В. М. Ковеня

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Курс лекций

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. М. Ковеня

Разностные методы решения многомерных задач

Курс лекций

Новосибирск
2004

ББК В 253.33
УДК 518:517.994
К565

Ковеня В. М. Разностные методы решения многомерных задач: Курс лекций /Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2004. 146 с.
ISBN №5-94356-203-6

В курсе лекций изложены конечно-разностнех методы решения многомерных задач. В первой главе приведены основные разностные методы решения многомерных задач математической физики. Методы повышенной точности решений за счет использования неравномерных, в том числе адаптирующихся к решению сеток, и компактные схемы повышенного порядка изложены во второй главе. Третья глава посвящена основным численным алгоритмам решения уравнений Эйлера и Навье—Стокса сжимаемого газа и несжимаемой жидкости.

Предназначено для студентов и аспирантов математических и физических специальностей, специализирующихся в области математического моделирования. Будет полезно также для сотрудников, использующих конечно-разностные методы в своих исследованиях.

Рецензенты
д-р физ.-мат. наук, проф. Г. С. Ривин
д-р техн. наук, проф. А. Д. Рычков

Рекомендовано к изданию
Российским центром математического образования
Министерства образования и науки РФ
в качестве учебного пособия для студентов
математических и физических специальностей
высших учебных заведений.

ISBN №5-94356-203-6

©Новосибирский государственный
университет, 2004
©В. М. Ковеня, 2004

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание подготовлено на основе курса лекций по методам вычислений, которые автор читает для студентов 4-го курса математического факультета НГУ, специализирующихся по прикладной математике и механике. При выборе программы курса и отборе материала учитывалось, что студенты знакомы с основными разделами механики и численных методов, которые были им прочитаны на 2-м и 3-м курсах. Поэтому его следует рассматривать как дополнительные главы по методам вычислений, знакомящих слушателей с основными разностными методами решения многомерных задач.

На содержание курса лекций повлияло, во-первых, ограниченность объема курса, что заставило автора выбрать наиболее важные с его точки зрения разделы численных методов. Во-вторых, сказалось и влияние научных интересов автора. Поэтому основные численные алгоритмы изложены на примере конечно-разностных методов. Правда, этот выбор в значительной мере обусловлен универсальностью разностных методов и возможностью их применения для решения широких классов задач. Главное внимание уделено описанию основных подходов построения разностных схем с заданными свойствами и наиболее употребительных на сегодня численных алгоритмов и приемов их алгоритмической реализации при решении многомерных, в том числе и нелинейных задач.

Курс лекций включает три раздела:

— разностные методы решения многомерных задач математической физики;

— основные методы повышения точности решений;

— некоторые численные алгоритмы решения многомерных задач аэро- и гидродинамики.

Он является переработанным и дополненным вариантом учебного пособия того же автора "Методы вычислений"(Новосибирск: НГУ, 1995). Введение посвящено основам математического моделирования как нового метода исследования. Введена технологическая цепочка моделирования и отражена роль численных методов как важнейшего элемента технологической цепочки. В первых двух разделах дано описание употребительных разностных схем и их обобщение на многомерный случай. Главным образом, это неявные разностные схемы как наиболее экономичные при решении многомерных задач. Анализ их свойств проводится, как правило, на линейных задачах или модельных уравнениях. В последнем разделе изложены стандартные на сегодня численные методы решения уравнений газовой динамики и уравнений Навье—Стокса сжимаемого теплопроводного газа и несжимаемой жидкости.

В настоящее время существует большое количество монографий и работ по разностным схемам. Однако они, как правило, посвящены или основам конечно-разностных методов или каким-либо специальным методам. Автор считал полезным дать общее описание наиболее употребительных разностных схем в одном, пусть и кратком, изложении. Библиографический список включает минимальное число опубликованных работ, которые необходимы при более детальном ознакомлении с материалом (для удобства чтения он приведен в алфавитном порядке). Нумерация формул в каждом параграфе самостоятельная и выдерживается в его пределах. При перекрестных ссылках внутри главы номер формулы составляется из номера параграфа и формулы. Например, ссылка (k, l, m) означает, что формула m находится в параграфе l главы k.

Автор выражает искреннюю благодарность В. В. Карначук за подготовку текста.

ВВЕДЕНИЕ. ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ЦЕПОЧКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математическое моделирование как новый способ исследования и получения новых знаний сформировалось в 70-х гг. XX в. на основе широкого применения математических методов при решении теоретических и практических задач естествознания. Его создание и развитие обусловлены появлением электронно-вычислительных машин, способных производить арифметические и логические вычисления со скоростью, недоступной для человека. Необходимость решения все более сложных задач науки, техники и народного хозяйства потребовала разработки и обоснования математических моделей, отражающих основные закономерности исследуемых явлений и создания экономичных численных алгоритмов их решения. Эффективная реализация этих алгоритмов, в свою очередь, не только потребовала разработки и создания новых ЭВМ, но и стимулировала исследования по созданию новых языков программирования, операционных систем и систем поддержки программного обеспечения, а также разработку новых подходов в программировании и информационных технологиях. Все это позволило перейти от использования ЭВМ как скоростного вычислителя к системе моделирования, включающей весь процесс от разработки математических моделей, численных алгоритмов, программирования до создания комплексов и пакетов программ для решения классов задач, анализа результатов, вывода, хранения, что является содержанием нового научного направления — математического моделирования.

С возникновением нового направления исследований появились проблемы, от решения которых зависит его развитие. Математические модели и алгоритмы, программы и комплексы программ, ЭВМ и системы поддержки для решения задач являются элементами моделирования. Их роль и место могут быть правильно оценены лишь во всей цепочке моделирования, которую назовем технологической. Под *технологической* цепочкой моделирования будем понимать совокупность ее элементов, выполняемых в определенной последовательности и составляющих полный цикл. Разумеется, для различных областей исследования эти элементы могут различаться, поэтому за основу технологической цепочки должны быть выбраны элементы общие для всех областей моделирования. В соответствии с современными представлениями процесс моделирования может быть представлен в виде такой последовательности: исследуемое явление—математические модели—численные алгоритмы—программирование—ЭВМ—вычисления и их анализ—обработка и хранение результа-

тов, дополняющей известную триаду математического моделирования модель—алгоритм—программа. Все элементы технологической цепочки, очевидно, взаимосвязаны, и эта связь нелинейна, а изменение одного из ее элементов может привести к изменению не только последующих, но и предыдущих элементов. До начала моделирования исследователь явно или неявно проводит анализ всей цепочки моделирования, исходя из современных представлений об исследуемом явлении или процессе, наличия ресурсов ЭВМ и ее возможностей, наличия численных алгоритмов и т. д. Конечно, для некоторых изучаемых явлений и классов решаемых задач отдельные элементы цепочки могут быть опущены. В качестве примера приведем известное представление Н. Н. Яненко о разностной схеме как математической модели для описания физического явления. Создание более полных математических моделей, способных адекватно описывать более сложные исследуемые процессы, и разработка более точных и эффективных численных алгоритмов приводили к необходимости создания ЭВМ все большей производительности. Это могло быть достигнуто не только за счет совершенствования элементной базы, но и главным образом за счет новых архитектур ЭВМ, использующих принципы многопроцессорности и параллельности вычислений. В свою очередь, эти архитектуры накладывают определенные требования на численные алгоритмы, большинство из которых созданы в эпоху однопроцессорных ЭВМ, где вычисления проводились последовательно. Новые архитектуры ЭВМ требуют создания новых численных алгоритмов и пересмотра существующих численных методов в целях их адаптации к этим архитектурам.

В настоящее время можно утверждать, что математическое моделирование наряду с физическим и натурными экспериментами является основным способом исследования и получения новых знаний в различных областях естествознания. Можно ожидать, что его роль в дальнейшем возрастет, но оно не заменит физический или натурный эксперимент, так как опыт всегда останется основой исследования. Можно ожидать сближения различных форм исследования, дополняющих друг друга.

Активное использование математического моделирования в различных областях естествознания и человеческой деятельности обусловлено многими факторами, основными из которых являются следующие:

– усложнение класса исследуемых задач, для изучения которых необходимо создание новых дорогостоящих экспериментальных установок или модельных объектов (в ряде случаев численное моделирование этих задач может быть получено при меньших финансовых затратах);

– большие энергетические и финансовые затраты на обслуживание экспериментальных установок и объектов;

– необходимость решения экологических, социальных и других проблем;

– невозможность проведения физического (химического, экономического и т. д.) или натурного моделирования в ряде областей исследования (в этом случае математическое моделирование является единственно возможным).

К указанным факторам надо добавить возможность сокращения сроков исследования и получения результатов, возможность их многократного и быстрого повторения или уточнения, хранения и т. д. Развитие математического моделирования приводит к созданию автоматизированных систем для управления производством, что позволит резко увеличить производительность труда и избежать влияния субъективного «человеческого» фактора при принятии решений. Таким образом, математическое моделирование становится основным способом исследования и получения новых знаний. В то же время результаты математического моделирования находят широкое применение в производстве и других областях человеческой деятельности, например при создании систем автоматического проектирования (САПР), экспертных систем и т. д.

Как мы представляем себе процесс моделирования того или иного явления? На основе наших представлений и знаний об исследуемой проблеме обычно строится математическая модель или класс моделей, учитывающих ее основные закономерности, и формулируется начально-краевая задача. Выбранные или предложенные модели в зависимости от сложности проблемы и целей исследования могут описываться системами алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений или их комбинациями. Для решения этих уравнений выбирается подходящий численный метод, а при его отсутствии — разрабатывается новый метод или адаптируется существующий и строится численный алгоритм, его реализующий. С помощью выбранного языка программирования создается и отлаживается программа или комплекс программ. Проведя численные расчеты на ЭВМ, мы получим решение задачи. Анализ результатов расчетов, сравнение их с имеющимися экспериментами или другими данными позволяют сделать вывод о достоверности полученных результатов, точности расчета и возможности его использования. Если исследователя не удовлетворяет результат, то вновь проводится анализ всей технологической цепочки, изменяются при необходимости ее элементы (уточняется математическая модель, выбирается другой численный метод и т. д.) и повторяется весь процесс моделирования.

Выбор математических моделей и корректная постановка задач относятся к предметной области исследования. Для задач механики сплошной среды эти модели описываются системой дифференциальных и интегральных уравнений (см. § 1). Численные алгоритмы, как и математические модели, являются основным и едва ли не главным элементом технологической цепочки. При решении современных задач естествознания широко применяются различные численные методы, основными из которых для задач механики сплошной среды являются приближенные и численные методы. Первые основаны на некотором представлении решения исходя из известных предположениях о характере решения. Так, асимптотические методы в аэродинамике используют представление решения в виде его разложения по малому параметру (по обратным числам Рейнольдса для больших чисел Re или числам Маха M для гиперзвуковых скоростей и т. д.). Несмотря на простоту получения таких решений, эти подходы применимы лишь для сравнительно простых задач с преобладанием одного типа течений. Всегда остается вопрос об области применимости этих подходов и их обоснования. Асимптотические методы широко использовались на начальном этапе моделирования. Переход к более сложным моделям потребовал разработки и применения численных алгоритмов решения многомерных задач в рамках различных физико-математических моделей.

На современном этапе развития математического моделирования широкое применение получили различные численные методы, такие как конечно-разностные методы (МКР) и метод конечных объемов (МКО), метод конечных элементов, метод граничных элементов, специальные методы: метод частиц в ячейках, метод статистических испытаний и другие методы.

Как и предыдущие элементы, ЭВМ является одним из основных элементов технологической цепочки, принципиально влияющим на эффективность всего процесса моделирования. Тип ЭВМ существенно влияет на используемые численные методы, и, наоборот, применяемые методы могут влиять на архитектуру ЭВМ. На начальном этапе развития вычислительной техники ЭВМ, как правило, были однопроцессорными, что предполагало последовательность выполнения арифметических операций. Существующие в настоящее время численные методы были созданы в эпоху однопроцессорных ЭВМ. Появление многопроцессорных, векторных и матричных ЭВМ потребовало анализа существующих численных методов и создания специализированных алгоритмов, ориентированных на определенную архитектуру ЭВМ или их типы. Наряду с разработкой универсальных ЭВМ, широкое распространение получили

специальные ЭВМ, ориентированные на определенный класс задач, при решении которых достигается максимальная производительность.

Мы рассматривали до настоящего времени ЭВМ как скоростной вычислитель, т. е. современный арифмометр. Но существует и другая возможность использования ЭВМ как интеллектуальной машины. Уже к сегодняшнему времени созданы экспертные системы как системы обработки и получения новых знаний. Системы моделирования различных задач науки и техники будут входить в них как элементы этой экспертной системы. В качестве примеров назовем существующие обучающиеся ЭВМ, экспертные системы "MATHEMATICS", "MATLAB" и др. Не останавливаясь на проблемах программирования, отметим, что переход от создания программ для решения отдельной задачи к комплексу или классу задач заставил исследователей изменить подход к программированию и привел к появлению комплексов и пакетов программ, ориентированных на решение целых классов задач. Этот переход потребовал разработки теории пакетов, выявления их основных закономерностей, создания и выработки основных требований к ним.

В заключение остановимся на модульном подходе моделирования, при котором на начальном этапе проводится совокупный анализ цепочки моделей, дается их модульная структура и данный модульный принцип проводится на всех этапах технологической цепочки. При таком подходе разбиению моделей на модули соответствует модульная цепочка алгоритмов и соответственно пакеты программ, созданные на модульном принципе. Единая методология построения моделей, алгоритмов и программ значительно упрощает процесс моделирования и сокращает сроки реализации проекта.

Глава I. ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Физико-математические модели. Основные уравнения

1.1. О физико-математических моделях

Для задач механики сплошных сред в наиболее полной постановке физико-математические модели могут быть описаны интегральными законами сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V W_0 dV + \oint_S W\,ds = \int_V F dV, \tag{1}$$

выражающими связь между изменением во времени в замкнутом объеме V некоторых величин W_0 и изменением потоков W при переходе через границы S, а также взаимодействием потоков с внешними источниками или стоками F. Интегральные законы сохранения (например, массы, импульсов и энергии для моделей сплошной среды) являются наиболее общей формой описания движения сред и справедливы как для непрерывных, так и для разрывных решений. Наряду с интегральной формой используется их дифференциальное представление

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} + \mathrm{divW} = \mathrm{F}, \tag{2}$$

полученное из систем уравнений (1), но справедливое лишь для непрерывных решений (см., например, [22]).

Многообразие и многопараметричность исследуемых задач и их математических постановок, разномасштабность процессов приводят к цепочке физико-математических моделей, каждая из которых получена при определенных предположениях о характере изучаемого явления и описывает основные его закономерности. Особенностью такого подхода является и многообразие уравнений, описывающих эти модели. Полученные уравнения могут быть уравнениями различного типа (гиперболическими, параболическими, эллиптическими или уравнениями смешанного типа), что приводит к различным постановкам начальных и краевых задач. Более того, при исследовании одного класса задач тип уравнений может меняться в зависимости от характера решения. Например, стационарные уравнения газовой динамики являются уравнениями эллиптического типа для дозвуковых скоростей и гиперболического для сверхзвуковых, т. е. в отдельных подобластях расчетной области необходимо решать уравнения различного типа, что накладывает дополнительные требования на применяемые численные методы.

Большинство процессов в механике жидкости и газа являются нелинейными и эволюционными, и как следствие эти же свойства присущи описываемым их системам уравнений. Теория таких уравнений изучена недостаточно, для большинства задач не доказаны теоремы существования и единственности, более того, их решения могут быть неединственными и разрывными даже при гладких начальных данных (см. [22]). Переход к многомерным задачам и усложнение расчетных областей (рассмотрение реальных геометрий) вносят дополнительные трудности в их постановку. При отсутствии строгих доказательств существования и единственности решений всегда остается открытым вопрос о соответствии физико-математической модели исследуемому явлению. При недостаточной информации об исследуемом процессе возникает необходимость рассмотрения различных моделей, учитывающих основные закономерности изучаемого явления для различных диапазонов основных параметров. Таким образом, выбор и формулировка физико-математических моделей становится многопараметрической задачей, решение которой требует анализа всей цепочки моделей.

До начала моделирования исследователь должен ответить на ряд вопросов. Например, какова конечная цель исследования и какие данные предполагается получить в результате решения этой задачи? Насколько важна данная задача и какое место она занимает в общей проблеме? Какова точность модели и с какой точностью требуется получить ответ? Какие ресурсы необходимо привлечь для решения задачи и какие математические и технологические возможности имеются у исследователя? Фактически исследователь проводит анализ всей технологической цепочки моделирования, на основе которого делает вывод о возможности решения задачи или проблемы на основе существующих моделей, численных алгоритмов и технических средств (ЭВМ) или формулирует условия и требования, необходимые для ее разрешения (например, требования к созданию дополнительных моделей, численных методов решения, а также новых ЭВМ и т. д.)

Создание моделей, адекватно описывающих исследуемое явление или изучаемый процесс, включает их математическое обоснование и корректную постановку начально-краевых задач. В соответствии с современными представлениями все классы моделей для задач механики могут быть условно разделены на четыре группы (уровня):

1) аналитические приближения и линеаризованные уравнения;

2) нелинейные уравнения без учета диссипативных процессов;

3) нелинейные уравнения с учетом диссипативных процессов;

4) полные нестационарные модели, описываемые уравнениями с уче-

том реальных эффектов (типа уравнений Навье—Стокса с учетом сжимаемости и теплопроводности, турбулентности и т. д.), уравнениями многокомпонентных и многофазных сред, магнитогидродинамические модели различного уровня и т. д.

В настоящее время в зависимости от целей исследования и классов решаемых задач, важности задачи в общей проблеме, требуемой точности решения, имеющихся математических и технических возможностей исследователей и других факторов используются все группы моделей, начиная от простейших (первый уровень) до самых сложных (третий и четвертый уровни).

Рассмотрим некоторые примеры из области вычислительной аэродинамики. В приближении потенциального течения (первый уровень) панельным методом удается получать решение задач обтекания самолетов реальных конфигураций (например, самолета $F4F$ с подвесками для оружия) и получать распределение параметров течения на его поверхности. Первые такие расчеты выполнены в 70-х гг. XX в. на ЭВМ малой мощности. Однако эта модель не учитывает реальные эффекты в газе, например сжимаемость, вязкость и теплопроводность, и не позволяет получить распределения газодинамических потоков вблизи тела.

Переход к большим скоростям требует использования нелинейных моделей, описываемых уравнениями газовой динамики (второй уровень). Их решения могут содержать разрывы газодинамических величин, что требует использования специальных методов расчета и ЭВМ большой мощности ($\approx 10^{12}$ флоп).[1] С появлением ЭВМ большего быстродействия в 80-е гг. XX в. расчет обтекания сверхзвукового самолета (например, типа $F16$) в приближении уравнений Эйлера мог быть проведен за время, сравнимое со временем его полета. Однако и в настоящее время решить задачу нестационарного обтекания с учетом реальных свойств газа, таких как турбулентная вязкость и теплопроводность (третий и четвертый уровни), даже с использованием современных суперЭВМ удается лишь для модельных форм летательных аппаратов. Указанные трудности связаны не только с многопараметричностью задач (различные числа Маха, Рейнольдса, геометрии обтекаемых тел и т. д.), но и в большей мере с недостаточным обоснованием математических моделей и их замыкающих соотношений, например с недостаточным обоснованием моделей турбулентности и областей их применимости.

Подобные трудности возникают и в гиперзвуковой аэродинамике, где наряду с решением отмеченных выше проблем необходимо правильно учесть и оценить влияние химических реакций, протекающих в газе

[1] Флоп — количество операций за 1 с. над числами с плавающей запятой.

вблизи обтекаемого тела и на его поверхности при больших температурах, оценить разрушение поверхности и учесть прочностные и другие характеристики.

Естественно, при решении других задач в рамках различных приближений возникают другие проблемы, решение которых определяет прогресс в математическом моделировании. Многопараметричность исследуемых задач и разномасштабность процессов, их нелинейность и многомерность не позволяют сформулировать общие подходы при постановке задач и получении решений. Можно говорить лишь о направлениях исследований и основных тенденциях развития, включающих:

– использование моделей различного уровня в зависимости от целей исследования;

– применение все более сложных моделей с учетом большего числа реальных физических эффектов для описания исследуемых явлений;

– анализ моделей, их систематизацию и выявление некоторых классов общих моделей, пригодных для описания широкого комплекса проблем;

– дальнейшее математическое обоснование физико-математических моделей и корректных постановок начально-краевых задач.

Следует отметить, что упрощенные модели получают, как правило, из моделей более высокого уровня при различных предположениях о характере исследуемого явления. Таким образом, взяв за основу более полную модель, можно получить цепочку упрощенных моделей. Такие полные модели, из которых могут быть получены их упрощенные приближения, будем называть *накрывающими*. Ярким примером таких моделей является модель, описываемая уравнениями Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа (модель четвертого уровня). При пренебрежении эффектами вязкости и теплопроводности получаем модель газовой динамики, пригодную для описания многих физических задач. Для сильно вязких течений может быть использовано приближение пограничного слоя, полученное из уравнения Навье–Стокса при сохранении членов порядка $O(1/\sqrt{Re})$ и пренебрежении членами более высокого порядка малости. В рамках того же подхода можно получить модели вязкого ударного слоя, модели "параболизованных"уравнений Навье–Стокса и т. д. (см., например, [11; 12]). Очевидно, что и для других классов исследуемых задач могут быть построены цепочки упрощенных моделей на основе базовой накрывающей модели. Использование такого подхода позволит сократить число рассматриваемых моделей и сосредоточиться на изучении базовых моделей, описывающих целые классы задач.

Следует отметить, что достигнутый в настоящее время уровень

математического моделирования (по крайней мере, в области механики сплошной среды) основывается на большом количестве работ математиков-теоретиков, механиков и физиков предыдущих поколений. Новые достижения в математическом моделировании будут основаны на новых теоретических результатах и их использовании математиками–вычислителями.

Качественный скачок в быстродействии ЭВМ до $10^{12} - 10^{14}$флоп, достигнутый в последние 5—10 лет, позволяет перейти к численному моделированию задач четвертого уровня, например, к моделированию реальных процессов в металлургии и химии, в аэродинамике при оптимизации форм реальных летательных аппаратов в широком диапазоне параметров набегающего потока, моделированию процессов в гиперзвуковых воздушно-реактивных и ракетных двигателях, моделированию процессов перехода течения от ламинарного к турбулентному и обратно и т. д.

1.2. Основные уравнения

При дальнейшем описании численных методов мы будем, в основном, использовать уравнения в дифференциальной форме. Начнем их рассмотрение с одномерных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

разрешенных относительно производной по времени (уравнений типа Коши–Ковалевской). Здесь $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t,x) = (U_1, .., U_m)$ — вектор размерности m , а $\mathbf{W}$ — есть вектор, зависящий от $\mathbf{U}$ или $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}_x$:

$$\text{а)} \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U}), \quad \text{в)} \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x), \quad \text{где} \quad \mathbf{U}_x = \partial \mathbf{U}/\partial x,$$

т. е. $\mathbf{W}$ является нелинейной функцией. Если $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U})$, то система уравнений (3) есть система уравнений первого порядка, а для случая "в" — второго. Наряду с дивергентной записью уравнений будет использоваться их недивергентный вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + B\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + B\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + C\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} = 0,$$

соответствующий случаям "а"и "в". Здесь

$$B = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}, \quad C = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}_x} \quad \text{матрицы размера} m \times m.$$

Пусть $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f})$ — вектор, зависящий от вектора $\mathbf{f} = (f_1, \dots f_m)$. Тогда системе уравнений (3) сответствуют системы уравнений первого или второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \tilde{B}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \tilde{B}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \tilde{C}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где матрицы $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ связаны с B и C соотношениями

$$\tilde{B} = A^{-1}BA, \quad \tilde{C} = A^{-1}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}_x}, \quad \mathbf{f}_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}.$$

Выбор вектора $\mathbf{f}$ в качестве искомой функции может оказаться более удобным при решении уравнений (особенно в многомерном случае), так как вид матричных операторов $\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ при специальном выборе $\mathbf{f}$ может быть более простым. Такая ситуация имеет место для уравнений газовой динамики или Навье–Стокса в примитивных переменных плотность, скорость и давление или температура. Отметим, что при решении краевых задач граничные условия задаются именно для этих переменных.

И наконец, приведем в качестве модельных уравнений линейные уравнения гиперболического

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

или параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = b^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6}$$

являющиеся линейными аналогами систем уравнений (4) для скалярной функции.

Конечно, переход к недивергентным уравнениям (4) сужает классы исследуемых задач, так как при их выводе предполагалась гладкость функций. Вместе с тем недивергентная форма удобнее для исследования, а в ряде случаев и для построения эффективных алгоритмов.

Отметим еще одно важное важное свойство уравнений (3) первого порядка, для которых справедливы соотношения

$$\lambda \mathbf{W} = B\mathbf{U}, \quad B = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}. \tag{7}$$

Такие системы уравнений называют *однородными* системами степени λ. В частности, для однородных систем первой степени эквивалентны дивергентная и недивергентная формы записи уравнений (3):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = -B\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}B\mathbf{U}.$$

Примером такой системы являются уравнения газовой динамики для идеального газа

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad p = p(\rho, e) = (\gamma - 1)\rho e,$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{pmatrix}, \quad E = \rho(e + \frac{u^2}{2}).$$

В консервативных переменных ρ, ρu, E матрица B принимает вид

$$B = \frac{\partial W}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho^2} & (3-\gamma)\frac{m}{\rho} & \gamma - 1 \\ -\frac{\gamma m E}{\rho^2} + (\gamma-1)\frac{m^3}{\rho^3} & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma-1)\frac{m^2}{\rho^2} & \gamma\frac{m}{\rho} \end{pmatrix},$$

$$m = \rho u.$$

Как нетрудно видеть, $\mathbf{W} = B\mathbf{U}$, т. е. уравнения газовой динамики являются однородной системой первой степени. Это свойство уравнений газовой динамики используется при построении разностных схем.

Перейдем к многомерным задачам. Рассмотрим систему уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{W_j}}{\partial x_j} = 0, \tag{8}$$

где, как и выше, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(U_1, ..., U_m)$ – вектор размерности m, а $\mathbf{W_j} = \mathbf{W}_j(\mathbf{U})$ — векторы в каждом направлении $x_j, (j = 1, ..., N)$, $N-$ размерность задачи по пространству. Если $\mathbf{W}_j$ — гладкие функции, то системе уравнений (8) в консервативной форме соответствует недивергентная форма

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} B_j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = 0, \quad B_j = \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}_j}. \tag{9}$$

Уравнениям (8) в более общем виде, где $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f})$, $\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}, \mathbf{f_l})$, $\mathbf{f}_l = \partial\mathbf{f}/\partial x_l$, соответствует недивергентная форма

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N}(\tilde{B}_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{N} C_{jl} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j \partial x_l}) = 0. \tag{10}$$

Здесь $\tilde{B}_j = A^{-1}B_jA$, $A = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}$, $C_{jl} = A^{-1}\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}_l}$.

Отметим еще одну форму представления уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -A^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial x_i}, \tag{11}$$

которую назовем *предельно-дивергентной*. Эта форма удобна для нахождения стационарного решения системы уравнений (8) и используется при построении итерационных и разностных схем. В общем случае для нахождения стационарного решения можно рассматривать предельное решение нестационарной системы

$$C\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial x_i} \tag{12}$$

со стационарными краевыми условиями, где, вообще говоря, оператор C выбирается лишь из условий наиболее быстрой сходимости решения задачи (12) к стационарному решению. Метод, основанный на нахождении решения стационарной задачи как предельного решения нестационарной задачи со стационарными краевыми условиями, носит название *метода* (принципа) *установления*, а оператор C называется *релаксационным*. В качестве C можно выбирать оператор A или оператор более сложной структуры, например, в виде

$$C = A\left(\alpha C_0 + \beta C_1 \frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{13}$$

Тогда система уравнений

$$\alpha C_0 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \beta C_1 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} = -A^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial x_i}, \tag{14}$$

аппроксимирующая при установлении стационарные уравнения (8), может иметь другой тип, чем исходные уравнения. Изменение типа уравнений в ряде случаев может привести к упрощению получения стационарного решения.

§ 2. Основные понятия теории разностных схем

Предполагая, что читатель знаком с основами метода конечных разностей и конечных объемов, ниже приводятся минимальные необходимые сведения из теории разностных схем, используемые в дальнейшем. Более подробно с теорией разностных схем можно ознакомиться, например, по монографиям [4; 7; 12; 15; 24]. Кратко говоря, сущность метода конечных разностей состоит в замене области непрерывного изменения аргумента и замене (аппроксимации) исходных дифференциальных операторов сеточными. Аналогичным образом конструируются разностные аналоги граничных условий и начальных данных.

2.1. Сетка

В результате отображения области непрерывного изменения аргумента Q в область дискретного аргумента Q_h (кратко, $Q \to Q_h$) получаем множество точек, называемое *сеткой*. Точки сетки называтся *узлами*. Естественно, отображение $Q \to Q_h$ может производиться различными способами, что означает различную структуру сетки. Структура разностной сетки зависит от выбора аппроксимируемой континуальной задачи и типа аппроксимирующего разностного оператора.

Назовем сетку *регулярной*, если она взаимно однозначно отображается на прямоугольную сетку в прямоугольной области с сохранением порядка узлов сетки (рис. 1). К классу регулярных сеток можно отнести также криволинейную сетку. В этом случае центр есть особая точка. Оставшееся подмножество сетки является регулярной сеткой в выше определенном смысле. Можно рассматривать криволинейную треугольную, четырехугольную и подобные типы сеток. Назовем сетку *однородной*, если ее структура в расчетной области одного типа. Указанные виды сеток служат примерами простых регулярных и однородных сеток.

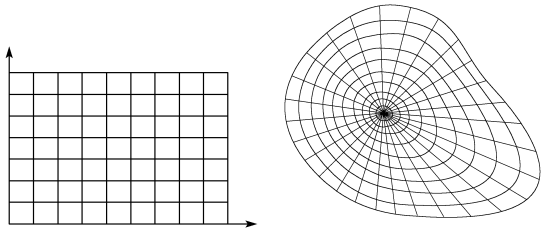

Рис. 1

Введем понятие *сетки общего вида*. В общем виде сетку можно трактовать как конечный набор локальных координатных систем. Так как исходной формой описания континуального решения являются законы сохранения в интегральной форме, наиболее подходящий вид сетки — *ячеистая структура*. Ячеистая сетка состоит из конечного набора примыкающих друг к другу, но не пересекающихся ячеек, как правило, одного типа (треугольники, четырехугольники и т. д.), полностью покрывающих область интегрирования. В некоторой выделенной точке ячейки, например в центре тяжести, задаются величины, определяющие осредненное их состояние в ячейке. В точках границы ячейки задаются осредненные значения потоков. Такая форма сетки весьма удобна, так как осредненные потоки непрерывны на границе, по крайней мере, при переходе к пределу при $h \to 0$, где h — пространственный интервал ячейки. В некоторых случаях различные законы сохранения удобнее рассматривать на различных ячейках и сетках. Такие сетки называют *смешанными*. В случае ячеистой сетки законы сохранения принимают вид квадратурных формул вдоль границ ячеек [22]. В общем случае неоднородной сетки покрытие области интегрирования может осуществляться с помощью ячеек различного типа (треугольных, четырехугольных, ячеек Дирихле и т. д.).

Представление сетки в виде суммы регулярных сеток будем называть *композицией*, или *сегментацией сетки*, а простые регулярные подмножества сетки — *сегментами*. Последние покрывают всю область интегрирования и могут примыкать друг к другу без пересечения или перекрываться в зависимости от структуры алгоритма и реализации его на ЭВМ. В дальнейшем различные виды сеток будут рассмотрены на конкретных примерах.

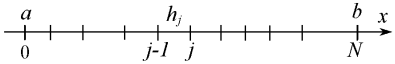

Рис. 2.

Простейшим примером регулярной сетки в одномерной области $Q_h \quad \{a \le x \le b\}$ служит разбиение отрезка [a,b] на N частей (рис. 2). Расстояние между соседними узлами называется *шагом сетки* ($h_j = x_j - x_{j-1}$). Если шаг сетки не зависит от номера узла, то сетка называется *равномерной*, иначе *неравномерной*. В многомерном случае для прямоугольных областей регулярная сетка строится аналогично одномерному случаю: отрезки вдоль координатного направления x_l разбиваются на N_l частей.

Вопрос построения сетки в сложных расчетных областях является едва ли не главным при численном решении многомерных задач механики.

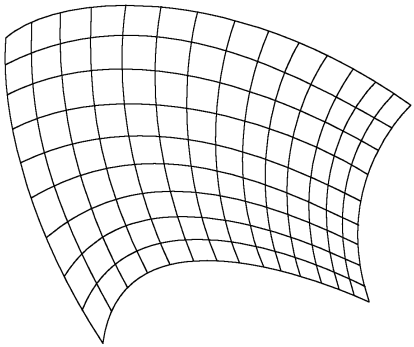

Рис. 3

В зависимости от геометрии расчетной области и используемой системы координат сетка может быть прямоугольной или криволинейной (см. рис. 1), ортогональной или неортогональной (рис. 3) и т. д. В свою очередь, выбор системы координат зависит от многих факторов, таких как краевые условия, информация о решении и т. д. и в каждом конкретном случае может решаться неоднозначно. Например, применение прямоугольной сетки в криволинейной расчетной области приводит к усложнению реализации краевых условий, так как такая сетка не является согласованной (сетка называется *согласованной*, если узлы сетки совпадают с границами области). Поэтому при решении задач в криволинейных областях часто используются криволинейные неортогональные сетки (см. рис. 3), границы которых являются координатными линиями. Применение неортогональных сеток связано, как правило, с усложнением аппроксимации исходных дифференциальных уравнений. Рассмотренные выше криволинейные сетки относятся к классу *геометрически адаптируемых сеток*, т. е. сеток, учитывающих геометрию расчетной области (см. [8; 12; 13]).

Наряду с геометрически адаптируемыми сетками может быть рассмотрен класс *динамически адаптируемых сеток*, автоматически подстраивающихся к решению исходных дифференциальных уравнений. Исходная система уравнений дополняется уравнениями для сетки, которые строятся исходя из некоторого принципа. Совместное решение

системы уравнений и уравнений для сетки позволяет одновременно определить новые значения газодинамических функций и координат узлов сетки. Данный подход является оптимальным в смысле минимизации погрешности решения. Вопросы построения адаптируемых подвижных сеток будут освещены ниже (см. также [8; 12; 13; 23; 29]).

Сетку будем обозначать через Q_h , если она содержит только пространственные ячейки, или через $Q_{\tau,h}$, если она содержит пространственно-временные ячейки. Здесь τ — временной шаг сетки, $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_m)$ —вектор пространственных шагов сетки.

2.2. Сеточная функция

Функции дискретного аргумента, определенные на сетке $Q_{\tau,h}$ (или Q_h), называются *сеточными функциями*. Значение сеточной функции в некотором узле сетки $(t_n, x^1_{j_1}, ..., x^m_{j_m}) \in Q_{\tau,h}$ будем обозначать через u^n, u^n_h или $u^n_{j_1,...,j_m}$; $u^n = u^n_h = u^n_{j_1,...,j_m} = u(t_n, x^1_{j_1}, ..., x^m_{j_m})$, $0 \le j_l \le N_l$ $(l = 1, ..., m)$. Для расчетной области обычно рассматривается множество сеток $\{Q_{\tau,h}\}$, зависящих от параметров τ, h . Тогда сеточные функции, определенные на них, образуют множество сеточных функций. Пусть u — функция непрерывного аргумента, принадлежащая некоторому пространству непрерывных функций U, u^n_h – сеточная функция, принадлежащая пространству сеточных функций U_h . Для оценки их близости необходимо доопределить U и U_h таким образом, чтобы функции u и u_h принадлежали одному пространству. Обычный подход заключается в проектировании пространства непрерывных функций решения дифференциальной задачи u на пространство сеточных функций (см. [12; 24; 31]). Их близость в пространстве сеточных функций характеризуется некоторой величиной — нормой в пространстве сеточных функций. Наиболее часто используется сеточный аналог нормы C в пространстве непрерывных функций

$$\| u^n_h \| = \max_{j_1,...,j_m} | u^n_{j_1,...,j_m} |$$

(для фиксированного временного слоя) или сеточный аналог нормы в L_2

$$\| u^n_h \| = \left(\sum_{j_1=1}^{N_1-1} ... \sum_{j_m=1}^{N_m-1} (u^n_{j_1,...,j_m})^2 \right)^{1/2} .$$

Близость решений дифференциальной и разностных задач определяется величиной $\| u^n_h - (u)^n \|$, которая должна стремиться к нулю при неограниченном дроблении сетки $(\tau, \mathbf{h}) \to 0$, где под нормой $\|\|$ понимается

одна из норм C или L_2, $(u)^n = P_h u(t,x)$, а P_h — оператор проектирования. Оператор P_h может выбираться различными способами. Например, $P_h u$ полагают равным значению непрерывной функции u в узле сетки $(t_n, x^1_{j_1}, ..., x^m_{j_m})$ или рассматривают $P_h u$ как интегральное среднее по ячейке и т. д. [12; 24]. Вообще говоря, выбор оператора проектирования входит в структуру схемы.

2.3. Аппроксимация

При переходе от дифференциальной задачи к разностной дифференциальные операторы заменяются их разностными аналогами. Разностная производная в узлах сетки может быть записана различными способами в зависимости от *шаблона*, т. е. множества точек, на которых аппроксимируется соответствующая производная, и от типа интерполяции на данном шаблоне и, в частности, весовых коэффициентов.

Пусть L —дифференциальный оператор, действующий на функцию u. Разностный оператор L_h, действующий на u^n_h, связывает значения сеточных функций на шаблоне, т. е.

$$L_h u^n_h = \sum_{\xi \in M} A_h(\xi, x) u^n_h(\xi),$$

где $A_h(\xi, x)$ — весовые коэффициенты, $M(x)$ — шаблон в узле сетки $(t_n, x^1_{j_1}, ..., x^m_{j_m})$.

Рассмотрим некоторые простейшие аппроксимации первых и вторых производных. При аппроксимации оператора первой производной чаще всего используется шаблон из двух или трех точек. Введем обозначения разностных операторов, аппроксимирующих $\frac{\partial}{\partial x^l}$ в направлении $x^l \quad (l = 1, ..., m)$ в узле сетки $(x^1_{j_1}, ..., x^m_{j_m})$ на двух-или трехточечном шаблоне по формулам

$$\Lambda^1_{l\mp} u^n_{j_1,...,j_m} = \pm(u^n_{j_1,...,j_m} - u^n_{j_1,...,j_{l\mp 1},...,j_m})/h_l, \tag{1}$$

$$\Lambda^2_{l\mp} u^n_{j_1,...,j_m} = \pm(3u^n_{j_1,...,j_m} - 4u^n_{j_1,...,j_{l\mp 1},...,j_m} + u^n_{j_1,...,j_{l\mp 2},...,j_m})/2h_l,$$

где для простоты положено $h_l = const$. В зависимости от выбора знака в операторе $\Lambda^k_{l\mp} \quad (k = 1, 2)$ получим правостороннюю Λ^k_{l+} или левостороннюю Λ^k_{l-} разностную производную. Операторы $\Lambda^k_{l\mp}$ являются несимметричными. Симметричная аппроксимация может быть получена суперпозицией несимметричных операторов

$$\Lambda^2_l = (\Lambda^1_{l+} + \Lambda^1_{l-})/2. \tag{2}$$

Аналогично аппроксимируется производная по времени

$$\frac{u^{n+1}_{j_1,\dots,j_m} - u^n_{j_1,\dots,j_m}}{\tau}, \quad \frac{u^{n+1}_{j_1,\dots,j_m} - u^{n-1}_{j_1,\dots,j_m}}{2\tau}$$

и т. д.

Вторую (повторную) производную в направлении x^l аппроксимируем симметричным относительно узла сетки $(n, j_1, ..., j_m)$ оператором Λ_{ll} на трехточечном шаблоне

$$\Lambda_{ll} u^n_{j_1,\dots,j_m} = (\Lambda^1_{l+} - \Lambda^1_{l-}) u^n_{j_1,\dots,j_m}/h, \tag{3}$$

а смешанную производную $\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^s}$ — оператором $\Lambda_{ls} = \Lambda^2_l \Lambda^2_s$, где Λ^2_l, Λ^2_s — симметричные разностные операторы, аппроксимирующие первые производные $\frac{\partial}{\partial x^s}$, $\frac{\partial}{\partial x^l}$. В случае двух переменных набор простейших разностных аппроксимаций смешанных производных реализуется на девятиточечном шаблоне.

Приведенные примеры соответствуют простейшим аппроксимациям, когда шаблон минимален и коэффициенты шаблона фиксированы. В случае глобальной аппроксимации на всей расчетной сетке весовые коэффициенты не фиксированы, и мы имеем некоторый набор свободных параметров и функций. Это позволяет строить аппроксимации более высокого порядка и рассматривать схемы высокого порядка точности.

Замена дифференциального оператора L разностным оператором L_h приводит к погрешности аппроксимации $\psi(x_l) = L_h u_h - (Lu)_h|_{x=x_j}$, определяемой на некотором эталонном классе достаточно гладких функций $u(x)$ в точках сетки. Если $\psi(x_j) = O(h^k)$, то говорят, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный L с порядком k. Порядок аппроксимации проверяют разложением в ряд Тейлора решения дифференциальной задачи в узлах сетки [2]. Так, аппроксимация первых производных $\frac{\partial}{\partial x^l}$ в точке $j = (j_1, ..., j_m)$ операторами $\Lambda^k_{l\mp}, \Lambda^2_l$ производится с погрешностью

$$\psi^k(x_j) = \Lambda^k_{l\mp} u_j - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_j} = \pm \frac{h^k_l}{s!} \frac{\partial^s u}{(\partial x^l)^s}\bigg|_{x=x_j} + O(h^s) = O(h^k), \quad s = k+1$$

и, например, при $k=2$ погрешность аппроксимации имеет вид

$$\psi^2(x_j) = \Lambda^2_l u_j - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_j} = \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_j} + O(h^3) = O(h^2)$$

[2] Здесь и ниже предполагается достаточная гладкость функций.

Таким образом, разностные операторы $\Lambda^k_{l\mp}$ $(k = 1, 2)$ аппроксимируют первую производную с порядком k, а симметричный оператор Λ^2_l — со вторым порядком, т. е. расширение шаблона позволяет повысить порядок аппроксимации. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что разностные операторы Λ_{ll} и Λ_{ls} аппроксимируют соответствующие вторые производные со вторым порядком на равномерной сетке. Симметричная аппроксимация вторых производных на неравномерной сетке имеет, вообще говоря, первый порядок. Однако при специальном выборе шагов сетки можно построить аппроксимацию второго порядка [7; 22; 25].

Выше рассматривалась аппроксимация операторов в целых узлах сетки. При апппроксимации операторов в дробных узлах сетки порядок аппроксимации может меняться. Например, несимметричный относительно узла сетки $(j_1, ..., j_m)$ оператор $\Lambda^1_{l\mp}$ является симметричным относительно узла сетки $(j_1, ..., j_{l\mp 1/2}, ..., j_m)$, т. е. аппроксимирует $\frac{\partial}{\partial x^l}$ в узле $(j_1, ..., j_{l\mp 1/2}, ..., j_m)$ со вторым порядком. Заметим, что узел $(j_1, ..., j_{l\mp 1/2}, ..., j_m)$ не принадлежит шаблону. В данном случае переход от несимметричной аппроксимации $(\Lambda^1_{l\mp})$ к симметричной (Λ^2_l) позволяет повысить порядок аппроксимации за счет выбора центра разложения. Если центр разложения приписать к шаблону, то можно говорить о повышении точности за счет расширения шаблона.

До сих пор мы говорили об аппроксимации дифференциальных операторов разностными в узлах сетки (целых или дробных), т. е. рассматривали локальную аппроксимацию в точке. Обычно требуется оценка порядка аппроксимации на всей сетке, т.е. глобальная аппроксимация.

Пусть L — дифференциальный оператор, заданный на Q, L_h – разностный оператор, определенный на сетке $Q_{\tau,h}$. Разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L на сетке $Q_{\tau,h}$, если выполняется условие

$$\| \psi_h \| = \| L_h u_h - (Lu)_h \|_{h\to 0} \to 0.$$

Разностный оператор L_h апппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком k, если

$$\| \psi_h \| = O(h^k), \quad h = max(h_1, ..., h_m),$$

или $\| \psi_h \| \leq Mh^k$, где M — положительная константа, не зависящая от h.

2.4. Разностная схема

По аналогии с аппроксимацией дифференциального оператора разностным рассматривают аппроксимацию дифференциальной краевой задачи разностной краевой задачей.

Пусть в области Q с границей Γ требуется найти решение задачи

$$L\mathbf{u} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, \tag{4}$$

удовлетворяющей краевым условиям (или начальным) условиям

$$l\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \tag{4a}$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u^1, ..., u^p\}, \quad u^i = u^i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x^0 = t, x^1, ..., x^m\}$, $L = L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^s}, ...,\right)$, $l, s = 1, ..., m;\ i = 1, ..., p$. Аппроксимируем краевую задачу (4), (4а) на сетке $Q_{\tau,h}$ разностной схемой

$$\begin{array}{l} L_h \mathbf{u}_h = f_h, \quad \mathbf{x} \in Q_h, \\ l_h \mathbf{u}_h = \boldsymbol{\varphi}_h, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_h. \end{array} \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{h} = \{\tau, h_1, ..., h_m\}$, $L_h = L_h(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \Lambda_l^k \Lambda_{ls})$, $l_h = l_h(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ — разностные операторы, аппроксимирующие L, l; Γ_h — граничные узлы сетки Q_h. Под разностной схемой (5) понимается аппроксимация дифференциальных уравнений и граничных условий. Таким образом, аппроксимация дифференциальной краевой задачи (4), (4а) разностной схемой приводит к системе алгебраических уравнений (в общем случае нелинейных), связывающих значения сеточных функций $\mathbf{u}_h$ в некотором узле сетки с их значенями на шаблоне.

Если

$$\begin{array}{ll} \| L_h \mathbf{u}_h - (L\mathbf{u})_h \| \to 0, & \| \mathbf{f}_h - (\mathbf{f})_h \| \to 0 \\ \| l_h \mathbf{u}_h - (l\mathbf{u})_h \| \to 0, & \| \boldsymbol{\varphi}_h - (\boldsymbol{\varphi})_h \| \to 0, \end{array} \tag{6}$$

то разностная схема (5) аппроксимирует краевую задачу (4), (4а). Если выполнены условия

$$\| L_h \mathbf{u}_h - (L\mathbf{u})_h \| = O(h^{k_1}), \quad \| \mathbf{f}_h - (\mathbf{f})_h \| = O(h^{k_2}),$$

$$\| l_h \mathbf{u}_h - (l\mathbf{u})_h \| = O(h^{k_3}), \quad \| \boldsymbol{\varphi}_h - \boldsymbol{\varphi}_h \| = O(h^{k_4}),$$

то говорят, что разностная схема (5) аппроксимирует задачу (4), (4а) с порядком $k = \min\limits_{1 \le j \le 4} (k_j)$. При этом для дифференциальных операторов и операторов правой части может рассматриваться своя норма. Вообще

говоря, порядок аппроксимации дифференциального уравнения и краевых условий может быть различным. Если условия (6) выполняются лишь при при специальном законе предельного перехода $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\tau) \to 0$, то разностная схема называется *условно аппроксимирующей*, в противном случае *абсолютно аппроксимирующей*. Для системы нестационарных уравнений, разрешенных относительно $\partial/\partial t$:

$$\partial \mathbf{u}/\partial t = L\mathbf{u},$$

разностная схема (в случае двухслойных схем) может быть представлена в виде (см. [24; 32])

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau_n} = L_{1h}\mathbf{u}^{n+1} + L_{0h}\mathbf{u}^n,$$

или

$$C_1\mathbf{u}^{n+1} = C_0\mathbf{u}^n, \tag{7}$$

где $L_{1h} + L_{0h} \approx L_h$, $C_1 = I - \tau_n L_{1h}$, $C_0 = I + \tau_n L_{0h}$, I — единичный оператор. Разностную схему (7) назовем *явной*, если $C_1 = I$, и неявной при $C_1 \neq I$. Другое определение явной и неявной схемы может быть дано через оператор шага $B = C_1^{-1}C_0$ (см. [22; 24]). Схема (7) называется *явной*, если B — финитный оператор, и неявной в противном случае.

В качестве примера рассмотрим модельное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varphi = \varphi(u), \tag{8}$$

и разностную схему

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda^k \left[\alpha\varphi^{n+1} + \beta\varphi^n\right] = \nu\Lambda_{11}\left[\alpha u^{n+1} + \beta u^n\right], \quad \beta = 1 - \alpha, \tag{9}$$

аппроксимирующую его. Здесь $\varphi^n = \varphi(u^n)$, а Λ^k и Λ_{11} — разностные операторы, аппроксимирующие производные $\partial/\partial x$ и $\partial^2/\partial x^2$ с порядком k и 2 соответственно. При $\alpha = 0$ получим явную разностную схему, при $\alpha \neq 0$ — неявную. Очевидно, локальный порядок аппроксимации схемы зависит от узла сетки, в которой она рассматривается (порядки аппроксимации схемы (9) суть $O(\tau + h^k)$ в узлах сетки n, j при любом значении параметра α и $O(\tau^2 + h^k)$ в узле $n + 1/2, j$ при $\alpha = 0.5$.

Порядок аппроксимации схемы может быть повышен, если использовать следствия из дифференциального уравнения (см. [22; 24; 32]). Например, для частного случая уравнения (8) при $\varphi = au$ для a =const

и $\nu = 0$ разностная схема (9) при $\alpha = 0$ и при $\tau a/h = 1$ на решении имеет бесконечный порядок аппроксимации.

Второй подход построения разностных схем для дифференциальных уравнений основан на аппроксимации интегральных законов сохранения, из которых получены основные дифференциальные уравнения. Так, уравнению (8) при $\nu = 0$ соответствует интегральный закон сохранения

$$\oint (udx - \varphi dt) = 0.$$

Численное интегрирование по каждой элементарной ячейке позволяет получить семейство разностных схем, аппроксимирующих исходные дифференциальные уравнения с тем или иным порядком, причем порядок аппроксимации зависит от метода приближенного интегрирования. Так использование квадратурных формул вида

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} g(\xi)d\xi = \frac{h}{12}[5g_{j+1} + 8g_j - g_{j-1}]$$

приводит к схемам третьего порядка ааппроксимации на трехточечном шаблоне по каждому направлению. При усреднении квадратурных формул или использовании формулы Симпсона получим семейство разностных схем четвертого порядка аппроксимаци (см.[3; 27]). Получение разностных схем на основе замены интегральных законов сохранения (уравнений баланса) для элементарных ячеек приближенными разностными выражениями носит название интегроинтерполяционного метода, или метода баланса [15; 24]. По поводу других подходов к построению разностных схем смотри также [3; 7; 12; 15; 16; 24].

2.5. Сходимость и устойчивость схем

Как отмечалось, близость решения дифференциальной и разностной задач может быть определена в некоторой сеточной норме. Если для любого n и при $\tau \to 0$ и $h \to 0$ выполняется условие $\| u_h^n - (u)_h \| \to 0$, то говорят, что решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи. Если

$$\| u_h^n - (u)_h \| = O(\tau^s + h^k), \tag{10}$$

то разностная схема сходится со скоростью $O(\tau^s + h^k)$ или имеет s-й по времени и k-й по пространству порядок точности. Заметим, что оценка типа (10) зависит от оператора проектирования P_h и выбранной нормы. На практике для доказательства сходимости проверяют устойчивость

схемы, т.е. непрерывную зависимость решения от начальных и граничных условий. Назовем разностную схему (6), аппроксимирующую задачу (4), (5), *устойчивой* (устойчивой по начальным и граничным данным), если справедлива оценка

$$\| u_h - \tilde{u}_h \| \leq K \| \psi_h - \tilde{\psi}_h \| . \qquad (11)$$

Здесь u_h, $\tilde{u}_h$ — решение разностных задач $L_h u_h = \psi_h$, $L_h \tilde{u}_h = \tilde{\psi}_h$, а $\tilde{\psi}_h$ — возмущенные входные данные ψ_h, включающие начальные и граничные условия. Если K не зависит от шагов сетки τ и h и от выбора ψ_h и $\tilde{\psi}_h$, (но зависит от t), а условие (11) выполняется при любом соотношении τ, h, то разностная схема называется *безусловно устойчивой*, в противном случае — *условно устойчивой*. При выполнении условий аппроксимации (6) и устойчивости (11) следует сходимость решения разностной задачи к решению линейной дифференциальной задачи [3; 7; 15; 22; 24].

При исследовании устойчивости разностных схем используются различные подходы (метод априорных оценок [24] , метод первого дифференциального приближения [31], спектральные методы [7; 12; 23; 32] и т. д.). Однако исследование устойчивости схем для численного решения уравнений газовой динамики и уравнений Навье–Стокса сопряжено со значительными трудностями. Это связано с нелинейностью уравнений. Поэтому часто анализ устойчивости проводят для системы линейных уравнений, полученных линеаризацией нелинейных уравнений или замораживанием их коэффициентов. Конечно, такой анализ является приближенным, но как показывают многочисленные расчеты, оценки устойчивости разностных схем, полученные для системы линейных уравнений, справедливы также для систем нелинейных уравнений в широком диапазоне изменения параметров схем. Именно этот подход будет использоваться в дальнейшем.

§ 3. Требования к численным алгоритмам

Нелинейность дифференциальных уравнений не позволяет находить их точные решения. Более того, такие решения не всегда существуют. Поэтому основными методами их решения являются численные методы. Основные требования к ним формулируем на примере конечно-разностных методов. Основы разностных методов (схем) изложены во многих работах (см., например, [3; 7; 15; 22–24; 32]) Напомним основные понятия. Пусть в области $\Omega = \Omega(x)$ с границей γ требуется найти решение краевой задачи

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad l\mathbf{u}_\gamma = \boldsymbol{\varphi}, \qquad (1)$$

где L, l – дифференциальные, интегральные или алгебраические операторы; $\mathbf{u} = u(\mathbf{x})$ – вектор искомых функций; $\mathbf{x} = (t, x_1 ..., x_N)$; $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\varphi}$ – векторы правых частей. Предположим, что задача (1) поставлена корректно. Переход от математической постановки задачи к ее численному решению включает следующие этапы:

– замену области Ω непрерывного аргумента x его дискретным аналогом Ω_h;

– замену (аппроксимация) функций $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывного аргумента x дискретными функциями $\mathbf{u_h}, \mathbf{f}_h, \boldsymbol{\varphi}_h$;

– аппроксимацию исходных операторов L, l их дискретными аналогами L_h, l_h.

После выполнения указанных операций приходим к системе дискретных уравнений

$$L_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h, \quad l_h \mathbf{u}_h \mid_{\gamma_h} = \boldsymbol{\varphi}_h, \tag{2}$$

которую и называют разностной схемой. Как следствие возникает вопрос о соотношении (близости) решений исходной дифференциальной (1) и дискретной (2) задач. Так как каждый этап постановки дискретной задачи может проводиться различными способами, то в результате для решения задачи (1) может быть получено семейство дискретных постановок (2), обладающих, вообще говоря, различными свойствами. Таким образом, одной дифференциальной постановке задачи (1) может соответствовать целое семейство дискретных постановок (2). И естественно задать вопрос: каким требованиям должны удовлетворять численная схема (метод) для решения задач? В зависимости от целей, которые мы ставим при решении задачи, требования к численным алгоритмам также могут быть разными. Сформулируем основные из них:

– сходимость решения дискретной задачи (2) к решению исходной задачи (1);

– достаточная точность расчета;

– экономичность алгоритма;

– универсальность алгоритма, т. е. возможность его адаптации к различным физико-математическим моделям;

– адаптация алгоритма к различным типам и архитектурам ЭВМ.

Очевидно, перечисленные требования должны быть дополнены, как отмечено выше, требованием адекватности или близости свойств разностной схемы к свойствам исходной задачи (см. [12; 25; 32]), условиям консервативности схемы, однородности алгоритма и т. д. Эффективность моделирования на этом этапе может быть наиболее точно оценена лишь во всей технологической цепочке. Следует отметить, что требования, предъявляемые к численным алгоритмам, противоречивы и в за-

висимости от целей исследования часть из них может быть опущена. Например, при необходимости получения решения с высокой точностью экономичность алгоритма или его универсальность могут оказаться не столь важными. Таким образом, удовлетворение всем требованиям приводит к задаче оптимизации. Как и любая задача оптимизации, она может иметь одно или несколько решений (или не иметь их). Отсюда следует очевидный вывод о невозможности построения универсального алгоритма для решения различных классов задач и необходимости создания различных алгоритмов в зависимости от целей исследования.

Проведем анализ основных требований, предъявляемых к численным алгоритмам. Для обеспечения *сходимости* численного решения к решению исходной задачи необходимо удовлетворять, как следует из теории разностных схем (см., например, [3; 7; 15; 24; 32]), условиям аппроксимации и устойчивости (корректности) разностного решения. Доказательство этих утверждений достаточно сложное в случае нелинейных уравнений и нелинейных разностных схем, и является одним из актуальных вопросов теории разностных схем.

Требования к *точности* расчета для различных физико-математических задач могут быть различными в зависимости от цели моделирования. Разумеется, точность расчета должна быть согласована с точностью выбранной физико-математической модели. Повышение точности расчета как одной из его важнейших характеристик может быть достигнуто измельчением шагов сетки или расчетных ячеек; применением неравномерных и подвижных сеток; построением схем повышенного порядка. Укажем также другие способы повышения точности расчетов, которые используются в последнее время: экстраполяция численных решений, полученных на последовательности сеток [15; 17]; использование информации о гладкости решения (алгоримы без насыщения [2]); использование точных решений (в ячейке с кусочно-постоянными или кусочно-линейными начальными данными) как в схеме Годунова, послужившей основой для построения новых классов разностных схем [7; 8]; выделение главных особенностей решения, например, головной ударной волны в задачах сверхзвукового обтекания и т. д.

Равномерное измельчение шагов сетки (или расчетных ячеек) не является эффективным способом повышения точности при решении многомерных задач из-за степенного возрастания числа узлов в расчетной области и соответствующего роста числа арифметических операций. Хотя такой подход не требует изменения алгоритма и программ, используется он сравнительно редко. При решении задач чаще всего использу-

ются неравномерные сетки, в том числе сетки, сгущающиеся в областях больших градиентов. При наличии информации о поведении решения вводится преобразование координат, сгущающее ячейки в областях, содержащих особенности решения (пограничные слои, ударные волны и т. д.). Такой подход оказывается очень эффективным, так как позволяет без существенного увеличения числа расчетных ячеек значительно повысить точность расчета. Однако для большинства задач области больших градиентов и других особенностей решения, как правило, априори неизвестны и могут быть получены лишь в процессе решения.

Еще более сложная ситуация возникает в нестационарных задачах, в которых решение меняется во времени и расчетные сетки зависят от времени. Для решения таких задач исходные уравнения необходимо дополнить нестационарными уравнениями для определения закона движения сетки [12; 13]. Усложнение расчетных областей и переход к решению многомерных задач потребовал и разработки специальных методов построения или генерации сеток, удовлетворяющих определенным требованиям. На современном этапе моделирования задача построения эффективных сеток становится центральной и по оценкам специалистов основные затраты ресурсов ЭВМ приходятся на ее решение. Некоторые подходы к решению этих проблем приведены в обзорной работе [13]. Укажем еще один способ повышения точности расчета – построение решения на вложенных или адаптивно-встраивающихся сетках. Хотя данный подход недостаточно обоснован, он может послужить основой для получения предварительного решения, а затем процесс вычислений может повторяться до получения решений с требуемой точностью.

В последние десятилетия наряду с неравномерными сетками широко используются схемы повышенного порядка, главным образом двух типов: схемы на расширенном шаблоне (см. [3; 7; 12; 24]) и так называемые компактные схемы высокого порядка на трехточечном шаблоне [18; 27]. В первом случае при построении схем сквозного счета в задачах с разрывными данными для уменьшения осцилляций численного решения применяются различные способы монотонизации: в исходные уравнения или разностную схему добавляют диссипативные члены, которые не только гасят осцилляции, но и сглаживают решение. В схемах типа TVD, основанных на принципе минимальных производных, монотонность решения достигается путем введения нелинейной численной диссипации, обеспечивающей обратную связь схемы с решением [9; 21]. Как правило, эти схемы согласованы с энтропийным неравенством и имеют второй или более высокий порядок аппроксимации. Сглаживание решения происходит на небольшом числе ячеек. Имеется множество мо-

дификаций схем (ENO схемы, схемы с коррекцией, схемы ограниченной антидиффузии и т. д. (см. [21]), позволяющих сохранить их монотонность, повышенный порядок на разрывах, консервативность и т. д. Следует отметить, что использование расширенного шаблона в этих схемах приводит к необходимости задания фиктивных слоев и дополнительных граничных условий, отсутствующих в исходной постановке задач или изменения аппроксимации в приграничных узлах, что нарушает однородность схем.

В случае использования компактных схем аппроксимация повышенного порядка достигается на трехточечном шаблоне за счет специального выбора аппроксимации уравнения, исключающей погрешности более низких порядков (см. [18; 27]). Их недостатком является значительное усложнение аппроксимации, особенно в многомерном случае. Однако применение схем повышенного порядка является единственной возможностью решения многомерных задач с высокой точностью.

Разновидностью метода конечных разностей (МКР) является метод конечных объемов (МКО), основанный на аппроксимации исходных уравнений в интегральной форме (см., например, [8; 24; 29]). Возможность выбора различных форм расчетных ячеек при аппроксимации расчетных областей обеспечила широкое распространение МКО при решении задач в областях сложной геометрии, в том числе в многосвязных областях. Исходные уравнения аппроксимируются для каждой ячейки, т. е. получаемые схемы являются консервативными. Порядок аппроксимации зависит от точности аппроксимации объемных и повехностных интегралов, что облегчает построение схем повышенного порядка.

Требование *экономичности* алгоритма всегда являлось одним из главных и понималось как минимизация числа арифметических операций на решение задачи. Приведем оценки затрат ресурсов ЭВМ при решении многомерных нестационарных задач (см. [10]). Пусть N – размерность задачи по пространству, m – количество уравнений, I_j – число узлов в направлении x_j, q – число арифметических операций на узел сетки, N_0 – число шагов по времени. Тогда общее число арифметических операций, необходимых для решения задачи, равно

$$Q = mqN_0I, \tag{3}$$

где $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_N$. Эта формула не учитывает ряд факторов, влияющих на затраты ресурсов ЭВМ, таких как число внутренних итераций, заданная точность расчета, начальное приближение и т. д. Будем полагать, что они априорно учтены параметром q. Выберем для примера средние значения параметров при решении задач существующими ме-

тодами: $I_j = 10^2 \div 10^3$, $m = 10 \div 10^2$, $N_0 = 10^3 \div 10^4$, $q = 10^2 \div 10^4$. Для трехмерного случая (N=3) получим оценку $Q = 10^{12} \div 10^{19}$ операций. Обозначим через R количество операций, выполняемых ЭВМ за 1 с. Тогда

$$R = \frac{Q}{T}, \tag{4}$$

где T — время решения задачи. Соответственно затраты оперативной памяти могут быть определены по формуле

$$L = mlI,$$

где l – число временных слоев, необходимых для хранения в оперативной памяти ЭВМ (обычно $l = 2$). По оценкам специалистов использование результатов математического моделирования в проектировании является оптимальным, если расчет одного варианта не превышает 15 мин (порядка 10^3 с). Для выполнения этого условия быстродействие ЭВМ и оперативной памяти для решения трехмерных задач должны составлять $R = Q/T = 10^9 \div 10^{16}$ операций с плавающей запятой, $L = 2 \cdot 10^7 \div 2 \cdot 10^{11}$ байт. Заметим, что в национальном аэрокосмическом проекте США по моделированию, разработанном в 80-е гг. и ориентированном на решение задач аэродинамики, параметры ЭВМ составляли $R = 10^9 \div 10^{10}$ операций, $L \approx 2,5 \cdot 10^8$ байт, т. е. планировалось создать вычислительную систему решения пространственных задач аэродинамики в приближении уравнений газовой динамики и упрощенных уравнений Навье—Стокса (второго и третьего уровней).

При выводе формулы для определения быстродействия R не оговаривалось, используется ли однопроцессорная ЭВМ или многопроцессорный вычислительный комплекс. Полагалось, что быстродействие R не зависит от типа алгоритмов, размерности задачи, использованного объема памяти и от других факторов. В действительности быстродействие ЭВМ зависит от многих факторов. Для их приближенного учета формула быстродействия может быть представлена в виде

$$R' = sR,$$

где R – пиковая производительность системы, s – средний коэффициент загрузки процессоров ($s < 1$), значение которого может значительно изменяться для различных многопроцессорных вычислительных систем и задач. Согласно формуле (4) затраты на решение задачи могут быть сокращены путем уменьшения Q или увеличения быстродействия R. Число арифметических операций Q определяет экономичность алгоритма. Под экономичным численным алгоритмом понимается минимальное

число арифметических операций на решение задачи с заданной точностью. Назовем алгоритм (метод) *экономичным*, если для одной и той же задачи число арифметических операций на ее решение возрастает линейно с ростом числа узлов, т. е. $Q = Q(S)$ – линейная функция от S, а $S = N_0 I$ — общее число узлов по времени и простанству.

Как известно, классы разностных схем делятся на явные и неявные. Как правило, явные схемы, условно устойчивы, т. е. разностная задача корректна при определенном соотношении между временным (итерационным) τ и пространственными h_j шагами сетки. Для неявных схем эти ограничения отсутствуют или они более слабые, чем для явных схем. В соответствии с приведенным выше определением явные схемы не являются экономичными. Проиллюстрируем сказанное выше простейшим примером. Пусть в области $Q = \{0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1\}$ требуется решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$u(0,x) = u^0(x), \quad u(t,0) = u_0(t), \quad u(t,1) = u_1(t).$$

Введем шаги разностной сетки $\tau = 1/N_0$, $h = 1/I$, где N_0, I – число узлов сетки в направлениях t и x соответственно. Разностная схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_{11}(\alpha u^{n+1} + \beta u^n), \quad u_l^{n+1} = u_l(t^{n+1}), \quad l = 1, I$$

аппроксимирует уравнение (5) с порядком $O(\tau^m + h^2)$ и при $\alpha \ge 0.5$ безусловно устойчива. Здесь $\Lambda_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + O(h^2)$, $\beta = 1 - \alpha$, $m = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $m = 1$ при $\alpha \ne 0.5$. Явная разностная схема ($\alpha = 0$) аппроксимирует уравнение (5) с порядком $O(\tau + h^2)$ и устойчива лишь при выполнении условия выполнении условия $\tau \le h^2/2$. Тогда число арифметических операций Q, необходимых для решения задачи, равно $Q = qN_0 I \approx 2qI^3$. При изменении шага сетки h, т. е. при увеличении числа узлов I в p раз, число операций увеличивается в p^3 раз. Аналогичная ситуация возникает при использовании явных схем для решения гиперболических уравнений, для которых число опрераций увеличивается по квадратичному закону при линейном увеличении числа шагов сетки. В то же время неявная схема при $\alpha = 0.5$ безусловно устойчива, аппроксимирует уравнение (5) со вторым порядком по всем переменным и экономична. Действительно, схема реализуется трехточечной скалярной прогонкой, требующей 8 операций на узел сетки (см. [25]), т. е. $q = 8$

и общее число операций равно $Q(S) = qN_0I \approx 8S$ и оно линейно возрастает с ростом числа узлов S. Остановимся на вопросах *универсальности* алгоритма. Для явных схем обобщение алгоритмов на многомерный случай не представляет значительных трудностей, однако проблема экономичности выходит на первый план, так как увеличение размерности задачи приводит к более жестким ограничениям на устойчивость. Реализация неявных схем даже для линейных систем для многомерных задач значительно усложняется. Например, разностная схема с весами

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sum_{j=1}^{N} \Lambda_{jj}(\alpha u^{n+1} + \beta u^n), \quad \beta = 1 - \alpha \tag{6}$$

для численного решения линейного мномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \tag{7}$$

безусловно устойчива при $\alpha \geq 0,5$ и аппроксимирует уравнение теплопроводности с порядком $O(\tau^2 + h^2)$ при $\alpha = 0.5$. Здесь $\Lambda_{jj} = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + O(h_j^2)$, $h = \max(h_j)$. В одномерном случае она реализуется скалярными трехточечными прогонками и требует восьми арифметических операций на один узел сетки. Но уже в двумерном случае ее решение может быть получено лишь методом матричной прогонки, требующим обращения матриц размерности $I \times J$ в каждом узле сетки. Действительно, при $N = 2$ разностная схема (6) может быть представлена в виде (см. [32]):

$$-\alpha r_1(u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}) - \alpha r_2(u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}) + [1 + 2\alpha(r_1 + r_2)]u_{i,j}^{n+1} =$$

$$= [I + \tau\beta(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})]u_{i,j}^n = d_{i,j}^n, \quad r_l = \tau/h_l^2, \quad (l = 1, 2). \tag{8}$$

Введем вектор $\mathbf{U}_i$ и матрицы A_i, B_i, C_i, по формулам

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iJ} \end{pmatrix}, \quad A_i = C_i = \begin{pmatrix} -\alpha r_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha r_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\alpha r_1 \end{pmatrix} = -\alpha r_1 I,$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha(r_1 + r_2) & -\alpha r_2 & \cdot & 0 \\ -\alpha r_2 & 1 + 2\alpha(r_1 + r_2) & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & -\alpha r_2 & 1 + 2\alpha(r_1 + r_2) \end{pmatrix}$$

Перепишем формулу (8) в виде

$$A_i\mathbf{U}_{i-1}^{n+1} + B_i\mathbf{U}_i^{n+1} + C_i\mathbf{U}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{d}_i$$

Тогда по аналогии с методом скалярной прогонки формулы матричной прогонки принимают вид

$$\mathbf{U}_i = X_i\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{Y}_i,$$

$$X_i = -(A_iX_{i-1} + B_i)^{-1}C_i, \quad \mathbf{Y}_i = -(A_iX_{i-1} + B_i)^{-1}(\mathbf{d}_i - A_i\mathbf{Y}_{i-1}).$$

При большом числе узлов ее реализация не эффективна, так как для каждого узла сетки требуется обращение матриц $(A_iX_{i-1} + B_i)$ размерностью $J \times J$ (см. [25]). Очевидно, для большого числа узлов данная схема становится неэкономичной. Эта ситуация характерна и для гиперболических уравнений. Таким образом, обобщение неявных схем, эффективных для решения одномерных задач, на многомерный случай чаще всего приводит к усложнению их реализации или потере экономичности. Переход от решения одномерных уравнений к решению многомерных потребовал разработки новых численных алгоритмов, пригодных для эффективного решения задач любой размерности.

Такие алгоритмы созданы в 70—80-е гг. на основе метода факторизации и метода расщепления (см., например, [8; 12; 15; 16; 24; 32]). Их суть заключается в сведении исходной многомерной задачи к последовательности ее одномерных аналогов или более простых задач. В методе факторизации базовые схемы представляются в виде приближенного произведения одномерных или более простых разностных аналогов, а в методе расщепления исходная задача представляется в виде совокупности (слабой аппроксимации) более простых одномерных задач, которые затем аппроксимируются явными и неявными разностными схемами. Следует отметить, что введение расщепления или факторизации в разностные схемы приводит к появлению дополнительных членов порядка $O(\tau^2)$, отсутствующих в исходных уравнениях, что может вызвать понижение точности решения или увеличение числа итераций при получении стационарного решения методом установления.

Последним, но не менее важным требованием, предъявляемом к численным алгоритмам, является требование *адаптации* алгоритмов к различным архитектурам вычислительных систем. Основные численные алгоритмы, использующиеся для решения различных классов задач, созданы в эпоху однопроцессорных ЭВМ и предполагали последовательное выполнение арифметических операций. Появление многопроцессорных вычислительных систем различного типа потребовало переоценки

разработанных численных алгоритмов, оценки их эффективности и возможности адаптации к новым архитектурам. Сложность этой проблемы состоит также в том, что новые архитектуры ЭВМ создаются на основе разных подходов к их проектированию. Поэтому в настоящее время возможности адаптации большинства существующих неявных методов к различным типам вычислительных систем изучены недостаточно.

Более просто могут быть распараллелены явные схемы. Например, при явном способе вычислений на новом шаге исходная задача может быть разбита на отдельные сегменты или модули, каждый из которых может быть решен независимо (с точностью до вычислений на границах сегментов и передачи данных от одного сегмента к другим). Таким образом, появление новых вычислительных средств привело к возникновению нового направления в вычислительной математике – созданию *параллельных* алгоритмов решения многомерных задач.

Наконец, остановимся на вопросах обработки и представления информации, полученной при расчете. При решении многомерных задач из-за большого количества информации ее непосредственный анализ затруднителен. Графическое представление пространственной картины течения и количественные оценки по сравнению с экспериментом тоже вызывают большие сложности. Как правило, приходится хранить в памяти все расчетное поле и при необходимости выводить информацию в различных сечениях. Одним из путей представления информации является использование ее в виде видео- или кинофильма. Но эта форма представления дает качественную картину и затруднительна при количественном анализе. В настоящее время активно создаются графические системы для хранения, обработки и представления результатов (специальные графические станции и системы), однако проблема эффективного анализа полученных результатов до сих пор открыта.

§ 4. Метод расщепления

Как отмечено выше, суть метода расщепления состоит в сведении исходной задачи к последовательности более простых задач, например, многомерной задачи к последовательности их одномерных аналогов. Этот подход может быть применен как для решения одного уравнения, так и для системы уравнений.

4.1. Слабая аппроксимация

Прежде чем сформулировать метод расщепления, рассмотрим некоторые примеры и введем понятие слабой аппроксимации, следуя работе [32].

Для задачи Коши

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t) \equiv 1, \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

рассмотрим схему в дробных шагах

$$\frac{x^{n+1/2} - x^n}{\tau} = 1, \quad \frac{x^{n+1} - x^{n+1/2}}{\tau} = 0, \quad x^0 = 0 \tag{2}$$

Схема в целых шагах

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = 1, \quad x^0 = 0 \tag{3}$$

эквивалентна (2) и получается из нее суммированием. Ее можно трактовать как аппроксимацию уравнений

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = 0$$

на первом и втором полушагах по времени. Таким образом, вместо уравнения (1) решается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(\tau, t), \tag{4}$$

где $f(\tau, t) = 2$ на интервале $n\tau \le t \le (n + 1/2)\tau$ и $f(\tau, t) = 0$ при $(n + 1/2)\tau \le t \le (n + 1)\tau$.

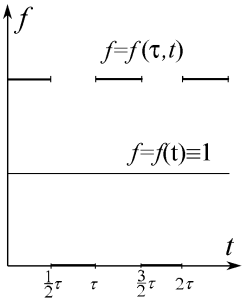

Рис. 4

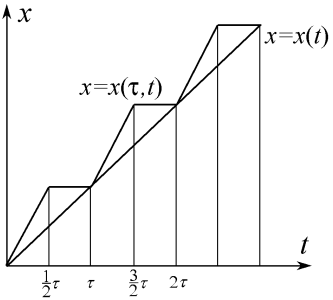

Рис. 5

На рис. 4 представлен график функции $f(\tau, t)$, а на рис. 5 — графики точного решения задачи (1) и сеточного (2) решения задачи (1). Будем

говорить, что $f(\tau,t)$ сходится к $f(t)$ слабо, если

$$\int_{t_1}^{t_2}[f(s,\tau)-f(s)]ds\to 0$$

при $\tau\to 0$ для любых t_1 и t_2. В то же время, как нетрудно видеть, решение задачи (4) сходится сильно к решению задачи (1), т. е. выполняется условие $\parallel x(t,\tau)-x(t)\parallel\to 0$ при $\tau\to 0$.

Для задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}=0,\quad u(x_1,x_2,0)=u_0(x_1,x_2) \tag{5}$$

решение имеет вид

$$u(x_1,x_2,t)=u_0(x_1-t,x_2-t)=T_{-1}(t)T_{-2}(t)u_0(x_1,x_2),$$

где T_{-1},T_{-2} операторы сдвига, определяемые по формулам

$$T_{-1}(t)u(x_1,x_2)=u(x_1-t,x_2),\quad T_{-2}(t)u(x_1,x_2)=u(x_1,x_2-t).$$

Обозначим S как оператор решения уравнения (5): $S(t)=T_{-2}(t)T_{-1}(t)$. Заменим уравнение (5) на уравнение с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f_1(t,\tau)\frac{\partial u}{\partial x_1}+f_2(t,\tau)\frac{\partial u}{\partial x_2}=0, \tag{6}$$

где

$$f_1(t,\tau)=2,\quad f_2(t,\tau)=0\quad\text{при}\quad n\tau\le t\le(n+1/2)\tau,$$
$$f_1(\tau,t)=0,\quad f_2(t,\tau)=2\quad\text{при}\quad(n+1/2)\tau\le t\le(n+1)\tau.$$

и будем находить решение задачи (6) как последовательность решений уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x_1}=0\quad&\text{для}\quad n\tau\le t\le(n+1/2)\tau,\\ \frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x_2}=0\quad&\text{для}\quad(n+1/2)\tau\le t\le(n+1)\tau.\end{aligned} \tag{7}$$

Операторы перехода решения системы (7) со слоя n на слой $n+1/2$ и $n+1/2$ на $n+1$ равны

$$S_1(t+\frac{\tau}{2},t)=S_1(\frac{\tau}{2})=T_{-1}(\tau),\quad S_2(t+\frac{\tau}{2},t)=S_2(\frac{\tau}{2})=T_{-2}(\tau).$$

Тогда оператор перехода $S_\tau = S_\tau(t+\tau, t)$ решения уравнений (7) с n-го слоя на $n+1$ равен

$$S_\tau = S_2\left(\frac{\tau}{2}\right) \cdot S_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = T_{-2}(\tau) \cdot T_{-1}(\tau) = S(\tau).$$

Таким образом, уравнение (6) аппроксимирует исходное уравнение (5) слабо, а оператор S_τ решение уравнения (6) аппроксимирует оператор решения $S(t)$ уравнения (5) сильно.

Введем ряд определений. Семейство функций $f_\tau(x,t)$ слабо аппроксимирует по t функцию $f(x,t)$, если

$$\int_{t_1}^{t_2} [f_\tau(x,s) - f(x,s)]ds = \delta(x, t_1, t_2, \tau)$$

и $\| \delta \| \to 0$ при $\tau \to 0$ и любых $t_1, t_2 \in [0, T]$.

Семейство линейных дифференциальных операторов $L_\tau(t)$ *слабо аппроксимирует по* t *оператор* $L(t)$, если слабая аппроксимация имеет место для коэффициентов.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \tag{8}$$

для которой поставлена задача Коши

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Допустим, что L представимо в виде

$$L = L_1 + ... + L_p,$$

где L_i — операторы более простой структуры. Введем оператор

$$L_\tau = \alpha_1(\tau, t)L_1 + \alpha_2 L_2(\tau, t) + ... + \alpha_p(\tau, t)L_p,$$

где функции $\alpha_s(\tau, t)$ определяется следующим образом:

$$\alpha_s(\tau, t) = p \cdot \delta_{is}, \quad \text{если} \quad t \in [n\tau + \frac{i-1}{p}\tau, n\tau + \frac{i}{p}\tau]. \tag{9}$$

Здесь δ_{is} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{is} = 1$, если $i = s$ и $\delta_{si} = 0$, если $i \neq s$ $(i, s = 1, ..., p)$. Тогда оператор L_τ слабо аппроксимирует L, а система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_\tau u + f_\tau, \tag{10}$$

слабо аппроксимирует систему уравнений (8). Функция f_τ может аппроксимировать f как слабо, так и сильно и, в частности, совпадать с ней. Таким образом, метод слабой аппроксимации может рассматриваться как конструктивный метод решения задачи Коши. Действительно, система уравнений (10) на каждом интервале времени $t \in [(n + \frac{s-1}{p})\tau, (n + \frac{s}{p})\tau]$ представляется как система уравнений

$$\frac{1}{p}\frac{\partial u_\tau}{\partial t} = L_s u_\tau + f_s,$$

с начальными данными $u(t_n + s\tau, x) = u_\tau(t_s, x)$. Здесь $f = \sum_{s=1}^{l} f_s$. По определению, каждый L_s – оператор более простой структуры, например, одномерный оператор. Таким образом, решение задачи (8) сводится к решению более простых задач. Доказательство сходимости решения u_τ задачи (10) к решению исходной задачи (8) проведено в работе [32] на основе продолженной системы.

4.2. Метод расщепления по направлениям для параболических и гиперболических систем

Рассмотрим параболическую систему уравнений (см. также [12])

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N}\left(A^j\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}B^{jl}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l}\right) = 0, \tag{11}$$

содержащую как повторные, так и смешанные производные. При $B^{jl} \equiv 0$ будем предполагать, что система уравнений (11) гиперболического типа. Здесь $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_m)$ — вектор размерности m, $A^j = A^j(\mathbf{u})$, $B^{jl} = B^{jl}(\mathbf{u})$ — квадратные матрицы $m \times m$, N — размерность задачи по пространству. Наиболее простой и хорошо изученной системой является случай при $B^{jl} = 0$ для $j \neq l$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N}\left(A^j\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}B^{jj}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}\right) = 0. \tag{12}$$

Введем оператор $L_j = A^j\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}B^{jj}\frac{\partial}{\partial x_j}$ и представим систему уравнений (12) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L\mathbf{u} = 0, \qquad L = \sum_{j=1}^{N} L_j. \tag{13}$$

Следуя методу слабой аппроксимации рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L_\tau \mathbf{u} = 0, \qquad \text{где} \quad L_\tau = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j L_j, \tag{14}$$

слабо аппроксимирующую (13), где α_j определено в (9). Представление (14) означает, что на каждом временном интервале $t \in [(n + (j-1)/N)\tau, (n + j/N)\tau]$ решается одномерная система уравнений

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L_j \mathbf{u} = 0 \quad (j = 1, ..., N), \tag{15}$$

для которых начальные данные взяты с передыдущего временного слоя $t = (n + (j-1)/N)\tau$. Такое расщепление называют *расщеплением по направлениям*. Численное решение системы одномерных уравнений (15) будем находить на каждом дробном шаге по эффективной разностной схеме, например, схеме с весами

$$\frac{\mathbf{u}^{n+j/N} - \mathbf{u}^{n+\frac{j-1}{N}}}{\tau} + L_{jh}(\alpha \mathbf{u}^{n+j/N} + \beta \mathbf{u}^{\frac{j-1}{N}}) = 0. \tag{16}$$

Здесь $L_{jh} = L_j + O(h_j^k)$ – разностная аппроксимация оператора L_j с порядком $O(h_j^k)$, $\beta = 1 - \alpha$. Предположим, что операторы L_{jh} перестановочны, т. е. $L_{jh} \cdot L_{lh} = L_{lh} \cdot L_{jh}$. Тогда, исключая дробные шаги в системе разностных уравнений (16), получаем схему в целых шагах в виде

$$\prod_{j=1}^{N} (I + \tau\alpha L_{jh}) \mathbf{u}^{n+1} = \prod_{j=1}^{N} (I - \tau\beta L_{jh}) \mathbf{u}^n$$

или в виде, разрешенном относительно разностной производной по времени

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + L_h(\alpha \mathbf{u}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^n) = \Psi, \quad L_h = \sum_{j=1}^{N} L_{jh}, \tag{17}$$

где $\Psi = -\tau \sum_{i,j=1}^{N} L_{ih} L_{jh} (\alpha^2 \mathbf{u}^{n+1} - \beta^2 \mathbf{u}^n) + O(\tau^2 + h^k)$. Таким образом, разностная схема (16) или (17) аппроксимирует исходные уравнения (12) или (13) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, а при $\alpha = \beta = 0.5$ — с порядком $O(\tau^2 + h^k)$. Разностные уравнения (16) на каждом дробном шаге реализуются скалярными, если u — скаляр или векторными, если $\mathbf{u}$ — вектор, прогонками.

Более сложная ситуация возникает, когда $B^{jl} \neq 0$ при $i \neq l$. В этом случае нельзя со всей строгостью говорить о расщеплении по направлениям. Однако расщеплению можно придать форму расщепления по направлениям.

Покажем это на примере двумерного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \tag{18}$$

где $L = L_1 + L_2$, $L_j = \frac{\partial}{\partial x_j} a_{j1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_j} a_{j2} \frac{\partial}{\partial x_2} = L_{j1} + L_{j2} \quad (j = 1, 2)$.

Каждое из расщепленных уравнений

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = L_2 u$$

некорректно, но полная расщепленная система

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) u$$

корректна. Поэтому формально можно рассмотреть систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\alpha_1 L_{11} + \alpha_2 L_{22}) u + f,$$

где $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$ при $n\tau \leq t_n \leq (n + 1/2)\tau$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ при $(n+1/2)\tau \leq t_n \leq (n+1)\tau$, а $f = (L_{12} + L_{21})u$. Подобно разностной схеме (16) для решения расщепленных уравнений построим разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_{11} u^{n+1/2} + \Lambda_{12} u^n, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_{22} u^{n+1} + \Lambda_{21} u^{n+1/2}, \end{aligned} \tag{19}$$

реализующуюся скалярными прогонками на каждом дробном шаге. Здесь $\Lambda_{ij} = L_{ij} + O(h^2)$. Исключение дробных шагов в схеме (19) приводит к схеме в целых шагах

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) u^{n+1} + (\Lambda_{12} + \Lambda_{21}) u^n - \tau(\Lambda_{11}\Lambda_{22} u^{n+1} - \Lambda_{12}\Lambda_{21} u^n),$$

аппроксимирующей уравнение (18) с порядком $O(\tau + h^2)$.

В общем случае систему уравнений (11) можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{20}$$

где оператор L содержит повторные производные подобно уравнению (12), а вектор f – смешанные производные. Тогда, аналогично представлению (14) расщепленная система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j L_j \mathbf{u} = \mathbf{f}_j, \quad (j = 1, ..., N), \tag{21}$$

где $\alpha_j = N\delta_j^k$, $n\tau + (k-1)/N \le t \le (n + k/N)\tau$, $f_j = f(u(t_n - \frac{k-1}{N}\tau))$.

При построении разностных схем функцию f_j можно рассматривать как заданную функцию, определенную на предыдущем временном слое. Разностная схема с весами

$$\begin{gathered}
\frac{\mathbf{u}^{n+1/N} - \mathbf{u}^n}{\tau} + L_{1h}(\alpha \mathbf{u}^{n+1/N} + \beta \mathbf{u}^n) = \mathbf{f}^n, \\
\frac{\mathbf{u}^{n+2/N} - \mathbf{u}^{n+1/N}}{\tau} + L_{2h}[\alpha \mathbf{u}^{n+2/N} + \beta \mathbf{u}^{n+1/N}] = 0, \\
\cdots \\
\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+(N-1)/N}}{\tau} + L_{Nh}[\alpha \mathbf{u}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^{n+(N-1)/N}] = 0
\end{gathered} \tag{22}$$

аппроксимирует систему уравнений (20) с порядком $O(\tau + h^k)$ для всех α. Здесь L_{jh} – разностные операторы, аппроксимирующие операторы L_j с порядком $O(h_j^k)$. Если L_j и $\mathbf{f}$ зависят и от времени, то в схеме (22) операторы L_{jh} и $\mathbf{f}_h$ заменяются на L_{jh}^n и $\mathbf{f}_h^n$ соответственно. После исключения дробных шагов схема (22) эквивалентна схеме (17), где $\Psi = O(\tau + h^k)$.

Реализация схемы (22) сводится к решению одномерных задач и может быть получена скалярными (для одного) или векторными (для системы уравнений) прогонками. Она абсолютно устойчива при $\alpha \ge 0.5$. Можно представить расщепление каждого одномерного оператора на более простые и строить экономичные схемы для расщепленных уравнений. Такой подход называется методом расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям (подробнее см. гл. III настоящего пособия).

§ 5. Метод предиктор–корректор

Метод предиктор–корректор может трактоваться как одна из разновидностей метода расщепления в целях повышения порядка аппроксимации, восстановления консервативности (дивергентности) схемы и т. д. например, аппроксимацией уравнений на этапе предиктора с последующей корректировкой расчета на этапе корректора. Особенно удобен этот

метод для решения нелинейных уравнений, так как позволяет избавиться от итераций по нелинейности и сохранить порядок аппроксимации, консервативность и устойчивость схем (см. [7; 11; 15; 32]). Идею метода поясним на примере решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(0) = X^0, \tag{1}$$

где $f(t,x)$ – нелинейная функция. Неявная разностная схема

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^n), \quad x^0 = X^0 \tag{2}$$

или схема

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f^{n+1/2}, \quad x^0 = X^0$$

аппроксимирует уравнение (1) с порядком $O(\tau^2)$, но требуют итераций в силу нелинейности правой части. Здесь $f^{n+l} = f(t_{n+l}, x^{n+l}), \quad f^{n+1/2} = f[t_{n+1/2}, \frac{1}{2}(x^{n+1} + x^n)]$. Схема предиктор–корректор

$$\frac{x^{n+1/2} - x^n}{\tau/2} = f^n, \quad \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f^{n+1/2}$$

имеет тот же порядок, что и схема (2), но реализуется явно на шаге предиктора и явно по схеме "крест"на этапе корректора. Однако, как и всякая явная схема, она условно устойчива в отличие от схемы (2).

Для повышения устойчивости метода предиктор-корректор используем на этапе предиктора неявную схему. Если $f = Ax$, где $A = \partial f/\partial x$, то разностная схема

$$\frac{x^{n+1/2} - x^n}{\tau/2} = A^n x^{n+1/2}, \quad \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f^{n+1/2}, \tag{3}$$

аппроксимирует уравнения (1) с порядком $O(\tau^2)$, линейна (матрица A аппроксимирована на n-м слое) и безусловно устойчива в линейном приближении. Действительно, для линейного уравнения при $A = \text{const}$ схема (3) после исключения шага $n + 1/2$ может быть представлена в виде неявной схемы с весами при $\alpha = 1/2$:

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = A\frac{x^{n+1} + x^n}{2},$$

которая безусловно устойчива при $A \leq 0$.

5.1. Схемы для одномерных задач

Изложенный выше метод решения обыкновенных уравнений может быть перенесен и на уравнения в частных производных. Пусть

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{W} = W(\mathbf{U}) \tag{4}$$

— система одномерных нестационарных уравнений, записанных в консервативной (дивергентной) форме. Наряду с дивергентной формой уравнений (4) представим их в недивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + B\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad B = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}.$$

Разностная схема предиктор–корректор

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1/2} - \mathbf{U}^n}{\tau\alpha} + B^n \Lambda \mathbf{U}^{n+1/2} = 0, \quad \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda \mathbf{W}^{n+1/2} = 0, \tag{5}$$

аппроксимирует уравнение (4) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, где $m = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $m = 1$ при $\alpha \neq 0.5$, $\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} + O(h^k)$. Так как коэффициенты матрицы B взяты на n–м слое, то схема линейна относительно $n+1/2$ и ее решение на этапе предиктора может быть получено, например, методом прогонки — скалярной, для одного уравнения (U — скаляр) и векторной — для систем уравнений. На этапе корректора схема (5) реализуется по явной схеме и консервативна, так как аппроксимирует уравнения в дивергентной форме. В случае линейных уравнений с постоянными коэффициентами при B =const или однородных уравнений первой степени, для которых справедливо соотношение $\mathbf{W} = B\mathbf{U}$, схема (5) после исключения дробного шага приводится к схеме с весами

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + B^n \Lambda[\alpha \mathbf{U}^{n+1} + \beta \mathbf{U}^n] = 0, \tag{6}$$

которая при $\alpha \geq 0.5$ безусловно устойчива.

Если $\mathbf{U} = (\mathbf{f})$ и $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$, то уравнения (4) в недивергентной форме могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + C\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

где $C = A^{-1}BA$, $A = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}$, $B = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}$. Тогда разностная схема

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + C^n \Lambda \mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \quad \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda \mathbf{W}^{n+1/2} = 0 \tag{8}$$

аппроксимирует исходные уравнения (4) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, реализуется подобно схеме (5) и для линейных уравнений при $\alpha \geq 0.5$ безусловно устойчива, так как приводится к схеме с весами вида (6).

Пусть

$$C = \sum_{l=1}^{q} C_l, \tag{9}$$

где для каждого уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + C_l \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0,$$

соответствующая разностная схема

$$\frac{\mathbf{f}^{n+l/q} - \mathbf{f}^{n+(l-1)/q}}{\tau} + C_l^n \Lambda \mathbf{f}^{n+l/q} = 0$$

может быть реализована эффективными алгоритмами, например скалярными прогонками. Тогда разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{gathered}
\frac{\mathbf{f}^{n+1/2q} - \mathbf{f}^{n}}{\tau\alpha} + C_1^n \Lambda \mathbf{f}^{n+1/2q} = 0, \\
\cdots \\
\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+(q-1)/2q}}{\tau\alpha} + C_q^n \Lambda \mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \\
\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n}}{\tau} + \Lambda \mathbf{W}^{n+1/2} = 0
\end{gathered} \tag{10}$$

аппроксимирует уравнения (4) с тем же порядком, что и базовая схема, на дробных шагах на этапе предиктора реализуется по построению эффективными алгоритмами, а на этапе корректора явно. Конечно, устойчивость схемы зависит от формы расщепления (9). В частном случае, если все $C_i \cdot C_j \equiv 0, \quad$ при $\quad i \neq j$ она является схемой точной факторизации и совпадает с нефакторизованной схемой, но в отличие от нее реализуется на дробных шагах экономичными алгоримами. Если $C_i C_j \neq 0$, то схема (10) подобна схеме приближенной факторизации. Исследуем аппроксимацию схемы (10) для системы линейных уравнений (7) в недивергентном виде, для которых она принимает вид

$$\begin{gathered}
\frac{\mathbf{f}^{n+l/2q} - \mathbf{f}^{n}}{\tau\alpha} + C_1^n \Lambda \mathbf{f}^{n+l/2q} = 0, \\
\cdots
\end{gathered}$$

$$\frac{\mathbf{f}^{n+l/2} - \mathbf{f}^{n+(q-1)/2q}}{\tau\alpha} + C_q^n \Lambda \mathbf{f}^{n+1/2} = 0,$$
$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + C^n \Lambda \mathbf{f}^{n+1/2} = 0.$$

Исключая дробные шаги на этапе предиктора

$$\prod_{j=1}^{m} (I + \tau\alpha C_j^n \Lambda)\mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}^n$$

и предполагая перестановочность операторов C_j и C мы приходим к схеме в канонической форме

$$\prod_{j=1}^{m} (I + \tau\alpha C_j^n \Lambda)\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + C^n \Lambda \mathbf{f}^n = 0, \qquad (11)$$

аппроксимирующей исходные уравнения (7) с порядком $(\tau^m + h^k)$, как и для нефакторизованной схемы

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + C\Lambda[\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n] = 0.$$

Действительно, схема (11) может быть переписана в виде

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + C\Lambda[\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n] = \Psi,$$

где $\Psi = \tau \sum\limits_{i,j=1}^{m} C_i \Lambda C_j \Lambda(\alpha^2 \mathbf{f}^{n+1} - \beta^2 \mathbf{f}^n) + O(\tau^2)$. При $\alpha = \beta = 0.5$ порядок аппроксимации схемы (11) равен $O(\tau^2 + h^k)$. Устойчивость схемы предиктор–корректор (10) зависит от вида расщепления (9). Следует заметить, что увеличение числа дробных шагов в схеме может приводить к понижению точности, особенно в областях больших градиентов, из-за появления дополнительных диссипативных или дисперсионных членов вида $\tau^2\alpha^2 C_i \Lambda C_j \Lambda$ и $\tau^3\alpha^3 C_i \Lambda_i C_j \Lambda_j C_k \Lambda_k$.

Проиллюстрируем сказанное выше примером построения схем для уравнений газовой динамики для изоэнтропических течений, где $p = p(\rho)$. В этом случае в системе уравнений (4) вектора решения $\mathbf{U}$ и потоков $\mathbf{W}$ равны

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \end{pmatrix}, \quad u = \frac{m}{\rho},$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}, \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \geq 0. \tag{12}$$

Разностная схема (10) для системы уравнений (4), (12) в скалярной форме примет вид

$$\frac{\rho^{n+1/2} - \rho^n}{\tau\alpha} + \Lambda m^{n+1/2} = 0,$$

$$\frac{m^{n+1/2} - m^n}{\tau\alpha} + \Lambda[(c^2 - u^2)^n \rho^{n+1/2} + 2u^n m^{n+1/2}] = 0,$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} + \Lambda m^{n+1/2} = 0, \quad \frac{m^{n+1} - m^n}{\tau} + \Lambda(\frac{m^2}{\rho} + p)^{n+1/2} = 0.$$

Ее решение находится скалярной прогонкой. Действительно, исключая на этапе предиктора $\rho^{n+1/2}$ из разностной схемы для $m^{n+1/2}$, приходим к уравнению

$$[I + 2\tau\alpha\Lambda u^n - \tau^2\alpha^2\Lambda(c^2 - u^2)\Lambda]m^{n+1/2} = m^n - \tau\alpha\Lambda(c^2 - u^2)^n\rho^n.$$

Это линейное разностное уравнение относительно $m^{n+1/2}$ может быть решено скалярной прогонкой, после чего явно определяется значение $\rho^{n+1/2}$ из первого уравнения схемы. Новые значения ρ^{n+1} и m^{n+1} вычисляются явно на этапе корректора. В линейном приближении схема безусловно устойчива при $\alpha \geq 0.5$, так как она совпадает со схемой с весами (6). Заметим, что при вычислении $m^{n+1/2}$ прогонка плохо обусловлена при $c^2 < u^2$.

При записи уравнений в недивергентном виде (7) в переменных плотность и скорость вектор $\mathbf{f}$ и матрица C равны

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \dfrac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}.$$

В соответствии с представлением (9) матричный оператор C запишем в виде суммы операторов

$$C = C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \dfrac{c^2}{\rho} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда разностная схема (10) перепишется в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + C_1^n\Lambda\mathbf{f}^{n+1/4} = 0, \quad \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau\alpha} + C_2^n\Lambda\mathbf{f}^{n+1/2} = 0,$$

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1}-\mathbf{U}^n}{\tau}+\Lambda\mathbf{W}^{n+1/2}=0. \qquad (13)$$

Она аппроксимирует исходные уравнения (4) с порядком $O(\tau^m+h^k)$ и на дробных шагах на этапе предиктора реализуется скалярными прогонками. Действительно, на первом шаге разностные уравнения

$$(I+\tau\alpha C_1^n\Lambda)\mathbf{f}^{n+1/4}=\mathbf{f}^n$$

решаются независимо для каждой компоненты вектора $\mathbf{f}$, так как матрица C имеет ненулевые элементы лишь на главной диагонали. На втором шаге разностные уравнения

$$\frac{\rho^{n+1/2}-\rho^{n+1/4}}{\tau\alpha}+\rho^n\Lambda u^{n+1/2}=0, \quad \frac{u^{n+1/2}-u^{n+1/4}}{\tau\alpha}+\left(\frac{c^2}{\rho}\right)^n\Lambda\rho^{n+1/2}=0$$

после исключения $\rho^{n+1/2}$ из уравнения движения решаются скалярной прогонкой для функции $u^{n+1/2}$ из уравнения

$$[I-\tau^2\alpha^2(\frac{c^2}{\rho^n})^n\Lambda\rho^n\Lambda]u^{n+1/2}=u^{n+1/2}-\tau\alpha(\frac{c^2}{\rho^n})^n\Lambda\rho^n.$$

После определения $u^{n+1/2}$ значение $\rho^{n+1/2}$ вычисляется по явной формуле

$$\rho^{n+1/2}=\rho^n-\tau\alpha\rho^n\Lambda u^{n+1/2}.$$

Наконец, новые значения функций на слое n+1 находятся явно по схеме (13) по формулам

$$\mathbf{U}^{n+1}=\mathbf{U}^n-\tau\Lambda\mathbf{W}^{n+1/2}, \quad \mathbf{W}^{n+1/2}=W(\mathbf{f}^{n+1/2}).$$

Исследуем устойчивость разностной схемы (13) для уравнений с замороженными коэффициентами, т. е. полагая $C_j=C_j^0=\text{const}$. В переменных $\mathbf{f}$ она запишется в виде

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1/4}-\mathbf{f}^n}{\tau\alpha}+C_1^0\Lambda\mathbf{f}^{n+1/4}=0, \quad \frac{\mathbf{f}^{n+1/2}-\mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau\alpha}+C_2^0\Lambda\mathbf{f}^{n+1/2}=0$$

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1}-\mathbf{f}^n}{\tau}+C^0\Lambda\mathbf{f}^{n+1/2}=0$$

или после исключения дробных шагов в каноническом виде

$$(I+\tau\alpha C_1^0\Lambda)(I+\tau\alpha C_2^0\Lambda)\frac{\mathbf{f}^{n+1}-\mathbf{f}^n}{\tau}+C^0\Lambda\mathbf{f}^n=0. \qquad (14)$$

Пусть для определенности $\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} + O(h^2)$. Для устойчивости схемы (14) необходимо выполнение условия (см. [7; 32], § 2 настоящей главы):

$$\| \mathbf{f}^n \| \leq \| R \cdot \| \| \mathbf{f}^0 \|, \quad \| R \| \leq 1, \tag{15}$$

где

$$R = \prod_{j=1}^{N} \{ [(I + \tau\alpha C_1^0 \Lambda)(I + \tau\alpha C_2^0 \Lambda)]^{-1} (I - \tau\beta C_1^0 \Lambda)(I - \tau\beta C_2^0 \Lambda) \}.$$

Пусть, например, в качестве нормы выбран сеточный аналог нормы в C, т. е. $\| f^n \| = \max\limits_{1 \leq j \leq J} | f_j^n |$. Тогда для решений

$$\mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}_0 e^{\omega_j t_n + ikx_j} = \mathbf{f}_0 \lambda^n e^{ik_j h}, \tag{16}$$

где $t_n = n\tau$, $x_j = jh$, $\lambda = e^{\omega\tau}$, условие устойчивости (15) представляется в виде

$$\| \mathbf{f}^n \| \leq | \lambda |^n \| \mathbf{f}^0 \|$$

Подставляя решение вида (16) в разностную схему (14) получаем характеристическое уравнение

$$\det \| (I + i\alpha d C_1^0)(I + i\alpha d C_2^0)(\lambda - 1) + i d C^0 \| = 0.$$

Здесь

$$d = \frac{\tau}{h} \sin kh, \quad C_1^0 = \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & u_0 \end{pmatrix}, \quad C_2^0 = \begin{pmatrix} c_2 & \rho_0 \\ c_0^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Его корни равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + i(1-\alpha)(u_0 \pm c_0)d \mp \alpha^2 u_0 c_0 d^2}{1 + i\alpha(u_0 \pm c_0)d \mp \alpha^2 u_0 c_0 d^2}$$

и, очевидно, при $\alpha \geq 0.5$

$$| \lambda | \leq 1,$$

т. е. схема (16) безусловно устойчива. Можно показать, что устойчивость схемы сохраняется и при несимметричной аппроксимации оператора $\Lambda = \Lambda_{\pm}$.

5.2. Многомерный случай

Рассмотрим обобщение метода предиктор—корректор на многомерный случай. Пусть

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} C_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = 0 \tag{17}$$

системы нелинейных уравнений в дивергентной и недивергентной формах. Для простоты изложения предположим, что $W_j = W_j(U)$ или $W_j = W_j(f)$. В частном случае $f \equiv U$. Простейшая разностная схема предиктор–корректор

$$\begin{gathered} \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + \sum_{j=1}^{N} C_j^n \Lambda_j \mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^{n+1/2} = 0 \end{gathered} \tag{18}$$

аппроксимирует (17) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, где $h = \max(h_j)$ и при $\alpha \geq 0.5$ безусловно устойчива (для уравнений с постоянными коэффициентами). Так как разностный оператор $I + \tau\alpha \sum\limits_{j=1}^{N} C_j^n \Lambda_j$ многомерный, то реализация схемы (18) на этапе предиктора сводится к матричной прогонке. Этот подход для большого числа узлов и (или) уравнений неэкономичен. Для численного решения уравнений (17) удобнее использовать схему предиктор—корректор

$$\begin{gathered} \frac{\mathbf{f}^{n+1/2N} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + C_1^n \Lambda_1 \mathbf{f}^{n+1/2N} = 0, \\ \dots \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+(N-1)/2N}}{\tau\alpha} + C_N^n \Lambda_N \mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^{n+1/2} = 0, \end{gathered}$$

где на этапе предиктора на каждом дробном шаге аппроксимируются одномерные уравнения в недивергентном виде, а консервативность схемы восстанавливается на этапе корректора. Для системы уравнений эта

схема на каждом шаге реализуется векторными прогонками, а на этапе корректора явно. Как и схема (18), она аппроксимирует уравнения (17) с порядком $O(\tau^m + h^k)$.

Наконец, рассмотрим общий случай. Пусть, подобно одномерному случаю, каждый матричный оператор C_j может быть представлен в виде суммы более простых операторов

$$C_j = \sum_{l=1}^{m_j} C_{jl}, \tag{19}$$

т. е. таких, что разностная схема для каждого дробного шага

$$(I + \tau\alpha C_{jl}^n \Lambda_j)\mathbf{f}^{n+s/R} = \mathbf{f}^{n+(s-1)/R} \tag{20}$$

может быть решена экономичными алгоритмами, например по схемам бегущего счета или скалярными прогонками. Введем обозначения: m_j — число дробных шагов в j-м направлении, причем по каждому пространственному направлению число шагов может быть различным, $R = j \cdot m_j$ — общее число дробных шагов на этапе предиктора, а $1 \le s \le R$ — один из дробных шагов, $r = 2R$. Тогда разностная схема предиктор-корректор представляется в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\mathbf{f}^{n+1/r} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + C_{11}^n \Lambda_1 \mathbf{f}^{n+1/r} = 0, \\
\dots \\
\frac{\mathbf{f}^{n+m_1/r} - \mathbf{f}^{n+(m_1-1)/r}}{\tau\alpha} + C_{1m_1}^n \Lambda_1 \mathbf{f}^{n+m_1/r} = 0, \\
\dots \\
\frac{\mathbf{f}^{n+m_j/r} - \mathbf{f}^{n+(m_j-1)/r}}{\tau\alpha} + C_{N_1}^n \Lambda_N \mathbf{f}^{n+m_j/r} = 0, \\
\dots \\
\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/2-1/r}}{\tau\alpha} + C_{Nm_j}^n \Lambda_N \mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \\
\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^{n+1/2} = 0.
\end{gathered} \tag{21}$$

В силу выбора расщепления C_j по формуле (19) разностная схема (21) на этапе корректора для каждого шага (как аналог схемы (20)), реализуется экономичными алгоритмами, а на этапе корректора явно и аппроксимирует исходные уравнения (17) с тем же порядком, что и базовая схема (18). Для уравнений (17) с постоянными коэффициентами, записанных в

недивергентном виде, разностная схема (21) для вектора искомых функций f эквивалентна схеме в каноническом виде

$$\prod_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{m_j}\left(I+\frac{\tau}{2}C_{ij}\Lambda_j\right)\frac{\mathbf{f}^{n+1}-\mathbf{f}^n}{\tau}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m_j}C_{ij}\Lambda_j\mathbf{f}^n=0. \qquad (22)$$

Предложенный подход построения разностных схем для решения как линейных так и нелинейных многомерных уравнений позволяет свести решение исходной задачи к последовательности решения простых одномерных задач. Конечно, дополнительное расщепление одномерных операторов на последовательность более простых одномерных операторов позволяет упростить решение уравнений на этапе предиктора, а следовательно, и полной задачи. Но это расщепление должно выбираться таким образом, чтобы сохранялась устойчивость разностной схемы. Кроме того, введение дополнительного расщепления может приводить к большому спектральному рассогласованию стабилизирующего оператора и оператора правой части. Следствием этого, как отмечено выше, может оказаться понижение точности расчета и замедление скорости сходимости при получении стационарного решения на основе принципа установления. Таким образом, при построении схемы предиктор-корректор с расщеплением оператора по пространству и расщеплением одномерных операторов на более простые для решения конкретных систем уравнений эти вопросы должны специально исследоваться. Для решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса схемы вида (21) предложены и исследованы, например, в работах [11; 12], где наряду с расщеплением многомерного оператора по пространству применено расщепление одномерных операторов по физическим процессам (см. также гл. III). Вопросы устойчивости разностных схем для решения многомерных задач будут изучены ниже.

Замечание. Выше были построены схемы типа предиктор–корректор для решения систем первого порядка. Метод может быть обобщен и для систем параболического типа, где $\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}, \mathbf{f}_l)$, $\mathbf{f}_l = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_l}$, т. е. для систем уравнений второго порядка. Для получения схем, реализуемых на дробных шагах на этапе предиктора экономичными алгоритмами, неявно аппроксимируются только повторные разностные производные, а смешанные производные учитываются явно на этапе корректора. Некоторые примеры таких схем для уравнений газовой динамики и Навье–Стокса рассмотрены в гл. III.

§ 6. Метод факторизации

Метод факторизации подобно методу расщепления является методом сведения решения многомерных задач к последовательности решения их одномерных аналогов или задач более простой структуры, но на сеточном уровне. Этот подход развивался одновременно с методом расщепления начиная с конца 50-х гг. прошлого столетия. Не имея возможности дать обзор методов факторизации, отметим работы [11; 15; 16; 19–32], где предложены эффективные методы решения многомерных задач: методы продольно-поперечной прогонки и стабилизирующей поправки [32], схемы с расщепляющимся оператором и локально-одномерные схемы [24], схемы универсального алгоритма и другие варианты схем. Общая формулировка метода приближенной факторизации предоставлена в работах [12; 16]. Ниже дана трактовка метода приближенной факторизации в общем виде для линейных уравнений.

6.1. Полная и приближенная факторизация

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{1}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_m)$ – вектор размерности m, $u_j = u_j(t, x_1, ..., x_N)$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x_1, ..., x_N)$, L – многомерный дифференциальный оператор размерности N по пространству. Пусть

$$L = \sum_{j=1}^{N} L_j.$$

Введем сеточные операторы L_h, и L_{jh}, аппроксимирующие операторы L и L_j с порядком $O(h_j^k)$ соответсвенно. Аппроксимируем уравнение (1) разностной схемой с весами

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + L_h(\alpha \mathbf{u}^{n+1} + \beta \mathbf{u}^n) = \mathbf{f}_h, \quad \beta = 1 - \alpha \tag{2}$$

и представим ее в виде

$$C\mathbf{u}^{n+1} = C_0 \mathbf{u}^n + \tau \mathbf{f}_h. \tag{3}$$

Здесь $C = I + \tau\alpha L_h$, $C_0 = I - \tau\beta L_h$, $L_h = \sum_{j=1}^{N} L_{jh}$. Пусть справедливо разложение

$$C = C_1 \cdot C_2 \cdots C_M,$$

где каждый из C_j — сеточный оператор более простой структуры и, в частности, для $M = N$ оператор C_j– одномерный. Разностная схема

$$C_1 \cdots C_M \mathbf{u}^{n+1} = C_0 \mathbf{u}^n + \tau \mathbf{f}_h = \mathbf{R}^n \tag{4}$$

тождественно совпадает со схемой (3) и эквивалентна схеме в дробных шагах

$$C_1 \mathbf{u}^{n+1/M} = \mathbf{R}^n,$$
$$C_2 \mathbf{u}^{n+2/M} = \mathbf{u}^{n+1/M},$$
$$\dots$$
$$C_M \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+(M-1)/M}.$$

В силу построения ее реализация на каждом дробном шаге сводится к решению задач с одномерными операторами. Схемы вида (4) называются *схемами полной или точной факторизации*. Однако на практике редко удается получить разложение оператора на произведения более простых. Обычно справедливо приближенное равенство

$$\tilde{C} = C_1 \cdots C_N.$$

Так, для оператора $L = \sum_{j=1}^{N} L_j$ из уравнения (1) справедливо равенство

$$\tilde{C} = \prod_{j=1}^{N} (I + \tau \alpha L_{jh}) \approx C$$

и $\tilde{C} - C = r^2 \alpha^2 \sum_{j,l=1}^{N} L_{jh} L_{lh} + \dots = O(\tau^2)$, т. е. замена оператора C на $\tilde{C}$ произведена с погрешностью $O(\tau^2)$. Разностная схема

$$\tilde{C} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{R}^n$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$(I + \tau \alpha L_{1h}) \mathbf{u}^{n+1/N} = \mathbf{R}^n,$$
$$(I + \tau \alpha L_{2h}) \mathbf{u}^{n+2/N} = \mathbf{u}^{n+1/N},$$
$$\dots$$
$$(I + \tau \alpha L_{Nh}) \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+(N-1)/N}$$

аппроксимирует систему уравнений (1) с порядком $O(\tau + h^k)$ для всех α. В то же время разностная схема (2) аппроксимирует (1) с порядком $O(\tau^2 + h^k)$ при $\alpha = 0.5$.

Схема приближенной факторизации может быть построена и без понижения порядка аппроксимации по времени, если использовать факторизацию оператора схемы, приведенной к канонической форме. Перепишем (2) в канонической форме

$$C\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\tau} = -(L_h\mathbf{u}^n - \mathbf{f}_h),$$

и заменив оператор C на факторизованный $\tilde{C}$, рассмотрим разностную схему

$$\tilde{C}\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\tau} = -L_h\mathbf{u}^n + \mathbf{f}_h \tag{5}$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\xi}^n = -L_h\mathbf{u}^n + \mathbf{f}_h,\\
(I+\tau\alpha L_{1h})\boldsymbol{\xi}^{n+1/N} = \boldsymbol{\xi}^n,\\
\cdots\\
(I+\tau\alpha L_{Nh})\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+(N-1)/N},\\
\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \tau\boldsymbol{\xi}^{n+1}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Так как стабилизирующий оператор $\tilde{C}$ отличается от C на величину $O(\tau^2)$, то и схема (5) или (6) аппроксимирует уравнения (1) с тем же порядком, что и исходная нефакторизованная схема (2).

Проиилюстрируем изложенное выше примером. Рассмотрим линейное многомерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}. \tag{7}$$

Для его численного решения построим разностную схему

$$\prod_{j=1}^{3}(I-\tau\alpha\Lambda_j)\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = \sum_{j=1}^{3}\Lambda_j u^n \tag{8}$$

и эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\xi = \sum_{j=1}^{N}\Lambda_j u^n,$$

$$(I - \tau\alpha\Lambda_1)\xi^{n+1/3} = \xi^n,$$
$$(I - \tau\alpha\Lambda_2)\xi^{n+2/3} = \xi^{n+1/3},$$
$$(I - \tau\alpha\Lambda_3)\xi^{n+1} = \xi^{n+2/3},$$
$$u^{n+1} = u^n + \tau\xi^{n+1}. \qquad (9)$$

Здесь Λ_j — аппроксимация операторов $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ со вторым порядком. Очевидно, при $\alpha = 0.5$ разностная схема (8) или (9) аппроксимирует (7) с порядком $O(\tau^m + h^2)$ и реализуется на каждом дробном шаге скалярными трехточечными прогонками.

Замечание. При построении схем (5) и (6) предполагалось, что операторы L_{jh} линейные и не зависят от времени. Это позволяло свести решение разностных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений, для решения которых разработаны эффективные численные алгоритмы. Например, в случае уравнения теплопроводности (7) разностные уравнения на дробных шагах схемы (9) сводятся к системе алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. В случае нелинейных уравнений при $\alpha \neq 0$ реализация схем (5) и (6) на дробных шагах представляет отдельную проблему (схемы для решения нелинейных уравнений будут рассмотрены ниже).

В заключение данного раздела отметим, что для двумерных линейных уравнений при $\alpha = 0.5$ схема расщепления с весами, схемы предиктор—корректор и приближенной факторизации эквивалентны. Действительно, для системы уравнений (1) эти схемы принимают вид:

a) схема расщепления (расщепления по направлениям)

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} + L_{1h}(\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n) = 0,$$
$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} + L_{2h}(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}) = 0;$$

b) схема предиктор—корректор

$$\frac{u^{n+1/4} - u^n}{\tau\alpha} + L_{1h}u^{n+1/4} = 0,$$
$$\frac{u^{n+1/2} - u^{n+1/4}}{\tau\alpha} + L_{2h}u^{n+1/2} = 0,$$
$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + L_h u^{n+1/2} = 0;$$

с) схема приближенной факторизации

$$\xi^n = -L_h u^n,$$
$$(I + \tau\alpha L_{1h})\xi^{n+1/2} = \xi^n,$$
$$(I + \tau\alpha L_{2h})\xi^{n+1} = \xi^{n+1/2},$$
$$u^{n+1} = u^n + \tau\xi^{n+1}.$$

После исключения дробных и вспомогательных шагов все схемы при $\alpha = 0.5$ приводятся к каноническому виду

$$\prod_{j=1}^{2}(I + \frac{\tau}{2}L_{jh})\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -L_h u^n,$$

т. е. эквивалентны, а следовательно, имеют одинаковый порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^k)$ и безусловно устойчивы. Для трехмерных задач ($N = 3$) эквивалентны лишь схемы приближенной факторизации и предиктор-корректор, так как они приводятся к каноническому виду (8), а схема расщепления к нему не приводится.

При приведении схемы к каноническому виду предполагалось, что операторы L_{1h} и L_{2h} перестановочны. Для некоммутирующих операторов исключение дробных шагов возможно также для $\alpha = 1$.

6.2. Устойчивость схем в многомерном случае

Разностная схема с весами (2) приводится к канонической форме

$$C\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -L_h u^n + f_h, \tag{10}$$

где $C = I + \tau\alpha L_h$, и безусловно устойчива при $\alpha \geq 0.5$ для линейных уравнений любой размерности. Введение расщепления или факторизации приводит к изменению стабилизирующего оператора C, что может повлиять на устойчивость схем для многомерных задач. Ниже дан анализ устойчивости схем расщепления и схем приближенной факторизации для решения линейных многомерных уравнений с постоянными коэффициентами параболического или гиперболического типа.

В качестве базового уравнения параболического типа рассмотрим N-мерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} a_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad a_j = \text{const}. \tag{11}$$

Пусть $\Lambda = \sum\limits_{j=1}^{N} \Lambda_{jj}$, а $\Lambda_{jj} = a_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + O(h_j^2)$. Тогда схема (10) принимает вид

$$(I - \tau\alpha\Lambda)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n. \tag{12}$$

Она аппроксимирует уравнение (11) с порядком $O(\tau^m + h^2)$, где $m = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $m = 1$ для $\alpha \neq 0.5$. Устойчивость схемы будем исследовать для решений вида

$$u_j^n = u_{j_1 \ldots j_N}^n = u(t_n, (x_1)_{j_1}, \ldots (x_N)_{j_N}) = u_0 \lambda^n e^{is}, \tag{13}$$

где $s = \sum\limits_{l=1}^{N} k_l h_l j_l$, $\lambda = e^{\omega\tau}$. Разностной схеме (12) соответствует характеристическое уравнение

$$\det \parallel [(1 + \alpha r)(\lambda - 1) + r]I \parallel = 0.$$

Здесь $r = \sum\limits_{j=1}^{N} r_j$, $r_j = 4\frac{\tau a_j^2}{h_j^2} \sin^2 \frac{k_j h_j}{2}$. Его корни равны

$$\lambda = \frac{1 - \beta r}{1 + \alpha r}, \quad \beta = 1 - \alpha$$

и, следовательно, $\mid \lambda \mid \leq 1$ при $\alpha \geq 0.5$, т. е. при $\alpha \geq 0.5$, схема (12) безусловно устойчива.

Для схемы приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^{N} (I - \tau\alpha\Lambda_{jj})\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -\Lambda u^n, \tag{14}$$

аппроксимирующей уравнения (11) с тем же порядком, что и базовая схема (12), характеристическое уравнение представляется в виде

$$\det \parallel \prod_{j=1}^{N} (1 + \alpha r)(\lambda - 1)I + rI \parallel = 0$$

и его корни равны

$$\lambda = \frac{q_0 - \beta r}{q_0 + \alpha r}.$$

Здесь $q_0 + \alpha r = \prod\limits_{j=1}^{N} (1 + \alpha r_j) = 1 + \alpha r + \alpha^2 (r_1 r_2 + \ldots) + \ldots$. Очевидно, что $\parallel \lambda \parallel \leq 1$ при $\alpha \geq \beta$, т. е. схема (14) безусловно устойчива при $\alpha \geq 0.5$.

Схема расщепления

$$\frac{u^{n+1/N}-u^n}{\tau}=\Lambda_{11}(\alpha u^{n+1/N}+\beta u^n),$$

$$\ldots \qquad (15)$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+(N-1)/N}}{\tau}=\Lambda_{NN}(\alpha u^{n+1}+\beta u^{n+(N-1)/N}),$$

аппроксимирующая уравнения (11) с тем же порядком, что и схема приближенной факторизации, после исключения дробных шагов записывается в виде

$$\prod_{j=1}^{N}(I-\tau\alpha\Lambda_{jj})u^{n+1}=\prod_{j=1}^{N}(I+\tau\beta\Lambda_{jj})u^n,$$

а его характеристическое уравнение имеет вид

$$\det \parallel \prod_{j=1}^{N}(1+\alpha r_j)\lambda-\prod_{j=1}^{N}(1-\beta r_j) \parallel=0.$$

Его корни равны

$$\lambda=\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{1-\beta r_j}{1+\alpha r_j}\right)$$

и, очевидно, $\mid \lambda \mid \leq 1$ при $\alpha \geq \beta$, т. е. схема (15) безусловно устойчива для $\alpha \geq 0.5$. Заметим, что полученные оценки устойчивости справедливы для уравнений любой размерности. Напомним, что и схема предиктор–корректор

$$\frac{u^{n+1/2N}-u^n}{\tau\alpha}=\Lambda_{11}u^{n+1/2N},$$

$$\ldots$$

$$\frac{u^{n+1/2}-u^{n+(N-1)/2N}}{\tau\alpha}=\Lambda_{NN}u^{n+1/2},$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}=\Lambda u^{n+1/2}$$

после исключения дробных шагов приводится к схеме приближенной факторизации (14) и, следовательно, также безусловно устойчива при $\alpha \geq 0.5$ для всех N.

При анализе устойчивости схем для гиперболических уравнений в качестве базового выберем линейное многомерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0. \quad a_j = \text{const}. \tag{16}$$

Пусть для определенности $\Lambda_j = a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + O(h_j^2)$ — симметричный оператор, аппроксимирующий первые производные со вторым порядком. Тогда разностная схема с весами

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j (\alpha u^{n+1} + \beta u^n) = 0$$

безусловно устойчива при $\alpha \geq 0.5$ для уравнений любой размерности, так как корни соответствующего ей характеристического уравнения

$$\det \parallel (1 + i\alpha d)\lambda - (1 - id) \parallel = 0$$

равны

$$\lambda = \frac{1 - i\beta d}{1 + i\alpha d}$$

и, очевидно, $\mid \lambda \mid \leq 1$ при $\alpha \geq 0.5$. Здесь $d = \sum\limits_{j=1}^{N} d_j$, а $d_j = \frac{\tau \alpha_j}{h_j} \sin k_j h_j$.

Схема приближенной факторизации, аппроксимирующая уравнения (16), может быть записана в виде

$$\prod_{j=1}^{N} (I + \tau \alpha \Lambda_j) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j u^n. \tag{17}$$

Ей соответствует характеристическое уравнение

$$\det \parallel \prod_{j=1}^{N} (1 + i\alpha d_j)(\lambda - 1) + id \parallel = 0.$$

Для двумерного случая (при $N = 2$) его корни равны

$$\lambda_j = \frac{(1 + i\alpha d_1)(1 + i\alpha d_2) - i(d_1 + d_2)}{(1 + i\alpha d_1)(1 + i\alpha d_2)} = \frac{1 + i\beta d - \alpha^2 d_1 d_2}{1 + i\alpha d - \alpha^2 d_1 d_2}$$

и, очевидно, $\mid \lambda \mid \leq 1$ при $\alpha \geq 0.5$. Иная ситуация имеет место при $N > 2$.

Покажем, что уже в трехмерном случае схема (17) условно устойчива при любых α (см. также [10]). Пусть для некоторых узлов сетки имеет место равенство $d_j = d_0 = \frac{\tau a}{h} \sin kh$, где, например, $a = a_1$, $h = h_1$, $k = k_1$. Это может быть достигнуто за счет варьирования шагов сетки h_j, коэффициентов a_j и (или) волнового числа k_j. Тогда характеристическое уравнение схемы (16) для $N = 3$ может быть переписано в виде

$$\det \parallel (1 + i\alpha d_0)^3(\lambda - 1) + 3id_0 \parallel = 0,$$

отсюда следует, что

$$\lambda = \frac{A + i(B - 3d_o)}{A + iB}.$$

Здесь $A = 1 - 3\alpha^2 d_0^2$, $B = \alpha d_0(3 - \alpha^2 d_0^2)$ и $A + iB = (1 + i\alpha d_0)^3$). Так как

$$\mid \lambda \mid^2 = \frac{A^2 + (B - 3d_0)^2}{A^2 + B^2} = \frac{A^2 + B^2 + 9d_0^2 - 6d_0 B}{A^2 + B^2},$$

то для выполнения условий устойчивости необходимо, чтобы $\mid \lambda \mid \leq 1$, что эквивалентно выполнению условия

$$3d_0^2 \leq 2d_0 B = 2\alpha d_0^2(3 - \alpha^2 d_0^2).$$

Отсюда следует ограничение на τ :

$$\tau \leq \frac{h}{\mid a \mid} \sqrt{\frac{3(2\alpha - 1)}{2\alpha^3}}.$$

Таким образом, схема (17) условно устойчива для всех α. Более того, при $\alpha = 0.5$ она абсолютно неустойчива. Максимальное значение τ принимает при $\alpha = 3/4$. В этом случае условие устойчивости имеет вид

$$\tau \leq \frac{4h}{3 \mid a \mid},$$

т. е. близко к устойчивости явных схем. При замене симметричной аппроксимации в схеме (17) на несимметричную (левостороннюю при $a \geq 0$ и правостороннюю при $a \leq 0$) оценки устойчивости не меняются.

Наконец рассмотрим устойчивость схемы расщепления

$$\frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \Lambda_1(\alpha u^{n+1/N} + \beta u^n) = 0,$$

...

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+N-1/N}}{\tau}+\Lambda_N(\alpha u^{n+1}+\beta u^{n+N-1/N})=0, \qquad (18)$$

аппроксимирующей уравнение переноса (16) с порядком $O(\tau^m+h^2)$. Исключая дробные шаги в схеме (18), получим разностную схему

$$\prod_{j=1}^{N}(I+\tau\alpha\Lambda_j)u^{n+1}=\prod_{j=1}^{N}(I-\tau\beta\Lambda_j)u^n,$$

характеристическое уравнение которой равно

$$\det \parallel \prod_{j=1}^{N}[(1+i\alpha d_j)\lambda-(1-i\beta d_j)] \parallel = 0$$

и имеет корни

$$\lambda_j=\prod_{j=1}^{N}\frac{(1-i\beta d_j)}{(1+i\alpha d_j)}.$$

Очевидно при $\alpha \geq \beta$ имеем $\mid \lambda \mid \leq 1$, т. е. для уравнений гиперболического типа в отличие от схемы приближенной факторизации схема расщепления безусловно устойчива для уравнения любой размерности.

И в заключение раздела заметим, что схема предиктор—корректор

$$\frac{u^{n+1/2N}-u^n}{\tau\alpha}+\Lambda_1 u^{n+1/2N}=0,$$

$$\cdots$$

$$\frac{u^{n+1/2}-u^{n+(N-1)/2N}}{\tau\alpha}+\Lambda_N u^{n+1/2}=0,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\sum_{j=1}^{N}\Lambda_j u^{n+1/2}=0$$

для численного решения уравнения переноса (16) после исключения дробных шагов совпадает со схемой приближенной факторизации (17), т. е. ее устойчивость для линейных уравнений совпадает с устойчивостью схемы приближенной факторизации: они безусловно устойчивы для двумерных задач и условно устойчивы для трехмерных. Можно показать, что и для $N>3$ схемы приближенной факторизации теряют свойство безусловной устойчивости для гиперболического уравнения (16). Очевидно, эти выводы справедливы и для систем уравнений (гиперболического типа).

6.3. Реализация краевых условий в схемах расщепления и приближенной факторизации

Постановка краевых условий в задачах играет важнейшую роль, так как все многообразие решений определяется граничными и начальными условиями и группой параметров в исходных уравнениях. Численная реализация граничных условий существенно влияет на устойчивость и экономичность алгоритмов, точность решения. При аппроксимации дифференциальных уравнений явными схемами краевые условия аппроксимируются на нижнем слое и обычно проблем с их реализацией не возникает. При применении неявных нефакторизованных схем краевые условия задаются на нижнем и верхнем слоях и они используются в численном алгоритме. Более сложная ситуация возникает при задании и реализации краевых условий в схемах расщепления и приближенной факторизации. Это связано с тем обстоятельством, что при решении разностных уравнений на дробных шагах необходимо задавать граничные условия для вспомогательных величин и невязок, которые отсутствуют в физической постановке задачи. Общего подхода задания краевых условий на дробных шагах для этих классов схем не существует, имеются отдельные постановки краевых условий для конкретных краевых задач (см., например, [12; 23–25; 32]). Изложим способ реализации краевых условий на примере решения двумерного уравнения теплопроводности с краевыми условиями первого рода. Рассмотрим краевую задачу в прямоугольнике Ω (рис. 6):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{19}$$

$$u_\gamma = \xi(t, x_1, x_2), \quad u(0, x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2).$$

Здесь $\gamma = \sum\limits_{j=1}^{4} \gamma_j$ — граница прямоугольника $0 \le x_j \le 1$, $\Delta = \partial^2/\partial x_1 + \partial^2/\partial x_2$ — оператор Лапласа. Аппроксимируем уравнение (19) разностной схемой, приведенной к канонической форме

$$(I - \tau\alpha\Lambda_{11})(I - \tau\alpha\Lambda_{22})\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = +\Delta_h u^n, \tag{20}$$

где, как обычно, $\Lambda_{jj} = \partial^2/\partial x_j^2 + O(h^2)$ — симметричная аппроксимация вторых производных, $\Delta_h = \sum\limits_{j=1}^{2} \Lambda_{jj}$ — разностная аппроксимация оператора Лапласа.

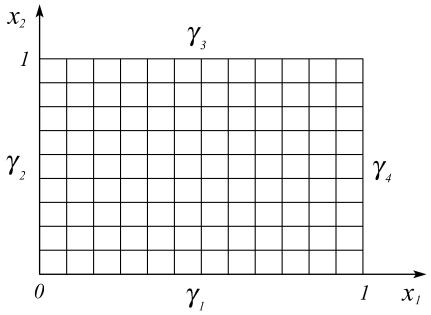

Рис. 6

Для ее реализации рассмотрим схему в дробных шагах

$$\begin{gathered}\xi^n = \Delta_h u^n,\\ (I - \tau\alpha\Lambda_{11})\xi^{n+1/2} = \xi^n,\\ (I - \tau\alpha\Lambda_{22})\xi^{n+1} = \xi^{n+1/2},\\ u^{n+1} = u^n + \tau\xi^{n+1}.\end{gathered} \tag{21}$$

Простейший способ вычисления вспомогательных величин ξ^n, $\xi^{n+1/2}$, ξ^{n+1} на границе γ состоит в задании их равными нулю и пересчете граничных условий на новый $n+1$ после вычисления значений внутри области. Этот подход эквивалентен явному заданию краевых условий, что как следствие приводит к ограничениям на устойчивость схемы в целом. Кроме того, для краевых условий второго рода их пересчет на новый $n+1$ слой может проводиться различными способами с различным порядком погрешности аппроксимации, что в конечном счете может оказать влияние на точность расчета в целом.

Другой подход задания краевых условий предложен в работах [12; 24]. Предположим, что дифференциальные уравнения (19) справедливы на границе вместе с граничными условиями. В силу того что u_γ^n и u_γ^{n+1} известны, значение ξ_j^{n+1} определяется из последнего уравнения схемы (21) по формуле

$$\xi_\gamma^{n+1} = \frac{u_\gamma^{n+1} - u_\gamma^n}{\tau},$$

т. е. ξ_j^{n+1} известна на новом слое во всех граничных узлах сетки . Значение ξ^n известно во всех внутренних узлах из первого уравнения схемы (21). Значения $\xi_\gamma^{n+1/2}$ могут быть вычислены из решения предпоследнего

уравнения схемы (21) по формуле

$$\xi_\gamma^{n+1/2} = (I - \tau\alpha\Lambda_{22})\xi_\gamma^{n+1}$$

в узлах на границе γ_2 и γ_4 (см. рис. 6), кроме первого и последнего узлов. После определения $\xi_\gamma^{n+1/2}$ решение уравнений (19) находится обычным образом. Из первого уравнения схемы (21) определяется значение ξ^n во всех внутренних узлах. Затем из схемы

$$(I - \tau\alpha\Lambda_{11})\xi^{n+1/2} = \xi^n$$

при известных граничных условий $\xi_\gamma^{n+1/2}$ скалярной трехточечной прогонкой по x_1 вычисляются значения $\xi^{n+1/2}$ во всех внутренних точках, после чего скалярной прогонкой по x_2 из решения разностного уравнения

$$(I - \tau\alpha\Lambda_{22})\xi^{n+1} = \xi^{n+1/2}$$

вычисляются новые значения ξ_γ^{n+1} во всех внутренних узлах сетки при известных краевых условиях ξ_γ^{n+1} на γ_1 и γ_3 и значениях $\xi^{n+1/2}$ во внутренних узлах. Наконец, новое значение функции u^{n+1} определяется явно из последнего уравнения схемы (21) во всех узлах. На этом расчет одного временного шага заканчивается.

Аналогичным образом вычисляются краевые условия для величин на дробных шагах в схеме расщепления и предиктор-корректор. В заключение отметим, что для системы уравнений реализация краевых условий усложняется. Некоторые способы их реализации описаны в работе [12].

§ 7. Метод линеаризации при решении нелинейных задач

Аппроксимация нелинейных дифференциальных уравнений разностными схемами в большинстве случаев приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для их решения разработаны различные классы итерационных методов и разностных схем, методы, основанные на линеаризации разностных схем или алгебраических уравнений, и другие подходы. Ознакомиться с наиболее распространенными из них можно по монографиям [3; 7; 15; 25]. Одним из методов решения нелинейных уравнений, как отмечалось выше, является метод предиктор—корректор (см. § 5), в котором на этапе предиктора исходные уравнения аппроксимируются линейными разностными схемами (как правило, коэффициенты уравнений аппроксимируются на нижнем временном слое), а на этапе корректора рассматривается разностная схема типа "крест"с явной аппроксимацией нелинейных членов.

Для иллюстрации возникающих проблем решения нелинейных уравнений рассмотрим стационарную нелинейную задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = f(x)$$

с краевыми условиями $u(0) = U_0$, $u(1) = U_1$ для $0 \le x \le 1$. Здесь, например, $k = k_0 u^\gamma$ или $k = k_0(\frac{\partial u}{\partial x})$ и т. д. Наряду с ней может быть рассмотрена нестационарная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - f(x)$$

с краевыми условиями и начальными условиями

$$u(t,0) = U_0(t), \quad u(t,1) = U_1(t), \quad u(0,x) = U^0(x).$$

Непосредственная аппроксимация этих задач разностными схемами

$$\Lambda k_h^* \Lambda u_j = f_h,$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \Lambda k_h^* \Lambda(\alpha u_j^{n+1} + \beta u_j^n) - f_h^n,$$

где $\Lambda k_j^* \Lambda = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial}{\partial x} + O(h^2)$ — разностная аппроксимация второй производной в узле сетки j, а $k_j^* = \alpha k_j^{n+1} + \beta k_j^n$, приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений (во втором случае при $\alpha \neq 0$). Найти решение разностных уравнений для стационарной задачи по конечным формулам не представляется возможным. Такая же ситуация возникает и при реализации разностной схемы для нестационарного уравнения, кроме частного случая $\alpha = 0$, когда схема является явной. Таким образом, для решения указанных задач необходимо использование итерационных алгоритмов или других методов.

Ниже рассматривается метод линеаризации при решении нелинейных многомерных уравнений на основе неявных разностных схем приближенной факторизации.

7.1. Одномерный случай

Рассмотрим систему нестационарных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = \mathbf{g}, \tag{1}$$

где $\mathbf{W} = W(\mathbf{U})$, $\mathbf{g} = g(\mathbf{U})$ — нелинейные функции от $\mathbf{U}$, а $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, x)$ — скалярная или векторная функция. Для численного решения уравнений (1) рассмотрим в качестве базовой разностную схему с весами

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda[\alpha \mathbf{W}^{n+1} + \beta \mathbf{W}^n] = \alpha \mathbf{g}^{n+1} + \beta \mathbf{g}^n, \tag{2}$$

аппроксимирующую его с порядком $O(\tau^m + h^k)$, где $m = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $m = 1$ при $\alpha \neq 0.5$. Здесь $\Lambda = \partial/\partial x + O(h^k)$. В силу нелинейности функций $\mathbf{W}$ и $\mathbf{g}$ явно вычислить новое значение функции $\mathbf{U}^{n+1}$ по схеме (2) возможно лишь при $\alpha = 0$, т. е. для явной схемы. Как известно, в этом случае разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и в лучшем случае условно устойчива. Для получения линейных устойчивых схем (или схем со слабыми ограничениями на устойчивость) линеаризуем векторы $\mathbf{W}^{n+1}$ и $\mathbf{g}^{n+1}$ относительно функции $\mathbf{U}^{n+1}$:

$$\begin{gathered}
\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}(\mathbf{U}^{n+1}) = \mathbf{W}^n + \tau(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}})^n(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t})^n + O(\tau^2) = \\
= \mathbf{W}^n + B^n \Delta \mathbf{U}^n + O(\tau^2), \\
\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{U}^{n+1}) = \mathbf{g}^n + \tau(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}})^n(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t})^n + O(\tau^2) = \\
= \mathbf{g}^n + D^n \Delta \mathbf{U}^n + O(\tau^2),
\end{gathered} \tag{3}$$

где $\Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$, $B = \partial \mathbf{W}/\partial \mathbf{U}$, $D = \partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{U}$. Подставляя разложение (3) в уравнение (2), получим разностную схему

$$[I + \tau\alpha(\Lambda B^n - \alpha D^n)]\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\Lambda \mathbf{W}^n + \mathbf{g}^n, \tag{4}$$

аппроксимирующую исходные уравнения (1) с тем же порядком, что и базовая схема (3), но линейную относительно U^{n+1}. Решение разностных уравнений может быть получено стандартными методами, например методом прогонки, векторной, если $\mathbf{U}$ — вектор, или скалярной для скалярной функции U. Пусть для определенности Λ – симметричный трехточечный оператор, аппроксимирующий первую производную с порядком $O(h^2)$. Тогда схема (4) представляется в виде системы трехточечных разностных уравнений

$$a_j \mathbf{U}_{j-1}^{n+1} + b_j \mathbf{U}_j^{n+1} + c_j \mathbf{U}_{j+1}^{n+1} = \mathbf{d}_j^n,$$

где

$$a_j = -\frac{\tau\alpha}{2h} B_{j-1}^n, \quad b_j = 1 - \tau\alpha D^n, \quad c_j = \frac{\tau\alpha}{2h} B_{j+1}^n,$$

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{U}_j^n - \tau\frac{\mathbf{W}_{j+1}^n - \mathbf{W}_{j-1}^n}{2h} + \tau g_j^n + \frac{\tau\alpha}{2h}(B_{j+1}^n\mathbf{U}_{j+1}^n - B_{j-1}^n\mathbf{U}_{j-1}^n) - \tau\alpha D_j^n\mathbf{U}_j^n.$$

Ее решение может быть получено методом прогонки.

Подобно (2), (3) строится разностная схема и для системы уравнений (1) второго порядка, если

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{U}, \mathbf{U}_x), \quad \mathbf{U}_x = \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x}. \tag{5}$$

Линеаризуя векторы $\mathbf{W}$ и $\mathbf{g}$ относительно функций $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}_x$, будем иметь

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}_x^{n+1}) = \mathbf{W}^n + \tau(\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial\mathbf{U}})^n(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t})^n + \tau(\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial U_x})^n(\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial x\partial t})^n + O(\tau^2) =$$

$$= \mathbf{W}^n + B^n\Delta u^n + C^n\Lambda\Delta\mathbf{U}^n + O(\tau^2), \quad \mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{g}^n + \tau D^n\Delta\mathbf{U}^n + O(\tau^2),$$

где

$$C = \frac{\partial\mathbf{W}}{\partial U_x}, \quad B = \frac{\partial\mathbf{W}}{\partial\mathbf{U}}, \quad \Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n.$$

С учетом линеаризации разностная схема (2) может быть переписана в виде

$$[I + \tau\alpha\Lambda(B^n + C^n\Lambda - D^n)]\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\Lambda\mathbf{W}^n + \mathbf{g}^n. \tag{6}$$

Как и схема (4) она аппроксимирует систему уравнений (1), (5) с порядком $O(\tau^m + h^k)$ и реализуется подобно ей скалярной прогонкой на каждом временном шаге. Здесь $\Lambda C\Lambda = \frac{\partial}{\partial x}C\frac{\partial}{\partial x} + O(h^2)$.

Заметим, что решение уравнений (1) может быть получено и по схеме предиктор–корректор

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1/2} - \mathbf{U}^n}{\tau\alpha} + B^n\Lambda\mathbf{U}^{n+1/2} + C^n\Lambda_{11}\mathbf{U}^{n+1/2} - D^n\mathbf{g}^{n+1/2} = 0$$

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda\mathbf{W}^{n+1/2} = \mathbf{g}^{n+1/2}, \tag{7}$$

аппроксимирующей уравнения (1), (5) с тем же порядком, что и схема (6). При построении схемы (7) на этапе предиктора уравнение (1) аппроксимировалось в недивергентном виде

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + B\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x} + C\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial^2 x} = \mathbf{g}(U). \tag{8}$$

В отличие от схемы (6) разностная схема (7) консервативна. Ее реализация на этапе предиктора сводится к прогонкам как и в схеме (4), а на этапе корректора новые значения u^{n+1} находятся по явной схеме. Для уравнений (8) с постоянными коэффициентами схемы (6) и (7) эквивалентны.

Для систем уравнений (1) более общего вида, где

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f}). \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{f}, \mathbf{f}_x), \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{f}), \tag{9}$$

разностная схема строится подобно (6). Линеаризуем функции $\mathbf{U}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{g}$ относительно векторов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}_x$ по формулам

$$\mathbf{U}^{n+1} = U(\mathbf{f}^{n+1}) = \mathbf{U}^n + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{U}^n + A^n \Delta \mathbf{f}^n + O(\tau^2),$$

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}(\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{f}_x^{n+1}) = \mathbf{W}^n + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right)^n + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}_x}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial t}\right)^n +$$

$$+ O(\tau^2) = \mathbf{W}^n + (B^n + C\Lambda)\Delta \mathbf{f}^n + O(\tau^2)$$

$$\mathbf{g}^{n+1} = g(\mathbf{f}^{n+1}) = \mathbf{g}^n + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{f}}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{g}^n + D^n \Delta \mathbf{f}^n + O(\tau^2),$$

где $B = \partial \mathbf{W}/\partial \mathbf{f}$, $C = (\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}_x})$, $D = \partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{f}$, $\Delta \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n$. Подставляя их в (2), получаем разностную схему

$$[A^n + \tau\alpha(\Lambda B^n + \Lambda C^n \Lambda - D^n)] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\Lambda \mathbf{W}^n + \mathbf{g}^n. \tag{10}$$

Она аппроксимирует уравнения (1), (9) с порядком $O(\tau + h^k)$ при всех значениях α.

Схема предиктор—корректор для задачи (1), (9) строится аналогично схеме (7). Проиллюстрируем изложенные алгоритмы на примере модельных уравнений Навье—Стокса с уравнением состояния $p = A\rho^\gamma (A = \text{const})$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \mu \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad g = 0 \quad \mu = \text{const}.$$

Схема (2) аппроксимирует уравнение (11) с порядком $O(\tau^m + h^k)$ и при $\alpha \neq 0$ нелинейна. Линейная схема вида (6) аппроксимирует уравнение (11) с тем же порядком и реализуется векторной прогонкой, так как матрицы B и C равны

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}, \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma p}{\rho} > 0.$$

Если в качестве искомых функций выбрать вектор $\mathbf{f}$ с компонентами плотность и скорость, то марричные операторы A, B, C представляются в виде

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & \rho \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \dfrac{c^2}{\rho} & u \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix},$$

а разностная схема (10) аппроксимирует уравнение (11) с порядком $O(\tau + h^k)$ для всех α, но как и схема и (4) реализуется векторной прогонкой.

7.2. Многомерный случай

Для численного решения нелинейных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{U}) \tag{12}$$

рассмотрим разностную схему с весами

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j(\alpha \mathbf{W}_j^{n+1} + \beta \mathbf{W}_j^n) = 0, \tag{13}$$

реализация которой при $\alpha \neq 0$ требует итераций. Здесь $\Lambda_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + O(h_j^k)$ — разностная аппроксимация первых производных с порядком k. При $\alpha = 0.5$ схема (13) аппроксимирует систему уравнений (12) с порядком $O(\tau^2 + h^k)$. Линеаризуя векторы $\mathbf{W}_j^{n+1}$ относительно вектора $\mathbf{U}^{n+1}$ по формуле

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n + \tau(\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}})^n(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t})^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_j^n + B_j^n \Delta \mathbf{U}^n + O(\tau^2),$$

$$\Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$$

и подставляя их значения в схему (13), получаем линейную разностную схему

$$(I + \tau\alpha \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j B_j^n) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n,$$

аппроксимирующую систему (12) с тем же порядком, что и базовая схема (13) с весами, но реализуемую матричными прогонками. Чтобы избежать матричных прогонок, приближенно факторизуем стабилизирующий оператор по формуле

$$I + \tau\alpha \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j B_j^n \approx C = \prod_{j=1}^{N} (I + \tau\alpha \Lambda_j B_j^n) = I + \tau\alpha \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j B_j^n + O(\tau^2).$$

Тогда разностная схема

$$C \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n \tag{14}$$

имеет тот же порядок аппроксимации, что и схема (13). Для ее численной реализации рассмотрим эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\boldsymbol{\xi}^n = -\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n,$$

$$(I + \tau\alpha \Lambda_1 B_1^n) \boldsymbol{\xi}^{n+1/N} = \boldsymbol{\xi}^n,$$
$$(I + \tau\alpha \Lambda_2 B_2^n) \boldsymbol{\xi}^{n+2/N} = \boldsymbol{\xi}^{n+1/N},$$
$$\dots$$
$$(I + \tau\alpha \Lambda_N B_N^n) \boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+(N-1)/N},$$
$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \tau \boldsymbol{\xi}^{n+1}.$$

На каждом дробном шаге разностные уравнения аппроксимируют одномерные системы уравнений (или уравнения) и могут быть решены методом векторной (скалярной) прогонки. Для уравнений гиперболического типа схема (14) в линейном приближении безусловно устойчива для $N = 1, 2$ и условно устойчива при $N = 3$ (см. п. 6.2).

Построение и реализация схем приближенной факторизации для системы уравнений (12) второго порядка значительно усложняется. Пусть

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f}), \quad \mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}, \mathbf{f}_l), \qquad \mathbf{f}_l = \partial \mathbf{f} / \partial x_l, \tag{15}$$

а $\mathbf{f}$ — искомая функция (в частном случае возможно, что $\mathbf{U} \equiv \mathbf{f}$). Подобно одномерному случаю, линеаризуем векторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}_j$ относительно вектора f:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}(\mathbf{f}^{n+1}) = \mathbf{U}^n + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{U}^n + A^n \Delta \mathbf{f}^n + O(\tau^2),$$

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{f}_l^{n+1}) = \mathbf{W}_j^n + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial f}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right)^n +$$

$$+\tau \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}_l}\right)^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_l \partial t}\right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_j^n + B_j^n \Delta f^n + \sum_{l=1}^{N} C_{jl}^n \Lambda_l \Delta \mathbf{f}^n + O(\tau^2),$$

где

$$A = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad B_j = \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}}, \quad C_{jl} = \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}_l}, \quad \Delta \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n.$$

Тогда с учетом линеаризации разностная схема (12) примет вид

$$\tilde{C} \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n,$$

где

$$\tilde{C} = A^n + \tau\alpha \sum_{j=1}^{N} R_j, \quad R_j = \Lambda_j (B_j + \sum_{l=1}^{N} C_{jl} \Lambda_l).$$

Она аппроксимирует уравнения (12) с порядком $O(\tau + h^k)$ при всех значениях α для $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$ и с порядком $O(\tau^2 + h^k)$ при $\alpha = 0.5$ для $\mathbf{f} \equiv \mathbf{U}$. Приближенно аппроксимируем оператор $\tilde{C}$ оператором C :

$$\tilde{C} = A^n [I + \tau\alpha (A^{-1})^n \sum_{j=1}^{N} R_j^n] \approx A^n \prod_{j=1}^{N} [I + \tau\alpha (A^{-1})^n R_j^n] =$$

$$= (A^n + \tau\alpha R_1^n)(A^{-1})^n (A^n + \tau\alpha R_2^n) \cdots (A^{-1})^n (A^n + \tau\alpha R_N^n) = C = \tilde{C} + O(\tau^2)$$

получим разностную схему

$$C \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \tag{16}$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$
\begin{gathered}
A^n \boldsymbol{\xi}^n = -\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \\
\left\{ A^n + \tau\alpha\Lambda_1 \left(B_1^n + \sum_{l=1}^{N} C_{1l}^n \Lambda_l \right) \right\} \boldsymbol{\xi}^{n+1/N} = A^n \boldsymbol{\xi}^n, \\
\cdots \\
\left\{ A^n + \tau\alpha\Lambda_N \left(B_N^n + \sum_{l=1}^{N} C_{Nl}^n \Lambda_l \right) \right\} \boldsymbol{\xi}^{n+1} = A^n \boldsymbol{\xi}^{n+(N-1)/N}, \\
\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau \boldsymbol{\xi}^{n+1}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Схема (16) или (17) аппроксимирует систему уравнений так же с порядком $O(\tau + h^k)$ и на каждом дробном шаге реализуется матричными прогонками (из-за наличия на дробных шагах разностных членов вида $\Lambda_j C_{lj} \Lambda_l$, аппроксимирующих смешанные производные при $j \neq l$). Таким образом, факторизация оператора $\tilde{C}$ оператором C для системы (12), (15) не приводит к упрощению реализации разностных схем. Чтобы избежать матричных прогонок, заменим стабилизирующий оператор C на C_0, равный

$$
C_0 = [A^n + \tau\alpha\Lambda_1(B_1^n + C_{11}^n\Lambda_1)](A^{-1})^n[A^n + \tau\alpha\Lambda_2(B_2^n + C_{22}^n\Lambda_2)] \cdots
$$
$$
(A^{-1})^n[A^n + \tau\alpha\Lambda_N(B_N^n + C_{NN}^n\Lambda_N)] = C + O(\tau),
$$

т. е. оператор C_0 содержит первые производные и только повторные вторые производные. Очевидно, что при такой замене допущена погрешность $O(\tau)$ т. е. погрешность схемы (16). Тогда

$$
C_0 \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n \tag{18}
$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$
\begin{gathered}
A^n \boldsymbol{\xi}^n = -\textstyle\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \\
\left[A^n + \tau\alpha\Lambda_1 \left(B_1^n + C_{11}\Lambda_1 \right) \right] \boldsymbol{\xi}^{n+1/N} = A^n \boldsymbol{\xi}^n, \\
\cdots \\
\left[A^n + \tau\alpha\Lambda_N \left(B_N^n + C_{NN}^n\Lambda_N \right) \right] \boldsymbol{\xi}^{n+1} = A^n \boldsymbol{\xi}^{n+(N-1)/N}, \\
\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau \boldsymbol{\xi}^{n+1}
\end{gathered}
\tag{19}
$$

аппроксимирует систему уравнений (12) с порядком $O(\tau + h^k)$ и реализуется скалярными (если f — скалярная функция) или векторными, если ($\mathbf{f}$ — вектор) прогонками. В линейном случае схема (8) безусловно устойчива при $\alpha \geq 0.5$ для $N \leq 2$ и условно устойчива для $N = 3$ для всех α. В случае, когда $f \equiv U$, схема приближенной факторизации получается заменой в (18), (19) оператора A на единичный оператор I, при этом порядок аппроксимации схемы (18) остается прежним $O(\tau + h^k)$ при всех значениях весового параметра α.

Альтернативой этому подходу является метод предиктор—корректор (§ 5), в котором на этапе предиктора коэффициенты уравнений аппроксимируются на n-м слое, что приводит разностную схему к линейной, а консервативность схемы восстанавливается на этапе корректора, который аппроксимируется явной схемой.

Глава II. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ

Точность численного решения задачи является одной из важнейших характеристик численного метода. Повышение точности может быть достигнуто различными способами. Простейшим из них является измельчение шагов сетки. Это, как правило, не требует изменения алгоритма, за исключением случаев, когда число расчетных узлов сетки не входит в оперативную память ЭВМ и для проведения расчета необходим обмен данными с внешней памятью. Как следствие, увеличение числа узлов приводит к росту числа арифметических операций, т. е. росту затрат ресурсов ЭВМ. Повышение точности может быть достигнуто также при нахождении решения задачи на последовательности сеток. Например, как в методе Ричардсона, в котором повышение порядка аппроксимации достигается за счет экстраполяции решений на двух сетках (см. [17]). Ранее упоминался зональный метод аппроксимации задачи, когда после получения решения на одной сетке во всей расчетной области уточняется решение в отдельных подобластях, имеющих максимальные градиенты.

Одним из наиболее эффективных способов повышения точности является применение неравномерных сеток, т. е. сеток в которых изменение шагов производится лишь в в подобластях больших градиентов. При незначительном изменении общего числа узлов в расчетной области точность решения существенно возрастает. В качестве недостатка этого подхода отметим необходимость априорного знания областей резкого изменения решения — областей больших градиентов. Одним из способов построения неравномерных сеток, называемых адаптивными, описан в § 1 данной главы.

В настоящее время при проведении расчетов широко используются схемы повышенного порядка аппроксимации [3; 24; 27]. Повышение порядка аппроксимации может быть достигнуто путем увеличения шаблона сетки (схемы на расширенном шаблоне) или применением схем повышенного порядка на решении при сохранении трехточечного шаблона (так называемые компактные схемы повышенного порядка). Это один из наиболее перспективных подходов, но и он имеет ряд недостатков, связанных с усложнением аппроксимации, особенно в многомерном случае. Еще один подход состоит в создании многослойных схем, суммарная аппроксимация которых имеет повышенный порядок.

Можно представить и другие способы повышения точности численных решений. Например, за счет перехода к новым искомым функциям, которые ведут себя достаточно гладко, или введением специальных преобразований. Ярким примером такого подхода является преобразо-

вание годографа. С. А. Чаплыгин применил это преобразование для уравнений потенциального установившегося движения и привел задачу к линейному уравнению второго порядка. Известно, что использование потоковых переменных для уравнений газовой динамики (и уравнений Навье–Стокса) также приводит к повышению точности расчета, так как эти величины являются непрерывными при переходе через поверхности разрыва газодинамических переменных. Специальный выбор координат позволяет в ряде случаев уменьшить размерность задачи, что эквивалентно увеличению точности, так как для задачи меньшей размерности можно использовать более мелкие шаги сетки. Например, осесимметричное течение в декартовых координатах зависит от трех координат, а в криволинейных координатах (цилиндрических, сферических и т. д.) — от двух. Еще один способ повышения точности расчета состоит в выделении главных особенностей решения задачи и последующим решением уравнений в области гладкого решения. Например, выделение головной (ударной) волны при расчете обтекания тела позволяет существенно уменьшить число узлов в расчетной области при повышении точности расчета внутри расчетной области. И конечно, точность расчета должна быть согласована с точностью выбранной физико-математической модели. Ниже мы остановимся на двух наиболее типичных и сравнительно простых способах повышения точности решения а) с применением неравномерных сеток, б)с использованием схем повышенного порядка аппроксимации.

§ 1. Неравномерные сетки

Как правило, решение большинства задач содержит сравнительно узкие зоны больших градиентов (области типа пограничных слоев, зон ударного перехода и т. д.) и остальные подобласти, где решение изменяется незначительно. Классическим примером таких задач является уравнение Бюргерса (см. [12])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\nu \frac{\partial u}{\partial x}), \quad \varphi = u^2/2. \tag{1}$$

Его решение при ν =const описывает ударный переход, ширина которого оценивается как ν. Вне этой зоны решение изменяется незначительно. При стремлении $\nu \to 0$ получим получим явление градиентной катастрофы, когда градиент $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \to \infty$ при гладких начальных данных. Для правильного описания ударного перехода при численном решении необходимо, чтобы в интервал $\delta \approx \nu$ попадало ≈ 20 узлов. И самым оптимальным выбором сетки для таких задач является использование

неравномерной сетки, сгущающейся в области больших градиентов и сравнительно редкой в области почти постоянного решения. Построение такой неравномерной сетки возможно, если мы априори знаем области больших градиентов. Таким образом, для построения оптимальной по числу узлов сетки и заданной точности решения мы должны знать решение задачи заранее или одновременно находить решение задачи и подстраивать к нему расчетную неравномерную сетку. Один из подходов построения сеток, подстраивающихся (адаптирующихся) к решению будет изложен ниже.

При использовании неравномерных сеток возможны два подхода: исходные уравнения аппроксимируются на неравномерной сетке, преобразование координат не вводится. Во втором случае вводится преобразование координат, переводящее расчетную область в стандартную, уравнения записывается в новых координатах. В стандартной области вводится равномерная сетка, а в исходной области ей соответствует неравномерная сетка, т. е. сгущение узлов сетки задается некоторым преобразованием, уменьшающим шаги сетки в зоне больших градиентов. Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки. Проиллюстрируем их на решении уравнения (1). Рассмотрим разностную схему с весами

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda(\alpha\varphi^{n+1}+\beta\varphi^n)=\Lambda_{11}(\alpha u^{n+1}+\beta u^n), \tag{2}$$

где Λ и Λ_{11} – аппроксимации первой и второй производных на трехточечном шаблоне:

$$\begin{gathered}\Lambda\varphi=\frac{1}{h_j+h_{j+1}}\left[\frac{h_j}{h_{j+1}}(\varphi_{j+1}-\varphi_j)+\frac{h_{j+1}}{h_j}(\varphi_j-\varphi_{j-1})\right]= \\ =(\varphi_x)_j+O(h^2), \\ \Lambda_{11}u_j=\frac{2}{h_j+h_{j+1}}\left(\nu_{n+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h_{j+1}}-\nu_{j-1/2}\frac{u_j-u_{j+1}}{h_j}\right)= \\ =[(\nu u_x)_x]_j+O(h).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\nu_{j+1/2}=(\nu_j+\nu_{j\pm1})/2$, $h_j=x_j-x_{j-1}$, $h=\max(h_j)$. Заметим, что классическая симметричная аппроксимация первой производной

$$\Lambda\varphi_j=\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1}}{h_j+h_{j+1}}$$

на неравномерной сетке имеет лишь первый порядок и для получения второго порядка необходимо использовать более сложную аппроксимацию (см. первое уравнение (3)). Таким образом, если на равномерной сетке аппроксимация первой производной выполняется за две арифметические операции, то на неравномерной — уже за 9 операций. Аппрок-

симация второй производной на трехточечном шаблоне имеет лишь первый порядок (см. (3)) и для повышения порядка требуется расширение шаблона. При обобщении задачи на многомерный случай остаются те же проблемы. Остановимся подробнее на втором подходе – введении преобразования координат и аппроксимации уравнений в новых координатах.

1.1. Преобразования координат

Введем невырожденное преобразование координат

$$q = q(x),$$

отображающее расчетную область $[0, X]$ в единичный отрезок $[0, 1]$.

В новых переменных уравнение (1) представимо в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{\Delta}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\nu\Delta\frac{\partial u}{\partial q}\right) \tag{4}$$

где $\Delta = (\dfrac{\partial q}{\partial x})$ – якобиан преобразования x в q. Введем в области $[0,1]$ равномерную сетку с шагом h и аппроксимируем операторы $\dfrac{\partial}{\partial q}$ и $\dfrac{\partial}{\partial q}(\nu\Delta\dfrac{\partial}{\partial q})$ разностными операторами Λ и Λ_{11} соответственно: $\Lambda = \dfrac{\partial}{\partial q} + O(h^k)$, $\Lambda_{11} = \dfrac{\partial}{\partial q}\nu\Delta\dfrac{\partial}{\partial q} + O(h^2)$. Тогда разностная схема с весами

$$\frac{1}{\Delta}\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \Lambda(\alpha\varphi^{n+1} + \beta\varphi^n) = \Lambda_{11}(\alpha u^{n+1} + \beta u^n) \tag{5}$$

аппроксимирует (5) с порядком $O(\tau^m + h^k)$. Усложнение уравнения в одномерном случае незначительно. Однако переход к многомерным задачам приводит к существенному (на порядок) увеличению числа членов уравнения и как следствие к усложнению аппроксимации и реализации схем. Например, трехмерное уравнение теплопроводности содержит в декартовых координатах три члена по пространственным переменным. В новых произвольных криволинейных координатах это уравнение содержит уже 27 членов, включающих как повторные, так и смешанные производные. Ясно, что построение экономичной схемы для него значительно усложняется.

Переход к новым координатам может быть проведен различными способами, которые можно объединить в две группы: геометрический подход построения сеток и физический (динамический) подход. Первый

основывается на построении однозначного отображения исходной криволинейной области на квадрат или куб исходя из априори заданного положения узлов сетки на границах этой области. Второй основан на построении сетки, связанной с градиентами решения. Остановимся на них подробнее.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

записанных в декартовых координатах. Введем невырожденное преобразование координат

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \tag{7}$$

отображающее исходную расчетную область в единичный квадрат $(\xi, \eta) \in [0:1, 0:1]$. Тогда в переменных ξ, η уравнения (6) могут быть вновь записаны в дивергентном виде

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \eta} = 0, \tag{8}$$

где $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}/J$, $\bar{\mathbf{F}} = (\xi_x \mathbf{F} + \xi_y \mathbf{G})/J$, $\bar{\mathbf{G}} = (\eta_x \mathbf{F} + \eta_y \mathbf{G})/J$, а

$$J = \det \begin{Vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{Vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

– якобиан преобразования (x, y) в (ξ, η). Пусть преобразование (7) выбрано таким образом, что обратное преобразование

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

также невырожденное. Тогда для него справедливы соотношения

$$\xi_x = y_\eta J, \quad \xi_y = -x_\eta J, \quad \eta_x = -y_\xi J, \quad \eta_y = x_\xi J.$$

Конкретный вид преобразования (7) может выбираться различным в зависимости от требований на разностную сетку. В алгоритме Winslow (1966 г.) семейство линий отыскивается как линии уровня функций ξ и η, удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0, \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

с граничными условиями, определяемые заданием точек на границах (см. подробнее [8]). Переходя к старым координатам x и y, вместо уравнений (9) будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0, \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$. Их решение дает нам координаты узлов расчетной области, а следовательно, и численное обратное преобразование x, y в ξ, η. Координаты узлов x, y на границе задаются исходя из некоторых требований на сетку. Иногда в целях построения более "гибкого"отображения правую часть уравнений (10) полагают отличной от нуля и равной некоторой функции f, отвечающей за адаптацию сетки. Другие подходы построения невырожденных преобразований рассмотрены в работах [8; 13].

1.2. Адаптивные сетки

Рассмотрим второй (физический) подход построения неравномерных сеток, следуя работам [12; 19]. Пусть $u(x)$ – функция, заданная на отрезке [a,b] (см. рис. 7). Найдем преобразование координат $q = q(x)$ такое, что функция $u(q)$ — линейная функция или близкая к ней (см. рис. 8).

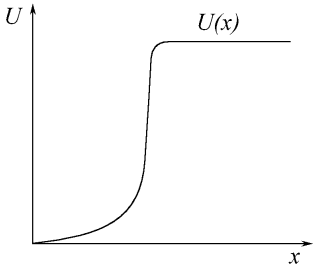

Рис. 7

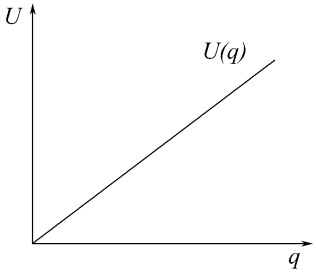

Рис. 8

Тогда рассматривая u как сложную функцию будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} = C = \text{const}.$$

На практике удобнее пользоваться соотношением

$$\left(\mid \frac{\partial u}{\partial x} \mid + \varepsilon \right) \frac{\partial x}{\partial q} = C, \tag{11}$$

которое позволяет избежать вырождение преобразования, если $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Здесь $\epsilon = O(h^m)$ – малая добавка. Уравнение (11) и дает нам алгоритм вычисления преобразования $q = q(x)$ или $x = x(q)$. Действительно, из уравнения (11) следует

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{C}{\mid \frac{\partial u}{\partial x} \mid + \varepsilon}.$$

Интегрируя это уравнение на интервале $[q_i, q_{i-1}]$, получаем

$$x_j - x_{j-1} = \Delta x_j = \int_{q_{j-1}}^{q_j} \frac{C dq}{\mid \frac{\partial u}{\partial x} \mid + \varepsilon}. \tag{12}$$

Если в области $q \in [0,1]$ ввести равномерную сетку с шагом Δq, то ей соответствует неравномерная сетка $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, которая автоматически сгущается в области больших градиентов. Как следует из уравнения (12) значение Δx_j мало в тех областях, где $\partial u / \partial x$ велико, и обратно. Точность вычисления интеграла в уравнении (12) и определяет точность вычисления сетки в координатах x. Для построения сетки, адаптирующейся к решению, удобнее пользоваться не уравнением (12), а следствием из него, продифференцировав (11) по q. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial q} b \frac{\partial x}{\partial q} = 0, \quad \text{где} \quad b = \mid \frac{\partial u}{\partial x} \mid^{\delta} + \varepsilon.$$

На практике обычно используют нестационарный аналог этого уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} b \frac{\partial u}{\partial q} \tag{13}$$

со стационарными краевыми условиями $x_0 = 0, \quad x_J = X$. В выражение для b введен весовой параметр δ, регулирующий степень сгущения сетки, а параметр ε выбирается равным порядка погрешности аппроксимации соответствующей разностной схемы (5). Стационарное решение уравнения (13) находят методом установления на каждом временном слое. Таким образом, одновременно решаются исходное уравнение (5) и уравнение (13) по разностной схеме, например по схеме с весами

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Delta} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda(\alpha \varphi^{n+1} + \beta \varphi^n) = \Lambda_{11}(\alpha u^{n+1} + \beta u^n) \\ \frac{x^{\nu+1} - u^{\nu}}{\tau_{\nu}} = \Lambda b^n \Lambda(\alpha x^{\nu+1} + \beta x^{\nu}). \end{gathered} \tag{14}$$

При известном значении b^n на n-м слое методом установления находятся новые координаты $x^{n+1} = x^{n+1,\nu+1}$, после чего из первого уравнения (14) вычисляется новое значение u^{n+1} и значение якобиана преобразования $\Delta = (\partial q/\partial x)$ на слое $n+1$. Полученная сетка подстраивается под решение (правда, на предыдущем временном слое), автоматически сгущаясь в областях больших градиентов. Наиболее эффективен этот подход при нахождении стационарного решения уравнения (4). В этом случае в уравнении для сетки делается лишь одна итерация и сходимость к стационарному решению достигается одновременно для всех уравнений схемы (14). Напомним, что для реализации нелинейной схемы (первое уравнение (14)) необходимо ее линеаризовать или применять итерацию по нелинейности. При переходе к многомерному случаю и системе уравнений, например (8) задача построения адаптивной сетки значительно усложняется. Необходимо проводить сгущение координат по каждому направлению, что может оказаться неэффективным в многомерных областях. Кроме того, усложняется задача выбора функций сгущения для каждого направления для системы уравнений, так как для различных функций области больших градиентов могут не совпадать. Например, для задач газовой динамики в области контактного разрыва скорость и давление непрерывны, а плотность изменяется скачком. В целом задача построения адаптирующихся к решению сеток для многомерных уравнений не получила полного разрешения. Некоторые подходы построения адаптивных преобразований рассмотрены в работах [6; 8; 12; 13; 27].

§ 2. Схемы повышенного порядка

Повышение порядка аппроксимации разностных схем является одним из наиболее эффективных способов повышения точности расчета. При построении схем повышенного порядка используются два подхода: повышение порядка аппроксимации за счет расширения шаблона и построение специальных аппроксимаций повышенного порядка на трехточечном шаблоне. В первом случае используется стандартный подход, приводящий к повышению порядка при увеличении шаблона. В последние 10–20 лет активно развиваются методы повышенного порядка аппроксимации на расширенном шаблоне, обладающие кроме высокого порядка и другими свойствами, такими как сохранение монотонности, невозрастание полной вариации (TVD-схемы), выполнение принципа максимума, сохранение свойства инвариантности и т. д. Наиболее эффективны эти подходы при решении задач с большими градиентами или разрывами. Их изложению посвящены сотни работ. Наиболее полное их

изложение приведено, например, в монографии [21]. Компактные схемы повышенного порядка строятся на трехточечном шаблоне. Принципы их построения изложены, например, в монографии [27]. При написании параграфа 2 использована идеология этой работы.

2.1. Аппроксимация на расширенном шаблоне

Аппроксимация первых производных на двухточечном шаблоне на равномерной сетке имеет первый порядок (в целых узлах сетки), на трехточечном — второй и т. д., т. е. расширение шаблона позволяет строить аппроксимации операторов со все более высоким порядком. Подобная ситуация справедлива и при аппроксимации вторых и высших производных, а также и при аппроксимации многомерных дифференциальных уравнений, содержащих первые, вторые (смешанные или повторные) или высшие производные по различным координатным направлениям. Построение аппроксимаций повышенного порядка, как правило, не вызывает затруднений. При заданном шаблоне сетки строятся аппроксимации максимального порядка или методом неопределенных коэффициентов, или интегро-интерполяционным методом, основанном на приближенной замене интегралов в заданной ячейке сетки (см. [3; 20]). Например, аппроксимация первой производной на 5-точечном шаблоне может быть представлена в виде

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_j \approx \frac{1}{h}(a\varphi_{j-2} + b\varphi_{j-1} + c\varphi_j + d\varphi_{j+1} + e\varphi_{j+2}) = (\varphi_x)_j + O(h^k). \quad (1)$$

Если задать $a = -e = \frac{1}{12}$, $d = -b = \frac{8}{12}$, $c = 0$, то получим аппроксимацию максимального четвертого порядка. При выражении всех коэффициентов разложения (1) через один коэффициент получаем класс схем третьего порядка аппроксимации и т. д. Подобным образом строятся аппроксимации вторых и высших производных. При решении краевых задач использование аппроксимаций на расширенном шаблоне приводит к необходимости задания дополнительных разностных краевых условий, отсутствующих в дифференциальной постановке задачи или к изменению стандартной аппроксимации (1) в приграничных узлах на специальную. Например, апппроксимация первой производной в приграничном узле $j = 1$ имеет вид

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_1 \approx \frac{1}{12h}(-3\varphi_0 - 10\varphi_1 + 18\varphi_2 - 6\varphi_3 + \varphi_4) = (\varphi_x)_1 + O(h^4). \quad (2)$$

Применение различных аппроксимаций для внутренних и приграничных узлов приводит, очевидно, к нарушению однородности алгоритма и как следствие усложнению программы и увеличения затрат на ее реализацию. Поэтому на практике предпочитают вводить фиктивные точки сетки, обеспечивающие однородность алгоритма и сохраняющие повышенный порядок аппроксимации. Значения в них получают из равенства симметричной (1) и несимметричной (2) аппроксимаций в приграничном узле $j = 1$. Тогда в фиктивном узле $j = -1$ будем иметь

$$\varphi_{-1} = \varphi_4 - 5\varphi_3 + 10\varphi_2 - 10\varphi_1 + 5\varphi_0.$$

Такое задание значения функций в фиктивном узле обеспечит однородную аппроксимацию в приграничных узлах без понижения порядка аппроксимации.

Известно, что при аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой порядок его апппроксимации может быть выше, чем порядок аппроксимации отдельных операторов (см. [24]). Так схема с весами

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \Lambda_{11}(\alpha u^{n+1} + \beta u^n) \tag{3}$$

аппроксимирует уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с порядком $O(\tau^m + h^2)$, где $\Lambda_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + O(h^2)$ — симметричная аппроксимация на трехточечном шаблоне, $m = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $m = 1$ при $\alpha \neq 0.5$. При специальном выборе весового коэффициента $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ порядок аппроксимации схемы (3) на решении, когда справедливы следствия из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \quad m = 2, ..., \tag{4}$$

равен $O(\tau^2 + h^4)$. Еще более ярким примером является разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad a \geq 0, \tag{5}$$

аппроксимирующая уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

с порядком $O(\tau + h)$, а при $\tau = h/a$ с бесконечным порядком в предположении, что $u_j^n(t, x)$ — бесконечно дифференцируемая функция (см. [22]). Подобные примеры можно продолжать. Таким образом, повышение порядка аппроксимации наряду с расширением шаблона может достигаться путем специального выбора параметров схемы (весовых параметров, шагов сетки) и использования гладкости решения исходного уравнения.

Аппроксимации повышенного порядка на расширенном шаблоне имеют и ряд недостатков:

— затруднено их обобщение на многомерный случай (особенно для многошаговых схем);

— получаемые схемы сложны и требуют большого числа операций при их реализации;

— повышаются требования на устойчивость схем;

— усложняется их построение в криволинейных координатах и многосвязных областях;

— усложняется реализация краевых условий.

Отметим, что разностные схемы на расширенном шаблоне выше первого порядка аппроксимации не являются монотонными (см. [8]). Это приводит к необходимости введения сглаживающих операторов, которые устраняют или минимизируют осцилляции решения. Этот подход активно использовался при решении задач с особенностями решения. В последние десятилетия строятся разностные схемы высокого порядка, обеспечивающиеся монотонность решения путем использования перестраивающегося шаблона за счет подходящего выбора аппроксимации производных на различных участках численного решения. Этот подход получил общее название TVD-схем (схем с ограниченной полной вариацией решения), и в настоящее время широко используется в численных расчетах (см. [9; 21]). Альтернативой схемам повышенного порядка на расширенном шаблоне являются компактные разностные схемы на трехточечном шаблоне.

2.2. Компактные схемы. Принципы построения

Основную идею построения компактных разностных схем изложим вначале на примере обыкновенного дифференциального уравнения (см. [10; 27])

$$g(x) + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Интегрируя уравнения (1) на интервале $(x_j + \alpha h, x_j + \beta h)$, получаем

$$\int_{x_j+\alpha h}^{x_j+\beta h} g dx + \varphi(x_j + \beta h) - \varphi(x_j - \alpha h) = 0.$$

Вычислим значение интеграла $\int_{x_j+\alpha h}^{x_j+\beta h}$ по какой-нибудь формуле: прямоугольника, трапеций или Симпсона. В зависимости от способа его вычисления получим семейство схем заданного порядка аппроксимации. Например, при $\alpha = 0, \quad \beta = 1$ и замене интеграла по формуле трапеций будем иметь

$$\frac{g_{j+1} + g_j}{2} + \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} = 0. \tag{7}$$

Разностная схема (7) аппроксимирует уравнение (6) со вторым порядком. Действительно, предположим, что сеточные функции g_j и φ_j обладают достаточной гладкостью. Разлагая g_{j+1} и φ_{j+1} в ряд Тейлора в узле j, получаем

$$(g + \varphi_x)_j + \frac{h}{2}[(g + \varphi_x)_x]_j + O(h^2) = 0,$$

откуда следует, что на решении уравнения (6) выполнено $g_x = -\varphi_{xx}$, т. е. $(g + \varphi_x)_j = O(h^2)$. Аналогично строятся схемы третьего, четвертого порядков за счет специального выбора коэффициентов α, β и аппроксимации интеграла.

Рассмотрим схемы общего вида на трехточечном шаблоне, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$Ag_j + B\varphi_j = 0. \tag{8}$$

Здесь $Ag_j = \alpha g_{j-1} + \beta g_j + \gamma g_{j+1}$, $B\varphi_j = (a\varphi_{j-1} + b\varphi_j + c\varphi_{j+1})/h$ — соответственно операторы осреднения и дифференцирования. Предполагая гладкость функций $g_{j\pm1}$ и $\varphi_{j\pm1}$ разложим их в ряд Тейлора в точке j. Для однозначной разрешимости получим систему из пяти уравнений для определения шести коэффициентов. Выразим неизвестные пока коэффициенты, например, через коэффициент b. Тогда

$$\alpha = \frac{1}{6} + \frac{b}{4}, \quad \beta = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{6} - \frac{b}{4}, \quad a = -\frac{1+b}{2}, \quad c = \frac{1-b}{2}.$$

Задание параметра b позволяет управлять устойчивостью и свойствами схемы. Так, при $b = 1$ искомые коэффициенты равны

$$\alpha = \frac{5}{12}, \quad \beta = \frac{8}{12}, \quad \gamma = -\frac{1}{12}, \quad a = -1, \quad c = 0$$

и соответвующая им схема (8) принимает вид

$$\frac{5g_{j-1} + 8g_j - g_{j+1}}{12} + \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{h} = 0.$$

При $b = -1$ коэффициенты равны: $\alpha = -\frac{1}{12}$, $\beta = \frac{8}{12}$, $\gamma = \frac{5}{12}$, $a = 0$, $c = 1$ и схема принимает вид

$$\frac{5g_{j+1} + 8g_j - g_{j-1}}{12} + \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} = 0.$$

Легко убедиться, что при $b = 0$ схема (8) принимает вид

$$\frac{g_{j+1} + 4g_j + g_{j-1}}{6} + \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} = 0$$

и аппроксимирует уравнение (6) с четвертым порядком.

Обобщение разностной схемы типа (8) для уравнений в частных производных гиперболического вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

где $\varphi = \varphi(u)$, может быть проведено заменой g в (6) на $\partial u/\partial t$ и его разностной аппроксимацией. Рассмотрим аналогично (8) аппроксимацию уравнения (9) по схеме с весами

$$A\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Delta\left(\alpha\varphi^{n+1} + \beta\varphi^n\right) = 0.$$

Линеаризуя вектор φ^{n+1} относительно искомой функции u^{n+1} по формуле

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \tau(\frac{\partial\varphi}{\partial u})^n(\frac{\partial u}{\partial t})^n + O(\tau^2) = \varphi^n + \tau B^n\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + O(\tau^2),$$

перепишем схему в каноническом виде

$$(A + \tau\alpha\Delta B^n)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -\Delta\varphi^n. \tag{10}$$

Она линейна относительно вектора u^{n+1} и реализуется трехточечной скалярной прогонкой. Здесь

$$A = \begin{cases} \frac{5}{12}T_- & +\frac{8}{12}I & -\frac{1}{12}T_+, \\ \frac{5}{12}T_+ & +\frac{8}{12}I & -\frac{1}{12}T_-, \\ \frac{1}{6}T_- & +\frac{4}{6}I & +\frac{1}{6}T_+, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{cases} \Delta_- = \frac{1}{h}(I - T_-), \\ \Delta_+ = \frac{1}{h}(T_+ - I), \\ \Delta_0 = \frac{1}{2h}(T_+ - T_-), \end{cases}$$

$T_\pm$ — оператор сдвига, задаваемый формулой $T_\pm f_j = f_{j\pm1}$, I — единичный оператор. Верхняя строка в операторах A и Δ выбирается при $B \geq 0$, средняя при $B \leq 0$ аналогично схемам с направленной разностью для уравнений переноса, а нижняя строка соответствует симметричной аппроксимации (см. [27]).

При $\alpha = 1/2$ схема (10) имеет повышенный порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^m)$, где $m = 3$ или $m = 4$. Схемы типа (10) безусловно устойчивы при $\alpha \geq 0.5$. Покажем это для $\alpha = 0.5$ при $B = \text{const}$. Пусть $u_j^n = u_0 \lambda^n e^{ikjh}$. При симметричной аппроксимации производной по x характеристическое уравнение, соответствующее схеме (10), принимает вид

$$\det \| \left(r + \frac{1}{2} ib \right) (\lambda - 1) + ib \| = 0,$$

где $r = (2 + \cos\omega)/3$, $b = K \sin\omega$, $\omega = kh$, $K = \tau B/h$. Его корни равны

$$\lambda = \left(r - \frac{1}{2} ib \right) / \left(r + \frac{1}{2} ib \right)$$

и, очевидно, $|\lambda| = 1$.

При несимметричной аппроксимации характеристическое уравнение при $\alpha = 0.5$ принимает вид

$$\det \| \left(c + id + \frac{1}{2}(a + ib) \right) (\lambda - 1) + a + ib \| = 0,$$

где $a = K(1 - \cos\omega)$, $b = K \sin\omega$, $c = (2 + \cos\omega)/3$, $d = -1/2(\sin\omega)$, и очевидно

$$\lambda = \frac{\left(c - \frac{a}{2}\right) + i \left(b - \frac{d}{2}\right)}{\left(c + \frac{a}{2}\right) + i \left(b + \frac{d}{2}\right)}.$$

Условие устойчивости схемы $|\lambda| \leq 1$ приводит к неравенству

$$c^2 + \frac{a^2}{4} - ac + b^2 + \frac{d^2}{4} - bd \leq c^2 + \frac{a^2}{4} + ac + b^2 + \frac{d^2}{4} + bd,$$

которое выполняется всегда, так как $ac + bd \geq 0$, т. е. схема (11) при $\alpha = 0.5$ безусловно устойчива. Эта оценка справедлива и при всех $\alpha \geq 0$.

По аналогии со схемой (10) можно строить схемы повышенного порядка и по времени и по пространству, аппроксимируя производные по t и x симметричными операторами. Рассмотрим разностную схему (см. [28])

$$A \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + A_0 \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_{j-1}^n}{2h} = 0, \qquad (11)$$

где

$$Af_j = \frac{f_{j+1} + 4f_j + f_{j-1}}{6}, \quad A_0 f^n = \frac{f^{n+1} + 4f^n + f^{n-1}}{6}.$$

Схема (11) трехслойная, аппроксимирует уравнение (9) с порядком $O(\tau^4 + h^4)$, но она условно устойчива. Действительно, характеристическое уравнение схемы принимает вид

$$\det \|r(\lambda^2 - 1) + ib(\lambda^2 + 4\lambda + 1)\| = 0,$$

где $r = 2 + \cos\omega$, $b = K \sin\omega$. Его корни равны

$$\lambda = \frac{-2ib \pm \sqrt{r^2 - 3b^2}}{r + ib}.$$

При $r^2 - 3ib^2 \geq 0$ получаем, что $|\lambda| \leq 1$, т. е. схема устойчива при $K^2 \leq (2 + \cos\omega)^2/[3(1 - \cos^2\omega)]$. Отсюда следует, что $|K| = \tau|B|/h \leq 1$. При $r^2 - 3b^2 \leq 0$ имеем $|\lambda| \geq 1$. Следовательно, схема (11) устойчива лишь при $K \leq 1$, т. е. условно устойчива. Если φ — нелинейная функция, то для реализации схемы необходимо строить итерационную схему. Заметим, что введение линеаризации нелинейных членов схемы (11) приводит к понижению порядка аппроксимации по времени до второго. Так как схема (11) трехслойная, то для ее реализации необходимо в начальный момент задавать значения функций на двух временных слоях при $t = 0$ и $t = \tau$.

2.3. Компактные схемы. Многомерный случай

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} = 0, \tag{12}$$

где $\varphi_j = \varphi_j(u)$. Для простоты изложения построение компактных схем проведем для случая $N = 2$. По аналогии с одномерным случаем разностная схема с весами может быть представлена в виде

$$A_1 A_2 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A_2 \Delta_1 \left[\alpha \varphi_1^{n+1} + \beta \varphi_1^n\right] + A_1 \Delta_2 \left[\alpha \varphi_2^{n+1} + \beta \varphi_2^n\right] = 0, \tag{13}$$

где A_j, Δ_j — операторы осреднения и дифференцирования по направле-

ниям x_1 и x_2 соответственно задаются по формулам

$$A_j = \frac{1}{12}\begin{cases} 5T_{-j} & +8I & -T_{+j}, \\ 5T_{+j} & +8I & -T_{-j}, \\ 2T_{-j} & +8I & +2T_{+j}, \end{cases} \qquad \Delta_j = \begin{cases} \Delta_{-j} = \frac{1}{h_j}(I - T_{-j}), \\ \Delta_{+j} = \frac{1}{h_j}(T_{+j} - I), \\ \Delta_j = \frac{1}{2h_j}(T_{+j} - T_{-j}). \end{cases} \tag{14}$$

Вид операторов A_j и Δ_j выбирается в зависимости от знака коэффициентов $B_j = \partial\varphi_j/\partial u$ аналогично схеме (10). Разностная схема (13) аппроксимирует систему уравнений (12) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, где $h = \max(h_1, h_2)$, $m = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $m = 1$ при $\alpha \neq 0.5$, $k = 3$, если A_j и Δ_j определены первыми двумя строками в (14) и $k = 4$ — для последней строки.

Покажем это на примере для $k = 4$. Разлагая в ряд Тейлора функции φ по формуле

$$\varphi_j^{n+1/2\pm1/2} = \varphi_j^{n+1/2} \pm \frac{\tau}{2}(\varphi_t)_j^{n+1/2} + O(\tau^2),$$

получаем при $\alpha = 0.5$ на слое n+1/2 следующие выражения:

$$\alpha\varphi_j^{n+1} + \beta\varphi_j^n = \varphi_j^{n+1/2} + O(\tau^2),$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (u)_t^{n+1/2} + O(\tau^2) = g,$$

$$A_l = \frac{1}{6}(T_{-l} + 4I + T_{+l}) = I + \frac{h_l^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + O(h_l^4),$$

$$\Delta_l\varphi_l = \frac{(T_{+l} - T_{-l})}{2h}\varphi_l = (\varphi_{x_l}) + \frac{h_l^2}{6}\varphi_{x_l x_l x_l} + O(h_l^4),$$

$$A_1A_2g = \left(I + \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots\right)\left(I + \frac{h_2^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots\right)g =$$

$$= (u)_t + \frac{h_1^2}{6}(u_{x_1x_1t}) + \frac{h_2^2}{6}(u_{x_2x_2t}) + O(h^4 + \tau^2),$$

$$A_2\Delta_1\varphi_1 = \left(I + \frac{h_2^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots\right)\left(I + \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \ldots\right)\varphi_1 =$$

$$= (\varphi_1)_{x_1} + \frac{h_1^2}{6}(\varphi_1)_{x_1x_1x_1} + \frac{h_2^2}{6}(\varphi_1)_{x_1x_2x_2} + O(h^4),$$

$$A_1\Delta_2\varphi_2 = (\varphi_2)_{x_2} + \frac{h_2^2}{6}(\varphi_2)_{x_2x_2x_2} + \frac{h_2^2}{6}(\varphi_1)_{x_1x_1x_2} + O(h^4).$$

Подставляя полученные разложения в схему (13) на слое $n+1/2$, будем иметь

$$(u_t) + \frac{h_1^2}{6}u_{tx_1x_1} + \frac{h_2^2}{6}u_{tx_2x_2} + (\varphi_1)_{x_1} + \frac{h_1^2}{6}(\varphi_1)_{x_1x_1x_1} + \frac{h_2^2}{6}(\varphi_1)_{x_1x_2x_2} +$$

$$+(\varphi_2)_{x_2} + \frac{h_2^2}{6}(\varphi_2)_{x_2x_2x_2} + \frac{h_1^2}{6}(\varphi_2)_{x_1x_1x_2} = [(u_t) + (\varphi_1)_{x_1} + (\varphi_2)_{x_2}] +$$

$$+\frac{h_1^2}{6}[u_t + (\varphi_1)_{x_1} + (\varphi_2)_{x_2}]_{x_1x_1} + \frac{h_2^2}{6}[u_t + (\varphi_1)_{x_1} + (\varphi_2)_{x_2}]_{x_2x_2} + O(\tau^2 + h^4).$$

Таким образом, на решении для гладких функций u, φ_1 и φ_2 разностная схема (13) аппроксимирует уравнение(12) с порядком $O(\tau^2 + h^4)$.

Схема (13) нелинейна и для ее реализации проведем линеаризацию нелинейных членов по формулам

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_0^n + B_j^n\Delta u_j^n + O(\tau^2), \qquad B_j = \partial\varphi_j/\partial u, \quad \Delta u^n = u^{n+1} - u^n.$$

Тогда разностная схема

$$\tilde{C}\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -W^n, \tag{15}$$

где

$$\tilde{C} = A_1A_2 + \tau\alpha(A_2\Delta_1B_1^n + A_1\Delta_2B_2^n), \quad W^n = A_2\Delta_1\varphi_1^n + A_1\Delta_2\varphi_2^n,$$

аппроксимирует уравнения (12) с тем же порядком, что и базовая схема (13), но является линейной. Ее решение может быть получено матричными прогонками. Приближенно факторизуем стабилизирующий оператор $\tilde{C}$ оператором C по формуле

$$C = A_1A_2[I + \tau\alpha A_1^{-1}\Delta_1B_1^n][I + \tau\alpha A_2^{-2}\Delta_2B_2^n] = A_2(A_1 + \tau\alpha\Delta_1B_1^n)A_2^{-1}$$

$$(A_2 + \tau\alpha\Delta_2B_2^n) = (A_1 + \tau\alpha\Lambda_1B_1^n)(A_2 + \tau\alpha\Delta_2B_2) = \tilde{C} + O(\tau^2).$$

Тогда разностная схема

$$(A_1 + \tau\alpha\Delta_1B_1)(A_2 + \tau\alpha\Delta_2B_2)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -W^n \tag{16}$$

аппроксимирует уравнения (12) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, где $m = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $k = 3, 4$. Для линейных уравнений безусловно устойчива для

$\alpha \geq 0.5$. Для ее реализации может быть построена эквивалентная схема в дробных шагах:

$$\begin{gathered} \xi^n = -W^n, \\ (A_1 + \tau\alpha\Delta_1 B_1)\xi^{n+1/2} = \xi^n, \\ (A_2 + \tau\alpha\Delta_2 B_2)\xi^{n+1} = \xi^{n+1/2}, \\ u^{n+1} = u^n + \tau\xi^{n+1}. \end{gathered} \tag{17}$$

Решение разностных уравнений (17) на дробных шагах сводится к скалярным (если u — скалярная функция) или векторным (если u — вектор) прогонкам по каждому направлению.

Аналогично одномерному случаю (11) строится схема порядка $O(\tau^4 + h^4)$ и для многомерных задач. Так, для уравнений (12) разностная схема примет вид

$$A_1 A_2 \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} + A_0 A_1 \Delta_1 \varphi_1^n + A_0 A_1 \Delta_2 \varphi_2^n = 0,$$

где A_0, A_1, A_2 — операторы осреднения соответственно по времени как в схеме (11) и по пространственным переменным x_1 и x_2 (см. [14]). Как и в одномерном случае, она условно устойчива, но реализуется матричными прогонками. Линеаризация векторов и приближенная факторизация операторов приводит, подобно (17) к схеме, реализуемой векторными (или скалярными) прогонками. Однако, полученная данным образом разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau^m + h^k)$, как и схема (16), т. е. $m = 2$ при $\alpha = 0.5$, и $k = 3$ или 4.

Глава III. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АЭРО- И ГИДРОДИНАМИКИ

Модели, описываемые уравнениями газовой динамики, полными и упрощенными уравнениями Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа и несжимаемой жидкости, используются при численном моделировании широкого класса задач в аэро и гидродинамике, энергетике, охране окружающей среды, при проектировании технических устройств и технологических процессов. Нелинейность этих уравнений и многомерность задач приводят к необходимости разработки специальных численных методов, позволяющих получать их численное решение на современных ЭВМ. К настоящему времени разработано большое число численных алгоритмов решения указанных задач, включающих явные, неявные и специальные алгоритмы. Их описание выходит за предмет данного курса и составляет содержание специальных курсов. Ниже мы остановимся на описании лишь основных неявных разностных схем для численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса, основанных на методе приближенной факторизации и методе расщепления. Эти алгоритмы широко используются для численного решения многомерных задач. При описании алгоритмов мы ограничимся рассмотрением уравнений в декартовых координатах.

Рассмотрим систему Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = \mathbf{F}, \qquad (1')$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \vdots \\ \rho v_N \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p - G_{1j} \\ \vdots \\ \rho v_N v_j + \delta_j^N p - G_{Nj} \\ v_j(E+p) - \kappa \dfrac{\partial T}{\partial x_j} - G \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ F_{N+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь N — размерность задачи по пространству; $E = \rho(e + \frac{v^2}{2})$ — полная энергия; e — внутренняя энергия, ρ — плотность, v_j — компоненты вектора скорости; T — температура; $v^2 = \sum\limits_{j=1}^{N} v_j^2$; $G = \sum\limits_{l=1}^{N} v_l G_{lj}$,

$G_{ij} = \delta_{ij}\lambda \mathrm{div} v + \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ — девиатор тензора вязких напряжений; $\lambda = \mu' - 2/3\mu$, а μ и μ' — коэффициенты первой и второй вязкости соответственно, κ — коэффициент теплопроводности; F — вектор внешних сил. Для замыкания системы уравнений (1) необходимо задать уравнения состояния, например, в виде

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T) \tag{2'}$$

и зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности, которые будем полагать функциями от плотности и температуры, в виде

$$\mu = \mu(\rho, T), \quad \mu' = \mu'(\rho, T), \quad \kappa = \kappa(\rho, T). \tag{3'}$$

Система уравнений (1')–(3') является замкнутой (см. [12; 14]) и для ее решения необходимо задать начальные

$$\mathbf{U}(0, x_1, ..., x_N) = \mathbf{U}_0(x_1, ..., x_N)$$

и краевые условия.

Если пренебречь влиянием вязкости и теплопроводности и положить их равными нулю, то система уравнений (1)–(2) есть система уравнений Эйлера (газовой динамики). Заметим, что уравнения газовой динамики являются гиперболической, а уравнения Навье–Стокса (1) не вполне параболической системой уравнений (см. [12]).

§ 1. Схемы приближенной факторизации

Метод приближенной факторизации является на сегодня основным методом решения многомерных задач. Для численного решения уравнений газовой динамики и уравнений Навье–Стокса его впервые использовали Бим и Уорминг [33] и Мак—Дональд и Брилли [34].

1.1. Схема Бима–Уорминга для решения уравнений газовой динамики

Рассмотрение схемы проведем для уравнений газовой динамики в трехмерном случае при отсутствии внешних сил (см. [5]):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0, \quad p = p(\rho, e), \tag{1}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p \\ \rho v_3 v_j + \delta_j^3 p \\ v_j(E+p) \end{pmatrix}, \quad E = \rho(e + \frac{v^2}{2}),$$

Аппроксимируем систему уравнений (1) разностной схемой с весами

$$\begin{gathered} \frac{\mathbf{U}^{n+1}-\mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^n \Lambda_j(\alpha \mathbf{W}_j^{n+1} + \beta \mathbf{W}_j^n) = 0, \\ p^{n+1} = p(\rho^{n+1}, e^{n+1}). \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть $\Lambda_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + O(h_j^k)$ — разностные операторы, аппроксимирующие первые производные с порядком $O(h_j^k)$. Тогда схема (2) аппроксимирует систему уравнений (1) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, где $m = 2$ при $\alpha = 0.5$, $h = \max(h_j)$ и при $\alpha \neq 0$ нелинейна. Линеаризуем векторы $\mathbf{W}_j^{n+1}$ относительно вектора $\mathbf{U}$ по формулам

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n + \tau \left(\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_j^n + B^n \Delta \mathbf{U}^n + O(\tau^2), \tag{3}$$

где $\Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$, $B_j = \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}}$ — матричные операторы (матрицы Якоби), вид которых определяется уравнением состояния. Так, для уравнения состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho e$ матрицы B_j равны

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^1 & \delta_j^2 & \delta_j^3 & 0 \\ -v_1 v_j + \delta_j^1 t & v_1 + \delta_j^1 l_1 v_1 & \delta_j^2 v_1 - \delta_j^1 l v_2 & \delta_j^3 v_1 - \delta_j^1 l v_3 & \delta_j^1 l \\ -v_2 v_j + \delta_j^2 t & \delta_j^1 v_2 - \delta_j^2 l v_1 & v_j + \delta_j^2 l_1 v_2 & \delta_j^3 v_2 - \delta_j^2 l v_3 & \delta_j^2 l \\ -v_3 v_j + \delta_j^3 t & \delta_j^1 v_3 - \delta_j^3 l v_1 & \delta_j^2 l v_3 - \delta_j^3 l v_2 & v_j + \delta_j^3 l_1 v_3 & \delta_j^3 l \\ -v_j \tilde{E}' & \delta_j^1 \tilde{E} - l v_1 v_j & \delta_j^2 \tilde{E} - l v_2 v_j & \delta_j^3 \tilde{E} - l v_3 v_j & \gamma v_j \end{pmatrix}.$$

Здесь $v^2 = \sum\limits_{j=1}^{3} v_j^2$, $l = \gamma - 1$, $l_1 = 2 - \gamma$, $t = l v^2/2$, $\tilde{E}' = \tilde{E} - l v^2/2$, $\tilde{E} = \gamma E/\rho - l v^2/2$, δ_j^i — символ Кронекера. После линеаризации нелинейных членов W_j по формулам (3) разностная схема (2) принимает вид

$$\left(I + \tau\alpha \sum_{j=1}^{3} \Lambda_j B_j^n\right) \Delta \mathbf{U}^{n+1} = -\tau \mathbf{W}^n, \quad \mathbf{W}^n = \sum_{j=1}^{3} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n. \tag{4}$$

Она линейна и реализуется матричной прогонкой. Заменяя оператор $I + \tau\alpha \sum\limits_{j=1}^{3} \Lambda_j B_j^n$ в схеме (4) факторизованным оператором

$$C = \prod_{j=1}^{3} \left(I + \tau\alpha\Lambda_j B_j^n\right) = I + \tau\alpha \sum_{j=1}^{3} \Lambda_j B_j + O(\tau^2),$$

получаем разностную схему

$$C\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\mathbf{W}^n, \tag{5}$$

аппроксимирующую уравнение газовой динамики (1) с тем же порядком, что и базовая схема с весами (2). Для ее реализации построим эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\xi}^n = -\mathbf{W}^n, \\
(I + \tau\alpha\Lambda_1 B_1^n)\boldsymbol{\xi}^{n+1/3} = \boldsymbol{\xi}^n, \\
(I + \tau\alpha\Lambda_2 B_2^n)\boldsymbol{\xi}^{n+2/3} = \boldsymbol{\xi}^{n+1/3}, \\
(I + \tau\alpha\Lambda_3 B_3^n)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+2/3}, \\
\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \tau\boldsymbol{\xi}^{n+1}.
\end{gathered} \tag{6}$$

На каждом дробном шаге разностная схема (6) реализуется векторными прогонками, требующими обращения матриц размером 5×5. Как и все схемы приближенной факторизации (см. § 6, гл. I), разностная схема (5) безусловно устойчива при $N \leq 2$ для $\alpha \geq 0.5$ и условно устойчива при $N = 3$ для всех α.

1.2. Схема Стегера—Уорминга

Применение векторных прогонок при реализации схемы (6) на дробных шагах требует большого числа операций. Для устранения этого недостатка и получения схем, реализуемых скалярными прогонками, в работе [26] рассмотрена модификация схемы (5). В силу гиперболичности уравнений газовой динамики матрицы Якоби $B_j = \partial\mathbf{W}_j/\partial\mathbf{U}$ невырожденным преобразованием могут быть приведены к диагональному виду

$$B_j = S_j^{-1} D_j S_j, \tag{7}$$

где

$$D_j = \begin{pmatrix} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_j - c \end{pmatrix}$$

— диагональные матрицы, c — скорость звука. С учетом соотношения (7) стабилизирующий оператор C схемы (5) представим в виде приближенного равенства

$$C = \prod_{j=1}^{N} (I + \tau\alpha\Lambda_j B_j) = \prod_{j=1}^{N} \left(S_j^{-1} S_j + \tau\alpha\Lambda_j S_j^{-1} D_j S_j\right) \approx$$

$$\approx \prod_{j=1}^{N} S_j^{-1} (I + \tau\alpha\Lambda_j D_j) S_j = S^{-1} \left[\prod_{j=1}^{N} (I + \tau\alpha\Lambda_j D_j)\right] S, \qquad (8)$$

где $S = S_1 \cdots S_N$, $S^{-1} = S_N^{-1} \cdots S_1^{-1}$. С учетом приближенного равенства (8) разностная схема (5) перепишется в виде

$$\prod_{j=1}^{N} \left(I + \tau\alpha\Lambda_j D_j^n\right) S\Delta\mathbf{U}^n = -\tau S\mathbf{W}^n, \qquad (9)$$

В отличие от схемы (5) разностная схема (9) аппроксимирует исходные уравнения с порядком $O(\tau + h^k)$, так как замена оператора C на приближенный оператор $\tilde{C}$ проведена с порядком $O(\tau)$. По аналогии с (6) разностной схеме (9) соответствует схема в дробных шагах

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\xi}^n = -\tau S\tilde{\mathbf{W}}^n, \\ (I + \tau\alpha\Lambda_1 D_1^n)\boldsymbol{\xi}^{n+1/N} = \boldsymbol{\xi}^n, \\ (I + \tau\alpha\Lambda_2 D_2^n)\boldsymbol{\xi}^{n+2/3} = \boldsymbol{\xi}^{n+1/N}, \\ \cdots \\ (I + \tau\alpha\Lambda_N D_N^n)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+\frac{N-1}{N}}, \\ \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \tau(S^{-1})\boldsymbol{\xi}^{n+1}. \end{gathered} \qquad (10)$$

Так как матрицы D_j имеют ненулевые элементы лишь на главной диагонали, то разностные уравнения (10) на каждом дробном шаге реализуются независимо для каждой компоненты вектора $\xi^{n+j/N}$ для каждого пространственного направления, например, скалярными прогонками или по неявной схеме бегущего счета. Для восстановления функции

U на каждом новом шаге из последнего уравнения (10) требуется найти матрицу S равную произведению матриц S_i и обратную к ней.

Для повышения устойчивости схемы (10) и повышения порядка аппроксимации разностные операторы Λ_j обычно выбираются несимметричными в зависимости от знака собственных чисел матриц D_j. В качестве недостатка схемы (10) или (10) отметим, что она имеет лишь первый порядок аппроксимации по времени, что может оказаться недостаточным при решении нестационарных задач.

1.3. Схема решения уравнений Навье—Стокса

Для простоты изложения рассмотрение схемы проведем для двумерных нестационарных уравнений Навье—Стокса при отсутствии внешних сил

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p - G_{1j} \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p - G_{2j} \\ v_j H - \kappa \dfrac{\partial T}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{2} v_i G_{ij} \end{pmatrix},$$

$H = E+p$, $E = \rho(e+\frac{v^2}{2})$, $v^2 = v_1^2+v_2^2$, $G_{ij} = \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})+\delta_{ij}\lambda(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2})$, $\lambda = \mu' - 2/3\mu$.

Для замыкания уравнений зададим уравнение состояния в виде

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad e = c_v T \tag{12}$$

и зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности как функции от температуры

$$\mu = \mu(T), \quad \mu' = \mu'(T), \quad \kappa = \kappa(T).$$

Рассмотрим схему с весами

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^{2} (\alpha \mathbf{W}_j^{n+1} + \beta \mathbf{W}_j^n) = 0, \tag{13}$$

аппроксимирующую уравнения Навье—Стокса (11) с порядком $O(\tau^m + h^k)$. При $\alpha \neq 0$ схема (13) нелинейна. Для численного решения уравнений (11) может быть применена и разностная схема (5), (6). Но в отличие от уравнений Эйлера векторы $\mathbf{W}_j$ являются функциями не только компонент вектора $\mathbf{U}$, но и их производных $\partial\mathbf{U}/\partial x_l$ и их линеаризация

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j\left(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{U}_l^{n+1}\right) = \mathbf{W}_j^n + \tau\left(\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right)^n +$$

$$+\tau\sum_{l=1}^{2}\left(\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}_l}\right)^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x_l \partial t}\right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_j^n + B_j^n \Delta\mathbf{U}^n + \sum_{l=1}^{2} C_{jl}^n \Lambda_l \Delta\mathbf{U}^n + O(\tau^2).$$

приводит к громоздким выражениям для коэффициентов матриц $C_{jl} = \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{U}_l}$. Кроме того, краевые условия для уравнений Навье—Стокса обычно задаются также для компонент скорости и температуры. Поэтому целесообразно в качестве искомых функций выбирать вектор $\mathbf{f}$ с простейшими переменными, а не потоками. С учетом этих обстоятельств в работе [34] рассмотрена схема приближенной факторизации в примитивных переменных ρ, v_j, T или ρ, v_j, p.

Выберем в качестве искомых функций вектор $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$. Тогда $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f})$, $\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}, \mathbf{f}_l)$, где $\mathbf{f}_l = \partial\mathbf{f}/\partial x_l$. Основываясь на схеме с весами (13), линеаризуем векторы $\mathbf{U}^{n+1}$ и $\mathbf{W}_j^{n+1}$ относительно вектора $\mathbf{f}^n$:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \tau\left(\frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial \mathbf{f}}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{U}^n + A^n \Delta\mathbf{f}^n + O(\tau^2),$$

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_J^n + \tau\left(\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}}\right)^n \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right)^n + \tau\sum_{l=1}^{2}\left(\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}_l}\right)^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_l \partial t}\right)^n +$$

$$+O(\tau^2) = \mathbf{W}_j^n + B_j^n \Delta\mathbf{f}^n + \sum_{l=1}^{2} C_{jl}^n \Lambda_l \Delta\mathbf{f}^n + O(\tau^2), \qquad (14)$$

здесь $A = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}$, $B_j = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}}$, $C_{jl} = \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial \mathbf{f}_l}$ — матрицы размера $M \times M$, где M — число уравнений, $\Delta\mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n$. Подставляя разложение (14) в схему (13), получаем разностную схему

$$\tilde{C}\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{2} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \qquad (15)$$

$$\tilde{C} = A^n + \tau\alpha \textstyle\sum_{j=1}^{2} \Lambda_j \left(B_j^n + \sum_{l=1}^{2} C_{jl}^n \Lambda_j\right),$$

аппроксимирующую систему уравнений (11) с порядком $O(\tau + h^k)$ для всех α. Схема (15) линейна и ее решение может быть получено матричной прогонкой, требующей обращение матриц размерности $mJ_1 \times mJ_2$, где J_i – число узлов сетки в направлении x_l, m – число уравнений. Ясно, что для большого числа узлов сетки этот метод не реализуем из-за гигантских $\approx (mJ)^3$ затрат ресурсов ЭВМ. Для реализации схемы (15) векторными прогонками приближенно факторизуем оператор $\tilde{C}$. Очевидно,

$$\tilde{C} = A^n \left[I + \tau\alpha (A^{-1})^n \sum_{j=1}^{2} \Lambda_j \left(B_j^n + \sum_{l=1}^{2} C_{jl}^n \Lambda_l \right) \right] \approx$$

$$\approx A^n \prod_{j=1}^{2} \left\{ I + \tau\alpha (A^{-1})^n \Lambda_j \left(B_j^n + \sum_{l=1}^{2} C_{jl}^n \Lambda_l \right) \right\} = \tilde{C}',$$

и реализация факторизованной схемы

$$\tilde{C} \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^{2} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n$$

вновь сводится к матричной прогонке, так как на каждом дробном шаге решаются многомерные разностные уравнения

$$\tilde{R}_j \boldsymbol{\xi}^{n+j/N} = \boldsymbol{\xi}^{n+(j-1)/N},$$

где $\tilde{R}_j = I + \tau\alpha (A^{-1})^n \Lambda_j \left(B_j^n + \sum\limits_{l=1}^{2} C_{jl}^n \Lambda_l \right)$. Вновь заменим операторы $\tilde{R}_j$ на приближенные операторы

$$\tilde{R}_j \approx R_j = I + \tau\alpha (A^{-1})^n \Lambda_j \left(B_j^n + C_{jj}^n \Lambda_j \right),$$

содержащие лишь аппроксимацию членов с повторными производными и отличающиеся от $\tilde{R}_j$ на члены порядка $O(\tau)$. Тогда разностная схема

$$C' \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{j=1}^{2} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \tag{16}$$

где

$$C' = \left[A^n + \tau\alpha \Lambda_1 \left(B_1^n + C_{11}^n \Lambda_1 \right) \right] (A^{-1})^n \left[A^n + \tau\alpha \Lambda_2 \left(B_2^n + C_{22}^n \Lambda_2 \right) \right],$$

аппроксимирует уравнения (11) с порядком $O(\tau+h^k)$. Ее решение может быть получено по эквивалентной схеме в дробных шагах

$$
\begin{gathered}
A^n\boldsymbol{\xi}^n = -\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\mathbf{W}_j^n, \\
\left[A^n+\tau\alpha\Lambda_1\left(B_1^n+C_{11}^n\Lambda_1\right)\right]\boldsymbol{\xi}^{n+1/2} = A^n\boldsymbol{\xi}^n, \\
\left[A^n+\tau\alpha\Lambda_2\left(B_2^n+C_{22}^n\Lambda_2\right)\right]\boldsymbol{\xi}^{n+1} = A^n\boldsymbol{\xi}^1/2, \\
\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n+\tau\boldsymbol{\xi}^{n+1}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

На каждом дробном шаге система одномерных разностных уравнений решается векторными прогонками. В линейном приближении разностная схема (16) безусловно устойчива при $\alpha \geq 0.5$ (она условно устойчива в трехмерном случае). Выбор в качестве искомых функций компонент вектора $\mathbf{f}$ позволяет упростить структуру матриц C_{jj}, что приводит как следствие к уменьшению числа операций на реализацию схемы. Схемы вида (16), (17) широко используется в настоящее время для решения многомерных задач.

Приведем вид матричных операторов A, B_j, C_{jj} для уравнения состояния идеального газа, когда в качестве искомых функций выбран вектор с компонентами плотность, скорость и температура.

$$
\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ T \end{pmatrix}, \quad
B_1 = \begin{pmatrix} v_1 & \rho & 0 & 0 \\ v_1^2+a^2 & 2\rho v_1 & 0 & b^2 \\ v_1v_2 & \rho v_2 & \rho v_1 & 0 \\ c^2v_1 & H-G_{11} & -G_{12} & \gamma c_v\rho v_1 \end{pmatrix},
$$

$$
B_2 = \begin{pmatrix} v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_1v_2 & \rho v_2 & 0 & b^2 \\ v_2^2+a^2 & 0 & 2\rho v_2 & b^2 \\ c^2v_2 & -G_{21} & H-G_{22} & \gamma c_v\rho v_2 \end{pmatrix},
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & \rho & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & \rho & 0 \\ \dfrac{v^2}{2} & \rho v_1 & \rho v_2 & \dfrac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix},
$$

$$
C_{11} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 2\mu v_1 & \mu v_2 & \kappa \end{pmatrix}, \quad
C_{22} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 \\ 0 & \mu v_1 & 2\mu v_2 & \kappa \end{pmatrix},
$$

где

$$a^2 = (\gamma - 1)c_v T, \quad b^2 = (\gamma - 1)c_v \rho, \quad c^2 = \gamma c_v T + v_1^2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

$$G_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \quad \lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu.$$

Коэффициенты вязкости и теплопроводности предполагались постоянными.

§ 2. Метод расщепления

2.1. Расщепление уравнений в дифференциальной форме

Проведем анализ уравнений Навье–Стокса (1′), исходя из характера гидродинамических сил, определяемых градиентами векторов гидродинамических потоков $\mathbf{W}_j$. Гидродинамические силы могут подразделены на три вида (см. [12]):

— инерционные или конвективные силы;

— силы, обусловленные градиентом давления;

— силы, обусловленные диссипативными эффектами вязкости и теплопроводности.

В соответствии с этим разделением представим векторы потоков $\mathbf{W}_j \quad (j = 1, 2, 3)$ в виде суммы векторов

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{W}_j^1 + \mathbf{W}_j^2 + \mathbf{W}_j^3, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{W}_j^1 = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j \\ \rho v_2 v_j \\ \rho v_3 v_j \\ v_j E \end{pmatrix} = v_j \mathbf{U}, \quad \mathbf{W}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j^1 p \\ \delta_j^2 p \\ \delta_j^3 p \\ v_j p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ G_j^1 \\ G_j^2 \\ G_j^3 \\ \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum\limits_{l=1}^{N} v_l G_{jl} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим виды течений в зависимости от преобладания тех или иных гидродинамических сил. В случае преобладания инерционных сил уравнения (1) принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{2}$$

и описывают свободномолекулярное течение, где вектор F, например, учитывает эффекты взаимодействия частиц.

Пренебрегая инерционными и диссипативными силами, получаем систему

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_j + \delta_j^\alpha \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (j = 1, ..., N), \tag{3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j p = 0,$$

являющуюся аналогом уравнений акустики.

Уравнения (2), (3) есть системы уравнений гиперболического типа и описывают движение частиц вдоль траектории, совпадающей с характеристикой. Система (3) с учетом уравнения состояния $p = p(\rho, e)$ приводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\rho}{p}\frac{\partial e}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial t}\right] = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right),$$

которое является многомерным аналогом уравнения акустики. Это уравнение гиперболического типа, так как $\rho > 0, \quad p > 0, \quad \partial e/\partial p > 0$.

Наконец, пренебрегая инерционными силами и давлением, приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{W}_j^3}{\partial x_j} = \mathbf{F} \tag{4}$$

не вполне параболического типа (первое из системы уравнений не содержит диссипативных членов).

Рассмотренные системы (2), (3), (4) представляют простейшие по физике модели, каждая из которых описывает простой физический процесс. Их сочетание позволяет получать комбинированные процессы, описывающие сложные физические явления. Например, учет инерционных сил и сил давления приводит к модели газовой динамики. Представление уравнений Навье–Стокса в форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{W}_j^l}{\partial x_j} = \mathbf{F} \tag{5}$$

будем трактовать как форму расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям. Ее удобнее представить в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{R} L_i \mathbf{U} = \mathbf{F},$$

где $\sum\limits_{l=1}^{R} L_i \mathbf{U} = \sum\limits_{l=1}^{3} \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{W}_j^l}{\partial x_j}, \quad R = 3N$. Тогда расщепленная на дифференциальном уровне слабо аппроксимирующая система (см. гл. I, § 4) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{R} \alpha_j L_j \mathbf{U} = \mathbf{F}, \tag{6}$$

где для интервала $t_n + (j-l)\tau/R \le t \le t_n + l\tau/R$ коэффициенты α равны: $\alpha_j = R$ для $j = l$ и $\alpha_j = 0$ для $j \ne l$. При более общем рассмотрении операторы L_i могут включать и вектор правых частей F, например, когда F описывает химические реакции, излучение и т. д.

При записи уравнений Навье–Стокса в недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \Omega_j \mathbf{f} = \mathbf{F}, \tag{7}$$

расщепление по физическим процессам и пространственным направлениям строятся аналогично: выделяются матрицы конвективных потоков, матрицы, обусловленные действием сил давления и матрицы диссипативных сил с последующим расщеплением по направлениям x_j, т. е. Ω_j представляется как сумма матриц

$$\Omega_j = \Omega_j^1 + \Omega_j^2 + \Omega_j^3, \tag{8}$$

и аналогично уравнению (6) система уравнений (7) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{R} L_j \mathbf{f} = \mathbf{F}, \tag{9}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{R} L_j = \sum\limits_{l=1}^{3} \sum\limits_{j=1}^{N} \Omega_j^l$. Известно, что структура матричных операторов Ω_j^l зависит от выбора искомых функций $\mathbf{f}$, что позволяет рассматривать различные формы расщепления и выбирать те из них, разностные схемы для которых наиболее просто реализуются. Проиллюстрируем сказанное

выше на примере уравнений газовой динамики ($\kappa \equiv G_{ij} \equiv 0$), разрешенных относительно вектора $\mathbf{f}$ с компонентами ρ, v_j, p:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \Omega_j \mathbf{f} = 0, \tag{10}$$

где

$$\Omega_j = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & \dfrac{\delta_{1j}}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} & 0 & \dfrac{\delta_{2j}}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \dfrac{\delta_{3j}}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & \delta_j^1 \rho c^2 \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \delta_j^2 \rho c^2 \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \delta_j^3 \rho c^2 \dfrac{\partial}{\partial x_j} & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}, \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, v_3, p)^T.$$

Здесь уравнение неразрывности записано в дивергентной форме, а оставшиеся уравнения — в недивергентной. В соответствии с расщеплением (9) при $\Omega_j^3 \equiv 0$ матрицы конвективного переноса и сил давления имеют вид

$$\Omega_j^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\Omega_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_j^1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_j^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_j^3}{\rho} \\ 0 & \delta_j^1 \rho c^2 & \delta_j^2 \rho c^2 & \delta_j^3 \rho c^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где $c^2 = \gamma p/\rho$ — квадрат скорости звука. Для уравнений Навье–Стокса, записанных в недивергентной форме, расщепление уравнений проводится аналогично. Кроме матриц конвективного переноса и сил давления добавляются матрицы диссипативных сил. Введение расщепления уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям позволяет строить экономичные разностные схемы. Однако предложенное расщепление не следует рассматривать как жестко зафиксированное. Наоборот, при построении разностных схем для конкретных уравнений расщепление может проводиться, исходя из многих факторов, таких как устойчивость и консервативность схем, простота реализации, форма задания краевых условий, предварительная информация о решении и т. д.

2.2. Разностные схемы с расщеплением операторов

Построение разностной схемы проведем вначале для уравнений газовой динамики (10), записанных в недивергентной форме. Аппроксимируем дифференциальные операторы Ω_j разностными операторами Ω_{jh} с порядком $O(h^k)$. Разностная схема с весами

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^{3} \Omega_j^n (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) = 0 \qquad (12)$$

аппроксимирует исходные уравнения (10) с порядком $O(\tau + h^k)$ для всех α и линейна, так как разностные операторы Ω_{jh} аппроксимированы на n-м слое. Перепишем схему (12) в канонической форме

$$(I + \tau\alpha \sum_{j=1}^{3} \Omega_{jh}^n) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{3} \Omega_{jh}^n \mathbf{f}^n$$

и заменим стабилизирующий оператор $I + \tau\alpha \sum\limits_{j=1}^{3} \Omega_{jh}^n$ приближенным оператором C, полученным на основе расщепления каждого оператора Ω_{jh}

по физическим процессам и пространственным направлениям согласно расщепления (8):

$$C = \prod_{j=1}^{3}(I + \tau\alpha\Omega_{jh}^{1})(I + \tau\alpha\Omega_{jh}^{2}) = I + \tau\alpha\sum_{j=1}^{3}\Omega_{jh}^{n} + O(\tau^{2})$$

Тогда разностная схема

$$C\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n}}{\tau} = -\sum_{j=1}^{3}\Omega_{jh}^{n}\mathbf{f}^{n} \tag{13}$$

аппроксимирует уравнения (10) с тем же порядком, что и базовая схема с весами (12). Для реализации схемы (13) построим схему в дробных шагах

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\xi}^{n} = -\sum_{j=1}^{3}\Omega_{jh}^{n}\mathbf{f}^{n}, \\
(I + \tau\alpha\Omega_{1h}^{1})\boldsymbol{\xi}^{n+1/6} = \boldsymbol{\xi}^{n}, \\
(I + \tau\alpha\Omega_{1h}^{2})\boldsymbol{\xi}^{n+2/6} = \boldsymbol{\xi}^{n+1/6}, \\
\cdots \\
(I + \tau\alpha\Omega_{3h}^{2})\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+5/6}, \\
\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^{n} + \tau\boldsymbol{\xi}^{n+1},
\end{gathered} \tag{14}$$

эквивалентную ей после исключения дробных шагов.

Разностная схема (13)основана на аппроксимации уравнений газовой динамики в недивергентном виде, что может приводить к потере точности при решении задач с наличием разрывов и других особенностей течения. Поэтому для повышения точности удобнее использовать предельно дивергентную форму уравнений

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t} = -A^{-1}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{W}_{j}}{\partial x_{j}},$$

связанную с недивергентными уравнениями (10) соотношением

$$A^{-1}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{W}_{j}}{\partial x_{j}} = \sum_{j=1}^{3}\Omega_{j}\mathbf{f}.$$

Тогда разностная схема

$$C\frac{\mathbf{f}^{n+1}-\mathbf{f}^n}{\tau} = -(A^{-1})^n \sum_{j=1}^{3} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n \tag{15}$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{gathered} A^n \boldsymbol{\xi}^n = -\sum_{j=1}^{3} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \\ (I+\tau\alpha\Omega_{1h}^1)\boldsymbol{\xi}^{n+1/6} = \boldsymbol{\xi}^n, \\ \cdots \\ (I+\tau\alpha\Omega_{3h}^2)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+5/6}, \\ \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau\boldsymbol{\xi}^{n+1} \end{gathered} \tag{16}$$

аппроксимирует уравнения газовой динамики с порядком $O(\tau + h^k)$, а при установлении аппроксимирует стационарные уравнения

$$\sum_{j=1}^{3} \Lambda_j \mathbf{W}_j = 0$$

в дивергентной форме (A^{-1} — невырожденная матрица) с порядком $O(h^k)$, т. е. она консервативна. Здесь $\sum\limits_{j=1}^{3} \Lambda_j \mathbf{W}_j$ — разностная аппроксимация стационарных уравнений с порядком $O(h^k)$.

Остановимся на реализации схемы (16) или (14). По построению схема (16) линейная, так как коэффициенты матричных операторов Ω_{jh}. A_h, $\mathbf{W}_h$ аппроксимируются на n-м слое. Нулевой шаг схемы при известных значениях функций на n-м слое реализуется по явным формулам

$$\boldsymbol{\xi}^n = -(A^{-1})^n \sum_{j=1}^{3} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n.$$

Разностные уравнения

$$(I+\tau\alpha\Omega_{jh}^1)\boldsymbol{\xi}^{n+(2j-1)/6} = \boldsymbol{\xi}^{n+(j-1)/3}$$

на первом ($j=1$), третьем ($j=2$) и пятом ($j=3$) шагах решаются независимо для каждой компоненты вектора $\xi^{n+(2l-1)/6}$ скалярными

прогонками, так как операторы Ω^1_{jh} содержат ненулевые элементы лишь на главной диагонали. На четных дробных шагах система разностных уравнений

$$(I + \tau\alpha\Omega^2_{jh})\boldsymbol{\xi}^{n+j/3} = \boldsymbol{\xi}^{n+j/3-1/6} \tag{17}$$

решается скалярной прогонкой для компоненты ξ_p, а оставшиеся уравнения вычисляются по явным формулам. Действительно, уравнения (17) в скалярной форме имеют вид

$$\xi_\rho^{n+j/3} = \xi_\rho^{n+j/3-1/6},$$

$$\xi_l^{n+j/3} + \frac{\tau\alpha}{\rho^n}\delta_l^j\Lambda_j\xi_l^{n+j/3} = \xi_l^{n+j/3-1/6} \quad (l = 1, 2, 3),$$

$$\xi_p^{n+j/3} + \tau\alpha(\rho c^2)\delta_l^j\Lambda_j\xi_l^{n+j/3} = \xi_\rho^{n+j/3-1/6}.$$

Исключая $\xi_l^{n+j/3}$ из последнего уравнения этой системы, получаем относительно ξ_p разностное уравнение

$$\left[I - \tau^2\alpha^2(\rho c^2)^n\Lambda_j\frac{1}{\rho^n}\Lambda_j\right]\xi_p^{n+j/3} = \xi_\rho^{n+(2j-1)/6} - \tau\alpha(\rho c^2)\delta_l^j\Lambda_j\xi_l^{n+(2j-1)/6}.$$

Его решение может быть получено $2k+1$ — точечной скалярной прогонкой, после чего по известному значению $\xi_\rho^{n+j/3}$ по явным формулам

$$\xi_l^{n+j/3} = \xi_l^{n+j/3-1/6} - \frac{\tau\alpha}{\rho^n}\delta_l^j\Lambda_j\xi_l^{n+j/3-1/6}$$

находятся новые значения ξ_l. Наконец, из последнего уравнения системы (16) вычисляются новые значения функций на $(n+1)$-м слое.

Для уравнений Навье–Стокса разностные схемы строятся аналогично. Повторные производные аппроксимируются неявно в операторах Ω^1_{jh} или на отдельных дробных шагах, а смешанные — явно в правой части. При такой аппроксимации сохраняется скалярная разрешимость схемы, в том числе и при применении криволинейных координат или при введении преобразования координат (см. [12]). В линейном приближении разностные схемы, основанные на расщеплении оператора по физическим процессам и пространственным направлениям, имеют те же ограничения на устойчивость, что и рассмотренные выше схемы приближенной факторизации Бима–Уорминга и Макдональда–Брилли. Однако реализация схем расщепления скалярными прогонками требует меньшего числа операций, а следовательно, делает их более экономичными. Как показывают результаты численных расчетов (см. [11]), предложенные схемы расщепления являются эффективными, особенно при получении стационарного

решения методом установления. Для повышения точности расчетов возможно использование аппроксимаций операторов с повышенным порядком точности. И в частности, удобно применять аппроксимацию правой части схемы (13) или (15) с повышенным порядком $O(h^k)$, а стабилизирующий оператор — с первым или вторым. Тогда разностная схема

$$A_h C^l \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{3} \Lambda_j^k \mathbf{W}_j^n \tag{18}$$

аппроксимирует исходные уравнения (15) с порядком $O(\tau + h^l)$, где $l < k$, а при установлении — с порядком $O(h^k)$, но реализуется $2l+1$ точечными скалярными прогонками по схеме (16). Заметим, что устойчивость схемы (18) при $l < k$ понижается.

2.3. Схема с оптимальным расщеплением операторов

В п. 2.1 отмечалось, что введение расщепления по физическим процессам не является единственной возможностью построения разностных схем, реализуемых скалярными прогонками. Для повышения экономичности алгоритмов необходимо искать такие расщепления, при которых разностные схемы реализовывались бы скалярными прогонками, сохраняли бы свойства безусловной устойчивости, но требовали бы минимального числа арифметических операций при их реализации. Такие схемы назовем схемами с *оптимальным* расщеплением. Очевидно, для различных газодинамических переменных существует свой класс схем оптимального расщепления, зависящий от формы уравнения состояния. Ниже рассматривается такая схема для уравнений газовой динамики (10) в переменных плотность, скорость и давление и уравнения состояния идеального газа. В этих переменных существует единственное расщепление матричных операторов

$$\Omega_j = \Omega_j^1 + \Omega_j^2$$

в виде

$$\Omega_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_j^1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_j^2}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_j^3}{\rho} \\ 0 & \delta_j^1 \rho c^2 & \delta_j^2 \rho c^2 & \delta_j^3 \rho c^2 & v_j \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

(19)

$$\Omega_2^j = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющее определению схемы оптимального расщепления. Отметим, что в отличие от расщепления (11) все члены уравнения энергии в направлении x_j аппроксимируются в операторе Ω_j^1. Кроме того изменен порядок операторов, что позволит улучшить диссипационные свойства схем (см. п. 2.6). Подобно схемам (13), (14) или (15), (16) строится разностная схема

$$C\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\sum_{j=1}^{3} \Omega_j \mathbf{f}^n.$$

или схема

$$C\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(A^{-1})^n \sum_{j=1}^{3} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \tag{20}$$

аппроксимирующая уравнения газовой динамики в недевергентном или предельно дивергентном виде и эквивалентные им схемы в дробных шагах. Приведем, например, схему в дробных шагах, эквивалентную схеме в целых шагах (20):

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\xi}^n = -(A^{-1})^n \sum_{j=1}^{3} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n, \\ (I + \tau\alpha\Omega_{1h}^1)\boldsymbol{\xi}^{n+j/6} = \boldsymbol{\xi}^n, \\ \cdots \\ (I + \tau\alpha\Omega_{3h}^2)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+5/6}, \\ \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau\boldsymbol{\xi}^{n+1}. \end{gathered} \tag{21}$$

Выберем аппроксимацию операторов Ω_{jh}^1 и Ω_{jh}^2 с порядком $O(h^k)$ в зависимости от знака скорости:

$$\Lambda_j = \Lambda_{j-}^k, \quad \text{если} \quad v_j \geq 0, \quad \text{и} \quad \Lambda_j = \Lambda_{j+}^k, \quad \text{если} \quad v_j < 0.$$

Введем оператор $\bar{\Lambda}$, сопряженный к Λ_j и задаваемый формулами

$$\bar{\Lambda}_j = \Lambda^k_{j-}, \quad \text{если} \quad v_j < 0, \qquad \bar{\Lambda}_j = \Lambda^k_{j+}, \quad \text{если} \quad v_j \geq 0.$$

Тогда, например, при $k = 1$ операторы $\Lambda^k_{j\pm}$ примут вид

$$\Lambda^1_{j\pm} = \pm\frac{1}{h_j}(I - T_{j\mp}),$$

а при $k = 2$ вид

$$\Lambda^2_{j\pm} = \pm\frac{1}{2h_j}(3I - 4T_{j\mp 1} + T_{j\mp 2}).$$

Здесь I — единичная матрица, а $T_{j\pm l}$ — оператор сдвига, т. е. $T_{j\pm l}\mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_{ij\pm l}$.

При симметричной аппроксимации первых производных по формулам

$$\Lambda_j = \frac{1}{2}(\Lambda^k_{j-} + \Lambda^k_{j+})$$

получим $\Lambda_j \equiv \bar{\Lambda}_j$. С учетом введенных обозначений разностные операторы Ω^l_{jh} могут быть записаны в виде

$$\Omega^1_{jh} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^1_j\bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2_j\bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^3_j\bar{\Lambda}_j \\ 0 & a^1_j\Lambda_j & a^2_j\Lambda_j & a^3_j\Lambda_j & v_j\Lambda_j \end{pmatrix},$$

$$\Omega^j_2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j v^n_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^n_j\Lambda_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v^n_j\Lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^n_j\Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a^l_j = \delta^l_j(\rho c^2)^n$, $b^l_j = \delta^l_j/\rho^n$. Такая аппроксимация операторов позволяет повысить устойчивость схемы (21) и упростить ее реализацию.

Остановимся подробнее на реализации схемы (21). Как и для схемы (14) и (16), нулевой шаг схемы определяется по явным формулам

$$\boldsymbol{\xi}^n = -(A^{-1})^n \sum_{j=1}^{3} \Lambda_j \mathbf{W}^n_j$$

при заданных значениях функций на n-м слое. На всех нечетных дробных шагах ($j = 1, 3, 5$) решение системы разностных уравнений

$$\xi_\rho^{n+s} = \xi_\rho^{n+(j-1)/3},$$

$$\xi_l^{n+s} + \tau\alpha b_j^n \bar{\Lambda}_j \xi_p^{n+s} = \xi_l^{n+(j-1)/3} \quad (l = 1, 2, 3),$$

$$\xi_p^{n+s} + \tau\alpha(v_j^n \Lambda_j \xi_p^{n+s} + a_j^l \Lambda_j \xi_l^{n+s}) = \xi_\rho^{n+(j-1)/3},$$

где $s = (2j-1)/6$, после исключения ξ_l^{n+s} из последнего уравнения сводится к вычислению ξ_p из уравнения

$$\left(I + \tau\alpha v_j^n \Lambda - \tau^2\alpha^2 a_j^l \Lambda_j b_j^j \bar{\Lambda}_j\right) \xi_p^{n+s} = \xi_\rho^{n+(j-1)/3} - \tau\alpha a_j^j \Lambda_j \xi_l^{n+(j-1)/3}$$

скалярной прогонкой по каждому направлению x_j и явному вычислению остальных функций. Для $k = 1$ схема реализуется 3-точечной скалярной прогонкой. Для $= 2$ формально требуется 5-точечная прогонка. Однако замена оператора $\Lambda_j b \bar{\Lambda}_j$ при $k = 2$ на оператор

$$\Lambda_j b \bar{\Lambda}_j f_l = \frac{1}{h_j^2}\left[b_{l+1/2}(f_{l+1} - f_l) - b_{l-1/2}(f_l - f_{l-1})\right],$$

$$b_{l\pm1/2} = \frac{1}{2}(b_l + b_{l\pm1}), \quad f_l = f_{lj}$$

позволяет без понижения порядка аппроксимации реализовать схему трехточечными скалярными прогонками. На нечетных дробных шагах решение разностных уравнений

$$\left(I + \tau\alpha \Lambda_j v_j^n\right) \xi_\rho^{n+j/3} = \xi_\rho^{n+s}$$

$$\left(I + \tau\alpha \Lambda_j\right) \xi_l^{n+j/3} = \xi_l^{n+s} \quad (l = 1, 2, 3)$$

находят также скалярными прогонками для каждой компоненты ξ_ρ и ξ_l. Наконец, новые значения $\mathbf{f}^{n+1}$ находятся по явной формуле из последнего уравнения схемы (21). В отличие от рассмотренных ранее схем (13), (15) предложенная разностная схема (20) или (21) реализуется лишь $m \times N$ – скалярными прогонками (для $N = 3$, $m = 5$ их число равно 15) вместо $(m + 1) \times N$. Заметим, что схемы Бима—Уорминга и Мак—Дональда и Брилли (см. §1) требуют N векторных прогонок и обращения матриц $m \times m$.

2.4. Схема предиктор–корректор

Предложенные разностные схемы (13), (15), (20) аппроксимируют нестационарные уравнения газовой динамики (и уравнения Навье–Стокса) с первым порядком по времени, что может приводить к ограничениям на шаги τ при решении нестационарных задач с большими градиентами решения по t. Ниже рассматривается схема второго порядка аппроксимации по времени, основанная на методе предиктор–корректор.

Итак, пусть

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \Omega_j \mathbf{f} = 0 \tag{22}$$

системы исходных уравнений газовой динамики, записанных в дивергентной и недивергентной формах. Аппроксимируем, как и выше, операторы Ω_j, и $\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j}$ разностными операторами Ω_{jh} и $\Lambda_j \mathbf{W}_j$ с порядком $O(h_j^k)$. Тогда разностная схема

$$\begin{gathered}
\frac{\mathbf{f}^{n+1/2N} - \mathbf{f}^{n}}{\tau\alpha} + \Omega_{1h}^{1} \mathbf{f}^{n+1/2N} = 0, \\
\frac{\mathbf{f}^{n+1/N} - \mathbf{f}^{n+1/2N}}{\tau\alpha} + \Omega_{1h}^{2} \mathbf{f}^{n+1/N} = 0, \\
\cdots \\
\frac{\mathbf{f}^{n+(N-1)/2N} - \mathbf{f}^{n-(N-2)/2N}}{\tau\alpha} + \Omega_{Nh}^{1} \mathbf{f}^{n+(N-1)/2N} = 0 \\
\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+(N-1)/2N}}{\tau\alpha} + \Omega_{Nh}^{2} \mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \\
\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n}}{\tau} + \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j \mathbf{W}_j^{n+1/2} = 0,
\end{gathered} \tag{23}$$

аппроксимирует исходные уравнения (22) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, где $h = \max\limits_{1 \le j \le N} (h_j)$, $m = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $m = 1$ при $\alpha \neq 0.5$. На этапе предиктора разностные уравнения на дробных шагах аппроксимируют уравнения газовой динамики в недивергентной форме и подобно схемам (14), (16) или (21) реализуются скалярными прогонками для каждой компоненты вектора $\mathbf{f}$. На этапе корректора в схеме (23) исходные уравнения (22) аппроксимируются в дивергентном виде. Новые значения находятся по явным формулам по схеме типа "крест", где значения

$\mathbf{W}_j^{n+1/2} = \mathbf{W}_j(\mathbf{f}^{n+1/2})$ получены из решения уравнений на этапе предиктора.

По аналогии со схемой для уравнений газовой динамики разностная схема (22), (23) может быть применена и для численного решения уравнений Навье–Стокса (11). В этом случае вязкие члены уравнений, а точнее лишь члены с повторными производными, аппроксимируются вместе с конвективными членами на этапе предиктора, т. е. операторы Ω_{1h}^2 и Ω_{1h}^1, например, для $N = 2$ будут иметь вид

$$\Omega_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_j^1 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & b_j^2 \bar{\Lambda}_j \\ 0 & a_j^1 \Lambda_j & a_j^2 \Lambda_j & v_j \Lambda_j - \frac{1}{\rho^n} \Lambda_j \kappa^n \Lambda_j \end{pmatrix},$$

$$\Omega_2^j = \begin{pmatrix} \Lambda_j v_j^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j^n \Lambda_j - \dfrac{1}{\rho^n} \Lambda_j d_j^1 \Lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j^n \Lambda_j - \dfrac{1}{\rho^n} \Lambda_j d_j^2 \Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где, как и ранее, коэффициенты равны

$$b_j^l = \delta_j^l / \rho, \quad a_j^l = \delta_j^l (\rho c^2)^n, \quad d_1^1 = d_2^2 = 4/3\mu, \quad d_2^1 = d_1^2 = \mu.$$

На этапе корректора все члены уравнений Навье–Стокса аппроксимируются на слое $n + 1/2$. Отметим, что все вторые производные $\frac{\partial}{\partial x_i}(d\frac{\partial}{\partial x_j})$ аппроксимируются симметричными операторами $\Lambda_i d \Lambda_j$ со вторым порядком на девятиточечном шаблоне.

2.5. Схема с расщеплением по физическим процессам

Рассмотренные выше схемы расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям и схемы предиктор–корректор позволяли свести решение системы многомерных равнений к скалярным прогонкам для отдельных компонент вектора по каждому направлению. Увеличение числа дробных шагов в разностных схемах приводит к появлению дополнительных членов высших порядков малости, что может приводить к практическому понижению точности расчетов или замедлению скорости сходимости при получении стационарного решения методом установления. Исследование свойств схем расщепления проведем

на примере схемы (13) для решения уравнений газовой динамики (10). Очевидно, схема (13) при $N = 2$ может быть переписана в виде

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \sum_{j=1}^{2} \Omega_j^n (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) = \Psi, \tag{24}$$

где

$$\Psi = \tau^2 \alpha^2 \left[\Omega_{1h}^1 \Omega_{1h}^2 + \Omega_{2h}^1 \Omega_{2h}^2 + \Omega_{1h}\Omega_{2h}\right] \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^3), \quad \Omega_{jh} = \sum_{l=1}^{2} \Omega_{jh}^l.$$

Погрешность аппроксимации Ψ и есть те добавочные члены, которые возникли за счет расщепления исходных операторов и применения метода приближенной факторизации. Оператор, стоящий при $\tau^2\alpha^2$, является диссипативным. Так как расчеты проводятся на конечных сетках с конечными τ и h, то, хотя схема (24) и имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2)$ при $\alpha = 0.5$, влияние этих членов может оказаться значительным для сильно меняющихся по времени процессов при решении нестационарных задач. Если же находится стационарное решение, то казалось бы разумным выбирать τ как можно больше для его получения. Однако в процессе выхода на стационарный режим значение Ψ возрастает с ростом τ. Это и есть плата за расщепление.

Для минимизации влияния расщепления рассмотрим схему вида

$$(I + \tau\alpha\Omega_h^1)(I + \tau\alpha\Omega_h^2)\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\Omega_h^n \mathbf{f}^n, \tag{25}$$

где $\Omega_h = \sum\limits_{j=1}^{2} \Omega_{jh}$, $\Omega_h^l = \sum\limits_{j=1}^{2} \Omega_{jh}^l$, т. е. операторы Ω_h^1 и Ω_h^2 содержат соответственно конвективные члены уравнений и члены с давлением согласно введенному расщеплению (11) или (19). Для реализации схемы (25) рассмотрим эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\xi}^n = -\Omega_h^n \mathbf{f}^n, \\ (I + \tau\alpha\Omega_h^1)\boldsymbol{\xi}^{n+1/2} = \boldsymbol{\xi}^n, \\ (I + \tau\alpha\Omega_h^2)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+1/2}, \\ \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau\boldsymbol{\xi}^{n+1}. \end{gathered} \tag{26}$$

Схему (25) или (26) назовем *схемой с расщеплением по физическим процессам*. Остановимся на ее реализации, например, при расщеплении операторов в форме (19). На первом дробном шаге решается система разностных уравнений

$$\xi_\rho^{n+1/2} = \xi_\rho^n,$$

$$\xi_l^{n+1/2} + \frac{\tau\alpha}{\rho^n}\delta_j^l\bar{\Lambda}_j\xi_p^{n+1/2} = \xi_l^n \quad (l = 1,2,3), \tag{27}$$

$$\xi_p^{n+1/2} + \tau\alpha\delta_j^l(\rho c^2)^n\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\xi_l^{n+1/2} + \tau\alpha\sum_{j=1}^{2}v_j^n\Lambda_j\xi_p^{n+1/2} = \xi_p^n.$$

Исключение $\xi_l^{n+1/2}$ в последнем уравнении схемы (27) приводит к неявному многомерному уравнению относительно $\xi_p^{n+1/2}$:

$$\left[I + \tau\alpha\sum_{j=1}^{2}(v_j\Lambda_j - \tau^2\alpha^2(\rho c^2)^n\Lambda_j\frac{1}{\rho^n}\bar{\Lambda}_j)\right]\xi_p^{n+1/2} =$$

$$\xi_p^n - \tau\alpha(\rho c^2)^n\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j\xi_j^n = F_p. \tag{28}$$

Его решение может быть получено каким-либо итерационным методом или на основе принципа установления по схеме приближенной факторизации

$$\tilde{C}\frac{\xi_p^{\nu+1} - \xi_p^\nu}{\tau_\nu} = -R^\nu, \tag{29}$$

где

$$\tilde{C} = \prod_{j=1}^{2}\left(I + \tau\alpha B_j^0\right), \quad B_j^0 = v_j^n\Lambda_j - \tau\alpha(\rho c^2)^n\Lambda_j\frac{1}{\rho^n}\bar{\Lambda}_j,$$

$$R^\nu = \left(I + \tau\alpha\sum_{j=1}^{3}B_j^0\right)\xi_p^\nu + F_p, \quad \xi^\nu = \xi^{n+1,\nu}.$$

При установлении, когда $\mid \xi_p^{\nu+1} - \xi_p^\nu \mid \to 0$, получаем решение уравнения (28), после чего явно определяются $\xi_l^{n+1/2}$. На втором дробном шаге схемы (26) система разностных уравнений

$$\xi_\rho^{n+1} + \tau\alpha\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j v_j^n\xi_\rho^{n+1} = \xi_\rho^{n+1/2},$$

$$\xi_l^{n+1} + \tau\alpha v_j^n \sum_{j=1}^{2} \Lambda_j \xi_l^{n+1/2} = \xi_l^{n+1/2} \quad (l = 1, 1, 3)$$

решается независимо для каждой компоненты ξ_ρ^{n+1}, ξ_1, ξ_2, ξ_3 либо по какой-нибудь итерационной схеме или методом установления по схеме приближенной факторизации типа (29). Таким образом, реализация разностной схемы для системы уравнений газовой динамики (системы многомерных уравнений) сводится к решению отдельных уравнений размерности N ($N = 2$ в данном случае).

2.6. Диссипативные свойства разностных схем

Проведем анализ диссипативных свойств рассмотренных выше разностных схем. Для простоты изложения ограничимся двумерным случаем. Введем следующие обозначения:

$$Q_j^i = \delta_j^i \tau\alpha\rho\Lambda_j, \quad R_j^i = \delta_j^i \frac{\tau\alpha}{\rho}\bar{\Lambda}_{ij}, \quad L_j^i = \delta_j^i \tau\alpha\rho c^2 \Lambda_j,$$

$$T_j = I + \tau\alpha v_j \Lambda_j, \quad T_0 = T_1 + T_2 - I,$$

где $(i, j = 1, 2)$, $\Lambda_j = \Lambda_{\mp j}$ — разностные операторы, аппроксимирующие первые производные с учетом знака скорости v_j, $\bar{\Lambda}_j = \Lambda_{\pm j}$ — сопряженные операторы. С учетом введенных обозначений стабилизирующий оператор нефакторизованной схемы с весами (12) равен

$$C_0 = I + \tau\alpha \sum_{j=1}^{2} \Omega_{jh} = \begin{pmatrix} T_0 & Q_1^1 & Q_2^2 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 & R_1^1 \\ 0 & 0 & T_0 & R_2^2 \\ 0 & L_1^1 & L_2^2 & T_0 \end{pmatrix}$$

и содержит члены вида $1 + \tau\alpha\frac{\partial}{\partial x_m}$ или $\tau\alpha\frac{\partial}{\partial x_m}$.

Для схемы приближенной факторизации с расщеплением по пространственным направлениям (схема [34]) стабилизирующий оператор имеет вид

$$C_1 = \prod_{j=1}^{2} (I + \tau\alpha\Omega_{jh}) = \begin{pmatrix} T_1T_2 & T_2Q_1^1 & T_1Q_2^2 & 0 \\ 0 & T_1T_2 & R_1^1L_2^2 & R_1^1T_2 \\ 0 & 0 & T_1T_2 & T_1R_2^2 \\ 0 & T_2L_1^1 & T_1L_2^2 & T_1T_2 \end{pmatrix}$$

и диссипативная матрица $D_1 = C_1 - C_0$, как легко видеть, содержит дополнительные члены порядка $O(\tau^2)$, т. е. в каждом разностном уравнении при временных производных содержатся диссипативные члены вида $\tau^2\alpha^2\frac{\partial}{\partial x_m}S_{ml}\frac{\partial}{\partial x_l}$.

Для разностной схемы (20) с расщеплением операторов по физическим процессам и пространственным переменным (19) стабилизирующий оператор имеет вид

$$C_2 = \begin{pmatrix} T_1T_2 & T_2Q_1^1 & T_1Q_2^2 & 0 \\ 0 & T_1T_2 & R_1^1L_2^2t_2 & R_1^1T_2 \\ 0 & 0 & T_1T_2 & R_2^2T_1 \\ 0 & T_1T_2L_1^1 & T_1T_2L_2^2 & T_1T_2 \end{pmatrix}$$

и содержит не только дополнительные члены, как и в операторе C_1, но и дополнительные члены третьего порядка малости. Наконец, для схемы приближенной факторизации (25) с расщеплением по физическим процессам, стабилизирующий оператор C_3 имеет вид

$$C_3 = (I + \tau\alpha L_1)(I + \tau\alpha L_2) = C_0 + (t_0 - 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^1 & L_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и содержит дополнительные члены порядка $O(\tau^2)$ лишь в последней строке, т. е. диссипативные члены присутствуют только в разностном уравнении энергии.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы: схема расщепления по физическим процессам (25) по своим свойствам наиболее близка к нефакторизованной схеме. Ее реализация на каждом дробном шаге сводится к независимому решению каждого уравнения, а не системы уравнений в целом, как в нефакторизованной схеме (12). Схемы приближенной факторизации близки схеме расщепления по своим свойствам, но значительно различаются от свойств нефакторизованной схемы, так как содержат в каждом уравнении дополнительные члены порядка $O(\tau^2)$ и $O(\tau^3)$.

§ 3. Методы решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости

Уравнения Навье—Стокса вязкой несжимаемой жидкости широко используется при моделировании в гидродинамике, геофизике, охране окружающей среды и других областях науки и техники. Эти уравнения могут быть получены из общих постулатов Стокса или на основе молекулярно-кинетической теории и в векторной форме могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F}. \end{gathered} \tag{1}$$

В системе (1) искомыми функциями являются вектор скорости $\mathbf{v}$ и давление p. Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{F}$ — вектор внешних сил.

Граничные условия на непроницаемой твердой поверхности S (условия прилипания) задаются в виде

$$\mathbf{v}\,|_S = v_c,$$

где v_c — скорость движения поверхности. Вдали от обтекаемого тела граничное условие имеет асимпотический характер

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v}_\infty \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Отметим, что граничное условие для давления не задается и не требуется в точной математической постановке. Приведем для удобства рассмотрения уравнения (1) в декартовых координатах в двумерном случае при отсутствии внешних сил в скалярной

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu\Delta v_1,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \nu\Delta v_2$$

и векторной

$$M\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2}\left(B_j\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} - C_0\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j^2}\right) = 0 \tag{2}$$

формах. Здесь $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{2} \partial^2/\partial x_j^2$ — оператор Лапласа,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^1 & \delta_j^2 \\ \delta_j^1 & v_j & 0 \\ \delta_j^2 & 0 & v_j \end{pmatrix}, \quad C_0 = \nu M.$$

Используя уравнение неразрывности, уравнения (2) могут быть переписаны в дивергентном виде

$$M\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{W}_j = 0, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} v_j \\ v_1 v_j + \delta_j^1 p - \nu \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \\ v_2 v_j + \delta_j^2 p - \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_j} \end{pmatrix}.$$

Система уравнений Навье–Стокса (2) не является системой уравнений типа Коши–Ковалевской (матрица M вырожденная) и поэтому для численного решения невозможно напрямую применять схемы приближенной факторизации и расщепления, описанные выше для решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого газа. Для их решения применяются специальные методы, наиболее употребительные из которых описаны ниже.

3.1. Схема в переменных функция тока–вихрь

Введем новые газодинамические переменные — вихрь ω и функцию тока ψ по формулам

$$\omega = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \quad v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \tag{4}$$

В этих переменных уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, и система уравнений (2) приводится к виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \nu \Delta \omega, \tag{5}$$

$$\Delta \psi = \omega, \tag{6}$$

где функция тока и вихрь заданы соотношениями (4). Краевые условия на непроницаемой поверхности и вдали от тела принимают вид

$$\psi = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

Так как граничное условие для функции тока ψ определено с точностью до постоянной, то для замкнутой односвязной области можно положить

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \tag{7}$$

Решение стационарного уравнения для функции тока (6) можно находить как предельное решение нестационарной задачи

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi - \omega \tag{8}$$

со стационарными краевыми условиями (7), например, по схеме переменных направлений или по схеме универсального алгоритма

$$(I-\tau\alpha\Lambda_{11})(I-\tau\alpha\Lambda_{22})\frac{psi^{n+1}-\psi^n}{\tau}=(\Lambda_{11}+\Lambda_{22})\psi^n-\omega^n, \qquad (9)$$

реализуемой на дробных шагах

$$\xi^n=(\Lambda_{11}+\Lambda_{22})\psi^n-\omega^n,$$

$$(I-\tau\alpha\Lambda_{11})\xi^{n+1/2}=\xi^n,$$

$$(I-\tau\alpha\Lambda_{22})\xi^{n+1}=\xi^{n+1/2},$$

$$\psi^{n+1}=\psi^n+\tau\xi^{n+1}$$

скалярными прогонками вдоль каждого направления x_j. Здесь $\Lambda_{jj}=\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+O(h_j^2)$. В силу условий (7) значения вектора ξ на границе y задаются по формулам

$$\xi_y^l=0, \quad \Delta_n\xi_y^l=0,$$

где $l=n,\ n+1/2,\ n+1$, Δ_n — разностный оператор, аппроксимирующий производную $\partial/\partial n$. После вычисления функции ψ^{n+1} определяются новые значения

$$v_1^{n+1}=\Lambda_2\psi^{n+1}, \quad v_2^{n+1}=-\Lambda_1\psi^{n+1}. \qquad (10)$$

Численное решение уравнения (5) для вихря может быть получено по схеме приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^{2}[I+\tau\alpha(v_j^n\Lambda_j-\nu\Lambda_{jj})]\frac{\omega^{n+1}-\omega^n}{\tau}=-\sum_{j=1}^{2}(\Lambda_j v^n\omega^n-\nu\Lambda_{jj}\omega^n) \qquad (11)$$

или эквивалентной ей схеме в дробных шагах

$$\xi_\omega^n=-\sum_{j=1}^{2}(\Lambda_j v^n\omega^n-\nu\Lambda_{jj}\omega^n),$$

$$[I+\tau\alpha(v_1^n\Lambda_1-\nu\Lambda_{11})]\xi_\omega^{n+1/2}=\xi_\omega^n,$$

$$[I+\tau\alpha(v_2^n\Lambda_2-\nu\Lambda_{22})]\xi_\omega^{n+1}=\xi_\omega^{n+1/2},$$

$$\omega^{n+1}=\omega^n+\tau\xi_\omega^{n+1}.$$

На дробных шагах схема реализуется скалярными прогонками подобно схеме (9). Обычно операторы Λ_j выбирают симметричными, аппроксимирующими производные со вторым порядком. Таким образом разностная схема (9), (10), и (11) аппроксимирует исходные уравнения (5), (6) с порядком $O(\tau + h^2)$.

В переменных $\omega - \psi$ краевые условия (7) формулируются лишь для функции тока и отсутствуют для вихря. Первый способ определения краевого условия для ω предложен Тома. Разлагая функцию $\psi_{i,0}$ вблизи границы (i,1) в ряд Тейлора

$$\psi_{i,1} = \psi_{i,0} + h\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{i,0} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right)_{i,0} + O(h^3)$$

и сохраняя члены до второго порядка, получаем, используя следствия (6) и (7), следующее соотношение:

$$\omega_{i,0} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right)_{i,0} = \frac{2(\psi_{i,1} - \psi_{i,0})}{h^2} - \frac{2}{h}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{i,0} + O(h) = \frac{2\psi_{i,1}}{h^2} + O(h).$$

Приближение более высокого порядка можно получить из непосредственной аппроксимации уравнения для функции тока (6) на границе с учетом краевых условий (7)

$$\omega_{i,0} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right)_{i,0} = \frac{8\psi_{i,1} - \psi_{i,2} - 7\psi_{i,0}}{2h^2} + O(h^2) = \frac{8\psi_{i,1} - \psi_{i,2}}{2h^2} + O(h^2).$$

Замечание. Изложенный выше спопсоб построения разностных схем в переменных ω — ψ может быть обобщен и на трехмерный случай. Следует при этом иметь в виду, что вихрь в трехмерном случае есть вектор, а функция тока – векторный потенциал.

3.2. Схема расщепления

При построении схемы расщепления было сделано предположение, что на промежуточном слое течение является соленоидальным, т. е. полагается $\nabla p = 0$. Тогда решение системы уравнений (1) находится по разностной схеме расщепления в следующем порядке. Вначале по явной схеме определяются промежуточные значения $\mathbf{v}$:

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\tau} + (\mathbf{v}^n \cdot \nabla_h)\mathbf{v}^n = \nu\Delta_h\mathbf{v}^n, \qquad (12)$$

где $\mathbf{v}^n\nabla_h = v_1^n\Lambda_1 + v_2^n\Lambda_2$ — аппроксимация конвективных членов с порядком $O(h^k)$, $\Delta_h = \Lambda_{11} + \Lambda_{22}$ — аппроксимация оператора Лапласа с порядком $O(h^2)$. Новое значение $\mathbf{v}^{n+1}$ определяется по схеме

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\tau} = -\nabla_h p^{n+1}, \quad \mathrm{div}\mathbf{v}^{n+1} = 0. \tag{13}$$

Суммирование шагов схем (12) и (13) приводит к разностной схеме

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\tau} + (\mathbf{v}^n\nabla_h)\mathbf{v}^n + \nabla_h p^{n+1} = \nu\Delta_h\mathbf{v}^n, \quad \nabla_h\mathbf{v}^{n+1} = 0,$$

аппроксимирующей уравнения Навье–Стокса с порядком $O(\tau + h^k)$. Вычисление p^{n+1} и $\mathbf{v}^{n+1}$ по схеме (13) неудобно алгоритмически. Поэтому от первого уравнения (13) берут операцию div. Тогда

$$\mathrm{div}\nabla p^{n+1} = \Delta p^{n+1} = -\frac{1}{\tau}\mathrm{div}(\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}})$$

и в силу второго уравнения схемы (13) получим

$$\Delta p^{n+1} = \frac{1}{\tau}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}}^n \tag{14}$$

в дифференциальном виде или после его аппроксимации в разностном виде

$$\Delta_h p^{n+1} = \frac{1}{\tau}\nabla_h\tilde{\mathbf{v}}^n.$$

Его численное решение можно находить на основе принципа установления как предельное решение нестационарного уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta_h p^{n+1} - \frac{1}{\tau}\nabla_h\tilde{\mathbf{v}},$$

например, по разностной схеме приближенной факторизации вида (9)

$$\prod_{j=1}^{2}(I - \tau\alpha\Lambda_{jj})\frac{p^{\nu+1} - p^\nu}{\tau_\nu} = \nabla_h p^\nu - \frac{1}{\tau}\nabla_h\tilde{\mathbf{v}}, \tag{15}$$

или эквивалентной ей схеме в дробных шагах

$$\xi^\nu = \nabla_h p^\nu - \frac{1}{\tau}\nabla_h\tilde{\mathbf{v}},$$

$$(I - \tau\alpha\Lambda_{11})\xi^{\nu+1/2} = \xi^\nu,$$

$$(I - \tau\alpha\Lambda_{22})\xi^{\nu+1} = \xi^{\nu+1/2},$$
$$p^{\nu+1} = p^{\nu} + \tau_\nu \xi^{\nu+1},$$

реализуемой скалярными прогонками по каждому направлению x_j. Здесь $p^\nu = p^{n+1,\nu}$, а $\nabla_h \tilde{\mathbf{v}}^n$ — разностная аппроксимация оператора $\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}}$. Итерации продолжают до сходимости, т. е. выполнения условия $\left|p^{\nu+1} - p^\nu\right| \le \delta$ или $\left|p^{\nu+1} - p^\nu\right| \le \delta \left|p^{\nu+1}\right|$, где $\delta \approx O(\epsilon + h^2)$.

Граничное условие для давления получают из схемы (13), если записать это разностное уравнение в проекции на единичную нормаль к границе γ. Таким образом, для определения p на границе получаем условие Неймана

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_\gamma^{n+1} = -\frac{1}{\tau}(\mathbf{v}_n^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}_n)_{\gamma n}, \tag{16}$$

которое в силу граничного условия прилипания $v_\gamma^{n+1} = \tilde{v}_\gamma^n \equiv 0$ принимает вид

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_\gamma^{n+1} = 0.$$

Аппроксимация этого уравнения с порядком $O(h^k)$ и дает нам новое значение p^{n+1} на границе γ. После определения p^{n+1} новое значение скорости находится по схеме (13) по явной формуле

$$\mathbf{v}^{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}^n - \tau\nabla_h p^{n+1}. \tag{17}$$

Таким образом, численное решение уравнений Навье–Стокса находится по схеме расщепления (12)–(17) в три этапа:

— на первом этапе вычисляют промежуточное значение скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ по схеме (12) в предположении соленоидальности решения;

— на втором шаге по схеме (15) определяют значение давления p^{n+1} на новом временном шаге (после получения стационарного решения при сходимости итераций);

— новые значения скорости $\mathbf{v}^{n+1}$ получают по схеме (17).

Метод нахождения численного решения иногда называют *проекционным*. Это название метод получил вследствие того, что векторная величина, полученная на втором шаге (схема (13)), может рассматриваться как проекция векторного поля скорости v^{n+1} на векторное подпространство с нулевой дивергенцией, удовлетворяющим соответствующим граничным условиям.

Изложенный алгоритм может применяться для решения задач любой размерности. Его недостатками являются первый порядок аппроксимации по времени и приближенное задание давления на границе. Разност-

ная схема (12), (15) и (17) условно устойчива в силу явной аппроксимации конвективных членов, что требует выбора временного шага τ из условия ограничения числа Куранта в многомерном случае $K \leq 1$.

3.3. Схема приближенной факторизации

Как следует из вида уравнений Навье–Стокса (2) или (3), записанных в векторном виде, матрица M вырожденная, что не позволяет непосредственно применять метод приближенной факторизации. Однако в действительности такие схемы могут быть построены. Опишем одну из них. Аппроксимируем систему уравнений (3) схемой с весами

$$M\frac{\mathbf{f}^{n+1}-\mathbf{f}^n}{\tau}+\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j(\alpha\mathbf{W}_j^{n+1}+\beta\mathbf{W}_j^n)=0. \tag{18}$$

Пусть для определенности $\Lambda_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+O(h_j^2)$, т. е. в схеме (12) конвективные члены и члены с давлением аппроксимируются операторами с центральной разностью, а вторые производные аппроксимируются симметричными операторами на трехточечном шаблоне. Тогда разностная схема (18) при $\alpha\neq 0$ нелинейна и аппроксимирует исходные уравнения (3) с порядком $O(\tau^m+h^2)$, где $m=2$ при $\alpha=0.5$. Линеаризуя векторы W_j^{n+1} относительно $\mathbf{f}^{n+1}$ по формулам

$$\mathbf{W}_j^{n+1}=\mathbf{W}_j^n+\tau(\frac{\partial\mathbf{W}_j}{\partial f})^n(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t})^n=O(\tau^2)=\mathbf{W}_j^n+B_j^n\Delta\mathbf{f}^n+O(\tau^2),$$

где $\Delta\mathbf{f}=\mathbf{f}^{n+1}-\mathbf{f}^n$,

$$B_j=\frac{\partial\mathbf{W}_j}{\partial\mathbf{f}}=\begin{pmatrix}0 & \delta_j^1 & \delta_j^2\\ \delta_j^1 & (1+\delta_j^1)v_j & (1-\delta_j^1)v_1\\ \delta_j^2 & (1-\delta_j^2)v_2 & (1+\delta_j^2)v_j\end{pmatrix},$$

и подставляя выражение для $\mathbf{W}_j^{n+1}$ в (18), получаем линейную разностную схему

$$\left[M+\tau\alpha\sum_{j=1}^{2}(\Lambda_jB_j^n-C_0\Lambda_{jj})\right]\Delta\mathbf{f}^n=-\tau\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\mathbf{W}_j^n. \tag{19}$$

Введем оператор $\tilde{B}=\sum\limits_{j=1}^{2}\Lambda_jB_j^n$. Тогда $\tilde{B}\Delta\mathbf{f}^n=\tilde{B}\mathbf{f}^{n+1}-\tilde{B}\mathbf{f}^n$. Но

$$\tilde{B}_j^n\mathbf{f}^n=\begin{pmatrix}0 & \Lambda_1 & \Lambda_2\\ \Lambda_1 & 2\Lambda_1v_1^n+\Lambda_2v_2^n & \Lambda_2v_1^n\\ \Lambda_2 & \Lambda_1v_2^n & \Lambda_1v_1^n+2\Lambda_2v_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^n\\ v_1^n\\ v_2^n\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \bar{\Lambda}_1 & v_1^n\Lambda_1 + v_2^n\Lambda_2 & 0 \\ \bar{\Lambda}_2 & 0 & v_1^n\Lambda_1 + v_2^n\Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^n +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1^n\Lambda_1 & v_1^n\Lambda_2 \\ 0 & v_2^n\Lambda_1 & v_2^n\Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^n =$$

$$= B^n\mathbf{f}^n + B_0\mathbf{f}^n = B\mathbf{f}^n + \begin{pmatrix} 0 \\ v_1^n(\Lambda_1 v_1^n + \Lambda_2 v_2^n) \\ v_2^n(\Lambda_1 v_1^n + \Lambda_2 v_2^n) \end{pmatrix} = B\mathbf{f}^n$$

как следствие тождественного выполнения уравнения неразрывности $\mathrm{div}(\mathbf{v}^n) = 0$. Таким образом:

$$\tilde{B}^n\mathbf{f}^n = B^n\mathbf{f}^n + O(h^k). \tag{20}$$

В дифференциальном виде равенство (20) выполняется точно. Оно является следствием эквивалентности дивергентной и недивергентной форм записи уравнений Навье–Стокса. Аналогично соотношению (20) справедливо представление

$$\tilde{B}^n\mathbf{f}^{n+1} = B^n\mathbf{f}^n + O(h^k)$$

и как следствие

$$\tilde{B}^n\Delta\mathbf{f}^n \approx B^n\Delta\mathbf{f}^n.$$

Тогда разностная схема (19) может быть переписана в виде

$$[M + \tau\alpha(B^n - C_0\Delta_h)]\,\Delta\mathbf{f}^n = -\tau\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\mathbf{W}_j^n. \tag{21}$$

Здесь

$$\Delta_h = \Lambda_{11} + \Lambda_{22}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \bar{\Lambda}_1 & v_1^n\Lambda_1 + v_2\Lambda_2 & 0 \\ \bar{\Lambda}_2 & 0 & v_1^n\Lambda_1 + v_2^n\Lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Схема (21) аппроксимирует исходные уравнения Навье–Стокса с тем же порядком, что и базовая схема с весами (19). Для ее реализации факторизуем стабилизирующий оператор $M + \tau\alpha(B^n - C_0\Delta_h)$ с учетом расщепления по физическим процессам по формуле

$$M + \tau\alpha(B^n - C_0\Delta_h) = M + \tau\alpha(B^1 + B^2) - C_0\Delta_h \approx$$

$$\approx \left[I + \tau\alpha(B^1 - C_0\Delta_h)\right]\left[M + \tau\alpha B^2\right] = C,$$

где оператор B^1 содержит конвективные члены уравнений, а B^2 — члены с давлением, т. е.

$$B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1^n\Lambda_1 + v_2^n\Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_1^n\Lambda_1 + v_2^n\Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \bar{\Lambda}_1 & 0 & 0 \\ \bar{\Lambda}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как и в схеме расщепления для уравнений газовой динамики (§ 2), при аппроксимации членов с давлением выбраны операторы $\bar{\Lambda}_j$, сопряженные с конвективным членом Λ_j. Так как

$$C = M + \tau\alpha(B - C_0\Delta_h) + O(\tau^2),$$

то и разностная схема

$$C\Delta\mathbf{f}^n = -\tau\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\mathbf{W}_j^n \tag{22}$$

или эквивалентная схема в дробных шагах

$$\boldsymbol{\xi}^n = -\tau\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\mathbf{W}_j^n,$$

$$\begin{gathered}[I + \tau\alpha(B^1 - C_0\Delta_h)]\boldsymbol{\xi}^{n+1/2} = \boldsymbol{\xi}^n, \\ (M + \tau\alpha B^2)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^n, \\ \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \boldsymbol{\xi}^{n+1}\end{gathered} \tag{23}$$

аппроксимирует исходные уравнения (1) или (3) с порядком $O(\tau^m + h^k)$. Здесь $\boldsymbol{\xi} = (\xi_p, \xi_1, \xi_2)$. Остановимся на реализации схемы (23). Значения $\boldsymbol{\xi}^n$ вычисляются явно из первого уравнения схемы (23), причем $\xi_p^n = \sum\limits_{j=1}^{2}\Lambda_j v_j^n \equiv 0$. На первом дробном шаге решается система уравнений

$$\xi_p^{n+1/2} = \xi_p^n = 0,$$

$$[I + \tau\alpha(v_1^n\Lambda_1 + v_2^n\Lambda_2 - \nu\Delta_h)]\xi_1^{n+1/2} = \xi_1^n,$$

$$[I + \tau\alpha(v_1^n\Lambda_1 + v_2^n\Lambda_2 - \nu\Delta_h)]\xi_2^{n+1/2} = \xi_2^n.$$

Значение $\xi_p^{n+1/2}$ сохраняется с n-го слоя, а решение уравнений для каждой компоненты $\xi_j^{n+1/2}$ может быть получено по какой-либо известной итерационной схеме или по схеме приближенной факторизации вида (15) до сходимости итераций. На втором дробном шаге решаются разностные уравнения

$$\begin{aligned} \tau\alpha(\Lambda_1\xi_1^{n+1} + \Lambda_2\xi_2^{n+1}) &= \xi_p^{n+1/2}, \\ \xi_1^{n+1} + \tau\alpha\bar{\Lambda}_1\xi_p^{n+1} &= \xi_1^{n+1/2}, \\ \xi_2^{n+1} + \tau\alpha\bar{\Lambda}_2\xi_p^{n+1} &= \xi_2^{n+1/2}. \end{aligned} \tag{24}$$

После исключения ξ_j^{n+1} из первого уравнения (24) получим разностное уравнение Пуассона относительно компоненты ξ_p^{n+1} :

$$\tau^2\alpha^2(\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 + \Lambda_2\bar{\Lambda}_2)\xi_p^{n+1} = -\xi_p^n + \tau\alpha(\Lambda_1\xi_1^{n+1/2} + \Lambda_2\xi_2^{n+1/2}).$$

Так как $\sum\limits_{j=1}^{2}\Lambda_j\bar{\Lambda}_j = \sum\limits_{j=1}^{2}\Lambda_{jj} = \Delta_h$, то с учетом условия
$\xi_p^n = 0 \quad (\mathrm{div}\mathbf{v}^n = 0)$ получим

$$\Delta_h\xi_p^{n+1} = \frac{1}{\tau\alpha}\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\xi_j^{n+1/2}. \tag{25}$$

Решение этого уравнения подобно схеме расщепления (п. 3.2) может быть получено по итерационной схеме вида (15). Затем по явным формулам вычисляются ξ_j^{n+1} из схемы (24), а новые значения вектора $\mathbf{f}^{n+1}$ определяются из последнего уравнения схемы (23). Таким образом, при расщеплении исходного оператора по физическим процессам разностная схема (22), (23) реализуется независимо для каждой компоненты вектора $\mathbf{f}$.

Для получения схемы, реализуемой скалярными прогонками, приближенно факторизуем оператор C из (22) по формуле

$$C = [I+\tau\alpha(B^1-C_0\Delta_h)][M+\tau\alpha B^2] \approx \prod_{j=1}^{2}[I+\tau\alpha(B_j^1-C_0\Delta_h)][M+\tau\alpha B_j^2] = C_1,$$

где

$$B_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j^n\Lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & v_j^n\Lambda_j \end{pmatrix}, \quad B_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^1\Lambda_1 & \delta_j^2\Lambda_2 \\ \delta_j^1\bar{\Lambda}_1 & 0 & 0 \\ \delta_j^2\bar{\Lambda}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда разностная схема

$$C_1 \Delta \mathbf{f}^n = -\tau \sum_{j=1}^{2} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n \tag{26}$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\boldsymbol{\xi}^n = -\tau \sum_{j=1}^{2} \Lambda_j \mathbf{W}_j^n,$$

$$[I - \tau\alpha(B_1^1 - C_0\Lambda_{11})]\boldsymbol{\xi}^{n+1/4} = \boldsymbol{\xi}^n,$$

$$(M + \tau\alpha B_1^2)\boldsymbol{\xi}^{n+2/4} = \boldsymbol{\xi}^{n+1/4},$$

$$[I - \tau\alpha(B_2^1 - C_0\Lambda_{22})]\boldsymbol{\xi}^{n+3/4} = \boldsymbol{\xi}^{n+2/4},$$

$$(M + \tau\alpha B_2^2)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+3/4},$$

$$\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \boldsymbol{\xi}^{n+1}$$

аппроксимирует систему уравнений (3) с порядком $O(\tau + h^2)$ и реализуется на каждом дробном шаге скалярными прогонками.

Покажем это на примере первых двух дробных шагов. На первом дробном шаге система разностных уравнений

$$\xi_p^{n+1/4} = \xi_p^n,$$

$$[I + \tau\alpha(v_1^n\Lambda_1 - \nu\Lambda_{11})]\xi_l^{n+1/4} = \xi_l^n \quad (l = 1, 2)$$

решается трехточечными прогонками для каждой компоненты $\xi_l^{n+1/4}$. На втором дробном шаге решение разностных уравнений

$$\tau\alpha\Lambda_1\xi_1^{n+2/4} = \xi_p^{n+1/4},$$

$$\xi_1^{n+2/4} + \tau\alpha\bar{\Lambda}_1\xi_p^{n+2/4} = \xi_1^{n+1/4},$$

$$\xi_2^{n+2/4} = \xi_2^{n+1/4}$$

после исключения ξ_1 из первого уравнения сводится к нахождению $\xi_p^{n+1/2}$ из уравнения

$$\tau^2\alpha^2\Lambda_{11}\xi_p^{n+2/4} = -\xi_p^n + \tau\alpha\Lambda_1\xi_1^{n+1/4}, \qquad \Lambda_{11} = \bar{\Lambda}_1\Lambda_1,$$

также трехточечной скалярной прогонкой. После этого значение $\xi_1^{n+2/4}$ определяется по явной схеме

$$\xi_1^{n+2/4} = \xi_1^{n+1/4} - \tau\alpha\bar{\Lambda}_1\xi_p^{n+2/4}.$$

Разностные уравнения на третьем и четвертом дробных шагах решаются аналогично.

Таким образом, решение двумерных уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости сводится к шести скалярным прогонкам, что делает этот подход экономичным. Заметим, что как и в схеме расщепления (п. 3.2) уравнение неразрывности выполняется на каждом временном шаге, т. е. $\Delta_h v^n \equiv \Delta_h v^{n+1} = 0$.

§ 4. Метод искусственной сжимаемости

Как отмечалось выше, особенностью системы уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости является отсутствие производной по времени в уравнении неразрывности, что не позволяет применять описанные в гл. I методы. В работах [32; 35] было предложено заменить уравнение Навье–Стокса несжимаемой жидкости моделью слабо сжимаемой жидкости, представив уравнение неразрывности в виде

$$\epsilon\frac{\partial p}{\partial t} + p\mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

или в виде

$$\epsilon\frac{\partial p}{\partial t} + c^2\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

где ϵ и c^2 — произвольные постоянные. Решение уравнений (1),(2) не имеет физического смысла, пока не достигнуто стационарное решение с $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$. Таким образом, условие $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$ выполняется только в случае сходимости. Система уравнений

$$\begin{gathered}\epsilon\frac{\partial p}{\partial t} + p\mathrm{div}\mathbf{v} = 0,\\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{v}\end{gathered} \tag{3}$$

является уже системой, разрешенной относительно производной по времени (системой типа Коши–Ковалевской) и в пределе при $\epsilon \to 0$ аппроксимирует систему уравнений вязкой несжимаемой жидкости. Метод, основанный на решении системы уравнений (3), может быть назван псевдонестационарным, так как переменная t, входящая в уравнение неразрывности в качестве времени, не имеет физического смысла.

Ограничиваясь, как и ранее, двумерным случаем, представим систему уравнений (3) в векторном виде в дивергентной и недивергентной формах

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \left(B_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} - C_0 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j^2} \right) = 0, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{p}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(v_1 v_j + \delta_j^1 p - \nu \frac{\partial v_1}{\partial x_j}) \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(v_2 v_j + \delta_j^2 p - \nu \frac{\partial v_2}{\partial x_j}) \end{pmatrix},$$

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{\epsilon}\delta_j^1 & \frac{p}{\epsilon}\delta_j^2 \\ \delta_j^1 & v_j & 0 \\ \delta_j^2 & 0 & v_j \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Остановимся на некоторых методах их решения.

4.1. Схема расщепления по направлениям

Следуя идеологии расщепления, будем искать решение системы уравнений (4) в два этапа: на первом дробном шаге в интервале времени $t_n \le t \le t_n + \tau/2$ решается система уравнений

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + B_1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} = C_0 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2},$$

а на втором дробном шаге при $t_n + \tau/2 \le t \le t_n + \tau$ система

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + B_2 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} = C_0 \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_2^2}.$$

Для аппроксимации уравнений могут быть рассмотрены различные разностные схемы. Подобно примеру, приведенному в работе [32], рассмотрим схему с весами

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^n}{\tau} + (B_1^* \Lambda_1 - C_0 \Lambda_{11})(\alpha \mathbf{f}^{n+1/2} + \beta \mathbf{f}^n) = 0 \\ &\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1/2}}{\tau} + (B_2^* \Lambda_2 - C_0 \Lambda_{22})(\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^{n+1/2}) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где B_j^* — матрицы B_j, аппроксимируемые на слое n или на слое $n+1/2$, по формулам

$$B_j^* = \alpha B_j^{n+1} + \beta B_j^n. \tag{6}$$

При $\alpha \neq 0$ необходимы итерации по нелинейности при реализации уравнений по схеме (5). Разностная схема (6) аппроксимирует исходные уравнения (4) с порядком $O(\tau^m + h^k)$, где $m = 2$ при $\alpha = 0.5$.

Остановимся на реализации схемы (5). На первом дробном шаге схемы система разностных уравнений

$$\epsilon \frac{p^{n+1/2} - p^n}{\tau} + p^* \Lambda_1 (\alpha v_1^{n+1/2} + \beta v_1^n) = 0,$$

$$\frac{v_1^{n+1/2} - v_1^n}{\tau} + (v_1^* \Lambda_1 - \nu \Lambda_{11})(\alpha v_1^{n+1/2} + \beta v_1^n) + \bar{\Lambda}_1 (\alpha p^{n+1/2} + \beta p^n) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{v_2^{n+1/2} - v_2^n}{\tau} + (v_1^* \Lambda_1 - \nu \Lambda_{11})(\alpha v_2^{n+1/2} + \beta v_2^n) = 0$$

решается в следующей последовательности. Исключая $p^{n+1/2}$ из уравнения движения, получаем разностное уравнение относительно $v_1^{n+1/2}$:

$$[I + \tau\alpha(v_1^* \Lambda_1 - \nu \Lambda_{11}) - \frac{\tau^2 \alpha^2}{\epsilon} \bar{\Lambda}_1 p^* \Lambda_1] v_1^{n+1/2} = [I - \tau\beta(v_1^* \Lambda_1 - \nu \Lambda_{11})] v_1^n -$$

$$-\tau \bar{\Lambda}_1 p^n + \frac{\tau^2 \alpha \beta}{\epsilon} \bar{\Lambda}_1 p^* \Lambda_1 v_1^n. \tag{8}$$

Его решение находится трехточечной скалярной прогонкой при известном p^*, v_1^*, после чего явно определяется $p^{n+1/2}$ из первого уравнения схемы (7). Разностное уравнение для компоненты скорости $v_2^{n+1/2}$ решается скалярной прогонкой независимо от двух первых. Здесь $\bar{\Lambda}_j$, как и ранее, сопряженный к Λ_j оператор.

Разностные уравнения на втором дробном шаге

$$\epsilon \frac{p^{n+1/2} - p^n}{\tau} + p^* \Lambda_2 (\alpha v_2^{n+1} + \beta v_2^{n+1/2}) = 0,$$

$$\frac{v_1^{n+1} - v_1^{n+1/2}}{\tau} + (v_2^* \Lambda_2 - \nu \Lambda_{22})(\alpha v_1^{n+1} + \beta v_1^{n+1/2}) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{v_2^{n+1} - v_2^{n+1/2}}{\tau} + (v_2^* \Lambda_2 - \nu \Lambda_{22})(\alpha v_2^{n+1} + \beta v_2^{n+1/2}) + \bar{\Lambda}_2 (\alpha p^{n+1} + \beta p^{n+1/2}) = 0$$

решаются подобно схеме (7) также скалярными прогонками.

4.2. Схема приближенной факторизации

Аппроксимируем систему уравнений (4) схемой с весами

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1}-\mathbf{f}^{n+1/2}}{\tau}+\sum_{j=1}^{2}(B_j^*\Lambda_j-C_0\Lambda_{jj})(\alpha\mathbf{f}^{n+1}+\beta\mathbf{f}^n)=0$$

Перепишем ее в каноническом виде

$$[I+\tau\alpha\sum_{j=1}^{2}(B_j^*\Lambda_j-C_0\Lambda_{jj})]\Delta\mathbf{f}^n=-\tau\mathbf{W}^n,\quad \Delta\mathbf{f}^n=\mathbf{f}^{n+1}-\mathbf{f}^n, \qquad (10)$$

где для повышения точности правая часть в уравнениях движения аппроксимирована в дивергенной форме с порядком $O(h^k)$ по формулам

$$\mathbf{W}_j^n=\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\mathbf{W}_j^n,\quad \Lambda_j\mathbf{W}_j=\begin{pmatrix}\frac{p}{\epsilon}\Lambda_j v_j\\ \Lambda_j v_1 v_j+\delta_j^1\bar{\Lambda}_j p-\nu\Lambda_{jj}v_1\\ \Lambda_j v_2 v_j+\delta_j^2\bar{\Lambda}_j p-\nu\Lambda_{jj}v_2\end{pmatrix}.$$

Факторизуем стабилизирующий оператор схемы (10) приближенным оператором R по формуле

$$I+\tau\alpha\sum_{j=1}^{2}(B_j^*\Lambda_j-C_0\Lambda_{jj})\approx\prod_{j=1}^{2}[I+\tau\alpha(B_j^*\Lambda_j-C_0\Lambda_{jj})]=R.$$

Тогда разностная схема

$$R\Delta\mathbf{f}^n=-\tau\mathbf{W}^n \qquad (11)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\boldsymbol{\xi}^n=-\tau\mathbf{W}^n,$$

$$[I+\tau\alpha(B_1^*\Lambda_1-\nu\Lambda_{11})]\boldsymbol{\xi}^{n+1/2}=\boldsymbol{\xi}^n,$$

$$[I+\tau\alpha(B_2^*\Lambda_2-\nu\Lambda_{22})]\boldsymbol{\xi}^{n+1}=\boldsymbol{\xi}^{n+1},$$

$$\mathbf{f}^{n+1}=\mathbf{f}^n+\boldsymbol{\xi}^{n+1}$$

аппроксимирует исходные уравнения (4) с порядком $O(\tau^m+h^k)$ и, подобно схеме расщепления (5), реализуется на дробных шагах скалярными прогонками. В линейном приближении рассмотренные разностные схемы (5) и (11) безусловно устойчивы при $\alpha\geq 0.5$. Для повышения точности расчета аппроксимация конвективных членов в операторе W в

правой части может может быть выбрана со вторым порядком, а в левой части — с первым. Тогда разностная схема (11) принимает вид

$$R^1 \Delta \mathbf{f}^n = -\tau \mathbf{W}^n, \tag{12}$$

где

$$R^1 = \prod_{j=1}^{2} [I + \tau\alpha(B_j^* \Lambda_j^1 - C_0 \Lambda_{jj})], \quad \mathbf{W} = \sum_{j=1}^{2} \Lambda_j^2 \mathbf{W}_j, \quad \Lambda_j^s = \frac{\partial}{\partial x_j} + O(h^s),$$

и аппроксимирует уравнения (4) с порядком $O(\tau^m + \tau h + h^2)$, а при установлении стационарных уравнений с порядком $O(h^2)$. Значительного упрощения реализации схемы на дробных шагах не происходит. Однако за счет выбора аппроксимации конвективных членов с первым порядком с учетом знака скорости скалярные прогонки становятся хорошо обусловленными и не имеют ограничений на шаги сетки в отличие от симметричной аппроксимации первых производных. При несогласованной аппроксимации стабилизирующего оператора и правой части устойчивость разностной схемы (11) понижается. При получении стационарного решения все уравнения решаются до установления, а выбор коэффициента сжимаемости ϵ влияет лишь на скорость сходимости. Но при решении нестационарной задачи необходимо провести несколько расчетов с различными значениями коэффициента ϵ, после чего решение уравнений Навье–Стокса получают как экстраполяцию решений на значение $\epsilon = 0$.

Наряду с расщеплением по направлениям как в схеме расщепления (5) или как в схеме приближенной факторизации (11) можно построить схему с расщеплением операторов по физическим процессам. Перепишем исходные уравнения в виде расщепления операторов по физическим процессам

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{l=1}^{2} B^l \mathbf{f} = 0, \quad B^l = \sum_{j=2}^{2} B_j^l, \tag{13}$$

где

$$B_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \nu \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} & 0 \\ 0 & 0 & v_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \nu \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} \end{pmatrix},$$

$$B_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{\epsilon}\delta_j^1 & \frac{p}{\epsilon}\delta_j^2 \\ \delta_j^1 & 0 & 0 \\ \delta_j^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

B^1 — оператор, учитывающий конвективные и вязкие члены по пространственным переменным x_j, а оператор B^2 — члены с давлением в уравнениях движения и уравнение неразрывности. Тогда разностная схема

$$\prod_{j=1}^{2}(I + \tau\alpha B^j)\Delta\mathbf{f}^n = -\tau\mathbf{W}^n \tag{14}$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\xi}^n = -\tau\mathbf{W}^n, \\ (I + \tau\alpha B_h^1)\boldsymbol{\xi}^{n+1/2} = \boldsymbol{\xi}^n, \\ (I + \tau\alpha B_h^2)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \boldsymbol{\xi}^{n+1/2}, \\ \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \boldsymbol{\xi}^{n+1} \end{gathered} \tag{15}$$

аппроксимирует уравнение (4) с порядком $O(\tau^m + h^k)$. Здесь $B_h^j = B^j + O(h^k)$. На первом дробном шаге схемы (15) система разностных уравнений

$$\xi_p^{n+1/2} = \xi_p^n,$$

$$[I + \tau\alpha\sum_{j=1}^{2}(v_j^n\Lambda_j - \nu\Lambda_{jj})])\xi^{n+1/2} = \xi_l^n \quad (l = 1, 2)$$

решается независимо для каждой компоненты ξ_l. На втором дробном шаге решение системы уравнений

$$\begin{gathered} \xi_p^{n+1} + \tau\alpha\frac{p^*}{\epsilon}\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\xi_j^{n+1} = \xi_p^{n+1/2}, \\ \xi_l^{n+1} + \tau\alpha\delta_l^j\bar{\Lambda}\xi_p^{n+1} = \xi_l^{n+1/2} \quad (l = 1, 2) \end{gathered} \tag{16}$$

сводится к решению уравнений Пуассона

$$[I - \tau^2\alpha^2\frac{p^*}{\epsilon}\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\bar{\Lambda}_j]\xi_p^{n+1} = \xi_p^n - \tau\alpha\frac{p^*}{\epsilon}\sum_{j=1}^{2}\Lambda_j\xi_j^{n+1/2},$$

полученному из уравнений (16) исключением компонент ξ_l^{n+1} из уравнения неразрывности, и явному вычислению компонент

$$\xi_l^{n+1} = \xi_l^{n+1/2} - \tau\alpha\delta_l^j \bar{\Lambda}_j \xi_p^{n+1}$$

после нахождения ξ_p^{n+1}. Таким образом, реализация схемы приближенной факторизации сводится к независимому решению уравнений для каждой компоненты вектора искомых функций f.

4.3. Диссипативные свойства схем

Диссипативные свойства построенных выше схем (5)–(7) и (11) для численного решения уравнений Навье–Стокса с искусственной сжимаемостью близки к свойствам схем для численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа. Остановимся на свойствах схемы приближенной факторизации с расщеплением по физическим процессам (14). Введем обозначения

$$Q = \tau\alpha \sum_{j=1}^{2} (v_j \Lambda_j - \nu \Lambda_{jj}), \quad L_j = \frac{\tau\alpha}{\epsilon} p \sum_{j=1}^{2} \Lambda_j, \quad \bar{L}_j = \tau\alpha\bar{\Lambda}_j. \tag{17}$$

Тогда стабилизирующий оператор нефакторизованной схемы представляется в виде

$$C_0 = \tau\alpha(B_1 + B_2) = \begin{pmatrix} 0 & L_1 & L_2 \\ \bar{L}_1 & 1+Q & 0 \\ \bar{L}_2 & 0 & 1+Q \end{pmatrix}.$$

В схеме приближенной факторизации (14) возникают дополнительные члены $O(\tau^2)$ в уравнениях движения, так как

$$C_1 = (I + \tau\alpha B^1)(I + \tau\alpha B^2) = C_0 + D,$$

где

$$D = \tau^2\alpha^2 B_1^1 B_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Q\bar{L}_1 & 0 & 0 \\ Q\bar{L}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если в схеме (15) поменять первый шаг на второй, а второй на первый, то диссипативная матрица равна

$$D = \tau^2\alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & L_1 Q & L_2 Q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

т. е. дополнительные члены возникают лишь в уравнении неразрывности. В разностной схеме расщепления (5) и в схеме приближенной факторизации (11) дополнительные члены порядка $O(\tau^2)$ возникают во всех уравнениях Навье–Стокса. Таким образом, разностная схема (14) с расщеплением операторов по физическим прцессам по своим свойствам наиболее близки к нефакторизованной схеме, а ее реализацияя сводится к независимому решению отдельных уравнений, а не системы в целом.

Библиографический список

1. *Андерсон Д. и др.* Вычислительная гидродинамика и теплообмен. / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. М. Флетчер. М.: Мир, 1991. 723 с.

2. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 44 с.

3. *Бахвалов Н. С. и др.* Численные методы. / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987. 598 с.

4. *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.

5. *Бим Р. М., Уорминг Р. Ф.* Неявная факторизованная схема для уравнений Навье—Стокса течений сжимаемого газа. // Ракет. техника и космонавтика. 1978. т. 18. № 4. С. 154–156.

6. *Гильманов А. Н.* Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Наука, 2000. 248 с.

7. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы: (Введение в теорию). М.: Наука, 1973. 400 с.

8. Численные методы решения многомерных задач газовой динамики. / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. М.: Наука, 1989. 614 с.

9. *Карамышев В. Б.* Монотонные схемы и их приложения в газовой динамике. Новосибирск: НГУ, 1994. 109 с.

10. *Ковеня В. М.* Методы вычислений (доп. главы). Новосибирск: НГУ, 1995. 92 с.

11. *Ковеня В. М. и др.* Применение метода расщепления в задачах аэродинамики / В. М. Ковеня, Г. А. Тарнавский, С. Г. Черный. Новосибирск: Наука, 1990. 243 с.

12. *Ковеня В. М., Яненко Н. Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981. 304 с.

13. *Лисейкин В. Д.* Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // Журн. вычис. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 1. С. 3–41.

14. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.

15. *Марчук Г. И.* Методы вычисл. математики. М.: Наука, 1980. 536 с.

16. *Он же.* Методы расщепления и переменных направлений. М: ОВМ АН СССР, 1986. 334 с.

17. *Марчук Г. И., Шайдуров В. В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 319 с.

18. *Паасонен В. И.* Схема третьего порядка аппроксимации на неравномерной сетке для уравнений Навье–Стокса // Вычисл. технологии.

2000. Т. 5, № 5. С. 78-86.

19. *Пасконов В. Н. и др.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. Н. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. М.: Наука, 1984. 285 с.

20. *Пейре Р., Тейлор Т. Д.* Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л: Гидрометеоиздат, 1986. 320 с.

21. *Пинчуков В. И., Шу Ч.-В.* Численные методы высших порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 231 с.

22. *Рожденственский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.

23. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 592 с.

24. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 614 с.

25. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 501 с.

26. *Стегер Д. Л.* Неявный конечно-разностный метод расчета двумерного обтекания тел с произвольной геометрией // Ракет. техника и космонавтика. 1978. Т. 16, № 7. С. 51–80.

27. *Толстых А. И.* Компактные разностные схемы и их приложения к проблемам аэродинамики. М: Наука, 1990. 230 с.

28. *Тушева Л. А. и др.* О построении разностных схем повышенного порядка аппроксимации на основе дифференциальных следствий. Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики: Сб. науч. работ / Л. А. Тушева, Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1975. С. 184–195.

29. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. М.: Мир, 1991. 552 с.

30. *Шенг Дж. С.* Обзор численных методов решения уравнений Навье—Стокса для течений сжимаемого газа // Аэрокосмическая техника. 1986. № 2. С. 65–92.

31. *Шокин Ю. И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1979. 224 с.

32. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. 196 с.

33. *Beam R. M., Warming R. F.* An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form // J. of Comput. Phys. 1976. Vol. 22. P. 87–108.

34. *Briley W. R. McDonald H.* Solution of the 3D Compressible Navier–Stokes Equations by an Implicit Technique // Lect. Notes in Phys. 1975. Vol. 35. P. 150–178.

35. *Chorin A. J.* A numerical method for solving incompessible viscons fow problems // J. Comput. Phys. 1967. № 2. P. 12–26.

Оглавление

Предисловие 3
Введение. Технологическая цепочка моделирования 5
Глава I. Численные алгоритмы решения многомерных задач 10
§ 1. Физико-математические модели. Основные уравнения 10
1.1. О физико-математических моделях 10
1.2. Основные уравнения 14
§ 2. Основные понятия теории разностных схем 18
2.1. Сетка 18
2.2. Сеточные функции 21
2.3. Аппроксимация 22
2.4. Разностная схема 25
2.5. Сходимость и устойчивость 27
§ 3. Требования к численным алгоритмам 28
§ 4. Метод расщепления 37
4.1. Слабая аппроксимация 37
4.2. Метод расщепления по направлениям для параболических и гиперболических систем 41
§ 5. Метод предиктор–корректор 44
5.1. Схемы для одномерных задач 46
5.2. Многомерный случай 52
§ 6. Метод факторизации 55
6.1. Полная и приближенная факторизация 55
6.2. Устойчивость схем в многомерном случае 59
6.3. Реализация краевых условий 65
§ 7. Метод линеаризации при решении нелинейных задач 67
7.1. Одномерный случай 68
7.2. Многомерный случай 72
Глава II. Некоторые методы повышения точности решений 77
§ 1. Неравномерные сетки 78
1.1. Преобразование координат 80
1.2. Адаптивные сетки. 82
§ 2. Схемы повышенного порядка 84
2.1. Аппроксимация на расширенном шаблоне 85
2.2. Компактные схемы. Принципы построения 87
2.3. Компактные схемы. Многомерный случай 91
Глава III. Разностные методы решения задач аэро- и гидродинамики 95
§ 1. Схемы приближенной факторизации 96

1.1. Схема Бима—Уорминга для решения уравнений газовой динамики 96
1.2. Схема Стегера—Уорминга 98
1.3. Схема решения уравнений Навье—Стокса 100
§ 2. Метод расщепления 104
2.1. Расщепление уравнений в дифференциальной форме 104
2.2. Разностные схемы с расщеплением операторов 108
2.3. Схемы с оптимальным расщеплением операторов 112
2.4. Схема предиктор–корректор 116
2.5. Схемы с расщеплением по физическим процессам 117
2.6. Диссипативные свойства разностных схем 120
§ 3. Методы решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости 121
3.1. Схема в переменных функция тока—вихрь 123
3.2. Схема расщепления 125
3.3. Схема приближенной факторизации 128
§ 4. Метод искусственной сжимаемости 133
4.1. Схема расщепления по направлениям 134
4.2. Схема приближенной факторизации 136
4.3. Диссипативные свойства схем 139
Библиографический список 141