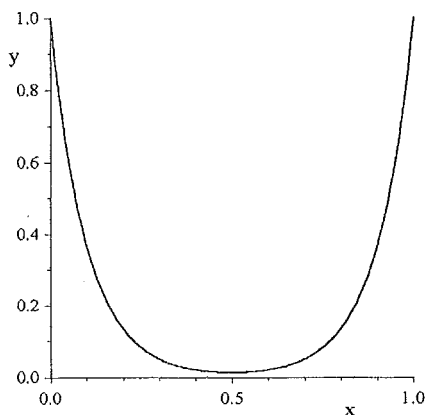


Рис. 11. График решения задачи (11.1) при $a = 10$

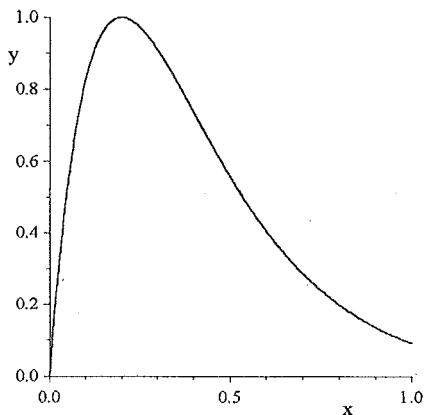


Рис. 12. График решения задачи (11.3) при $a = 5$

По этой же причине управляющие функции (7.46) и (7.61) не подходят при решении задачи

$$\begin{aligned} y'' - a^2 y &= -2a^2 e^{1-ax}, & 0 < x < 1, & \quad a = \text{const} > 1, \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = ae^{1-a} \end{aligned} \quad (11.3)$$

с точным решением

$$y(x) = axe^{1-ax}, \quad (11.4)$$

показанным на рис. 12. В силу сказанного, управляющую функцию будем брать в виде (7.53), а ее сеточный аналог — в виде (7.57).

2.1. Методом адаптивных сеток с управляющей функцией (7.53) решить задачи (7.29), (1.12), (11.1), (11.3). Показать, что для всех этих задач наиболее точные результаты получаются на неравномерных сетках, соответствующих управляющей функции с параметром β_1 , близким к 0.25.

Входные данные для программы будут такими же, как в задании 5 из § 10, в частности, необходимо задавать число ϵ из условия окончания итераций (7.58) и максимально допустимое количество итераций n_{max} для метода последовательных приближений (см. п. 7.6).

В качестве примера в табл. 9 приведены результаты численных экспериментов на тестовой задаче (7.29). Здесь $\|\epsilon_h\|_{U_h}$ — локальная норма погрешности, n — количество итераций. Видно, что на точность численного решения влияют оба параметра α_1 и β_1 управляющей функции (7.53). При $\beta_1 = 1/4$ точность решения выше, чем при других рассмотренных значениях β_1 .

Таблица 9

Результаты экспериментов по определению влияния параметров управляющей функции на точность и количество итераций метода адаптивных сеток. Задача (7.29). $l = 1$, $a = 10$, $N = 20$, $\epsilon = 10^{-10}$

α_1	$\beta_1 = 1/8$			$\beta_1 = 1/4$			$\beta_1 = 1/2$			$\beta_1 = 1$		
	$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	n		$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	n		$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	n		$\ \epsilon_h\ _{U_h}$	n	
0	$0.375 \cdot 10^{-2}$	1		$0.375 \cdot 10^{-2}$	1		$0.375 \cdot 10^{-2}$	1		$0.375 \cdot 10^{-2}$	1	
0.1	$0.330 \cdot 10^{-2}$	6		$0.288 \cdot 10^{-2}$	7		$0.206 \cdot 10^{-2}$	8		$0.715 \cdot 10^{-3}$	12	
0.5	$0.230 \cdot 10^{-2}$	8		$0.141 \cdot 10^{-2}$	10		$0.358 \cdot 10^{-3}$	13		$0.150 \cdot 10^{-2}$	22	
1	$0.182 \cdot 10^{-2}$	10		$0.816 \cdot 10^{-3}$	12		$0.321 \cdot 10^{-3}$	16		$0.176 \cdot 10^{-2}$	30	
2	$0.142 \cdot 10^{-2}$	10		$0.423 \cdot 10^{-3}$	15		$0.483 \cdot 10^{-3}$	22		$0.230 \cdot 10^{-2}$	42	
10	$0.951 \cdot 10^{-3}$	13		$0.824 \cdot 10^{-4}$	20		$0.630 \cdot 10^{-3}$	38		$0.750 \cdot 10^{-2}$	123	
10^2	$0.832 \cdot 10^{-3}$	14		$0.854 \cdot 10^{-5}$	22		$0.827 \cdot 10^{-3}$	46		$0.630 \cdot 10^{-1}$	45	
10^3	$0.820 \cdot 10^{-3}$	14		$0.132 \cdot 10^{-5}$	22		$0.113 \cdot 10^{-2}$	46		$0.743 \cdot 10^{-1}$	36	
10^4	$0.819 \cdot 10^{-3}$	14		$0.644 \cdot 10^{-6}$	23		$0.117 \cdot 10^{-2}$	46		$0.754 \cdot 10^{-1}$	37	

Для большей наглядности желателен графический вывод не только численного решения, получающегося в конце итерационного процесса, но и положения узлов сетки в ходе итерационного процесса. Вначале

узлы сетки располагаются равномерно на отрезке $[0, l]$, а затем от итерации к итерации их координаты меняются. В результате в конце итерационного процесса получается неравномерная сетка, соответствующая заданной управляющей функции. На графике можно показать изменение положения каждого узла сетки. Пример такого графического вывода представлен на рис. 13.

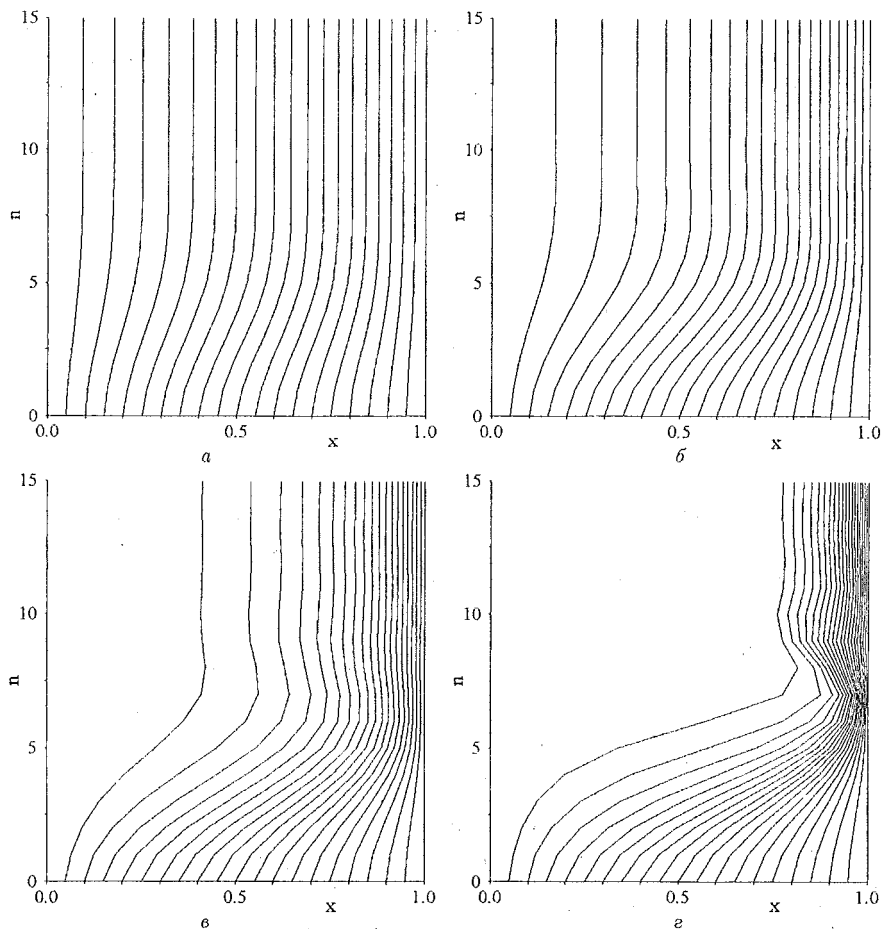


Рис. 13. Изменение координат узлов сетки в ходе итерационного процесса с управляющей функцией (7.53): $\alpha_1 = 100$; задача (7.29); $l = 1$; $a = 10$; $N = 20$; а) $\beta_1 = 1/8$; б) $\beta_1 = 1/4$; в) $\beta_1 = 1/2$; г) $\beta_1 = 1$

Отметим, что при $\beta_1 = 1$ большое значение параметра α_1 привело к чрезмерному сгущению узлов около правой границы и как следствие к уменьшению точности в левой части области.

2.2. Методом адаптивных сеток с использованием управляющей функции (7.54) решить первую краевую задачу (6.1) для стационарного уравнения теплопроводности. Показать, что для каждой тестовой задачи можно подобрать параметры $\alpha_k \geq 0$, $\beta_k \geq 0$ ($k = 0, 1, 2$) управляющей функции (7.54) так, что результаты расчетов на неравномерной сетке будут значительно точнее, чем на равномерной сетке с тем же числом узлов.

В качестве тестовых можно взять те же задачи, что и в предыдущем задании, т. е. задачи (7.29), (1.12), (11.1), (11.3). Кроме того, надо оттестировать метод адаптивных сеток на задачах (6.1) с переменными коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$, для которых условия (6.2) выполняются. Тестовые задачи необходимо подобрать так, чтобы их решения имели пограничные слои. Можно взять, например, задачу

$$\begin{aligned} & ((1 - 2x + 2x^2 + 2x^3)y')' - a^2(1 - 2x + 2x^2 + 2x^3)y = \\ & = -2a \frac{\operatorname{sh}[a(x - 1/2)]}{\operatorname{ch}(a/2)} (1 - 2x - 3x^2), \quad 0 < x < 1, \quad a = \operatorname{const} > 0, \quad (11.5) \\ & y(0) = 1, \quad y(1) = 1, \end{aligned}$$

имеющую решение (11.2) с двумя пограничными слоями (см. рис. 11), а также задачу

$$\begin{aligned} & ((1 - 2x + 2x^2 + 2x^3)y')' - a^2(1 - 2x + 2x^2 + 2x^3)y = \\ & = -2ae^{1-ax} [1 + a - x(2 + 3a) - x^2(3 - 4a) + 5ax^3], \quad (11.6) \\ & 0 < x < 1, \quad a = \operatorname{const} > 1, \\ & y(0) = 0, \quad y(1) = ae^{1-a}, \end{aligned}$$

решение (11.4) которой имеет ярко выраженный пограничный слой при больших значениях параметра $a = \operatorname{const} > 0$ (см. рис. 12).

В качестве примера в табл. 10 приведены результаты расчетов для тестовой задачи (11.5) с помощью метода адаптивных сеток при использовании управляющей функции (7.54) с параметром $\alpha_2 = 0$. Видно, что при наличии сильного пограничного слоя, т. е. при больших значениях параметра a , использование адаптивной сетки приводит к значительно более точным результатам, чем применение в расчетах равномерной сетки ($\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $w = 1$). На рис. 14 показано, как в итерационном

процессе метода адаптивных сеток равномерная сетка перестраивается в неравномерную, соответствующую заданной управляющей функции.

Таблица 10

Результаты экспериментов по сравнению точности $\|\varepsilon_h\|_{v_h}$ расчетов на равномерной и неравномерной сетках. Задача (11.5).

$$N = 40, \alpha_0 = \alpha_2 = 0, \alpha_1 = 1000, \beta_1 = 0.3, \varepsilon = 10^{-8}$$

Сетка	a			
	5	10	15	20
равномерная	$0.799 \cdot 10^{-3}$	$0.168 \cdot 10^{-2}$	$0.309 \cdot 10^{-2}$	$0.493 \cdot 10^{-2}$
адаптивная	$0.250 \cdot 10^{-3}$	$0.145 \cdot 10^{-3}$	$0.105 \cdot 10^{-3}$	$0.134 \cdot 10^{-3}$

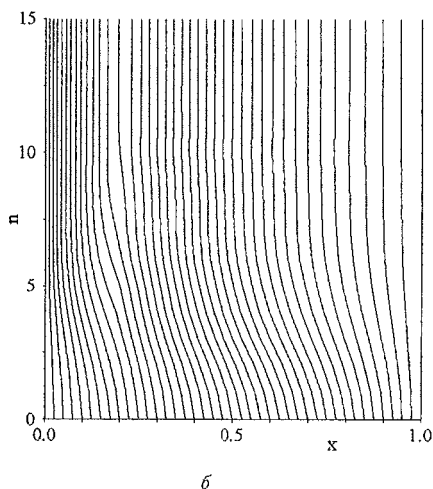
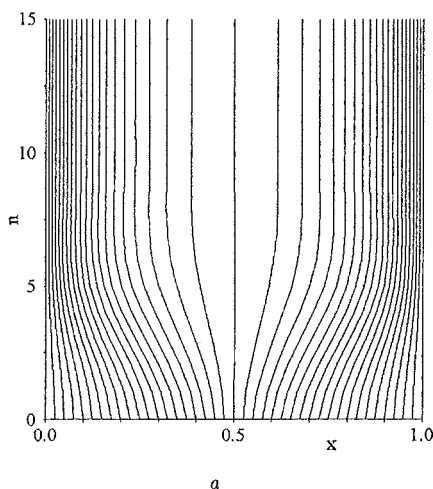


Рис. 14. Изменение координат узлов сетки в ходе итерационного процесса с управляющей функцией (7.54): $\alpha_2 = 0$; а) задача (11.5); $a = 20$; $N = 40$; $\alpha_0 = 0$; $\alpha_1 = 1000$; $\beta_1 = 0.3$; б) задача (11.6); $a = 5$; $N = 40$; $\alpha_0 = 500$; $\beta_0 = 2$; $\alpha_1 = 1000$; $\beta_1 = 0.3$

Задание 3. Методом конечных элементов решить первую краевую задачу (6.1) для стационарного уравнения теплопроводности.

В этом задании сначала надо построить сетку на отрезке $[0, l]$, а затем с помощью МКЭ найти приближенное решение задачи (6.1). Таким образом, неравномерная сетка, в отличие от метода адаптивных

сеток, применявшегося при выполнении задания 2, строится заранее, до вычисления решения.

Для построения сетки используйте метод эквираспределения, описанный в п. 7.5. Согласно этому методу, координаты узлов неравномерной сетки определяются в результате решения разностной задачи (7.55). Поскольку эта задача нелинейна, то для ее решения необходимо использовать какой-либо итерационный метод. Например, метод последовательных приближений:

$$\frac{1}{h} \left(w(x_{j+1/2}^n) \frac{x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1}}{h} - w(x_{j-1/2}^n) \frac{x_j^{n+1} - x_{j-1}^{n+1}}{h} \right) = 0, \\ j = 1, \dots, N-1, \quad (11.7)$$

$$x_0^{n+1} = 0, \quad x_N^{n+1} = l,$$

где n — номер итерации, x^n — n -е итерационное приближение. В качестве начального приближения x^0 можно взять равномерную сетку. Управляющую функцию возьмите в том же виде, что и в задании 2.2, при этом для ее вычисления используйте известное решение тестовой задачи. Решение x^{n+1} линейной задачи (11.7) найдите методом прогонки, который при выборе управляющей функции в виде (7.54) обладает свойствами (2.49)—(2.51) корректности и устойчивости (докажите). Установите условие окончания итераций, например такое

$$\|x^{n+1} - x^n\|_C < \varepsilon.$$

От задачи (6.1) перейдите к задаче (8.4) с однородными граничными условиями. В МКЭ используйте кусочно-линейные базисные функции, а для вычисления интегралов (8.74)—(8.76) примените квадратурную формулу трапеций. В результате применение МКЭ будет эквивалентно решению разностной задачи (7.14) (см. п. 8.6). В качестве тестовых возьмите задачи из задания 2.

Задание 4. Методом конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями решить задачу для стационарного уравнения теплопроводности со смешанными краевыми условиями.

В п. 8.8 было показано, что применение МКЭ эквивалентно решению соответствующей разностной задачи со смешанными краевыми условиями. Например, для задачи (6.21) систему уравнений (8.95), полученную с помощью МКЭ, можно записать в виде разностной схемы на неравномерной сетке (7.62). Для рассматриваемого случая в качестве тестовой можно взять, например, задачу (10.20).

Ответы, указания, решения

$$1.1. \alpha^* = -a \frac{(1+ah)^N + (1-ah)^N}{(1+ah)^N - (1-ah)^N}.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь решением задачи 1.10.2 и покажите, что решение разностной задачи (1.16) задается по формуле

$$y_j = \frac{a+\alpha}{2a}(1+ah)^j \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} + \frac{a-\alpha}{2a}(1-ah)^j \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}.$$

$$1.2. \alpha^* = -a \frac{\left(1+ah+\frac{a^2h^2}{2}\right)^N + \left(1-ah+\frac{a^2h^2}{2}\right)^N}{\left(1+ah+\frac{a^2h^2}{2}\right)^N - \left(1-ah+\frac{a^2h^2}{2}\right)^N}.$$

$$2.1. \max_{0 \leq j \leq N} y_j = y_a.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь принципом максимума.

2.2. У к а з а н и е. При $\alpha = 1$ схема (2.43) совпадает со схемой (2.2), для которой сходимость установлена в п. 2.1. Аналогичным образом можно доказать сходимость и при $0 \leq \alpha < 1$, учитывая, что для выполнения условия (2.6) теоремы 2.1 достаточно взять $h < \sqrt{\frac{2}{M(1-\alpha)}}$.

2.3. У к а з а н и е. Для доказательства четвертого порядка аппроксимации используйте следствие $y^{(4)} = (qu - f)''$ дифференциального уравнения задачи (2.1). Устойчивость докажете на основе теоремы 2.1, показав, что при $h < \sqrt{12/M}$ в качестве постоянной ϵ можно взять число m .

2.4. У к а з а н и е. Переписать разностное уравнение задачи (2.17) в виде

$$a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = d_j, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Решение этого уравнения найти методом прогонки (2.46). Прогоночные коэффициенты вычисляются по формулам (2.38), при этом $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = y_a$. Проверьте, что для рассматриваемой задачи достаточные условия (2.49)—(2.51) корректности и устойчивости метода прогонки выполняются.

2.5. У к а з а н и е. Покажите, что для любого $h > 0$ выполняются условия (2.10), поэтому разностная задача (2.52) имеет, согласно лемме 2.2,

единственное решение. Нетрудно проверить, что для рассматриваемой задачи выполняются условия (2.49)—(2.51), причем неравенства (2.51) являются строгими, вследствие чего метод прогонки будет корректным и устойчивым при любом $h > 0$. Равенство (2.53) докажете, основываясь на принципе максимума (лемма 2.1).

2.6. У к а з а н и е. Формулы обратного хода метода прогонки имеют вид (2.46), но, в отличие от предыдущей задачи, по-другому вычисляются начальные значения прогоночных коэффициентов:

$$\xi_0 = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{2}q(a)}, \quad \eta_0 = -\frac{h\mu_a \left(1 - \frac{h}{2}p(a)\right) - \frac{h^2}{2}f(a)}{1 + \frac{h^2}{2}q(a)}.$$

Эти выражения получаются из формулы (2.46) при $j = 0$, или, что то же самое, из формулы (2.48). Корректность и устойчивость метода прогонки доказывается также, как в предыдущей задаче.

2.7. У к а з а н и е. Покажите, что $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = y_a$, y_N вычисляется по формуле (2.47) и для $h < 2/P$ условия (2.49)—(2.51) выполняются, причем $|c_0| > |b_0|$.

2.8. Р е ш е н и е. Для задачи (2.58) производная g_y из условия (2.28) теоремы 2.3 имеет вид

$$g_y = 3(y - ax)^2 + \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}x}. \quad (12.1)$$

Очевидно, что условие (2.28) выполняется с постоянной $m = \pi^2/8$, поэтому разностная схема (2.27) равномерно сходится со вторым порядком.

2.9. У к а з а н и е. Покажите, что в условии (2.28) теоремы 2.3 в качестве постоянной для рассматриваемой задачи можно взять $m = 1$.

2.10. $a < 8 - \sqrt{3}/9 \approx 7.81$.

У к а з а н и е. Покажите, что для функции $g(x, y)$, соответствующей рассматриваемой задаче, справедливы оценки

$$a - \sqrt{3}/9 \leq g_y \leq a + \sqrt{3}/9. \quad (12.2)$$

Следовательно, условие (2.28) теоремы 2.3 будет выполняться с постоянной $m = 1 - \sqrt{3}/9$. Верхняя оценка на допустимые значения параметра a следует из неравенства (12.2) и достаточного условия (2.35) сходимости метода последовательных приближений (2.32).

3.3. Р е ш е н и е. Доказательство следует из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} (y, v_{\bar{x}}) &= \sum_{j=1}^{N-1} (yv_{\bar{x}})_j h = \sum_{j=1}^{N-1} [(yv)_{\bar{x}} - y_{\bar{x}} v^{-1}]_j h = \\ &= (yv)_1 - (yv)_0 + (yv)_2 - (yv)_1 + \dots + (yv)_{N-1} - (yv)_{N-2} - \\ &- \sum_{j=1}^{N-1} \frac{y_j - y_{j-1}}{h} v_{j-1} h = (yv)_{N-1} - (yv)_0 - \sum_{j=0}^{N-2} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} v_j h = \\ &= (yv)_{N-1} - (yv)_0 - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{y_{j+1} - y_j}{h} v_j h + (y_N - y_{N-1}) v_{N-1} = \\ &= y_N v_{N-1} - y_0 v_0 - [y_x, v]. \end{aligned}$$

$$4.1. \quad y_j^{(k)} = \beta \sin \left(\frac{k\pi x_j}{l} \right), \quad j = 0, \dots, N \quad (12.3)$$

при

$$p = p_k = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{k\pi h}{2l} \right) = \cos \left(\frac{k\pi h}{l} \right), \quad (12.4)$$

где $\beta \neq 0$ — произвольное вещественное число, $k = 1, \dots, N-1$.

У к а з а н и е. Разностное уравнение задачи (4.29) совпадает с уравнением (4.4), если положить $\lambda = (2 - 2p)/h^2$.

$$4.2. \quad y_j^{(k)} = \beta \sin \left(\frac{k\pi x_j}{l} \right), \quad j = 0, \dots, N; \quad (12.5)$$

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{k\pi h}{2l} \right) + b \cos \left(\frac{k\pi h}{l} \right), \quad (12.6)$$

где $\beta \neq 0$ — произвольное вещественное число, $k = 1, \dots, N-1$.

У к а з а н и е. Записать уравнение $Ay_j = \lambda y_j$ в виде разностного уравнения задачи (4.29) и использовать ее решение (12.3), (12.4).

4.3. У к а з а н и е. Показать, что собственные значения оператора $\bar{A}$ вычисляются по формуле

$$\lambda_k = b \cos \left(\frac{k\pi h}{l} \right), \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (12.7)$$

4.4. У к а з а н и е. Разностное уравнение аппроксимирует дифференциальное уравнение со вторым порядком. Предполагая, что уравнение выполняется и в граничной точке $x = 0$, т. е. $y''(0) = -f(0)$, покажем, что левое краевое условие задачи (4.32) аппроксимируется левым разностным краевым условием схемы (4.31) только с первым порядком. В самом деле, для погрешности аппроксимации этого краевого условия на решении $y(x)$ задачи (4.32) имеем

$$\begin{aligned}\psi_{h,0} &= (L_h(y)_h - f_h)_{x=0} = \\ &= \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} - 0 = \frac{1}{h} \left(y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2} y''(0) + O(h^3) - y(0) \right) = \\ &= y'(0) + \frac{h}{2} y''(0) + O(h^2) = -\frac{h}{2} f(0) + O(h^2),\end{aligned}$$

т. е. в общем случае $\psi_{h,0} = O(h)$. Отметим, что в частном случае $f(0) = 0$ схема (4.31) будет аппроксимировать задачу (4.32) на ее решении со вторым порядком.

4.5.
$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi h}{2l} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right); \quad (12.8)$$

$$y_j^{(k)} = \alpha \cos \left(\frac{\pi x_j}{l} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right), \quad j = 0, \dots, N, \quad (12.9)$$

где $\alpha \neq 0$ — произвольное вещественное число, $k = 0, \dots, N-1$.

У к а з а н и е. Уравнению $Ay_j = \lambda y_j$ при $j = 1, \dots, N-1$ соответствует характеристическое уравнение (4.7) с корнями (4.8). Если корни этого уравнения различные и вещественные (т. е. $\lambda < 0$ или $\lambda > 4/h^2$), то решение задачи (4.34) задается формулой (4.9)

$$y_j = \alpha \mu_1^j + \beta \mu_2^j, \quad j = 0, \dots, N, \quad (12.10)$$

причем коэффициенты α и β должны быть такими, чтобы удовлетворялись краевые условия в задаче (4.34):

$$\begin{cases} -\frac{2}{h} y_{x,0} = \lambda y_0, \\ y_N = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_1 = y_0 \left(1 - \frac{\lambda h^2}{2} \right), \\ y_N = 0. \end{cases} \quad (12.11)$$

Таким образом, для определения α и β имеем систему

$$\begin{cases} \alpha\mu_1 + \beta\mu_2 = (\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right), \\ \alpha\mu_1^N + \beta\mu_2^N = 0. \end{cases} \quad (12.12)$$

Учитывая, что $1 - \frac{\lambda h^2}{2} = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$ и $\mu_1 \neq \mu_2$, из первого уравнения получаем $\alpha = \beta$. Тогда, поскольку корни μ_1 и μ_2 одного знака и $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, из второго уравнения получаем $\alpha = \beta = 0$, т. е. $y_j \equiv 0$, что противоречит определению собственной функции (по определению, собственная функция — не равное тождественно нулю решение задачи (4.34)). Таким образом, случай различных вещественных корней характеристического уравнения (4.7) не дает собственных функций оператора A .

Если корни уравнения (4.7) кратные $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ($\mu = 1$ при $\lambda = 0$ и $\mu = -1$ при $\lambda = 4/h^2$), то решение задачи (4.34) вычисляется по формуле (4.10):

$$y_j = (\alpha + \beta x_j) \mu^j, \quad j = 0, \dots, N \quad (12.13)$$

и вместо уравнений (12.12) получаем систему

$$\begin{cases} (\alpha + \beta h) \mu = \alpha \left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right) = \alpha \mu, \\ (\alpha + \beta l) \mu^N = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\mu \neq 0$, то вновь получаем только нулевое решение $\alpha = \beta = 0$.

И наконец, если корни характеристического уравнения (4.7) есть комплексно-сопряженные числа $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \bar{\mu}$ (этот случай реализуется при $0 < \lambda < 4/h^2$), то, в силу равенства $\mu_1 \mu_2 = 1$, можно положить

$$\mu = e^{i\varphi},$$

где $\varphi = \arccos(1 - \lambda h^2/2)$, $0 < \varphi < \pi$. Решение задачи (4.34) задается в рассматриваемом случае формулой (4.11)

$$y_j = \alpha \cos j\varphi + \beta \sin j\varphi, \quad j = 0, \dots, N, \quad (12.14)$$

коэффициенты α и β в которой определяются из системы (12.11):

$$\begin{cases} \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi = \alpha \left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right) = \alpha \cos \varphi, \\ \alpha \cos N\varphi + \beta \sin N\varphi = 0. \end{cases} \quad (12.15)$$

Следовательно, $\beta = 0$,

$$\varphi = \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad 1 - \frac{\lambda h^2}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right).$$

$$4.6. \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi h}{2l} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right); \quad (12.16)$$

$$y_j^{(k)} = \beta \sin \left(\frac{\pi x_j}{l} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right), \quad j = 0, \dots, N, \quad (12.17)$$

где $\beta \neq 0$ — произвольное вещественное число, $k = 0, \dots, N-1$.

$$4.7. \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi k h}{2l} \right), \quad k = 0, \dots, N; \quad (12.18)$$

$$y_j^{(k)} = \alpha \cos \left(\frac{\pi k x_j}{l} \right), \quad j = 0, \dots, N, \quad (12.19)$$

где $\alpha \neq 0$ — произвольное вещественное число.

У к а з а н и е. Если $\mu_1 \neq \mu_2$ — различные вещественные корни характеристического уравнения, то для поиска коэффициентов α и β , входящих в формулу решения (12.10), получаем систему

$$\begin{cases} \alpha \mu_1 + \beta \mu_2 = (\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\lambda h^2}{2} \right) = (\alpha + \beta) \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \\ \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} (\alpha \mu_1^N + \beta \mu_2^N) = \alpha \mu_1^{N-1} + \beta \mu_2^{N-1}. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует $\alpha = \beta$. Подставляя $\beta = \alpha$ во второе уравнение, предполагая, что $\alpha \neq 0$, и учитывая равенство $\mu_1 \mu_2 = 1$, приходим к соотношению

$$\mu_1^{N+1} + \frac{1}{\mu_1^{N+1}} = \mu_1^{N-1} + \frac{1}{\mu_1^{N-1}}$$

или

$$|\mu_1|^{N+1} + \frac{1}{|\mu_1|^{N+1}} = |\mu_1|^{N-1} + \frac{1}{|\mu_1|^{N-1}}, \quad (12.20)$$

при этом $\mu_1 \neq 0$, $|\mu_1| \neq 1$. Однако равенство (12.20) выполняться не может, поскольку функция $f(x) = a^x + a^{-x}$ при $a > 0$, $a \neq 1$ является строго возрастающей функцией переменной $x > 0$.

Если корни кратные $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ (т. е. $\mu = 1$ или $\mu = -1$), то для определения коэффициентов α и β в формуле (12.13) имеем систему

$$\begin{cases} (\alpha + \beta h)\mu = \alpha\mu, \\ \mu(\alpha + \beta l)\mu^N = (\alpha + \beta(l - h))\mu^{N-1}, \end{cases}$$

решая которую, получаем, что $\beta = 0$, α — произвольное вещественное число.

Итак, в случае кратных корней получаются две собственные функции, соответствующие корням характеристического уравнения $\mu = 1$ и $\mu = -1$:

$$u_j = \alpha\mu^j \equiv \alpha, \quad j = 0, \dots, N; \quad (12.21)$$

$$v_j = \alpha\mu^j = \alpha(-1)^j, \quad j = 0, \dots, N. \quad (12.22)$$

Собственные значения оператора A , отвечающие этим собственным функциям, определяются из равенства $1 - \lambda h^2/2 = \mu$, т. е.

$$\lambda_u = 0, \quad \lambda_v = \frac{4}{h^2}. \quad (12.23)$$

Если корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, то получаем еще $(N - 1)$ собственных функций и собственных значений

$$y_j^{(k)} = \alpha \cos\left(\frac{\pi k x_j}{l}\right), \quad j = 0, \dots, N; \quad (12.24)$$

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k h}{2l}\right), \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad (12.25)$$

Покажите, что собственные функции (12.21), (12.22) и собственные значения (12.23) можно описать формулами (12.24), (12.25), полагая в последних $k = 0$ и $k = N$.

4.8.
$$y_j = \frac{1}{1 + 4 \sin^2(\pi h)} \cdot \sin(2\pi x_j), \quad j = 0, \dots, N.$$

У к а з а н и е. Система из $(N - 1)$ собственных функций $y^{(k)}$ ($k = 1, \dots, N - 1$) образует базис в пространстве $\overset{\circ}{U}_h$, поэтому любую функцию из $\overset{\circ}{U}_h$ можно разложить по этому базису в конечный ряд

Фурье. Тогда для решения y задачи (4.42) справедливо представление

$$y = \sum_{k=1}^{N-1} c_k y^{(k)}, \quad (12.26)$$

где c_k — подлежащие определению коэффициенты Фурье.

Пусть $f_j = \sin(2\pi x_j)$ ($j = 0, \dots, N$). Тогда $f \in \overset{\circ}{U}_h$ и, следовательно,

$$f = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y^{(k)}, \quad (12.27)$$

где

$$f_k = (f, y^{(k)}). \quad (12.28)$$

Для определения коэффициентов c_k перепишем задачу (4.42) в виде операторного уравнения

$$(h^2 \overset{\circ}{A} + E)y = f, \quad y \in \overset{\circ}{U}_h$$

и подставим в это уравнение разложения (12.26) и (12.27)

$$\sum_{k=1}^{N-1} (h^2 \lambda_k + 1) c_k y^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y^{(k)}.$$

В силу линейной независимости собственных функций $y^{(k)}$, отсюда получаем

$$c_k = \frac{f_k}{1 + h^2 \lambda_k} = \frac{f_k}{1 + 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi h}{2} \right)}. \quad (12.29)$$

Остается вычислить коэффициенты Фурье f_k . Легко видеть, что $f = y^{(2)}/\sqrt{2}$. В силу ортонормальности системы функций $y^{(k)}$, отсюда получаем

$$f_k = (f, y^{(k)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (y^{(2)}, y^{(k)}) = \begin{cases} 0, & k \neq 2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 2. \end{cases} \quad (12.30)$$

Следовательно,

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \neq 2, \\ \frac{1}{\sqrt{2} [1 + 4 \sin^2 (\pi h)]}, & k = 2. \end{cases}$$

$$4.9. \quad y_j = \frac{1}{q + \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{3h}{2} \right)} \cdot \sin(3x_j) + 1 + \frac{x_j}{\pi}, \quad j = 0, \dots, N.$$

У к а з а н и е. Согласно лемме 4.4, любую функцию из пространства $\overset{\circ}{U}_h$ можно представить в виде конечного ряда Фурье. Решение задачи (4.44) не принадлежит $\overset{\circ}{U}_h$. Поэтому вначале перейдем от этой задачи к задаче с однородными краевыми условиями. Для этого введем функцию

$$v_j = 1 + \frac{x_j}{\pi}. \quad (12.31)$$

Легко проверить, что она является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} -v_{\bar{x}x,j} + qv_j &= q \left(1 + \frac{x_j}{\pi} \right), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ v_0 &= 1, \quad v_N = 2. \end{aligned} \quad (12.32)$$

В силу линейности задач (4.44) и (12.32), для разности $u = y - v$ решений получим краевую разностную задачу с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} -u_{\bar{x}x,j} + qu_j &= \sin(3x_j) \equiv f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0 &= 0, \quad u_N = 0. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Полученная задача аналогична задаче (4.42). Будем искать решение задачи (12.33) в виде конечного ряда Фурье

$$u = \sum_{k=1}^{N-1} c_k y^{(k)}, \quad (12.34)$$

где

$$y_j^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx_j), \quad j = 0, \dots, N. \quad (12.35)$$

Тогда

$$c_k = \frac{f_k}{\lambda_k + q},$$

при этом

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{kh}{2} \right), \quad k = 1, \dots, N-1; \quad (12.36)$$

$$f_k = (f, y^{(k)}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (y^{(3)}, y^{(k)}). \quad (12.37)$$

5.1. У к а з а н и е. Покажите, что для решения разностной задачи (2.2) выполняется равенство

$$\|y_{\bar{x}}\|^2 + (q, y^2) = (f, y)$$

и используйте затем положительность функции $q(x)$.

5.2. У к а з а н и е. Запишем разностную задачу (5.13) в операторном виде

$$Ay = f, \quad (12.38)$$

где оператор $A : \overset{\circ}{U}_h \rightarrow \overset{\circ}{U}_h$ равен сумме $A = \overset{\circ}{A} + B$ оператора $\overset{\circ}{A}$ второй разностной производной (4.2) и оператора $B : \overset{\circ}{U}_h \rightarrow \overset{\circ}{U}_h$, определенного формулой

$$By_j = \begin{cases} \alpha \frac{y_{\bar{x},j} + y_{x,j}}{2}, & j = 1, \dots, N-1, \\ 0, & j = 0, N. \end{cases} \quad (12.39)$$

Оператор $\overset{\circ}{A}$ является положительно определенным и для него имеет место оценка (4.23). Для оператора B из формулы суммирования по частям (3.5) следует равенство

$$(By, y) = \frac{\alpha}{2} \{(y_{\bar{x}}, y) + (y_x, y)\} = \frac{\alpha}{2} \{(y_{\bar{x}}, y) - (y, y_{\bar{x}})\} = -\frac{\alpha}{2} y_N y_{\bar{x},N} h = 0.$$

Поэтому для оператора A выполняется неравенство $(Ay, y) \geq \delta \|y\|^2$, т. е. он является положительно определенным, и, следовательно, для решения уравнения (12.38) справедлива априорная оценка (5.9). Далее воспользуйтесь рассуждениями, изложенными в конце подп. 5.2.1.

5.3. У к а з а н и е. Легко видеть, что разностное уравнение задачи (5.14) можно переписать так:

$$-\left(1 - \frac{(1-\alpha)b^2h^2}{2}\right) y_{\bar{x}x,j} + b^2 y_j = f_j.$$

Тогда разностную задачу можно записать в операторном виде $Ay = f$, где

$$A = \left(1 - \frac{(1-\alpha)b^2h^2}{2}\right) \overset{\circ}{A} + b^2 E,$$

E — тождественный оператор.

При малых h коэффициент при $\overset{\circ}{A}$ будет положительным. Например, при $h < 1/|b|$ получаем

$$1 - \frac{(1-\alpha)b^2h^2}{2} > \frac{1}{2}.$$

Покажите, что при указанных значениях шага h оператор A будет положительно определенным и воспользуйтесь решением предыдущей задачи.

6.1. У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой (3.1).

$$\begin{aligned} 6.2. \quad & \frac{1}{h} \left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} \cdot \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \cdot \frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right) - \\ & - q_j y_j = -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ & \frac{p_0 + p_1}{2} \cdot \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2} q_0 y_0 = \mu_0 - \frac{h}{2} f_0, \\ & y_N = \mu_l. \end{aligned} \quad (12.40)$$

У к а з а н и е. Чтобы воспользоваться методом прогонки, перепишите задачу (12.40) в виде системы (2.45), где

$$a_j = \frac{p_j + p_{j-1}}{2h^2}, \quad b_j = \frac{p_j + p_{j+1}}{2h^2}, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (12.41)$$

$$c_j = a_j + b_j + q_j, \quad d_j = -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (12.42)$$

$$b_0 = \frac{p_0 + p_1}{2h}, \quad c_0 = b_0 + \frac{h}{2} q_0, \quad d_0 = \mu_0 - \frac{h}{2} f_0; \quad (12.43)$$

$$a_N = 0, \quad c_N = 1, \quad d_N = -\mu_l. \quad (12.44)$$

Тогда метод прогонки можно реализовать по формулам (2.48), (2.38), (2.47) и (2.46).

$$\begin{aligned} 6.3. \quad & \frac{1}{h} \left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} \cdot \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \cdot \frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right) - \\ & - q_j y_j = -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ & \frac{p_0 + p_1}{2} \cdot \frac{y_1 - y_0}{h} - \left(\gamma_0 + \frac{h}{2} q_0 \right) y_0 = \mu_0 - \frac{h}{2} f_0, \\ & y_N = \mu_l. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Покажите, что формулы метода прогонки такие же, как в задаче 6.2. Отличие будет лишь в формуле для подсчета коэффициента c_0 :

$$c_0 = b_0 + \frac{h}{2} q_0 + \gamma_0. \quad (12.45)$$

7.4. а) $h_{1/2} > 0.8$; б) $h_{1/2} > 0.6$.

У к а з а н и е. Координата первого узла сетки вычисляется по формуле

$$x_1 = 1 + \frac{1}{20} \ln [h + (1 - h)e^{-20}],$$

где $h = 1/N$. Следовательно,

$$h_{1/2} \approx 1 + \frac{1}{20} \ln h = 1 - \frac{1}{20} \ln N.$$

Далее учесть, что $54 < e^4$, $2980 < e^8$.

7.6. У к а з а н и е. Доказательство такое же, как для схемы (7.33). Достаточно проверить, что квадратная скобка в выражении (7.36) для погрешности аппроксимации обращается в нуль. Учитывая (7.44), получаем

$$\begin{aligned} J_{\xi} y_{xxx} + \frac{1}{4} J^2 y_{xxxx} &= x_{\xi\xi} a^2 y_x + \frac{1}{4} x_{\xi}^2 a^4 y = \\ &= a^2 \left(-\frac{C^2 w_x}{w^3} y_x + \frac{1}{4} \frac{C^2}{w^2} a^2 y \right) = \frac{a^2 C^2}{w^2} \left(-\frac{w_x}{w} y_x + \frac{1}{4} a^2 y \right) = \\ &= \frac{a^2 C^2}{w^2} \left(-\frac{1}{4} y_{xx} + \frac{1}{4} a^2 y \right) = 0. \end{aligned}$$

8.2. У к а з а н и е. Для любого $n = 1, 2, \dots$ функция $u_n(x) = x^n(l - x)$ принадлежит области определения D_A оператора A , при этом

$$\|u_n\|_{L_2(0,l)}^2 = \frac{2l^{2n+3}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} < \frac{l^{2n+3}}{4n^3}.$$

Пусть $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$. Покажите, что

$$\|Au_n\|_{L_2(0,l)}^2 = \frac{n^2(5n-7)l^{2n-1}}{(2n-1)(2n-3)} > (n-2)l^{2n-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{\|Au_n\|_{L_2(0,l)}}{\|u_n\|_{L_2(0,l)}} \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

что и доказывает неограниченность оператора A , действующего из D_A в $L_2(0, l)$.

8.3. У к а з а н и е. Покажите, что $u_n \in D_A$ тогда и только тогда, когда функция u_n задается на отрезке $[\frac{l}{2} - \frac{1}{n}, \frac{l}{2} + \frac{1}{n}]$ по формуле

$$u_n(x) = \frac{l}{2} - \frac{3}{8n} - \frac{3n}{4} \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{n^3}{8} \left(x - \frac{l}{2}\right)^4.$$

Покажите, что последовательность функций u_n фундаментальна в энергетической норме. Для этого надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер n_ε такой, что $\forall n > n_\varepsilon$ и $\forall p \geq 1$ будет выполняться неравенство

$$\|u_n - u_{n+p}\|_A < \varepsilon.$$

Для доказательства используйте равенство

$$\begin{aligned} & \|u_n - u_{n+p}\|_A^2 = \\ & = 2 \left[\int_{\frac{l}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{l}{2} - \frac{1}{n+p}} |u'_n(x) - u'_{n+p}(x)|^2 dx + \int_{\frac{l}{2} - \frac{1}{n+p}}^{\frac{l}{2}} |u'_n(x) - u'_{n+p}(x)|^2 dx \right] \end{aligned}$$

и оценки

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{l}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{l}{2} - \frac{1}{n+p}} |u'_n(x) - u'_{n+p}(x)|^2 dx \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}, \\ & \int_{\frac{l}{2} - \frac{1}{n+p}}^{\frac{l}{2}} |u'_n(x) - u'_{n+p}(x)|^2 dx \leq \frac{1}{n+p}, \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$\|u_n - u_{n+p}\|_A \leq \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \forall p \geq 1.$$

В силу фундаментальности, последовательность u_n сходится в энергетической норме к некоторой функции из H_A . Но поточечно она сходится к функции u , заданной формулой (8.104). Следовательно, и в H_A она сходится [7; 18] к этой функции, причем $u \notin D_A$. Этот пример показывает, что в результате замыкания множества D_A по энергетической норме появляются новые функции, не принадлежащие D_A , т. е. имеет место строгое включение: $D_A \subset H_A$.

8.5. У к а з а н и е. Проверьте, что все условия (2.49)—(2.51) корректности и устойчивости метода прогонки выполняются. Например, используя выражение (8.69) и условие (8.105), получаем

$$b_j \leq -\frac{c_1}{h_{j-1/2}} + \frac{Q}{h_{j-1/2}^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_{j-1})(x_j - x) dx = -\frac{c_1}{h_{j-1/2}} + \frac{Q}{6} h_{j-1/2} \leq \\ \leq -\frac{c_1}{h_{\max}} + \frac{Q}{6} h_{\max} < -\frac{c_1}{\sqrt{6c_1/Q}} + \frac{Q}{6} \sqrt{\frac{6c_1}{Q}} = 0.$$

Тогда

$$|b_j| + |b_{j+1}| = -b_j - b_{j+1} \leq \frac{1}{h_{j-1/2}^2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} p(x) dx + \frac{1}{h_{j+1/2}^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x) dx \leq \\ \leq (\varphi_j, \varphi_j)_A,$$

т. е. выполняется условие (2.50).

8.7. У к а з а н и е. См. п. 7.2.

9.v1.1. У к а з а н и е. Покажите, что для данной задачи коэффициенты схемы (2.17) удовлетворяют условиям теоремы 2.2.

$$9.v1.2. \quad y_j = \frac{\sin(x_j)}{q + \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)} + \frac{\sin(3x_j)}{q + \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{3h}{2}\right)} + \frac{x_j}{\pi}, \quad j = 0, \dots, N.$$

У к а з а н и е. См. решение задачи 4.9.

$$9.v1.3. \quad \frac{1}{h} \left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} \cdot \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \cdot \frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right) - \\ - q_j y_j = -f_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = \mu_0, \\ \frac{p_N + p_{N-1}}{2} \cdot \frac{y_N - y_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} q_N y_N = \mu_1 + \frac{h}{2} f_N. \quad (12.46)$$

У к а з а н и е. Чтобы воспользоваться методом прогонки, перепишите задачу (12.46) в виде системы (2.45). Коэффициенты этой системы

при $j = 1, \dots, N - 1$ вычисляются по формулам (12.41), (12.42). Кроме того,

$$c_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad d_0 = -\mu_0; \quad (12.47)$$

$$a_N = -\frac{p_N + p_{N-1}}{2h}, \quad c_N = a_N - \frac{h}{2}q_N, \quad d_N = \mu_l + \frac{h}{2}f_N, \quad (12.48)$$

Алгоритм метода прогонки заключается в вычислении начальных прогоночных коэффициентов (формула (2.48)), остальных прогоночных коэффициентов (формула (2.38)), значения решения в правом граничном узле (формула (2.47)) и в остальных узлах сетки (формула (2.46)).

$$9.v2.2. \quad y_j = 1 - \frac{x_j}{\pi} - \frac{\sin(2x_j)}{q + \frac{4}{h^2} \sin^2 h} + \frac{\sin(4x_j)}{q + \frac{4}{h^2} \sin^2(2h)}, \quad j = 0, \dots, N.$$

$$9.v2.3. \quad \frac{1}{h} \left(\frac{p_{j+1} + p_j}{2} \cdot \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{p_j + p_{j-1}}{2} \cdot \frac{y_j - y_{j-1}}{h} \right) -$$

$$-q_j y_j = -f_j, \quad j = 1, \dots, N - 1,$$

$$y_0 = \mu_0, \quad (12.49)$$

$$\frac{p_N + p_{N-1}}{2} \cdot \frac{y_N - y_{N-1}}{h} + \left(\gamma_l + \frac{h}{2}q_N \right) y_N = \mu_l + \frac{h}{2}f_N.$$

У к а з а н и е. Алгоритм метода прогонки такой же, как в третьей задаче первого варианта. Отличие будет лишь в формуле для подсчета коэффициента c_N :

$$c_N = a_N - \frac{h}{2}q_N - \gamma_l. \quad (12.50)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ахмеров Р. Р.* Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1994.
2. *Батталов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
3. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений: В 2 т. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. Т. 2.
4. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
5. *Дробышев В. И. и др.* Задачи по вычислительной математике / В. И. Дробышев, В. П. Дымников, Г. С. Ривин. М.: Наука, 1980.
6. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
8. *Лаевский Ю. М.* Метод конечных элементов (основы теории, задачи). Новосибирск: НГУ, 1999.
9. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
10. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
11. *Михайлов А. П.* Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе. Новосибирск: НГУ, 2003.
12. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964.
13. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.
14. *Самарский А. А. и др.* Задачи и упражнения по численным методам / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. А. Самарская. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
15. *Самарский А. А., Гумин А. В.* Численные методы математической физики. М.: Науч. мир, 2003.
16. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
17. *Смелов В. В.* Основы методов вычислительной математики. Новосибирск: НГУ, 1987. Вып. 3.
18. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

19. *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1: Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

20. *Чубаров Л. Б.* Оценка погрешностей и методы интерполяции данных. Новосибирск: НГУ, 2002.

21. *Чубаров Л. Б.* Квадратурные формулы и приближенные методы решения алгебраических уравнений. Новосибирск: НГУ, 2002.

*Хакимзянов Гаяз Салимович,
Черный Сергей Григорьевич*

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

**Часть 2. Численные методы решения
краевых задач для обыкновенных
дифференциальных уравнений**

Учебное пособие

Редактор *С. Д. Андреева*

Подписано в печать 18.01.2005 г.
Формат 60 x 84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 10. Тираж 250 экз.
Заказ № 16

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.
Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.