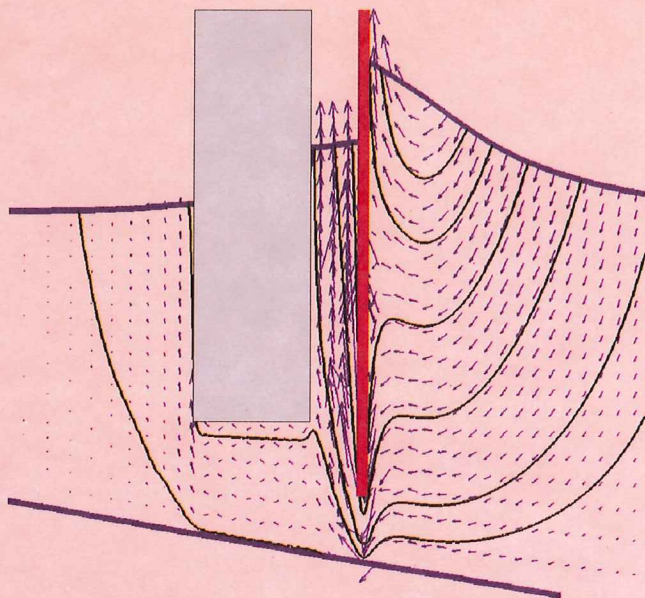


Г. С. Хакимзянов, С. Г. Черный

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ



Часть 4

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра математического моделирования

Г. С. Хакимзянов, С. Г. Черный

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Часть 4. Численные методы решения задач
для уравнений гиперболического типа

Учебное пособие

Новосибирск
2014

ББК В22.193
УДК 519.63
Х 162

Рецензент
канд. физ.-мат. наук А. С. Лебедев

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет» на 2009–2018 годы.*

Х 162 Хакимзянов, Г. С.

Методы вычислений: В 4 ч. : учеб. пособие / Г. С. Хакимзянов, С. Г. Черный ; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск : РИЦ НГУ, 2014. – Ч. 4: Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа. – 207 с.

ISBN 978-5-4437-0265-0

Учебное пособие соответствует программе курса лекций «Методы вычислений», который читается на механико-математическом факультете НГУ. В его четвертой части излагаются основы численных методов решения начально-краевых задач для уравнений гиперболического типа, формулируются задачи для семинарских занятий, приводятся образцы контрольных работ и заданий для практических занятий на ЭВМ.

Пособие предназначено для студентов и преподавателей математических специальностей высших учебных заведений.

ББК В22.193
УДК 519.63

ISBN 978-5-4437-0265-0

© Новосибирский государственный университет, 2014
© Г. С. Хакимзянов,
С. Г. Черный, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
§ 1. Схемы для линейного уравнения переноса	5
§ 2. Свойство монотонности разностных схем	27
§ 3. Построение монотонных схем на основе метода дифференциального приближения.....	45
§ 4. Схемы для нелинейного уравнения переноса	60
§ 5. Схемы на адаптивной сетке для уравнения переноса ...	82
§ 6. Разностные схемы для уравнения колебаний струны ...	95
§ 7. Разностные схемы для гиперболической системы уравнений с постоянными коэффициентами	107
§ 8. Разностные схемы для системы нелинейных уравнений мелкой воды	124
§ 9. Разностные схемы для задач газовой динамики	156
§ 10. Контрольная работа по теме «Исследование разностных схем для уравнения переноса»	176
§ 11. Задания для лабораторной работы 6	177
Ответы, указания, решения	191
Библиографический список	205

Предисловие

В четвертой части пособия изложены основы численных методов решения начально-краевых задач для уравнений гиперболического типа, сформулированы задачи по этой теме для семинарских занятий, приведены задания для практических занятий на ЭВМ и пример контрольной работы.

Теоретические вопросы изложены достаточно кратко. Для более глубокого изучения рассматриваемых вопросов мы рекомендуем обратиться к учебнику С. К. Годунова и В. С. Рябенного [5], а также к книгам Г. И. Марчука [15], А. А. Самарского [20], А. А. Самарского и А. В. Гулина [22], А. А. Самарского и Е. С. Николаева [23], Б. Л. Рождественского и Н. Н. Яненко [18] и учебным пособиям, изданным в НГУ [8, 24, 29, 30]. На лекциях рассматриваются теоретические вопросы, связанные с исследованием только конечно-разностных схем. В качестве примеров рассмотрены схемы для линейного уравнения переноса, нелинейного скалярного уравнения первого порядка, уравнения второго порядка, описывающего колебания струны, линейной системы уравнений первого порядка, системы нелинейных уравнений мелкой воды и уравнений газовой динамики.

Каждый параграф сопровождается задачами, которые необходимо решить на семинарских занятиях. Многие задачи снабжены указаниями и подробными решениями. Дополнительные материалы для семинарских занятий можно найти в задачниках [1, 7, 21].

В пособии приведены примеры заданий для практических занятий в компьютерных классах, даны рекомендации по выполнению заданий, обсуждаются вопросы, связанные с разработкой программ и представлением результатов. Дополнительные задания можно взять из методических пособий [11, 14, 16].

Четвертая часть пособия имеет самостоятельную сквозную нумерацию параграфов и рисунков и самостоятельный библиографический список. Внутри параграфов для формул и утверждений (лемм и теорем) использована двухиндексная нумерация, например 4.2. Ссылки на формулы, леммы, теоремы из предыдущих трех частей пособия [26–28] даются добавлением спереди к их номеру цифры 1, 2 или 3. Например, вместо «по формуле (4.2) из пособия [26]» мы пишем «по формуле (1.4.2)», вместо «по теореме 8.3 из пособия [27]» – «по теореме 2.8.3».

Авторы выражают глубокую признательность рецензенту Александру Степановичу Лебедеву за ценные советы и критические замечания, которые способствовали улучшению этого учебного пособия.

§ 1. Схемы для линейного уравнения переноса

1.1. Некоторые сведения из теории гиперболических систем.

Рассмотрим задачу Коши для линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \mathbf{f}(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ – m -мерная вектор-функция переменных x, t , \mathcal{A} – вещественная $m \times m$ матрица с элементами $a_{ij}(x, t)$.

Определение. Систему уравнений (1.1) будем называть гиперболической в некоторой области переменных (x, t) , если в каждой точке этой области собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матрицы \mathcal{A} вещественны и различны.

Определение. Интегральная кривая $x = x_k(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k(x, t) \quad (1.2)$$

называется k -ой характеристикой системы уравнений (1.1).

Предполагается, что элементы матрицы \mathcal{A} обладают гладкостью, достаточной для того, чтобы через каждую точку плоскости (x, t) проходила единственная характеристика, отвечающая собственному значению λ_k . Характеристики, проведенные через точку (x, t) ($t > 0$) в сторону убывания времени t , пересекут ось Ox в m различных точках. Упорядочим собственные значения гиперболической системы (1.1) ($\lambda_1(x, t) < \lambda_2(x, t) < \dots < \lambda_m(x, t)$) и через $[x_l, x_r]$ обозначим отрезок оси Ox , ограниченный точками пересечения этой оси с m -ой и первой характеристиками.

Определение. Областью зависимости точки (x, t) для системы уравнений (1.1) называется множество точек верхней полуплоскости, ограниченное крайними характеристиками $x = x_m(t)$, $x = x_1(t)$ и отрезком $[x_l, x_r]$.

Область зависимости точки (x, t) изображена на рис. 1, а. Решение \mathbf{u} системы (1.1) в точке (x, t) будет зависеть только от значений $\mathbf{u}_0(x)$ на

отрезке $[x_l, x_r]$. Следовательно, если начальные данные вне отрезка $[x_l, x_r]$ поменять на другие, то решение в точке (x, t) не изменится.

Определение. Областью влияния точки $(x_0, 0)$ называется множество точек (x, t) верхней полуплоскости, ограниченное крайними характеристиками системы (1.1), выходящими из $(x_0, 0)$, т. е. характеристиками, соответствующими собственным значениям λ_l и λ_m .

Область влияния точки $(x_0, 0)$ показана на рис. 1, б. Если начальные данные изменить лишь в точке $(x_0, 0)$, то решение гиперболической системы изменится только в точках (x, t) , принадлежащих области влияния точки $(x_0, 0)$.

Предположим теперь, что нам вместо задачи Коши (1.1) нужно решить начально-краевую задачу на отрезке $[0, l]$. Тогда в дополнение к начальным условиям необходимо задать краевые условия. Количество краевых условий на каждой из границ определяется количеством входящих внутрь области характеристик. Например, если через левую границу $x = 0$ внутрь области входит m_0 характеристик, т. е. m_0 собственных значений λ_k положительны при $x = 0$, то на этой границе надо задать m_0 краевых условий. Если на границе $x = l$ количество отрицательных собственных значений равно m_l и, следовательно, ровно m_l характеристик входит в область через правую границу, то на этой границе необходимо задать m_l краевых условий. Поскольку собственные значения зависят от времени, то количество краевых условий на каждой из границ может меняться со временем.

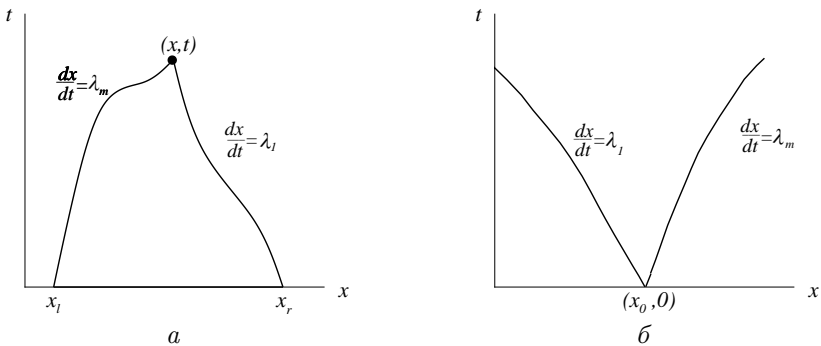


Рис. 1. Характеристики системы уравнений (1.1), ограничивающие области зависимости точки (x, t) (а) и влияния точки $(x_0, 0)$ (б)

Рассмотрим теперь однородную гиперболическую систему уравнений (1.1) с постоянными коэффициентами. Для постоянной матрицы \mathcal{A} ее собственные векторы и собственные значения являются постоянными, т. е. не зависят от x и t .

Пусть \mathbf{l}_k – k -й левый собственный вектор матрицы \mathcal{A} , отвечающий ее собственному значению λ_k : $\mathbf{l}_k \mathcal{A} = \lambda_k \mathbf{l}_k$ ($k = 1, \dots, m$). Умножим систему (1.1) слева на вектор \mathbf{l}_k :

$$\mathbf{l}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{l}_k \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0.$$

Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{l}_k \cdot \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \mathbf{l}_k \cdot \mathbf{u}}{\partial x} = 0,$$

или

$$\frac{\partial s_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial s_k}{\partial x} = 0, \quad (1.3)$$

где

$$s_k = \mathbf{l}_k \cdot \mathbf{u}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

Решение $s_k(x, t)$ уравнения (1.3) переносится вдоль характеристики без изменения и потому вычисляется при $t > 0$ по начальному значению s_k в точке пересечения k -ой характеристики с осью Ox :

$$s_k(x, t) = s_k(x - \lambda_k t, 0). \quad (1.5)$$

Функции s_k называются *инвариантами Римана*.

1.2. Линейная модель мелкой воды. Простейшей математической моделью, в рамках которой можно описывать движение жидкости с поверхностными волнами, является *линейная модель мелкой воды*:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (1.7)$$

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.8)$$

где $\eta(x, t)$ – возвышение поверхности жидкости над невозмущенным уровнем (см. рис. 2), $u(x, t)$ – скорость жидкости, $\eta_0(x)$ и $u_0(x)$ – возвышение и скорость в начальный момент времени $t = 0$, $h_0 = \text{const}$ – глубина бассейна, $g = \text{const}$ – ускорение свободного падения.

Систему уравнений (1.6), (1.7) можно записать в виде однородной системы (1.1) с матрицей \mathcal{A} и вектором решения \mathbf{u} :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & h_0 \\ g & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Матрица \mathcal{A} имеет два различных действительных собственных значения

$$\lambda_1 = -c_0, \quad \lambda_2 = c_0 = \sqrt{gh_0}, \quad (1.10)$$

поэтому система уравнений (1.6), (1.7) имеет гиперболический тип.

Уравнения характеристик (1.2) принимают такой вид:

$$\frac{dx}{dt} = -c_0, \quad \frac{dx}{dt} = c_0, \quad (1.11)$$

поэтому характеристики являются прямыми линиями. Характеристики, проходящие через точку (x, t) , $t > 0$, пересекают ось Ox в точках x_l и x_r , где

$$x_l = x - c_0 t, \quad x_r = x + c_0 t. \quad (1.12)$$

Левые собственные векторы матрицы \mathcal{A} , соответствующие собственным значениям (1.10), задаются формулами

$$\mathbf{l}_1 = (c_0, -h_0), \quad \mathbf{l}_2 = (c_0, h_0). \quad (1.13)$$

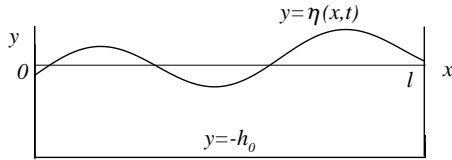


Рис. 2. Обозначения в задаче о распространении и трансформации волн в бассейне с вертикальными стенками

Согласно (1.4) связь между инвариантами Римана $r = s_1$, $s = s_2$ и исходными зависимыми переменными задается формулами

$$r = c_0 \eta - h_0 u, \quad s = c_0 \eta + h_0 u, \quad (1.14)$$

откуда

$$\eta = \frac{r + s}{2c_0}, \quad u = \frac{s - r}{2h_0}. \quad (1.15)$$

Из формулы (1.5) с учетом равенств (1.14) получаем формулы для решения задачи Коши в инвариантах

$$r(x, t) = r(x - \lambda_1 t, 0) = r(x + c_0 t, 0) = c_0 \eta_0(x_r) - h_0 u_0(x_r), \quad (1.16)$$

$$s(x, t) = s(x - \lambda_2 t, 0) = s(x - c_0 t, 0) = c_0 \eta_0(x_l) + h_0 u_0(x_l). \quad (1.17)$$

И наконец, используя соотношения (1.15), получаем точное решение задачи Коши (1.6), (1.7), (1.8)

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{\eta_0(x_l) + \eta_0(x_r)}{2} + \frac{h_0}{c_0} \cdot \frac{u_0(x_l) - u_0(x_r)}{2}, \\ u(x, t) &= \frac{u_0(x_l) + u_0(x_r)}{2} + \frac{c_0}{h_0} \cdot \frac{\eta_0(x_l) - \eta_0(x_r)}{2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

При решении рассматриваемой начально-краевой задачи необходимо поставить по одному условию на каждом из концов отрезка $[0, l]$. Будем, например, считать, что стенки бассейна являются непроницаемыми для жидкости, что означает равенство нулю скорости жидкости на этих стенках:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (1.19)$$

Приведем в окончательном виде математическую формулировку задачи о движении жидкости с поверхностными волнами в ограниченном бассейне: найти непрерывное в замкнутой области $\bar{D} = [0, l] \times [0, T]$ решение $\eta(x, t)$, $u(x, t)$ следующей начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.3. Линейное уравнение переноса. Итак, если матрица \mathcal{A} однородной гиперболической системы уравнений (1.1) постоянна, то такую систему можно свести к системе уравнений в инвариантах Римана,

при этом уравнения для инвариантов Римана не зависят друг от друга и каждое из них имеет вид

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const.} \quad (1.21)$$

Это уравнение является простейшим гиперболическим уравнением и называется *линейным уравнением переноса*. На этом уравнении можно изучать свойства разностных схем, применяемых для решения гиперболических систем уравнений.

Рассмотрим для линейного уравнения переноса (1.21) задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, & -\infty < x < \infty, & \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Характеристика $x = x(t)$ уравнения (1.21) определяется уравнением

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad (1.23)$$

т. е. является прямой с наклоном a к оси Ot . Следовательно, точное решение задачи Коши определяется по формуле

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (1.24)$$

График точного решения в момент времени t получается переносом графика начальной функции на величину at (в положительном направлении оси Ox , если $a > 0$ и наоборот).

Для уравнения переноса с постоянным коэффициентом a легко выписать точное решение и для начально-краевой задачи. Пусть, например, $a = \text{const} > 0$. Тогда корректной будет следующая начально-краевая задача

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, & 0 < x \leq l, & \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= \mu_0(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq l, & \quad u_0(0) = \mu_0(0). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Легко проверить, что если $u_0(x)$ и $\mu_0(t)$ – дифференцируемые функции, то решение задачи (1.25) определяется формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at) & \text{при } t \leq x/a, \\ \mu_0(t - x/a) & \text{при } t \geq x/a. \end{cases} \quad (1.26)$$

1.4. Явная противопоточная схема. Перейдем теперь к изучению конечно-разностных схем решения линейного уравнения переноса.

Начнем с явной схемы с направленными против потока разностями (противопоточная схема) для начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= f(x, t), & 0 < x \leq l, & \quad 0 < t \leq T, & \quad a = \text{const} > 0, \\ u(0, t) &= \mu_0(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq l, & \quad u_0(0) = \mu_0(0). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Всюду далее будем рассматривать только равномерные сетки, покрывающие замкнутую область $\bar{D} = [0, l] \times [0, T]$. Построим следующую разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} &= f_j^n, & j &= 1, \dots, N, \\ u_0^n &= \mu_0^n, & n &= 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), & j &= 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.28)$$

аппроксимирующую задачу (1.27) с порядком $O(\tau + h)$. Как и ранее, эту схему можно записать в операторном виде $L_h u_h = f_h$.

Название *противопоточная схема* связано с тем, что если мы рассматриваем уравнение переноса как модельное уравнение для системы уравнений, описывающих течение жидкости или газа, и отождествляем коэффициент a со скоростью жидкости, то при положительной скорости, т. е. при $a > 0$, в схеме берутся левые разностные производные, использующие узел x_{j-1} , расположенный против «потока» (расположенный вверх по потоку).

Введем равномерные нормы в пространстве сеточных функций U_h и пространстве правых частей F_h :

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_n \|u^n\|_C, \quad (1.29)$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \max \left(\max_n |\mu_0^n|, \|(u_0)_h\|_C, \max_n \|f^n\|_C \right), \quad (1.30)$$

где

$$\|u^n\|_C = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j^n|, \quad \|f^n\|_C = \max_{1 \leq j \leq N} |f_j^n|$$

– равномерные нормы на слое $t = t^n$.

С помощью принципа максимума можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Выполнение условия*

$$a \frac{\tau}{h} \leq 1 \quad (1.31)$$

достаточно для устойчивости противоположной схемы (1.28) в равномерной норме.

Доказательство. Пусть x_j – узел сетки с номером $1 \leq j \leq N$. Перепишем разностное уравнение схемы в этом узле

$$u_j^{n+1} = (1-r)u_j^n + ru_{j-1}^n + \tau f_j^n,$$

где $r = a\tau/h$. Из условия теоремы следует, что $1-r \geq 0$, поэтому будет справедливой следующая оценка

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1}| &\leq (1-r)|u_j^n| + r|u_{j-1}^n| + \tau|f_j^n| \leq (1-r)\|u^n\|_C + r\|u^n\|_C + \tau\|f^n\|_C \leq \\ &\leq \|u^n\|_C + \tau \max_m \|f^m\|_C. \end{aligned}$$

В граничном узле имеем следующую оценку

$$|u_0^{n+1}| = |\mu_0^{n+1}| \leq \max_m |\mu_0^m|.$$

Следовательно, максимальное из левых частей этих неравенств не может превзойти максимального из двух чисел в правых частях этих неравенств:

$$\|u^{n+1}\|_C \leq \max \left(\max_m |\mu_0^m|, \|u^n\|_C + \tau \max_m \|f^m\|_C \right),$$

а это и есть принцип максимума. Получили, что при условии (1.31) схема (1.28) удовлетворяет принципу максимума. Поэтому (см. теорему 3.1.1) она будет устойчивой в равномерной норме по начальным данным, краевым условиям и по правой части. ■

Это же условие (1.31) является и необходимым условием устойчивости схемы (1.28), что следует из спектрального признака устойчивости Неймана. Докажем это. Возьмем гармонику

$$u_j^n = \lambda^n e^{ij\varphi} \tag{1.32}$$

и подставим ее в однородное разностное уравнение. В результате для множителя перехода получим уравнение

$$\lambda = 1 - r(1 - e^{-i\varphi}) = 1 - r(1 - \cos \varphi) - ir \sin \varphi.$$

Следовательно,

$$|\lambda|^2 = 1 - 2r(1 - \cos \varphi) + r^2(1 - \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi =$$

$$= 1 - r(1 - \cos \varphi) [2 - r(1 - \cos \varphi) - r(1 + \cos \varphi)] = 1 - 2r(1 - \cos \varphi)(1 - r).$$

Пусть в схеме (1.28) шаги τ и h связаны законом предельного перехода

$$r = a \frac{\tau}{h} = \text{const.} \quad (1.33)$$

Тогда собственные числа $\lambda(\varphi)$ не зависят от τ , поэтому необходимое условие устойчивости Неймана сводится к требованию

$$|\lambda(\varphi)| \leq 1, \quad \forall \varphi \in R. \quad (1.34)$$

или

$$r(1 - \cos \varphi)(1 - r) \geq 0, \quad \forall \varphi \in R. \quad (1.35)$$

Очевидно, что это неравенство эквивалентно при $a > 0$ условию (1.31).

Итак, условие (1.31) при $a > 0$ является необходимым и достаточным условием устойчивости противопоточной схемы в равномерной норме.

Отметим, что при $a < 0$ схема (1.28) абсолютно неустойчива, поскольку в этом случае нарушается неравенство (1.34) (см. задачу 1.1). Какую же схему следует использовать при $a < 0$, когда поток распространяется справа налево? Отметим, что в этом случае корректной будет такая начально-краевая задача

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= f(x, t), & 0 \leq x < l, & \quad 0 < t \leq T, & \quad a = \text{const} < 0, \\ u(l, t) &= \mu_l(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq l, & \quad u_0(l) = \mu_l(l). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Для этой задачи возьмем следующую противопоточную схему

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} &= f_j^n, & j = 0, \dots, N-1, \\ u_N^n &= \mu_l^n, & n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), & j = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.37)$$

которая аппроксимирует дифференциальную задачу (1.36) с порядком $O(\tau + h)$. Используя принцип максимума и спектральный признак Неймана, можно показать, что схема (1.37) при $a < 0$ будет устойчива при выполнении условия

$$-a \frac{\tau}{h} \leq 1.$$

С другой стороны, при $a > 0$ схема (1.37) будет абсолютно неустойчивой (см. задачу 1.2).

Таким образом, мы построили две условно устойчивые явные схемы с направленными против потока разностями для уравнения переноса с постоянным коэффициентом a

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} &= f_j^n, & \text{если } a > 0, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} &= f_j^n, & \text{если } a < 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Они устойчивы при выполнении неравенства

$$|a| \frac{\tau}{h} \leq 1. \quad (1.39)$$

Во внутренних узлах сетки противопоточную схему (1.38) можно записать в виде одного уравнения

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a + |a|}{2} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + \frac{a - |a|}{2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = f_j^n. \quad (1.40)$$

Аналогично выглядит явная противопоточная схема и в случае знакопеременного коэффициента $a(x, t)$. Например, если на границах отрезка $[0, l]$ выполнены условия

$$a(0, t) > 0, \quad a(l, t) < 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

то получим такую противопоточную схему

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a^+ \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + a^- \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} &= f_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= \mu_0^n, \quad u_N^n = \mu_l^n, \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где

$$a^+ = \frac{a_j^n + |a_j^n|}{2}, \quad a^- = \frac{a_j^n - |a_j^n|}{2}, \quad (1.42)$$

которая аппроксимирует с порядком $O(\tau + h)$ начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t + a(x, t)u_x &= f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= \mu_0(t), \quad u(l, t) = \mu_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (1.43)$$

С помощью принципа максимума можно доказать (см. задачу 1.10), что для устойчивости противопоточной схемы (1.41) с переменным коэффициентом $a(x, t)$ достаточно выполнения условия

$$\max_{x,t} |a(x, t)| \frac{\tau}{h} \leq 1. \quad (1.44)$$

1.5. Схема Лакса. Далее для простоты изложения будем рассматривать начально-краевую задачу (1.27) с однородным уравнением переноса

$$u_t + au_x = 0. \quad (1.45)$$

В схеме Лакса разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение переноса (1.45), записывается так

$$\frac{u_j^{n+1} - 0,5(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (1.46)$$

Для локальной погрешности аппроксимации имеем выражение

$$\psi_{h,j}^n = \frac{\tau}{2} u_{tt} - \frac{h^2}{2\tau} u_{xx} + \dots,$$

поэтому при $\tau = O(h^2)$ схема Лакса не будет аппроксимировать уравнение переноса, а при законе предельного перехода

$$r = \frac{a\tau}{h} = \text{const} \quad (1.47)$$

будет аппроксимировать с порядком $O(\tau+h)$. Таким образом, аппроксимация имеет место лишь при определенной связи между шагами τ и h , т. е. схема Лакса принадлежит к классу *условно аппроксимирующих схем*.

Для множителя перехода получаем формулу

$$\lambda(\varphi) = \cos \varphi - ir \sin \varphi.$$

Следовательно, при законе предельного перехода (1.47) необходимое условие устойчивости схемы Лакса заключается в выполнении неравенства $r \leq 1$, т. е.

$$\frac{a\tau}{h} \leq 1. \quad (1.48)$$

1.6. Схема Лакса – Вендроффа. Разностные уравнения этой схемы выглядят так

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1/2}^* - 0,5(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\tau/2} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} &= 0, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1/2}^* - u_{j-1/2}^*}{h} &= 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Схема Лакса – Вендроффа относится к семейству *двухшаговых схем*. В этой схеме сначала в полуцелых узлах $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ по схеме Лакса вычисляются вспомогательные величины $u_{j+1/2}^*$, относящиеся к моменту времени $t^n + \tau/2$. Затем, на втором шаге, вычисляются значения искомой сеточной функции u_j^{n+1} на $(n+1)$ -м слое по времени.

Для исследования аппроксимации и устойчивости двухшаговых схем предварительно производится исключение из схемы вспомогательных величин u^* . В результате исключения получим одношаговую схему Лакса – Вендроффа

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{a^2 \tau}{2} \cdot \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad (1.50)$$

которая, как легко проверить, аппроксимирует уравнение переноса (1.45) со вторым порядком по τ и h .

Для множителя перехода имеем такое выражение

$$\lambda = 1 - ir \sin \varphi - 2r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Поэтому необходимое условие устойчивости $|\lambda| \leq 1$ будет равносильно выполнению неравенства

$$\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \leq 1,$$

или

$$1 - 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4r^4 \sin^4 \frac{\varphi}{2} + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \leq 1.$$

Последнее неравенство равносильно условию $r^2 \leq 1$. Таким образом, необходимое условие устойчивости схемы Лакса – Вендроффа совпадает с необходимым условием (1.48) устойчивости схемы Лакса.

1.7. Диссипация и дисперсия. Наряду с уравнением переноса

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const} \quad (1.51)$$

рассмотрим еще два уравнения

$$u_t + au_x = \mu u_{xx}, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad (1.52)$$

$$u_t + au_x + \nu u_{xxx} = 0, \quad \nu = \text{const}. \quad (1.53)$$

Пусть начальная функция в задаче Коши для этих уравнений представляется в виде ряда Фурье

$$u(x, 0) = \sum_m b_m e^{imx}. \quad (1.54)$$

Будем искать решение каждого из этих уравнений методом разделения переменных

$$u(x, t) = \sum_m b_m \lambda^t e^{imx} = \sum_m b_m u_m(x, t), \quad (1.55)$$

где $u_m(x, t)$ – гармоника с волновым числом m

$$u_m(x, t) = \lambda^t e^{imx}, \quad (1.56)$$

λ подлежит определению. Действительная и мнимая часть гармоники представляют собой m -волны, длина l которых связана с волновым числом формулой

$$l = \frac{2\pi}{m}. \quad (1.57)$$

Так как уравнения (1.51)–(1.53) линейны, то поведение каждой из гармоник можно рассматривать независимо. Подставляя гармонику с волновым числом m в уравнение переноса (1.51), получаем

$$\ln(\lambda) + aim = 0$$

или

$$\lambda = e^{-aim}.$$

Следовательно, если гармоника (1.56) является решением уравнения переноса, то она имеет вид

$$u_m(x, t) = e^{im(x-at)}. \quad (1.58)$$

Обозначая $\xi = x - at$, получаем

$$u_m(x, t) = e^{im\xi} = u_m(\xi, 0). \quad (1.59)$$

Таким образом, в любой момент времени $t > 0$ гармоника u_m получается сдвигом начальной гармоники на величину at . Следовательно, уравнение переноса описывает движение m -волн, которые независимо от их длины распространяются с постоянной скоростью $v_m = a$ без искажения своей формы.

Легко проверить, что гармоника (1.56) будет решением второго уравнения (1.52), если

$$\ln(\lambda) + aim = -\mu m^2$$

или

$$\lambda = e^{-aim} e^{-\mu m^2},$$

т. е. гармоника в этом случае имеет вид

$$u_m(x, t) = e^{-\mu m^2 t} e^{im(x-at)}.$$

Следовательно, для всех гармоник происходит затухание амплитуды волн (*диссипация* волн). Поскольку $m = 2\pi/l$, то короткие волны затухают быстрее длинных. Скорость v_m распространения волн не зависит от длины волн и равна по-прежнему a . За диссипацию волн отвечает член μu_{xx} со второй производной от решения.

Наконец, подстановка гармоники в уравнение (1.53) дает

$$\ln(\lambda) + aim + \nu(im)^3 = 0$$

или

$$\lambda = e^{-im(a-\nu m^2)},$$

откуда получаем, что

$$u_m(x, t) = e^{im(x-(a-\nu m^2)t)}.$$

Таким образом, третье уравнение описывает движение волны без изменения ее амплитуды (без диссипации). Но скорость ее распространения зависит от длины волны

$$v_m = a - \nu m^2. \quad (1.60)$$

Из этой формулы видно, что волны разной длины распространяются с различными скоростями (волны *диспергируют*). Более значительным изменениям подвергается скорость распространения коротковолновых возмущений (большие m). За дисперсию волн отвечает член νu_{xxx} с третьей производной от решения.

Рассмотрев поведение отдельных гармоник, мы теперь сможем предсказать качественное поведение решения (1.55) задачи Коши для этих уравнений. Пусть, например, начальная функция $u(x, 0)$ имеет вид ступеньки

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

и $a > 0$. Разложение такой функции в ряд Фурье (1.54) будет содержать весь набор гармоник.

Решение задачи Коши для уравнения переноса (1.51) представляется в таком виде

$$u(x, t) = \sum_m b_m e^{im(x-at)} = \sum_m b_m e^{im\xi} = u(\xi, 0), \quad (1.62)$$

т. е. решением задачи будет движущийся со скоростью a начальный профиль.

Решение

$$u(x, t) = \sum_m b_m e^{-\mu m^2 t} e^{im(x-at)} = \sum_m b_m e^{-\mu m^2 t} e^{im\xi} \quad (1.63)$$

задачи Коши для уравнения (1.52) с диссипативным членом, в котором короткие волны сильно затухают, будет иметь вид размазанной ступеньки.

Наконец, решение

$$u(x, t) = \sum_m b_m e^{im(x-(a-\nu m^2)t)} \quad (1.64)$$

задачи Коши для уравнения (1.53), в котором волны разной длины движутся с разными скоростями, имеет немонотонный, осциллирующий характер. Согласно формуле (1.60) при $\nu > 0$ волны малой длины будут иметь скорость меньшую, чем волны большой длины, а при $\nu < 0$ — наоборот. Поэтому осцилляции будут отставать от основного решения (описываемого первыми гармониками) при $\nu > 0$ и, соответственно, перемещаться впереди при $\nu < 0$.

1.8. Дифференциальное приближение разностной схемы.

Вернемся к численному решению задачи Коши для уравнения переноса (1.51). В качестве начального профиля возьмем ступеньку

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq x_0, \\ 0, & x > x_0 \end{cases} \quad (1.65)$$

и проведем расчет по явной противопоточной схеме

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad a = \text{const} > 0. \quad (1.66)$$

В результате получим решение в виде размазанной ступеньки (рис. 3), т. е. решение будет качественно таким же как и решение уравнения (1.52) с диссипативным членом. В чем дело? Ведь мы хотели решить уравнение переноса, в котором диссипативного члена нет. Дело в том, что мы искали численно решение не уравнения переноса, а решение разностной схемы. Таким образом, свойства решений аппроксимируемого дифференциального уравнения и аппроксимирующего разностного уравнения могут не совпадать. Как же в таком случае предсказать свойства решения разностного уравнения?

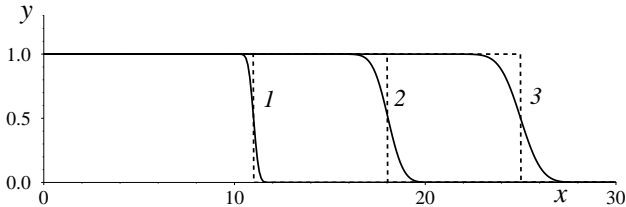


Рис. 3. Графики точного решения (штриховые линии) и численного решения (сплошные линии), полученного с помощью противопоточной схемы (1.66) в моменты времени $t = 1$ (1); $t = 8$ (2); $t = 15$ (3). $a = 1$; $x_0 = 10$; $a\tau/h = 0,5$

Это можно сделать с помощью метода дифференциального приближения, с которым мы сейчас кратко познакомимся. Суть этого метода заключается в замене исходного разностного уравнения специальным дифференциальным уравнением, которое обладает всеми свойствами исследуемого разностного уравнения. Поэтому вместо исследования разностного уравнения исследуют это дифференциальное уравнение, что во многих случаях сделать гораздо проще. Получение дифференциального уравнения, соответствующего разностному уравнению, начинается с записи этого разностного уравнения в виде так называемой *теоретической разностной схемы*, в которой разностные операторы действуют в том же функциональном пространстве, что и аппроксимируемые ими дифференциальные операторы. Например, разностное уравнение (1.66) записывается в виде следующей теоретической разностной

схемы

$$\frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} + a \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} = 0. \quad (1.67)$$

Решением такой схемы является функция $u(x, t)$ непрерывных аргументов x и t в то время, как решением уравнения (1.66) является сеточная функция u_h , определенная только в узлах сетки.

Пусть достаточно гладкая функция $u(x, t)$ является решением теоретической разностной схемы (1.67). Подставим ее в эту схему и выразим $u(x, t + \tau)$ и $u(x - h, t)$ через значения функции и ее производных в точке (x, t) по формуле Тейлора. В результате получим дифференциальное уравнение, эквивалентное разностной схеме (1.67)

$$u_t + au_x + \frac{\tau}{2}u_{tt} + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt} - a\frac{h}{2}u_{xx} + a\frac{h^2}{6}u_{xxx} + \dots = 0. \quad (1.68)$$

Определение. Дифференциальное уравнение бесконечного порядка (1.68), полученное после разложения по формуле Тейлора решения $u(x, t)$ теоретической разностной схемы (1.67), называется дифференциальным представлением разностной схемы (1.66).

Некоторые свойства разностной схемы можно исследовать уже с помощью этого дифференциального представления, но для наших целей будет удобнее использовать другую форму дифференциального представления, получающуюся в результате исключения из (1.68) всех производных по времени кроме той, которая входит в аппроксимируемое уравнение (1.51), т. е. кроме u_t .

Покажем, например, как исключить производные по времени в членах порядка τ и τ^2 . Для этого перепишем уравнение (1.68) с учетом слагаемых до порядка $O(\tau^2)$ и $O(h^2)$

$$u_t + au_x + \frac{\tau}{2}u_{tt} + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt} - a\frac{h}{2}u_{xx} + a\frac{h^2}{6}u_{xxx} = O(\tau^3 + h^3) \quad (1.69)$$

и найдем с помощью полученного уравнения производную u_t :

$$u_t = -au_x - \frac{\tau}{2}u_{tt} - \frac{\tau^2}{6}u_{ttt} + a\frac{h}{2}u_{xx} - a\frac{h^2}{6}u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3) \quad (1.70)$$

Эту производную подставим в слагаемые уравнения (1.69), содержащие производные $(u_t)_t$ и $(u_t)_{tt}$. Учитывая порядок малости коэффициентов при второй и третьей производных по времени, получаем, что в $(u_t)_t$

достаточно подставить производную (1.70), вычисленную с точностью $O(\tau^2 + h^2)$:

$$u_t = -au_x - \frac{\tau}{2}u_{tt} + a\frac{h}{2}u_{xx} + O(\tau^2 + h^2), \quad (1.71)$$

а в $(u_t)_{tt}$ – с точностью $O(\tau + h)$:

$$u_t = -au_x + O(\tau + h). \quad (1.72)$$

В результате такой подстановки уравнение (1.69) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t + au_x + \frac{\tau}{2} \left(-au_x - \frac{\tau}{2}u_{tt} + a\frac{h}{2}u_{xx} \right)_t + \frac{\tau^2}{6} (-au_x)_{tt} = \\ = a\frac{h}{2}u_{xx} - a\frac{h^2}{6}u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u_t + au_x - \frac{a\tau}{2}u_{tx} - \frac{\tau^2}{4}u_{ttt} + \frac{a\tau h}{4}u_{txx} - \frac{a\tau^2}{6}u_{ttx} = \\ = \frac{ah}{2}u_{xx} - \frac{ah^2}{6}u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Выполнив подстановки в уравнение (1.69), далее аналогичные действия предпринимаем с уравнением (1.73). Теперь надо подставить производную u_t , определенную из уравнения (1.73), в четыре слагаемых этого же уравнения:

$$\begin{aligned} u_t + au_x - \frac{a\tau}{2} \left(-au_x + \frac{a\tau}{2}u_{tx} + \frac{ah}{2}u_{xx} \right)_x - \frac{\tau^2}{4} (-au_x)_{tt} + \\ + \frac{a\tau h}{4} (-au_x)_{xx} - \frac{a\tau^2}{6} (-au_x)_{tx} = \frac{ah}{2}u_{xx} - \frac{ah^2}{6}u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3). \end{aligned}$$

После приведения подобных получим уравнение

$$\begin{aligned} u_t + au_x - \frac{a^2\tau^2}{12}u_{txx} + \frac{a\tau^2}{4}u_{ttx} = \\ = \frac{ah}{2}(1-r)u_{xx} + \left(\frac{a^2\tau h}{2} - \frac{ah^2}{6} \right) u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3), \end{aligned} \quad (1.74)$$

в котором, в отличие от (1.69), нет вторых производных по времени. Оставшиеся в (1.74) смешанные производные u_{txx} и u_{ttx} вычислим на основе равенства (1.72):

$$u_{txx} = -au_{xxx} + O(\tau + h), \quad u_{ttx} = a^2u_{xxx} + O(\tau + h). \quad (1.75)$$

Следовательно, дифференциальное представление (1.74) примет вид

$$u_t + au_x = \frac{ah}{2}(1-r)u_{xx} - \frac{ah^2}{6}(2r^2 - 3r + 1)u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3). \quad (1.76)$$

Таким образом, мы избавились от производных по времени при степенях τ и τ^2 . Но производные по t пока остались при более старших степенях τ в правой части $O(\tau^3 + h^3)$. Если продолжить описанную процедуру дальше, то в представлении (1.68) можно убрать производные по времени до сколь угодно высокого порядка. В результате получим дифференциальное представление схемы в виде

$$u_t + au_x = \frac{ah}{2}(1-r)u_{xx} + \frac{ah^2}{6}(1-r)(2r-1)u_{xxx} + \dots \quad (1.77)$$

или

$$u_t + au_x = \sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}. \quad (1.78)$$

Определение. Уравнение бесконечного порядка (1.78) называется *Π-формой дифференциального представления разностной схемы*.

Пусть разностная схема имеет порядки аппроксимации γ_1 и γ_2 по τ и h соответственно.

Определение. Дифференциальное уравнение, полученное из *Π-формы дифференциального представления отбрасыванием членов порядка $O(\tau^{\gamma_1+1}, h^{\gamma_2+1})$ и более высокого, называется первым дифференциальным приближением (п. д. п.) разностной схемы*.

Для противопоточной схемы (1.66) п. д. п. является дифференциальным уравнением второго порядка

$$u_t + au_x = \mu u_{xx}, \quad \mu = \frac{ah}{2}(1-r), \quad (1.79)$$

которое, как видим, совпадает с уравнением (1.52) с диссипативным членом. Таким образом, при $r \neq 1$ наша схема неявно вводит в аппроксимируемое уравнение переноса вязкость (диссипацию), которую называют *аппроксимационной или схемной вязкостью*. Наличие аппроксимационной вязкости и приводит к размазыванию начальной ступеньки.

Определение. Свойство разностной схемы, обусловленное наличием в ее п. д. п. производных четного порядка, называется *численной диссипацией*.

П-форма дифференциального представления разностной схемы Лакса – Вендроффа имеет вид

$$u_t + au_x = -\frac{ah^2}{6}(1-r^2)u_{xxx} - \frac{ah^3}{8}r(1-r^2)u_{xxxx} + \dots,$$

а п. д. п.

$$u_t + au_x + \nu u_{xxx} = 0, \quad \nu = \frac{ah^2}{6}(1-r^2) \quad (1.80)$$

совпадает с уравнением (1.53) с дисперсионным членом. Следовательно, при $r \neq 1$ схема Лакса – Вендроффа неявно вводит в аппроксимируемое уравнение переноса дисперсию, поэтому решение разностной схемы может осциллировать (рис. 4).

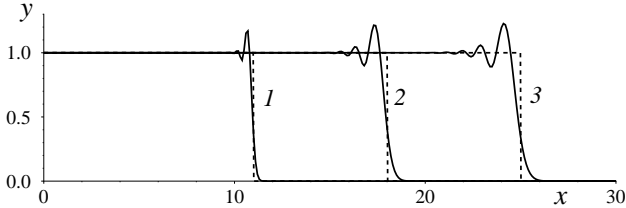


Рис. 4. Графики точного решения (штриховые линии) и численного решения (сплошные линии), полученного с помощью схемы Лакса – Вендроффа в моменты времени $t = 1$ (1); $t = 8$ (2); $t = 15$ (3). $a = 1$; $x_0 = 10$; $a\tau/h = 0,5$

Определение. Свойство разностной схемы, обусловленное наличием в ее п. д. п. производных нечетного порядка, называется численной дисперсией.

Подведем итог наших рассуждений. Для задач с плавно меняющимся решением, вклад в которое высокочастотных гармоник невелик, точность схемы Лакса – Вендроффа выше точности противопоточной схемы. Если мы решаем численно задачу, в которой решение имеет резко меняющийся монотонный профиль, то применение противопоточной схемы первого порядка даст монотонный неосциллирующий профиль, но сильно сглаженный. Это результат действия численной диссипации. Схема Лакса – Вендроффа, обладающая численной дисперсией, может дать немонотонные профили численного решения в окрестности разрыва или резкого изменения решения, искаженные нефизичными осцилляциями.

З А Д А Ч И

1.1. Показать, что при $a < 0$ схема (1.28) абсолютно неустойчива.

1.2. С помощью спектрального метода Неймана показать, что явная схема для уравнения (1.21)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad (1.81)$$

$$n = 0, \dots, M-1, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

при $a > 0$ абсолютно неустойчива.

1.3. С помощью спектрального метода Неймана вывести необходимое условие устойчивости трехслойной схемы «leap-frog» (схема с перешагиванием, схема «чехарда») для уравнения (1.21)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (1.82)$$

$$n = 1, \dots, M-1, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

если закон предельного перехода задан в виде (1.33).

1.4. Определить порядок аппроксимации явной схемы с центральной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (1.83)$$

построенной для уравнения переноса (1.21). С помощью спектрального метода Неймана исследовать устойчивость этой схемы, если закон предельного перехода задан в виде

$$|a| \frac{\tau}{h} = \text{const}. \quad (1.84)$$

1.5. Определить порядок аппроксимации *мажорантной* схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{|a|h}{2} \cdot \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad (1.85)$$

построенной для уравнения переноса (1.21). С помощью спектрального метода Неймана исследовать устойчивость этой схемы, если закон предельного перехода задан в виде (1.84).

1.6. Определить порядок аппроксимации схемы Мак-Кормака

$$\begin{aligned}\frac{u_j^* - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} &= 0, \\ \frac{u_j^{n+1} - 0,5(u_j^* + u_j^n)}{\tau/2} + a \frac{u_j^* - u_{j-1}^*}{h} &= 0,\end{aligned}\tag{1.86}$$

построенной для уравнения переноса (1.21). С помощью спектрального метода Неймана исследовать устойчивость этой схемы, если закон предельного перехода задан в виде (1.84).

1.7. Определить порядок аппроксимации противопоточной схемы с весами

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \sigma a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + (1 - \sigma)a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0,\tag{1.87}$$

построенной для уравнения переноса (1.21) с коэффициентом $a > 0$. С помощью спектрального метода Неймана вывести необходимое условие устойчивости схемы (1.87), если закон предельного перехода задан в виде (1.84).

1.8. Используя принцип максимума, исследовать устойчивость в равномерной норме неявной противопоточной схемы

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} &= f_j^{n+1}, \quad j = 1, \dots, N, \\ u_0^n &= \mu_0^n, \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N,\end{aligned}\tag{1.88}$$

построенной для задачи (1.27).

1.9. Используя принцип максимума, найти достаточное условие устойчивости в равномерной норме противопоточной схемы с весами

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \sigma a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + (1 - \sigma)a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} &= f_j^{n+1/2}, \\ u_0^n &= \mu_0^n, \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N,\end{aligned}\tag{1.89}$$

построенной для задачи (1.27). Здесь $0 \leq \sigma \leq 1$.

1.10. Используя принцип максимума, доказать, что выполнение условия (1.44) достаточно для устойчивости противопоточной схемы (1.41) с переменным коэффициентом $a(x, t)$.

1.11. Получить п. д. п. (1.80) схемы Лакса – Вендроффа.

1.12. Найти п. д. п. неявной схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0, \quad (1.90)$$

построенной для уравнения переноса (1.21) с коэффициентом $a > 0$. Дать качественное объяснение поведения решения разностной схемы при $t > 0$, если в начальный момент времени $t = 0$ задана ступенька (1.61).

§ 2. Свойство монотонности разностных схем

2.1. Одно из основных требований, предъявляемых к разностным схемам, состоит в том, что решение разностного уравнения должно передавать особенности поведения решения аппроксимируемого дифференциального уравнения. Рассмотрим, например, задачу Коши для линейного уравнения переноса

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2.2)$$

Если $u_0(x)$ — неубывающая (невозрастающая) функция переменной x , то при любом фиксированном $t > 0$ решение $u(x, t)$ задачи (2.1), (2.2) также будет неубывающей (невозрастающей) функцией переменной x . Это следует из того, что в любой момент времени решение задается формулой

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (2.3)$$

Естественно потребовать, чтобы и решение разностной схемы, аппроксимирующей задачу (2.1), (2.2), тоже обладало аналогичным свойством. Но оказывается, что многие разностные схемы нарушают монотонность численного решения: вместо ожидаемых монотонных профилей получаются решения, содержащие нефизичные осцилляции (рис. 4). Причиной их возникновения является численная дисперсия разностных

схем, рассмотренная в предыдущем параграфе. В настоящем параграфе мы приведем условия, при выполнении которых разностная схема будет сохранять монотонность численного решения.

Рассмотрим произвольную явную разностную схему

$$u_j^{n+1} = \sum_{\alpha} b_{\alpha} u_{j+\alpha}^n, \quad (2.4)$$

где α — целое число, $\alpha = \alpha_1, \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_2$, узлы $x_{j+\alpha}$ определяют шаблон схемы.

Определение. Разностная схема (2.4) называется схемой, сохраняющей монотонность численного решения (монотонной схемой), если она любую монотонную функцию u^n переводит в монотонную на $(n+1)$ -м временном слое функцию u^{n+1} , причем с тем же направлением роста.

Пример 2.1. Аппроксимируем уравнение (2.1) на равномерной сетке противопоточной схемой

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0. \quad (2.5)$$

Эта схема имеет первый порядок аппроксимации по τ и h . Пусть сеточная функция u^n на n -ом временном слое является монотонной, например, монотонно возрастающей функцией, т. е. $u_j^n \geq u_{j-1}^n$ для произвольного j . В этом случае при выполнении условия устойчивости схемы, имеющего вид $a\varpi \leq 1$, где $\varpi = \tau/h$, получим

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} &= (u_j^n - a\varpi(u_j^n - u_{j-1}^n)) - (u_{j-1}^n - a\varpi(u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)) = \\ &= (1 - a\varpi)(u_j^n - u_{j-1}^n) + a\varpi(u_{j-1}^n - u_{j-2}^n) \geq 0. \end{aligned}$$

Итак, решение u^{n+1} монотонно возрастает и на $(n+1)$ -ом слое. Таким образом, противопоточная схема (обладающая диссипацией при $a\varpi < 1$) является схемой, сохраняющей монотонность. ■

Пример 2.2. Покажем, что схема Лакса – Вендроффа (1.49) (не обладающая диссипацией при $a\varpi < 1$) не сохраняет монотонность численного решения. Пусть начальная функция для уравнения (2.1) имеет вид (1.61)

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \leq 0, \\ 0, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Следовательно, начальная сеточная функция

$$u_j^0 = u_0(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } j \leq 0, \\ 0, & \text{при } j > 0 \end{cases}$$

является монотонно убывающей. Перепишем рассматриваемую схему в виде одношаговой схемы (1.50), а затем в виде схемы (2.4) с коэффициентами

$$b_{-1} = \frac{a^2 \bar{x}^2 + a\bar{x}}{2}, \quad b_0 = 1 - a^2 \bar{x}^2, \quad b_1 = \frac{a^2 \bar{x}^2 - a\bar{x}}{2}. \quad (2.6)$$

Тогда нетрудно убедиться, что на первом слое по времени имеет место равенство

$$u_j^1 = \begin{cases} 1, & \text{при } j \leq -1, \\ b_{-1} + b_0, & \text{при } j = 0, \\ b_{-1}, & \text{при } j = 1, \\ 0, & \text{при } j \geq 2. \end{cases}$$

При $a\bar{x} < 1$ схема устойчива, но $b_{-1} + b_0 > 1$, т. е. сеточная функция u_j^1 не является монотонно убывающей. ■

Монотонность схем для уравнений с постоянными коэффициентами можно исследовать, пользуясь следующей теоремой [3].

Теорема 2.1. *Для того чтобы разностная схема (2.4) с постоянными коэффициентами b_α сохраняла монотонность, необходимо и достаточно выполнение при всех α условий*

$$b_\alpha \geq 0. \quad (2.7)$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что схема (2.4) сохраняет монотонность, однако существует отрицательный коэффициент $b_{\alpha_0} < 0$. Возьмем монотонно возрастающую функцию

$$u_j^n = \begin{cases} 0, & j < \alpha_0, \\ 1, & j \geq \alpha_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} - u_{-1}^{n+1} &= \sum_{\alpha} b_{\alpha} u_{\alpha}^n - \sum_{\alpha} b_{\alpha} u_{-1+\alpha}^n = \\ &= \sum_{\alpha \geq \alpha_0} b_{\alpha} - \sum_{\alpha \geq \alpha_0+1} b_{\alpha} = b_{\alpha_0} < 0, \end{aligned}$$

т. е. функция u^{n+1} не является монотонно возрастающей, и, следовательно, схема (2.4) не сохраняет монотонность, что противоречит исходному предположению. Полученное противоречие доказывает, что все коэффициенты b_α неотрицательны.

Достаточность. Пусть $b_\alpha \geq 0$ и u_j^n – монотонная функция, например, монотонно возрастающая функция. Тогда

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} &= \sum_{\alpha} b_{\alpha} u_{j+\alpha}^n - \sum_{\alpha} b_{\alpha} u_{j-1+\alpha}^n = \\ &= \sum_{\alpha} b_{\alpha} (u_{j+\alpha}^n - u_{j-1+\alpha}^n) \geq 0, \end{aligned}$$

т. е. u^{n+1} – также монотонно возрастающая функция. Таким образом, схема (2.4) сохраняет монотонность. \blacksquare

Возвратимся вновь к примерам 2.1 и 2.2, причем теперь не будем предполагать, что $a > 0$. Противопоточная схема для уравнения (2.1) при произвольном знаке коэффициента a выглядит так:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a^+ \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + a^- \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad (2.9)$$

где

$$a^+ = \frac{a + |a|}{2}, \quad a^- = \frac{a - |a|}{2}.$$

Перепишем ее в виде (2.4)

$$u_j^{n+1} = b_{-1} u_{j-1}^n + b_0 u_j^n + b_1 u_{j+1}^n, \quad (2.10)$$

где

$$b_{-1} = \varkappa a^+, \quad b_0 = 1 - \varkappa |a|, \quad b_1 = -\varkappa a^-.$$

При выполнении условия устойчивости

$$|a| \varkappa \leq 1 \quad (2.11)$$

все эти коэффициенты неотрицательны. Кроме того, они являются постоянными, поэтому, согласно теореме 2.1, противопоточная схема (2.9) сохраняет монотонность решения при условии (2.11).

Схема Лакса – Вендроффа устойчива при том же условии (2.11), что и противопоточная схема, и ее можно записать в виде (2.10) с коэффициентами (2.6), откуда видно, что при условии $|a| \varkappa < 1$ один из

коэффициентов $-b_{-1}$ или b_1 – отрицателен. Согласно теореме 2.1, отсюда следует, что схема Лакса – Вендроффа, имеющая второй порядок аппроксимации по τ и h , не сохраняет монотонность численного решения. Но, возможно, существуют другие схемы второго порядка аппроксимации, которые обладают свойством монотонности. Оказывается, что таких схем нет. В работе [3] показано, что для линейного уравнения переноса (2.1) невозможно построить монотонную схему с постоянными коэффициентами второго порядка аппроксимации.

2.2. Рассмотрим теперь схему (2.4) с переменными коэффициентами b_α . Будет ли для таких схем условие (2.7) неотрицательности коэффициентов достаточным для сохранения монотонности численного решения? Оказывается, нет. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.3. Пусть решается задача Коши для уравнения

$$u_t + a(x)u_x = 0, \quad (2.12)$$

где $a(x)$ – строго возрастающая положительная ограниченная функция: $0 < a(x) < 1$ и $a' > 0$. Возьмем для решения этой задачи схему с переменными коэффициентами

$$\frac{u_j^{n+1} - 0,5(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a_j \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (2.13)$$

где $a_j = a(x_j)$, x_j – узел равномерной сетки. Выписанная схема является аналогом схемы Лакса (1.46), которая сохраняет монотонность численного решения (см. задачу 2.1).

Будем считать, что для любого j выполнено условие

$$\varkappa a_j < 1, \quad (2.14)$$

гарантирующее устойчивость схемы (2.13) в равномерной норме по начальным данным:

$$\|u^{n+1}\|_C \leq \|u^0\|_C. \quad (2.15)$$

Запишем схему (2.13) в виде (2.4):

$$u_j^{n+1} = b_{-1,j}u_{j-1}^n + b_{1,j}u_{j+1}^n, \quad (2.16)$$

где

$$b_{-1,j} = \frac{1 + \varkappa a_j}{2}, \quad b_{1,j} = \frac{1 - \varkappa a_j}{2},$$

при этом коэффициенты b_α снабжены дополнительным индексом j , поскольку они являются переменными коэффициентами и изменяются при переходе от одного узла к другому.

В силу условия (2.14) оба коэффициента положительны, однако схема (2.13) не сохраняет монотонность численного решения. В самом деле, взяв монотонно возрастающую функцию

$$u_j^n = \begin{cases} 0, & j < 0, \\ 1, & j \geq 0, \end{cases}$$

убеждаемся, что на $(n+1)$ -м слое по времени имеет место равенство

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{при } j < -1, \\ b_{1,-1}, & \text{при } j = -1, \\ b_{1,0}, & \text{при } j = 0, \\ 1, & \text{при } j \geq 1. \end{cases}$$

Но $b_{1,-1} > b_{1,0}$, поэтому сеточная функция u_j^{n+1} не является монотонно возрастающей. ■

Приведенный пример показывает, что для схем с переменными коэффициентами должны использоваться другие признаки монотонности, нежели признак (2.7), указанный в теореме 2.1.

Теорема 2.2. Пусть коэффициенты разностной схемы

$$u_j^{n+1} = b_{-1,j} u_{j-1}^n + b_{0,j} u_j^n + b_{1,j} u_{j+1}^n \quad (2.17)$$

удовлетворяют в каждом узле x_j условию

$$b_{-1,j} + b_{0,j} + b_{1,j} = 1. \quad (2.18)$$

Тогда выполнение при всех j условий

$$b_{\pm 1,j} \geq 0, \quad b_{-1,j} + b_{1,j-1} \leq 1 \quad (2.19)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы схема (2.17) с переменными коэффициентами сохраняла монотонность численного решения.

Доказательство. Запишем схему (2.17) с переменными коэффициентами, удовлетворяющими условию (2.18), в следующем виде:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - b_{-1,j} (u_j^n - u_{j-1}^n) + b_{1,j} (u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (2.20)$$

Тогда

$$u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n - b_{-1,j+1} (u_{j+1}^n - u_j^n) + b_{1,j+1} (u_{j+2}^n - u_{j+1}^n).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= (u_{j+1}^n - u_j^n) (1 - b_{-1,j+1} - b_{1,j}) + \\ &+ b_{1,j+1} (u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) + b_{-1,j} (u_j^n - u_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Необходимость. Пусть схема (2.17) монотонна. Докажем, что ее коэффициенты удовлетворяют неравенствам (2.19). Предположим, что это не так и какие-то из условий (2.19) не выполняются в некотором узле x_{j_0} , например $b_{-1,j_0} < 0$. Положим

$$u_j^n = \begin{cases} 0, & \text{если } j < j_0, \\ 1, & \text{если } j \geq j_0. \end{cases}$$

Из (2.21) тогда следует

$$u_{j_0+1}^{n+1} - u_{j_0}^{n+1} = b_{-1,j_0} < 0,$$

т. е. функция u^{n+1} не является монотонно возрастающей, что противоречит исходному предположению о монотонности схемы (2.17). Аналогично проверяются и остальные неравенства в (2.19).

Достаточность. Пусть в каждом узле x_j коэффициенты схемы (2.17) удовлетворяют неравенствам (2.19) и функция u^n является монотонной, например монотонно возрастающей. Тогда из равенства (2.21) следует, что функция u^{n+1} также будет монотонно возрастающей функцией. Теорема доказана. \blacksquare

Нетрудно проверить, что коэффициенты схемы (2.16) не удовлетворяют второму из условий (2.19) теоремы 2.3, поэтому эта схема не является схемой, сохраняющей монотонность численного решения. Дадим другую формулировку теоремы 2.2.

Теорема 2.3. *Для того чтобы конечно-разностная схема*

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + C_{j-1/2}^- u_{x,j-1/2}^n - C_{j+1/2}^+ u_{x,j+1/2}^n = 0, \quad (2.22)$$

сохраняла монотонность численного решения, необходимо и достаточно выполнение при всех j условий

$$C_{j+1/2}^\pm \geq 0, \quad C_{j+1/2}^- + C_{j+1/2}^+ \leq \frac{1}{\varkappa}, \quad (2.23)$$

где $\varkappa = \tau/h$, $u_{x,j+1/2}^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}$.

Доказательство. Схему (2.22) можно переписать в виде (2.17), при этом

$$b_{-1,j} = \alpha C_{j-1/2}^-, \quad b_{1,j} = \alpha C_{j+1/2}^+, \quad b_{0,j} = 1 - \alpha C_{j-1/2}^- - \alpha C_{j+1/2}^+.$$

Тогда для коэффициентов b_α выполняется равенство (2.18), а условия (2.19) эквивалентны условиям (2.23). ■

Замечание. В работе [31] доказано, что выполнение неравенств (2.23) достаточно для того, чтобы схема (2.22) была *TVD-схемой* (*Total Variation Diminishing Scheme*), т. е. схемой, решение u^n которой при любом $n \geq 0$ удовлетворяет условию невозрастания *полной вариации*

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n), \quad (2.24)$$

где под полной вариацией сеточной функции u^n понимается величина

$$TV(u^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_{j+1}^n - u_j^n|. \quad (2.25)$$

В настоящее время TVD-схемы и их разнообразные модификации применяются при решении многих задач с разрывными решениями. Причина столь большой популярности этих методов заключается в том, что они дают неосциллирующие профили решения, высокую разрешимость в области разрывов и сохраняют высокую точность в областях гладкости решения.

Современные TVD-схемы высокого порядка аппроксимации основаны на тех или иных способах восстановления (реконструкции) значений функций на границах ячеек по их значениям в центрах соседних ячеек. При этом шаблон схемы является переменным и зависит от поведения численного решения. Алгоритмы реконструкции основываются на использовании специальных ограничителей потоков [8, 13], которые строятся так, чтобы схема с ограничителями обладала *TVD-свойством* (2.24). ■

2.3. Монотонизация схемы Лакса – Вендроффа. Если начальная функция при $t = 0$ задана в виде ступеньки, то на следующих слоях по времени мы будем получать по схеме Лакса – Вендроффа ступеньку, искаженную осцилляциями (см. рис. 4). Но оказывается, что схему Лакса – Вендроффа можно модифицировать так, чтобы она стала обладать

TVD-свойством (2.24), а значит, согласно теореме 2.3, стала бы схемой, сохраняющей монотонность численного решения. Однако коэффициенты модифицированной схемы уже не будут постоянными, они могут зависеть от решения на n -м слое, т. е. модифицированная схема будет нелинейной.

Рассмотрим уравнение переноса (2.1) в случае $a = \text{const} > 0$. Схема Лакса – Вендроффа (1.50) может быть переписана так

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{x,j+1/2}^n + u_{x,j-1/2}^n}{2} - \frac{a^2 \tau}{2h} \left(u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n \right) = 0, \quad (2.26)$$

или

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + au_{x,j-1/2}^n + \frac{ah}{2} (1 - a\varpi) \frac{u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n}{h} = 0, \quad (2.27)$$

или

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + au_{\bar{x},j}^n = -\frac{ah}{2} (1 - a\varpi) u_{\bar{x},j}^n. \quad (2.28)$$

П. д. п. (1.79) противопоточной схемы содержит в правой части диссипативный член $0,5ah(1 - a\varpi)u_{xx}$, а в представлении (2.28) такой же диссипативный член в разностной форме имеет противоположный знак. Таким образом, схема Лакса – Вендроффа представляется в виде монотонной схемы с направленной против потока разностью, дополненной так называемым *антидиффузионным членом*, который устраняет диссипативный член в п. д. п. противопоточной схемы, превращая ее в схему Лакса – Вендроффа. Уменьшая антидиффузионный член в местах возможного появления осцилляций, можно попытаться предотвратить их.

Регулировать антидиффузионный член в схеме Лакса – Вендроффа (2.27) будем с помощью *функции-ограничителя* $\Phi(\xi)$ некоторого аргумента ξ :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + au_{x,j-1/2}^n + \frac{a}{2} (1 - a\varpi) \left((\Phi u_x^n)_{j+1/2} - (\Phi u_x^n)_{j-1/2} \right) = 0. \quad (2.29)$$

Если $\Phi \equiv 0$, то имеем монотонную противопоточную схему первого порядка аппроксимации. Если же $\Phi \equiv 1$, то получаем схему Лакса – Вендроффа второго порядка аппроксимации на гладких решениях, но осциллирующую на разрывных решениях.

В разностной схеме (2.29) $\Phi_{j+1/2} = \Phi(\xi_{j+1/2})$. В качестве дискретного аргумента $\xi_{j+1/2}$ выберем величину

$$\xi_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{u_{x,j-1/2}^n}{u_{x,j+1/2}^n} & \text{при } u_{x,j+1/2}^n \neq 0, \\ 1 & \text{при } u_{x,j+1/2}^n = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

На осциллирующем решении отношение $u_{x,j-1/2}^n/u_{x,j+1/2}^n$ становится отрицательным, поэтому при $\xi_{j+1/2} < 0$ полагаем, что $\Phi_{j+1/2} = 0$. Далее будем считать, что функция $\Phi = \Phi(\xi)$ непрерывного аргумента ξ также принимает нулевые значения при $\xi < 0$. Более того, предполагая, что функция-ограничитель является непрерывной, полагаем, что $\Phi(\xi) \equiv 0$ при всех $\xi \leq 0$.

Далее рассмотрим случай, когда $\xi_{j+1/2} > 0$. Будем подбирать функцию-ограничитель таким образом, чтобы схема удовлетворяла TVD-условию (2.23) и сохраняла второй порядок аппроксимации на гладких решениях. Для этого преобразуем модифицированную схему Лакса – Вендроффа (2.29) к виду (2.22):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a u_{x,j-1/2}^n + \frac{a}{2} (1 - a\varrho) \left(\left(\frac{\Phi}{\xi} \right)_{j+1/2} - \Phi_{j-1/2} \right) u_{x,j-1/2}^n = 0,$$

или

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \left[1 + \frac{1 - a\varrho}{2} \left(\left(\frac{\Phi}{\xi} \right)_{j+1/2} - \Phi_{j-1/2} \right) \right] u_{x,j-1/2}^n = 0.$$

Таким образом, коэффициенты схемы (2.29), записанной в виде (2.22), определяются по формулам

$$C_{j+1/2}^+ = 0, \quad C_{j-1/2}^- = a \left[1 + \frac{1 - a\varrho}{2} \left(\left(\frac{\Phi}{\xi} \right)_{j+1/2} - \Phi_{j-1/2} \right) \right].$$

Согласно теореме 2.3, условие

$$0 \leq C_{j-1/2}^- \leq \frac{1}{\varrho} \quad (2.31)$$

будет гарантировать, что схема Лакса – Вендроффа с введенной в нее функцией-ограничителем будет сохранять монотонность численного решения. Далее мы предполагаем, что условие устойчивости схемы Лак-

са – Вендроффа выполнено, т. е. $a\bar{x} \leq 1$. Тогда для того чтобы неравенства (2.31) были справедливыми для всех $a\bar{x} \leq 1$, необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$-2 \leq \left(\frac{\Phi}{\xi}\right)_{j+1/2} - \Phi_{j-1/2} \leq 2,$$

а для этого достаточно потребовать выполнения для всех j следующих неравенств:

$$0 \leq \left(\frac{\Phi}{\xi}\right)_{j+1/2} \leq 2, \quad 0 \leq \Phi_{j+1/2} \leq 2.$$

Область в плоскости переменных Φ и ξ , в которой выполняются эти неравенства, изображена на рис. 5, а. Если график функции $\Phi = \Phi(\xi)$ лежит в этой области, то модифицированная схема (2.29) будет сохранять монотонность численного решения.

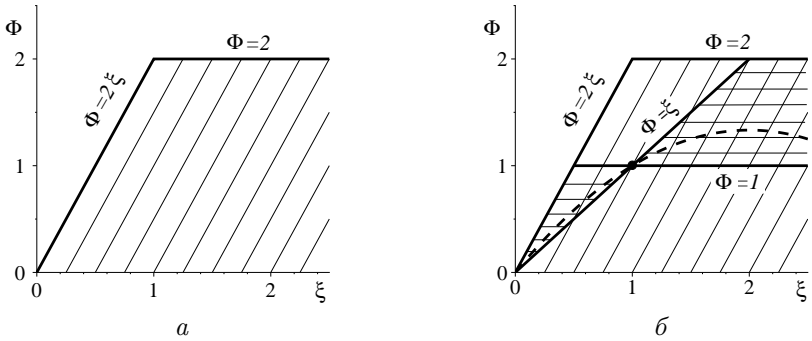


Рис. 5. а – в заштрихованной области модифицированная схема Лакса – Вендроффа (2.29) является TVD-схемой; б – в области с двойной штриховкой модифицированная схема Лакса – Вендроффа является TVD-схемой второго порядка аппроксимации

Итак, далее будем считать, что

$$\begin{cases} \Phi(\xi) = 0 & \text{при } \xi \leq 0, \\ 0 \leq \Phi(\xi) \leq \min(2, 2\xi) & \text{при } \xi > 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Исследуем теперь порядок аппроксимации модифицированной схемы, предполагая, что непрерывная функция $\Phi = \Phi(\xi)$ удовлетворяет

следующим дополнительным ограничениям:

$$|\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2)| \leq L |\xi_1 - \xi_2|, \quad \forall \xi_1, \xi_2, \quad (2.33)$$

$$\Phi(1) = 1, \quad (2.34)$$

т. е. потребуем, чтобы функция $\Phi = \Phi(\xi)$ удовлетворяла условию Липшица с некоторой постоянной $L > 0$ и график этой функции проходил через точку $(1, 1)$.

Перепишем модифицированную схему Лакса – Вендроффа (2.29) в виде исходной схемы Лакса – Вендроффа (2.27) с добавочным членом

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + au_{x,j-1/2}^n + \frac{a}{2} (1 - a\alpha) \left(u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n \right) + \frac{a}{2} (1 - a\alpha) R_j^n = 0, \quad (2.35)$$

где

$$R_j^n = (\Phi_{j+1/2} - 1) u_{x,j+1/2}^n - (\Phi_{j-1/2} - 1) u_{x,j-1/2}^n. \quad (2.36)$$

Пусть $u = u(x, t)$ – достаточно гладкое решение задачи Коши (2.1), (2.2). Подставим это решение в выражение (2.36), сохранив в нем все прежние обозначения, но учитывая, что теперь

$$u_{x,j+1/2}^n = \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_j, t^n)}{h} \quad \forall j. \quad (2.37)$$

Очевидно, что если на n -м слое по времени функция $u(x, t^n)$ является линейной, $u(x, t^n) = Bx + C$, то $R_j^n \equiv 0$. Используя условия (2.33), (2.34), нетрудно проверить, что для квадратичной функции $u(x, t^n) = Ax^2 + Bx + C$ ($A \neq 0$) равенство $R_j^n = O(h^2)$ имеет место для всех узлов произвольного числового промежутка (α, β) , не содержащего точку экстремума $x_* = -B/2A$. В общем случае справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия (2.33), (2.34) и достаточно гладкое решение задачи Коши (2.1), (2.2) удовлетворяет на некотором числовом отрезке $[\alpha, \beta]$ условию

$$u_x(x, t^n) \neq 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.38)$$

Тогда

$$R_j^n = O(h^2) \quad \forall x_j \in (\alpha, \beta). \quad (2.39)$$

Доказательство. Пусть $x_j \in (\alpha, \beta)$. Используя формулу Тейлора и условие (2.34), получаем, что

$$\begin{aligned} R_j^n &= [\Phi(\xi_{j+1/2}) - 1] \cdot [u_x + \frac{h}{2}u_{xx}] - [\Phi(\xi_{j-1/2}) - 1] \cdot [u_x - \frac{h}{2}u_{xx}] + O(h^2) = \\ &= \left(\Phi(\xi_{j+1/2}) - \Phi(\xi_{j-1/2}) \right) u_x + \\ &+ \frac{h}{2} \left[\Phi(\xi_{j+1/2}) - \Phi(1) + \Phi(\xi_{j-1/2}) - \Phi(1) \right] u_{xx} + O(h^2). \end{aligned}$$

Здесь производные u_x , u_{xx} решения $u(x, t^n)$ вычисляются в узле x_j . Учет условия Липшица (2.33) приводит к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} |R_j^n| &\leq |\xi_{j+1/2} - \xi_{j-1/2}| L |u_x| + \\ &+ \frac{h}{2} (|\xi_{j+1/2} - 1| + |\xi_{j-1/2} - 1|) L |u_{xx}| + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Далее оценим величины $\xi_{j\pm 1/2}$. Из теоремы Лагранжа [12] следует, что

$$u_{x,j+1/2}^n = u_x(\tilde{x}_{j+1/2}, t^n), \quad u_{x,j-1/2}^n = u_x(\tilde{x}_{j-1/2}, t^n), \quad (2.41)$$

где $x_j < \tilde{x}_{j+1/2} < x_{j+1}$, $x_{j-1} < \tilde{x}_{j-1/2} < x_j$. Будем считать, что шаг h настолько мал, что узлы x_{j-1} и x_{j+1} принадлежат интервалу (α, β) . Тогда $\tilde{x}_{j\pm 1/2} \in (\alpha, \beta)$ и из условия (2.38) будет следовать, что $u_{x,j\pm 1/2}^n \neq 0$. Согласно формуле (2.30) величины $\xi_{j\pm 1/2}$ определяются в этом случае выражениями

$$\xi_{j+1/2} = \frac{u_{x,j-1/2}^n}{u_{x,j+1/2}^n}, \quad \xi_{j-1/2} = \frac{u_{x,j-3/2}^n}{u_{x,j-1/2}^n}.$$

Раскладывая решение $u(x, t^n)$ в узле x_j по формуле Тейлора и учитывая обозначение (2.37), получаем

$$\xi_{j+1/2} = \frac{u_x - \frac{h}{2}u_{xx} + O(h^2)}{u_x + \frac{h}{2}u_{xx} + O(h^2)}. \quad (2.42)$$

Поскольку решение предполагается достаточно гладким, то производная u_x является непрерывной функцией на замкнутом отрезке $[\alpha, \beta]$. Поэтому из условия (2.38) будет следовать, что

$$|u_x(x, t^n)| \geq C_0 = \text{const} > 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.43)$$

Тогда

$$\frac{1}{|u_x(x_j, t^n)|} \leq \frac{1}{C_0},$$

и равенство (2.42) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_{j+1/2} &= \frac{u_x - \frac{h}{2}u_{xx} + O(h^2)}{u_x(1 + \frac{h}{2}\frac{u_{xx}}{u_x} + O(h^2))} = \frac{(u_x - \frac{h}{2}u_{xx})\left(1 - \frac{h}{2}\frac{u_{xx}}{u_x}\right) + O(h^2)}{u_x} = \\ &= \frac{u_x - hu_{xx}}{u_x} + O(h^2) = 1 - h\frac{u_{xx}}{u_x} + O(h^2). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \xi_{j-1/2} &= \frac{u_x - \frac{3h}{2}u_{xx} + O(h^2)}{u_x - \frac{h}{2}u_{xx} + O(h^2)} = \frac{(u_x - \frac{3h}{2}u_{xx})\left(1 + \frac{h}{2}\frac{u_{xx}}{u_x}\right) + O(h^2)}{u_x} = \\ &= \frac{u_x - hu_{xx}}{u_x} + O(h^2) = 1 - h\frac{u_{xx}}{u_x} + O(h^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\xi_{j+1/2} - \xi_{j-1/2} = O(h^2), \quad \xi_{j\pm 1/2} - 1 = O(h).$$

Подставляя последние выражения в формулу (2.40), получаем требуемое равенство (2.39). ■

При выполнении условий леммы 2.1 модифицированная схема Лакса – Вендроффа с точностью до члена порядка $O(h^2)$ совпадает с исходной схемой Лакса – Вендроффа, поэтому она также имеет погрешность аппроксимации порядка $O(\tau^2 + h^2)$. Из условия (2.38) следует, что отрезок $[\alpha, \beta]$ не содержит точек локальных экстремумов решения $u(x, t^n)$. Можно показать, что в точке локального экстремума порядок аппроксимации модифицированной схемы Лакса – Вендроффа понижается до первого.

Итак, если функция-ограничитель удовлетворяет условиям (2.32), то модифицированная схема Лакса – Вендроффа сохраняет монотонность численного решения, а при дополнительных условиях (2.33), (2.34) она имеет второй порядок аппроксимации за исключением точек локальных экстремумов решения.

На рис. 5, a в заштрихованной области нанесем еще две прямые: $\Phi = 1$ и $\Phi = \xi$ (рис. 5, б). При $\Phi = 1$ модифицированная схема (2.29) совпадает со схемой Лакса – Вендроффа второго порядка аппроксимации. Если $\Phi = \xi$, то схема (2.29) превращается в схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2h} = \frac{a^2\tau}{2} \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{h^2} \quad (2.44)$$

с направленной назад разностью второго порядка. Можно показать, что эта схема также имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ (см. задачу 2.6).

Если мы возьмем любую функцию-ограничитель с графиком, расположенным между прямыми $\Phi = 1$ и $\Phi = \xi$ и не выходящим за пределы TVD-области, то он (см. штриховую линию на рис. 5, б) обязательно пройдет через точку $(1, 1)$. Схема с таким ограничителем будет схемой, сохраняющей монотонность численного решения, а при выполнении дополнительного условия (2.33) она будет схемой второго порядка аппроксимации (за исключением точек локальных экстремумов решения).

Приведем примеры функций-ограничителей (рис. 6), приводящих к монотонным схемам второго порядка аппроксимации:

$$\Phi(\xi) = \max [0, \min(1, \xi)] \quad (\text{minmod}), \quad (2.45)$$

$$\Phi(\xi) = \max [0, \min(2\xi, 1), \min(2, \xi)] \quad (\text{superbee}),$$

$$\Phi(\xi) = \frac{|\xi| + \xi}{|\xi| + 1} = \begin{cases} \frac{2\xi}{1 + \xi}, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0 \end{cases} \quad (\text{Van - Leer}).$$

Другие примеры функций-ограничителей можно найти в [13, 32].

Далее мы часто будем использовать функцию-ограничитель (2.45), поэтому приведем развернутую запись этой формулы:

$$\Phi_{j+1/2} = \begin{cases} 1 & \text{при } \begin{cases} |u_{x,j+1/2}^n| \leq |u_{x,j-1/2}^n|, \\ u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j-1/2}^n \geq 0, \end{cases} \\ \frac{u_{x,j-1/2}^n}{u_{x,j+1/2}^n} & \text{при } \begin{cases} |u_{x,j+1/2}^n| > |u_{x,j-1/2}^n|, \\ u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j-1/2}^n \geq 0, \end{cases} \\ 0 & \text{при } u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j-1/2}^n < 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

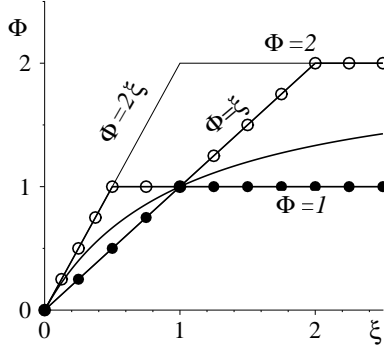


Рис. 6. Графики функций-ограничителей minmod (• • •); superbee (○ ○ ○); Van – Leer (—)

В случае $a < 0$ модификация схемы Лакса – Вендроффа (2.26) также начинается с ее представления в виде противопоточной схемы, дополненной антидиффузионным членом:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + au_{x,j+1/2}^n - \frac{a}{2} (1 + a\alpha) (u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n) = 0.$$

Затем эта схема заменяется модифицированной

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + au_{x,j+1/2}^n - \frac{a}{2} (1 + a\alpha) \left((\Phi u_x^n)_{j+1/2} - (\Phi u_x^n)_{j-1/2} \right) = 0, \quad (2.47)$$

при этом аргументом функции-ограничителя $\Phi_{j+1/2}$ служит отношение

$$\xi_{j+1/2} = \frac{u_{x,j+3/2}^n}{u_{x,j+1/2}^n}. \quad (2.48)$$

Аналогично рассмотренному выше случаю, на функцию-ограничитель получаем те же условия (2.32), (2.33) и (2.34). В частности, функция-ограничитель (2.45) будет задаваться теперь следующей формулой:

$$\Phi_{j+1/2} = \begin{cases} 1 & \text{при } \begin{cases} \left| u_{x,j+1/2}^n \right| \leq \left| u_{x,j+3/2}^n \right|, \\ u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+3/2}^n \geq 0, \end{cases} \\ \frac{u_{x,j+3/2}^n}{u_{x,j+1/2}^n} & \text{при } \begin{cases} \left| u_{x,j+1/2}^n \right| > \left| u_{x,j+3/2}^n \right|, \\ u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+3/2}^n \geq 0, \end{cases} \\ 0 & \text{при } u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+3/2}^n < 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

Обозначив через s знак числа a , запишем формулы (2.46), (2.49) в виде одной формулы, справедливой при любом знаке числа a :

$$\Phi_{j+1/2} = \begin{cases} 1 & \text{при } \begin{cases} |u_{x,j+1/2}^n| \leq |u_{x,j+1/2-s}^n|, \\ u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+1/2-s}^n \geq 0, \end{cases} \\ \frac{u_{x,j+1/2-s}^n}{u_{x,j+1/2}^n} & \text{при } \begin{cases} |u_{x,j+1/2}^n| > |u_{x,j+1/2-s}^n|, \\ u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+1/2-s}^n \geq 0, \end{cases} \\ 0 & \text{при } u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+1/2-s}^n < 0, \end{cases} \quad (2.50)$$

где $s = \text{sgn}(a)$. Модифицированная схема Лакса – Вендроффа при произвольном знаке числа a запишется так:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a + |a|}{2} u_{x,j-1/2}^n + \frac{a - |a|}{2} u_{x,j+1/2}^n + \\ & + \frac{|a|}{2} (1 - |a|\varepsilon) \left((\Phi u_x^n)_{j+1/2} - (\Phi u_x^n)_{j-1/2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

На рис. 7 показаны графики численного решения задачи из пп. 1.8, полученные с помощью модифицированной схемы Лакса – Вендроффа. Сравнивая этот рисунок с рис. 3, видим, что модифицированная схема меньше размывает разрыв. Сравнение с рис. 4 также подтверждает преимущество модифицированной схемы, поскольку в ее численном решении отсутствуют осцилляции, присущие решениям, полученным по исходной схеме Лакса – Вендроффа.

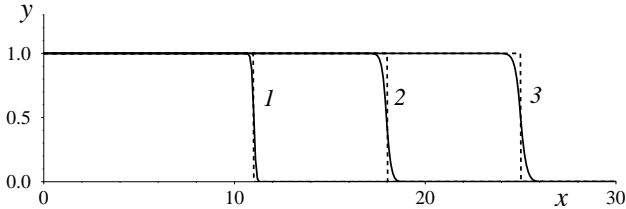


Рис. 7. Графики точного решения (штриховые линии) и численного решения (сплошные линии), полученного с помощью модифицированной схемы Лакса – Вендроффа с функцией-ограничителем (2.50) в моменты времени $t = 1$ (1); $t = 8$ (2); $t = 15$ (3). $a = 1$; $x_0 = 10$; $a\tau/h = 0,5$

З А Д А Ч И

2.1. Покажите, что схема Лакса (1.46) сохраняет монотонность численного решения.

2.2. Докажите, что если $a\alpha \neq 1$, то схема с постоянными коэффициентами

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a(1 - a\alpha)}{4} u_{x,j+1/2}^n + \frac{a(3 + a\alpha)}{4} u_{x,j-1/2}^n = 0 \quad (2.52)$$

аппроксимирует уравнение переноса (2.1) на его решении с порядком $O(\tau + h)$ и при условии

$$a\alpha < 1 \quad (2.53)$$

для нее выполняется спектральный признак устойчивости. Покажите, что при выполнении условия (2.53) один из коэффициентов этой схемы, записанной в виде (2.4), отрицателен, но, тем не менее, схема (2.52) переводит монотонно возрастающую функцию $u_j^n = x_j - at^n$ в монотонно возрастающую $u_j^{n+1} = x_j - at^{n+1}$, где $t^{n+1} = t^n + \tau$. Не противоречит ли этот факт теореме 2.1?

2.3. Доказать, что схема Лакса – Вендроффа, аппроксимирующая уравнение (2.1) с положительным коэффициентом $a > 0$, сохраняет на $(n + 1)$ -м слое по времени монотонность произвольной монотонно возрастающей на n -м слое по времени функции u^n , удовлетворяющей условию $u_{\bar{x}\bar{x},j}^n \leq 0$, а также произвольной монотонно убывающей функции u^n , такой, что $u_{\bar{x}\bar{x},j}^n \geq 0$. Не противоречит ли это утверждение установленному ранее факту о том, что схема Лакса – Вендроффа не является схемой, сохраняющей монотонность численного решения?

2.4. Докажите, что выполнение условий (2.23) достаточно для того, чтобы схема (2.22) была TVD-схемой.

2.5. Показать, что противопоточная схема является TVD-схемой, а схема Лакса – Вендроффа не удовлетворяет TVD-условию (2.24).

2.6. Определить порядок аппроксимации схемы (2.44) при $a\tau/h = \text{const}$, построенной для уравнения переноса (2.1) с положительным коэффициентом a . Выписать п. д. п. и дать качественное объяснение поведения решения разностной схемы при $t > 0$, если в начальный момент времени $t = 0$ задана ступенька (1.61).

2.7. Определить порядок аппроксимации схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{-3u_j^n + 4u_{j+1}^n - u_{j+2}^n}{2h} = \frac{a^2\tau}{2} \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + u_j^n}{h^2}, \quad (2.54)$$

при $|a|\tau/h = \text{const}$, построенной для уравнения переноса (2.1) с коэффициентом $a < 0$. Выписать п. д. п. и дать качественное объяснение поведения решения разностной схемы при $t > 0$, если в начальный момент времени $t = 0$ задана ступенька (1.61).

2.8. Показать, что для сохранения монотонности численного решения при $a < 0$ достаточно, чтобы функция-ограничитель удовлетворяла условиям (2.32). Вывести формулу (2.49) для функции-ограничителя в случае $a < 0$.

§ 3. Построение монотонных схем на основе метода дифференциального приближения

3.1. Рассмотрим здесь способ монотонизации разностных схем, основанный на анализе их дифференциальных приближений. Как и в предыдущем параграфе будем рассматривать задачу Коши (2.1), (2.2) для линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом ($a > 0$ или $a < 0$):

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.2)$$

Оказывается, что все явные схемы, рассмотренные в § 1 для уравнения (3.1), можно записать в виде единой схемы с параметром. Эта схема, которую мы будем называть явной схемой предиктор-корректор, на равномерной сетке с узлами $x_j = jh$ и шагом $h > 0$ имеет следующий вид:

$$\frac{u_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1/2}^* - u_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad (3.4)$$

где τ – шаг по времени. На шаге «предиктор» вычисляются вспомогательные величины $u_{j+1/2}^*$, определенные в узлах с полуцелыми индексами (в полуцелых узлах) $x_{j+1/2} = x_j + h/2$. Эти величины относятся к моменту времени $t = t^n + \tau_{j+1/2}^*$, где $t^n = n\tau$, $\tau_{j+1/2}^* = \frac{\tau}{2}(1 + \theta_{j+1/2}^n)$,

$\theta_{j+1/2}^n$ – параметр схемы, вообще говоря меняющийся от узла к узлу и от одного временного слоя к другому. На шаге «корректор» вычисляются искомые величины u_j^{n+1} , определенные в целых узлах x_j и относящиеся к моменту времени $t^{n+1} = t^n + \tau$.

Очевидно, что при $\theta_{j+1/2}^n \equiv 0$ схема (3.3), (3.4) совпадает со схемой Лакса – Вендроффа (1.49). Покажем, что при

$$\theta_{j+1/2}^n \equiv \theta_0 = \frac{1}{|a|\varepsilon} - 1 > 0 \quad (3.5)$$

получается противопоточная схема (2.9). В самом деле, для такого значения параметра величина τ^* будет равна

$$\tau^* = \frac{\tau}{2}(1 + \theta_0) = \frac{\tau}{2} \frac{1}{|a|\varepsilon} = \frac{h}{2|a|} = \frac{h}{2s a},$$

где $s = \text{sgn}(a)$. Поэтому из уравнения (3.3) получаем

$$u_{j+1/2}^* = \frac{1+s}{2} u_j^n + \frac{1-s}{2} u_{j+1}^n. \quad (3.6)$$

Тогда из уравнения (3.4) будет следовать формула (2.9) противопоточной схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a + |a|}{2} u_{x,j-1/2}^n + \frac{a - |a|}{2} u_{x,j+1/2}^n = 0. \quad (3.7)$$

Нетрудно показать, что при

$$\theta_{j+1/2}^n \equiv \theta_L = \frac{1}{a^2 \varepsilon^2} - 1 > 0 \quad (3.8)$$

получается (см. задачу 3.1) схема Лакса (1.46). Если уравнение (3.3) записать в виде

$$u_{j+1/2}^* = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - a \tau_{j+1/2}^* \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \quad (3.9)$$

и взять $\theta_{j+1/2}^n \equiv -1$, то получим абсолютно неустойчивую схему с центральной разностью (1.83). При $\theta_{j+1/2}^n \equiv \theta_0/2$ получаем немонотонную схему (2.52), а при $\theta_{j+1/2}^n \equiv (\theta_0 + \theta_L)/2$ – схему, сохраняющую монотонность численного решения (см. задачу 3.2).

Таким образом, выбирая то или иное значение параметра $\theta_{j+1/2}^n$, мы будем получать явные схемы с различными свойствами: первого или второго порядка аппроксимации, абсолютно или условно аппроксимирующие, условно устойчивые или абсолютно неустойчивые (см. задачу 3.3), сохраняющие или не сохраняющие монотонность численного решения.

3.2. Нас будут интересовать такие значения параметра $\theta_{j+1/2}^n$, при которых схема предиктор-корректор имеет второй порядок аппроксимации и сохраняет монотонность численного решения. Сразу отметим, что значение $\theta = 0$ не подходит, поскольку схема Лакса – Вендроффа не сохраняет монотонность численного решения.

Пусть теперь $\theta = \text{const} \neq 0$ и

$$\varkappa = \frac{\tau}{h} = \text{const}. \quad (3.10)$$

Тогда дифференциальное представление рассматриваемой схемы имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots, \quad (3.11)$$

при этом коэффициенты c_2 и c_3 вычисляются по формулам [30]

$$c_2 = \frac{a^2 \tau}{2} \theta, \quad c_3 = \frac{ah^2}{6} \left(a^2 \varkappa^2 (3\theta + 1) - 1 \right). \quad (3.12)$$

Видим, что в дифференциальном представлении присутствует слагаемое порядка $O(\tau)$, поэтому при $\theta = \text{const} \neq 0$ схема (3.3), (3.4) имеет лишь первый порядок аппроксимации.

Получим необходимое условие устойчивости рассматриваемой схемы при условии $\theta = \text{const} \neq 0$. Для этого перепишем схему в виде одношаговой

$$u_j^{n+1} = b_{-1} u_{j-1}^n + b_0 u_j^n + b_1 u_{j+1}^n, \quad (3.13)$$

где

$$b_{\pm 1} = \frac{a^2 \varkappa^2 (1 + \theta) \mp a \varkappa}{2}, \quad b_0 = 1 - a^2 \varkappa^2 (1 + \theta), \quad (3.14)$$

и в уравнение (3.13) подставим гармонику (1.32). В результате будем иметь следующее выражение для множителя перехода:

$$\lambda = 1 - 2a^2 \varkappa^2 (1 + \theta) \sin^2 \frac{\varphi}{2} - ia \varkappa \sin \varphi. \quad (3.15)$$

Отсюда

$$|\lambda|^2 = 1 - 4a^2 \varkappa^2 \theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 4a^2 \varkappa^2 \left[1 - (1 + \theta)^2 a^2 \varkappa^2 \right] \sin^4 \frac{\varphi}{2}, \quad (3.16)$$

поэтому из необходимого условия устойчивости $|\lambda| \leq 1$ будет следовать, что

$$\theta \geq 0, \quad |a|\varkappa \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \theta}}. \quad (3.17)$$

Условие неотрицательности параметра θ мы будем использовать далее и в случае переменного параметра $\theta_{j+1/2}^n$.

Выясним, при каких условиях схема (3.3), (3.4) (первого порядка аппроксимации при $\theta = \text{const} > 0$) сохраняет монотонность численного решения. Согласно теореме 2.1, для этого необходимо и достаточно, чтобы постоянные коэффициенты b_α в представлении (3.13) были неотрицательными, что эквивалентно выполнению неравенств

$$\frac{1}{1 + \theta} \leq |a|\varkappa \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \theta}}. \quad (3.18)$$

Для заданного числа Куранта $Cr = |a|\varkappa \leq 1$ можно, основываясь на неравенствах (3.18), указать интервал параметра θ , в котором рассматриваемая схема предиктор-корректор будет монотонной:

$$\frac{1}{|a|\varkappa} - 1 = \theta_0 \leq \theta \leq \theta_L = \frac{1}{a^2 \varkappa^2} - 1. \quad (3.19)$$

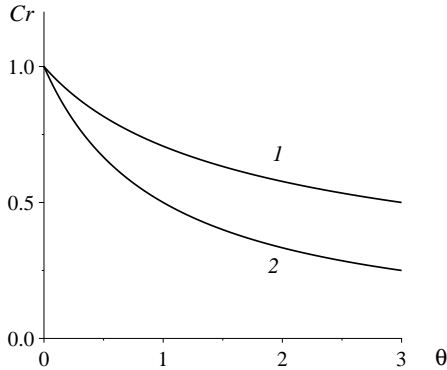


Рис. 8. Границы областей устойчивости и монотонности схемы предиктор-корректор: 1 — верхняя граница областей устойчивости и монотонности; 2 — нижняя граница области монотонности

На рис. 8 область монотонности схемы предиктор-корректор лежит между кривыми 1 и 2, которые в плоскости переменных θ и Cr задаются уравнениями

$$Cr = \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}, \quad \theta \geq 0 \quad (3.20)$$

и

$$Cr = \frac{1}{1+\theta}, \quad \theta \geq 0 \quad (3.21)$$

соответственно.

Итак, при выполнении условий

$$\theta = \text{const} > 0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_L \quad (3.22)$$

схема (3.3), (3.4) устойчива, имеет первый порядок аппроксимации на гладких решениях и сохраняет монотонность численного решения. Недостатком схемы, проявляющимся при решении задач с разрывными решениями, является сильное размазывание численного решения в области скачка (см. рис. 3, где $\theta = \theta_0$).

3.3. Если параметр θ не зависит от x и t , но зависит от шагов сетки h и τ так, что $\theta = O(h)$ (это в силу равенства (3.10) то же самое, что $\theta = O(\tau)$), то первое дифференциальное приближение схемы (3.3), (3.4) примет вид

$$u_t + au_x = \frac{a^2\tau\theta}{2}u_{xx} + \frac{ah^2}{6}(a^2\alpha^2 - 1)u_{xxx}.$$

В силу равенств $\tau|\theta| = O(\tau^2) = O(h^2)$ получаем, что при $\theta = O(h)$ порядок аппроксимации будет вторым. Необходимое условие устойчивости останется прежним (3.17).

В рассматриваемом случае коэффициенты b_α в представлении (3.13) не зависят от переменных x и t , но зависят от шагов сетки. Схему (2.4) с такими коэффициентами будем называть *схемой с квазипостоянными коэффициентами*. Легко проверить, что теорема 2.1 остается верной и для схем с квазипостоянными коэффициентами. При выполнении условий

$$\theta = O(h) \geq 0, \quad \frac{1}{1+\theta} \leq |a|\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{1+\theta}} \quad (3.23)$$

коэффициенты b_α схемы предиктор-корректор неотрицательны, поэтому она будет схемой второго порядка аппроксимации, сохраняющей монотонность численного решения. Однако при измельчении сетки для

сохранения второго порядка аппроксимации (т. е. чтобы $\theta \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$) и сохранения монотонности (т. е. для выполнения неравенств (3.23) при $h \rightarrow 0$) расчет приходится вести с числами Куранта $|a|\Delta x$, близкими к единице, причем чем мельче сетка, тем ближе к единице должно быть число Куранта. Ясно, что при решении практических задач такое жесткое условие выполнить не удастся. На практике расчет обычно производится с такими числами Куранта, которые с некоторым запасом удовлетворяют условию устойчивости. Пусть, например, сетка измельчается, но число Куранта поддерживается постоянным. Для фиксированного числа Куранта $Cr < 1$ неравенство (3.19) не будет выполняться при малых h ввиду условия $\theta = O(h)$. Следовательно, для фиксированного числа Куранта и достаточно мелких сеток схема предиктор-корректор с квазипостоянными коэффициентами не будет сохранять монотонность численного решения.

3.4. Далее мы рассмотрим схему предиктор-корректор с переменным параметром $\theta_{j+1/2}^n$. Покажем, что этот параметр можно подобрать так, что схема предиктор-корректор будет сохранять монотонность численного решения при любых числах Куранта, подчиняющихся условию

$$Cr < 1. \quad (3.24)$$

Для выбора параметра $\theta_{j+1/2}^n$ будем использовать метод дифференциального приближения [30], считая, что величины $\theta_{j+1/2}^n$ являются значениями некоторой гладкой функции $\theta(x, t)$. Тогда П-форма дифференциального представления схемы предиктор-корректор имеет следующий вид (см. задачу 3.4):

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= \frac{a^2\tau}{2} (\theta u_x)_x + \frac{ah^2}{6} (a^2\alpha^2 - 1) u_{xxx} - \\ &- \frac{a^2\tau^2}{4} [\theta_t u_x]_x + \frac{a^3\tau^2}{4} [(\theta u_x)_{xx} + (\theta u_{xx})_x] + O(\tau^3 + h^3). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Видим, что второе слагаемое правой части не зависит от θ и совпадает с дисперсионным членом п. д. п. (1.80) схемы Лакса – Вендроффа, генерирующей нефизичные осцилляции при расчете разрывных решений (см. рис. 4). Можно попытаться избавиться от осцилляций численного решения путем изменения дисперсии разностной схемы. В схеме предиктор-корректор это можно сделать за счет подходящего выбора параметра θ . Пусть для определенности $a > 0$. Тогда в силу условия

(3.24) коэффициент при u_{xxx} во втором слагаемом правой части уравнения (3.25) будет отрицательным. Если положить

$$\theta = \bar{\theta}h \frac{u_{xx}}{u_x}, \quad \bar{\theta} = \text{const} > 0, \quad (3.26)$$

то в П-форме (3.25) первое слагаемое правой части превратится в новое дисперсионное слагаемое $0.5a^2\tau h\bar{\theta}u_{xxx}$ с положительным коэффициентом при u_{xxx} , что приведет к некоторому изменению дисперсионных свойств схемы.

Для использования функции (3.26) в разностной схеме (3.3), (3.4) необходимо аппроксимировать производные u_{xx} и u_x . При $a > 0$ заменим их, например, следующими конечно-разностными выражениями:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{j+1/2}) \sim u_{x,j+1/2} \equiv \frac{u_{j+1} - u_j}{h}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j+1/2}) \sim \frac{u_{x,j+1/2} - u_{x,j-1/2}}{h},$$

т. е. схемный параметр будем вычислять по формуле:

$$\theta_{j+1/2}^n = \bar{\theta} \frac{u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n}{u_{x,j+1/2}^n}. \quad (3.27)$$

Тогда одношаговый вариант схемы (3.3), (3.4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2h} &= \frac{a^2\tau}{2} \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{h^2} + \\ &+ \frac{a^2\tau h}{2} (\bar{\theta} - \theta_0) \frac{u_{j+1}^n - 3u_j^n + 3u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{h^3}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где постоянная θ_0 определена формулой (3.5).

П. д. п. этой схемы записывается как

$$u_t + au_x = \left[\frac{a^2\tau h}{2} \bar{\theta} + \frac{ah^2}{6} (a^2\bar{\theta}^2 - 1) \right] u_{xxx}. \quad (3.29)$$

Отсюда видно, что, задавая то или иное значение для постоянной $\bar{\theta} > 0$, мы можем менять коэффициент при третьей производной, т. е. можем управлять дисперсией разностной схемы. Тем не менее, подобрать постоянную $\bar{\theta}$ так, чтобы схема (3.28) сохраняла монотонность численного решения для всех чисел Куранта, удовлетворяющих условию (3.24), не удастся. Это следует из того, что схема (3.28) с постоянными коэффициентами является схемой второго порядка аппроксимации и потому

не может сохранять монотонность численного решения [3]. Покажем это непосредственно, опираясь на теорему 2.1. Перепишем схему (3.28) в виде (2.4)

$$u_j^{n+1} = b_1 u_{j+1}^n + b_0 u_j^n + b_{-1} u_{j-1}^n + b_{-2} u_{j-2}^n,$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= (\bar{\theta} - \theta_0) \frac{a^2 \varkappa^2}{2}; & b_0 &= 1 - \frac{3a\varkappa}{2} + \frac{a^2 \varkappa^2}{2} \left[1 - 3(\bar{\theta} - \theta_0) \right]; \\ b_{-1} &= 2a\varkappa + \frac{a^2 \varkappa^2}{2} \left[3(\bar{\theta} - \theta_0) - 2 \right]; & b_{-2} &= -\frac{a\varkappa}{2} + \frac{a^2 \varkappa^2}{2} \left[1 - (\bar{\theta} - \theta_0) \right]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что при

$$\theta_0 \leq \bar{\theta} \leq \frac{2}{3}\theta_L, \quad (3.30)$$

где постоянная θ_L определена формулой (3.8), коэффициенты b_1 , b_0 и b_{-1} будут неотрицательными, а коэффициент b_{-2} – отрицательным на всем рассматриваемом диапазоне чисел Куранта (3.24), т. е. при $0 < Cr < 1$. Согласно теореме 2.1, схема (3.28) не сохраняет монотонность численного решения.

Далее в качестве постоянной $\bar{\theta}$ будем брать левую границу промежутка (3.30):

$$\bar{\theta} = \theta_0 = \frac{1}{Cr} - 1. \quad (3.31)$$

В этом случае схема (3.28) превращается в схему (2.44) (противопоточная схема с направленной назад разностью второго порядка), которая имеет второй порядок аппроксимации (см. решение задачи 2.6) и п. д. п.

$$u_t + au_x = \frac{ah^2}{6}(1 - a\varkappa)(2 - a\varkappa)u_{xxx}.$$

Видим, что в отличие от схемы Лакса – Вендроффа коэффициент в дисперсионном члене схемы (2.44) положителен, поэтому эти схемы второго порядка аппроксимации будут отличаться по дисперсионным свойствам. Покажем, что они отличаются и по свойству сохранения монотонности численного решения. В самом деле, при $a > 0$ схема Лакса – Вендроффа сохраняет на $(n + 1)$ -м слое по времени монотонность любой монотонно возрастающей на n -м слое функции u^n , удовлетворяющей в каждом узле условию $u_{x,x,j}^n \leq 0$ (см. задачу 2.3), а схема (2.44) – тех монотонно

возрастающих функций, для которых выполняется противоположное неравенство $u_{\bar{x}x,j}^n \geq 0$ (см. задачу 3.5). Монотонность произвольных монотонно убывающих функций сохраняется схемой Лакса – Вендроффа при условии $u_{\bar{x}x,j}^n \geq 0$, а схемой (2.44) – при $u_{\bar{x}x,j}^n \leq 0$. Поэтому, используя обе схемы, переключаясь по определенному правилу с одной схемы на другую, можно сохранять монотонность численного решения из более широкого класса сеточных функций, чем схема Лакса – Вендроффа. Но даже такое совместное использование двух схем не позволяет сохранять монотонность произвольных сеточных функций, поэтому формула (3.27) требует некоторого уточнения.

В качестве дополнительного ограничения на параметр (3.27) будем использовать условие ограниченности схемного параметра. Например, потребуем, чтобы он был ограничен сверху постоянной θ_0 . Кроме того, потребуем, чтобы сеточная функция (3.27) была неотрицательной. Эти ограничения приводят к новой формуле для $\theta_{j+1/2}^n$:

$$\theta_{j+1/2}^n = \theta_0 \min \left[1; \max \left(\frac{u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n}{u_{x,j+1/2}^n}; 0 \right) \right], \quad (3.32)$$

из которой следует, что

$$\theta_{j+1/2}^n = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < u_{x,j+1/2}^n \leq u_{x,j-1/2}^n \text{ или} \\ & u_{x,j-1/2}^n \leq u_{x,j+1/2}^n < 0, \\ \theta_0 \cdot \frac{u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n}{u_{x,j+1/2}^n} & \text{при } 0 \leq u_{x,j-1/2}^n < u_{x,j+1/2}^n \text{ или} \\ & u_{x,j+1/2}^n < u_{x,j-1/2}^n \leq 0, \\ \theta_0 & \text{при } u_{x,j-1/2}^n < 0 < u_{x,j+1/2}^n \text{ или} \\ & u_{x,j+1/2}^n < 0 < u_{x,j-1/2}^n. \end{cases}$$

Доопределим $\theta_{j+1/2}^n = 0$ при $u_{x,j+1/2}^n = 0$. Тогда последнюю формулу можно переписать при $a > 0$ как

$$\theta_{j+1/2}^n = \begin{cases} 0 & \text{при } |u_{x,j+1/2}^n| \leq |u_{x,j-1/2}^n| \text{ и} \\ & u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j-1/2}^n \geq 0, \\ \theta_0 \cdot \frac{u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n}{u_{x,j+1/2}^n} & \text{при } |u_{x,j+1/2}^n| > |u_{x,j-1/2}^n| \text{ и} \\ & u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j-1/2}^n \geq 0, \\ \theta_0 & \text{при } u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j-1/2}^n < 0. \end{cases}$$

Аналогично можно поступить и при $a < 0$. В этом случае для управления дисперсией будем использовать вместо (3.26) функцию θ , определяемую формулой

$$\theta = -\theta_0 h \frac{u_{xx}}{u_x}, \quad (3.33)$$

в которой производная u_{xx} аппроксимируется выражением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j+1/2}) \sim \frac{u_{x,j+3/2} - u_{x,j+1/2}}{h}.$$

В результате приходим к следующей формуле, справедливой для произвольного знака коэффициента a :

$$\theta_{j+1/2}^n = \begin{cases} 0 & \text{при } |u_{x,j+1/2}^n| \leq |u_{x,j+1/2-s}^n| \text{ и} \\ & u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+1/2-s}^n \geq 0, \\ \theta_0 \left(1 - \xi_{j+1/2}^n\right) & \text{при } |u_{x,j+1/2}^n| > |u_{x,j+1/2-s}^n| \text{ и} \\ & u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+1/2-s}^n \geq 0, \\ \theta_0 & \text{при } u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j+1/2-s}^n < 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

где $s = \text{sgn}(a)$, $\xi_{j+1/2}^n$ — одно из отношений (2.30) или (2.48):

$$\xi_{j+1/2}^n = \frac{u_{x,j+1/2-s}^n}{u_{x,j+1/2}^n}.$$

3.5. Покажем, что схема предиктор-корректор с переменным параметром (3.34) сохраняет монотонность численного решения. Перепишем схему (3.3), (3.4), (3.34) в виде одношаговой схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad (3.35)$$

где $f = au$, f^* — поток схемы предиктор-корректор,

$$\begin{aligned} f_{j+1/2}^* &= \frac{1}{2} \left(f_{j+1}^n + f_j^n - \tau a^2 (1 + \theta_{j+1/2}^n) u_{x,j+1/2}^n \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(f_{j+1}^n + f_j^n - \tau a^2 (1 + \theta_0) u_{x,j+1/2}^n + \tau a^2 (\theta_0 - \theta_{j+1/2}^n) u_{x,j+1/2}^n \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Используя формулу (3.34), получаем

$$\tau a^2 (\theta_0 - \theta_{j+1/2}^n) u_{x,j+1/2}^n = h \left((1+s)g_j + (1-s)g_{j+1} \right),$$

где сеточная функция g_j , определенная в целых узлах, выглядит так:

$$g_j = \frac{1}{2} \varkappa a^2 \theta_0 \cdot \begin{cases} u_{x,j+1/2}^n & \text{при } |u_{x,j+1/2}^n| \leq |u_{x,j-1/2}^n|, \\ & u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j-1/2}^n \geq 0, \\ u_{x,j-1/2}^n & \text{при } |u_{x,j+1/2}^n| \geq |u_{x,j-1/2}^n|, \\ & u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j-1/2}^n \geq 0, \\ 0 & \text{при } u_{x,j+1/2}^n \cdot u_{x,j-1/2}^n < 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Следовательно,

$$f_{j+1/2}^* = \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n - a^2 \varkappa h (1 + \theta_0) u_{x,j+1/2}^n + h (g_j + g_{j+1} - s(g_{j+1} - g_j)) \right].$$

Отметим, что введенная функция g_j может быть выражена через функцию $\min\text{mod}$ от двух вещественных переменных

$$\min\text{mod}(u, v) = \frac{1}{2} (\text{sgn}(u) + \text{sgn}(v)) \min(|u|, |v|), \quad (3.38)$$

т. е.

$$\min\text{mod}(u, v) = \begin{cases} u & \text{при } |u| \leq |v|, u \cdot v \geq 0, \\ v & \text{при } |u| \geq |v|, u \cdot v \geq 0, \\ 0 & \text{при } u \cdot v < 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

Из формулы (3.37) видно, что

$$g_j = \frac{1}{2} \varkappa a^2 \theta_0 \cdot \min\text{mod}(u_{x,j-1/2}^n, u_{x,j+1/2}^n). \quad (3.40)$$

Некоторые свойства функции $\min\text{mod}$ перечислены ниже.

Лемма 3.1. *Функция $\min\text{mod}$ обладает следующими свойствами:*

$$\min\text{mod}(u, v) = \min\text{mod}(v, u); \quad (3.41)$$

$$|\min\text{mod}(u, v)| \leq |u|, \quad |\min\text{mod}(u, v)| \leq |v|; \quad (3.42)$$

$$\min\text{mod}(u, v) \cdot \min\text{mod}(v, w) \geq 0; \quad (3.43)$$

$$\max(|\min\text{mod}(u, v)|, |\min\text{mod}(v, w)|) \leq |v|. \quad (3.44)$$

Доказательство следует непосредственно из определения (3.38) (или (3.39)). ■

Далее введем функцию

$$\gamma_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{g_{j+1} - g_j}{h u_{x,j+1/2}^n} & \text{при } u_{x,j+1/2}^n \neq 0, \\ 0 & \text{при } u_{x,j+1/2}^n = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

и перепишем выражение для потока

$$f_{j+1/2}^* = \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n + h \left(g_j + g_{j+1} - (a^2 \varkappa(1 + \theta_0) + s \gamma_{j+1/2} h) u_{x,j+1/2}^n \right) \right].$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (3.35), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{2h} \left[a u_{j+1}^n + a u_j^n + \right. \\ & \quad \left. + h \left(g_{j+1} + g_j - (a^2 \varkappa(1 + \theta_0) + s \gamma_{j+1/2} h) u_{x,j+1/2}^n \right) - \right. \\ & \quad \left. - a u_j^n - a u_{j-1}^n - h \left(g_j + g_{j-1} - (a^2 \varkappa(1 + \theta_0) + s \gamma_{j-1/2} h) u_{x,j-1/2}^n \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u_{t,j} + \frac{1}{2} \left[a u_{x,j+1/2}^n + a u_{x,j-1/2}^n + h \gamma_{j+1/2} u_{x,j+1/2}^n + h \gamma_{j-1/2} u_{x,j-1/2}^n - \right. \\ \left. - (a^2 \varkappa(1 + \theta_0) + s h \gamma_{j+1/2}) u_{x,j+1/2}^n + \right. \\ \left. + (a^2 \varkappa(1 + \theta_0) + s h \gamma_{j-1/2}) u_{x,j-1/2}^n \right] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, схема предиктор-корректор (3.3), (3.4), (3.34) приведена к виду (2.22), при этом

$$C_{j+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \left[a^2 \varkappa(1 + \theta_0) \mp a + (s \mp 1) h \gamma_{j+1/2} \right]. \quad (3.46)$$

Из теоремы 2.3 следует, что для монотонности схемы (3.3), (3.4), (3.34) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты (3.46) удовлетворяли неравенствам (2.23). Проверим выполнение этих неравенств.

Теорема 3.1. *При выполнении условия (3.24) схема предиктор-корректор (3.3), (3.4) с переменным параметром (3.34), (3.31) сохраняет монотонность численного решения.*

Доказательство. С учетом выражения (3.31) будем иметь

$$C_{j+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \left[|a| \mp a + (s \mp 1)h \gamma_{j+1/2} \right] = \frac{s \mp 1}{2} \left(a + h \gamma_{j+1/2} \right). \quad (3.47)$$

Оценим слагаемое, содержащее функцию γ . Из формул (3.40) и (3.43) следует, что числа g_j и g_{j+1} не могут иметь разные знаки, поэтому справедливо неравенство $|g_{j+1} - g_j| \leq \max(|g_j|, |g_{j+1}|)$. Следовательно,

$$h |\gamma_{j+1/2}| = h \frac{|g_{j+1} - g_j|}{h |u_{x,j+1/2}^n|} \leq \frac{\max(|g_j|, |g_{j+1}|)}{|u_{x,j+1/2}^n|}.$$

Из формул (3.40) и (3.44) получаем, что

$$\max(|g_j|, |g_{j+1}|) \leq \frac{1}{2} \varkappa a^2 \theta_0 |u_{x,j+1/2}^n|,$$

поэтому

$$h |\gamma_{j+1/2}| \leq \frac{1}{2} \varkappa a^2 \theta_0 = \frac{|a|}{2} (1 - |a| \varkappa) \quad (3.48)$$

и

$$a \cdot (a + h \gamma_{j+1/2}) \geq a^2 - \frac{a^2}{2} (1 - |a| \varkappa) > 0,$$

т. е. числа a и $a + h \gamma_{j+1/2}$ одного знака: $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(a + h \gamma_{j+1/2})$. Следовательно, формулу (3.47) можно переписать так:

$$C_{j+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \left[|a + h \gamma_{j+1/2}| \mp (a + h \gamma_{j+1/2}) \right]. \quad (3.49)$$

Из выражения (3.49) следует неотрицательность коэффициентов $C_{j+1/2}^{\pm}$. Кроме того, из оценки (3.48) и условия (3.24) получаем, что

$$C_{j+1/2}^{-} + C_{j+1/2}^{+} = |a + h \gamma_{j+1/2}| \leq \frac{|a|(3 - |a| \varkappa)}{2} = \frac{|a| \varkappa (3 - |a| \varkappa)}{2 \varkappa} < \frac{1}{\varkappa}.$$

Таким образом, при условии (3.24) неравенства (2.23) теоремы 2.3 выполняются, поэтому схема предиктор-корректор (3.3), (3.4) с переменным параметром (3.34), (3.31) будет сохранять монотонность численного решения. \blacksquare

Замечание. Легко проверить, что функция-ограничитель (2.50) модифицированной схемы Лакса – Вендроффа и параметр (3.34) схемы предиктор-корректор связаны равенством

$$\theta_{j+1/2}^n = \theta_0 (1 - \Phi_{j+1/2}), \quad (3.50)$$

поэтому модифицированная схема Лакса – Вендроффа (2.51), (2.50) совпадает со схемой предиктор-корректор (3.3), (3.4), (3.34), (3.31) (см. задачу 3.7).

Замечание. Если при использовании схемы предиктор-корректор (3.3), (3.4) с переменным параметром (3.34) сеточная функция $\theta_{j+1/2}^n$ в некоторых узлах достигает своей верхней границы θ_0 , вычисляемой по формуле (3.31), то фактически в этих узлах расчет величины $u_{j+1/2}^*$ производится по формуле (3.6) для противопоточной схемы (3.7). Поэтому, если при $a > 0$ выполняется одно из условий

$$u_{x,j-3/2}^n < 0, \quad u_{x,j-1/2}^n > 0 > u_{x,j+1/2}^n,$$

или

$$u_{x,j-3/2}^n > 0 > u_{x,j-1/2}^n, \quad u_{x,j+1/2}^n > 0,$$

то для расчета величины u_j^{n+1} используется противопоточная схема (3.7) первого порядка аппроксимации. Если производные численного решения на n -м слое по времени удовлетворяют одному из условий

$$u_{x,j-3/2}^n \geq u_{x,j-1/2}^n \geq u_{x,j+1/2}^n \geq 0,$$

или

$$u_{x,j-3/2}^n \leq u_{x,j-1/2}^n \leq u_{x,j+1/2}^n \leq 0,$$

то u_j^{n+1} вычисляется по схеме Лакса – Вендроффа второго порядка аппроксимации. Из формулы (3.34) следует также, что при выполнении любого из условий

$$0 \leq u_{x,j-3/2}^n < u_{x,j-1/2}^n < u_{x,j+1/2}^n,$$

или

$$0 \geq u_{x,j-3/2}^n > u_{x,j-1/2}^n > u_{x,j+1/2}^n,$$

расчет u_j^{n+1} будет выполняться по противопоточной схеме (2.44) второго порядка аппроксимации. В зависимости от поведения производных $u_{x,j+1/2}^n$, $u_{x,j-1/2}^n$, $u_{x,j-3/2}^n$ возможно переключение на другие разностные схемы (см. задачу 3.8).

ЗАДАЧИ

3.1. Показать, что если в схеме предиктор-корректор (3.3), (3.4) параметр θ выбирается по формуле (3.8), то получается схема Лакса (1.46).

3.2. Покажите, что при $\theta = (\theta_0 + \theta_L)/2$ и $|a|\varepsilon < 1$ схема предиктор-корректор (3.3), (3.4) сохраняет монотонность численного решения.

3.3. Пусть в схеме предиктор-корректор $\theta = -1/2$. Покажите, что при законе предельного перехода (1.84) эта схема будет абсолютно неустойчивой.

3.4. Получить П-форму (3.25) дифференциального представления схемы предиктор-корректор (3.3), (3.4) в случае переменного параметра $\theta_{j+1/2}^n = O(h)$.

3.5. Докажите, что противопоточная схема (2.44), аппроксимирующая со вторым порядком уравнение (3.1) с положительным коэффициентом $a > 0$, при условии (3.24) сохраняет на $(n+1)$ -м слое по времени монотонность произвольной монотонно возрастающей на n -м слое по времени функции u^n , удовлетворяющей условию $u_{\bar{x}x,j}^n \geq 0$, а также произвольной монотонно убывающей функции u^n , такой, что $u_{\bar{x}x,j}^n \leq 0$.

3.6. Докажите лемму 3.1.

3.7. Покажите, что модифицированная схема Лакса – Вендроффа (2.51), (2.50) совпадает со схемой предиктор-корректор (3.3), (3.4), (3.34), (3.31).

3.8. Пусть коэффициент a в уравнении переноса положителен. Тогда значения параметров $\theta_{j+1/2}^n$ и $\theta_{j-1/2}^n$ в схеме предиктор-корректор (3.3), (3.4), (3.34), (3.31) будут зависеть от значений производных $u_{x,j+1/2}^n$, $u_{x,j-1/2}^n$ и $u_{x,j-3/2}^n$. Поэтому при одних соотношениях между этими производными будет получаться схема Лакса – Вендроффа для вычисления решения u_j^{n+1} в фиксированном узле x_j , при других для этого же узла получится противопоточная схема, схема с направленной назад разностью второго порядка (2.44) или какие-то иные схемы. Запишите развернутую форму схемы предиктор-корректор для всевозможных соотношений между указанными производными.

§ 4. Схемы для нелинейного уравнения переноса

4.1. В настоящем параграфе мы рассмотрим разностные схемы для скалярного уравнения

$$u_t + [f(u)]_x = 0, \quad (4.1)$$

в котором функция f зависит нелинейным образом от решения u , но не зависит от производных u_t , u_x . Такие уравнения называются *квазилинейными*.

Математическая формулировка начально-краевой задачи для уравнения (4.1), рассматриваемого на конечном интервале $(0, l)$, должна включать начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (4.2)$$

и краевые условия. Количество краевых условий определяется поведением характеристик уравнения (4.1), которые задаются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = a(u), \quad (4.3)$$

где

$$a(u) = f_u(u). \quad (4.4)$$

Краевое условие необходимо задавать только на той границе интервала $(0, l)$, через которую характеристика входит в область $(0, l)$. Поэтому может оказаться, что краевых условий не нужно ставить вовсе, либо краевое условие нужно задавать в одной граничной точке $x = 0$ или $x = l$ или сразу в двух. Поскольку уравнение (4.1) нелинейное, то наклон характеристик в граничных точках $x = 0$ и $x = l$ зависит от решения, и изменение решения может приводить к изменению количества краевых условий на каждой из границ. Таким образом, задание краевых условий для нелинейного уравнения должно основываться на анализе каждой конкретной задачи. В силу сказанного мы не будем далее формулировать краевые условия для общего случая и зачастую вместо начально-краевой задачи для уравнения (4.1) будем рассматривать для него задачу Коши с начальным условием (4.2). Отметим, что для линейного уравнения (3.1) с постоянным коэффициентом $a > 0$ характеристика входит внутрь области решения всегда через левую границу $x = 0$, поэтому краевое условие задается только на этой границе.

На примере задачи Коши (4.1), (4.2) для уравнения Хопфа ($f = u^2/2$, $a(u) = u$)

$$u_t + uu_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (4.5)$$

покажем, как можно найти ее решение $u(x, t)$ методом характеристик. Характеристики уравнения (4.5) – это кривые на плоскости (x, t) , определяемые дифференциальным уравнением (4.3)

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t). \quad (4.6)$$

Пусть $x = x(t)$ – решение уравнения (4.6). Тогда левая часть уравнения (4.5) есть производная от u вдоль характеристики $x = x(t)$

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0,$$

и для решения эта производная равна нулю, поэтому функция $u(x(t), t)$ принимает постоянное значение на кривой $x = x(t)$. Тогда из уравнения (4.6) следует, что каждая характеристика есть на самом деле прямая линия, тангенс угла наклона которой к оси Ot равен

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(\xi), \quad (4.7)$$

где $\xi = x(0)$ – точка пересечения характеристики с осью Ox . Уравнение этой прямой имеет вид

$$x - \xi = u_0(\xi)t. \quad (4.8)$$

Таким образом, чтобы найти значение функции $u(x, t)$ в точке (x, t) , следует вычислить соответствующее значение ξ , решив уравнение (4.8) (возможно, итерационным методом), и подставить найденное значение ξ в формулу (4.7):

$$u(x, t) = u_0(\xi). \quad (4.9)$$

Формулы (4.9), (4.8) приводят к следующему неявному виду решения задачи Коши (4.5), (4.2):

$$u(x, t) = u_0(x - ut). \quad (4.10)$$

Если начальные данные для уравнения (4.5) выбраны в виде непрерывной монотонно возрастающей функции, то решение рассматриваемого уравнения однозначно определено в полуплоскости $t \geq 0$, и его

гладкость соответствует гладкости начальных данных. Пусть, например, задана бесконечно дифференцируемая начальная функция

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x \leq 0, \\ u_1 + (u_2 - u_1) \exp[-(k/x)^2] & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

(здесь $u_1 < u_2$, $k > 0$). Решение задачи Коши (4.5), (4.11) описывается формулой (4.9). В силу условия $u_1 < u_2$, функция $u_0(x)$ является монотонно возрастающей, поэтому уравнение (4.8) имеет единственное решение ξ , и формулу (4.9) для решения задачи Коши (4.5), (4.11) можно переписать так:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x \leq u_1 t, \\ u_1 + (u_2 - u_1) \exp[-(k/\xi)^2] & \text{при } x > u_1 t. \end{cases} \quad (4.12)$$

Полученное решение будет бесконечно гладким в любой момент времени $t > 0$.

Рассмотрим еще один пример начальной функции, для которой решение существует при всех $t > 0$, и для него можно выписать явную формулу. Пусть $u_1 < u_2$, $x_1 < x_2$ и начальная функция является кусочно-линейной:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x \leq x_1, \\ \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ u_2 & \text{при } x \geq x_2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ функция $u_0(x)$ монотонно возрастает, поэтому получается семейство характеристик, проходящих через точки отрезка $[x_1, x_2]$, выходящих из одной общей точки (x_*, t_*) :

$$x_* = x_1 + u_1 t_* = x_2 + u_2 t_*; \quad t_* = -\frac{x_2 - x_1}{u_2 - u_1}, \quad (4.14)$$

где $t_* < 0$, и расходящихся с ростом времени (рис. 9, а). Решение существует при всех $t > 0$, задается формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x \leq x_1^t, \\ \frac{x - x_2^t}{x_1^t - x_2^t} u_1 + \frac{x - x_1^t}{x_2^t - x_1^t} u_2 & \text{при } x_1^t \leq x \leq x_2^t, \\ u_2 & \text{при } x \geq x_2^t, \end{cases} \quad (4.15)$$

является непрерывной функцией, дифференцируемой всюду, за исключением двух точек $x_i^t = x_i + u_i t$ ($i = 1, 2$), в которых первая производная

терпит разрыв. Такие непрерывные решения задачи (4.1), (4.2) с конечным числом точек разрыва первых производных называются *обобщенными решениями со слабыми разрывами*.

Решение (4.15) содержит *центрированную волну разрежения* – функцию, постоянную вдоль расходящихся характеристик, выходящих из одной и той же точки (4.14). Легко показать, что в центрированной волне разрежения имеет место равенство

$$u(x, t) = \frac{x - x_*}{t - t_*},$$

поэтому формулу (4.15) для решения $u(x, t)$ можно переписать в следующем виде:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x \leq x_1^t, \\ \frac{x - x_*}{t - t_*} & \text{при } x_1^t \leq x \leq x_2^t, \\ u_2 & \text{при } x \geq x_2^t. \end{cases} \quad (4.16)$$

В центрированной волне разрежения график решения выполаживается: с ростом времени величина $|u_x|$ уменьшается (рис. 9, б).

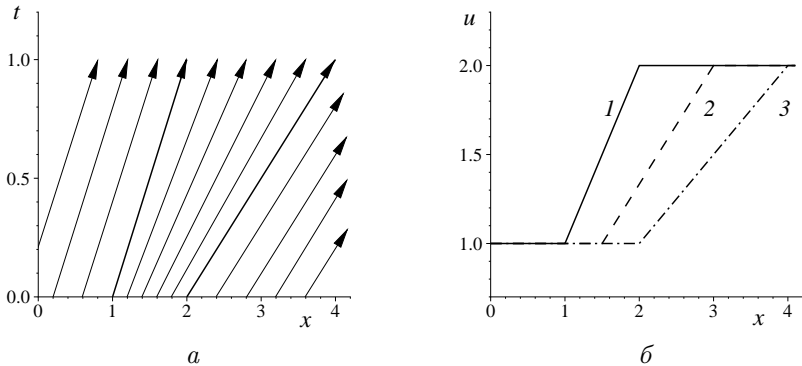


Рис. 9. а – характеристики задачи (4.5), (4.13) при $u_1 < u_2$; б – решение задачи (4.5), (4.13) в моменты времени $t = 0$ (1), $t = 0,5$ (2), $t = 1$ (3). $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

Пусть теперь выполняется обратное неравенство: $u_1 > u_2$. Тогда до момента времени $t < t_*$ решение задачи Коши с начальным условием (4.13) по-прежнему является непрерывной функцией, определяемой по формуле (4.15), но при $t = t_* > 0$ происходит пересечение

целого семейства характеристик в точке, координаты которой вычисляются по формулам (4.14). Следовательно, описанный способ нахождения решения становится непригодным, поскольку в точку (x_*, t_*) характеристики будут приносить разные значения начальной функции, т. е. решение становится неоднозначным. Такое решение, когда характеристики сходятся в одну точку, называется *центрированной волной сжатия* (рис. 10, а). В рассмотренном примере с кусочно-линейной начальной функцией (4.13) и $u_1 > u_2$ центрированная волна сжатия описывается формулами (4.15) или (4.16) и располагается в треугольнике $x_1^t \leq x \leq x_2^t$, $0 \leq t \leq t_*$, t_* – момент возникновения *градиентной катастрофы*. Он определяется по той же формуле (4.14), по которой в предыдущем примере вычислялся центр волны разрежения. В центрированной волне сжатия величина $|u_x|$ с ростом времени увеличивается (рис. 10, б), и в момент градиентной катастрофы решение становится разрывным.

Мы рассмотрели случай, когда начальная функция была задана формулой (4.13), и увидели, что для убывающей кусочно-линейной функции $u_0(x)$ непрерывное решение существует только при $t < t_*$. В случае произвольной начальной функции метод характеристик дает для решения формулу (4.10). Продифференцируем обе части этой формулы по переменной x :

$$u_x = u'_0 - u'_0 u_x t.$$

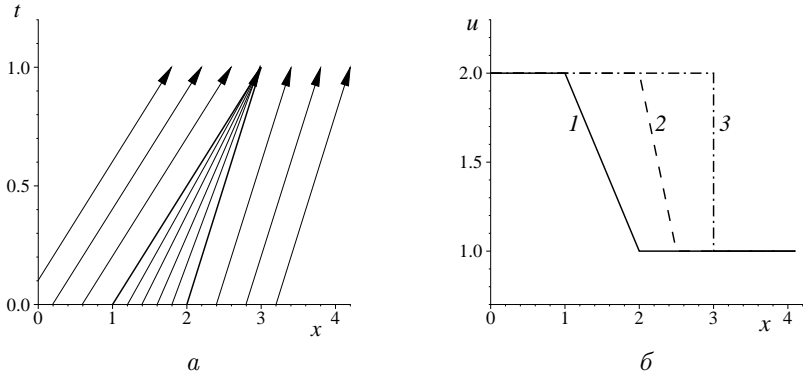


Рис. 10. а – характеристики задачи (4.5), (4.13) при $u_1 > u_2$; б – решение задачи (4.5), (4.13) в моменты времени $t = 0$ (1), $t = 0,5$ (2), $t = 1$ (3). $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

Отсюда находим

$$u_x = \frac{u'_0}{1 + u'_0 t}.$$

Видим, что если $u_0(x)$ – убывающая функция, т. е. $u'_0 < 0$, то наступит момент времени

$$t_* = -\frac{1}{u'_0(x)} > 0, \quad (4.17)$$

когда производная u_x перестанет существовать. Это соответствует пересечению двух или более характеристик, которые с линии $t = 0$ независимо приносят в одну точку области различные значения. Гладкое решение перестает существовать с момента времени (4.17). Решение становится разрывным. Поскольку дифференциальное уравнение не имеет решение при $t \geq t_*$, то необходимо заменить его некоторым соотношением, которому подчинялось бы разрывное решение. И это соотношение должно быть эквивалентно дифференциальному уравнению на гладком решении.

4.2. Разрыв в решении уравнения (4.1) может быть обусловлен заданием разрывной начальной функции (4.2). Однако, как показал разобранный пример с начальной функцией (4.13) при $u_1 > u_2$, разрывное решение может возникнуть и при задании непрерывной начальной функции. Выведем интегральное уравнение, которому удовлетворяет разрывное решение.

Проинтегрируем уравнение (4.1) по произвольной ограниченной области \mathcal{D} , лежащей в полуплоскости $t \geq 0$ и имеющей кусочно-гладкую границу $\mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$, и применим формулу Грина [12]:

$$0 = \iint_{\mathcal{D}} (u_t + f_x) dx dt = \oint_{\mathcal{C}} -u dx + f dt.$$

Таким образом, получили *интегральный закон сохранения*

$$\oint_{\mathcal{C}} -u dx + f dt = 0, \quad (4.18)$$

которому удовлетворяет гладкое решение уравнения (4.1). Но, в отличие от (4.1), интегральное уравнение (4.18) может удовлетворяться для

разрывной функции $u(x, t)$. Поэтому в основу определения разрывного решения (*обобщенного решения с сильным разрывом*) можно положить равенство (4.18), которое должно выполняться для любого кусочно-гладкого контура \mathcal{C} .

Отметим, что если для некоторой гладкой функции $u(x, t)$ равенство (4.18) выполняется для любого кусочно-гладкого контура \mathcal{C} , то функция $u(x, t)$ будет классическим решением уравнения (4.1).

Пусть $x = x(t)$ – линия, на которой решение $u(x, t)$ терпит разрыв. В качестве \mathcal{D} возьмем криволинейный четырехугольник $abcd$, содержащий некоторую дугу ef линии разрыва (рис. 11). Тогда интегральное уравнение (4.18) для контура этого четырехугольника запишется в виде

$$\oint_{abcd} u dx - f dt = 0.$$

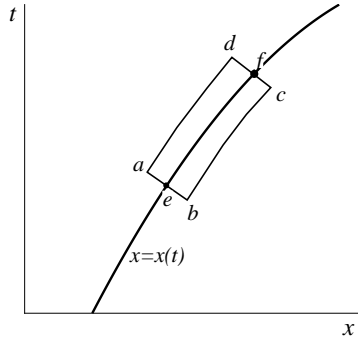


Рис. 11. Контур интегрирования в соотношении (4.18), используемый для вывода уравнения сильного разрыва (4.20)

Будем стягивать отрезки ab и cd к точкам e и f пересечения с линией разрыва. Тогда интегралы по ab и cd обращаются в нуль, и уравнение превращается в следующее

$$\int_{ef} [u] dx - [f] dt = 0, \quad (4.19)$$

где $[z] = z_{\text{пр}} - z_{\text{лев}}$ – скачок величины z на линии разрыва. На линии разрыва выполняется соотношение

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = D dt,$$

где D – скорость движения точки разрыва. Поэтому равенство (4.19) можно переписать так:

$$\int_{ef} ([u]D - [f]) dt = 0.$$

Ввиду произвольности участка ef подынтегральное выражение должно равняться нулю в каждой точке линии разрыва $x = x(t)$

$$[u]D = [f], \quad (4.20)$$

т. е. скорость движения точки разрыва и значения решения по обе стороны разрыва не могут быть произвольными: они связаны *уравнением сильного разрыва* (4.20).

Вернемся теперь к уравнению Хопфа (4.5). Используя равенство (4.20), получаем следующее выражение для скорости движения точки разрыва:

$$D = \frac{[f]}{[u]} = \frac{u_{\text{пр}}^2 - u_{\text{лев}}^2}{2(u_{\text{пр}} - u_{\text{лев}})} = \frac{u_{\text{пр}} + u_{\text{лев}}}{2}. \quad (4.21)$$

Для начальной функции (4.13) методом характеристик было построено непрерывное решение (4.15), которое при $u_1 > u_2$ существует только для времени $t < t_*$. Используя выражение (4.21), получаем следующую формулу для разрывного решения задачи (4.5), (4.13) при $t \geq t_*$, т. е. после градиентной катастрофы:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x < x_* + D(t - t_*), \\ u_2 & \text{при } x > x_* + D(t - t_*), \end{cases} \quad (4.22)$$

где

$$D = \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (4.23)$$

В рассмотренном примере разрывное решение возникло из непрерывной начальной функции. Пусть теперь сама начальная функция является разрывной:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & x < x_0, \\ u_2, & x > x_0, \end{cases} \quad (4.24)$$

где $u_1 \neq u_2$. Согласно формуле (4.21), получаем следующее выражение для разрывного решения при $t > 0$:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x < x_0 + Dt, \\ u_2 & \text{при } x > x_0 + Dt. \end{cases} \quad (4.25)$$

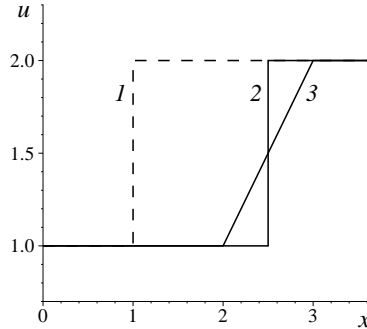


Рис. 12. Графики двух решений задачи Коши (4.5), (4.24) при $u_1 < u_2$. 1 – начальная функция (4.24); 2 – разрывное решение (4.25); 3 – непрерывное решение (4.26). $t = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $x_0 = 1$

Формула (4.25) получается одной и той же, как для значений $u_1 < u_2$, так и для $u_1 > u_2$. Однако в первом случае, при $u_1 < u_2$, получается еще одно решение в виде централизованной волны разрежения:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 & \text{при } x \leq x_0 + u_1 t, \\ \frac{x - x_0}{t} & \text{при } x_0 + u_1 t \leq x \leq x_0 + u_2 t, \\ u_2 & \text{при } x \geq x_0 + u_2 t. \end{cases} \quad (4.26)$$

Графики решений (4.25) и (4.26) изображены на рис. 12. Какое же из этих двух решений нам следует взять в качестве решения задачи Коши (4.5), (4.24) при $u_1 < u_2$? Оказывается, что разрывное решение (4.25) не подходит, поскольку оно является неустойчивым.

Теория нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа дает несколько критериев отбора устойчивых разрывных решений [18]. Один из таких критериев гласит, что в случае скалярного уравнения (4.1) разрывное решение (4.25) будет устойчивым, если характеристики приходят на линию разрыва с обеих сторон. Для случая $u_1 < u_2$ этот критерий не выполняется (рис. 13, а). Здесь характеристики «уходят» с линии разрыва. А в случае $u_1 > u_2$ (рис. 13, б) – критерий выполняется: характеристики приходят на линию разрыва с обеих сторон и приносят на нее заданные начальные данные.

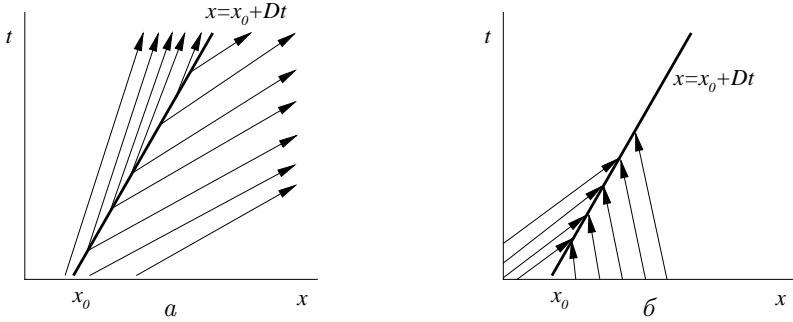


Рис. 13. Характеристики задачи (4.5), (4.24) при $u_1 < u_2$ (а) и при $u_1 > u_2$ (б)

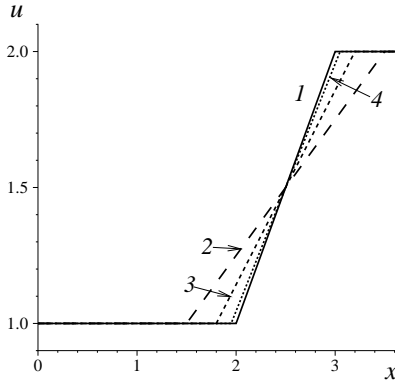


Рис. 14. Графики непрерывных решений задачи Коши для уравнения Хопфа при $u_1 < u_2$ для разрывной начальной функции (4.24) (1) и сглаженных на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ начальных функций (4.13): $2 - \varepsilon = 0,5$; $3 - \varepsilon = 0,2$; $4 - \varepsilon = 0,05$. $t = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $x_0 = 1$

Согласно другому критерию [18], если вместо разрывной начальной функции (4.24) взять сглаженную на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) непрерывную начальную функцию, то соответствующее ей решение должно при $\varepsilon \rightarrow 0$ давать в пределе решение, соответствующее разрывной начальной функции. Применим этот критерий. Пусть $x_1 = x_0 - \varepsilon$, $x_2 = x_0 + \varepsilon$. Возьмем непрерывную начальную функцию (4.13) и соответствующее ей решение (4.16). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение

(4.16) дает в пределе функцию (рис. 14), которая при $u_1 < u_2$ описывается формулой (4.26) для центрированной волны разрежения, т. е. предельное решение не совпадает с решением, описываемым формулой (4.25). Поэтому и согласно второму критерию, разрывное решение (4.25) является неустойчивым при $u_1 < u_2$, и в качестве решения следует взять в этом случае центрированную волну разрежения (4.26). Если же $u_1 > u_2$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ из решения (4.15), (4.22) в пределе получается разрывное решение (4.25). Поэтому это разрывное решение является устойчивым и по второму критерию.

Таким образом, при задании разрывной начальной функции (4.24) при $u_1 > u_2$ получается разрывное решение (4.25), а при $u_1 < u_2$ — непрерывное для $t > 0$ решение (4.26).

4.3. Консервативные разностные схемы. Установили, что даже при гладких начальных данных в решении задачи Коши (4.1), (4.2) с течением времени могут возникнуть разрывы. Поэтому для получения разностных уравнений необходимо использовать интегральное соотношение (4.18). Запишем его аналогично рассмотренному ранее интегральному закону сохранения тепла (3.3.4):

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+\Delta x} u(\xi, t + \Delta t) d\xi - \int_x^{x+\Delta x} u(\xi, t) d\xi + \\ & + \int_t^{t+\Delta t} f(u(x + \Delta x, \tau)) d\tau - \int_t^{t+\Delta t} f(u(x, \tau)) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $t \geq 0$, $\Delta t > 0$ и $\Delta x > 0$ — произвольные числа. Этот интегральный закон сохранения устанавливает, что изменение величины u на произвольном отрезке $[x, x + \Delta x]$ за произвольный промежуток времени Δt определяется разностью потоков f через границы x и $x + \Delta x$ за время Δt .

Для получения консервативных разностных схем рассмотрим интегральный закон сохранения (4.27) для *элементарной ячейки сетки* $\omega_j^n = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx +$$

$$+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j-1/2}, t)) dt = 0.$$

Аппроксимируя входящие сюда интегралы

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx \sim u_j^n h; \quad \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j\pm 1/2}, t)) dt \sim f_{j\pm 1/2}^* \tau, \quad (4.28)$$

получаем *дискретный закон сохранения для элементарной ячейки*:

$$u_j^{n+1} h - u_j^n h + f_{j+1/2}^* \tau - f_{j-1/2}^* \tau = 0, \quad (4.29)$$

который после деления на τh дает семейство схем для нелинейного уравнения (4.1):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*}{h} = 0. \quad (4.30)$$

Конкретная схема из этого семейства будет определяться выбором конкретной формулы для подсчета потоков $f_{j\pm 1/2}^*$, при этом для выполнения свойства консервативности важно потребовать (см. § 3.3), чтобы для соседних элементарных ячеек ω_j^n и ω_{j+1}^n поток на разделяющей их общей границе $x_{j+1/2}$ аппроксимировался по одной и той же формуле (4.28). Тогда из выполнения дискретного закона сохранения (4.29) для элементарных ячеек будет следовать его справедливость в составных областях, полученных объединением элементарных ячеек, т. е. схема (4.30) будет консервативной по определению из § 3.3. В самом деле, рассмотрим составную область $\Omega = [a, b] \times [t^p, t^{p+m}]$, где $a = x_{k-1/2}$, $b = x_{l+1/2}$, $t^{p+m} = t^p + m\tau$, $k \leq l$, $m \geq 1$, полученную объединением элементарных ячеек:

$$\Omega = \bigcup_{j=k}^l \bigcup_{n=p}^{p+m-1} \omega_j^n.$$

Для такой области интегральный закон сохранения (4.27) записывается так:

$$\begin{aligned} & \int_a^b u(x, t^{p+m}) dx - \int_a^b u(x, t^p) dx + \\ & + \int_{t^p}^{t^{p+m}} f(u(b, t)) dt - \int_{t^p}^{t^{p+m}} f(u(a, t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Если для величины $a(u)$ ввести разностный аналог формулы (4.4):

$$a_{j+1/2}^n = \begin{cases} \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} & \text{при } u_{j+1}^n \neq u_j^n, \\ a(u_j^n) & \text{при } u_{j+1}^n = u_j^n, \end{cases} \quad (4.35)$$

то консервативная схема (4.34) запишется так же, как противопоточная схема (1.28) для линейного уравнения переноса (1.27) с положительным коэффициентом a :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a_{j-1/2}^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad (4.36)$$

поэтому схема (4.36) для уравнения Хопфа также носит название противопоточной схемы.

При построении консервативных схем для уравнения теплопроводности (§ 3.3) мы установили, что консервативные схемы могут быть получены не только из интегральных уравнений, но и непосредственно при аппроксимации дифференциального уравнения в дивергентной форме. Это же справедливо и для дифференциальных уравнений гиперболического типа. Например, аппроксимируя дивергентное уравнение (4.33) с помощью схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{2h} = 0, \quad (4.37)$$

получаем консервативную схему, совпадающую с (4.34).

Аппроксимируя уравнение Хопфа (4.5) в недивергентной форме, получаем недивергентную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0. \quad (4.38)$$

Оказывается, что схема (4.38) уже не является консервативной.

Лемма 4.1. *Для недивергентной схемы (4.38) дискретный аналог закона сохранения (4.32) не выполняется.*

До к а з а т е л ь с т в о. Если недивергентную схему (4.38) переписать в виде

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{2h} + \frac{(u_j^n)^2 - 2u_j^n u_{j-1}^n + (u_{j-1}^n)^2}{2h} = 0,$$

то видно, что она представляет собой консервативную схему (4.30) с дополнительным членом:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*}{h} + \frac{h}{2} (u_{\bar{x},j}^n)^2 = 0,$$

где $f_{j+1/2}^* = f_j^n$. Умножим полученные уравнения на $h\tau$:

$$u_j^{n+1}h - u_j^n h + f_{j+1/2}^* \tau - f_{j-1/2}^* \tau + \frac{\tau h^2}{2} (u_{\bar{x},j}^n)^2 = 0$$

и просуммируем почленно по всем элементарным ячейкам составной области Ω . В результате вместо дискретного закона сохранения (4.32) получим следующее равенство:

$$\sum_{j=k}^l u_j^{p+m} h - \sum_{j=k}^l u_j^p h + \sum_{n=p}^{p+m-1} f_{i+1/2}^* \tau - \sum_{n=p}^{p+m-1} f_{k-1/2}^* \tau + R = 0,$$

где

$$R = \frac{h}{2} \sum_{n=p}^{p+m-1} \sum_{j=k}^l (u_{\bar{x},j}^n)^2 \tau h.$$

Это равенство представляет собой дискретный аналог интегрального уравнения

$$\begin{aligned} & \int_a^b u(x, t^{p+m}) dx - \int_a^b u(x, t^p) dx + \\ & + \int_{t^p}^{t^{p+m}} f(u(b, t)) dt - \int_{t^p}^{t^{p+m}} f(u(a, t)) dt + \frac{h}{2} \int_{t^p}^{t^{p+m}} \int_a^b (u_x)^2 dx dt = 0, \end{aligned}$$

которое отличается от интегрального закона сохранения (4.31) последним членом – дисбалансом. Таким образом, действительно, недивергентная схема не является консервативной схемой. \blacksquare

В случае гладкого решения, когда $|u_x| \leq C = \text{const}$, ошибка (дисбаланс) R , с которой выполняется закон сохранения, невелика: $R = O(h)$. Если же в решении есть разрыв, то нарушение исходного закона сохранения становится значительным, и это может приводить к неправильному описанию эволюции разрыва при применении недивергентной

схемы (4.38). В самом деле, рассмотрим, например, результат решения с помощью схемы (4.38) задачи Коши для уравнения Хопфа с начальной функцией (4.24), где $u_1 > u_2 = 0$ и точка разрыва x_0 располагается между узлами x_{j_0} и x_{j_0+1} . Точное решение представляет собой скачок (4.25), движущийся с постоянной положительной скоростью (4.23). Однако численное решение по схеме (4.38) является стационарным скачком, совпадающим с начальной функцией $u_j^0 = u_0(x_j)$. Таким образом, неконсервативная схема (4.38) неправильно описывает эволюцию скачка и не является сходящейся.

4.4. Противопоточная схема. Консервативная противопоточная схема (4.34) (или (4.36)) построена только для уравнения Хопфа и в случае $u_j^n > 0$ (что эквивалентно предположению о том, что $a_{j+1/2}^n > 0, \forall j$). Основываясь на виде (3.7) противопоточной схемы для уравнения переноса с постоянным коэффициентом, построим консервативную противопоточную схему (4.30) для произвольного нелинейного уравнения (4.1). Для этого достаточно указать формулу, по которой будут вычисляться потоки $f_{j+1/2}^*$. Аналогично выражению (3.6) полагаем, что

$$f_{j+1/2}^* = \frac{1 + s_{j+1/2}}{2} f_j^n + \frac{1 - s_{j+1/2}}{2} f_{j+1}^n, \quad (4.39)$$

где $s_{j+1/2} = \text{sgn}(a_{j+1/2}^n)$. Консервативную схему (4.30) с потоками (4.39) будем называть противопоточной. Ее можно переписать в более привычной форме (3.7):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \left(\frac{a + |a|}{2} u_x \right)_{j-1/2}^n + \left(\frac{a - |a|}{2} u_x \right)_{j+1/2}^n = 0. \quad (4.40)$$

Легко проверить, что противопоточная схема (4.40) имеет первый порядок аппроксимации по τ и h и сохраняет монотонность численного решения (см. задачу 4.2).

Из выражения (4.35) следует, что для уравнения Хопфа (4.33) величина $a_{j+1/2}^n$ определяется по формуле

$$a_{j+1/2}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}, \quad (4.41)$$

поэтому противопоточная схема (4.40) записывается для уравнения Хоп-

фа как

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_j^n + u_{j-1}^n + |u_j^n + u_{j-1}^n|}{4} \cdot \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + \\ & + \frac{u_j^n + u_{j+1}^n - |u_j^n + u_{j+1}^n|}{4} \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

В случае положительных значений $u_j^n > 0$ схема (4.42) совпадает с приведенной ранее схемой (4.34) (или (4.36)).

4.5. Схема С. К. Годунова для уравнения Хопфа может быть рассмотрена в качестве еще одного примера вычисления численного потока $f_{j+1/2}^*$ в консервативной схеме (4.30).

Рассмотрим две соседние элементарные ячейки сетки ω_j^n и ω_{j+1}^n . В схеме С. К. Годунова поток $f_{j+1/2}^* = f(u_{j+1/2}^*)$ на общей границе $x_{j+1/2}$ (рис. 15) соседних элементарных ячеек вычисляется по значению $u_{j+1/2}^*$, которое находится из точного решения так называемой *задачи о распаде произвольного разрыва* на линии $x = x_{j+1/2}$ для уравнения Хопфа (4.5) с кусочно-постоянной начальной функцией $u_0(x)$, заданной по формуле (4.24), но не при $t = 0$, а при $t = t^n$:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_j^n & \text{при } x < x_{j+1/2}, \\ u_{j+1}^n & \text{при } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \quad (4.43)$$

Решение этой задачи зависит от соотношений между величинами u_j^n и u_{j+1}^n . Рассмотрим все возможные случаи.

Пусть

$$u_j^n > u_{j+1}^n. \quad (4.44)$$

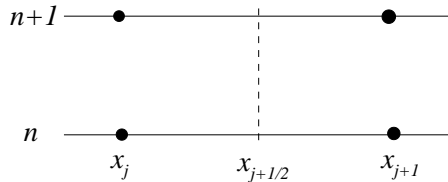


Рис. 15. Общая граница $x_{j+1/2}$ соседних элементарных ячеек, на которой вычисляются потоки в схеме С. К. Годунова

Тогда точное решение задачи (4.5), (4.43) дается формулой (4.25), т. е. при $t > t^n$ имеем

$$u(x, t) = \begin{cases} u_j^n & \text{при } x < x_{j+1/2} + D(t - t^n), \\ u_{j+1}^n & \text{при } x > x_{j+1/2} + D(t - t^n), \end{cases} \quad (4.45)$$

где D – скорость (4.23) движения разрыва

$$D = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}. \quad (4.46)$$

Нас интересует решение только на линии $x = x_{j+1/2}$. В соответствии с формулой точного решения (4.45) имеем (рис. 16, а и б)

$$u(x_{j+1/2}, t) = \begin{cases} u_j^n & \text{при } D > 0, \\ u_{j+1}^n & \text{при } D < 0. \end{cases} \quad (4.47)$$

Если скорость движения точки разрыва равна нулю, то такой разрыв называется *стационарным скачком* (рис. 16, в). Он возникает при условии

$$u_{j+1}^n = -u_j^n < 0. \quad (4.48)$$

В этом случае в качестве $u(x_{j+1/2}, t)$ можно взять любое из чисел u_{j+1}^n или $-u_j^n$. Для определенности положим $u(x_{j+1/2}, t) = u_{j+1}^n$.

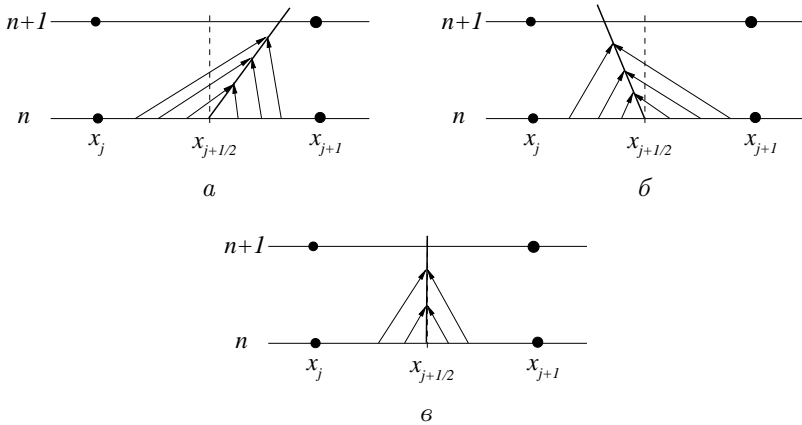


Рис. 16. Характеристики в задаче о распаде произвольного разрыва при $u_j^n > u_{j+1}^n$ и $D > 0$ (а); $D < 0$ (б); $D = 0$ (в)

Пусть теперь выполняется обратное неравенство

$$u_j^n < u_{j+1}^n. \quad (4.49)$$

Тогда решением задачи (4.5), (4.43) будет центрированная волна разрыва (4.26), т. е. непрерывная при $t > t^n$ функция

$$u(x, t) = \begin{cases} u_j^n, & x \leq x_{j+1/2} + u_j^n(t - t^n), \\ \frac{x - x_{j+1/2}}{t - t^n}, & x_{j+1/2} + u_j^n(t - t^n) < x < x_{j+1/2} + u_{j+1}^n(t - t^n), \\ u_{j+1}^n, & x \geq x_{j+1/2} + u_{j+1}^n(t - t^n). \end{cases} \quad (4.50)$$

Эта функция на линии $x = x_{j+1/2}$ принимает следующие значения (рис. 17):

$$u(x_{j+1/2}, t) = \begin{cases} u_j^n, & 0 \leq u_j^n \leq u_{j+1}^n, \\ 0, & u_j^n < 0 < u_{j+1}^n, \\ u_{j+1}^n, & u_j^n \leq u_{j+1}^n \leq 0. \end{cases} \quad (4.51)$$

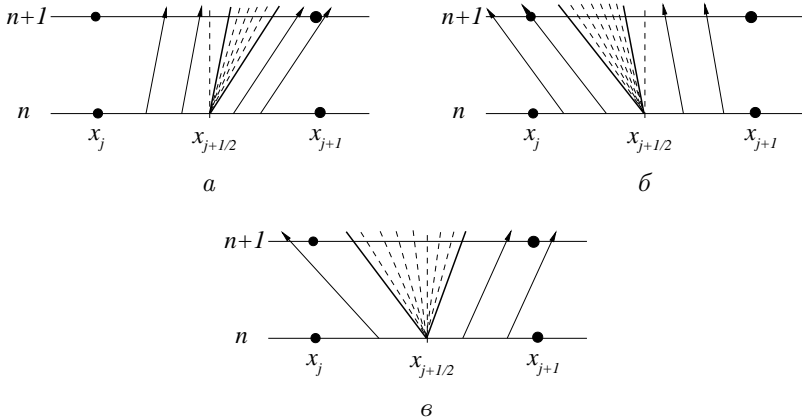


Рис. 17. Характеристики в задаче о распаде произвольного разрыва при $u_j^n < u_{j+1}^n$ и $u_j^n \geq 0$ (а); $u_{j+1}^n \leq 0$ (б); $u_j^n < 0 < u_{j+1}^n$ (в)

Полученное решение $u(x_{j+1/2}, t)$ и берется в качестве величины $u_{j+1/2}^*$:

$$u_{j+1/2}^* = \begin{cases} u_j^n, & \text{если } u_j^n > u_{j+1}^n \text{ и } D > 0, \\ u_{j+1}^n, & \text{если } u_j^n > u_{j+1}^n \text{ и } D \leq 0, \\ u_j^n, & \text{если } u_j^n < u_{j+1}^n \text{ и } u_j^n \geq 0, \\ u_{j+1}^n, & \text{если } u_j^n < u_{j+1}^n \text{ и } u_{j+1}^n \leq 0, \\ 0, & \text{если } u_j^n < 0 < u_{j+1}^n, \\ u_j^n, & \text{если } u_j^n = u_{j+1}^n. \end{cases} \quad (4.52)$$

Итак, в схеме распада разрыва вначале вычисляется величина $u_{j+1/2}^*$, затем потоки $f_{j+1/2}^* = f(u_{j+1/2}^*)$, и, наконец, используется консервативная схема (4.30).

Легко проверить, что в случае знакопостоянной сеточной функции u_j^n схема С. К. Годунова совпадает с противопоточной схемой (4.42) (см. задачу 4.3).

4.6. Обобщим схему предиктор-корректор (3.3), (3.4), построенную для линейного уравнения переноса (3.1), на случай нелинейного уравнения (4.1). Как и во всех рассмотренных ранее консервативных схемах, потоки $f_{j+1/2}^*$ будем вычислять в полудельных узлах $x_{j+1/2} = x_j + h/2$:

$$\frac{f_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + a_{j+1/2}^n \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0. \quad (4.53)$$

В уравнении (4.53) $\tau_{j+1/2}^* = 0,5\tau(1 + \theta_{j+1/2}^n)$, τ – шаг по времени, $\theta_{j+1/2}^n$ – параметр схемы, $f_j^n = f(u_j^n)$, функция $a_{j+1/2}^n$ определяется по формуле (4.35). Уравнение (4.53) есть результат аппроксимации уравнения для потоков

$$f_t + a(u)f_x = 0, \quad (4.54)$$

которое получается после умножения (4.1) на функцию $a(u)$. Первый шаг называется «предиктором».

Для того, чтобы схема была консервативной, на шаге «корректор» используем уравнение (4.30):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*}{h} = 0. \quad (4.55)$$

Для параметра $\theta = \theta_{0,j+1/2}$, где

$$\theta_{0,j+1/2} = \frac{1}{Cr_{j+1/2}} - 1; \quad Cr_{j+1/2} = \alpha |a_{j+1/2}^n|; \quad \alpha = \frac{\tau}{h} = \text{const},$$

получаем противопоточную схему (4.40) (см. задачу 4.4). Если $\theta = O(h)$, то схема (4.53), (4.55) аппроксимирует уравнение (4.1) со вторым порядком относительно τ и h . В частности, при $\theta = 0$ выписанная схема переходит в схему Лакса – Вендроффа, которая дает нефизичные осцилляции на разрывных решениях. В общем случае (для произвольного параметра θ) схема не сохраняет монотонность численного решения. Но оказывается, что этот параметр можно подобрать так, что схема будет обладать указанным свойством, т. е. схему можно монотонизировать. В работе [29] на основе анализа дифференциального приближения схемы предиктор-корректор (4.53), (4.55) была предложена следующая формула для сеточной функции $\theta_{j+1/2}^n$:

$$\theta_k = \begin{cases} 0 & \text{при } |\tilde{g}_k| \leq |\tilde{g}_{k-s}|, \tilde{g}_k \cdot \tilde{g}_{k-s} \geq 0, \\ \theta_{0,k} \frac{\tilde{g}_k - \tilde{g}_{k-s}}{\tilde{g}_k} & \text{при } |\tilde{g}_k| > |\tilde{g}_{k-s}|, \tilde{g}_k \cdot \tilde{g}_{k-s} \geq 0, \\ \theta_{0,k} & \text{при } \tilde{g}_k \cdot \tilde{g}_{k-s} < 0, \end{cases} \quad (4.56)$$

где $s = \text{sgn}(a_{j+1/2}^n)$, для сокращения записи верхний индекс n опущен, а через k обозначен дробный индекс $j + 1/2$,

$$\tilde{g}_{j+1/2} = |a_{j+1/2}^n| \left(1 - \varkappa |a_{j+1/2}^n|\right) u_{x,j+1/2}^n; \quad (4.57)$$

$$\theta_{0,j+1/2} = \frac{1 - \varkappa |a_{j+1/2}^n|}{\varkappa |a_{j+1/2}^n|}. \quad (4.58)$$

Формула (4.56) является аналогом выведенной ранее формулы (3.34), поскольку при $a = \text{const}$ (4.56) переходит в (3.34).

Теорема 4.1. *При выполнении условия*

$$\varkappa \cdot \max_j |a_{j+1/2}^n| < 1 \quad (4.59)$$

схема (4.53), (4.55) с переменным параметром $\theta_{j+1/2}$, заданным формулой (4.56), сохраняет монотонность численного решения.

До к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем выражение для потока

$$\begin{aligned} f_k^* &= \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n - \tau a_k^n (1 + \theta_k) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n - \tau (a_k^n)^2 (1 + \theta_k) u_{x,k}^n \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n - \tau (a_k^n)^2 (1 + \theta_{0,k}) u_{x,k}^n + \tau (a_k^n)^2 (\theta_{0,k} - \theta_k) u_{x,k}^n \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n - h |a_k^n| u_{x,k}^n + h (g_{j+1} + g_j - s(g_{j+1} - g_j)) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n + h (g_{j+1} + g_j - s(a_k^n + h\gamma_k) u_{x,k}^n) \right],
\end{aligned}$$

где

$$g_j = \frac{1}{2} \min \text{mod}(\tilde{g}_{j-1/2}, \tilde{g}_{j+1/2}), \quad (4.60)$$

функция $\gamma_{j+1/2}$ задана формулой (3.45). При получении формулы для f_k^* учтено, что числа a_k^n и $a_k^n + h\gamma_k$ одного знака – это следует из оценки (3.48). Значит, формулу для потока можно переписать так

$$f_k^* = \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n + h (g_{j+1} + g_j - |a_k^n + h\gamma_k| u_{x,k}^n) \right],$$

поэтому уравнение (4.55) шага «корректор» запишется в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{2h} \left[f_{j+1}^n + f_j^n + \right. \\
&\quad \left. + h (g_{j+1} + g_j - |a_{j+1/2}^n + \gamma_{j+1/2} h| u_{x,j+1/2}^n) - \right. \\
&\quad \left. - f_j^n - f_{j-1}^n - h (g_j + g_{j-1} - |a_{j-1/2}^n + \gamma_{j-1/2} h| u_{x,j-1/2}^n) \right] = 0
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \\
&+ \frac{1}{2} \left[(a_{j+1/2}^n + \gamma_{j+1/2} h) u_{x,j+1/2}^n + (a_{j-1/2}^n + \gamma_{j-1/2} h) u_{x,j-1/2}^n - \right. \\
&\quad \left. - |a_{j+1/2}^n + \gamma_{j+1/2} h| u_{x,j+1/2}^n + |a_{j-1/2}^n + \gamma_{j-1/2} h| u_{x,j-1/2}^n \right] = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, схема предиктор-корректор (4.53), (4.55), (4.56) приведена к виду (2.22) с коэффициентами (3.49). Справедливость условий (2.23) теоремы 2.3 устанавливается так же, как в пп. 3.5 при доказательстве теоремы 3.1. Следовательно, при условии (4.59) рассмотренная схема будет сохранять монотонность численного решения. ■

ЗАДАЧИ

4.1. Покажите, что выполнения условия

$$\varepsilon \cdot \max_{n,j} u_j^n \leq 1 \quad (4.61)$$

достаточно для устойчивости недивергентной схемы (4.38).

4.2. Докажите, что при условии (4.59) противопоточная схема (4.40) сохраняет монотонность численного решения.

4.3. Докажите, что если $u_j^n > 0$, то схема С. К. Годунова для уравнения Хопфа совпадает с противопоточной схемой (4.42).

4.4. Покажите, что если в схеме предиктор-корректор (4.53), (4.55) выбран параметр $\theta = \theta_{0,j+1/2}$, где величина $\theta_{0,j+1/2}$ определена в формуле (4.58), то получается противопоточная схема (4.40).

§ 5. Схемы на адаптивной сетке для уравнения переноса

5.1. Ранее, при решении стационарных задач, мы уже использовали неравномерные сетки (см. § 2.7, § 3.7) и убедились, что точность расчетов может заметно возрасти за счет подходящего сгущения узлов в подобластях сосредоточения особенностей решения. В настоящем параграфе мы продемонстрируем применение неравномерных сеток для численного решения нестационарных задач. В качестве примера возьмем начально-краевую задачу для линейного однородного уравнения переноса с постоянным коэффициентом $a > 0$:

$$u_t + au_x = 0, \quad x \in (0, l], \quad 0 < t \leq T, \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega} \equiv [0, l], \quad (5.2)$$

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.3)$$

Пусть начальная функция является разрывной в точке $x_0 \in (0, l)$:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & x < x_0, \\ u_2, & x > x_0. \end{cases}$$

Если $\mu_0(t) \equiv u_1$, то точное решение рассматриваемой задачи вычисляется по формуле $u(x, t) = u_0(x - at)$ или

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x < x_0 + at, \\ u_2, & x > x_0 + at. \end{cases} \quad (5.4)$$

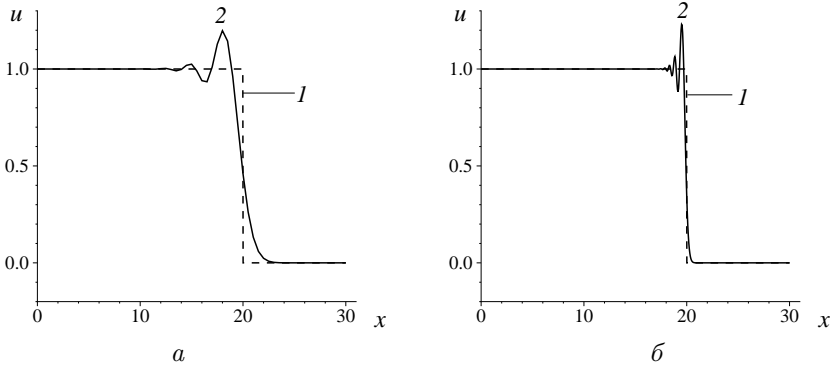


Рис. 18. Графики точного (1) и численного (2) решений в момент времени $t = 10$. $\theta = 0$. Сетка равномерная, $N = 60$ (а); $N = 600$ (б)

Вначале приведем результаты численного решения этой задачи на равномерной неподвижной сетке с узлами $x_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$) и шагом $h = l/N$. Для поиска приближенного решения будем использовать схему предиктор-корректор (3.3), (3.4). При параметре $\theta \equiv 0$ она совпадает со схемой Лакса – Вендроффа. Результаты расчетов для этого случая представлены на рис. 18, на котором показано численное решение, полученное по схеме Лакса – Вендроффа, и точное решение (5.4) при следующих значениях входных данных:

$$T = 10, \quad l = 30, \quad x_0 = 10, \quad a = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 0. \quad (5.5)$$

Во всех численных экспериментах шаг по времени задавался по формуле

$$\tau = k_{\text{зап}} \frac{h}{a}, \quad (5.6)$$

где $k_{\text{зап}}$ – коэффициент запаса, который в расчетах полагался равным 0.5, что обеспечивало с запасом выполнение условий устойчивости (3.17). Видно, что в численном решении имеются осцилляции, причем они остаются и на мелкой сетке. Кроме того, видно, что на мелкой сетке положение разрыва передается точнее.

На рис. 19 показано численное решение, полученное по схеме предиктор-корректор с параметром $\theta = \theta_0$, где постоянная θ_0 определена в формуле (3.5). В § 3 было показано, что для такого значения параметра схема предиктор-корректор превращается в противопоточную

схему (3.7). Из рисунка видно, что противопоточная схема не дает осцилляций в численном решении, однако оно, в силу первого порядка аппроксимации, сильно «размазывается» в окрестности разрыва. При измельчении сетки «размазывание» численного решения уменьшается, и разрыв передается точнее.

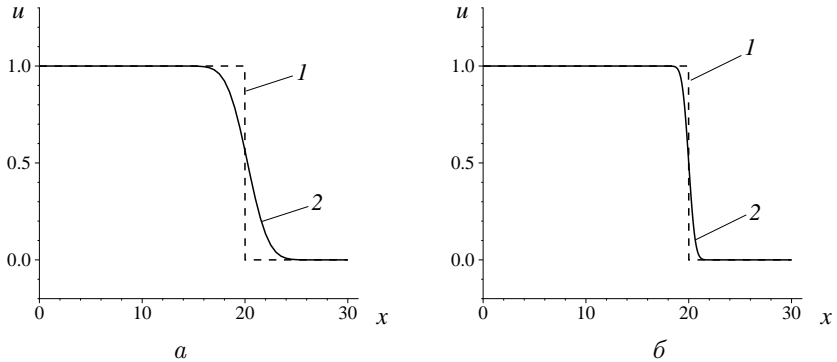


Рис. 19. Графики точного (1) и численного (2) решений в момент времени $t = 10$. $\theta = \theta_0$. Сетка равномерная, $N = 60$ (а); $N = 600$ (б)

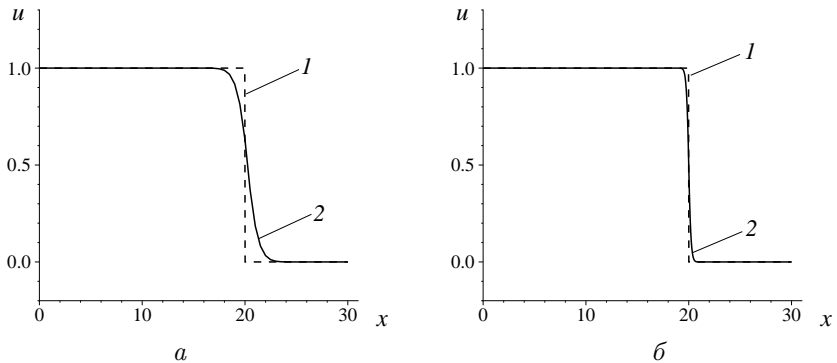


Рис. 20. Графики точного (1) и численного (2) решений в момент времени $t = 10$. Параметр $\theta_{j+1/2}^n$ вычисляется по формуле (3.34). Сетка равномерная, $N = 60$ (а); $N = 600$ (б)

На рис. 20 приведены результаты расчетов при использовании переменного параметра $\theta_{j+1/2}^n$, значения которого определяются по формуле (3.34). Видно, что, в отличие от схемы Лакса – Вендроффа, схема предиктор-корректор (3.3), (3.4) с переменным параметром θ сохраняет монотонность численного решения. Сравнивая рисунки 19 и 20, видим, что в последнем случае численное решение более точное как на грубой, так и на мелкой сетках. Однако «размазывание» разрыва все еще значительное. Поэтому имеет смысл проводить расчеты на неравномерных сетках, имеющих сгущения узлов в зоне больших значений градиента решения.

5.2. В нестационарных задачах особенности решения типа зон с большими градиентами с течением времени смещаются, меняют свое положение, поэтому неравномерная сетка, отслеживающая их, должна быть подвижной. Такие подвижные сетки, подстраивающиеся под решение и учитывающие изменение решения со временем, называются *динамически адаптивными*. Координаты узлов подвижной сетки на отрезке $\bar{\Omega}$ будем обозначать через x_j^n , а шаги – через $h_{j+1/2}^n = x_{j+1}^n - x_j^n$, где n – номер слоя по времени.

Далее будем предполагать, что существует некоторое гладкое невырожденное преобразование координат

$$x = x(q, t), \quad (5.7)$$

$$x(0, t) = 0, \quad x(1, t) = l \quad (5.8)$$

с положительным якобианом $J = x_q$, которое в каждый момент времени t взаимно-однозначно отображает единичный отрезок $\bar{Q} = [0, 1]$ на $\bar{\Omega}$. Покроем отрезок \bar{Q} равномерной неподвижной сеткой \bar{Q}_h с шагом $h = 1/N$, состоящей из узлов $q_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$), и будем считать, что узлы x_j^n неравномерной сетки на $\bar{\Omega}$ являются образами узлов q_j равномерной сетки \bar{Q}_h при преобразовании координат (5.7), (5.8).

Разностная схема на неравномерной сетке $x_j^n = x(q_j, t^n)$ строится так. Сначала в исходной задаче производится переход к новой независимой переменной q , а далее для полученной задачи строится схема на равномерной сетке \bar{Q}_h .

Согласно сказанному, перейдем в задаче (5.1)–(5.3) к независимым переменным q, t . Пусть $v(q, t) = u(x(q, t), t)$, т. е. функция v принимает в точке (q, t) такое же значение, что и функция u в точке (x, t) , соответствующей точке (q, t) при отображении (5.7). Тогда, согласно правилу

дифференцирования сложной функции, получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial q}(q, t) \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial v}{\partial t}(q, t) \frac{\partial t}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial q}(q, t) \frac{\partial q}{\partial x}(x, t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial q}(q, t) \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial v}{\partial t}(q, t) \frac{\partial t}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial q}(q, t) \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial v}{\partial t}(q, t).$$

Далее в этих выражениях заменим производные $\partial q/\partial x$ и $\partial q/\partial t$ на производные $\partial x/\partial q$ и $\partial x/\partial t$. Для этого продифференцируем тождество $x = x(q(x, t), t)$ сначала по переменной x , а затем – по t :

$$1 = \frac{\partial x}{\partial q}(q, t) \frac{\partial q}{\partial x}(x, t), \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial q}(q, t) \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial x}{\partial t}(q, t).$$

Отсюда получаем выражения

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{J(q, t)}, \quad \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{J(q, t)} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(q, t).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial q}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x_t}{J} \frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial v}{\partial t},$$

и уравнение переноса (5.1) записывается в новых координатах в виде следующего уравнения в недивергентной форме относительно искомой функции v :

$$v_t + \frac{a - x_t}{J} v_q = 0. \quad (5.9)$$

Если уравнение (5.9) умножить на J и учесть тождество $J_t = x_{tq}$, то уравнение переноса (5.1) можно записать в новых координатах (q, t) и в дивергентной форме

$$(Jv)_t + [(a - x_t)v]_q = 0. \quad (5.10)$$

В результате, в координатах (q, t) задача (5.1)–(5.3) принимает следующий вид:

$$(Jv)_t + [(a - x_t)v]_q = 0, \quad q \in (0, 1], \quad 0 < t \leq T, \quad (5.11)$$

$$v(q, 0) = v_0(q) \equiv u_0(x(q, 0)), \quad q \in \bar{Q}, \quad (5.12)$$

$$v(0, t) = \mu_0(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.13)$$

Аналогом схемы предиктор-корректор (3.3), (3.4) в случае подвижной сетки будет двухшаговая схема, на шаге предиктор которой аппроксимируется уравнение в недивергентной форме (5.9), а на шаге корректор – в дивергентной (5.10). Первое из этих уравнений аппроксимируется в центрах ячеек $q_{j+1/2} = q_j + h/2$ равномерной сетки \bar{Q}_h , а второе – во внутренних узлах этой сетки:

$$\frac{v_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j+1}^n)}{\tau_{j+1/2}^*} + \frac{a - x_{t,j+1/2}}{J_{j+1/2}^n} \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} = 0, \quad (5.14)$$

$$\frac{(Jv)_j^{n+1} - (Jv)_j^n}{\tau} + \frac{(a - x_{t,j+1/2})v_{j+1/2}^* - (a - x_{t,j-1/2})v_{j-1/2}^*}{h} = 0. \quad (5.15)$$

Здесь

$$x_{t,j+1/2} = \frac{1}{2}(x_{t,j} + x_{t,j+1}), \quad x_{t,j} = \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{\tau}, \quad (5.16)$$

$$J_{j+1/2}^n = \frac{x_{j+1}^n - x_j^n}{h}, \quad J_j^n = \frac{1}{2} \left(J_{j+1/2}^n + J_{j-1/2}^n \right). \quad (5.17)$$

К этим уравнениям добавляются разностные краевые и начальные условия:

$$v_0^n = \mu_0(t^n), \quad (5.18)$$

$$v_j^0 = u_0(x_j^0), \quad j = 0, \dots, N. \quad (5.19)$$

5.3. Опишем алгоритм решения на подвижной сетке полученной разностной задачи. Вначале методом эквираспределения строится неравномерная сетка x_j^0 на начальном слое по времени, т. е. при $n = 0$. Суть метода эквираспределения заключается в том, что из множества всевозможных отображений вида (5.7), (5.8) выбирается то, которое при $t = 0$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} (w(x, 0)x_q)_q &= 0, & q \in (0, 1), \\ x(0, 0) &= 0, & x(1, 0) = l, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $w(x, t)$ – заданная управляющая функция (см. § 2.7). Для вычисления координат x_j^0 узлов неравномерной сетки на начальном временном слое будем использовать разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(w_{j+1/2}^0 \frac{x_{j+1}^0 - x_j^0}{h} - w_{j-1/2}^0 \frac{x_j^0 - x_{j-1}^0}{h} \right) &= 0, & j = 1, \dots, N-1, \\ x_0^0 &= 0, & x_N^0 = l, \end{aligned} \quad (5.21)$$

аппроксимирующую задачу (5.20). Здесь $w_{j+1/2}^0 = w(x_{j+1/2}^0, 0)$, $x_{j+1/2}^0 = (x_j^0 + x_{j+1}^0)/2$. Для определенности будем предполагать далее, что управляющая функция задана в виде

$$w(x, t) = 1 + \alpha |u_x(x, t)|, \quad (5.22)$$

где α – параметр управляющей функции.

Поскольку задача (5.21) является нелинейной, то для ее решения будем использовать итерационный метод. В качестве начального итерационного приближения для сетки x_j^0 выберем равномерную на отрезке $[0, l]$ сетку $x_j^{0,0} = jl/N$. Пусть сетка $x_j^{0,m}$ на m -й итерации уже построена и $h_{j+1/2}^{0,m}$ – ее шаги. На этой сетке, используя заданную функцию $u_0(x)$ из начального условия (5.2), вычисляем управляющую функцию

$$w_{j+1/2}^{0,m} = 1 + \alpha \left| \frac{u_0(x_{j+1}^{0,m}) - u_0(x_j^{0,m})}{h_{j+1/2}^{0,m}} \right|$$

и с ее помощью находим новое расположение узлов $x_j^{0,m+1}$ на $(m+1)$ -й итерации. Для этого методом прогонки решаем линейную разностную задачу

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(w_{j+1/2}^{0,m} \frac{x_{j+1}^{0,m+1} - x_j^{0,m+1}}{h} - w_{j-1/2}^{0,m} \frac{x_j^{0,m+1} - x_{j-1}^{0,m+1}}{h} \right) &= 0, \\ x_0^{0,m+1} = 0, \quad x_N^{0,m+1} = l, & \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Итерационный процесс продолжается до сходимости с заданной точностью координат узлов $x_j^{0,m}$, например, пока не будет выполнено условие окончания итераций

$$\max_{0 \leq j \leq N} |x_j^{0,m+1} - x_j^{0,m}| < \varepsilon.$$

Последнее итерационное приближение и принимается за неравномерную сетку x_j^0 на начальном слое по времени. На полученной сетке вычисляется начальная сеточная функция

$$v_j^0 \equiv u_j^0 = u_0(x_j^0), \quad j = 0, \dots, N$$

и происходит переход к построению сетки x_j^1 и вычислению решения v_j^1 на первом временном слое $n = 1$.

Пусть сетка x_j^n на n -м слое по времени построена и на ней вычислено решение v_j^n . Опишем алгоритм построения неравномерной сетки x_j^{n+1} на следующем слое по времени и вычисления на этом слое решения v_j^{n+1} .

Для вычисления координат x_j^{n+1} будем использовать конечно-разностный аналог уравнения

$$(w(x, t)x_q)_q = \beta x_t, \quad (5.23)$$

которое отличается от уравнения (5.20) классического метода эквираспределения наличием члена с первой производной по времени (β – положительный параметр, подбираемый экспериментальным путем в целях уменьшения осцилляций траекторий узлов сетки). При малом β влияние этого члена незначительно, а при больших значениях параметра β величины смещений узлов уменьшаются, сетка становится «малоподвижной».

Конечно-разностная задача для поиска координат узлов x_j^{n+1} выглядит так:

$$\frac{1}{h} \left(w_{j+1/2}^n \frac{x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1}}{h} - w_{j-1/2}^n \frac{x_j^{n+1} - x_{j-1}^{n+1}}{h} \right) = \beta \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{\tau},$$

$$j = 1, \dots, N-1, \quad (5.24)$$

$$x_0^{n+1} = 0, \quad x_N^{n+1} = l,$$

при этом управляющая функция вычисляется по известному решению на n -м слое по времени:

$$w_{j+1/2}^n = 1 + \alpha \left| \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h_{j+1/2}^n} \right|. \quad (5.25)$$

Система разностных уравнений (5.24) имеет строгое диагональное преобладание, поэтому решить ее можно методом скалярной прогонки [23, 27]. Величины v_j^* определяются на основе уравнения (5.14). Расчет очередного шага по времени завершается вычислением величин v_j^{n+1} . Для этого используются уравнения (5.15).

5.4. Экспериментальную проверку свойств схемы (5.14), (5.15) выполним на той же тестовой задаче и при тех же входных данных (5.5), которые рассматривались в пп. 5.1. Для построения адаптивной сетки

использовалась управляющая функция (5.22), которая аппроксимировалась подобно (5.25). Параметр α во всех расчетах был одинаковым и полагался равным 5. Параметр β для уравнения (5.24) также не изменялся и брался равным 10.

Следующие рисунки демонстрируют влияние на численное решение параметра θ . На рис. 21 изображено поведение численного решения, полученного по схеме Лакса – Вендроффа ($\theta \equiv 0$). Видно, что применение адаптивной сетки не устраняет осцилляции в численном решении, но положение скачка передается лучше, чем при использовании равномерной сетки с тем же количеством узлов (ср. рисунки 18, *a* и 21, *a*).

На рис. 22 изображено поведение численного решения, полученного с помощью противоточной схемы (5.31), приведенной ниже. Видно, что при применении адаптивной сетки положение скачка передается лучше, чем при использовании равномерной сетки с тем же количеством узлов (ср. рисунки 19, *a* и 22, *a*), но хуже, чем при использовании схемы Лакса – Вендроффа на адаптивной сетке (ср. рисунки 21, *a* и 22, *a*).

На рис. 23 изображено поведение численного решения, полученного по схеме предиктор-корректор с параметром [29]

$$\theta_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при } |\tilde{g}_{j+1/2}| \leq |\tilde{g}_{j+1/2-s}|, \\ & \tilde{g}_{j+1/2} \cdot \tilde{g}_{j+1/2-s} \geq 0, \\ \theta_{0,j+1/2} \frac{\tilde{g}_{j+1/2} - \tilde{g}_{j+1/2-s}}{\tilde{g}_{j+1/2}} & \text{при } |\tilde{g}_{j+1/2}| > |\tilde{g}_{j+1/2-s}|, \\ & \tilde{g}_{j+1/2} \cdot \tilde{g}_{j+1/2-s} \geq 0, \\ \theta_{0,j+1/2} & \text{при } \tilde{g}_{j+1/2} \cdot \tilde{g}_{j+1/2-s} < 0, \end{cases} \quad (5.26)$$

где

$$\tilde{g}_{j+1/2} = |\bar{a}_{j+1/2}| (1 - Cr_{j+1/2}) v_{q,j+1/2}^n, \quad Cr_{j+1/2} = \frac{\varkappa |\bar{a}_{j+1/2}|}{J_{j+1/2}^n} < 1,$$

$$\theta_{0,j+1/2} = \frac{1}{Cr_{j+1/2}} - 1, \quad (5.27)$$

$\bar{a} = a - x_t$, $s = \text{sgn}(\bar{a}_{j+1/2})$, $\varkappa = \tau/h$, $v_{q,j+1/2}^n = (v_{j+1}^n - v_j^n)/h$. Сравнивая рисунки 23, *a* и 20, *a*, видим, что численное решение, полученное на адаптивной сетке, также не имеет осцилляций, но положение разрыва передается лучше, чем на равномерной сетке.

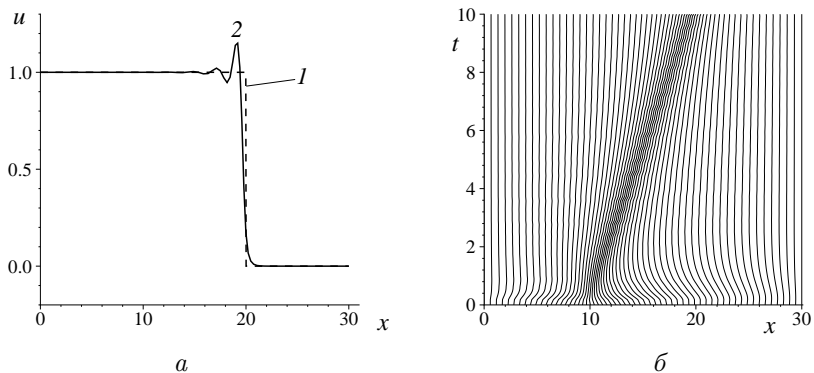


Рис. 21. *a* – графики точного (1) и численного (2) решений в момент времени $t = 10$; *б* – траектории узлов адаптивной сетки. Схема Лакса – Вендроффа, $N = 60$

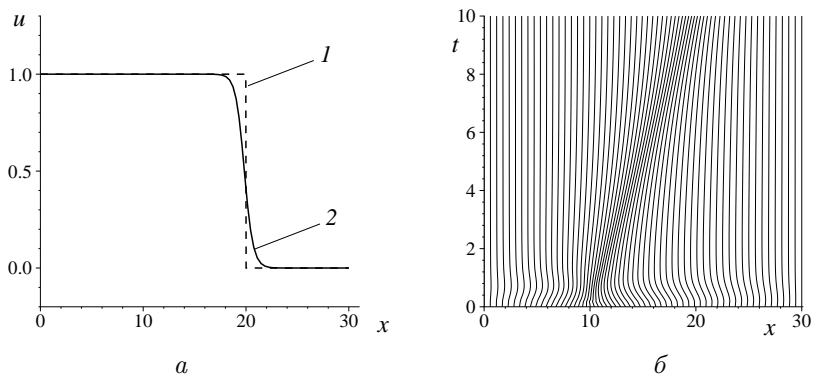


Рис. 22. *a* – графики точного (1) и численного (2) решений в момент времени $t = 10$; *б* – траектории узлов адаптивной сетки. Противопоточная схема, $N = 60$

5.5. Противопоточная схема на адаптивной сетке. Мы уже отмечали, что схема предиктор-корректор (3.3), (3.4) с параметром $\theta = \theta_0$, заданным по формуле (3.5), совпадает с противопоточной схемой (3.7) на равномерной сетке. Получим теперь противопоточную схему на адаптивной сетке, взяв в схеме (5.14), (5.15) параметр $\theta_{j+1/2} = \theta_{0,j+1/2}$. Для такого параметра θ уравнение (5.14) и формула (5.27) дают следующее

выражение для величин $v_{j+1/2}^*$:

$$v_{j+1/2}^* = 0.5[v_j^n + v_{j+1}^n - (\text{sgn } \bar{a}_{j+1/2}) (v_{j+1}^n - v_j^n)].$$

Подставляя найденное значение $v_{j+1/2}^*$ в уравнение шага корректор (5.15), приходим к следующей схеме:

$$\begin{aligned} \frac{(Jv)_j^{n+1} - (Jv)_j^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left(\bar{a}_{j+1/2} \frac{v_j^n + v_{j+1}^n}{2} - \bar{a}_{j-1/2} \frac{v_{j-1}^n + v_j^n}{2} \right) + \\ + \frac{|\bar{a}_{j-1/2}|}{2} v_{q,j-1/2}^n - \frac{|\bar{a}_{j+1/2}|}{2} v_{q,j+1/2}^n = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

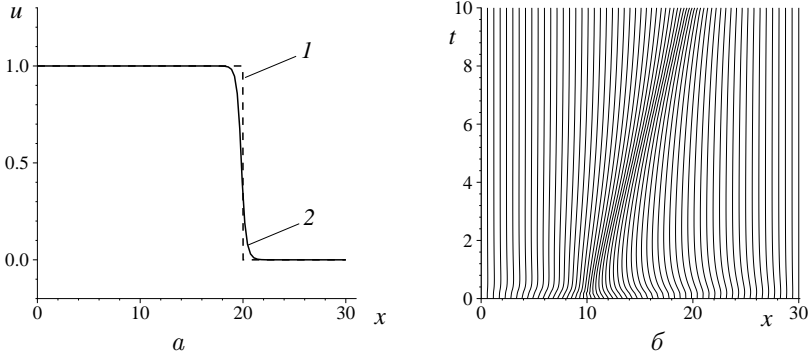


Рис. 23. а – графики точного (1) и численного (2) решений в момент времени $t = 10$; б – траектории узлов адаптивной сетки. Схема предиктор-корректор (5.14), (5.15), (5.26), $N = 60$

Такая форма записи не совпадает с привычным для нас видом противопоточных схем. Поэтому преобразуем разностное уравнение (5.28) к другому виду, используя приведенное ниже утверждение.

Лемма 5.1. Если для вычисления скорости узлов подвижной сетки и якобиана отображения используются формулы (5.16), (5.17), то справедливо тождество

$$\frac{J_j^{n+1} - J_j^n}{\tau} - (x_t)_{q,j} = 0. \quad (5.29)$$

Доказательство. С учетом формул (5.16), (5.17) получаем

$$\frac{J_j^{n+1} - J_j^n}{\tau} = \frac{J_{j+1/2}^{n+1} + J_{j-1/2}^{n+1} - (J_{j+1/2}^n + J_{j-1/2}^n)}{2\tau} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1} + x_j^{n+1} - x_{j-1}^{n+1} - (x_{j+1}^n - x_j^n + x_j^n - x_{j-1}^n)}{2\tau h} = \\
&= \frac{x_{t,j+1} - x_{t,j} + x_{t,j} - x_{t,j-1}}{2h} = \frac{x_{t,j+1/2} - x_{t,j-1/2}}{h} = (x_t)_{q,j},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Используя формулу (5.29) получаем, что

$$J_j^n = J_j^{n+1} - \tau \frac{x_{t,j+1/2} - x_{t,j-1/2}}{h},$$

поэтому

$$\frac{(Jv)_j^{n+1} - (Jv)_j^n}{\tau} = J_j^{n+1} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} + \frac{x_{t,j+1/2} - x_{t,j-1/2}}{h} v_j^n.$$

Следовательно, схему (5.28) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
&J_j^{n+1} \cdot \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left[a \frac{v_j^n + v_{j+1}^n}{2} - x_{t,j+1/2} \frac{v_j^n + v_{j+1}^n}{2} + x_{t,j+1/2} v_j^n - \right. \\
&\quad \left. - \left(a \frac{v_{j-1}^n + v_j^n}{2} - x_{t,j-1/2} \frac{v_{j-1}^n + v_j^n}{2} + x_{t,j-1/2} v_j^n \right) \right] + \\
&\quad + \frac{|\bar{a}_{j-1/2}|}{2} v_{q,j-1/2}^n - \frac{|\bar{a}_{j+1/2}|}{2} v_{q,j+1/2}^n = 0.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

В силу очевидных равенств

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \left[a \frac{v_j^n + v_{j+1}^n}{2} - a \frac{v_{j-1}^n + v_j^n}{2} \right] = \frac{a}{2} \left(v_{q,j+1/2}^n + v_{q,j-1/2}^n \right), \\
&\frac{1}{h} \left[x_{t,j+1/2} \frac{v_j^n + v_{j+1}^n}{2} - x_{t,j+1/2} v_j^n \right] = \frac{x_{t,j+1/2}}{2} v_{q,j+1/2}^n, \\
&\frac{1}{h} \left[x_{t,j-1/2} \frac{v_{j-1}^n + v_j^n}{2} - x_{t,j-1/2} v_j^n \right] = -\frac{x_{t,j-1/2}}{2} v_{q,j-1/2}^n
\end{aligned}$$

и с учетом обозначения $\bar{a} = a - x_t$, схема (5.28) может быть записана в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} + \frac{\bar{a}_{j-1/2} + |\bar{a}_{j-1/2}|}{2J_j^{n+1}} v_{q,j-1/2}^n + \\
&\quad + \frac{\bar{a}_{j+1/2} - |\bar{a}_{j+1/2}|}{2J_j^{n+1}} v_{q,j+1/2}^n = 0.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Видим, что противопоточная схема (5.31) на подвижной сетке имеет такой же вид, как на равномерной сетке противопоточная схема (3.7) для уравнения переноса с постоянным коэффициентом или противопоточная схема (4.40) для нелинейного скалярного уравнения (4.1). Аналогичными будут и свойства этих схем. В частности, как и на равномерной сетке, противопоточная схема на подвижной сетке сохраняет монотонность численного решения.

Теорема 5.1. *Выполнение при всех j условий*

$$\frac{\varkappa |\bar{a}_{j+1/2}|}{\min \{J_j^{n+1}, J_{j+1}^{n+1}\}} \leq 1, \quad (5.32)$$

достаточно для того, чтобы противопоточная схема (5.31) сохраняла монотонность численного решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Противопоточная схема (5.31) может быть записана в виде схемы (2.22) из условия теоремы 2.3:

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} + C_{j-1/2}^- v_{q,j-1/2}^n - C_{j+1/2}^+ v_{q,j+1/2}^n = 0,$$

где

$$C_{j-1/2}^- = \frac{|\bar{a}_{j-1/2}| + \bar{a}_{j-1/2}}{2J_j^{n+1}}, \quad C_{j+1/2}^+ = \frac{|\bar{a}_{j+1/2}| - \bar{a}_{j+1/2}}{2J_j^{n+1}}.$$

Оба коэффициента неотрицательны, а в силу условия (5.32) и очевидных неравенств

$$\frac{1}{J_j^{n+1}} \leq \frac{1}{\min \{J_j^{n+1}, J_{j+1}^{n+1}\}}, \quad \frac{1}{J_{j+1}^{n+1}} \leq \frac{1}{\min \{J_j^{n+1}, J_{j+1}^{n+1}\}},$$

получаем, что

$$C_{j+1/2}^- + C_{j+1/2}^+ \leq \frac{|\bar{a}_{j+1/2}| + \bar{a}_{j+1/2} + |\bar{a}_{j+1/2}| - \bar{a}_{j+1/2}}{2 \min \{J_j^{n+1}, J_{j+1}^{n+1}\}} \leq \frac{1}{\varkappa}.$$

Таким образом, условия (2.23) теоремы 2.3 выполнены, поэтому противопоточная схема (5.31) обладает свойством сохранения монотонности численного решения. ■

Замечание. Схема предиктор-корректор (5.14), (5.15) с переменным параметром (5.26) также сохраняет монотонность численного решения при использовании подвижных сеток [29].

§ 6. Разностные схемы для уравнения колебаний струны

В предыдущих параграфах мы познакомились с конечно-разностными схемами, аппроксимирующими гиперболические уравнения первого порядка – линейные и нелинейные уравнения переноса. В настоящем параграфе мы рассмотрим схемы для гиперболического уравнения второго порядка, взяв в качестве примера уравнение колебаний струны.

6.1. Математическая постановка начально-краевой задачи для гиперболического уравнения колебаний однородной струны заключается в следующем: требуется найти функцию $u(x, t)$, определенную в замкнутой области $\bar{D} = [0, l] \times [0, T]$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T) \quad (6.1)$$

и удовлетворяющую заданным начальным

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (6.2)$$

и краевым

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(l, t) = \mu_l(t), \quad t \in [0, T] \quad (6.3)$$

условиям. Здесь $a = \text{const} > 0$ – скорость распространения колебаний, f – внешняя нагрузка на струну, концы струны движутся по заданным законам (6.3). В момент времени $t = 0$ заданы начальное отклонение струны $u_0(x)$ и скорости ее точек $v_0(x)$.

Краевые условия (6.3) называются условиями первого рода. Краевые условия второго рода заключаются в задании на концах отрезка $[0, l]$ значений производных от решения

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mu_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \mu_l(t). \quad (6.4)$$

Условия третьего рода выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_0 u \Big|_{x=0} = \mu_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_l u \Big|_{x=l} = \mu_l(t). \quad (6.5)$$

Возможно также задание на концах отрезка $[0, l]$ условий разного рода. Например, при $x = 0$ может быть задано условие первого рода, а при $x = l$ – второго.

Физическая интерпретация краевых условий (6.3)–(6.5) дана в работе [25]. Там же доказана корректность рассмотренных постановок задач. В частности, показано, что для третьей краевой задачи необходимо выполнение условий

$$\gamma_0 \leq 0, \quad \gamma_l \geq 0. \quad (6.6)$$

Решение задачи Коши (уравнение (6.1) и начальные условия (6.2) рассматриваются в бесконечной области $-\infty < x < \infty$, граничные условия не задаются) выписывается явно [25]:

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(\zeta) d\zeta + \frac{a}{2} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-\eta)}^{x+a(t-\eta)} f(\zeta, \eta) d\zeta \right) d\eta. \quad (6.7)$$

6.2. Схема с весами. Введем в области \bar{D} равномерную прямоугольную сетку (x_j, t^n) ($j = 0, \dots, N$, $n = 0, \dots, M$) с шагами $h = l/N$, $\tau = T/M$ и рассмотрим на ней трехслойную схему с весами для решения первой начально-краевой задачи (6.1)–(6.3):

$$\begin{aligned} u_{tt,j}^n &= a^2 \Lambda [\sigma u_j^{n+1} + (1 - 2\sigma) u_j^n + \sigma u_j^{n-1}] + \varphi_j^n, \\ n &= 1, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad u_{t,j}^0 = \eta_j, \quad j = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где σ – произвольный вещественный параметр (вес схемы),

$$\begin{aligned} u_{tt,j}^n &= \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2}; \quad \Lambda u_j^n = u_{\bar{x}\bar{x},j}^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}; \\ u_{t,j}^0 &= \frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau}. \end{aligned}$$

Краевые условия и первое начальное условие аппроксимированы точно. Правая часть $f(x, t)$ аппроксимируется некоторой сеточной функцией φ_j^n , которая может быть и не равной $f(x_j, t^n)$, и, наконец, второе начальное условие $u_t(x, 0) = v_0(x)$ будем аппроксимировать разностным

выражением $u_{t,j}^0 = \eta_j$ так, чтобы погрешность аппроксимации была величиной порядка $O(\tau^2)$. Для этого достаточно положить

$$\eta_j = v_0(x_j) + \frac{\tau}{2} \left(a^2 \frac{u_0(x_{j+1}) - 2u_0(x_j) + u_0(x_{j-1}))}{h^2} + f(x_j, 0) \right). \quad (6.9)$$

При $\sigma = 0$ схема называется *явной*. При $\sigma \neq 0$ получаем *неявную* схему, в которой на $(n+1)$ -м временном слое связаны три неизвестных значения u_{j-1}^{n+1} , u_j^{n+1} и u_{j+1}^{n+1} .

Выясним, как влияет выбор веса σ на порядок аппроксимации дифференциального уравнения разностным. Пусть $n \geq 1$ и $0 < j < N$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_j^n &= (L_h(u)_h - f_h)_j^n = \\ &= \frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1}))}{\tau^2} - a^2 \Lambda u_j^{(\sigma)} - \varphi_j^n, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где u – достаточно гладкое решение задачи (6.1)–(6.3), $u_j^{(\sigma)} = u^{(\sigma)}(x_j)$,

$$u^{(\sigma)}(x) = \sigma u(x, t^{n+1}) + (1 - 2\sigma)u(x, t^n) + \sigma u(x, t^{n-1}).$$

Оценим порядок погрешности аппроксимации в узле (x_j, t^n) . Применяя формулу Тейлора, получаем

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1}))}{\tau^2} = u_{tt}(x_j, t^n) + \frac{\tau^2}{12} u_{tttt}(x_j, t^n) + O(\tau^4);$$

$$u^{(\sigma)}(x_j) = u(x_j, t^n) + \tau^2 \sigma u_{tt}(x_j, t^n) + O(\tau^4);$$

$$\begin{aligned} \Lambda u_j^{(\sigma)} &= u_{xx}(x_j, t^n) + \tau^2 \sigma u_{ttxx}(x_j, t^n) + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(x_j, t^n) + \\ &+ \frac{\tau^2 \sigma h^2}{12} u_{ttxxxx}(x_j, t^n) + O(\tau^4 + h^4). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi_j^n = u_{tt} + \frac{\tau^2}{12} u_{tttt} - a^2 (u_{xx} + \sigma \tau^2 u_{ttxx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}) - \varphi_j^n + O(\tau^4 + h^4).$$

Учитывая, что для гладкого решения задачи (6.1)–(6.3) выполняются равенства

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t);$$

$$u_{ttxx}(x, t) = a^2 u_{xxxx}(x, t) + f_{xx}(x, t);$$

$$u_{tttt}(x, t) = a^4 u_{xxxx}(x, t) + a^2 f_{xx}(x, t) + f_{tt}(x, t),$$

перепишем выражение (6.10) для погрешности аппроксимации в следующем виде:

$$\psi_j^n = -\tau^2 a^4 \left[\sigma - \frac{1}{12} + \frac{h^2}{12a^2\tau^2} \right] u_{xxxx} + f - \varphi_j^n -$$

$$-a^2\tau^2 \left(\sigma - \frac{1}{12} \right) f_{xx} + \frac{\tau^2}{12} f_{tt} + O(\tau^4 + h^4). \quad (6.11)$$

В этом равенстве функции u и f , а также их производные вычисляются в одной и той же точке (x_j, t^n) .

Из выражения (6.11) следует, что если $\varphi_j^n = f(x_j, t^n)$, то $\psi_j^n = O(\tau^2 + h^2)$ при любом σ . Для схемы с весом

$$\sigma \equiv \sigma_* = \frac{1}{12} - \frac{h^2}{12a^2\tau^2} \quad (6.12)$$

и правой частью

$$\varphi_j^n = f(x_j, t^n) + \frac{h^2}{12} f_{xx}(x_j, t^n) + \frac{\tau^2}{12} f_{tt}(x_j, t^n) \quad (6.13)$$

получается схема (6.8) повышенного порядка аппроксимации $O(\tau^4 + h^4)$.

Для исследования устойчивости схемы с весами применим спектральный признак. Множитель перехода этой схемы удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 - 2(1 - q)\lambda + 1 = 0,$$

где

$$q = \frac{2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + 4\sigma r \sin^2 \frac{\varphi}{2}}; \quad r = \frac{a^2\tau^2}{h^2}.$$

Дискриминант квадратного уравнения равен $d = q(q-2)$. Если $d \leq 0$, то корни по модулю равны единице, а если $d > 0$, то один из вещественных корней по модулю больше единицы. Поэтому необходимое условие устойчивости записывается в виде неравенства $d \leq 0$, или $0 \leq q \leq 2$, или

$$0 \leq \frac{2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + 4\sigma r \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \leq 2,$$

которое должно выполняться для любого $\varphi \in R$. Левое неравенство выполняется при

$$\sigma > -\frac{1}{4r},$$

а правое – при

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{4r}.$$

Поэтому необходимое условие устойчивости запишется следующим образом:

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4a^2\tau^2}. \quad (6.14)$$

В частности, если $\sigma \geq 1/4$, то необходимое условие устойчивости выполняется при любых шагах τ и h , а для явной схемы получаем следующее необходимое условие устойчивости:

$$\frac{a\tau}{h} \leq 1. \quad (6.15)$$

6.3. Обобщенное решение. Классическое (дважды непрерывно дифференцируемое или гладкое) решение уравнения (6.1) существует не всегда. В таком случае можно искать обобщенное решение [19] этого уравнения – функцию $u(x, t)$, имеющую в области \bar{D} ограниченные кусочно-непрерывные производные $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial t$ и удовлетворяющую интегральному соотношению

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = - \iint_{\mathcal{D}} f(x, t) dx dt \quad (6.16)$$

для произвольной ограниченной области $\mathcal{D} \subseteq D$ с границей $C = \partial\mathcal{D}$.

Если $u(x, t)$ является гладким решением уравнения (6.1), то, интегрируя уравнение (6.1) по области \mathcal{D}

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx dt = \iint_{\mathcal{D}} f(x, t) dx dt \quad (6.17)$$

и применяя формулу Грина для интеграла в левой части этого равенства, получаем соотношение (6.16). Обратное верно не всегда: если $u(x, t)$ – обобщенное решение уравнения (6.1), то оно может и не являться классическим решением.

Известно [25], что линиями разрыва производных u_t, u_x обобщенного решения могут быть только характеристики уравнения (6.1)

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}. \quad (6.18)$$

При этом величины разрывов удовлетворяют равенствам

$$(u_t + au_x)_{\text{лев}} = (u_t + au_x)_{\text{пр}}, \quad (u_t - au_x)_{\text{лев}} = (u_t - au_x)_{\text{пр}}, \quad (6.19)$$

где величины с нижними индексами «лев» и «пр» означают пределы производных при приближении к соответствующей характеристике слева и справа.

При построении разностных схем для вычисления обобщенного решения возьмем в качестве кривой \mathcal{C} в интегральном соотношении (6.16) контур прямоугольника $\omega_j^n = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$, изображенный штриховой линией на рис. 24. Тогда (6.16) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t^{n+1/2}) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t^{n-1/2}) dx + \\ & + \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} a^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_{j+1/2}, t) dt - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} a^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_{j-1/2}, t) dt = \iint_{\omega_j^n} f(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Применение различных квадратурных формул для вычисления интегралов приводит к различным разностным схемам. В частности, таким способом могут быть получены разностные *схемы сквозного счета*.

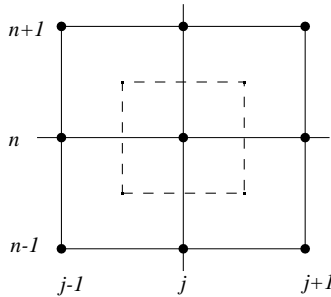


Рис. 24. Контур интегрирования (штриховая линия), используемый при построении консервативной схемы для вычисления обобщенного решения

При вычислении обобщенного решения по этим схемам линии разрывов (6.18) в процессе расчета не выделяются. Конкретные виды схем будут выведены в следующем пункте для более общего уравнения колебаний неоднородной струны.

6.4. Задача для уравнения колебаний неоднородной струны.

Для неоднородной струны уравнение колебаний принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad x \in (0, l); \quad t \in (0, T], \quad (6.21)$$

где $k(x, t) \geq k_0 > 0$. В области \bar{D} требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (6.2) и краевым условиям типа (6.3), (6.4) или (6.5), либо комбинированным краевым условиям: условиям разного рода на разных концах отрезка $[0, l]$. Для уравнения с переменным коэффициентом $k(x, t)$ несколько изменится вид краевых условий второго и третьего рода:

$$k(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mu_0(t); \quad k(l, t) \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \mu_l(t); \quad (6.22)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_0 u \Big|_{x=0} = \mu_0(t); \quad k \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_l u \Big|_{x=l} = \mu_l(t). \quad (6.23)$$

Для конструирования разностных схем будем использовать интегро-интерполяционный метод (см. аналогичный метод для параболических уравнений в § 3.3 и для нелинейного уравнения переноса в § 4). Записывая уравнение (6.21) в виде интегрального соотношения, аналогичного (6.16)

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial t} dx + k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} dt = - \iint_D f(x, t) dx dt, \quad (6.24)$$

и выбирая в качестве кривой интегрирования замкнутый контур, показанный на рис. 24 штриховой линией, получаем соотношение, аналогичное (6.20) и отличающееся от него только тем, что вместо постоянной a^2 теперь берется функция $k(x, t)$. Используя, например, аппроксимации интегралов

$$\int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} k(x_{j+1/2}, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x_{j+1/2}, t) dt \approx k(x_{j+1/2}, t^n) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \cdot \tau$$

и учитывая равенства

$$k(x_{j+1/2}, t^n) = 0,5(k_j^n + k_{j+1}^n) + O(h^2), \quad (6.25)$$

приходим к явной схеме

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = \Lambda u_j^n + f_j^n \quad (6.26)$$

со следующим оператором Λ :

$$\Lambda u_j^n = \frac{1}{h} \left(k_{j+1/2} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - k_{j-1/2} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right), \quad (6.27)$$

где

$$k_{j+1/2} = \frac{k_j^n + k_{j+1}^n}{2}, \quad k_{j-1/2} = \frac{k_j^n + k_{j-1}^n}{2}.$$

Для той же схемы можно предложить другую форму оператора Λ . Будем вычислять $k(x_{j+1/2}, t^n)$ по формуле, более точной, чем (6.25):

$$\begin{aligned} k(x_{j+1/2}, t^n) &= k(x_j, t^n) + \frac{h}{2} \frac{\partial k}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x_j, t^n) + O(h^3) = \\ &= k_j^n + \frac{h}{2} \frac{k_{j+1}^n - k_{j-1}^n}{2h} + \frac{h^2}{8} \frac{k_{j+1}^n - 2k_j^n + k_{j-1}^n}{h^2} + O(h^3). \end{aligned} \quad (6.28)$$

И вновь имеем явную схему (6.26), но теперь уже с оператором

$$\Lambda^{(1)} u_j^n = \frac{1}{h} \left(\bar{k}_{j+1/2}^{(1)} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \tilde{k}_{j-1/2}^{(1)} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right), \quad (6.29)$$

коэффициенты которого задаются формулами:

$$\bar{k}_{j+1/2}^{(1)} = \frac{-k_{j-1}^n + 6k_j^n + 3k_{j+1}^n}{8}, \quad \tilde{k}_{j-1/2}^{(1)} = \frac{-k_{j+1}^n + 6k_j^n + 3k_{j-1}^n}{8}.$$

Еще один оператор Λ в явной схеме (6.26) может быть получен, если величины $k(x_{j+1/2}, t^n)$ вычислять как среднее арифметическое двух значений k , первое из которых находится интерполяцией в точку $x_{j+1/2}$ величин k_j^n и k_{j+1}^n , а второе – экстраполяцией в ту же точку величин k_{j-1}^n и k_j^n :

$$\Lambda^{(2)} u_j^n = \frac{1}{h} \left(\bar{k}_{j+1/2}^{(2)} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \tilde{k}_{j-1/2}^{(2)} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right), \quad (6.30)$$

где

$$\bar{k}_{j+1/2}^{(2)} = \frac{-k_{j-1}^n + 4k_j^n + k_{j+1}^n}{4}, \quad \tilde{k}_{j-1/2}^{(2)} = \frac{-k_{j+1}^n + 4k_j^n + k_{j-1}^n}{4}.$$

Все три схемы имеют второй порядок аппроксимации, однако явная схема (6.26) с оператором Λ из (6.27) является консервативной, а с операторами (6.29) и (6.30) – не является таковой. Напомним, что для консервативной схемы, в отличие от неконсервативной, дискретный аналог интегрального соотношения (6.24) выполняется не только для элементарной ячейки сетки ω_j^n , но и для любой области, полученной объединением произвольного числа элементарных ячеек. Консервативные схемы позволяют рассчитывать решения, когда коэффициент k является разрывной функцией, в то время как неконсервативные для этого не годятся (см. § 11, задание 15 лабораторной работы 6).

6.5. Случай линейной зависимости правой части от решения. Рассмотрим теперь более общий случай, когда правая часть уравнения (6.21) может линейно зависеть от решения, т. е.

$$f(x, t, u) = a(x, t)u + b(x, t). \quad (6.31)$$

В этом случае для численного решения можно использовать те же схемы, что и для функции $f = f(x, t)$, причем на этапе реализации изменения коснутся лишь неявных схем. Ради простоты, рассмотрим здесь *полностью неявную схему*:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} &= \frac{1}{h} \left(k_{j+1/2}^{n+1} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} - k_{j-1/2}^{n+1} \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} \right) + \\ &+ a_j^{n+1} u_j^{n+1} + b_j^{n+1}, \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Перепишав уравнения (6.32) в виде трехточечных

$$A_j u_{j-1}^{n+1} - C_j u_j^{n+1} + B_j u_{j+1}^{n+1} = D_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (6.33)$$

где

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{\tau^2}{h^2} k_{j-1/2}^{n+1}, & B_j &= \frac{\tau^2}{h^2} k_{j+1/2}^{n+1}, & C_j &= 1 + A_j + B_j - \tau^2 a_j^{n+1}, \\ D_j &= -\tau^2 b_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}, \end{aligned}$$

и добавив к ним разностные краевые условия

$$u_0^{n+1} = \xi_0 u_1^{n+1} + \eta_0, \quad u_{N-1}^{n+1} = \xi_{N-1} u_N^{n+1} + \eta_{N-1}, \quad (6.34)$$

решаем полученную систему разностных уравнений (6.33), (6.34) методом прогонки [2]. Для корректности и устойчивости метода прогонки достаточно потребовать (см. задачу 2.2.4), чтобы выполнялось неравенство

$$\tau^2 \cdot \max_D a(x, t) \leq 1. \quad (6.35)$$

Отметим, что неравенство (6.35) накладывает ограничение на шаг по времени только в случае $a(x, t) > 0$. Для этого случая член $a(x, t)u$ в полностью неявной схеме (6.32) лучше брать с n -го слоя по времени, т. е. заменить $a_j^{n+1} u_j^{n+1}$ на $a_j^n u_j^n$. Тогда ограничения вида (6.35) на шаг τ не возникает.

6.6. Схемы для нелинейного уравнения колебаний струны.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда уравнение колебаний струны является нелинейным: коэффициент k и функция правой части f в уравнении (6.21) могут зависеть не только от x и t , но и от искомого решения u , т. е. $f = f(x, t, u)$, $k = k(x, t, u)$.

Для решения нелинейных задач используются консервативные схемы, например, схема с весами с оператором Λ , определенным по формуле (6.27), при этом

$$k_{j\pm 1/2}^n = \frac{k(x_j, t^n, u_j^n) + k(x_{j\pm 1}, t^n, u_{j\pm 1}^n)}{2}, \quad f_j^n = f(x_j, t^n, u_j^n).$$

Для явной схемы никаких трудностей в реализации не возникает, так как оператор Λ действует на известную функцию u^n . Таким образом, для вычисления u_j^{n+1} имеем явное выражение

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \tau^2(\Lambda u_j^n + f_j^n). \quad (6.36)$$

При реализации неявных схем следует организовать *итерации по нелинейности*. Например, в случае полностью неявной схемы получим уравнение (6.33) с коэффициентами

$$A_j = \frac{\tau^2}{h^2} k_{j-1/2}^{n+1}, \quad B_j = \frac{\tau^2}{h^2} k_{j+1/2}^{n+1}, \quad C_j = 1 + A_j + B_j, \quad (6.37)$$

$$D_j = -\tau^2 f_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}.$$

Непосредственное применение метода прогонки для решения системы (6.33), (6.34) невозможно, так как уравнение (6.33) является теперь нелинейным, поэтому вместо (6.33) методом прогонки будем решать линейное уравнение

$$A_j^\nu u_{j-1}^{n+1, \nu+1} - C_j^\nu u_j^{n+1, \nu+1} + B_j^\nu u_{j-1}^{n+1, \nu+1} = D_j^\nu \quad (6.38)$$

с коэффициентами, вычисленными по предыдущей итерации с номером ν :

$$A_j^\nu = \frac{\tau^2}{h^2} k_{j-1/2}^{n+1, \nu}, \quad B_j^\nu = \frac{\tau^2}{h^2} k_{j+1/2}^{n+1, \nu}, \quad C_j^\nu = 1 + A_j^\nu + B_j^\nu,$$

$$D_j^\nu = -\tau^2 f_j^{n+1, \nu} - 2u_j^n + u_j^{n-1}, \quad f_j^{n+1, \nu} = f(x_j, t^{n+1}, u_j^{n+1, \nu}),$$

$$k_{j\pm 1/2}^{n+1, \nu} = \frac{k(x_j, t^{n+1}, u_j^{n+1, \nu}) + k(x_{j\pm 1}, t^{n+1}, u_{j\pm 1}^{n+1, \nu})}{2}.$$

В качестве начального приближения для итерационного процесса можно взять решение с n -го слоя по времени: $u_j^{n+1, 0} = u_j^n$.

При использовании итераций по нелинейности следует иметь в виду, что коэффициенты краевых условий (6.34) могут зависеть от решения. В таком случае они тоже вычисляются по предыдущей итерации $u_j^{n+1, \nu}$.

З А Д А Ч И

6.1. Для решения второй начально-краевой задачи для уравнения колебаний неоднородной струны

$$\begin{aligned} u_{tt} &= (k(x, t)u_x)_x + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ (ku_x)(0, t) &= \mu_0(t), \quad (ku_x)(l, t) = \mu_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \quad (6.39)$$

предлагается явная схема

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} &= \frac{1}{h} \left(k_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - k_{j-1/2}^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right) + \\
&\quad + f_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, M-1, \\
k_{1/2}^n \frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{u_0^{n+1} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{\tau^2} - f(0, t^n) \right) &= \mu_0^n, \\
k_{N-1/2}^n \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h} + \frac{h}{2} \left(\frac{u_N^{n+1} - 2u_N^n + u_N^{n-1}}{\tau^2} - f(l, t^n) \right) &= \mu_l^n, \\
u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N, \\
u_j^1 &= u_0(x_j) + \tau \left[v_0(x_j) + \frac{\tau}{2} \left(a^2 u_0''(x_j) + f(x_j, 0) \right) \right].
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Определить порядок аппроксимации этой схемы.

6.2. Рассмотрим однородную задачу (6.39)

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= (k(x, t)u_x)_x, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\
(ku_x)(0, t) &= 0, \quad (ku_x)(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\
u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq l.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Показать, что для этой задачи импульс струны

$$U(t) = \int_0^l u_t(x, t) dx \tag{6.42}$$

сохраняется, т. е.

$$U(t) = U(0) = \int_0^l u_t(x, 0) dx = \int_0^l v_0(x) dx, \quad 0 < t \leq T.$$

6.3. Показать, что разностная схема (6.40) в случае однородной задачи (6.41) является консервативной и для нее сохраняющейся величиной является дискретный аналог импульса струны (6.42), определяемый формулой

$$U^n = u_{t,0} \frac{h}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} u_{t,j} h + u_{t,N} \frac{h}{2} \sim \int_0^l u_t(x, t^n) dx, \tag{6.43}$$

$$U^0 = v_0(0) \frac{h}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} v_0(x_j) h + v_0(l) \frac{h}{2} \sim \int_0^l v_0(x) dx. \tag{6.44}$$

§ 7. Разностные схемы для гиперболической системы уравнений с постоянными коэффициентами

7.1. Линейные уравнения мелкой воды. Построение разностных схем для гиперболической системы уравнений с постоянными коэффициентами продемонстрируем вначале на примере решения задачи Коши для линеаризованных уравнений мелкой воды. Получим эти уравнения, взяв за основу нелинейную модель мелкой воды. Пусть плоский слой жидкости ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу – непроницаемым дном (рис. 25). Предполагается, что жидкость находится в поле силы тяжести, является несжимаемой и невязкой. Пусть декартова система координат Oxy выбрана так, что уравнение свободной поверхности покоящейся жидкости имеет вид $y = 0$ и жидкость может двигаться только вдоль оси Ox . Тогда система нелинейных уравнений мелкой воды записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad (7.1)$$

где t – время, \mathbf{u} – вектор решения, \mathbf{f} – вектор потоков,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + H^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ Hh_x \end{pmatrix},$$

$u(x, t)$ – скорость, $H = \eta + h$ – полная глубина, $\eta(x, t)$ – отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня $y = 0$, $y = -h(x)$ – функция, задающая дно бассейна, ускорение свободного падения g принято здесь равным единице.

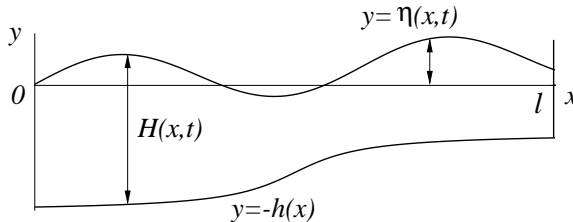


Рис. 25. Схема области течения жидкости с поверхностными волнами

В настоящем параграфе будем предполагать, что дно является ровным и горизонтальным, т. е. $h(x) \equiv h_0 = \text{const} > 0$. Линеаризуем систему (7.1), рассматривая решения вида $u = u_0 + \tilde{u}$, $H = \tilde{\eta} + h_0$, $u_0 = \text{const}$ и предполагая малость произведений величин \tilde{u} , $\tilde{\eta}$, \tilde{u}_t , $\tilde{\eta}_t$, \tilde{u}_x , $\tilde{\eta}_x$. В результате система линейных уравнений мелкой воды примет вид

$$\begin{cases} H_t + (u_0 H + h_0 u)_x = 0, \\ (u_0 H + h_0 u)_t + ((u_0^2 + h_0)H + 2u_0 h_0 u)_x = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

при этом символ « \sim » опущен, $H = \eta + h_0$, u – отклонение скорости от некоторого заданного постоянного значения u_0 . Отметим, что при $u_0 = 0$ выписанные уравнения совпадают с рассмотренными в § 1 уравнениями (1.6), (1.7), если в последних положить $g = 1$.

Систему линейных уравнений (7.2) можно записать в векторной дивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad (7.3)$$

либо в недивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (7.4)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ u_0 H + h_0 u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} u_0 H + h_0 u \\ (u_0^2 + h_0)H + 2u_0 h_0 u \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

матрица Якоби $\mathcal{A}_0 = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ имеет вид

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_0^2 + h_0 & 2u_0 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Собственные значения матрицы \mathcal{A}_0 вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = u_0 - c_0, \quad \lambda_2 = u_0 + c_0, \quad (7.7)$$

где $c_0 = \sqrt{h_0}$. Этим собственным значениям соответствуют правые собственные векторы матрицы \mathcal{A}_0

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

и левые

$$\mathbf{l}_1 = \frac{1}{c_0^2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{l}_2 = \frac{1}{c_0^2} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}^T. \quad (7.9)$$

Введем в рассмотрение две матрицы \mathcal{L} и \mathcal{R} . Строками матрицы \mathcal{L} являются левые собственные векторы \mathbf{l}_k ($k = 1, 2$), а правые собственные векторы \mathbf{r}_k являются столбцами матрицы \mathcal{R} , т. е.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c_0^2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Тогда имеют место равенства

$$\mathcal{L} = \mathcal{R}^{-1}, \quad \mathcal{R} = \mathcal{L}^{-1}, \quad \mathcal{L}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{E}, \quad (7.11)$$

$$\mathcal{L}\mathcal{A}_0\mathcal{R} = \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{L}, \quad \mathcal{A}_0^2 = \mathcal{R}\Lambda^2\mathcal{L}, \quad (7.13)$$

где \mathcal{E} – единичная матрица.

Если систему уравнений (7.4) умножить слева на матрицу \mathcal{L}

$$\mathcal{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{L}\mathcal{A}_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0,$$

то получается система уравнений в инвариантах Римана

$$\mathcal{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda \mathcal{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (7.14)$$

или

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (7.15)$$

где

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

$$r = \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{u} = u - \frac{H}{c_0}, \quad s = \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{u} = u + \frac{H}{c_0}. \quad (7.17)$$

7.2. Явная противопоточная схема. Система уравнений (7.4) «похожа» на скалярное уравнение переноса (3.1), только теперь вместо постоянного числового коэффициента a используется матрица \mathcal{A}_0

с постоянными элементами и вместо одной функции $u(x, t)$ мы ищем вектор решения $\mathbf{u}(x, t)$. В противопоточной схеме (2.9) для уравнения переноса знак коэффициента a влияет на выбор разностной производной по переменной x : при $a > 0$ берется левая производная $u_{x,j-1/2}$, а при $a < 0$ – правая $u_{x,j+1/2}$. В случае системы уравнений (7.4) мы не можем говорить о «знаке матрицы» \mathcal{A}_0 , но, тем не менее, обобщение противопоточной схемы (2.9) для системы уравнений возможно. Подсказку может дать система уравнений (7.15), записанная в инвариантах Римана.

Каждое из уравнений (7.15) является уравнением переноса (3.1) с коэффициентом $a = \lambda_1$ или $a = \lambda_2$. Поэтому противопоточная схема (2.9), примененная для уравнений (7.15), будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{r_j^{n+1} - r_j^n}{\tau} + \lambda_1^+ \cdot \frac{r_j^n - r_{j-1}^n}{h} + \lambda_1^- \cdot \frac{r_{j+1}^n - r_j^n}{h} &= 0, \\ \frac{s_j^{n+1} - s_j^n}{\tau} + \lambda_2^+ \cdot \frac{s_j^n - s_{j-1}^n}{h} + \lambda_2^- \cdot \frac{s_{j+1}^n - s_j^n}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где

$$\lambda_k^+ = \frac{\lambda_k + |\lambda_k|}{2}, \quad \lambda_k^- = \frac{\lambda_k - |\lambda_k|}{2}, \quad k = 1, 2. \quad (7.19)$$

Введем матрицы

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ \end{pmatrix}, \quad \Lambda^- = \begin{pmatrix} \lambda_1^- & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

$$\mathcal{A}_0^+ = \mathcal{R}\Lambda^+\mathcal{L}, \quad \mathcal{A}_0^- = \mathcal{R}\Lambda^-\mathcal{L}, \quad |\mathcal{A}_0| = \mathcal{A}_0^+ - \mathcal{A}_0^-. \quad (7.21)$$

Тогда разностные уравнения (7.18) можно записать в векторной форме

$$\mathcal{L} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \Lambda^+ \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j-1/2}^n + \Lambda^- \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0, \quad (7.22)$$

где введены следующие обозначения для левой и правой разностных производных:

$$\mathbf{u}_{x,j-1/2}^n = \frac{\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{h}, \quad \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n}{h}.$$

Умножая уравнение (7.22) слева на матрицу \mathcal{R} и учитывая свойства (7.11), получаем

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \mathcal{R}\Lambda^+ \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j-1/2}^n + \mathcal{R}\Lambda^- \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0,$$

или

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \mathcal{A}_0^+ \mathbf{u}_{x,j-1/2}^n + \mathcal{A}_0^- \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0. \quad (7.23)$$

Это и есть противопоточная схема для системы уравнений (7.4). Заметим, что противопоточная схема (7.23) может быть записана и в виде консервативной схемы

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \mathbf{f}_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad (7.24)$$

аппроксимирующей уравнение (7.3) в дивергентной форме. Для этого достаточно ввести обозначение

$$\mathbf{f}_{j+1/2}^* = \mathcal{A}_0^+ \mathbf{u}_j^n + \mathcal{A}_0^- \mathbf{u}_{j+1}^n = \frac{1}{2} [\mathcal{A}_0 (\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j+1}^n) - |\mathcal{A}_0| (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n)]. \quad (7.25)$$

Видим, что при использовании обозначений (7.21) полученная схема (7.23) выглядит так же, как противопоточная схема (2.9) для скалярного уравнения переноса. Аналогичными будут и свойства схем (7.23), (2.9), касающиеся порядка аппроксимации и устойчивости. Погрешность аппроксимации теперь является вектором $\boldsymbol{\psi}$, который получается при подстановке точного решения $\mathbf{u}(x, t)$ системы уравнений (7.4) в разностное уравнение (7.23):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_j^n &= \frac{\mathbf{u}(x_j, t^{n+1}) - \mathbf{u}(x_j, t^n)}{\tau} + \\ &+ \mathcal{A}_0^+ \frac{\mathbf{u}(x_j, t^n) - \mathbf{u}(x_{j-1}, t^n)}{h} + \mathcal{A}_0^- \frac{\mathbf{u}(x_{j+1}, t^n) - \mathbf{u}(x_j, t^n)}{h} = \\ &= \mathbf{u}_t(x_j, t^n) + O(\tau) + \mathcal{A}_0^+ (\mathbf{u}_x(x_j, t^n) + O(h)) + \mathcal{A}_0^- (\mathbf{u}_x(x_j, t^n) + O(h)). \end{aligned}$$

Поскольку для матриц, определенных формулами (7.20), (7.21), справедливы равенства

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-, \quad \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^+ + \mathcal{A}_0^-, \quad (7.26)$$

то для погрешности аппроксимации получается выражение

$$\boldsymbol{\psi}_j^n = \mathbf{u}_t(x_j, t^n) + \mathcal{A}_0 \mathbf{u}_x(x_j, t^n) + O(\tau + h) = O(\tau + h),$$

т. е. противопоточная схема (7.23) имеет, как и в скалярном случае, первый порядок аппроксимации.

Для исследования устойчивости разностных схем, аппроксимирующих системы дифференциальных уравнений, применяются те же методы, что и для схем, аппроксимирующих скалярные уравнения. Например, для исследования устойчивости схемы (7.23) по начальным данным можно использовать спектральный метод Неймана. Для этого в качестве начальной функции берется гармоника

$$\mathbf{u}_j^0 = \mathbf{u}_0 e^{ij\varphi},$$

и ищется решение разностного уравнения (7.23) вида (1.32)

$$\mathbf{u}_j^n = \mathbf{u}_0 \rho^n e^{ij\varphi}, \quad (7.27)$$

где \mathbf{u}_0 – произвольный вектор, φ – произвольное действительное число. Тогда должно выполняться следующее равенство

$$\left(\frac{\rho - 1}{\tau} \mathcal{E} + \mathcal{A}_0^+ \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h} + \mathcal{A}_0^- \frac{e^{i\varphi} - 1}{h} \right) \mathbf{u}_0 = 0.$$

Поскольку вектор \mathbf{u}_0 – произвольный, то это равенство может выполняться только в том случае, когда определитель матрицы, заключенной в круглые скобки, равен нулю, т. е.

$$\det \left(\frac{\rho - 1}{\tau} \mathcal{E} + \mathcal{A}_0^+ \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h} + \mathcal{A}_0^- \frac{e^{i\varphi} - 1}{h} \right) = 0.$$

Используя свойство (7.11) и выражения (7.21) для матриц \mathcal{A}_0^+ и \mathcal{A}_0^- , последнее равенство можно переписать как

$$\det \left(\frac{\rho - 1}{\tau} \mathcal{R}\mathcal{L} + \mathcal{R}\Lambda^+ \mathcal{L} \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h} + \mathcal{R}\Lambda^- \mathcal{L} \frac{e^{i\varphi} - 1}{h} \right) = 0,$$

или

$$\det \mathcal{R} \cdot \det \left(\frac{\rho - 1}{\tau} \mathcal{E} + \Lambda^+ \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h} + \Lambda^- \frac{e^{i\varphi} - 1}{h} \right) \cdot \det \mathcal{L} = 0.$$

Из равенства $\mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{E}$ следует, что $\det \mathcal{R} \cdot \det \mathcal{L} = 1$, поэтому для нахождения множителя ρ получаем уравнение

$$\det \left(\frac{\rho - 1}{\tau} \mathcal{E} + \frac{1 - \cos \varphi}{h} (\Lambda^+ - \Lambda^-) + i \frac{\sin \varphi}{h} (\Lambda^+ + \Lambda^-) \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\rho_k = 1 - \varkappa |\lambda_k| (1 - \cos \varphi) - i \varkappa \lambda_k \sin \varphi, \quad k = 1, 2,$$

$$|\rho_k|^2 = 1 - 2\varkappa |\lambda_k| (1 - \cos \varphi) (1 - \varkappa |\lambda_k|), \quad k = 1, 2,$$

где $\varkappa = \tau/h$. Поэтому необходимое условие устойчивости

$$|\rho_k| \leq 1, \quad \forall \varphi \in R \quad (7.28)$$

будет эквивалентно выполнению неравенства

$$\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \varkappa \leq 1. \quad (7.29)$$

Таким образом, как и в случае одного скалярного уравнения, противопоточная схема, аппроксимирующая систему дифференциальных уравнений, является условно устойчивой.

7.3. Схема предиктор-корректор. В § 3 была рассмотрена схема предиктор-корректор (3.3), (3.4) для скалярного уравнения переноса с постоянным коэффициентом a . В этой схеме присутствует схемный параметр θ , при задании которого определенным образом получались известные схемы (противопоточная, Лакса, Лакса – Вендроффа и т. д.), при $\theta = O(h)$ получались схемы второго порядка аппроксимации, при использовании для функции θ формулы (3.34) схема сохраняла монотонность численного решения (см. теорему 3.1). Попробуем обобщить эту схему на случай системы уравнений. Подсказку, как это сделать, здесь может опять дать система уравнений в инвариантах Римана (7.15).

Применительно к первому из уравнений (7.15) схема предиктор-корректор (3.3), (3.4) запишется как

$$\frac{1}{1 + \theta_{j+1/2}^1} \frac{r_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(r_{j+1}^n + r_j^n)}{\tau/2} + \lambda_1 r_{x,j+1/2}^n = 0, \quad (7.30)$$

$$\frac{r_j^{n+1} - r_j^n}{\tau} + \lambda_1 \frac{r_{j+1/2}^* - r_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad (7.31)$$

где сеточная функция θ^1 может быть вычислена по формуле (3.34). Здесь и всюду далее мы будем пользоваться выражением (3.34), записанным в виде формулы (4.56), которая в рассматриваемом случае

выглядит следующим образом:

$$\theta_{j+1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при } \begin{cases} |\tilde{g}_{j+1/2}| \leq |\tilde{g}_{j+1/2-\sigma}|, \\ \tilde{g}_{j+1/2} \cdot \tilde{g}_{j+1/2-\sigma} \geq 0, \end{cases} \\ \theta_0 \frac{\tilde{g}_{j+1/2} - \tilde{g}_{j+1/2-\sigma}}{\tilde{g}_{j+1/2}} & \text{при } \begin{cases} |\tilde{g}_{j+1/2}| > |\tilde{g}_{j+1/2-\sigma}|, \\ \tilde{g}_{j+1/2} \cdot \tilde{g}_{j+1/2-\sigma} \geq 0, \end{cases} \\ \theta_0 & \text{при } \tilde{g}_{j+1/2} \cdot \tilde{g}_{j+1/2-\sigma} < 0, \end{cases} \quad (7.32)$$

где $\sigma = \text{sgn}(\lambda_1)$,

$$\tilde{g}_{j+1/2} = |\lambda_1| (1 - \varkappa |\lambda_1|) r_{x,j+1/2}^n, \quad \theta_0 = \frac{1 - \varkappa |\lambda_1|}{\varkappa |\lambda_1|}. \quad (7.33)$$

Из теоремы 3.1 следует, что при выполнении условия

$$|\lambda_1| \varkappa < 1 \quad (7.34)$$

схема предиктор-корректор (7.30), (7.31) будет сохранять монотонность инварианта r_j^n , если для вычисления функции $\theta_{j+1/2}^1$ использовать формулы (7.32), (7.33).

Возьмем аналогичную схему и для второго уравнения системы (7.15):

$$\frac{1}{1 + \theta_{j+1/2}^2} \frac{s_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(s_{j+1}^n + s_j^n)}{\tau/2} + \lambda_2 s_{x,j+1/2}^n = 0, \quad (7.35)$$

$$\frac{s_j^{n+1} - s_j^n}{\tau} + \lambda_2 \frac{s_{j+1/2}^* - s_{j-1/2}^*}{h} = 0. \quad (7.36)$$

Эта схема при условии

$$|\lambda_2| \varkappa < 1 \quad (7.37)$$

будет сохранять монотонность сеточной функции s_j^n , если функцию $\theta_{j+1/2}^2$ задать по формуле (7.32), положив в ней $\sigma = \text{sgn}(\lambda_2)$,

$$\tilde{g}_{j+1/2} = |\lambda_2| (1 - \varkappa |\lambda_2|) s_{x,j+1/2}^n, \quad \theta_0 = \frac{1 - \varkappa |\lambda_2|}{\varkappa |\lambda_2|}. \quad (7.38)$$

Из сказанного следует, что при применении схемы предиктор-корректор для системы уравнений (7.4) необходимо использовать две функции θ^k ($k = 1, 2$), определяемые поведением сеточных функций r^n и s^n .

Легко понять, что обе функции θ^k можно задать одной формулой

$$\theta_{j+1/2}^k = \begin{cases} 0 & \text{при } \begin{cases} \left| \tilde{g}_{j+1/2}^k \right| \leq \left| \tilde{g}_{j+1/2-\sigma_k}^k \right|, \\ \tilde{g}_{j+1/2}^k \cdot \tilde{g}_{j+1/2-\sigma_k}^k \geq 0, \end{cases} \\ \theta_0^k \frac{\tilde{g}_{j+1/2}^k - \tilde{g}_{j+1/2-\sigma_k}^k}{\tilde{g}_{j+1/2}^k} & \text{при } \begin{cases} \left| \tilde{g}_{j+1/2}^k \right| > \left| \tilde{g}_{j+1/2-\sigma_k}^k \right|, \\ \tilde{g}_{j+1/2}^k \cdot \tilde{g}_{j+1/2-\sigma_k}^k \geq 0, \end{cases} \\ \theta_0^k & \text{при } \tilde{g}_{j+1/2}^k \cdot \tilde{g}_{j+1/2-\sigma_k}^k < 0, \end{cases} \quad (7.39)$$

где $k = 1, 2$, $\sigma_k = \text{sgn}(\lambda_k)$,

$$\tilde{g}_{j+1/2}^k = |\lambda_k| (1 - \varkappa |\lambda_k|) p_{k,j+1/2}^n, \quad \theta_0^k = \frac{1 - \varkappa |\lambda_k|}{\varkappa |\lambda_k|}, \quad (7.40)$$

$p_{1,j+1/2}^n$ и $p_{2,j+1/2}^n$ – компоненты вектора $\mathbf{P}_{j+1/2}^n = \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n$. Достаточным условием сохранения монотонности величин r и s является одновременное выполнение двух неравенств (7.34) и (7.37), т. е. выполнение неравенства

$$\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \varkappa < 1. \quad (7.41)$$

Построив разностную схему для инвариантов Римана, можно перейти к разностной схеме, аппроксимирующей непосредственно систему уравнений (7.3). Если ввести векторы

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^* = \begin{pmatrix} r^* \\ s^* \end{pmatrix},$$

то уравнения (7.30), (7.31) и (7.35), (7.36) можно записать в векторном виде:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}_{j+1/2}^n \right)^{-1} \frac{\mathbf{s}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{j+1}^n + \mathbf{s}_j^n)}{\tau/2} + \Lambda \mathbf{s}_{x,j+1/2}^n &= 0, \\ \frac{\mathbf{s}_j^{n+1} - \mathbf{s}_j^n}{\tau} + \Lambda \frac{\mathbf{s}_{j+1/2}^* - \mathbf{s}_{j-1/2}^*}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (7.42)$$

где \mathcal{D} – диагональная матрица

$$\mathcal{D}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} 1 + \theta_{j+1/2}^1 & 0 \\ 0 & 1 + \theta_{j+1/2}^2 \end{pmatrix}. \quad (7.43)$$

Далее введем вектор $\mathbf{u}^* = \mathcal{R}\mathbf{s}^*$ и учтем, что $\mathbf{s} = \mathcal{L}\mathbf{u}$. Тогда уравнения (7.42) запишутся как

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{D}_{j+1/2}^n \Lambda \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n &= 0, \\ \mathcal{L} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \Lambda \mathcal{L} \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \mathbf{u}_{j-1/2}^*}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (7.44)$$

и после умножения слева на матрицу \mathcal{R} примут вид:

$$\frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{R}\mathcal{D}_{j+1/2}^n \Lambda \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0, \quad (7.45)$$

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \mathcal{A}_0 \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \mathbf{u}_{j-1/2}^*}{h} = 0. \quad (7.46)$$

В рассматриваемом случае системы (7.3) линейных уравнений с постоянными коэффициентами справедливо равенство

$$\mathbf{f} = \mathcal{A}_0 \mathbf{u}, \quad (7.47)$$

на основе которого можно определить векторы

$$\mathbf{f}_j^n = \mathcal{A}_0 \mathbf{u}_j^n, \quad \mathbf{f}_{j+1/2}^* = \mathcal{A}_0 \mathbf{u}_{j+1/2}^*. \quad (7.48)$$

Тогда уравнение (7.46) принимает следующий окончательный вид:

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \mathbf{f}_{j-1/2}^*}{h} = 0. \quad (7.49)$$

Это уравнение аппроксимирует дивергентную систему (7.3), является аналогом скалярного уравнения (3.4) и используется на втором шаге схемы предиктор-корректор.

Из вида уравнения (7.49) следует, что для выполнения шага корректор необходимо иметь в полуцелых узлах $x_{j+1/2}$ вектор потоков $\mathbf{f}_{j+1/2}^*$. Получим разностное уравнение для вычисления этого вектора. Умножим уравнение (7.45) слева на матрицу \mathcal{A}_0

$$\mathcal{A}_0 \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{A}_0 \mathcal{R}\mathcal{D}_{j+1/2}^n \Lambda \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0$$

и воспользуемся равенствами (7.48) и (7.13):

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{R}\Lambda\mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{D}_{j+1/2}^n\Lambda\mathcal{L}\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0.$$

Учитывая равенства $\mathcal{L}\mathcal{R} = \mathcal{E}$, $\Lambda\mathcal{D}_{j+1/2}^n = \mathcal{D}_{j+1/2}^n\Lambda$, приходим к уравнению

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{R}\mathcal{D}_{j+1/2}^n\Lambda^2\mathcal{L}\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0. \quad (7.50)$$

И, наконец, принимая во внимание равенство

$$\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = \mathcal{A}_0\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{L}\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n, \quad (7.51)$$

получаем, что

$$\Lambda\mathcal{L}\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = \mathcal{L}\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n, \quad (7.52)$$

поэтому разностное уравнение для вектора потоков записывается в следующей окончательной форме:

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{R}\mathcal{D}_{j+1/2}^n\Lambda\mathcal{L}\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = 0. \quad (7.53)$$

Это уравнение является разностным аналогом дифференциального уравнения для вектора потоков

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathcal{A}_0 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad (7.54)$$

которое получается из уравнения (7.3) после умножения последнего слева на матрицу \mathcal{A}_0 .

Итак, для системы уравнений (7.3) нами построена схема предиктор-корректор (7.53), (7.49), (7.39), которая обладает такими же свойствами, как схема (3.3), (3.4) для одного скалярного уравнения переноса. В частности, при выполнении условия (7.41) она сохраняет монотонность сеточных функций r_j^n и s_j^n , определенных формулами (7.17).

Легко проверить, что при $\theta_{j+1/2}^k = O(h)$ ($k = 1, 2$) схема (7.53), (7.49) имеет второй порядок аппроксимации (см. задачу 7.1). В частности, при $\theta^k \equiv 0$ она совпадает со схемой Лакса – Вендроффа. Если $\theta_{j+1/2}^k = \text{const} \neq 0$, то схема предиктор-корректор (7.53), (7.49) является схемой первого порядка аппроксимации. В частности, при $\theta_{j+1/2}^k = \theta_0^k$ она совпадает с противопоточной схемой (7.23) (см. задачу 7.2).

При $\theta_{j+1/2}^k = \theta = \text{const}$ для устойчивости схемы по начальным данным необходимо выполнение неравенств (см. задачу 7.3)

$$\theta \geq 0, \quad \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \varkappa \leq \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}, \quad (7.55)$$

которые аналогичны условию устойчивости (3.17) схемы предиктор-корректор (3.3), (3.4), аппроксимирующей скалярное уравнение переноса (3.1).

7.4. Результаты расчетов. Приведем результаты численного решения с помощью схемы предиктор-корректор задачи с известным решением. Пусть $u_0 = 0$, в начальный момент времени жидкость покоится и известна форма ее свободной поверхности, т. е.

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \eta(x, t) \Big|_{t=0} = \eta_0(x). \quad (7.56)$$

Решение задачи Коши (7.2), (7.56) при $u_0 = 0$ описывается формулами (1.18), (1.12), которые для начальных условий (7.56) принимают следующий вид:

$$\eta(x, t) = \frac{\eta_0(x_l) + \eta_0(x_r)}{2}, \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{h_0}} \cdot \frac{\eta_0(x_l) - \eta_0(x_r)}{2}, \quad (7.57)$$

$$x_l = x - \sqrt{h_0}t, \quad x_r = x + \sqrt{h_0}t. \quad (7.58)$$

Рассмотрим, например, задачу о прорыве плотины в линейной постановке. В этой задаче предполагается, что в начальный момент времени жидкость покоится, а полная глубина $H = \eta + h_0$ имеет различные постоянные значения слева и справа от некоторой точки x_0 :

$$H(x, 0) = \begin{cases} H_1, & \text{если } x < x_0, \\ H_2, & \text{если } x > x_0. \end{cases} \quad (7.59)$$

Далее будем предполагать, что $H_1 > H_2$. В этом случае при $t > 0$ возникает течение с двумя ступеньками, одна из которых движется влево, а другая – вправо. Между этими подвижными разрывами возникает течение с постоянной скоростью U_0 и постоянной глубиной H_0 . Согласно формулам (7.57), (7.58), задача о прорыве плотины в рамках линейной модели мелкой воды имеет следующее точное решение

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1, & \text{если } x < x_1(t), \\ H_0 = \frac{H_1 + H_2}{2}, & \text{если } x_1(t) < x < x_2(t), \\ H_2, & \text{если } x > x_2(t), \end{cases} \quad (7.60)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < x_1(t), \\ U_0 = \frac{H_1 - H_2}{2}, & \text{если } x_1(t) < x < x_2(t), \\ 0, & \text{если } x > x_2(t), \end{cases} \quad (7.61)$$

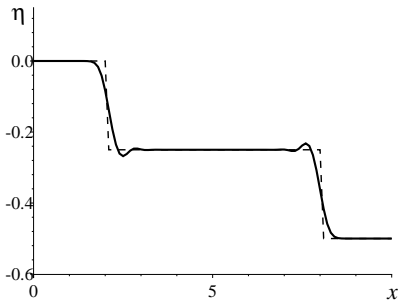
где

$$x_1(t) = x_0 - t, \quad x_2(t) = x_0 + t, \quad (7.62)$$

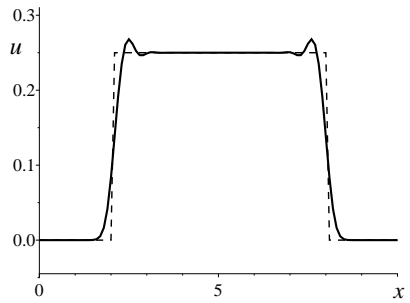
и предполагается, что

$$h(x) = h_0 \equiv 1. \quad (7.63)$$

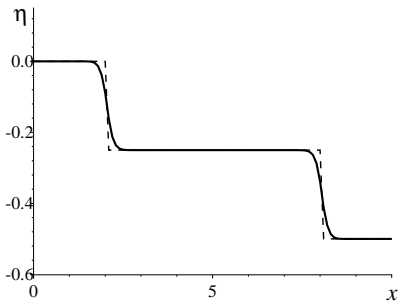
Графики точного решения изображены на рис. 26 штриховыми линиями.



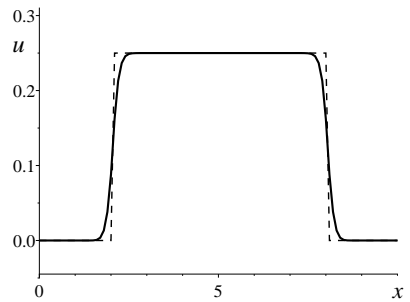
a



б



в



г

Рис. 26. Графики свободной границы (*a* и *в*) и скорости (*б* и *г*) для параметра $\theta = 0$ (*a* и *б*) и функции θ , заданной формулой (7.39) (*в* и *г*). $x_0 = 5$, $H_1 = 1$, $H_2 = 0,5$, $t = 3$, $N = 100$

Из формул (7.17), (7.56), (7.63) следует, что в начальный момент времени инварианты Римана r и s задаются формулами

$$r(x, 0) = \begin{cases} -H_1, & \text{если } x < x_0, \\ -H_2, & \text{если } x > x_0, \end{cases} \quad s(x, 0) = \begin{cases} H_1, & \text{если } x < x_0, \\ H_2, & \text{если } x > x_0. \end{cases} \quad (7.64)$$

Следовательно, при $H_1 > H_2$ функция $r(x, 0)$ является монотонно возрастающей, а функция $s(x, 0)$ – убывающей.

При использовании схемы Лакса – Вендроффа численное решение осциллирует (см. сплошные линии на рис. 26, *a*, *b*). Схема предиктор-корректор (7.45), (7.49), (7.39) сохраняет монотонность начальных функций (7.64). Более того, поскольку $H_j^n = 0,5(s_j^n - r_j^n)$, то численное решение H_j^n будет монотонно убывающей функцией на всех слоях по времени (рис. 26, *в*), как и точное решение (7.60). Что касается скорости u_j^n , то расчеты показывают, что ее профили не имеют осцилляций и хорошо передают положение движущихся разрывов (7.62) (рис. 26, *г*).

7.5. Произвольная гиперболическая система с постоянными коэффициентами. При построении схемы (7.53), (7.49), (7.39) для системы линейных уравнений мелкой воды мы использовали схему предиктор-корректор (3.3), (3.4), (3.34), (3.31) для скалярного уравнения переноса. В § 3 было отмечено, что указанная схема предиктор-корректор совпадает с модифицированной схемой Лакса – Вендроффа (2.51) с функцией-ограничителем типа $\min\text{mod}$ (2.50). Но в модифицированной схеме Лакса – Вендроффа могут использоваться и другие функции-ограничители, гарантирующие выполнение TVD-условия (2.23), т. е. она является более универсальной, чем схема предиктор-корректор с параметром (3.34). Поэтому представляет интерес обобщение модифицированной схемы Лакса – Вендроффа (2.51) на систему линейных уравнений мелкой воды. Мы, однако, выполним такое обобщение сразу для общего случая однородной гиперболической системы (1.1) из m уравнений с постоянной матрицей \mathcal{A} .

Пусть строками матрицы \mathcal{L} являются левые собственные векторы l_k ($k = 1, \dots, m$) матрицы \mathcal{A} , соответствующие собственным значениям λ_k , а столбцами матрицы \mathcal{R} – правые собственные векторы r_k . Собственные векторы l_k и r_k можно отнормировать таким образом, чтобы выполнялись равенства (7.11). Тогда имеют место соотношения вида (7.12), (7.13):

$$\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{R} = \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{L}. \quad (7.65)$$

Умножая систему уравнений (1.1) слева на матрицу \mathcal{L} , получаем систему уравнений (7.14), которая состоит из m независимых уравнений переноса (1.3) относительно определенных по формуле (1.4) инвариантов Римана s_k . Каждое из уравнений (1.3) будем аппроксимировать с помощью модифицированной схемы Лакса – Вендроффа (2.51):

$$\begin{aligned} & \frac{(s_k)_j^{n+1} - (s_k)_j^n}{\tau} + \frac{\lambda_k + |\lambda_k|}{2} (s_k)_{x,j-1/2}^n + \frac{\lambda_k - |\lambda_k|}{2} (s_k)_{x,j+1/2}^n + \\ & + \frac{|\lambda_k|}{2} (1 - \varkappa|\lambda_k|) \left[(\Phi_k)_{j+1/2}^n (s_k)_{x,j+1/2}^n - (\Phi_k)_{j-1/2}^n (s_k)_{x,j-1/2}^n \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.66)$$

В разностных уравнениях (7.66) для каждого инварианта Римана s_k ($k = 1, \dots, m$) введена своя функция-ограничитель Φ_k . Как и для одного уравнения, если $\Phi_k \equiv 0$, то для инварианта s_k имеем монотонную противопоточную схему первого порядка аппроксимации. Если же $\Phi_k \equiv 1$, то получаем схему Лакса – Вендроффа второго порядка аппроксимации на гладких решениях, но осциллирующую на разрывных решениях. Для монотонизации схемы Лакса – Вендроффа в качестве Φ_k можно взять функции, которые используются для скалярного уравнения переноса, например, функцию вида (2.50):

$$(\Phi_k)_{j+1/2}^n = \begin{cases} 1 & \text{при } |(s_k)_{x,j+1/2}^n| \leq |(s_k)_{x,j+1/2-2\sigma_k}^n|, \\ & (s_k)_{x,j+1/2}^n \cdot (s_k)_{x,j+1/2-2\sigma_k}^n \geq 0, \\ \frac{(s_k)_{x,j+1/2-2\sigma_k}^n}{(s_k)_{x,j+1/2}^n} & \text{при } |(s_k)_{x,j+1/2}^n| > |(s_k)_{x,j+1/2-2\sigma_k}^n|, \\ & (s_k)_{x,j+1/2}^n \cdot (s_k)_{x,j+1/2-2\sigma_k}^n \geq 0, \\ 0 & \text{при } (s_k)_{x,j+1/2}^n \cdot (s_k)_{x,j+1/2-2\sigma_k}^n < 0, \end{cases}$$

где $\sigma_k = \text{sgn}(\lambda_k)$.

Перейдем теперь от записи схемы в инвариантах Римана (7.66) к схеме в исходных переменных $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$. Для этого вначале перепишем схему (7.66) в виде следующей двухшаговой схемы:

$$\frac{(s_k)_{j+1/2}^* - \frac{1}{2} \left((s_k)_j^n + (s_k)_{j+1}^n \right)}{\tau/2} + (d_k)_{j+1/2}^n (s_k)_{x,j+1/2}^n, \quad (7.67)$$

$$\frac{(s_k)_j^{n+1} - (s_k)_j^n}{\tau} + \lambda_k \frac{(s_k)_{j+1/2}^* - (s_k)_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad (7.68)$$

где

$$d_k = \sigma_k \left(\frac{1 - \Phi_k}{\varepsilon} + |\lambda_k| \Phi_k \right), \quad k = 1, \dots, m.$$

Далее будем поступать так же, как при выводе разностных уравнений (7.53), (7.49) для системы линейных уравнений мелкой воды. Введем векторы

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^* = \begin{pmatrix} s_1^* \\ \vdots \\ s_m^* \end{pmatrix}$$

и перепишем уравнения (7.67), (7.68) в векторной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{s}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{j+1}^n + \mathbf{s}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{D}_{j+1/2}^n \mathbf{s}_{x,j+1/2}^n &= 0, \\ \frac{\mathbf{s}_j^{n+1} - \mathbf{s}_j^n}{\tau} + \Lambda \frac{\mathbf{s}_{j+1/2}^* - \mathbf{s}_{j-1/2}^*}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (7.69)$$

где $\mathcal{D}_{j+1/2}^n$ — диагональная матрица с элементами $(d_k)_{j+1/2}^n$ на диагонали. Пусть $\mathbf{u}^* = \mathcal{R}\mathbf{s}^*$. Учитывая равенство $\mathbf{s} = \mathcal{L}\mathbf{u}$, перепишем уравнения (7.69) в виде системы уравнений для исходной функции \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{D}_{j+1/2}^n \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n &= 0, \\ \mathcal{L} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \Lambda \mathcal{L} \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \mathbf{u}_{j-1/2}^*}{h} &= 0. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Видим, что эти уравнения почти совпадают с приведенными ранее уравнениями (7.44), только теперь роль матрицы $\mathcal{D}\mathcal{L}$ в первом из уравнений (7.44) исполняет матрица $\mathcal{D}\mathcal{L}$. Поэтому все дальнейшие преобразования в записи системы уравнений (7.70) выполняются так же, как для схемы, аппроксимирующей линейные уравнения мелкой воды. В результате получаем уравнение (7.49) и аналог уравнения (7.50):

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{R}\mathcal{D}_{j+1/2}^n \Lambda \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0, \quad (7.71)$$

где

$$\mathbf{f} = \mathcal{A}\mathbf{u}, \quad \mathbf{f}_j^n = \mathcal{A}\mathbf{u}_j^n, \quad \mathbf{f}_{j+1/2}^* = \mathcal{A}\mathbf{u}_{j+1/2}^*. \quad (7.72)$$

Используя затем равенство (7.52), приходим к окончательному виду модифицированной схемы Лакса – Вендроффа, аппроксимирующей систему уравнений (1.1) с постоянной матрицей \mathcal{A} :

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{R}\mathcal{D}_{j+1/2}^n \mathcal{L}\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = 0, \quad (7.73)$$

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \mathbf{f}_{j-1/2}^*}{h} = 0. \quad (7.74)$$

Итак, при использовании модифицированной схемы Лакса – Вендроффа вначале по формуле (7.73) вычисляются потоки в полудельных узлах $x_{j+1/2}$, а затем, по формуле (7.74), вычисляются искомые величины \mathbf{u}_j^{n+1} .

З А Д А Ч И

7.1. Покажите, что при $\theta_{j+1/2}^k = O(h)$ ($k = 1, 2$) схема (7.53), (7.49) имеет второй порядок аппроксимации.

7.2. Покажите, что при $\theta_{j+1/2}^k = \theta_0^k$, где величины θ_0^k определены в формуле (7.40), схема предиктор-корректор (7.53), (7.49) совпадает с противопоточной схемой (7.23).

7.3. С помощью спектрального метода Неймана покажите, что при $\theta_{j+1/2}^k = \theta = \text{const}$ для устойчивости схемы (7.53), (7.49) по начальным данным необходимо выполнение неравенств (7.55).

7.4. С помощью спектрального метода Неймана покажите, что неявная противопоточная схема

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \mathcal{A}_0^+ \mathbf{u}_{x,j-1/2}^{n+1} + \mathcal{A}_0^- \mathbf{u}_{x,j+1/2}^{n+1} = 0 \quad (7.75)$$

является абсолютно устойчивой.

7.5. Покажите, что схема Мак-Кормака

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_j^* - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \mathcal{A}_0 \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n}{h} &= 0, \\ \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - 0,5(\mathbf{u}_j^* + \mathbf{u}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{A}_0 \frac{\mathbf{u}_j^* - \mathbf{u}_{j-1}^*}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (7.76)$$

построенная для линейной системы уравнений (7.4), совпадает со схемой предиктор-корректор (7.53), (7.49) при $\theta_{j+1/2}^k \equiv 0$, т. е. со схемой Лакса – Вендроффа.

§ 8. Разностные схемы для системы нелинейных уравнений мелкой воды

8.1. Постановка задачи. В предыдущем параграфе мы познакомились с некоторыми конечно-разностными схемами для решения системы уравнений с постоянными коэффициентами. В качестве примера была выбрана система линейных уравнений мелкой воды. В настоящем параграфе мы также будем иметь дело с уравнениями мелкой воды, но теперь будем рассматривать случай нелинейных уравнений (7.1), которые уже были выписаны в § 7. Для удобства изложения приведем их снова:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad x \in \Omega. \quad (8.1)$$

Здесь

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + H^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ Hh_x \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

и использованы те же обозначения, что и в § 7. Уравнения (8.1), дополненные начальными и краевыми условиями, решаются при $t > 0$ в области $\Omega = (0, l)$ (рис. 25).

Так же, как в линейном случае, уравнения (8.1) можно переписать в недивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad (8.3)$$

где $\mathcal{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ – матрица Якоби:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + H & 2u \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Видим, что для нелинейных уравнений матрица Якоби (8.4) имеет такой же вид (7.6), как для линейных уравнений. Такую аналогию между линейным и нелинейным случаями мы будем постоянно подчеркивать и в дальнейшем. Например, как и в линейном случае, собственные значения матрицы (8.4) вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u + c, \quad (8.5)$$

аналогичным (7.7), только теперь $c = \sqrt{H}$, собственные значения не являются постоянными, а характеристики не являются в общем случае прямыми.

Скажем несколько слов о постановке краевых условий для системы уравнений (8.1). Будем предполагать, что полная глубина H положительна при всех x и t . Тогда $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и система уравнений (8.3) имеет гиперболический тип, поэтому при постановке краевых условий мы можем руководствоваться правилами, изложенными в § 1.

Если в окрестности границ течение является *докритическим*, т. е.

$$|u| < c, \quad (8.6)$$

то имеют место следующие неравенства:

$$\lambda_1 \Big|_{x=0} < 0, \quad \lambda_2 \Big|_{x=0} > 0, \quad \lambda_1 \Big|_{x=l} < 0, \quad \lambda_2 \Big|_{x=l} > 0. \quad (8.7)$$

Согласно теории начально-краевых задач для гиперболических систем уравнений [4], на левой границе $x = 0$ области Ω в случае (8.6) должно быть поставлено одно краевое условие (имеется одна приходящая извне характеристика). Например, если граница $x = 0$ области Ω является участком втекания (входом области), то на ней можно задать условие

$$Hu(0, t) = \mu_0(t) > 0. \quad (8.8)$$

Для $x = l$ одна характеристика будет приходить на эту границу изнутри области Ω , а другая – извне. Следовательно, на этой границе также необходимо задавать одно краевое условие. Например, если граница $x = l$ соответствует вертикальной непроницаемой стенке, то на ней ставится условие непротекания

$$u(l, t) = \mu_l(t) \equiv 0. \quad (8.9)$$

Если жидкость вытекает из рассматриваемой области через выход $x = l$, то здесь задается, например, расход

$$Hu(l, t) = \mu_l(t) > 0. \quad (8.10)$$

Для *сверхкритических* течений, т. е. при нарушении условия (8.6), количество граничных условий, также определяемое на основе анализа характеристик, может быть иным, чем для докритических течений. Например, на левой границе области могут задаваться два условия, а на правой – ни одного.

Далее, для сокращения изложения, вместо начально-краевой задачи для системы (8.1) мы будем рассматривать лишь задачу Коши с начальными условиями, заданными при $t = 0$.

8.2. Непрерывные течения. Задача Коши для системы уравнений (8.1) может иметь гладкие или разрывные решения. При изучении скалярного нелинейного уравнения (4.1) отмечалось, что даже для гладких начальных данных решение может стать в некоторый момент времени разрывным, а для разрывных начальных данных может получиться непрерывное при $t > 0$ решение, либо разрывное. Все эти возможности имеют место и для системы уравнений (8.1), для которой скалярное уравнение (4.1) является модельным. Мы не будем вдаваться в подробности методов получения и исследования решений нелинейных гиперболических систем уравнений [18], однако некоторые точные решения системы (8.1) все же укажем. Они могут оказаться полезными при тестировании численных алгоритмов и реализующих их программ.

Для получения решения с помощью метода характеристик требуется переписать систему уравнений в инвариантах Римана. Собственным значениям (8.5) соответствуют правые собственные векторы матрицы A

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{c}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

и левые

$$\mathbf{l}_1 = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{l}_2 = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}^T.$$

Если взять аналоги матриц (7.10)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

то для выписанных матриц будут справедливы равенство (7.11) и равенства вида (7.12), (7.13):

$$\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{R} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (8.12)$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{L}, \quad \mathcal{A}^2 = \mathcal{R}\Lambda^2\mathcal{L}. \quad (8.13)$$

Рассмотрим вначале случай ровного горизонтального дна. Умножим систему уравнений (8.3) слева на матрицу \mathcal{L} , учтем равенства (7.11), (8.13) и выражение $c = \sqrt{H}$. В результате при $\mathbf{G} \equiv 0$ получим систему уравнений (7.14) или

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{H}} H_t + u_t + \lambda_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{H}} H_x + u_x \right) &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{H}} H_t + u_t + \lambda_2 \left(\frac{1}{\sqrt{H}} H_x + u_x \right) &= 0. \end{aligned}$$

Если ввести новые зависимые переменные

$$r = u - 2c, \quad s = u + 2c, \quad (8.14)$$

то для них получается такая же система уравнений (7.15), как и в линейном случае:

$$r_t + \lambda_1 r_x = 0, \quad s_t + \lambda_2 s_x = 0. \quad (8.15)$$

Таким образом, величина r сохраняется на характеристике $dx/dt = \lambda_1$, а s – на характеристике $dx/dt = \lambda_2$. В этом смысле величины r и s являются инвариантами, которые, как и в линейном случае, называются инвариантами Римана.

Хотя системы уравнений (7.15) и (8.15) выглядят одинаково, между ними имеется существенное различие. Линейные уравнения (7.15) не связаны друг с другом, они представляют собой два отдельных уравнения типа линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом. Напротив, уравнения (8.15) являются нелинейными и связанными между собой посредством коэффициентов λ_1 и λ_2 , поскольку в нелинейном случае собственные значения зависят от обеих искомым функций r и s . В самом деле, из равенств (8.14) следует, что

$$u = \frac{r+s}{2}, \quad c = \frac{s-r}{4}, \quad (8.16)$$

поэтому

$$\lambda_1 = \frac{3r+s}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{r+3s}{4}, \quad (8.17)$$

и система уравнений (8.15) запишется в следующей развернутой форме

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{3r+s}{4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{r+3s}{4} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (8.18)$$

Если для системы уравнений (8.1) с нулевой правой частью поставлена задача Коши с начальными условиями

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad (8.19)$$

то в методе характеристик вначале по формулам (8.14) определяются величины r и s в начальный момент времени, затем решается задача Коши для системы в инвариантах (8.18), при этом учитывается постоянство функций r и s на соответствующих характеристиках. В конечном итоге, по формулам (8.16) находится решение u , c и $H = c^2$. Если начальные данные (8.19) являются непрерывными функциями, то решение может быть непрерывным при всех $t > 0$, либо только до момента градиентной катастрофы (см. § 4).

Метод характеристик позволяет получать (см. [18]) непрерывное при $t > 0$ решение задачи Коши и для специально подобранных разрывных начальных данных (8.19).

Пример 8.1. Пусть $h(x) = h_0 = \text{const}$ и при $t = 0$ скорость и полная глубина являются кусочно-постоянными функциями, имеющими разрыв в некоторой точке x_0 :

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x \leq x_0, \\ u_2, & x > x_0, \end{cases} \quad H(x, 0) = \begin{cases} H_1, & x \leq x_0, \\ H_2, & x > x_0, \end{cases} \quad (8.20)$$

при этом

$$u_1 = 0 < u_2, \quad H_1 > H_2. \quad (8.21)$$

Значения H_1 и u_2 будем считать заданными. Оказывается, что для некоторого определенного значения полной глубины H_2 решение задачи Коши (8.1), (8.20), (8.21) будет непрерывным при $t > 0$. Покажем это, выписав с помощью метода характеристик формулы точного решения, описывающего два постоянных течения, сопрягающихся через центрированную волну разрежения.

Из формул (8.14) получаем, что в начальный момент времени величины r и s постоянны слева от точки x_0 :

$$r(x, 0)|_{x \leq x_0} = -2c_1 = -2\sqrt{H_1}, \quad s(x, 0)|_{x \leq x_0} = 2c_1.$$

Из уравнений (8.15) следует, что величины r и s сохраняют свои значения на «своих» характеристиках

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 = \frac{3r + s}{4}, \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_2 = \frac{r + 3s}{4},$$

выходящих из точек оси абсцисс с координатами $x \leq x_0$, поэтому на этих характеристиках выполняются равенства $r = -2c_1$, $s = 2c_1$. Следовательно, $\lambda_1 = -c_1$, $\lambda_2 = c_1$ и характеристики являются прямыми. На рис. 27 r -характеристики $dx/dt = \lambda_1$ изображены сплошными линиями, а s -характеристики $dx/dt = \lambda_2$ – штриховыми. При этом r -характеристика, выходящая из точки x_0 , обозначена как AB . Она описывается уравнением

$$x = x_1(t) = x_0 - c_1 t. \quad (8.22)$$

В силу формул (8.16), в области, лежащей левее r -характеристики AB , выполняются равенства

$$u(x, t) = 0, \quad H(x, t) = H_1, \quad t \geq 0, \quad x \leq x_1(t). \quad (8.23)$$

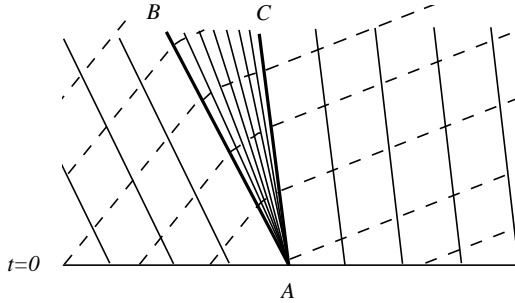


Рис. 27. Характеристики в центрированной r -волне разрежения, сопряженной с участками постоянного течения

Правее r -характеристики AB решение будем искать в виде центрированной r -волны разрежения BAC , т. е. в предположении, что функция r постоянна на r -характеристиках и они являются лучами, выходящими из одной и той же точки x_0 :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 = \frac{x - x_0}{t}.$$

В области BAC функция r постоянна на каждой отдельно взятой характеристике, но на разных характеристиках она принимает разные значения. Напротив, функция s принимает одно и то же значение $s = 2c_1$ во всей волне разрежения BAC , поскольку это значение приносится всеми s -характеристиками из левой области постоянного течения. Таким

образом, в области BAC

$$\lambda_1 = \frac{3r + s}{4} = \frac{3r + 2c_1}{4} = \frac{x - x_0}{t},$$

поэтому

$$r(x, t) = \frac{2}{3} \left(2 \frac{x - x_0}{t} - c_1 \right).$$

Тогда на основе выражений (8.16) получаются следующие формулы для решения в r -волне разрежения BAC :

$$u = \frac{r + 2c_1}{2} = \frac{2}{3} \left(\frac{x - x_0}{t} + c_1 \right), \quad (8.24)$$

$$c = \frac{2c_1 - r}{4} = \frac{1}{3} \left(2c_1 - \frac{x - x_0}{t} \right), \quad (8.25)$$

$$H = c^2 = \frac{1}{9} \left(2c_1 - \frac{x - x_0}{t} \right)^2. \quad (8.26)$$

Мы определили решение в волне разрежения, но пока не указали для нее крайнюю r -характеристику AC . Эта характеристика однозначно определяется заданным при $x > x_0$ значением скорости u_2 . В самом деле, из формулы (8.24) следует, что в точках луча AC выполняется равенство

$$u_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{x - x_0}{t} + c_1 \right),$$

поэтому характеристика AC описывается уравнением

$$x = x_2(t) = x_0 + \left(\frac{3}{2} u_2 - c_1 \right) t, \quad (8.27)$$

и на ней выполняются равенства

$$u \Big|_{AC} = u_2, \quad c \Big|_{AC} = c_2 = c_1 - \frac{u_2}{2}, \quad H \Big|_{AC} = H_2 = \left(c_1 - \frac{u_2}{2} \right)^2. \quad (8.28)$$

Полученное значение H_2 и следует задать в начальных условиях (8.20). Тогда из формул (8.14) будет следовать, что в начальный момент времени величины r и s принимают следующие постоянные значения справа от точки x_0 :

$$r(x, 0) \Big|_{x > x_0} = u_2 - 2c_2 = 2(u_2 - c_1), \quad s(x, 0) \Big|_{x > x_0} = u_2 + 2c_2 = 2c_1.$$

Отсюда следует, что в области, лежащей правее луча AC , все характеристики являются прямыми, инвариант s принимает одно и то же значение $2c_1$ как на s -характеристиках, выходящих из точек оси абсцисс с координатами $x > x_0$, так и на s -характеристиках, приходящих через AC из волны разрежения, инвариант r принимает одно и то же значение, равное $2(u_2 - c_1)$, на всех r -характеристиках, выходящих с оси абсцисс при $x > x_0$. Согласно формулам (8.16) получаем, что правее характеристики AC течение является постоянным:

$$u = u_2, \quad c = c_2, \quad H = H_2. \quad (8.29)$$

Таким образом, если в качестве начальных данных (8.20) выбраны разрывные функции

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ u_2 > 0, & x > x_0, \end{cases} \quad (8.30)$$

$$H(x, 0) = \begin{cases} H_1 > 0, & x \leq x_0, \\ H_2 = \left(\sqrt{H_1} - \frac{u_2}{2}\right)^2, & x > x_0, \end{cases} \quad (8.31)$$

то задача Коши для системы уравнений (8.1) с правой частью $\mathbf{G} \equiv 0$ имеет непрерывное при $t > 0$ решение

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1, & \text{если } x \leq x_1(t), \\ \frac{1}{9} \left(2\sqrt{H_1} - \frac{x - x_0}{t}\right)^2, & \text{если } x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ H_2 = \left(\sqrt{H_1} - \frac{u_2}{2}\right)^2, & \text{если } x \geq x_2(t), \end{cases} \quad (8.32)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_1(t), \\ \frac{2}{3} \left(\sqrt{H_1} + \frac{x - x_0}{t}\right), & \text{если } x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ u_2, & \text{если } x \geq x_2(t), \end{cases} \quad (8.33)$$

где

$$x_1(t) = x_0 - t\sqrt{H_1}, \quad x_2(t) = x_0 + t \left(\frac{3}{2}u_2 - \sqrt{H_1}\right). \quad (8.34)$$

Приведем также формулу для величины c :

$$c(x, t) = \begin{cases} c_1 = \sqrt{H_1}, & \text{если } x \leq x_1(t), \\ \frac{1}{3} \left(2c_1 - \frac{x - x_0}{t}\right), & \text{если } x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ c_2 = c_1 - \frac{u_2}{2}, & \text{если } x \geq x_2(t). \end{cases} \quad (8.35)$$

Из этой формулы следует, в частности, что величина скорости u_2 не может задаваться произвольно: неравенство $c_2 = \sqrt{H_2} > 0$ влечет за собой ограничение $u_2 < 2c_1$.

На рис. 28, а показан график точного решения (8.32) для значения $u_2 = 0.5c_1$ при значениях $H_1 = 1$, $x_0 = 5$, $t = 3$. Для этих параметров получаются значения $u_2 = 0.5$, $c_2 = 0.75$, т. е. справа от характеристики AC выполняется неравенство $u_2/c_2 = 2/3 < 1$. В гидравлике число $M = |u|/c$ называется *числом Фруда*. Течения с числом Фруда меньше единицы называются *докритическими*. Если $M > 1$, то такие течения называются *сверхкритическими*. Таким образом, в рассматриваемом случае справа от характеристики AC получается докритическое течение с числом Фруда $M = 2/3$.

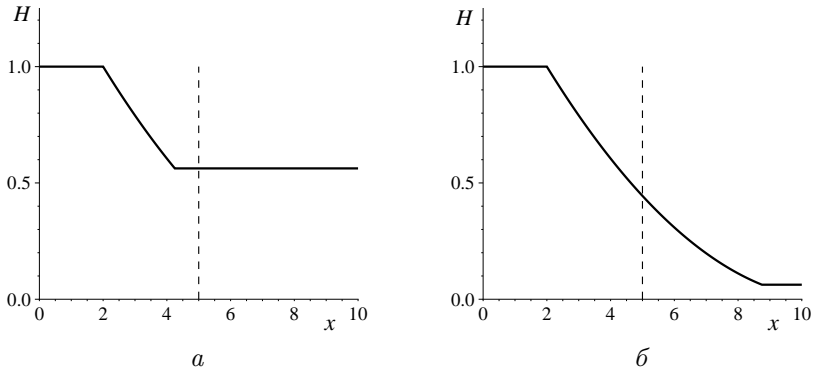


Рис. 28. Графики решения (8.32) при $u_2 = 0.5c_1$ (а) и $u_2 = 1.5c_1$ (б)

Если же $u_2 = 1.5c_1$, то формулы (8.32), (8.35) дают значения $u_2 = 1.5$, $c_2 = 0.25$, поэтому правее точки $x_2(t)$ течение является сверхкритическим с числом Фруда $M = 6$. В этом случае точка x_0 начального разрыва (ее положение показано штриховой линией на рис. 28) попадает в область волны разрежения. Интересной особенностью сверхкритического режима, возникающего при $u_2 > 2c_1/3$, является независимость полной глубины и скорости в точке x_0 от времени и заданных значений u_2 :

$$H(x_0, t) = \frac{4}{9}H_1, \quad u(x_0, t) = \frac{2}{3}\sqrt{H_1} = c(x_0, t). \quad (8.36)$$

8.3. Течения с сильными разрывами. Функции (8.32), (8.33) являются дифференцируемыми всюду, за исключением точек $x = x_1(t)$

и $x = x_2(t)$, в которых первые производные от \mathbf{u} терпят разрыв. Такие непрерывные при $t > 0$ решения задачи Коши (8.1), (8.20) называются решениями со слабыми разрывами. Но системы нелинейных уравнений могут иметь и разрывные решения, относящиеся к классу обобщенных решений. Вектор-функцию \mathbf{u} будем называть обобщенным решением системы уравнений (8.1), если эта функция удовлетворяет интегральному соотношению

$$\oint_C \mathbf{u} dx - \mathbf{f} dt = \iint_D \mathbf{G} dx dt, \quad (8.37)$$

где D – произвольная ограниченная область с кусочно-гладкой границей $C = \partial D$, лежащая в полуплоскости $t \geq 0$.

Если в области определения обобщенного решения существует кривая $x = x(t)$, на которой вектор \mathbf{u} имеет разрыв первого рода и вне которой он непрерывен, то соответствующее этому решению течение жидкости называется течением с *сильным разрывом* [17]. Чтобы получить соотношения, связывающие значения решения \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 слева и справа от линии разрыва, используется тот же прием, который применялся для получения уравнения сильного разрыва (4.20) для нелинейного скалярного уравнения (4.1). В качестве контура C берется контур криволинейного четырехугольника D , охватывающий некоторый участок ef кривой разрыва (см. рис. 11). В результате вместо (8.37) получается равенство

$$\oint_{abcd} (\mathbf{u} D - \mathbf{f}) dt = \iint_D \mathbf{G} dx dt, \quad (8.38)$$

где $dx/dt = D$ – скорость движения разрыва. Стягивая отрезки ab и cd в точки e и f , в пределе получаем

$$\int_{ef} ([\mathbf{u}] D - [\mathbf{f}]) dt = 0, \quad (8.39)$$

где символ скачка $[]$ для некоторой величины означает разность предельных значений этой величины на линии $x = x(t)$, которые предполагаются существующими с каждой стороны линии разрыва. Из интегрального соотношения (8.39), ввиду произвольности дуги ef , получаем соотношение на сильном разрыве

$$[\mathbf{u}] D = [\mathbf{f}], \quad (8.40)$$

которое должно выполняться в любой точке линии разрыва и которое записывается в виде следующей системы уравнений сильного разрыва для компонент векторов \mathbf{u} и \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} [H]D &= [Hu], \\ [Hu]D &= [Hu^2 + H^2/2], \end{aligned}$$

или

$$(H_2 - H_1)D = H_2u_2 - H_1u_1, \quad (8.41)$$

$$(H_2u_2 - H_1u_1)D = H_2u_2^2 + H_2^2/2 - (H_1u_1^2 + H_1^2/2). \quad (8.42)$$

Из уравнений (8.41), (8.42) следует, что на сильном разрыве обе величины H и u изменяются скачком, т. е.

$$H_2 \neq H_1, \quad u_2 \neq u_1, \quad (8.43)$$

поэтому уравнение (8.41) можно использовать для определения скорости движения точки разрыва

$$D = \frac{H_2u_2 - H_1u_1}{H_2 - H_1}. \quad (8.44)$$

Подставив выражение для D в уравнение (8.42), получаем соотношение, связывающее параметры потока по разные стороны от линии разрыва:

$$\frac{(H_2u_2 - H_1u_1)^2}{H_2 - H_1} = H_2u_2^2 - H_1u_1^2 + (H_2 - H_1) \frac{H_1 + H_2}{2},$$

или

$$(u_2 - u_1)^2 = (H_2 - H_1)^2 \frac{H_1 + H_2}{2H_1H_2}. \quad (8.45)$$

Три из пяти величин H_1 , H_2 , u_1 , u_2 и D задаются, а две оставшиеся определяются из двух уравнений (8.44) и (8.45), при этом необходимо учитывать, что физический смысл имеют лишь устойчивые разрывные решения (см. [17, 18], а также пп. 4.2).

Пример 8.2. В случае устойчивого разрыва, соответствующего параметрам

$$H_1 > H_2 > 0, \quad u_2 = 0, \quad (8.46)$$

скорость u_1 за скачком должна быть положительной. Тогда из соотношения (8.45) получаем

$$u_1 = (H_1 - H_2) \sqrt{\frac{H_1 + H_2}{2H_1H_2}} > 0, \quad (8.47)$$

поэтому

$$D = \sqrt{\frac{H_1}{H_2} \frac{H_1 + H_2}{2}} > 0. \quad (8.48)$$

Если дно горизонтальное и кусочно-постоянная начальная функция (8.20) задана с использованием величин (8.46), (8.47), то функции

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x \leq x_b(t), \\ 0, & x > x_b(t), \end{cases} \quad H(x, t) = \begin{cases} H_1, & x \leq x_b(t), \\ H_2, & x > x_b(t), \end{cases} \quad (8.49)$$

где

$$x_b(t) = x_0 + Dt, \quad (8.50)$$

представляют обобщенное решение задачи Коши (8.1), (8.20), описывающее движение устойчивого разрыва с постоянной скоростью (8.48).

Устойчивый разрыв, скорость движения которого отлична от нуля, называется в гидравлике *бором*. Таким образом, функции (8.49) описывают распространение бора по покоящейся перед ним жидкости. ■

Пример 8.3. Пусть величины u_1 , H_1 и D заданы такими, что

$$u_1 > \sqrt{H_1} > 0, \quad D = 0. \quad (8.51)$$

Тогда из соотношения (8.44) следует, что $H_1u_1 = H_2u_2$, поэтому

$$u_2 = u_1 \frac{H_1}{H_2}. \quad (8.52)$$

Учитывая это равенство, решим уравнение (8.45) относительно неизвестной H_2

$$H_2 = \frac{\sqrt{H_1^2 + 8H_1u_1^2} - H_1}{2} > 0 \quad (8.53)$$

и по формуле (8.52) найдем u_2 .

Если дно горизонтальное, то задача Коши (8.1), (8.20), (8.51)–(8.53) имеет обобщенное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x \leq x_0, \\ u_2, & x > x_0, \end{cases} \quad H(x, t) = \begin{cases} H_1, & x \leq x_0, \\ H_2, & x > x_0, \end{cases} \quad (8.54)$$

которое описывает «стоячий» бор. Такие неподвижные устойчивые разрывы называются в гидравлике *гидравлическими прыжками*.

В рассматриваемом примере течение перед прыжком задано сверхкритическим ($M_1 = u_1/\sqrt{H_1} > 1$), а за прыжком получается докритическое течение ($M_2 = u_2/\sqrt{H_2} < 1$), при этом жидкость перетекает через гидравлический прыжок слева направо, за прыжком полная глубина больше, чем перед прыжком ($H_2 > H_1$), а скорость – меньше ($u_2 < u_1$).

8.4. Распад произвольного разрыва. Как мы видели, решение в виде центрированной волны разрежения или устойчивого сильного разрыва может получиться только при определенном соотношении между величинами H_1 , H_2 , u_1 и u_2 из начальных данных (8.20). Если же эти величины заданы произвольным образом, то происходит распад начального разрыва (8.20) на систему волн, состоящую из центрированных волн и устойчивых сильных разрывов. Мы не будем касаться общей теории решения задач о распаде произвольного разрыва (см., например, [17, 18]) и ограничимся лишь одним примером.

Пример 8.4. Пусть начальная функция (8.20) задана в виде:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1 = 0, & x \leq x_0, \\ u_2 = 0, & x > x_0, \end{cases} \quad H(x, 0) = \begin{cases} H_1, & x \leq x_0, \\ H_2, & x > x_0, \end{cases} \quad (8.55)$$

при этом

$$H_1 > H_2. \quad (8.56)$$

Это означает, что в начальный момент времени жидкость покоилась, а ее уровень менялся в точке x_0 скачком с большего значения на меньшее. Требуется определить течение при $t > 0$. Такая задача называется в гидравлике *задачей о прорыве плотины*.

Поскольку $u(x, 0) \equiv 0$, то центрированная волна разрежения не может быть решением нашей задачи. Второе из соотношений (8.43) не выполняется, поэтому сильный разрыв также не может быть решением задачи. Следовательно, для рассматриваемых условий (8.55) произойдет распад начального разрыва. В данном случае, задача о распаде разрыва имеет следующее решение. Вправо, по покоящейся жидкости с низким уровнем, движется бор (рис. 29), скорость которого определяется формулой (8.48):

$$D = \sqrt{\frac{H_0}{H_2} \cdot \frac{H_0 + H_2}{2}} > 0, \quad (8.57)$$

где H_0 – полная глубина слева от бора. Скорость потока за бором определяется по формуле (8.47):

$$U_0 = (H_0 - H_2) \sqrt{\frac{H_0 + H_2}{2H_0H_2}}, \quad (8.58)$$

при этом $U_0 > 0$, $H_0 > H_2$, положение бора вычисляется по формуле (8.50), а величины U_0 и H_0 подлежат определению.

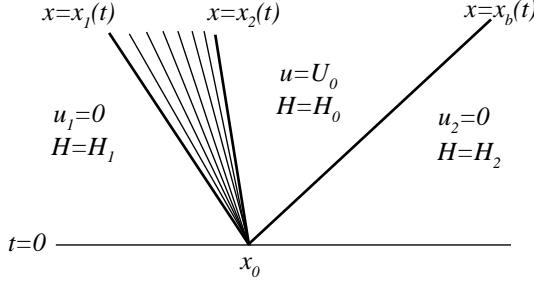


Рис. 29. Схема течения к задаче о распаде начального разрыва (8.55)

Участок постоянного течения $u = U_0$, $H = H_0$ за бором сопрягается с левым участком постоянного течения $u_1 = 0$, $H = H_1$ посредством волны разрежения (8.24), (8.26), движение переднего и заднего фронтов которой описывается уравнениями (8.22) и (8.27) соответственно:

$$x_1(t) = x_0 - \sqrt{H_1}t, \quad x_2(t) = x_0 + \left(\frac{3}{2}U_0 - \sqrt{H_1}\right)t. \quad (8.59)$$

Из последнего равенства (8.28) получаем, что

$$H_0 = \left(\sqrt{H_1} - \frac{U_0}{2}\right)^2 < H_1, \quad (8.60)$$

поэтому, с учетом отмеченного выше ограничения $U_0 < 2\sqrt{H_1}$, приходим к следующей связи между величинами U_0 и H_0 :

$$U_0 = 2(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_0}). \quad (8.61)$$

Приравнявая правые части равенств (8.58) и (8.61), получаем уравнение

$$f(H) = 0 \quad (8.62)$$

для определения полной глубины H_0 за бором, где функция f задана формулой:

$$f(H) = (H - H_2) \sqrt{\frac{H + H_2}{2H_2H}} + 2\sqrt{H} - 2\sqrt{H_1}.$$

Поскольку $f(H_2) < 0$, $f(H_1) > 0$ и функция $f(H)$ монотонно возрастает на отрезке $[H_2, H_1]$ ($f'(H) > 0$), то уравнение (8.62) имеет единственное решение $H_0 \in (H_2, H_1)$.

Найдя H_0 , по формуле (8.61) вычисляем U_0 и с учетом формул (8.32), (8.33), описывающих волну разрежения, приходим к следующему окончательному виду решения задачи о распаде начального разрыва (8.55):

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1, & \text{если } x \leq x_1(t), \\ \frac{1}{9} \left(2\sqrt{H_1} - \frac{x - x_0}{t} \right)^2, & \text{если } x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ H_0, & \text{если } x_2(t) \leq x \leq x_b(t), \\ H_2, & \text{если } x > x_b(t), \end{cases} \quad (8.63)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_1(t), \\ \frac{2}{3} \left(\sqrt{H_1} + \frac{x - x_0}{t} \right), & \text{если } x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ U_0, & \text{если } x_2(t) \leq x \leq x_b(t), \\ 0, & \text{если } x > x_b(t), \end{cases} \quad (8.64)$$

при этом границы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ волны разрежения вычисляются по формулам (8.59), а положение бора и его скорость – по формулам (8.50) и (8.57) соответственно. Отметим, что в данном примере решение задачи о прорыве плотины при условии $H_1 > H_2$ содержит волну разрежения, которая в гидравлике называется *волной понижения*.

8.5. Течение над неровным дном. Мы привели несколько решений системы уравнений (8.1) в предположении, что дно является плоским и горизонтальным ($G \equiv 0$). Рассмотрим один пример течения над неровным дном, но для сокращения изложения выпишем точное решение задачи лишь для установившегося течения жидкости, т. е. течения, параметры которого не зависят от времени. В этом случае уравнения (8.1) примут следующий вид:

$$(Hu)_x = 0, \quad (8.65)$$

$$(Hu^2 + H^2/2)_x = Hh_x. \quad (8.66)$$

Из уравнения (8.65) следует, что

$$Hu = \text{const.}$$

Тогда уравнение (8.66) можно переписать как

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_x + (H - h)_x = 0,$$

или

$$\frac{u^2}{2} + H - h = \text{const.}$$

Пусть на левой границе $x = 0$ отрезка $[0, l]$ известны скорость u_0 и полная глубина H_0 . Тогда имеют место равенства

$$Hu = H_0u_0, \quad (8.67)$$

$$\frac{u^2}{2} + H - h = \frac{u_0^2}{2} + H_0 - h_0, \quad (8.68)$$

где $h_0 = h(0)$.

С одной стороны, из равенства (8.68) получается следующая зависимость полной глубины $H(x)$ от числа Фруда $M(x)$:

$$H = \frac{H_0 \left(1 + \frac{M_0^2}{2}\right) + h - h_0}{1 + \frac{M^2}{2}}$$

или

$$\frac{H}{H_0} = \frac{2 + M_0^2 + \frac{2(h - h_0)}{H_0}}{2 + M^2}, \quad (8.69)$$

где $M = u/c$ – число Фруда в точке x , $M_0 = u_0/c_0$ – число Фруда на входе $x = 0$, $c = \sqrt{H}$, $c_0 = \sqrt{H_0}$. С другой стороны, учитывая, что $u_0 = \sqrt{H_0}M_0$,

$$u = \sqrt{HM}, \quad (8.70)$$

равенство (8.67) можно переписать в следующем виде

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{M_0}{M}\right)^{2/3}. \quad (8.71)$$

Приравнивая правые части равенств (8.69) и (8.71), получаем уравнение для определения числа Фруда в произвольной точке $x \in [0, l]$:

$$F(M) \equiv M_0^2(2+z)^3 - \left(2 + M_0^2 + \frac{2(h(x) - h_0)}{H_0}\right)^3 z = 0, \quad (8.72)$$

где $z = M^2$. Найдя положительный корень $z(x)$ кубического уравнения (8.72) и вычислив число Фруда $M(x) = \sqrt{z(x)}$, точное решение $H(x)$ и $u(x)$ задачи о стационарном течении жидкости над неровным дном находим по формулам (8.71) и (8.70).

Заметим, однако, что уравнение (8.72) может и не иметь положительных корней или иметь их несколько. Это зависит от заданных на входе значений u_0 и H_0 , а также от функции $h(x)$, описывающей дно. Мы не будем проводить полный анализ всех возможных ситуаций, ограничившись рассмотрением лишь одного простого примера.

Пример 8.5. Пусть $l = 20$, $H_0 = 1$, $h_0 = 1$ и дно описывается формулой $y = -h(x)$, где

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 8, \\ 1 - \frac{y_*}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2}(x - 10)\right), & \text{при } x \in [8, 12], \\ 1, & \text{при } x > 12. \end{cases} \quad (8.73)$$

Наибольшее возвышение дна в точке $x_* = 10$ положим равным

$$y_* = 1 - \left(\frac{3}{\sqrt[3]{32}} - \frac{1}{8}\right) \approx 0,1800592126.$$

На рис. 30 изображено поведение функции $F(M)$ при фиксированном значении $x = x_*$ и различных значениях M_0 . Видно, что для значений $M_0 < 0,5$ уравнение (8.72) имеет два положительных корня, один меньше единицы, другой – больше. Первый корень соответствует докритическому течению, второй – сверхкритическому. При $M_0 = 0,5$ уравнение (8.72) имеет один корень $M = 1$. В этом случае скорость течения над возвышением становится критической. При $M_0 > 0,5$ уравнение (8.72) не имеет положительных корней, что интерпретируется как невозможность стационарного течения с заданными на входе числом Фруда $M_0 > 0,5$ и полной глубиной $H_0 = 1$.

Пусть $M_0 < 0,5$, т. е. на неровность дна набегаёт поток с докритической скоростью. Число Фруда начинает возрастать над возвышением дна, но остаётся меньше единицы для значений $x < x_*$. В точке $x = x_*$

достигается наибольшее значение числа Фруда, причем для заданного значения $M_0 < 0,5$ получается значение $M(x_*) < 1$. Правее точки $x = x_*$ докритический поток начинает замедляться, и число Фруда убывает вместе с ростом глубины дна. Таким образом, в рассматриваемом случае поток всюду является докритическим, поэтому при вычислении точного решения по формулам (8.71), (8.70) следует использовать тот корень уравнения (8.72), который меньше единицы. Из рис. 31, а видно, что при докритических скоростях потока полная глубина принимает свое минимальное значение над вершиной возвышения дна.

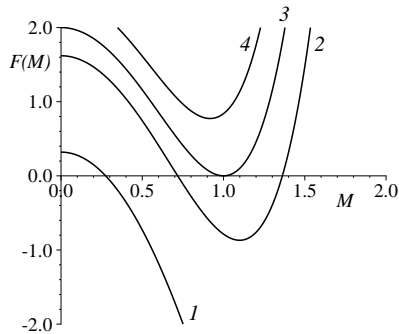


Рис. 30. График функции $F(M)$ при $M_0 = 0,2$ (1); $0,45$ (2); $0,5$ (3); $0,55$ (4)

Если задано $M_0 = 0,5$, то над вершиной возвышения достигается критическая скорость, и значение $M(x_*) = 1$. Тогда правее вершины возвышения жидкость продолжает разгоняться, а число Фруда – расти, принимая значения, большие единицы. Таким образом, при $x > x_*$ течение жидкости становится сверхкритическим. В этом случае точное решение вычисляется по тем же формулам (8.71), (8.70), но с использованием при $x > x_*$ корня уравнения (8.72), большего единицы. В отличие от докритических течений, теперь полная глубина над неровной частью дна при $x > x_*$ уменьшается вместе с ростом глубины дна (рис. 31, б). Правее неровности, там где дно является горизонтальным, полная глубина постоянна и принимает значение $H_\infty \approx 0,4215352$.

Отметим, что в случае $M_0 = 0,5$, когда над вершиной возвышения дна происходит переход от докритического течения к сверхкритическому, кроме непрерывного решения стационарной задачи может существо-

вать и разрывное решение: до некоторой точки $x_{\text{jump}} > x_*$ решение совпадает с приведенным выше, а в точке $x = x_{\text{jump}}$ сверхкритический поток скачком переходит в докритический – образуется гидравлический прыжок с меньшей глубины H_1 на большую H_2 (рис. 32). В примере 8.3 было показано, что если слева от гидравлического прыжка параметры жидкости $H_1 > 0$, $u_1 > 0$ известны, то справа от него они определяются по формулам (8.53), (8.52).

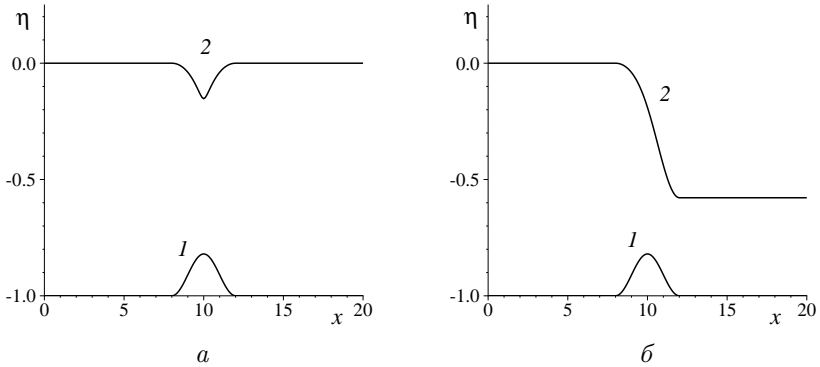


Рис. 31. Графики функций: 1 – профиль дна; 2 – профиль свободной границы η при числе Фруда M_0 , равном 0.495 (а) и 0.5 (б)

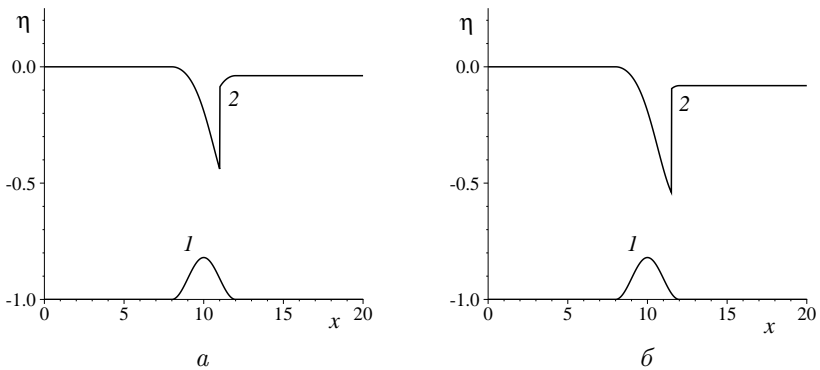


Рис. 32. Графики функций: 1 – профиль дна; 2 – профиль свободной границы η . а – $x_{\text{jump}} = 11$; б – $x_{\text{jump}} = 11,5$

Итак, для поиска разрывного решения при значении $M_0 = 0,5$ поступаем так. Точное решение в точках $x < x_* = 10$ вычисляется по формулам (8.71), (8.70), при этом используется корень уравнения (8.72) меньше единицы. В критической точке $x_* = 10$ число Фруда M становится равным единице. При $x > x_*$ течение жидкости является сверхкритическим до гидравлического прыжка, и при вычислении точного решения берется корень уравнения (8.72) больше единицы. Тем самым слева от точки x_{jump} будут известны параметры жидкости u_1 и H_1 . Далее по формулам (8.53), (8.52) находятся полная глубина H_2 , скорость u_2 и вычисляется число Фруда $M_2 = u_2/\sqrt{H_2} < 1$ за гидравлическим прыжком. После этого рассчитываются параметры докритического течения жидкости справа от точки x_{jump} . Для этого при каждом $x \in (x_{\text{jump}}, l]$ вначале находится корень $M < 1$ уравнения (8.72), в котором вместо M_0 и h_0 следует подставить найденные значения M_2 и $h(x_{\text{jump}})$. Затем по формуле (8.71), в которой величины H_0 и M_0 следует заменить на H_2 и M_2 соответственно, вычисляется полная глубина. И, наконец, по формуле (8.70) определяется скорость докритического течения. Графики полученного решения для свободной границы изображены на рис. 32. Например, в случае, когда гидравлический прыжок расположен в точке $x_{\text{jump}} = 11$, полная глубина правее неровности дна принимает постоянное значение $H_\infty = 0,9618810$, а при $x_{\text{jump}} = 11,5 - H_\infty = 0,9190666$.

Полученные точные решения стационарной задачи не зависят от времени, тем не менее, они могут использоваться при тестировании численных алгоритмов, предназначенных для численного решения нестационарной системы уравнений (8.1). Для этого надо задать некоторые начальные данные и решать задачу для уравнений (8.1) методом установления, т. е. искать предельное во времени решение нестационарной разностной задачи.

8.6. Схема предиктор-корректор для линейных уравнений мелкой воды с правой частью. В предыдущих параграфах мы уже видели, что из схемы предиктор-корректор при задании того или иного значения схемного параметра θ могут быть получены противопоточная и другие явные схемы, которые тем самым можно рассматривать как частный случай схемы предиктор-корректор. Эту более общую схему мы и выпишем для нелинейных уравнений (8.1), взяв за основу схему (7.53), (7.49), построенную для линейных уравнений мелкой воды. Однако система уравнений (7.3), полученная в предположении посто-

янной глубины дна ($h(x) \equiv h_0 = \text{const}$), является, в отличие от (8.1), однородной, поэтому прямой перенос схемы (7.53), (7.49) на нелинейные уравнения (8.1), описывающие течение жидкости над неровным дном, невозможен. Следовательно, необходимо предварительно обобщить эту схему на случай системы линейных уравнений с ненулевой правой частью \mathbf{G} .

Итак, пусть дно неровное и функция, описывающая его форму, представляется в виде $h(x) = h_0 + b(x)$, где $b(x)$ – малая добавка. Линеаризуем систему уравнений (8.1), используя тот же прием, что и в § 7. В результате вместо системы (7.3) получаем неоднородную систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{G} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 h_x \end{pmatrix}, \quad (8.74)$$

в которой векторы \mathbf{u} и \mathbf{f} заданы прежними выражениями (7.5), а полная глубина определяется как функция $H(x, t) = \eta(x, t) + h(x)$.

Для неоднородной системы (8.74) аналогом уравнения (7.14) будет неоднородное уравнение

$$\mathcal{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda \mathcal{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathcal{L} \mathbf{G}, \quad (8.75)$$

поэтому система разностных уравнений (7.42) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}_{j+1/2}^n \right)^{-1} \frac{\mathbf{s}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{j+1}^n + \mathbf{s}_j^n)}{\tau/2} + \Lambda \mathbf{s}_{x,j+1/2}^n &= \mathcal{L} \mathbf{G}_{j+1/2}, \\ \frac{\mathbf{s}_j^{n+1} - \mathbf{s}_j^n}{\tau} + \Lambda \frac{\mathbf{s}_{j+1/2}^* - \mathbf{s}_{j-1/2}^*}{h} &= \mathcal{L} \mathbf{G}_j, \end{aligned} \quad (8.76)$$

где

$$\mathbf{G}_{j+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 h_{x,j+1/2} \end{pmatrix}, \quad h_{x,j+1/2} = \frac{h(x_{j+1}) - h(x_j)}{h}, \quad (8.77)$$

$$\mathbf{G}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 h_{x,j} \end{pmatrix}, \quad h_{x,j} = \frac{h(x_{j+1}) - h(x_{j-1})}{2h}. \quad (8.78)$$

Далее уравнения (8.76) преобразуются точно так же, как уравнения (7.42). В результате вместо уравнения (7.45) получаем

$$\frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{R} \mathcal{D}_{j+1/2}^n \left(\Lambda \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n - \mathcal{L} \mathbf{G}_{j+1/2} \right) = 0, \quad (8.79)$$

уравнение (7.49) модифицируется к виду

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \mathbf{f}_{j-1/2}^*}{h} = \mathbf{G}_j, \quad (8.80)$$

а из уравнения (8.79), после умножения его слева на матрицу \mathcal{A}_0 , получается аналог уравнения (7.53):

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{R}\mathcal{D}_{j+1/2}^n \Lambda \mathcal{L} \left(\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{j+1/2} \right) = 0. \quad (8.81)$$

Это уравнение аппроксимирует уравнение для вектора потоков

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathcal{A}_0 \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \mathbf{G} \right) = 0. \quad (8.82)$$

Итак, для неоднородной системы линейных уравнений (8.74) построена схема предиктор-корректор (8.81), (8.80), которая при $\mathbf{G} \equiv 0$ совпадает с описанной в § 7 схемой (7.53), (7.49).

8.7. Схема предиктор-корректор для нелинейных уравнений мелкой воды является обобщением схемы (8.81), (8.80). На первом шаге схемы вычисляется вектор потоков $\mathbf{f}_{j+1/2}^*$ с помощью разностного уравнения, аппроксимирующего дифференциальное уравнение для вектора \mathbf{f}

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathcal{A} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - \mathbf{G} \right) = 0. \quad (8.83)$$

Уравнение (8.83) получено в результате умножения уравнения (8.1) слева на матрицу \mathcal{A} . Видим, что линейным аналогом уравнения (8.83) является уравнение (8.82), поэтому в качестве «предикторного» уравнения естественно взять следующий аналог линейного разностного уравнения (8.81):

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \left(\mathcal{R}\mathcal{D}\Lambda\mathcal{L} \right)_{j+1/2}^n \left(\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{j+1/2}^n \right) = 0, \quad (8.84)$$

где

$$\mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n), \quad \mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = \frac{\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_j^n}{h}, \quad (8.85)$$

$$\mathbf{G}_{j+1/2}^n = \left(\begin{array}{c} 0 \\ H_{j+1/2}^n h_{x,j+1/2} \end{array} \right), \quad (8.86)$$

$$H_{j+1/2}^n = \frac{H_j^n + H_{j+1}^n}{2}, \quad h_{x,j+1/2} = \frac{h(x_{j+1}) - h(x_j)}{h}, \quad (8.87)$$

строками матрицы $\mathcal{L}_{j+1/2}^n$ являются левые собственные векторы $l_{k,j+1/2}^n$ ($k = 1, 2$) матрицы $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$, соответствующие ее собственным значениям $\lambda_{k,j+1/2}^n$, столбцами матрицы $\mathcal{R}_{j+1/2}^n$ служат правые собственные векторы $r_{k,j+1/2}^n$ матрицы $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$,

$$\Lambda_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} \lambda_{1,j+1/2}^n & 0 \\ 0 & \lambda_{2,j+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad (8.88)$$

матрица $\mathcal{D}_{j+1/2}^n$ определена формулой (7.43), при этом ее элементы $\theta_{j+1/2}^k$ задаются по формуле (7.39), в которой $\sigma_k = \text{sgn}(\lambda_{k,j+1/2}^n)$,

$$\tilde{g}_{j+1/2}^k = \left[|\lambda_k| (1 - \varepsilon |\lambda_k|) p_k \right]_{j+1/2}^n, \quad \theta_0^k = \frac{1}{\varepsilon |\lambda_{k,j+1/2}^n|} - 1, \quad (8.89)$$

$p_{k,j+1/2}^n$ – компоненты вектора $\mathbf{P}_{j+1/2}^n = \mathcal{L}_{j+1/2}^n \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n$.

Матрица $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$ аппроксимирует матрицу Якоби (8.4) в центре ячейки $x_{j+1/2}$. Для исходной матрицы \mathcal{A} выполняется равенство

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}. \quad (8.90)$$

Оказывается, что матрицу $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$ можно выбрать так, чтобы равенство вида (8.90) выполнялось и для сеточных функций.

Лемма 8.1. Пусть матрица $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$ задана формулой

$$\mathcal{A}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_j^n u_{j+1}^n + H_{j+1/2}^n & 2u_{j+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad (8.91)$$

где

$$u_{j+1/2}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}, \quad H_{j+1/2}^n = \frac{H_j^n + H_{j+1}^n}{2}.$$

Тогда выполняется равенство

$$\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = \mathcal{A}_{j+1/2}^n \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n. \quad (8.92)$$

Доказательство. Справедливость формулы (8.92) устанавливается непосредственным умножением матрицы (8.91) на разностную производную

$$\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n}{h} \quad (8.93)$$

и использованием выражений (8.2) для векторов \mathbf{u} и \mathbf{f} . \blacksquare

Собственные значения матрицы $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$ вычисляются по формулам

$$\lambda_{1,j+1/2}^n = (u - c)_{j+1/2}^n, \quad \lambda_{2,j+1/2}^n = (u + c)_{j+1/2}^n, \quad (8.94)$$

где

$$c_{j+1/2}^n = \sqrt{\left(u_{j+1/2}^n\right)^2 - u_j^n u_{j+1}^n + H_{j+1/2}^n}. \quad (8.95)$$

Векторы

$$\mathbf{r}_{1,j+1/2}^n = -\frac{c_{j+1/2}^n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,j+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{2,j+1/2}^n = \frac{c_{j+1/2}^n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,j+1/2}^n \end{pmatrix}$$

являются правыми собственными векторами матрицы $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$, соответствующими ее собственным значениям (8.94), а векторы

$$\mathbf{l}_{1,j+1/2}^n = \frac{1}{(c_{j+1/2}^n)^2} \begin{pmatrix} -\lambda_{2,j+1/2}^n \\ 1 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{l}_{2,j+1/2}^n = \frac{1}{(c_{j+1/2}^n)^2} \begin{pmatrix} -\lambda_{1,j+1/2}^n \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

– левыми, при этом

$$\mathbf{l}_k \cdot \mathbf{r}_m = \delta_{k,m}, \quad k, m = 1, 2, \quad (8.96)$$

где $\delta_{k,m}$ – символы Кронекера. Таким образом, матрицы $\mathcal{L}_{j+1/2}^n$ и $\mathcal{R}_{j+1/2}^n$, составленные из этих векторов, запишутся как

$$\mathcal{L}_{j+1/2}^n = \frac{1}{(c_{j+1/2}^n)^2} \begin{pmatrix} -\lambda_{2,j+1/2}^n & 1 \\ -\lambda_{1,j+1/2}^n & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.97)$$

$$\mathcal{R}_{j+1/2}^n = \frac{c_{j+1/2}^n}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda_{1,j+1/2}^n & \lambda_{2,j+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad (8.98)$$

и для них будут выполняться аналоги равенств (7.11)–(7.13):

$$(\mathcal{LR})_{j+1/2}^n = \mathcal{E}, \quad (\mathcal{LAR})_{j+1/2}^n = \Lambda_{j+1/2}^n, \quad \mathcal{A}_{j+1/2}^n = (\mathcal{R}\Lambda\mathcal{L})_{j+1/2}^n. \quad (8.99)$$

С учетом этих равенств и выражения (8.92) уравнение шага предиктор (8.84) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + (\mathcal{RD}\Lambda)_{j+1/2}^n (\Lambda\mathcal{L}\mathbf{u}_x - \mathcal{L}\mathbf{G})_{j+1/2}^n = 0. \quad (8.100)$$

На шаге корректор находятся величины \mathbf{u}_j^{n+1} на $(n+1)$ -м слое по времени. Для этого используется аппроксимация дивергентной системы (8.1), аналогичная аппроксимации (8.80),

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \mathbf{f}_{j-1/2}^*}{h} = \mathbf{G}_j^*, \quad (8.101)$$

где

$$\mathbf{G}_j^* = \begin{pmatrix} 0 \\ H_j^* h_{x,j} \end{pmatrix}, \quad h_{x,j} = \frac{h(x_{j+1}) - h(x_{j-1}))}{2h}, \quad (8.102)$$

h – шаг равномерной сетки, $h(x)$ – функция, описывающая дно бассейна.

Заметим, что для реализации шага корректор (8.101) требуются потоки $\mathbf{f}_{j+1/2}^*$ и «предикторные» величины H_j^* , определенные в целых узлах. Потоки определяются из уравнения (8.100), а для вычисления величин H_j^* разностного уравнения пока нет. Получим его на основе аппроксимации недивергентной системы (8.3) с помощью разностного уравнения, аналогичного линейному уравнению (8.79) в целых узлах:

$$\frac{\mathbf{u}_j^* - \overline{\mathbf{u}}_j^n}{\tau/2} + \left(\mathcal{RD}(\Lambda\mathcal{L}\mathbf{u}_x - \mathcal{L}\overline{\mathbf{G}}) \right)_j^n = 0, \quad (8.103)$$

где

$$\overline{\mathbf{u}}_j^n = \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n + \mathbf{u}_{j-1}^n}{2}, \quad \mathbf{u}_{x,j}^n = \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{2h}, \quad (8.104)$$

матрицы \mathcal{L} , \mathcal{R} , Λ определяются формулами (8.97), (8.98), (8.88), но вычисляются в рассматриваемом случае в целых узлах с использованием собственных значений

$$\lambda_{1,j}^n = (\overline{u} - c)_j^n, \quad \lambda_{2,j}^n = (\overline{u} + c)_j^n, \quad c_j^n = \sqrt{(\overline{u}_j^n)^2 - u_{j+1}^n u_{j-1}^n + \overline{H}_j^n}$$

матрицы

$$\mathcal{A}_j^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_{j-1}^n u_{j+1}^n + \overline{H}_j^n & 2\overline{u}_j^n \end{pmatrix},$$

аппроксимирующей в целых узлах матрицу (8.4),

$$\overline{\mathcal{G}}_j^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{H}_j^n h_{x,j} \end{pmatrix}. \quad (8.105)$$

Предикторная величина \mathbf{u}_j^* входит только в источникный член \mathbf{G}_j^* шага корректор (8.101). Точнее, в источникном члене используется только первая компонента вектора \mathbf{u}_j^* , которая определяется на основе первого разностного уравнения системы (8.103)

$$\begin{aligned} \frac{H_j^* - \overline{H}_j^n}{\tau/2} + \left[\frac{1 + \theta^1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_1 \lambda_2 H_x - \lambda_1 (Hu)_x + \overline{H} h_x \right) - \right. \\ \left. - \frac{1 + \theta^2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_1 \lambda_2 H_x - \lambda_2 (Hu)_x + \overline{H} h_x \right) \right]_j^n = 0, \end{aligned} \quad (8.106)$$

где при вычислении всех разностных производных используются центральные разности (8.104) и (8.102), а для вычисления функций θ_j^k применяется формула (7.39), в которой индекс $j + 1/2$ заменяется на целый индекс j и используются компоненты вектора $\mathbf{P}_j^n = (\mathcal{L}\mathbf{u}_x)_j^n$.

Отметим некоторые свойства полученной схемы. Легко проверить, что уравнения (8.1) сохраняют состояние покоя жидкости, т. е. если в начальный момент времени заданы условия

$$\eta(x, 0) \equiv 0, \quad u(x, 0) \equiv 0, \quad (8.107)$$

то система уравнений (8.1) имеет решение

$$H(x, t) = h(x), \quad u(x, t) \equiv 0, \quad (8.108)$$

соответствующее при $t > 0$ покою жидкости с невозмущенной свободной границей $\eta(x, t) \equiv 0$. Желательно, чтобы этим свойством обладала и разностная схема для нелинейных уравнений мелкой воды.

Теорема 8.1. Пусть

$$\eta_j^n \equiv 0, \quad u_j^n \equiv 0. \quad (8.109)$$

Тогда при использовании схемы (8.100), (8.101), (8.106) состояние по-
кой жидкости сохранится и на $(n+1)$ -м слое по времени:

$$\eta_j^{n+1} \equiv 0, \quad u_j^{n+1} \equiv 0. \quad (8.110)$$

До к а з а т е л ь с т в о. Используя выражения (8.86), (8.88), (8.97),
получаем равенства

$$(\mathcal{L}\mathbf{G})_{j+1/2}^n = \left[\frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} Hh_x \\ Hh_x \end{pmatrix} \right]_{j+1/2}^n, \quad (8.111)$$

$$(\Lambda\mathcal{L}\mathbf{u}_x)_{j+1/2}^n = \left[\frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} -\lambda_1\lambda_2 H_x + \lambda_1(Hu)_x \\ -\lambda_1\lambda_2 H_x + \lambda_2(Hu)_x \end{pmatrix} \right]_{j+1/2}^n. \quad (8.112)$$

С учетом условий (8.109) и определения (8.95) получаем, что

$$H_{x,j+1/2}^n = h_{x,j+1/2}, \quad (Hu)_{x,j+1/2}^n \equiv 0,$$

$$H_{j+1/2}^n = h_{j+1/2} = \frac{h(x_j) + h(x_{j+1})}{2},$$

$$(\lambda_1\lambda_2)_{j+1/2}^n = -\left(c_{j+1/2}^n\right)^2 = -h_{j+1/2},$$

поэтому

$$(\Lambda\mathcal{L}\mathbf{u}_x - \mathcal{L}\mathbf{G})_{j+1/2}^n \equiv 0. \quad (8.113)$$

Тогда из уравнения (8.100) следует, что

$$\mathbf{f}_{j+1/2}^* = \frac{\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h^2(x_j) + h^2(x_{j+1})}{4} \end{pmatrix}. \quad (8.114)$$

Из второго «предикторного» уравнения (8.106) также получаем ра-
венство

$$H_j^* = \frac{H_{j+1}^n + H_{j-1}^n}{2} = \frac{h(x_{j+1}) + h(x_{j-1})}{2}. \quad (8.115)$$

Подставляя найденные величины (8.114), (8.115) в уравнение шага кор-
ректор (8.101), получаем равенство $\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n$, из которого следует, что
 $H_j^{n+1} = H_j^n$, $u_j^{n+1} = u_j^n$, т. е. справедливость утверждения (8.110). ■

В примере 8.3 было показано, что если при $t = 0$ заданы начальные данные (8.20), соответствующие гидравлическому прыжку (8.51)–(8.53), то задача Коши (8.1), (8.20) имеет решение, описываемое формулой (8.54), согласно которой гидравлический прыжок сохраняет свое положение при $t > 0$, т. е. $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(x, 0)$. Оказывается, что в случае постоянной глубины бассейна схема предиктор-корректор также сохраняет начальный гидравлический прыжок.

Теорема 8.2. Пусть дно горизонтальное ($\mathbf{G} \equiv 0$) и

$$u_j^n = \begin{cases} u_1, & j \leq j_0, \\ u_2, & j > j_0, \end{cases} \quad H_j^n = \begin{cases} H_1, & j \leq j_0, \\ H_2, & j > j_0, \end{cases} \quad (8.116)$$

где величины u_1 , u_2 , H_1 , H_2 удовлетворяют соотношениям (8.51)–(8.53) на гидравлическом прыжке. Тогда во всех узлах $\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n$, т. е. схема (8.100), (8.101), (8.106) сохраняет гидравлический прыжок.

Доказательство. Пусть $j = j_0$. Согласно формулам (8.94), (8.95), для собственного значения $\lambda_{1,j_0+1/2}^n$ имеем выражение

$$\lambda_{1,j_0+1/2}^n = \frac{u_1 + u_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)^2 - u_1 u_2 + \frac{H_1 + H_2}{2}}. \quad (8.117)$$

Учитывая соотношения (8.52), (8.53), получаем, что

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &= u_1^2 \frac{H_1}{H_2} = u_1^2 \frac{2H_1}{\sqrt{H_1^2 + 8H_1 u_1^2} - H_1} = 2u_1^2 H_1 \frac{\sqrt{H_1^2 + 8H_1 u_1^2} + H_1}{8H_1 u_1^2} = \\ &= \frac{H_1 + H_2}{2}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\lambda_{1,j_0+1/2}^n = 0. \quad (8.118)$$

Тогда из формулы (8.112) следует, что

$$(\Lambda \mathcal{L} \mathbf{u}_x)_{j_0+1/2}^n = \left[\frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2(Hu)_x \end{pmatrix} \right]_{j_0+1/2}^n.$$

Кроме того, в силу равенства (8.52), имеющего место на гидравлическом прыжке, получаем

$$(Hu)_{x,j_0+1/2}^n = \frac{H_2 u_2 - H_1 u_1}{h} = 0,$$

поэтому $(\Lambda \mathcal{L} \mathbf{u}_x)_{j_0+1/2}^n = 0$.

Очевидно, что $\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0$ для всех $j \neq j_0$. Это равенство является следствием условий (8.116). Таким образом, при всех j будет выполняться равенство

$$(\Lambda \mathcal{L} \mathbf{u}_x)_{j+1/2}^n = 0. \quad (8.119)$$

Тогда из уравнения шага предиктор (8.100) следует, что при всех j вектор потоков вычисляется по одной и той же формуле

$$\mathbf{f}_{j+1/2}^* = \frac{\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n}{2},$$

вследствие чего уравнение шага корректор (8.101) запишется как

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left(\frac{\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n}{2} - \frac{\mathbf{f}_j^n + \mathbf{f}_{j-1}^n}{2} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n + \mathbf{f}_{x,j-1/2}^n \right) = 0.$$

В силу равенств (8.92), (8.99), (8.119) имеем

$$\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = \mathcal{A}_{j+1/2}^n \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = (\mathcal{R} \Lambda \mathcal{L})_{j+1/2}^n \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n = 0,$$

поэтому $\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n$, т. е. гидравлический прыжок действительно остается на месте и не «размазывается» схемой предиктор-корректор. ■

Замечание. При доказательстве теорем 8.1 и 8.2 мы не использовали конкретный вид функций θ^k ($k = 1, 2$). Это означает, что теоремы верны для произвольных схемных параметров θ^k .

8.8. Схема Лакса – Вендроффа является частным случаем описанной выше схемы предиктор-корректор и получается из последней при $\theta^k \equiv 0$ ($k = 1, 2$). Таким образом, в схеме Лакса – Вендроффа «предикторные» величины будут вычисляться с помощью разностных уравнений (8.84), (8.106), в которых следует положить $\mathcal{D} = \mathcal{E}$, $\theta^k = 0$:

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{A}_{j+1/2}^n \left(\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{j+1/2}^n \right) = 0, \quad (8.120)$$

$$\frac{H_j^* - \frac{1}{2}(H_{j-1}^n + H_{j+1}^n)}{\tau/2} + \frac{H_{j+1}^n - H_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (8.121)$$

Эти величины используются затем в уравнении второго шага (8.101).

Согласно замечанию, приведенному в предыдущем пункте, схема Лакса – Вендроффа сохраняет гидравлический прыжок при $h(x) = \text{const}$ и сохраняет состояние покоя жидкости при любом профиле дна. Однако, как и в случае системы линейных уравнений мелкой воды, она не сохраняет монотонность численного решения. На рис. 33 изображены графики (штриховые линии) точного решения задачи о прорыве плотины (см. формулы (8.63), (8.64)). Все входные параметры взяты такими же, как в линейной задаче о прорыве плотины (см. пп. 7.4). На рис. 33, *a* показан профиль свободной границы (сплошная линия), полученный с помощью схемы Лакса – Вендроффа. Видно, что в численном решении возникают осцилляции за фронтом бора, а также перед волной понижения. Напротив, схема предиктор-корректор (8.100), (8.101), (8.106) с переменными параметрами θ^k дает решение без «паразитических» осцилляций (см. сплошную линию на рис. 33, *б*).

8.9. Противопоточная схема. Естественным обобщением противопоточной схемы (7.23), аппроксимирующей линейные уравнения мелкой воды, могла бы стать в нелинейном случае следующая схема:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + (\mathcal{A}^+ u_x)_{j-1/2}^n + (\mathcal{A}^- u_x)_{j+1/2}^n = G_j^n. \quad (8.122)$$

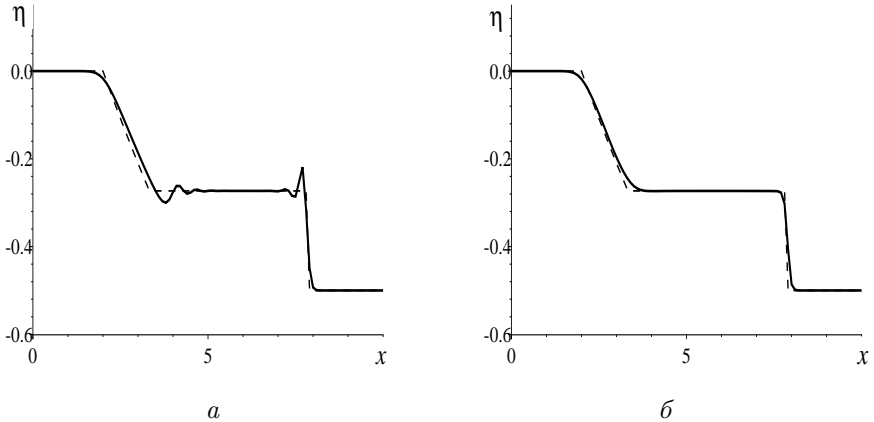


Рис. 33. Графики свободной границы при $\theta^k = 0$ (*a*) и при задании функций θ^k по формуле (7.39) (*б*). $x_0 = 5$, $H_1 = 1$, $H_2 = 0,5$, $t = 3$, $N = 100$

Здесь, в отличие от схемы (7.23), матрицы \mathcal{A}^\pm уже не являются постоянными, однако определяются они аналогично прежним формулам (7.21):

$$(\mathcal{A}^\pm)_{j+1/2}^n = (\mathcal{R}\Lambda^\pm\mathcal{L})_{j+1/2}^n, \quad (8.123)$$

при этом диагональные матрицы Λ^\pm являются аналогами матриц (7.20)

$$(\Lambda^\pm)_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} (\lambda_1^\pm)_{j+1/2}^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2^\pm)_{j+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad (8.124)$$

где

$$(\lambda_k^\pm)_{j+1/2}^n = \frac{\lambda_{k,j+1/2}^n \pm |\lambda_{k,j+1/2}^n|}{2}, \quad k = 1, 2, \quad (8.125)$$

$\lambda_{k,j+1/2}^n$ – собственные числа (8.94) матрицы $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$.

Осталось указать, как выбирается правая часть уравнения (8.122). Возьмем ее, например, в следующем виде:

$$\mathbf{G}_j^n = \begin{pmatrix} 0 \\ H_j^n h_{x,j} \end{pmatrix}, \quad h_{x,j} = \frac{h(x_{j+1}) - h(x_{j-1}))}{2h}. \quad (8.126)$$

Но оказывается, что схема (8.122), (8.126) не будет сохранять состояние покоя жидкости (см. задачу 8.1). Следовательно, вектор \mathbf{G}_j^n необходимо задать каким-то другим образом.

Получим теперь противопоточную схему способом, который мы уже неоднократно применяли ранее. В схеме предиктор-корректор параметры θ^k положим равными величинам θ_0^k из формулы (8.89). Тогда получаем, что

$$\mathcal{D}\Lambda = \frac{1}{\varkappa}\Sigma, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}\Lambda^2 = \frac{1}{\varkappa} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix} = \frac{1}{\varkappa} (\Lambda^+ - \Lambda^-), \quad \mathcal{R}\mathcal{D}\Lambda^2\mathcal{L} = \frac{h}{\tau} (\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^-),$$

где для краткости индексы n и $j+1/2$ опущены, $\sigma_k = \text{sgn}(\lambda_k)$, а матрицы Λ^\pm определены по формулам (8.123).

С учетом приведенных выражений, из «предикторного» уравнения (8.100) получаем

$$\mathbf{f}_{j+1/2}^* = \frac{1}{2} \left[\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n - (\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^-)_{j+1/2}^n (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n) + h (\mathcal{R}\Sigma\mathcal{L}\mathbf{G})_{j+1/2}^n \right].$$

Тогда шаг корректор (8.101) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{1}{2h} \left[\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n - (\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^-)_{j+1/2}^n (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n) + \right. \\ & \left. + h(\mathcal{R}\Sigma\mathcal{L}\mathcal{G})_{j+1/2}^n - (\mathbf{f}_j^n + \mathbf{f}_{j-1}^n) + (\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^-)_{j-1/2}^n (\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_{j-1}^n) - \right. \\ & \left. - h(\mathcal{R}\Sigma\mathcal{L}\mathcal{G})_{j-1/2}^n \right] = \mathbf{G}_j^*. \end{aligned}$$

Используя равенство (8.92) и представление $\mathcal{A} = \mathcal{A}^- + \mathcal{A}^+$, получаем окончательный вид противопоточной схемы

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + (\mathcal{A}^+ \mathbf{u}_x)_{j-1/2}^n + (\mathcal{A}^- \mathbf{u}_x)_{j+1/2}^n = \\ & = \mathbf{G}_j^* - \frac{1}{2} \left[(\mathcal{R}\Sigma\mathcal{L}\mathcal{G})_{j+1/2}^n - (\mathcal{R}\Sigma\mathcal{L}\mathcal{G})_{j-1/2}^n \right], \end{aligned} \tag{8.127}$$

где векторы $\mathbf{G}_{j\pm 1/2}^n$ и \mathbf{G}_j^* вычисляются по формулам (8.86) и (8.102) соответственно.

Видим, что схемы (8.122) и (8.127) отличаются только правыми частями. Преимуществом схемы (8.127) является то, что она сохраняет состояние покоя жидкости. Это свойство следует из замечания, приведенного в конце пп. 8.7. В справедливости этого свойства можно убедиться и непосредственной проверкой (см. задачу 8.2).

Для ровного дна схемы (8.122) и (8.127) совпадают. Численное решение задачи о прорыве плотины, полученное с помощью противопоточной схемы, не имеет осцилляций, но является более сглаженным, чем при использовании схемы предиктор-корректор.

З А Д А Ч И

8.1. Покажите, что для противопоточной схемы (8.122), (8.126) выполнение условия (8.109) теоремы 8.1 не приводит к выполнению тождеств (8.110).

8.2. Покажите, что для противопоточной схемы (8.127) выполнение условия (8.109) теоремы 8.1 приводит к выполнению тождеств (8.110), т. е. схема (8.127) сохраняет состояние покоя жидкости.

§ 9. Разностные схемы для задач газовой динамики

9.1. Уравнения газовой динамики. Рассмотрим течение идеального (нетеплопроводного и невязкого) газа в предположении, что в некоторой системе координат $Oxyz$ движение газа происходит только вдоль оси Ox и все параметры газа не зависят от других пространственных координат y, z . Система уравнений, описывающая такое «одномерное» течение газа имеет следующий вид [18]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (9.1)$$

Здесь t – время, $\Omega = (0, l)$ – область решения, \mathbf{u} – вектор решения, \mathbf{f} – вектор потоков,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u(E + p/\rho) \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

ρ – плотность газа, u – скорость, p – давление, связанное с температурой и плотностью газа уравнением Клапейрона

$$p = \rho RT, \quad (9.3)$$

R – газовая постоянная, $R = c_p - c_v$, c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, E – удельная полная энергия газа, равная сумме внутренней e и кинетической $u^2/2$ энергий, при этом $e = c_v T$. Используя уравнение Клапейрона (9.3), мы можем выразить внутреннюю энергию через давление и плотность

$$e = c_v T = \frac{c_v p}{\rho R} = \frac{c_v p}{(c_p - c_v)\rho} = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (9.4)$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, $\gamma > 1$. Тогда полная энергия выражается через скорость, давление и плотность по следующей формуле

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{u^2}{2}, \quad (9.5)$$

поэтому

$$E = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{u^2}{2}, \quad (9.6)$$

где c – скорость звука,

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (9.7)$$

Недивергентная форма уравнений (9.1) имеет такой вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0. \quad (9.8)$$

Здесь $\mathcal{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ – матрица Якоби,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma - 3}{2} u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ -\frac{uc^2}{\gamma - 1} + \frac{\gamma - 2}{2} u^3 & \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{3 - 2\gamma}{2} u^2 & \gamma u \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Легко проверить, что она имеет три действительных собственных числа

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad (9.10)$$

которые при условии $c > 0$ являются различными, поэтому при $c > 0$ система уравнений (9.8) является гиперболической.

Отметим, что уравнения (9.1) могут быть записаны и в других недивергентных формах, например, в виде системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \tilde{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0,$$

где

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix},$$

которая в покомпонентном виде выглядит следующим образом:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad (9.11)$$

$$u_t + uu_x + p_x/\rho = 0, \quad (9.12)$$

$$p_t + \gamma p u_x + u p_x = 0. \quad (9.13)$$

Как и в линейном случае, количество краевых условий на концах отрезка $[0, l]$ зависит от количества входящих в область Ω характеристик. Например, если при $x = 0$ скорость положительна, но течение

дозвуковое, т. е. $0 < u < c$, то $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, и, следовательно, две характеристики входят в область Ω через ее левую границу $x = 0$, поэтому на этой границе надо задавать два крайевых условия (например, скорость и давление). Если, например, на правой границе $x = l$ течение сверхзвуковое ($u > c$), то на этой границе все собственные значения положительны, поэтому все характеристики выходят из области, и крайевых условий при $x = l$ задавать в этом случае не надо.

9.2. Характеристическая форма уравнений. Обозначим левые собственные векторы матрицы \mathcal{A} , соответствующие ее собственным значениям (9.10), через \mathbf{l}_k ($k = 1, 2, 3$), правые – \mathbf{r}_k . Составим из этих векторов матрицы \mathcal{L} и \mathcal{R} , аналогичные (8.11):

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} uc + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -c - (\gamma-1)u & \gamma-1 \\ 1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{c^2} & (\gamma-1)\frac{u}{c^2} & -\frac{\gamma-1}{c^2} \\ -uc + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & c - (\gamma-1)u & \gamma-1 \end{pmatrix}, \quad (9.14)$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} & 1 & \frac{1}{2c^2} \\ \frac{u-c}{2c^2} & u & \frac{u+c}{2c^2} \\ \frac{u^2}{4c^2} - \frac{u}{2c} + \frac{1}{2(\gamma-1)} & \frac{u^2}{2} & \frac{u^2}{4c^2} + \frac{u}{2c} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

Легко проверить, что для матриц \mathcal{L} , \mathcal{R} и \mathcal{A} выполняются равенства вида (7.11), (8.12), (8.13):

$$\mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R} = \mathcal{E}, \quad \mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{R} = \Lambda, \quad \mathcal{A} = \mathcal{R}\Lambda\mathcal{L}, \quad (9.16)$$

где Λ – диагональная матрица с элементами λ_k на диагонали.

Умножим систему уравнений (9.8) слева на матрицу \mathcal{L} и учтем равенства (9.16). В результате получим систему уравнений в характеристической форме

$$\mathcal{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda \mathcal{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (9.17)$$

которая в покомпонентном виде выглядит следующим образом:

$$-\rho c u_t + p_t + \lambda_1 (-\rho c u_x + p_x) = 0, \quad (9.18)$$

$$c^2 \rho_t - p_t + \lambda_2 (c^2 \rho_x - p_x) = 0, \quad (9.19)$$

$$\rho c u_t + p_t + \lambda_3 (\rho c u_x + p_x) = 0. \quad (9.20)$$

В случае модели мелкой воды уравнение (9.17) записывалось покомпонентно в виде уравнений (8.15) для инвариантов Римана. Для уравнений газовой динамики такого не получается: левые части уравнений (9.18)–(9.20) не представляют собой полных производных от некоторых функций вдоль характеристик. Однако некоторые течения газа все же описываются уравнениями для инвариантов Римана. Это – класс изэнтропических течений [17, 18].

9.3. Изэнтропические течения характеризуются тем, что энтропия S постоянна всюду в области течения. Тогда из первого начала термодинамики [17]

$$TdS = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

с учетом равенства (9.4) получаем, что

$$\frac{1}{\gamma - 1} d\left(\frac{p}{\rho}\right) + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

или

$$dp - \frac{\gamma p}{\rho} d\rho = 0. \quad (9.21)$$

Таким образом, для изэнтропических течений выполняется равенство

$$dp = c^2 d\rho, \quad (9.22)$$

поэтому

$$p_t = c^2 \rho_t, \quad p_x = c^2 \rho_x \quad (9.23)$$

и уравнение (9.19) превращается в тождество, а уравнения (9.18), (9.20) принимают вид

$$-\rho c u_t + c^2 \rho_t + \lambda_1 (-\rho c u_x + c^2 \rho_x) = 0, \quad (9.24)$$

$$\rho c u_t + c^2 \rho_t + \lambda_3 (\rho c u_x + c^2 \rho_x) = 0. \quad (9.25)$$

Для изэнтропических течений плотность и давление выражаются через скорость звука. В самом деле, из равенства (9.21) следует уравнение

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho},$$

решением которого является функция

$$p = A\rho^\gamma, \quad (9.26)$$

при этом постоянная A определяется из условия

$$p_0 = A\rho_0^\gamma, \quad (9.27)$$

где p_0, ρ_0 – известные значения давления и плотности, заданные в некоторой точке потока. Следовательно,

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma A \rho^{\gamma-1},$$

поэтому

$$\rho = \left(\frac{c^2}{\gamma A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \rho_t = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho}{c} c_t, \quad \rho_x = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho}{c} c_x. \quad (9.28)$$

Подставляя выражения для производных ρ_t, ρ_x в уравнения (9.24), (9.25), записываем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} \left(u - \frac{2}{\gamma-1}c \right)_t + \lambda_1 \left(u - \frac{2}{\gamma-1}c \right)_x &= 0, \\ \left(u + \frac{2}{\gamma-1}c \right)_t + \lambda_3 \left(u + \frac{2}{\gamma-1}c \right)_x &= 0, \end{aligned}$$

или

$$r_t + \lambda_1 r_x = 0, \quad s_t + \lambda_3 s_x = 0, \quad (9.29)$$

где

$$r = u - \frac{2}{\gamma-1}c, \quad s = u + \frac{2}{\gamma-1}c. \quad (9.30)$$

Таким образом, величина r сохраняется на r -характеристике $dx/dt = \lambda_1$, а s – на s -характеристике $dx/dt = \lambda_3$, т. е. величины r и s являются инвариантами Римана. Подчеркнем еще раз, что уравнения газовой динамики нам удалось записать в виде системы уравнений (9.29) для инвариантов Римана в предположении, что течение является изэнтропическим.

Интересно отметить, что в случае $\gamma = 3$ инварианты Римана приобретают особенно простой вид и совпадают с λ_1 и λ_3 соответственно. В случае $\gamma = 2$ инварианты Римана (9.30) для течения идеального газа полностью совпадают с инвариантами Римана (8.14) для течения идеальной несжимаемой жидкости, описываемого в рамках модели мелкой воды. Такое совпадение не случайно. Оно обусловлено тем, что для

изэнтропических течений газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$ уравнения газовой динамики (9.1) совпадают с уравнениями теории мелкой воды (8.1) для ровного дна ($\mathbf{G} \equiv 0$). В самом деле, для изэнтропического течения давление выражается через плотность по формуле (9.26), и уравнение (9.13) совпадает с уравнением неразрывности (9.11), поэтому изэнтропические течения газа описываются системой из двух уравнений, которая при $\gamma = 2$ записывается в виде

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + A\rho^2)_x &= 0.\end{aligned}\tag{9.31}$$

Сравнивая системы (8.1) и (9.31), видим, что они совпадают, при этом в системе (8.1) роль плотности ρ играет полная глубина H , а в качестве постоянной A берется $1/2$. Таким образом, можно сказать, что в случае ровного дна уравнения мелкой воды описывают течение идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$, и для такого течения газа разностные схемы уже построены в § 8. В силу этого, в настоящем параграфе нам только остается обобщить эти схемы на случай неизэнтропического течения газа с произвольным значением показателя адиабаты $\gamma > 1$.

9.4. Волна разрежения. Укажем некоторые точные решения системы (9.1), которые могут оказаться полезными при тестировании численных алгоритмов. Начнем с примера изэнтропического течения, в котором два постоянных потока сопрягаются между собой через централизованную волну разрежения.

Пример 9.1. Пусть в начальный момент времени скорость газа является разрывной в некоторой точке x_0

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ u_2 > 0, & x > x_0 \end{cases}\tag{9.32}$$

и в покоящемся газе (слева от точки x_0) известны давление p_1 и плотность ρ_1 . Тогда непрерывное при $t > 0$ решение можно найти методом характеристик аналогично тому, как это делалось в примере 8.1. Отличие будет заключаться лишь в том, что равенства (8.16) примут для газа вид

$$u = \frac{r + s}{2}, \quad c = (\gamma - 1) \frac{s - r}{4},\tag{9.33}$$

а равенства (8.17) запишутся как

$$\lambda_1 = \frac{(\gamma + 1)r + (3 - \gamma)s}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{(3 - \gamma)r + (\gamma + 1)s}{4}. \quad (9.34)$$

Кроме того, теперь $c_1 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$, и в волне разрежения инварианты принимают значения

$$r(x, t) = \frac{1}{\gamma + 1} \left(4 \frac{x - x_0}{t} - (3 - \gamma)s_1 \right), \quad s(x, t) \equiv s_1 = \frac{2}{\gamma - 1} c_1.$$

В результате, получаем следующее непрерывное при $t > 0$ решение, содержащее r -волну разрежения

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_1(t), \\ \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_1 + \frac{x - x_0}{t} \right), & \text{если } x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ u_2, & \text{если } x \geq x_2(t), \end{cases} \quad (9.35)$$

$$c(x, t) = \begin{cases} c_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}, & \text{если } x \leq x_1(t), \\ \frac{1}{\gamma + 1} \left(2c_1 - (\gamma - 1) \frac{x - x_0}{t} \right), & \text{если } x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ c_2 = c_1 - \frac{\gamma - 1}{2} u_2, & \text{если } x \geq x_2(t), \end{cases} \quad (9.36)$$

где

$$x_1(t) = x_0 - c_1 t, \quad x_2(t) = x_0 + \left(\frac{\gamma + 1}{2} u_2 - c_1 \right) t. \quad (9.37)$$

Плотность и давление определяются по формулам (9.28) и (9.26), в которых постоянная A находится из равенства вида (9.27)

$$p_1 = A \rho_1^\gamma.$$

Таким образом,

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{c}{c_1} \right)^{\frac{2}{\gamma - 1}}, \quad (9.38)$$

$$p = p_1 \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\gamma = \frac{\rho c^2}{\gamma}. \quad (9.39)$$

Как и ожидалось, полученное решение (ρ, u) полностью совпадает при $\gamma = 2$ с решением (H, u) аналогичной задачи для уравнений мелкой

воды (ср. формулу (9.38) с (8.32) и формулу (9.35) с (8.32)). В частности, при $\gamma = 2$ график плотности будет такой же, как изображенный на рис. 28 график полной глубины.

9.5. Течения газа с сильными разрывами. В случае уравнений газовой динамики уравнение сильного разрыва имеет в точности такой же вид (8.40), как для уравнений мелкой воды:

$$(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) D = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_1), \quad (9.40)$$

где \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 значения обобщенного решения слева и справа от линии разрыва, D – скорость движения разрыва. Но теперь векторное уравнение (9.40) содержит три скалярных уравнения сильного разрыва относительно компонент векторов \mathbf{u} и \mathbf{f} :

$$(\rho_2 - \rho_1) D = \rho_2 u_2 - \rho_1 u_1, \quad (9.41)$$

$$(\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1) D = \rho_2 u_2^2 + p_2 - (\rho_1 u_1^2 + p_1), \quad (9.42)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_2 - p_1}{\gamma - 1} + \frac{\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2}{2} \right) D = \\ = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (u_2 p_2 - u_1 p_1) + \frac{\rho_2 u_2^3 - \rho_1 u_1^3}{2}. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Более существенным отличием от уравнений мелкой воды является возможность существования в течениях газа двух разновидностей сильного разрыва. Пусть $u_1 = u_2 = U$, т. е. скорость не претерпевает разрыва при переходе с одной стороны линии разрыва на другую. Если бы плотность также была непрерывна на линии разрыва ($\rho_1 = \rho_2$), то из уравнения (9.42) следовало бы, что $p_2 = p_1$, т. е. все параметры газа были бы непрерывны на линии разрыва, что противоречит определению линии разрыва. Таким образом, $\rho_1 \neq \rho_2$. Тогда из уравнения (9.41) следует, что $D = U$, а из уравнения (9.43) получаем, что $p_1 = p_2$. Итак, возможен разрыв, на котором выполняются условия

$$u_1 = u_2 = D, \quad p_1 = p_2, \quad \rho_1 \neq \rho_2, \quad (9.44)$$

т. е. давление и скорость на нем непрерывны, а разрывной является только плотность газа, при этом скорость движения разрыва совпадает со скоростью газа. В газовой динамике такие разрывы называются *контактными*. Уравнения мелкой воды не допускают подобного типа разрывов (см. формулу (8.43)).

Пусть теперь $u_1 \neq u_2$. Тогда из уравнения (9.41) следует, что $\rho_1 \neq \rho_2$, поэтому скорость такого разрыва определяется формулой, аналогичной (8.44):

$$D = \frac{\rho_2 u_2 - \rho_1 u_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad (9.45)$$

из которой, в частности, вытекает, что

$$u_1 \neq D, \quad u_2 \neq D, \quad (9.46)$$

т. е. газ перетекает через разрыв. В газовой динамике такой сильный разрыв называется *ударной волной*. Он является аналогом бора для уравнений мелкой воды.

Подставив выражение для D в уравнение (9.42), получаем соотношение, связывающее параметры потока по разные стороны от ударной волны:

$$(u_2 - u_1)^2 = (p_2 - p_1) \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2}, \quad (9.47)$$

из которого, в частности, следует, что $p_1 \neq p_2$. Таким образом, на ударной волне все три параметра ρ , u и p изменяются скачком, т. е.

$$\rho_2 \neq \rho_1, \quad u_2 \neq u_1, \quad p_2 \neq p_1. \quad (9.48)$$

Аналогичным свойством характеризуется и бор (см. формулу (8.43)).

Выведем еще одно следствие уравнений сильного разрыва. Из соотношений (9.41), (9.42) получаем, что

$$(u_1 - D)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad (u_2 - D)^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (9.49)$$

Подставив эти выражения в соотношение (9.43), записанное в виде

$$\frac{\gamma p_2}{(\gamma - 1)\rho_2} + \frac{(u_2 - D)^2}{2} = \frac{\gamma p_1}{(\gamma - 1)\rho_1} + \frac{(u_1 - D)^2}{2},$$

получаем следствие уравнений сильного разрыва, в котором участвуют только термодинамические величины:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_2}{(\gamma + 1)\rho_2 - (\gamma - 1)\rho_1} \quad (9.50)$$

или

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1}. \quad (9.51)$$

Для определения обобщенного решения, соответствующего ударной волне, четыре из семи величин ρ_1 , u_1 , p_1 , ρ_2 , u_2 , p_2 , D должны быть заданы. Тогда три оставшиеся определяются из трех уравнений (9.41)–(9.43) или их следствий. Как и для уравнений мелкой воды, необходимо учитывать, что в газовой динамике физический смысл имеют лишь устойчивые разрывные решения [17, 18].

Пример 9.2 (аналог примера 8.2). Пусть справа от некоторой точки x_0 находится покоящийся газ с известными параметрами ρ_2 , p_2 , $u_2 = 0$, а для газа слева от этой точки известно давление $p_1 > p_2$ (рис. 34). Определим остальные параметры газа так, чтобы выполнялись соотношения на ударной волне. Плотность ρ_1 слева от точки x_0 найдем с помощью равенства (9.51):

$$\rho_1 = \rho_2 \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1}. \quad (9.52)$$

Тогда $\rho_1 > \rho_2$. Скорость газа u_1 определим, используя равенство (9.47):

$$u_1 = \sqrt{(p_1 - p_2) \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2}} > 0. \quad (9.53)$$

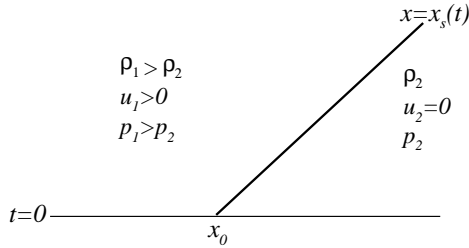


Рис. 34. Параметры газа по разные стороны от ударной волны $x = x_s(t)$, движущейся вправо по покоящемуся газу

Таким образом, если в начальный момент времени задан вектор

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{v}_1 & \text{при } x \leq x_0, \\ \mathbf{v}_2 & \text{при } x > x_0, \end{cases} \quad (9.54)$$

где

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ u_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ u_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad (9.55)$$

то вектор-функция

$$v(x, t) = \begin{cases} v_1 & \text{при } x \leq x_s(t) = x_0 + Dt, \\ v_2 & \text{при } x > x_s(t) \end{cases} \quad (9.56)$$

является обобщенным решением задачи Коши (9.1), (9.54), описывающим движение ударной волны по покоящемуся газу с постоянной скоростью D , определяемой по формуле (9.45):

$$D = \frac{\rho_1 u_1}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (9.57)$$

Пример 9.3 (аналог примера 8.3). Пусть известны параметры газа ρ_1, u_1, p_1 слева от ударной волны, при этом

$$u_1 > c_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}, \quad D = 0, \quad (9.58)$$

т. е. слева от точки x_0 течение является сверхзвуковым, а ударная волна неподвижна (рис. 35). Такая «стоячая» ударная волна называется в газовой динамике *скачком уплотнения*. Она является аналогом гидравлического прыжка. Параметры газа ρ_2, u_2, p_2 справа от скачка уплотнения найдем из соотношений на сильном разрыве, являющимся ударной волной.

Используя равенства (9.49), (9.45) и учитывая условие $D = 0$, получаем

$$\rho_2 \cdot \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \rho_1 u_1^2. \quad (9.59)$$

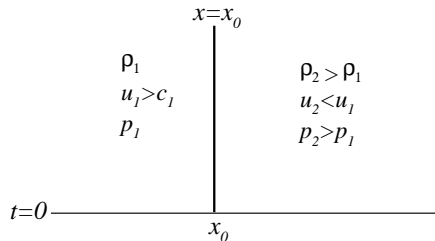


Рис. 35. Параметры газа по разные стороны от скачка уплотнения, через который газ перетекает слева направо

Поскольку из соотношения (9.50) следует, что

$$p_2 - p_1 = p_1 \frac{2\gamma(\rho_2 - \rho_1)}{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_2}, \quad (9.60)$$

то из равенства (9.59) можно найти плотность

$$\rho_2 = \frac{(\gamma + 1)\rho_1 u_1^2}{2c_1^2 + (\gamma - 1)u_1^2} = \rho_1 \cdot \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}, \quad (9.61)$$

где $M_1 = u_1/c_1 > 1$. Нетрудно проверить, что $\rho_2 > \rho_1$. Тогда соотношение (9.45) дает выражение для скорости

$$u_2 = u_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} < u_1, \quad (9.62)$$

а из равенства (9.60) вытекает, что

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} > p_1. \quad (9.63)$$

Легко проверить, что течение газа за скачком уплотнения является дозвуковым, т. е. $M_2 = u_2/c_2 < 1$, где $c_2 = \sqrt{\gamma p_2/\rho_2}$.

Таким образом, обобщенное решение $\mathbf{v}(x, t)$ задачи Коши (9.1), (9.54), в которой компоненты вектора \mathbf{v}_2 определены формулами (9.61)–(9.63), не зависит от времени и совпадает с начальной функцией $\mathbf{v}(x, 0)$. ■

Пример 9.4 (аналог примера 8.4). Пусть в начальный момент времени имеется покоящийся газ с постоянными, но разными значениями давления и плотности по разные стороны от некоторой точки x_0 , т. е.

$$u \Big|_{t=0} \equiv 0, \quad \rho \Big|_{t=0} = \begin{cases} \rho_1, & x \leq x_0, \\ \rho_2, & x > x_0, \end{cases} \quad p \Big|_{t=0} = \begin{cases} p_1, & x \leq x_0, \\ p_2, & x > x_0, \end{cases} \quad (9.64)$$

при этом

$$\rho_1 > \rho_2, \quad p_1 > p_2. \quad (9.65)$$

Требуется определить течение при $t > 0$. В газовой динамике эта задача носит название *задачи о запуске ударной трубы* – экспериментальной установки, в которой при удалении перегородки, удерживавшей газ с высоким давлением, возникает ударная волна, распространяющаяся по газу с низким давлением. Гидродинамическим аналогом этой задачи является рассмотренная в предыдущем параграфе задача о прорыве плотины (см. пример 8.4).

Для начальных данных (9.64), (9.65) необходимые условия существования сильного разрыва (9.44) или (9.48) не выполняются, поэтому начальный разрыв распадется на систему устойчивых разрывов и центрированных волн разрежения. В рассматриваемом случае задача о распаде разрыва имеет решение [18], которое «склеивается» из двух известных решений, полученных в примерах 9.1 и 9.2.

Вправо, по покоящемуся газу с низким давлением, будет двигаться ударная волна, скорость которой определяется формулой (9.57):

$$D = \frac{\rho_{0,2} U_0}{\rho_{0,2} - \rho_2}, \quad (9.66)$$

где $\rho_{0,2}$ и U_0 – плотность и скорость газа слева от ударной волны соответственно (рис. 36). Эти величины, а также давление P_0 слева от ударной волны, подлежат определению. Используя решение, приведенное в примере 9.2, можно выразить скорость U_0 через давление P_0 . В самом деле, из формулы (9.53) следует, что

$$U_0 = \sqrt{(P_0 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_{0,2}} \right)}, \quad (9.67)$$

а формула (9.52) приводит к выражению

$$\rho_{0,2} = \rho_2 \frac{(\gamma + 1)P_0 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)P_0}, \quad (9.68)$$

поэтому

$$U_0 = (P_0 - p_2) \sqrt{\frac{2}{\rho_2 [(\gamma + 1)P_0 + (\gamma - 1)p_2]}}. \quad (9.69)$$

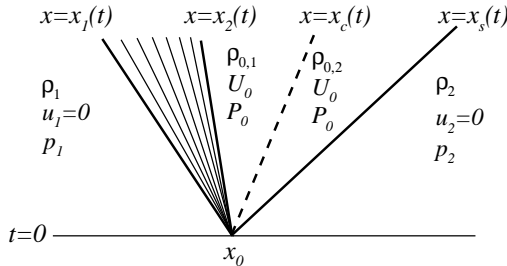


Рис. 36. Схема течения при распаде начального разрыва (9.64), (9.65)

Контактный разрыв движется со скоростью U_0 и разделяет два участка постоянного течения с одинаковыми значениями скорости U_0 и давления P_0 , но разными значениями плотности $\rho_{0,1}$ слева и $\rho_{0,2}$ справа от контактного разрыва.

Участок постоянного течения с параметрами газа $\rho_{0,1}$, U_0 , P_0 примыкает справа к волне разрежения, движение переднего и заднего фронтов которой описывается уравнениями (9.37):

$$x_1(t) = x_0 - c_1 t, \quad x_2(t) = x_0 + \left(\frac{\gamma + 1}{2} U_0 - c_1 \right) t. \quad (9.70)$$

Из формулы (9.36) получаем другое выражение для величины скорости U_0 :

$$U_0 = \frac{2c_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{c_{0,1}}{c_1} \right), \quad (9.71)$$

где

$$c_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}, \quad c_{0,1} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_{0,1}}}.$$

Используя уравнения (9.38), (9.39), получаем, что

$$\frac{c_{0,1}}{c_1} = \left(\frac{\rho_{0,1}}{\rho_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \left(\frac{P_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}},$$

поэтому

$$U_0 = \frac{2c_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{P_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \right). \quad (9.72)$$

Приравнявая правые части равенств (9.69) и (9.72), получаем уравнение

$$f(P) = 0 \quad (9.73)$$

для определения давления P_0 между волной разрежения и ударной волной, где функция f задана следующей формулой:

$$f(P) = (P - p_2) \sqrt{\frac{2}{\rho_2 [(\gamma + 1)P + (\gamma - 1)p_2]}} - \frac{2c_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{P}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \right).$$

Поскольку $f(p_2) < 0$, $f(p_1) > 0$ и функция $f(P)$ монотонно возрастает на отрезке $[p_2, p_1]$, то уравнение (9.73) имеет единственное решение $P_0 \in (p_2, p_1)$.

Найдя P_0 , по формуле (9.72) вычисляем U_0 , используя формулу (9.68), находим $\rho_{0,2}$, из формулы (9.71) определяем $c_{0,1}$ и с учетом формулы (9.38) получаем плотность $\rho_{0,1}$:

$$c_{0,1} = c_1 - \frac{\gamma-1}{2}U_0, \quad \rho_{0,1} = \rho_1 \left(\frac{c_{0,1}}{c_1} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}.$$

Таким образом, решение задачи о распаде начального разрыва (9.64), (9.65) описывается следующими формулами:

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_1, & x \leq x_1(t), \\ \rho_1 \left[\frac{1}{\gamma+1} \left(2 - \frac{\gamma-1}{c_1} \frac{x-x_0}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, & x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ \rho_1 \left(\frac{P_0}{p_1} \right)^{1/\gamma}, & x_2(t) \leq x \leq x_c(t), \\ \frac{(\gamma+1)P_0 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)P_0}, & x_c(t) < x \leq x_s(t), \\ \rho_2, & x > x_s(t), \end{cases} \quad (9.74)$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1(t), \\ \frac{2}{\gamma+1} \left(c_1 + \frac{x-x_0}{t} \right), & x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ \frac{2c_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{P_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right), & x_2(t) \leq x \leq x_s(t), \\ 0, & x > x_s(t), \end{cases} \quad (9.75)$$

$$p(x,t) = \begin{cases} p_1, & x \leq x_1(t), \\ p_1 \left[\frac{1}{\gamma+1} \left(2 - \frac{\gamma-1}{c_1} \frac{x-x_0}{t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, & x_1(t) \leq x \leq x_2(t), \\ P_0, & x_2(t) \leq x \leq x_s(t), \\ p_2, & x > x_s(t), \end{cases} \quad (9.76)$$

при этом границы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ волны разрежения вычисляются по формулам (9.70), а движение контактного разрыва и ударной волны описывается уравнениями

$$x = x_c(t) = x_0 + U_0 t, \quad x = x_s(t) = x_0 + Dt. \quad (9.77)$$

9.6. Схема предиктор-корректор для уравнений газовой динамики. В пп. 9.3 было отмечено, что в случае ровного дна схему предиктор-корректор (8.84), (8.101) для уравнений мелкой воды можно рассматривать как схему для численного решения уравнений газовой динамики (9.1), описывающих течение идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$. Естественно выбрать эту же схему и для расчета течений газа с произвольным значением показателя адиабаты $\gamma > 1$:

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \left(\mathcal{R} \mathcal{D} \Lambda \mathcal{L} \right)_{j+1/2}^n \mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = 0, \quad (9.78)$$

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \mathbf{f}_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad (9.79)$$

где использованы обозначения (8.85), строками матрицы $\mathcal{L}_{j+1/2}^n$ являются левые собственные векторы матрицы $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$, аппроксимирующей матрицу Якоби (9.9), столбцы матрицы $\mathcal{R}_{j+1/2}^n$ составлены из правых собственных векторов, при этом собственные векторы нормируются так, чтобы выполнялись равенства (8.99). Матрицы $\Lambda_{j+1/2}^n$ и $\mathcal{D}_{j+1/2}^n$ определяются так же, как в схеме (8.84), (8.101), аппроксимирующей уравнения мелкой воды, с тем лишь отличием, что теперь это квадратные матрицы размера 3×3 .

Скажем несколько слов об аппроксимации матрицы \mathcal{A} . Если ввести средние величины

$$\bar{u} = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}, \quad \bar{c} = \sqrt{\frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}}}, \quad (9.80)$$

где

$$\bar{p} = \frac{p_j^n + p_{j+1}^n}{2}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_j^n + \rho_{j+1}^n}{2},$$

и использовать их в формуле (9.9) при вычислении матрицы $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$, то при $\theta^k = O(h)$ ($k = 1, 2, 3$) схема (9.78), (9.79) будет иметь второй порядок аппроксимации. Но при этом некоторые важные свойства схемы выполняться, к сожалению, не будут (например, аналог свойства,

отмеченного в теореме 8.2). Поэтому, как и для уравнений мелкой воды, будем аппроксимировать матрицу \mathcal{A} так, чтобы выполнялось равенство (8.92).

Лемма 9.1. Пусть $\mathcal{A}_{j+1/2}^n =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} u_j^n u_{j+1}^n & (3-\gamma)\bar{u} & \gamma-1 \\ -\frac{\bar{u} \bar{c}^2}{\gamma-1} + \frac{\gamma-2}{2} \bar{u} u_j^n u_{j+1}^n & \frac{\bar{c}^2}{\gamma-1} + (2-\gamma)\bar{u}^2 - \frac{u_j^n u_{j+1}^n}{2} & \gamma\bar{u} \end{pmatrix}.$$

Тогда выполняется равенство

$$\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = \mathcal{A}_{j+1/2}^n \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n. \quad (9.81)$$

Доказательство. Справедливость формулы (9.81) устанавливается непосредственной проверкой с использованием выражений (9.2) для векторов \mathbf{u} и \mathbf{f} . \blacksquare

Нетрудно проверить, что собственные значения матрицы $\mathcal{A}_{j+1/2}^n$ вычисляются по формулам

$$\lambda_{1,j+1/2}^n = \bar{u} - c_{j+1/2}^n, \quad \lambda_{2,j+1/2}^n = \bar{u}, \quad \lambda_{3,j+1/2}^n = \bar{u} + c_{j+1/2}^n, \quad (9.82)$$

где

$$c_{j+1/2}^n = \sqrt{\bar{u}^2 - u_j^n u_{j+1}^n + \bar{c}^2}, \quad (9.83)$$

а матрицы $\mathcal{L}_{j+1/2}^n$ и $\mathcal{R}_{j+1/2}^n$, удовлетворяющие условиям (8.99), запишутся как

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{j+1/2}^n = \\ & = \begin{pmatrix} \bar{u} c_{j+1/2}^n + \bar{u}^2 + \frac{\gamma-3}{2} u_j^n u_{j+1}^n & -c_{j+1/2}^n - (\gamma-1)\bar{u} & \gamma-1 \\ \frac{\bar{c}^2}{(c_{j+1/2}^n)^2} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_j^n u_{j+1}^n}{(c_{j+1/2}^n)^2} & (\gamma-1) \frac{\bar{u}}{(c_{j+1/2}^n)^2} & -\frac{\gamma-1}{(c_{j+1/2}^n)^2} \\ -\bar{u} c_{j+1/2}^n + \bar{u}^2 + \frac{\gamma-3}{2} u_j^n u_{j+1}^n & c_{j+1/2}^n - (\gamma-1)\bar{u} & \gamma-1 \end{pmatrix}, \\ & \mathcal{R}_{j+1/2}^n = \left(\mathcal{L}_{j+1/2}^n \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Схема предиктор-корректор сохраняет некоторые важные свойства исходной системы дифференциальных уравнений (9.1).

Теорема 9.1. *Схема (9.78), (9.79) сохраняет постоянное течение, т. е. если $\mathbf{u}^n = \text{const}$, то $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n$.*

Доказательство. Для постоянного течения $\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n \equiv 0$, что с учетом соотношения (9.81) равносильно равенству

$$\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n \equiv 0. \quad (9.84)$$

Тогда из «предикторного» уравнения (9.78) получаем, что

$$\mathbf{f}_{j+1/2}^* = \frac{\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n}{2}, \quad (9.85)$$

поэтому уравнение шага корректор (9.79) примет вид

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n + \mathbf{f}_{x,j-1/2}^n) = 0.$$

Учитывая равенство (9.84), приходим к выводу о том, что $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n$. ■

Теорема 9.2. *Схема (9.78), (9.79) сохраняет скачок уплотнения, т. е. если*

$$\mathbf{v}_j^n = \begin{cases} \mathbf{v}_1 & \text{при } j \leq j_0, \\ \mathbf{v}_2 & \text{при } j > j_0 \end{cases} \quad (9.86)$$

и компоненты векторов (9.55) удовлетворяют соотношениям (9.58), (9.61)–(9.63) на скачке уплотнения, то $\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n$ для любого j .

Доказательство. На произвольном сильном разрыве вида (9.86) выполняются соотношения (9.40), которые можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{f}_{x,j_0+1/2}^n = D\mathbf{u}_{x,j_0+1/2}^n. \quad (9.87)$$

На скачке уплотнения $D = 0$, поэтому $\mathbf{f}_{x,j_0+1/2}^n = 0$. Очевидно, что во всех других узлах $j \neq j_0$ также $\mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = 0$. Таким образом, при всех j будет выполняться равенство (9.84), из которого, как показано при доказательстве теоремы 9.1, и следует справедливость сформулированного утверждения. Следовательно, если начальные данные взяты в виде скачка уплотнения, то при использовании схемы предиктор-корректор скачок не будет «размазываться» на последующих слоях по времени и останется на прежнем месте. ■

Замечание. Равенство (9.87) с учетом свойства (9.84) означает, что на сильном разрыве всегда выполняется соотношение

$$\mathcal{A}_{j_0+1/2}^n \mathbf{u}_{x,j_0+1/2}^n = D \mathbf{u}_{x,j_0+1/2}^n, \quad (9.88)$$

т. е. вектор $\mathbf{u}_{x,j_0+1/2}^n$ является собственным вектором матрицы $\mathcal{A}_{j_0+1/2}^n$, соответствующим одному из ее собственных значений $\lambda_{k,j_0+1/2}^n$ ($k = 1, 2, 3$). Поэтому скорость движения разрыва D совпадает с одним из этих чисел. Например, для скачка уплотнения, рассмотренного в теореме 9.2, $D = \lambda_{1,j_0+1/2}^n$, т. е. $\lambda_{1,j_0+1/2}^n = 0$. В самом деле, согласно формулам (9.80), (9.82), (9.83), имеем выражение

$$\lambda_{1,j_0+1/2}^n = \frac{u_1 + u_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)^2 - u_1 u_2 + \frac{\gamma(p_1 + p_2)}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (9.89)$$

Из формул (9.61), (9.62) следует, что

$$u_1 u_2 = u_1^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} = u_1^2 \rho_1 \frac{2c_1^2 + (\gamma - 1)u_1^2}{(\gamma + 1)\rho_1 u_1^2} = \frac{2c_1^2 + (\gamma - 1)u_1^2}{\gamma + 1}. \quad (9.90)$$

Используя теперь выражения (9.61) и (9.63), получаем

$$\frac{\gamma(p_1 + p_2)}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\gamma p_1 \left(1 + \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2}{\gamma + 1}\right)}{\rho_1 \left(1 + \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}\right)} = \frac{2c_1^2 + (\gamma - 1)u_1^2}{\gamma + 1}. \quad (9.91)$$

Подставляя выражения (9.90), (9.91) в формулу (9.89), убеждаемся, что действительно $\lambda_{1,j_0+1/2}^n = 0$, т. е. на скачке уплотнения $D = \lambda_{1,j_0+1/2}^n$.

Аналогичным образом можно проверить, что на ударной волне, рассмотренной в примере 9.2, справедливо равенство $D = \lambda_{3,j_0+1/2}^n$.

9.7. Схема Лакса – Вендроффа является частным случаем описанной выше схемы предиктор-корректор и получается из последней при $\theta^k \equiv 0$ ($k = 1, 2, 3$). Шаг корректор (9.79) остается прежним, а «предикторное» уравнение (9.78) примет следующий вид:

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \mathcal{A}_{j+1/2}^n \mathbf{f}_{x,j+1/2}^n = 0. \quad (9.92)$$

9.8. Противопоточная схема также является частным случаем схемы предиктор-корректор (9.78), (9.79) и получается из последней при $\theta^k = \theta_0^k$ ($k = 1, 2, 3$), где величины θ_0^k определены в формуле (8.89). Выполняя такие же преобразования, как при выводе противопоточной схемы для уравнений мелкой воды, и используя обозначения, принятые в пп. 8.9, приходим к консервативной форме противопоточной схемы

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \mathbf{f}_{j-1/2}^*}{h} = 0, \quad (9.93)$$

где

$$\mathbf{f}_{j+1/2}^* = \frac{1}{2} \left[\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n - (\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^-)_{j+1/2}^n (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n) \right].$$

Аналогично тому, как была получена схема (8.127) для уравнений мелкой воды, противопоточную схему (9.93) можно переписать в эквивалентной недивергентной форме

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + (\mathcal{A}^+ \mathbf{u}_x)_{j-1/2}^n + (\mathcal{A}^- \mathbf{u}_x)_{j+1/2}^n = 0. \quad (9.94)$$

Численное решение задачи о запуске ударной трубы (см. пример 9.4) показывает, что схема предиктор-корректор (9.78), (9.79) с переменными параметрами θ^k ($k = 1, 2, 3$), определенными по формулам (7.39), (8.89), дает решение без «паразитических» осцилляций. Численное решение, полученное с помощью противопоточной схемы (9.93), также не имеет осцилляций, но является более сглаженным, чем при использовании схемы предиктор-корректор. Схема Лакса – Вендроффа дает численное решение с «паразитическими» осцилляциями за фронтом ударной волны и перед волной разрежения.

В настоящем параграфе мы ограничились рассмотрением нескольких явных схем, аппроксимирующих уравнения газовой динамики (9.1). Разумеется, что для решения этих уравнений имеется большое число других схем, в том числе и неявных (см., напр., [6, 9, 10, 13, 14, 18]).

§ 10. Контрольная работа по теме «Исследование разностных схем для уравнения переноса»

ВАРИАНТ 1

10.v1.1. Определить порядок аппроксимации схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{-3u_j^n + 4u_{j+1}^n - u_{j+2}^n}{2h} = \frac{a^2\tau}{2} \cdot \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + u_j^n}{h^2}, \quad (10.1)$$

построенной для уравнения переноса

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const} < 0, \quad (10.2)$$

и с помощью спектрального метода Неймана получить для этой схемы необходимое условие устойчивости по начальным данным при законе предельного перехода $|a|\tau/h = \text{const}$.

10.v1.2. Сохраняет ли схема (10.1) монотонность численного решения? Ответ обосновать.

10.v1.3. Получить п. д. п. разностной схемы (10.1) и доказать, что она обладает численной дисперсией.

ВАРИАНТ 2

10.v2.1. Определить порядок аппроксимации схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2h} = \frac{a^2\tau}{2} \cdot \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{h^2}, \quad (10.3)$$

построенной для уравнения переноса

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad (10.4)$$

и с помощью спектрального метода Неймана получить для этой схемы необходимое условие устойчивости по начальным данным при законе предельного перехода $a\tau/h = \text{const}$.

10.v2.2. Сохраняет ли схема (10.3) монотонность численного решения? Ответ обосновать.

10.v2.3. Получить п. д. п. разностной схемы (10.3) и доказать, что она обладает численной дисперсией.

§ 11. Задания для лабораторной работы 6

В данном параграфе приведены задания к практическим занятиям на ЭВМ по теме «Конечно-разностные методы решения уравнений гиперболического типа». Основная цель этих заданий состоит в экспериментальной проверке тех свойств численных методов, которые были установлены теоретически на лекциях и семинарских занятиях, выявлении новых, важных для практики особенностей используемых методов, экспериментальном сравнении методов и экспериментальном определении условий применимости численных методов.

По каждому заданию готовится **краткий отчет** (о содержании отчета см. § 1.13).

11.1. Уравнение переноса с постоянным коэффициентом.

Первая группа заданий касается проведения численных экспериментов с конечно-разностными схемами, предназначенными для решения начально-краевой задачи (1.25) для уравнения переноса с постоянным коэффициентом $a > 0$. Точное решение задачи определяется формулой (1.26).

Задание 1. *Реализовать явную противопоточную схему (1.28). Выбирая различные соотношения между τ и h , убедиться в условной устойчивости этой схемы. Проанализировать точность передачи скачка на разрывном решении при различных τ и h .*

Задание 2. *Для неявной противопоточной схемы (1.90) продемонстрировать абсолютную устойчивость, исследовать ее сглаживающие свойства.*

Задание 3. *Реализовать противопоточную схему с весами (1.89). Выбирая различные σ при фиксированных τ и h , проиллюстрировать теоретически обоснованные свойства схемы – устойчивость и аппроксимацию. Проанализировать ее сглаживающие свойства для различных значений параметров σ , τ , h .*

Задание 4. *Реализовав схему Лакса (1.46), убедиться в ее условной аппроксимации и условной устойчивости. Исследовать ее сглаживающие свойства при различных значениях τ и h .*

Задание 5. *Реализовать схему Лакса – Вендроффа (1.49). Экспериментально исследовать ее устойчивость, точность и выполнение свойства монотонности. Убедиться в неэффективности использования этой схемы для приближенного вычисления разрывных решений.*

Задание 6. *Продемонстрировать условную устойчивость модифицированной схемы Лакса – Вендроффа (2.51), (2.50), второго порядка точности на гладких решениях, сохранение монотонности разрывных решений. Сравнить результаты расчетов с данными, полученными с помощью противопоточной схемы, схемы Лакса и схемы Лакса – Вендроффа.*

Приведем некоторые пояснения к заданиям и рекомендации для их выполнения.

Противопоточные схемы (явная, неявная, с весами) реализуются вычислением значений функции u_j^{n+1} на слое $(n + 1)$ по явным формулам с переходом от узла к узлу по оси Ox на слое $(n + 1)$, отправляясь от граничного узла, в котором задано краевое условие. Таким образом, вначале из краевого условия определяем $u_0^{n+1} = \mu_0(t^{n+1})$, а далее с помощью разностного уравнения вычисляем значения u_j^{n+1} во всех остальных узлах с номерами $j = 1, \dots, N$.

Схемы Лакса, Лакса – Вендроффа и модифицированная схема Лакса – Вендроффа также реализуются по явным формулам. Общей для данных схем является проблема вычисления недостающего краевого значения искомой функции, так как вычисление значений u_j^{n+1} по этим схемам может осуществляться лишь для внутренних узлов с номерами $j = 1, \dots, N - 1$. Для вычисления недостающего граничного значения u_N^{n+1} необходимо использовать другую разностную схему, записанную только для граничной точки, при этом порядок погрешности аппроксимации схемы, применяемой в граничном узле, не должен быть ниже порядка аппроксимации схемы для внутренних узлов. В противном случае произойдет потеря точности численного решения. Для схем второго порядка аппроксимации можно взять, например, схему (2.44), которая также имеет второй порядок аппроксимации (см. задачу 2.6) и записывается в граничном узле $j = N$ как

$$\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\tau} + a \frac{3u_N^n - 4u_{N-1}^n + u_{N-2}^n}{2h} = \frac{a^2\tau}{2} \frac{u_N^n - 2u_{N-1}^n + u_{N-2}^n}{h^2}.$$

Путем численных экспериментов необходимо убедиться, что если для указанных схем в граничном узле использовать схему первого порядка, например, противопоточную схему

$$\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\tau} + a \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h} = 0,$$

то точность численного решения понижается.

Экспериментальное определение порядка точности схем необходимо выполнять с использованием гладких решений, а свойства сглаживания и монотонности проверять на разрывном решении «бегущая ступенька» с начальной функцией вида (1.65). Разностные схемы обладают свойством численной диссипации (см. пп. 1.8), поэтому они сглаживают разрыв решения, причем разные схемы в разной степени. Свойство схемы сохранять разрыв (не сглаживать его) называется *K-свойством* [30]. Например, в §§ 8, 9 было показано, что схема предиктор-корректор сохраняет гидравлический прыжок и скачок уплотнения. Для исследования того, обладает ли схема *K-свойством*, можно использовать аппарат теории дифференциальных приближений разностных схем, вкратце изложенный в § 1.

Отметим следующий интересный факт. При $a\alpha = 1$, где $\alpha = \tau/h$, правая часть п. д. п. (1.79) противопоточной схемы зануляется, и явная схема более точно, чем при $a\alpha < 1$, аппроксимирует уравнение (1.45). Можно показать, что при $a\alpha = 1$ уравнение (1.45) аппроксимируется противопоточной схемой точно (с бесконечным порядком по τ и h), и разрыв начальных данных сглаживаться не будет. В этом случае мы получаем численное решение в виде «ступеньки», бегущей слева направо. Таким образом, при $a\alpha = 1$ противопоточная схема обладает *K-свойством*.

П. д. п. неявной схемы (1.90) имеет вид (12.8) (см. задачу 1.12). Уравнение (12.8) будет параболическим при любом соотношении между шагами τ и h . Но если явная схема обладала *K-свойством* и сохраняла разрыв при $a\alpha = 1$, то из анализа уравнения (12.8) можно сделать вывод, что коэффициент при u_{xx} всегда будет положительным, и поэтому неявная схема будет размазывать разрыв при любых τ и h , в том числе и при $a\alpha = 1$. Кроме того, сравнивая коэффициенты при производных u_{xx} в уравнениях (1.79) и (12.8), видим, что при выполнении условия $a\alpha < 1$ коэффициент в п. д. п. (12.8) больше в $(1+a\alpha)/(1-a\alpha)$ раз, чем соответствующий коэффициент в уравнении (1.79). Но именно этот коэффициент и отвечает в параболическом уравнении за сглаживание: при больших его значениях сглаживание разрывного начального профиля будет большим. Следовательно, неявная схема будет сильнее размазывать «ступеньку», чем явная, т. е. неявная схема обладает более выраженным сглаживающим свойством, чем явная. Аналогичный анализ можно провести и для всех других схем. Этот теоретический анализ необходимо подтвердить численными экспериментами.

Выбор шагов τ и h при проведении расчетов осуществляется с уче-

том требования необходимой точности расчетов и выполнения условия устойчивости. В каждом случае поведение отклонения численного решения от достаточно гладкого точного решения обусловлено поведением производных искомой функции, формирующих входящие в погрешность аппроксимации члены: если производные велики, то и остаточные члены велики, а их малость приводит к малым же погрешностям. Этот факт хорошо иллюстрируется тестированием на точных решениях, являющихся полиномами 1–3 степеней: если остаточные члены имеют производные высокого порядка, так что для полиномов они оказываются тождественными нулями, то на этих полиномах разностная схема имеет нулевую погрешность аппроксимации, и реальная точность численного решения может быть выше теоретической. Например, если при тестировании программы, реализующей явную противопоточную схему, использовать точное решение в виде линейной функции $u(x, t) = \alpha_1 x + \alpha_2 t$, то погрешность численного решения будет равна нулю, так как равна нулю погрешность аппроксимации. Подтвердите этот факт численными экспериментами.

Если программа тестируется на гладких функциях $u(x, t)$, не являющихся полиномами, то заранее трудно сказать, какая будет погрешность решения на заданной сетке. Известно лишь, что она будет иметь некоторый порядок малости, например, для явной противопоточной схемы она будет порядка $O(\tau + h)$. Конкретное же числовое значение погрешности будет определяться гладкостью начальных и граничных функций и, возможно, их производными. Поэтому в численных экспериментах по определению порядка точности разностных схем на выбранных гладких функциях $u(x, t)$ следует проводить расчеты на последовательности измельчающихся сеток, причем, если программа написана правильно, то погрешность численного решения будет уменьшаться по вполне определенному закону, зависящему от порядка аппроксимации. Например, для схемы Лакса – Вендроффа при измельчении шагов сетки вдвое погрешность численного решения должна уменьшиться в четыре раза (для гладких решений).

Если аппроксимация схемы условная, то на соотношение между шагами τ и h налагается дополнительное требование. Например, в схеме Лакса следует полагать $\tau = O(h)$, в противном случае разностная схема может аппроксимировать другое, отличное от исходного дифференциальное уравнение (см. пп. 1.5).

Указанные в заданиях явные схемы являются условно устойчивыми. Выбрав временной шаг τ по формуле (5.6), проведите расчеты с разны-

ми значениями коэффициента запаса $k_{\text{зап}} \leq 1$. Проанализируйте точность численного решения при приближении шага по времени к границе устойчивости. Попробуйте провести расчет при нарушении условия устойчивости. Если устойчивость схемы абсолютная, то соотношение между τ и h не должно влиять на устойчивость счета. Подтвердите это численными расчетами.

Если схема не сохраняет монотонность численного решения, то его график может иметь осцилляции. Немонотонность схемы существенно проявляется на негладких и сильно меняющихся решениях, например, на решении «бегущая ступенька». Попробуйте выяснить, не исчезают ли осцилляции при измельчении сетки или при выборе подходящих значений коэффициента запаса.

При тестировании программы весьма полезным является использование графики – вывод графиков численного и точного решений для некоторых моментов времени (например, в виде, изображенном на рисунках 3, 4, 7 или 18–20). Кривые на графиках должны различаться либо цветом, либо способом нанесения линий (сплошные, штриховые и т. п.). Оси координат должны быть подписаны и иметь цифровую разметку.

Кроме графического вывода, необходимо предусмотреть сохранение численного решения в некотором файле. Можно организовать вывод или каждого слоя по времени, или только некоторых слоев (например, слоев с номерами n , кратными 10). Вывод слоя $\{u_j^n\}$ можно организовать, например, следующим образом. Сначала выводятся номер слоя n и соответствующее ему время t^n , а затем выдается таблица, например, с пятью колонками, в которых печатаются соответственно числа j , x_j , u_j^n , $u(x_j, t^n)$ и абсолютное значение отклонения в узле x_j численного решения от точного, т. е. величина $|u_j^n - u(x_j, t^n)|$. Когда таблица будет выведена, необходимо напечатать еще значение максимального отклонения численного решения от точного для данного слоя

$$\varepsilon^n = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j^n - u(x_j, t^n)|,$$

а также номер j_0 того узла, где произошло максимальное отклонение.

В конце всей выдачи желательно напечатать значение максимального отклонения численного решения от точного по всем слоям, а также номер узла j_0 и номер слоя n_0 , в котором имело место максимальное отклонение в течение всего численного расчета, т. е. выдать величины

$$\varepsilon = \max_{0 \leq n \leq M} \varepsilon^n, \quad j_0, \quad n_0.$$

Выводимые значения желательно сопровождать поясняющими надписями. Необходимо оформить файл с результатами счета так, чтобы он был удобен для последующего просмотра и анализа.

Указанные рекомендации сохраняют свою силу и для всех приведенных ниже заданий.

11.2. Уравнение Хопфа. В сформулированных ниже заданиях необходимо выполнить численное исследование свойств трех явных схем, предназначенных для численного решения начально-краевой задачи для уравнения Хопфа (4.5): схемы С. К. Годунова (4.30), (4.52), противоположной схемы (4.42), схемы предиктор-корректор (4.53), (4.55).

Задание 7. *Экспериментально исследуйте устойчивость, порядок точности, выполнение свойства монотонности и сглаживающие свойства противоположной схемы.*

Задание 8. *Экспериментально исследуйте устойчивость, порядок точности, выполнение свойства монотонности и сглаживающие свойства схемы С. К. Годунова.*

Задание 9. *Экспериментально исследуйте влияние схемного параметра θ на точность, выполнение свойства монотонности и сглаживающие свойства схемы предиктор-корректор. Задав схемный параметр по формуле (4.56), сравните результаты расчетов по схеме предиктор-корректор с данными, полученными с помощью противоположной схемы и схемы Лакса – Вендроффа.*

Для тестирования алгоритмов можно использовать точные решения, приведенные в § 4. Порядок точности схем проверьте на тестовой задаче с гладким (бесконечно дифференцируемым) решением (4.12). Свойство монотонности и сглаживающие свойства схем проверьте вначале на непрерывном решении типа волны разрежения (4.16), а затем на решении типа волны сжатия (4.16), которое после градиентной катастрофы становится разрывным и описывается формулой (4.22). Далее возьмите разрывную начальную функцию (4.24) и исследуйте качество воспроизведения разрывного при $t > 0$ решения (4.25) и непрерывного при $t > 0$ решения (4.26).

В задании 9 требуется сравнить результаты расчетов по трем схемам. Однако разрабатывать для этого три отдельные программы не следует. Достаточно создать программу, реализующую алгоритм расчета по схеме предиктор-корректор, поскольку схемы Лакса – Вендроффа и про-

тивопоточная являются частным случаем схемы предиктор-корректор: задав схемный параметр $\theta = 0$, мы получим расчет по схеме Лакса – Вендроффа, а для схемного параметра, указанного в задаче 4.4, – противопоточной схеме.

11.3. Уравнение колебаний струны. В первой группе заданий численному исследованию будут подвергаться схема с весами (6.8) при различных значениях весового параметра σ и полностью неявная схема вида (6.32), предназначенные для решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний **однородной** струны. Математическая постановка этой задачи приведена в пп. 6.1.

Задание 10. Реализовать явную схему (схему с весами (6.8) при $\sigma = 0$) для краевых условий (6.3). Проверить экспериментально условия устойчивости схемы и определить порядок точности схемы на гладких и обобщенных решениях.

Задание 11. Для полностью неявной схемы с условиями третьего рода при $x = 0$ и первого при $x = l$ дать основанный на численных экспериментах сравнительный анализ различных аппроксимаций краевых условий.

Задание 12. Для схемы с весами с краевыми условиями первого рода проверить экспериментально условия устойчивости и выяснить порядок точности на гладких и обобщенных решениях при различных значениях весового параметра.

Задание 13. На гладких и обобщенных решениях сравнить точность вычислений по явной схеме и схеме повышенного порядка аппроксимации.

Программу следует тестировать сначала на гладких решениях $u(x, t)$, а затем на решениях с сильно меняющейся производной du/dx или на решениях, имеющих лишь кусочно-непрерывные первые производные. Приведем несколько примеров задач, точные решения которых можно использовать для тестирования программ расчета колебаний однородной струны.

Задача 1. Пусть $l = 2\pi$, $u_0(x) = \sin x$, $v_0(x) = 0$, $f(x, t) = 0$, $\mu_0(t) = 0$, $\mu_l(t) = 0$. Тогда функция $u(x, t) = \sin x \cos(at)$ будет гладким решением задачи (6.1)–(6.3).

Задача 2. Пусть $l = 2\pi$, $u_0(x) = \cos(mx)$, $v_0(x) = am \sin(mx)$, $f(x, t) = 0$, $\mu_0(t) = \cos(amt)$, $\mu_l(t) = \mu_0(t)$, m – целое, $m \geq 1$. При

этих условиях решением задачи (6.1)–(6.3) является гладкая функция $u(x, t) = \cos(m(x - at))$.

Задача 3. Пусть $v_0(x) = 0$, $f(x, t) = 0$, $\mu_0(t) = \mu_l(t) = 0$,

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq x_1, \\ 2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \text{при } x_1 \leq x \leq \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ 2 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} & \text{при } \frac{x_1 + x_2}{2} \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{при } x_2 \leq x \leq l, \end{cases}$$

где $0 < x_1 < x_2 < l$. Тогда при $T < \min \left\{ \frac{x_1}{a}; \frac{l - x_2}{a} \right\}$ обобщенное решение задачи (6.1)–(6.3) определяется (согласно (6.7)) формулой

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2}.$$

В этой задаче начальное отклонение струны описывается кусочно-линейной функцией с кусочно-непрерывными производными.

Задача 4. Пусть $u_0(x) = 0$, $f(x, t) = 0$, $\mu_0(t) = \mu_l(t) = 0$,

$$v_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < x_1, \\ 1 & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0 & \text{при } x_2 < x \leq l, \end{cases}$$

где $0 < x_1 < x_2 < l$. Тогда при $T < \min \left\{ \frac{x_1}{a}; \frac{l - x_2}{a} \right\}$ задача (6.1)–(6.3) имеет обобщенное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } x + at \leq x_1, \\ \frac{x + at - x_1}{2a} & \text{при } x_1 \leq x + at \leq x_2 \text{ и } x - at \leq x_1, \\ t & \text{при } x + at \leq x_2 \text{ и } x_1 \leq x - at, \\ \frac{x_2 - x_1}{2a} & \text{при } x + at \geq x_2 \text{ и } x - at \leq x_1, \\ \frac{-x + at + x_2}{2a} & \text{при } x + at \geq x_2 \text{ и } x_1 \leq x - at \leq x_2, \\ 0 & \text{при } x - at \geq x_2. \end{cases}$$

В этой задаче начальное отклонение струны отсутствует, но ее начальная скорость разрывна (является кусочно-постоянной функцией).

Задача 5. Заданы $l > 0$, $u_0(x) = 0$, $v_0(x) = 0$, $f(x, t) = 0$, $\mu_0(t) = \sin(at)$, $\mu_l(t) = 0$, $T < l/a$. Тогда функция

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin(at - x) & \text{при } 0 \leq x \leq at, \\ 0 & \text{при } at \leq x \leq l \end{cases}$$

будет обобщенным решением задачи (6.1)–(6.3). На характеристике $x = at$ имеется разрыв производных $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$. Эта характеристика называется *разделяющей*: слева от нее решение определяется краевыми условиями, а справа – начальными. Согласно (6.19) имеем равенство

$$(u_t + au_x)_{\text{лев}} = 0.$$

В следующих заданиях требуется выполнить численное исследование свойств схем, аппроксимирующих уравнение колебаний *неоднородной* струны. Программы следует тестировать вначале на гладких функциях $k(x, t, u)$, $f(x, t, u)$, которые необходимо задавать в виде отдельных процедур, чтобы переход к тестированию для других k и f можно было осуществить лишь изменением тела этих процедур. Проводя вычисления на последовательности сеток, необходимо убедиться в аппроксимационных свойствах используемых схем. Выбирая различные значения τ при фиксированном шаге h , следует проверить экспериментально условия устойчивости схем или убедиться в их абсолютной устойчивости.

Вначале необходимо проверить правильность работы программы в простейших ситуациях, когда $k = \text{const}$ и $f \equiv 0$. В качестве тестовых можно брать, например, решения задач 1–5. Далее следует перейти к тестированию на точных решениях задач, в которых коэффициент k зависит от переменных x, t , но не зависит от решения u . В качестве решений задач можно вначале взять любые гладкие функции, например,

$$u(x, t) = (2(x - 1)^2 - 1) \cos t, \quad k(x, t) = (2(x - 1)^2 - 1) \cos t + 2. \quad (11.1)$$

Начальные условия (6.2) для такой тестовой функции имеют вид

$$u_0(x) = 2(x - 1)^2 - 1, \quad v_0(x) = 0. \quad (11.2)$$

Подставив u в уравнение (6.21), получим правую часть уравнения

$$f(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (-2x^2 + 4x - 9) \cos t - 4(6x^2 - 12x + 5) \cos^2 t.$$

Для полноты постановки выпишем и формулы для функций μ_0 и μ_1 в краевых условиях (6.3), (6.22), (6.23), при этом примем $l = 2$:

$$\begin{aligned} \text{Условие (6.3):} \quad \mu_0(t) &= \mu_1(t) = \cos t. \\ \text{Условие (6.22):} \quad \mu_0(t) &= -\mu_1(t) = -(8 + 4 \cos t) \cos t. \\ \text{Условие (6.23):} \quad \mu_0(t) &= -(8 - \gamma_0 + 4 \cos t) \cos t, \\ \mu_1(t) &= (8 + \gamma_1 + 4 \cos t) \cos t. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Для тестирования программ расчета нелинейных задач можно предложить ту же гладкую функцию $u(x, t)$ из (11.1), но задать k и f зависящими от решения:

$$k(x, t, u) = u + 2, \quad f(x, t, u) = -u(1 + 12 \cos t) - 8 \cos^2 t - 8 \cos t, \quad (11.4)$$

при этом начальные (11.2) и краевые (11.3) условия не изменяются.

Завершите тестирование программы проверкой ее работы на задачах с разрывным коэффициентом k , например, когда k является кусочно-постоянной функцией:

$$k(x) = \begin{cases} a_1^2 & \text{при } x < x_0, \\ a_2^2 & \text{при } x > x_0, \end{cases} \quad (11.5)$$

где $0 < x_0 < l$, $a_1 \neq a_2$, $a_1 = \text{const} > 0$, $a_2 = \text{const} > 0$. В таком случае у задачи (6.21), (6.2), (6.3) (либо с условиями (6.22) или (6.23)) не существует классического решения, но имеется непрерывное обобщенное решение, производная $\partial u / \partial x$ которого имеет разрыв в точке $x = x_0$. Величина разрыва удовлетворяет *условию сопряжения* [19]

$$\left(a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{лев}}(x_0, t) = \left(a_2^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\text{пр}}(x_0, t). \quad (11.6)$$

С условиями подобного вида мы уже встречались при изучении обобщенного решения уравнения теплопроводности (см. формулы (3.3.32), (3.3.33)).

Приведем пример задачи, которая является модификацией задачи 5 на случай разрывного коэффициента k , заданного формулой (11.5). Обобщенное решение этой модифицированной задачи будет иметь разрывные производные при $x = x_0$ и на разделяющей характеристике, заданной формулой

$$x = a(t) = \begin{cases} a_1 t & \text{при } t \leq t_0, \\ a_2 t + x_0 \left(1 - \frac{a_2}{a_1} \right) & \text{при } t \geq t_0, \end{cases} \quad (11.7)$$

где $t_0 = x_0/a_1$. Для того чтобы разделяющая характеристика (11.7) не пересекалась с правой границей $x = l$, выберем $T > t_0$ не очень большим, чтобы удовлетворялось неравенство $a(T) < l$, что в явном виде запишется следующим образом:

$$t_0 < T < \frac{l + x_0 \left(\frac{a_2}{a_1} - 1 \right)}{a_2}. \quad (11.8)$$

Задача 6. При выполнении условий задачи 5, а также условий (11.5), (11.8) задача (6.21), (6.2), (6.3) имеет обобщенное решение, определяемое формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin(a_1 t - x) & \text{при } t \leq t_0 \text{ и } 0 \leq x \leq a(t), \\ \sin(a_1 t - x) & \text{при } t \geq t_0 \text{ и } 0 \leq x \leq x_0, \\ \sin \left[\frac{a_1}{a_2} (a(t) - x) \right] & \text{при } t \geq t_0 \text{ и } x_0 \leq x \leq a(t), \\ 0 & \text{при } a(t) \leq x \leq l. \end{cases}$$

График точного решения задачи 6 имеет излом в точке $x = x_0$. Если для решения этой задачи использовать схемы сквозного счета, то на графиках численного решения изломы будут выражены слабее, они «размажутся».

Для уточнения расчетов задач с разрывными коэффициентами можно рассмотреть другую методику их численного решения: *счет с выделением разрывов*. Поясним суть этой методики для простейшего случая (11.5). В процессе расчета в подобластях $x < x_0$ и $x > x_0$ используется выбранная разностная схема, а в точке $x = x_0$ вместо разностной схемы берется какая-либо аппроксимация условия на разрыве (11.6). При этом сетку строят так, чтобы точка x_0 совпала с одним из узлов. Пусть это будет узел с номером j_0 ($1 < j_0 < N - 1$).

Рассмотрим аппроксимацию производных в условии (11.6) односторонними разностями первого порядка

$$a_1^2 \frac{u_{j_0}^{n+1} - u_{j_0-1}^{n+1}}{h} = a_2^2 \frac{u_{j_0+1}^{n+1} - u_{j_0}^{n+1}}{h}. \quad (11.9)$$

Предположим, что для численного решения задачи используется полностью неявная схема. Ее можно записать в виде (6.33) и далее решить полученные уравнения методом прогонки. Коэффициенты A, B, C, D

уравнения (6.33) будут вычисляться при $j \neq j_0$ по единообразным формулам (6.37), а в точке разрыва $j = j_0$ – по другим формулам, следующим из разностного аналога (11.9) условия сопряжения:

$$A_{j_0} = a_1^2, \quad B_{j_0} = a_2^2, \quad C_{j_0} = a_1^2 + a_2^2, \quad D_{j_0} = 0. \quad (11.10)$$

Подобная реализация называется *расчетом с выделением разрывов*. Аналогично поступают, когда функция $k(x, t)$ кусочно-постоянна и имеет несколько неподвижных точек разрыва. Очевидно, методика применима и в том случае, когда между неподвижными точками разрыва функция k является переменной.

Рассмотрим реализацию счета с выделением разрывов при аппроксимации производных в (11.6) разностями второго порядка:

$$a_1^2 \cdot \frac{3u_{j_0}^{n+1} - 4u_{j_0-1}^{n+1} + u_{j_0-2}^{n+1}}{2h} = a_2^2 \cdot \frac{-3u_{j_0}^{n+1} + 4u_{j_0+1}^{n+1} - u_{j_0+2}^{n+1}}{2h}. \quad (11.11)$$

Если для расчета с выделением разрывов берется явная схема, то присутствие разрыва не вносит новых трудностей: вначале рассчитываются величины u_j^{n+1} при $j \neq j_0$, а затем из (11.11) определяется $u_{j_0}^{n+1}$. Если же расчет с выделением разрывов ведется по неявным схемам, то вначале необходимо переписать пятиточечное уравнение (11.11) в виде трехточечного уравнения (6.33). Это можно сделать, выразив $u_{j_0-2}^{n+1}$ через $u_{j_0}^{n+1}$ и $u_{j_0-1}^{n+1}$ с помощью уравнения (6.33), написанного для узла $j_0 - 1$, а $u_{j_0+2}^{n+1}$ – через $u_{j_0}^{n+1}$ и $u_{j_0+1}^{n+1}$ из уравнения (6.33) в узле $j_0 + 1$. В результате уравнение (11.11) также станет трехточечным типа уравнения (6.33) с коэффициентами

$$\begin{aligned} A_{j_0} &= 2a_1^2 - \frac{h^2}{\tau^2}, & B_{j_0} &= 2a_2^2 - \frac{h^2}{\tau^2}, & C_{j_0} &= 2(a_1^2 + a_2^2), \\ D_{j_0} &= a_1^2 \frac{D_{j_0-1}}{A_{j_0-1}} + a_2^2 \frac{D_{j_0+1}}{B_{j_0+1}}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Полученную систему трехточечных разностных уравнений (6.33) с коэффициентами (6.37) при $j \neq j_0$ и (11.12) при $j = j_0$ можно решить методом прогонки, предварительно исследовав его корректность и устойчивость (см. задачу 2.2.4).

Отметим, что разностные схемы с выделением разрывов не являются однородными в том смысле, что коэффициенты разностных уравнений в различных узлах сетки рассчитываются по разным формулам.

Задание 14. Для явной консервативной схемы с краевыми условиями второго рода при $x = 0$ и первого при $x = l$ экспериментально определить порядок точности. Коэффициент $k(x, t)$ взять из формулы (11.1).

Задание 15. Для задачи с краевыми условиями первого рода и с разрывным коэффициентом $k(x, t)$, заданным формулой (11.5), провести расчеты по консервативной схеме (6.26) и неконсервативным схемам с операторами (6.29) и (6.30). Дать сравнительный анализ результатов по точности и устойчивости.

Задание 16. Для задачи с разрывным коэффициентом $k(x, t)$, заданным формулой (11.5), провести расчеты с выделением разрыва по консервативной явной схеме. Сравнить численные результаты при использовании на разрыве условий (11.9) или (11.11). На основе анализа выбрать лучшую из этих аппроксимаций и сравнить между собой точность расчетов с выделением разрывов и расчетов по консервативной явной схеме сквозного счета.

Задание 17. Для задачи с линейной правой частью (6.31) и краевыми условиями второго рода при $x = 0$ и третьего при $x = l$ реализовать консервативную явную схему. На основе численных экспериментов выяснить условие устойчивости схемы и сравнить его с теоретическим при гладкой ограниченной функции $k(x, t)$. Выяснить влияние коэффициента $a(x, t)$ из (6.31) на устойчивость схемы.

Задание 18. Реализовать явную схему для решения нелинейной задачи. Взять краевые условия третьего рода при $x = 0$ и первого при $x = l$. Выяснить экспериментально порядок точности схемы и условие устойчивости.

Задание 19. На основе численных экспериментов дать анализ точности полностью неявной схемы с итерациями по нелинейности и без них. Реализовать краевые условия первого рода при $x = 0$ и второго при $x = l$.

Задание 20. Реализовать схему с весами для решения нелинейной задачи с краевыми условиями второго рода при $x = 0$ и первого рода при $x = l$. При $\sigma \neq 0$ сравнить по точности и устойчивости две реализации: с итерациями и без итераций по нелинейности.

Задание 21. Реализовать явную схему для нелинейной задачи с краевыми условиями первого рода при $x = 0$ и второго при $x = l$. Аппроксимировать производную du/dx в краевом условии при $x = l$ с первым и вторым порядком по h . Выяснить влияние разных аппроксимаций краевых условий на точность численного решения.

Задание 22. Реализовать схему с весами с итерациями по нелинейности для нелинейной задачи с краевыми условиями первого рода при $x = 0$ и третьего при $x = l$. Производную du/dx в точке $x = l$ аппроксимировать односторонними разностями первого и второго порядка. Выяснить влияние этих аппроксимаций на точность численного решения, а также влияние условия (6.6) на устойчивость прогонки.

Задание 23. Реализовать схему с весами с итерациями по нелинейности для решения задачи с краевыми условиями первого рода и функциями $u(x, t)$ из (11.1), k и f из (11.4). Далее программу оттестировать на функции $u(x, t)$ из (11.1) и коэффициенте $k = (u + 2)^m$ ($m > 1$). Выяснить влияние показателя m на устойчивость схемы, устойчивость прогонки и сходимость итераций.

11.4. Системы нелинейных уравнений. Последние два задания являются наиболее трудоемкими, поэтому рекомендуется выдавать их группе из двух-трех «сильных» студентов для коллективного выполнения.

Задание 24. Реализовать схему предиктор-корректор (8.84), (8.101) для уравнений мелкой воды в случае ровного дна. Экспериментально исследовать влияние схемных параметров θ^k ($k = 1, 2$) на точность, устойчивость и сглаживающие свойства схемы предиктор-корректор. Задав схемные параметры по формулам (7.39), (8.89), сравнить результаты расчетов по схеме предиктор-корректор с данными, полученными с помощью противопоточной схемы и схемы Лакса – Вендроффа. В качестве тестовых возьмите решения, приведенные в примерах 8.1–8.4. Экспериментально подтвердите теоремы 8.1 и 8.2.

Задание 25. Реализовать схему предиктор-корректор (9.78), (9.79) для уравнений газовой динамики. Экспериментально исследовать влияние схемных параметров θ^k ($k = 1, 2, 3$) на точность, устойчивость и сглаживающие свойства схемы предиктор-корректор. Задав схемные параметры по формулам (7.39), (8.89), сравнить результаты расчетов по схеме предиктор-корректор с данными, полученными с помощью противопоточной схемы и схемы Лакса – Вендроффа. В качестве тестовых возьмите решения, приведенные в примерах 9.1–9.4. Экспериментально подтвердите теоремы 9.1 и 9.2.

Ответы, указания, решения

1.2. У к а з а н и е. Показать, что для схемы (1.81) окружность

$$\lambda = 1 + r - re^{i\varphi} \quad (12.1)$$

лежит при $a > 0$ вне окружности (1.34) единичного радиуса при любом законе предельного перехода.

1.3. У к а з а н и е. Множитель перехода

$$\lambda(\varphi) = -ir \sin \varphi \pm \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \varphi} \quad (12.2)$$

находим из уравнения

$$\lambda^2 + \lambda 2ir \sin \varphi - 1 = 0. \quad (12.3)$$

При $r \leq 1$ имеем $|\lambda(\varphi)| = 1$ для любого φ . Если $r > 1$, то при некоторых φ множитель перехода будет по модулю больше единицы. Например, при $\varphi = \pi/2$

$$|\lambda_1(\frac{\pi}{2})| = r + \sqrt{r^2 - 1} > 1, \quad (12.4)$$

поэтому необходимое условие устойчивости эквивалентно выполнению неравенства $r \leq 1$, т. е.

$$\frac{|a|\tau}{h} = \text{const} \leq 1. \quad (12.5)$$

1.4. Порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$. Для закона предельного перехода (1.84) схема абсолютно неустойчива.

1.5. Порядок аппроксимации $O(\tau + h)$. Необходимое условие устойчивости – неравенство (12.5).

У к а з а н и е. Множитель перехода $\lambda(\varphi)$ определяется по формуле

$$\lambda = 1 - r + re^{-i\varphi}. \quad (12.6)$$

Отсюда видно, что числа $\lambda(\varphi)$ лежат на окружности радиуса r с центром в точке $1 - r$. Чтобы окружность (12.6) лежала внутри единичной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $r \leq 1$.

1.6. Порядок аппроксимации схемы Мак-Кормака $O(\tau^2 + h^2)$, необходимое условие ее устойчивости – неравенство (12.5).

У к а з а н и е. Легко проверить, что после исключения из схемы Мак-Кормака вспомогательных величин u_j^* и u_{j-1}^* мы приходим к одношаговой схеме Лакса – Вендроффа (1.50), поэтому эти две схемы обладают одинаковыми свойствами.

1.7. Р е ш е н и е. Возьмем гладкое решение $u(x, t)$ уравнения переноса (1.21) и рассмотрим на этом решении локальную погрешность аппроксимации в узле (x_j, t^n) дифференциального уравнения (1.21) разностным уравнением (1.87), при этом аргументы функций будем писать только тогда, когда они отличаются от (x_j, t^n) :

$$\begin{aligned}\psi_{h,j}^n &= (L_h(u)_h - f_h)|_{(x_j, t^n)} = u_t + \frac{\tau}{2}u_{tt} + \\ &+ \sigma a \left[u_x(x_j, t^{n+1}) - \frac{h}{2}u_{xx}(x_j, t^{n+1}) \right] + (1-\sigma)a \left[u_x - \frac{h}{2}u_{xx} \right] + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= u_t + \frac{\tau}{2}u_{tt} + \sigma a \left[u_x + \tau u_{xt} - \frac{h}{2}u_{xx} \right] + (1-\sigma)a \left[u_x - \frac{h}{2}u_{xx} \right] + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= u_t + au_x + \frac{\tau}{2} \left[u_{tt} + 2\sigma a u_{xt} - \frac{ah}{\tau}u_{xx} \right] + O(\tau^2 + h^2).\end{aligned}$$

В силу того, что функция $u(x, t)$ является решением уравнения (1.21) и его следствий

$$u_{tt} + au_{xt} = 0, \quad u_{tx} + au_{xx} = 0,$$

получаем, что

$$\psi_{h,j}^n = \frac{a\tau}{2} \left[a(1-2\sigma) - \frac{h}{\tau} \right] u_{xx} + O(\tau^2 + h^2).$$

Следовательно,

$$\psi_{h,j}^n = \begin{cases} O(\tau + h), & \text{если } \sigma \neq 0,5 \text{ и } \sigma \neq \sigma_* \equiv \frac{1}{2} - \frac{h}{2a\tau}, \\ O(\tau^2 + h), & \text{если } \sigma = 0,5, \\ O(\tau^2 + h^2), & \text{если } \sigma = \sigma_*. \end{cases}$$

Для множителя перехода получаем следующее выражение

$$\lambda = \frac{1 - (1-\sigma)r(1 - \cos \varphi) - i(1-\sigma)r \sin \varphi}{1 + \sigma r(1 - \cos \varphi) + i\sigma r \sin \varphi}.$$

Отсюда

$$|\lambda|^2 = \frac{[1 - (1 - \sigma)r(1 - \cos \varphi)]^2 + (1 - \sigma)^2 r^2 \sin^2 \varphi}{[1 + \sigma r(1 - \cos \varphi)]^2 + \sigma^2 r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Следовательно, необходимое условие устойчивости $|\lambda| \leq 1$ будет эквивалентно выполнению при произвольном значении φ неравенства

$$\begin{aligned} & [1 - (1 - \sigma)r(1 - \cos \varphi)]^2 + (1 - \sigma)^2 r^2 \sin^2 \varphi \leq \\ & \leq [1 + \sigma r(1 - \cos \varphi)]^2 + \sigma^2 r^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований получим, что последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$r(1 - 2\sigma) \leq 1. \quad (12.7)$$

При $\sigma \geq 0,5$ неравенство (12.7) выполняется для любого r . При $\sigma < 0,5$ получаем ограничение

$$r \leq \frac{1}{1 - 2\sigma}.$$

Итак, для закона предельного перехода (1.84) и $\sigma \geq 0,5$ необходимый признак устойчивости Неймана выполняется при любом соотношении между шагами τ и h , а при $\sigma < 0,5$ – только при условии

$$\frac{a\tau}{h} \leq \frac{1}{1 - 2\sigma}.$$

1.8. Схема абсолютно устойчива.

$$\mathbf{1.9.} \quad \frac{a\tau}{h} \leq \frac{1}{1 - \sigma}.$$

1.11. У к а з а н и е. Подробный вывод п. д. п. схемы Лакса – Вендроффа приведен в работе [30].

$$\mathbf{1.12.} \quad u_t + au_x = \frac{ah}{2} \left(1 + \frac{a\tau}{h}\right) u_{xx}. \quad (12.8)$$

2.3. У к а з а н и е. Пусть u_j^n – монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию $u_{\bar{x}\bar{x},j}^n \leq 0$. Перепишем схему Лакса – Вендроффа (2.26) в следующем виде:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\tau}{2} \left(u_{x,j+1/2}^n + u_{x,j-1/2}^n \right) + \frac{a^2\tau^2}{2} u_{\bar{x}\bar{x},j}^n.$$

Записав аналогичное равенство для узла с номером $(j + 1)$, получите равенство

$$u_{x,j+1/2}^{n+1} = u_{x,j+1/2}^n - \frac{a\tau}{2} \left(u_{\bar{x},j+1}^n + u_{\bar{x},j}^n \right) + \frac{a^2\tau^2}{2h} \left(u_{\bar{x},j+1}^n - u_{\bar{x},j}^n \right)$$

и его следствие

$$u_{x,j+1/2}^{n+1} = u_{x,j+1/2}^n - \frac{a\tau}{2} (1 - a\varpi) u_{\bar{x},j+1}^n - \frac{a\tau}{2} (1 + a\varpi) u_{\bar{x},j}^n.$$

Далее используйте условия

$$a > 0; \quad a\varpi \leq 1; \quad u_{\bar{x},j}^n \leq 0, \quad \forall j; \quad u_{x,j+1/2}^n \geq 0, \quad \forall j.$$

2.4. Р е ш е н и е. Перепишем разностное уравнение (2.22)

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \varpi C_{j+1/2}^+ \Delta_{j+1/2} u^n - \varpi C_{j-1/2}^- \Delta_{j-1/2} u^n, \quad (12.9)$$

где $\Delta_{j+1/2} u = u_{j+1} - u_j$, и вычтем из разностного уравнения в узле x_{j+1}

$$u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n + \varpi C_{j+3/2}^+ \Delta_{j+3/2} u^n - \varpi C_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} u^n$$

уравнение (12.9):

$$\begin{aligned} \Delta_{j+1/2} u^{n+1} &= (1 - \varpi C_{j+1/2}^+ - \varpi C_{j+1/2}^-) \Delta_{j+1/2} u^n + \\ &+ \varpi C_{j+3/2}^+ \Delta_{j+3/2} u^n + \varpi C_{j-1/2}^- \Delta_{j-1/2} u^n. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Коэффициенты в правой части неотрицательны. Поэтому

$$\begin{aligned} |\Delta_{j+1/2} u^{n+1}| &\leq (1 - \varpi C_{j+1/2}^+ - \varpi C_{j+1/2}^-) |\Delta_{j+1/2} u^n| + \\ &+ \varpi C_{j+3/2}^+ |\Delta_{j+3/2} u^n| + \varpi C_{j-1/2}^- |\Delta_{j-1/2} u^n|. \end{aligned}$$

Просуммируем полученные неравенства по индексу j :

$$\begin{aligned} TV(u^{n+1}) &\leq TV(u^n) - \\ &- \varpi \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j+1/2}^+ |\Delta_{j+1/2} u^n| - \varpi \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j+1/2}^- |\Delta_{j+1/2} u^n| + \\ &+ \varpi \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j+3/2}^+ |\Delta_{j+3/2} u^n| + \varpi \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j-1/2}^- |\Delta_{j-1/2} u^n|. \end{aligned}$$

Изменим индекс суммирования в последних двух суммах на $l = j + 1$ и $l = j - 1$ соответственно. Тогда суммы сократятся и получится неравенство (2.24).

2.6. Р е ш е н и е. В схеме (2.44) первая производная u_x аппроксимируется односторонней разностью со вторым порядком:

$$\frac{3u(x_j, t^n) - 4u(x_{j-1}, t^n) + u(x_{j-2}, t^n)}{2h} = \left(u_x - \frac{h^2}{3}u_{xxx}\right)(x_j, t^n) + O(h^3).$$

Вторая разностная производная аппроксимирует производную u_{xx} в узле x_j только с первым порядком:

$$\frac{u(x_j, t^n) - 2u(x_{j-1}, t^n) + u(x_{j-2}, t^n)}{h^2} = (u_{xx} - hu_{xxx})(x_j, t^n) + O(h^2).$$

Поэтому для погрешности аппроксимации получается выражение

$$\psi_j^n = u_t + \frac{\tau}{2}u_{tt} + O(\tau^2) + au_x + O(h^2) - \frac{a^2\tau}{2}(u_{xx} + O(h)).$$

В силу неравенства $\tau h \leq \frac{\tau^2 + h^2}{2}$ получаем, что

$$\psi_j^n = u_t + au_x + \frac{\tau}{2}u_{tt} - \frac{a^2\tau}{2}u_{xx} + O(\tau^2 + h^2).$$

Для функции u , являющейся решением уравнения (2.1), выполняются равенства

$$u_t = -au_x, \quad u_{tt} = -au_{xt}, \quad u_{tx} = -au_{xx}, \quad u_{tt} = a^2u_{xx},$$

поэтому $\psi_j^n = O(\tau^2 + h^2)$.

Выпишем теперь п. д. п. схемы (2.44). Дифференциальное представление схемы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t + \frac{\tau}{2}u_{tt} + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt} + O(\tau^3) + a \left(u_x - \frac{h^2}{3}u_{xxx} + O(h^3) \right) = \\ = \frac{a^2\tau}{2}(u_{xx} - hu_{xxx}) + O(\tau h^2). \end{aligned}$$

Учитывая условие задачи

$$a \frac{\tau}{h} = \text{const}, \tag{12.11}$$

получаем, что $O(\tau h^2) = O(h^3)$, поэтому дифференциальное представление запишется как

$$u_t + au_x + \frac{\tau}{2}u_{tt} + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt} = \frac{a^2\tau}{2}u_{xx} + \left(\frac{ah^2}{3} - \frac{a^2\tau h}{2}\right)u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3).$$

Дифференцируя его по t , получаем равенство

$$u_{tt} + au_{xt} + \frac{\tau}{2}u_{ttt} = \frac{a^2\tau}{2}u_{xxt} + O(\tau^2 + h^2). \quad (12.12)$$

Аналогично, после дифференцирования по переменной x , приходим к уравнению

$$u_{tx} + au_{xx} + \frac{\tau}{2}u_{ttx} = \frac{a^2\tau}{2}u_{xxx} + O(\tau^2 + h^2). \quad (12.13)$$

Далее из равенств (12.12), (12.13) получаются выражения (1.75) для производных u_{xxt} , u_{ttx} и

$$u_{ttt} = -a^3u_{xxx} + O(\tau + h) \quad (12.14)$$

для u_{ttt} . Подставляя эти выражения в формулы (12.12), (12.13), находим вторую производную по времени:

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + O(\tau^2 + h^2).$$

В результате приходим к П-форме дифференциального представления разностной схемы (2.44)

$$u_t + au_x = \frac{ah^2}{6} \left(2 + \frac{a^2\tau^2}{h^2} - 3\frac{a\tau}{h} \right) u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3)$$

и к ее п. д. п.

$$u_t + au_x = \frac{ah^2}{6} (a\varpi - 1)(a\varpi - 2) u_{xxx}, \quad (12.15)$$

где $\varpi = \tau/h$. Отсюда видно, что рассматриваемая схема при $a\varpi \neq 1$, $a\varpi \neq 2$ обладает численной дисперсией, поэтому, если в начальный момент времени $t = 0$ будет задана ступенька (1.61), то при $t > 0$ в окрестности движущейся ступеньки возникнут осцилляции численного решения.

2.8. У к а з а н и е. Перепишем модифицированную схему (2.47) в следующем виде

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + au_{x,j+1/2}^n - \frac{a}{2}(1 + a\varpi) \left(\Phi_{j+1/2} - \left(\frac{\Phi}{\xi} \right)_{j-1/2} \right) u_{x,j+1/2}^n = 0.$$

Таким образом, при $a < 0$ модифицированная схема Лакса – Вендроффа может быть записана в виде (2.22), где

$$C_{j-1/2}^- = 0, \quad C_{j+1/2}^+ = a \left[-1 + \frac{1 + a\varpi}{2} p \right], \quad p = \Phi_{j+1/2} - \left(\frac{\Phi}{\xi} \right)_{j-1/2}.$$

Согласно теореме 2.3, для сохранения монотонности численного решения достаточно потребовать, чтобы

$$0 \leq C_{j+1/2}^+ \leq \frac{1}{\varpi}, \quad (12.16)$$

или

$$|a| \left[1 - \frac{1 - |a|\varpi}{2} p \right] \geq 0; \quad (12.17)$$

$$|a|\varpi - |a|\varpi \frac{1 - |a|\varpi}{2} p \leq 1. \quad (12.18)$$

Потребуем, чтобы эти неравенства выполнялись всюду в области устойчивости схемы Лакса – Вендроффа, т. е. для всех $|a|\varpi \leq 1$. Тогда неравенство (12.17) приводит к ограничению $p \leq 2$.

Введя обозначение $z = |a|\varpi$, перепишем неравенство (12.18) в следующей эквивалентной форме:

$$z^2 p - (p - 2)z - 2 \leq 0,$$

или

$$(z - 1)(pz + 2) \leq 0.$$

Это неравенство должно выполняться для любых $z \in [0, 1]$. Поэтому для любых $z \in [0, 1]$ должно иметь место неравенство $pz + 2 \geq 0$. Отсюда получаем, что $p \geq -2$. Итак, неравенство (12.16) выполняется при любых $|a|\varpi \leq 1$, если

$$-2 \leq \Phi_{j+1/2} - \left(\frac{\Phi}{\xi} \right)_{j-1/2} \leq 2.$$

А для выполнения этих ограничений достаточно, чтобы

$$0 \leq \Phi_{j+1/2} \leq 2\xi_{j+1/2}; \quad 0 \leq \Phi_{j+1/2} \leq 2 \quad \forall j.$$

Далее решение аналогично случаю $a > 0$.

3.2. У к а з а н и е. Воспользуйтесь теоремой 2.1.

3.4. Р е ш е н и е. Подставив выражение (3.9) для $u_{j+1/2}^*$ в уравнение (3.4), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{h} \left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - a\tau_{j+1/2}^* \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \right. \\ \left. - \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2} + a\tau_{j-1/2}^* \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12.19)$$

С учетом формулы для вычисления τ^* перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \\ = \frac{a^2\tau}{2} \cdot \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{a^2\tau}{2h} \left(\theta_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \theta_{j-1/2}^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right). \end{aligned}$$

Для гладкой функции $\theta(x, t)$ и гладкого решения $u(x, t)$ теоретической разностной схемы (понятие теоретической разностной схемы введено в п. 1.8) имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\tau} &= u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} + O(\tau^3); \\ \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{2h} &= u_x + \frac{h^2}{6} u_{xxx} + O(h^4); \\ \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{h^2} &= u_{xx} + O(h^2); \\ \frac{1}{h} \left(\theta(x_{j+1/2}, t^n) \frac{u(x_{j+1}, t^n) - u(x_j, t^n)}{h} - \right. \\ \left. - \theta(x_{j-1/2}, t^n) \frac{u(x_j, t^n) - u(x_{j-1}, t^n)}{h} \right) &= (\theta u_x)_x + O(h^2). \end{aligned}$$

Следовательно, дифференциальное представление схемы имеет такой вид:

$$u_t + au_x + \frac{\tau}{2}u_{tt} + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt} = \frac{a^2\tau}{2}u_{xx} - a\frac{h^2}{6}u_{xxx} + \frac{a^2\tau}{2}(\theta u_x)_x + O(\tau^3 + h^3). \quad (12.20)$$

Теперь из левой части уравнения (12.20) исключим производные по времени, оставив лишь первую – u_t . Для этого с помощью уравнения (12.20) найдем производную u_t и подставим ее в слагаемые этого уравнения, содержащие производные $(u_t)_t$ и $(u_t)_{tt}$:

$$\begin{aligned} u_t + au_x + \frac{\tau}{2} \left[-au_{xt} - \frac{\tau}{2}u_{ttt} + \frac{a^2\tau}{2}u_{xxt} + \frac{a^2\tau}{2}(\theta u_x)_{xt} \right] + \frac{\tau^2}{6} [-au_{xtt}] = \\ = \frac{a^2\tau}{2}u_{xx} - a\frac{h^2}{6}u_{xxx} + \frac{a^2\tau}{2}(\theta u_x)_x + O(\tau^3 + h^3). \end{aligned}$$

Последнее уравнение, в силу равенств

$$u_{txx} = -au_{xxx} + O(\tau + h);$$

$$u_{ttx} = a^2u_{xxx} + O(\tau + h);$$

$$u_{ttt} = -a^3u_{xxx} + O(\tau + h);$$

$$(\theta u_x)_{xt} = (\theta_t u_x + \theta(u_t)_x)_x = (\theta_t u_x - a\theta u_{xx})_x + O(\tau + h),$$

можно переписать как

$$\begin{aligned} u_t + au_x - \frac{a\tau}{2}u_{tx} = \frac{a^2\tau}{2}u_{xx} + \frac{a^2\tau}{2}(\theta u_x)_x + \frac{ah^2}{6}(a^2\mathfrak{x}^2 - 1)u_{xxx} - \\ - \frac{a^2\tau^2}{4}(\theta_t u_x)_x + \frac{a^3\tau^2}{4}(\theta u_{xx})_x + O(\tau^3 + h^3). \end{aligned}$$

Осталось исключить из этого уравнения производную u_{tx} :

$$\begin{aligned} u_t + au_x - \frac{a\tau}{2} \left(-au_x + \frac{a\tau}{2}u_{tx} + \frac{a^2\tau}{2}u_{xx} + \frac{a^2\tau}{2}(\theta u_x)_x \right)_x = \\ = \frac{a^2\tau}{2}u_{xx} + \frac{a^2\tau}{2}(\theta u_x)_x + \frac{ah^2}{6}(a^2\mathfrak{x}^2 - 1)u_{xxx} - \\ - \frac{a^2\tau^2}{4}(\theta_t u_x)_x + \frac{a^3\tau^2}{4}(\theta u_{xx})_x + O(\tau^3 + h^3). \end{aligned}$$

Таким образом, П-форма дифференциального представления разностной схемы (3.3), (3.4) в случае переменного параметра $\theta_{j+1/2}^n$ имеет вид следующего уравнения бесконечного порядка

$$u_t + au_x = \frac{a^2\tau}{2} (\theta u_x)_x + \frac{ah^2}{6} (a^2\alpha^2 - 1) u_{xxx} - \\ - \frac{a^2\tau^2}{4} (\theta_t u_x)_x + \frac{a^3\tau^2}{4} [(\theta u_x)_x + \theta u_{xx}]_x + O(\tau^3 + h^3).$$

3.5. У к а з а н и е. Перепишем схему (2.44) в следующем виде:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\tau}{2} (3u_{x,j-1/2}^n - u_{x,j-3/2}^n) + \frac{a^2\tau^2}{2} u_{\bar{x},j-1}^n.$$

Записав аналогичное равенство для узла с номером $(j+1)$, получим

$$u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n - \frac{a\tau}{2} (3u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n) + \frac{a^2\tau^2}{2} u_{\bar{x},j}^n.$$

Следовательно,

$$u_{x,j+1/2}^{n+1} = u_{x,j+1/2}^n - \frac{3a\tau}{2h} (u_{x,j+1/2}^n - u_{x,j-1/2}^n) + \frac{a\tau}{2} u_{\bar{x},j-1}^n + \\ + \frac{a^2\tau^2}{2h} (u_{\bar{x},j}^n - u_{\bar{x},j-1}^n)$$

Последнее равенство можно переписать в следующем виде:

$$u_{x,j+1/2}^{n+1} = \left(1 - \frac{3a\alpha}{2} + \frac{a^2\alpha^2}{2}\right) u_{x,j+1/2}^n + \left(\frac{3a\alpha}{2} - \frac{a^2\alpha^2}{2}\right) u_{x,j-1/2}^n + \\ + \frac{a\tau}{2} (1 - a\alpha) u_{\bar{x},j-1}^n$$

или

$$u_{x,j+1/2}^{n+1} = \frac{(1 - a\alpha)(2 - a\alpha)}{2} u_{x,j+1/2}^n + \frac{a\alpha}{2} (3 - a\alpha) u_{x,j-1/2}^n + \\ + \frac{a\tau}{2} (1 - a\alpha) u_{\bar{x},j-1}^n.$$

Пусть u^n – монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая во всех узлах сетки условию $u_{\bar{x},j}^n \geq 0$. Учитывая неравенство (3.24), покажите, что u^{n+1} также будет монотонно возрастающей функцией.

3.7. У к а з а н и е. Схема предиктор-корректор (3.3), (3.4) может быть записана в виде (12.19). Учитывая равенство $\tau_{j+1/2}^* = \tau(1 + \theta_{j+1/2})/2$, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left(u_{x,j+1/2}^n + u_{x,j-1/2}^n \right) - \\ & - \frac{a^2 \tau}{2h} \left[(1 + \theta_{j+1/2}) u_{x,j+1/2}^n - (1 + \theta_{j-1/2}) u_{x,j-1/2}^n \right] = 0. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Из формул (3.50), (3.31) следует, что параметр (3.34) схемы предиктор-корректор выражается через функцию-ограничитель (2.50), и имеет место соотношение

$$1 + \theta_{j+1/2} = \frac{1}{|a|\varepsilon} - \frac{1 - |a|\varepsilon}{|a|\varepsilon} \Phi_{j+1/2},$$

поэтому уравнение (12.21) принимает вид модифицированной схемы Лакса – Вендроффа (2.51).

4.1. У к а з а н и е. Перепишите уравнение (4.38)

$$u_j^{n+1} = (1 - \varepsilon u_j^n) u_j^n + (\varepsilon u_j^n) u_{j-1}^n$$

и, используя условие (4.61), покажите, что $\|u^{n+1}\|_C \leq \|u^n\|_C$, где $\|u^n\|_C = \max_j |u_j^n|$.

4.2. У к а з а н и е. Воспользуйтесь теоремой 2.3.

4.3. У к а з а н и е. Используя формулу (4.52) при $u_j^n > 0$, покажите, что $u_{j+1/2}^* = u_j^n$. Тогда $f_{j+1/2}^* = f(u_{j+1/2}^*) = 0,5(u_j^n)^2$, и схема С. К. Годунова для уравнения Хопфа совпадает с противопоточной схемой (4.34).

4.4. Р е ш е н и е. Из уравнения (4.53), с учетом равенства

$$\frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = f_{x,j+1/2}^n = a_{j+1/2}^n u_{x,j+1/2}^n \quad (12.22)$$

и выбранного значения параметра $\theta = \theta_{0,j+1/2}$, получаем следующее выражение для потока

$$f_{j+1/2}^* = \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n - \tau a_{j+1/2}^n (1 + \theta_{j+1/2}^n) \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n - \tau \left(a_{j+1/2}^n \right)^2 (1 + \theta_{j+1/2}^n) u_{x,j+1/2}^n \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n - \tau \left(a_{j+1/2}^n \right)^2 \frac{1}{\varkappa |a_{j+1/2}^n|} u_{x,j+1/2}^n \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[f_{j+1}^n + f_j^n - h |a_{j+1/2}^n| u_{x,j+1/2}^n \right].
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение для потока в уравнение (4.55) шага корректор и опять учитывая равенство (12.22), приходим к противопоточной схеме (4.40).

6.1. $O(\tau^2 + h^2)$.

7.1. У к а з а н и е. Двухшаговую схему предиктор-корректор (7.50), (7.49) можно переписать с учетом равенства (7.51) в виде следующей одношаговой схемы

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \mathcal{A}_0 \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{2h} - \\
&- \frac{\tau}{2h} \mathcal{R} \left(\mathcal{D}_{j+1/2}^n \Lambda^2 \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j+1/2}^n - \mathcal{D}_{j-1/2}^n \Lambda^2 \mathcal{L} \mathbf{u}_{x,j-1/2}^n \right) = 0.
\end{aligned} \tag{12.23}$$

По условию задачи $\theta_{j+1/2}^k = O(h)$, поэтому $\mathcal{D}_{j\pm 1/2}^n = \mathcal{E} + O(h)\mathcal{E}$. Далее используйте равенство $\mathbf{u}_{tt} = \mathcal{A}_0^2 \mathbf{u}_{xx}$, справедливое для решения системы уравнений (7.4), и свойство (7.13) матрицы \mathcal{A}_0 .

7.2. Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что матрица $\mathcal{D}_{j+1/2}^n$ имеет следующий вид

$$\mathcal{D}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} \frac{h}{\tau |\lambda_1|} & 0 \\ 0 & \frac{h}{\tau |\lambda_2|} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\mathcal{D}_{j+1/2}^n \Lambda^2 = \begin{pmatrix} \frac{h}{\tau} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & \frac{h}{\tau} |\lambda_2| \end{pmatrix} = \frac{h}{\tau} (\Lambda^+ - \Lambda^-).$$

С учетом этого равенства схема предиктор-корректор (12.23) запишется как

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \mathcal{A}_0 \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{2h} - \frac{1}{2} \mathcal{R} (\Lambda^+ - \Lambda^-) \mathcal{L} \left(\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n - \mathbf{u}_{x,j-1/2}^n \right) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \left(\mathcal{A}_0^+ + \mathcal{A}_0^- \right) \frac{\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n + \mathbf{u}_{x,j-1/2}^n}{2} - \\ - \left(\mathcal{A}_0^+ - \mathcal{A}_0^- \right) \frac{\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n - \mathbf{u}_{x,j-1/2}^n}{2} = 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, получаем противопоточную схему (7.23).

7.3. У к а з а н и е. Используя прием, рассмотренный при исследовании устойчивости противопоточной схемы (7.23), покажите, что множитель перехода ρ в решении вида (7.27) удовлетворяет уравнению

$$\det \left(\frac{\rho - 1}{\tau} \mathcal{E} + 2 \frac{\tau(1 + \theta)}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \Lambda^2 - i \frac{\sin \varphi}{h} \Lambda \right) = 0.$$

7.5. У к а з а н и е. После исключения из схемы Мак-Кормака вспомогательных величин \mathbf{u}_j^* и \mathbf{u}_{j-1}^* получается схема

$$\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\tau} + \mathcal{A}_0 \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{2h} - \frac{\tau}{2h} \mathcal{A}_0^2 \left(\mathbf{u}_{x,j+1/2}^n - \mathbf{u}_{x,j-1/2}^n \right) = 0,$$

которая совпадает со схемой предиктор-корректор (12.23) при $\theta^k \equiv 0$, т. е. схема Мак-Кормака (7.76) совпадает со схемой Лакса – Вендроффа.

10.v2.1. У к а з а н и е. Схема имеет второй порядок аппроксимации (см. решение задачи 2.6).

Получим необходимое условие устойчивости схемы (10.3). Для нее множитель перехода вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \lambda = 1 - a\alpha(1 - \cos \varphi)^2 - a^2\alpha^2(1 - \cos \varphi) \cos \varphi + \\ + i \left[-a\alpha(2 - \cos \varphi) \sin \varphi + a^2\alpha^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi \right], \quad \varphi \in R. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\lambda|^2 = 1 + a\alpha(a^3\alpha^3 - 4a^2\alpha^2 + 5a\alpha - 2)(1 - \cos \varphi)^2, \quad \forall \varphi \in R.$$

Следовательно, необходимое условие устойчивости $|\lambda(\varphi)| \leq 1$ будет эквивалентно условию выполнения неравенства

$$a^3 \varkappa^3 - 4a^2 \varkappa^2 + 5a\varkappa - 2 \leq 0$$

или

$$(a\varkappa - 2)(a\varkappa - 1)^2 \leq 0.$$

Отсюда следует ограничение на число Куранта

$$a\varkappa \leq 2. \tag{12.24}$$

10.v2.2. У к а з а н и е. Запишите схему (10.3) в виде (2.4)

$$u_j^{n+1} = b_{-2}u_{j-2}^n + b_{-1}u_{j-1}^n + b_0u_j^n,$$

где

$$b_{-2} = \frac{a\varkappa}{2}(-1 + a\varkappa), \quad b_{-1} = a\varkappa(2 - a\varkappa), \quad b_0 = \frac{1}{2}(a\varkappa - 1)(a\varkappa - 2),$$

и убедитесь, что при выполнении условия устойчивости (12.24) один из коэффициентов, b_{-2} или b_0 , отрицателен при $a\varkappa \neq 1$ и $a\varkappa \neq 2$. Далее воспользуйтесь теоремой 2.1.

10.v2.3. У к а з а н и е. Воспользуйтесь решением задачи 2.6.

Библиографический список

1. *Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 2000.
2. *Волков Е. А.* Численные методы. СПб.: Изд-во «Лань», 2004.
3. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, вып. 3. С. 271–306.
4. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
5. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
6. *Годунов С. К. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976.
7. *Дробышевич В. И. и др.* Задачи по вычислительной математике / В. И. Дробышевич, В. П. Дымников, Г. С. Ривин. М.: Наука, 1980.
8. *Карамышев В. Б.* Монотонные схемы и их приложения в газовой динамике. Новосибирск: НГУ, 1994.
9. *Ковеня В. М., Яненко Н. Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
10. *Ковеня В. М.* Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.
11. *Коробицына Ж. Л., Хакимзянов Г. С.* Практикум на ЭВМ по курсу «Методы вычислений». Новосибирск: НГУ, 1995.
12. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Дрофа, 2008.
13. *Куликовский А. Г. и др.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. М.: Физматлит, 2001.
14. *Лебедев А. С., Черный С. Г.* Практикум по численному решению уравнений в частных производных. Новосибирск: НГУ, 2000.
15. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
16. *Михайлов А. П.* Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе. Новосибирск: НГУ, 2003.
17. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

18. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
19. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
20. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. СПб.: Изд-во «Лань», 2009.
21. *Самарский А. А. и др.* Задачи и упражнения по численным методам / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. А. Самарская. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
22. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003.
23. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
24. *Смелов В. В.* Основы методов вычислительной математики: В 5 ч. Новосибирск: НГУ, 1986, Вып. 1, 2; 1987, Вып. 3; 1988, Вып. 4; 1996, Вып. 5.
25. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
26. *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1: Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
27. *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2: Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
28. *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2008. Ч. 3: Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов.
29. *Хакимзянов Г. С., Шокин Ю. И.* Разностные схемы на адаптивных сетках: В 3 ч. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 1: Задачи для уравнений в частных производных с одной пространственной переменной.
30. *Шокин Ю. И., Хакимзянов Г. С.* Введение в метод дифференциального приближения. Новосибирск: НГУ, 1997.
31. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Physics. 1983. Vol. 49. P. 357–393.
32. *Toro E. F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009.

Учебное издание

Хакимзянов Гаяз Салимович,
Черный Сергей Григорьевич

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Часть 4. Численные методы решения
задач для уравнений гиперболического типа

Учебное пособие

Редактор *А. В. Грасмик*

Подписано в печать 20.04.2014 г.

Формат 60 x 84 1/16.

Уч.-изд. л. 13. Усл. печ. л. 12.

Тираж 250 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.

Список литературы

- [1] *Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 2000.
- [2] *Волков Е. А.* Численные методы. СПб.: Изд-во «Лань», 2004.
- [3] *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, вып. 3. С. 271-306.
- [4] *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
- [5] *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
- [6] *Годунов С. К. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976.
- [7] *Дробышевич В. И. и др.* Задачи по вычислительной математике / В. И. Дробышевич, В. П. Дымников, Г. С. Ривин. М.: Наука, 1980.
- [8] *Карамышев В. Б.* Монотонные схемы и их приложения в газовой динамике. Новосибирск: НГУ, 1994.
- [9] *Ковеня В. М., Яценко Н. Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
- [10] *Ковеня В. М.* Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.
- [11] *Коробицына Ж. Л., Хакимзянов Г. С.* Практикум на ЭВМ по курсу «Методы вычислений». Новосибирск: НГУ, 1995.
- [12] *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Дрофа, 2008.
- [13] *Куликовский А. Г. и др.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. М.: Физматлит, 2001.
- [14] *Лебедев А. С., Черный С. Г.* Практикум по численному решению уравнений в частных производных. Новосибирск: НГУ, 2000.

- [15] *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
- [16] *Михайлов А. П.* Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе. Новосибирск: НГУ, 2003.
- [17] *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
- [18] *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
- [19] *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
- [20] *Самарский А. А.* Введение в численные методы. СПб.: Изд-во «Лань», 2009.
- [21] *Самарский А. А. и др.* Задачи и упражнения по численным методам / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. А. Самарская. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [22] *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы математической физики. М.: Науч. мир, 2003.
- [23] *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [24] *Смелов В. В.* Основы методов вычислительной математики: В 5 ч. Новосибирск: НГУ, 1986, Вып. 1, 2; 1987, Вып. 3; 1988, Вып. 4; 1996, Вып. 5.
- [25] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
- [26] *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1: Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
- [27] *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2: Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
- [28] *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2008. Ч. 3: Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов.

- [29] *Хакимзянов Г. С., Шокин Ю. И.* Разностные схемы на адаптивных сетках: В 3 ч. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 1: Задачи для уравнений в частных производных с одной пространственной переменной.
- [30] *Шокин Ю. И., Хакимзянов Г. С.* Введение в метод дифференциального приближения. Новосибирск: НГУ, 1997.
- [31] *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Physics. 1983. Vol. 49. P. 357-393.
- [32] *Toro E. F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009.