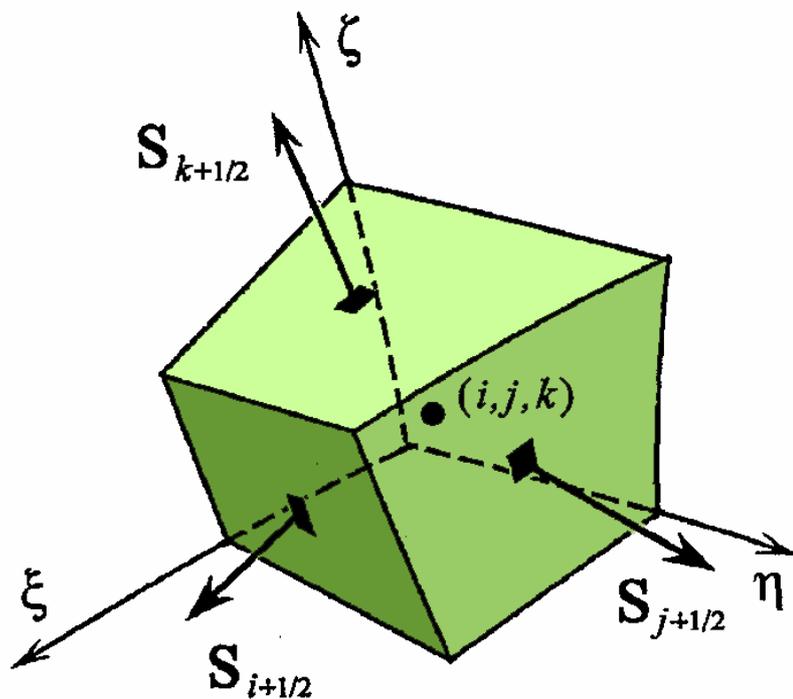


В. М. КОВЕНЯ

Д. В. ЧИРКОВ

# МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. М. Ковеня

Д. В. Чирков

**Методы конечных разностей  
и конечных объемов для решения задач  
математической физики**

Учебное пособие

Новосибирск

2013

#### Аннотация.

В учебном пособии излагаются и анализируются современные методы и подходы для численного решения систем уравнений в частных производных. Основное внимание уделяется построению экономичных алгоритмов для решения многомерных задач. Излагаются основы метода конечных объемов, как основного подхода к построению консервативных разностных схем. Обсуждаются особенности исследования аппроксимации, устойчивости и реализации вычислительных алгоритмов. Рассмотрены схемы конечных объемов для решения уравнений газовой динамики и уравнений Навье-Стокса движения несжимаемой жидкости, лежащие в основе современных программных пакетов. Пособие разработано в рамках выполнения Программы развития НГУ как национального исследовательского университета.

## Содержание

Введение .....	5
1. Уравнения математической физики .....	7
1.1. Уравнения Навье-Стокса сжимаемого газа в 3D случае .....	7
1.2. Уравнения Навье-Стокса несжимаемой жидкости в 3D случае .....	8
1.3. Уравнения мелкой воды.....	9
2. Основные понятия и подходы к исследованию разностных схем.....	10
2.1. Сетки и сеточные функции.....	10
2.2. Аппроксимация дифференциальных операторов.....	11
2.3. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной схемой.....	12
2.3.1. Определения.....	12
2.3.2. Замечание о выборе базовой точки.....	13
2.3.3. Пример исследования аппроксимации.....	13
2.3.4. Замечание о регулярности схемы .....	15
2.4. Теорема о сходимости.....	16
2.5. Исследование устойчивости.....	16
2.5.1. Понятие линейной разностной схемы .....	17
2.5.2. Необходимый спектральный признак Неймана .....	17
2.6. Скалярная, векторная и матричная прогонка .....	19
2.7. Экономичность .....	20
2.8. Метод установления.....	22
3. Явные схемы .....	24
3.1. Определение и примеры .....	24
3.2. Схемы Рунге-Кутты.....	26
3.3. Достоинства и недостатки явных схем.....	27
4. Консервативность.....	28
4.1. Дивергентный вид системы уравнений.....	28
4.2. Консервативные схемы .....	28
5. Противопотоковые схемы.....	32
5.1. Схема для скалярного уравнения.....	32
5.2. Схема для системы уравнений с постоянными коэффициентами.....	33
5.3. Схема для нелинейной гиперболической системы .....	35
5.4. Метод Годунова.....	36
5.4.1. Задача о распаде произвольного разрыва .....	36
5.4.2. Схема Годунова .....	38
5.4.3. Частный случай: схема Годунова для $A=\text{const}$ .....	40
5.5. Схемы, основанные на приближенном решении задачи о распаде разрыва .....	41
5.5.1. Простые схемы.....	41
5.5.2. Схема Роу .....	42
6. Неявные схемы .....	43
6.1. Схема с весами.....	43
6.2. Метод линеаризации неявных схем.....	44
6.3. Метод предиктор-корректор.....	45
6.4. Неявные схемы в многомерном случае.....	47
7. Экономичные неявные схемы для многомерных уравнений.....	50
7.1. Метод расщепления Яненко (метод дробных шагов).....	50
7.2. Метод приближенной факторизации.....	54
7.3. Метод предиктор-корректор.....	58
7.4. Метод релаксаций Гаусса-Зейделя и его частный случай – приближенная LU-факторизация .....	60

7.5. Сравнение методов.....	62
8. Разностные методы решения одномерных уравнений газовой динамики.....	63
8.1. Схемы с весами.....	63
8.2. Схемы приближенной факторизации.....	66
9. Метод конечных объемов.....	70
9.1. Интегральный закон сохранения.....	70
9.2. Дискретизация интегрального закона сохранения.....	70
9.3. МКО для уравнения диффузии.....	72
9.4. Аппроксимация потоков через грани ячейки.....	72
9.4.1. Симметричная аппроксимация.....	73
9.4.2. Противопотоковая аппроксимация 1-го порядка.....	73
9.5. Связь метода конечных объемов и метода конечных разностей.....	74
9.6. Вычисление геометрических величин.....	76
9.6.1. 2D случай.....	76
9.6.2. 3D случай.....	76
10. Схема конечных объемов для уравнений газовой динамики.....	78
11. Решение уравнений движения несжимаемой жидкости.....	82
11.1. Метод искусственной сжимаемости.....	82
11.2. Схема конечных объемов.....	82
11.3. Распространение схемы на нестационарный случай.....	84
Приложение.....	85
Матрица Якоби A для уравнений газовой динамики.....	85
Матрица Якоби A для уравнений движения несжимаемой жидкости.....	85
Литература.....	86

## Введение

Математическое моделирование, как один из способов получения новых знаний, сегодня является одним из основных методов исследования в различных областях естествознания. Движение газа в аэродинамической трубе, распространение волн цунами, разлет плазмы в ловушке, изменение погоды и другие многочисленные явления в науке и технике описываются различными математическими моделями, представляемыми в виде интегральных или дифференциальных уравнений в частных производных. Современные вычислительные алгоритмы позволяют с достаточной точностью решать эти системы уравнений в двумерном и трехмерном приближениях при решении различных классов задач с учетом реальных геометрий и нестационарности процесса. Дальнейший прогресс в развитии численных методов связан с разработкой новых численных алгоритмов и ростом быстродействия и мощностей современной вычислительной техники.

Настоящее учебное пособие призвано познакомить студентов с современными численными методами и подходами, применяющимися сегодня для решения многомерных систем уравнений, научить их строить и исследовать эффективные вычислительные алгоритмы. В нем отражены основные тенденции развития численных алгоритмов, сформировавшиеся за последние 20 лет, такие как консервативность, противопотоковая аппроксимация, параллелизация алгоритмов и т. д.

Центральное место среди математических моделей для описания различных физических процессов занимают уравнения механики сплошных сред – уравнения Навье-Стокса, описывающие движение жидкости или газа. Они выражают законы сохранения, например, законы сохранения массы, импульсов и энергии (для моделей сплошной среды) и являются наиболее общей формой описания движения сред и справедливы как для непрерывных, так и для разрывных функций. Это уравнения гиперболического, параболического или смешанного типа. Наиболее эффективными и универсальными вычислительными алгоритмами для их решения являются методы конечных разностей и конечных объемов. Их рассмотрению и посвящено данное пособие. Авторам хотелось дать систематическое изложение современных численных методов решения задач математической физики, провести их сравнительный анализ, подчеркнув достоинства и недостатки отдельных методов или алгоритмов.

Современные задачи математической физики предъявляют различные требования к применяемым численным алгоритмам, главными из которых являются

- высокий порядок аппроксимации (обеспечивает получение более точного решения на достаточно грубых сетках);
- устойчивость алгоритмов, позволяющая проводить расчеты с большими шагами по времени);
- консервативность (корректное разрешение разрывных решений);
- монотонность (отсутствие осцилляций в областях больших градиентов);
- экономичность (как минимизация числа арифметических операций на узел сетки).
- универсальность алгоритмов ( возможность их распространения на многомерные (2D, 3D задачи).
- адаптации алгоритмов на нерегулярные или неструктурированные сетки.
- возможность распараллеливания вычислений (при использовании нескольких вычислительных процессоров / ядер).

Способы обеспечения этих требований и рассмотрены в пособии.

Для ряда задач механики сплошных сред оказываются эффективны специальные приемы, которые упрощают вычисление. Например, для двумерных течений несжимаемой жидкости возможен переход к переменным «функция тока – вихрь», что сокращает количество неизвестных с трех до двух. Однако подобные подходы не являются

универсальными и не затрагиваются в данном пособии. В пособии рассмотрены универсальные методы и подходы, применимые для широкого круга задач математической физики и легко распространяемые на многомерный случай.

При изложении теоретического материала авторы предполагали, что читатель знаком с основами численных методов для уравнений в частных производных, см., например, [4, 5, 6]. При написании пособия авторы старались более детально рассмотреть те вопросы, которые часто ускользают от внимания студентов. Это относится к понятиям консервативности, экономичности алгоритмов, к методам исследования устойчивости схем для многомерных уравнений и систем.

В первой части пособия дается краткое напоминание основных понятий разностных схем. Обсуждаются способы исследования аппроксимации и устойчивости. Излагаются современные подходы к построению явных и неявных схем. Анализируются их достоинства и недостатки. Вводится понятие консервативности. Большое внимание уделяется построению противопотоковых разностных схем. Изложение этих вопросов ведется в предположении равномерной декартовой сетки. Анализ свойств разностных алгоритмов проводится на модельных (как правило, линейных) уравнениях гиперболического и параболического типа.

Далее обсуждаются особенности реализации неявных вычислительных алгоритмов в многомерном случае. Рассмотрены основные подходы построения неявных методов: метод расщепления, метод приближенной факторизации, метод Гаусса-Зейделя. Для всех рассмотренных алгоритмов указываются пути исследования аппроксимации и устойчивости. Отдельная проблема вычислительных методов – обобщение алгоритмов на случай решения задач в областях сложной формы с криволинейными границами. Как правило, расчет в таких областях осуществляется на криволинейных сетках, согласованных с границами расчетной области. Распространение численных алгоритмов, построенных для декартовой сетки, на такие задачи ведется либо переходом в криволинейную систему координат, либо методом конечных объемов, описанным в главе 9. В настоящее время метод конечных объемов является основным подходом к построению консервативных разностных схем на неравномерных, в том числе неструктурированных, сетках.

В последней части пособия приводятся примеры эффективных разностных схем для решения уравнений газовой динамики, уравнений Навье-Стокса вязкого теплопроводного газа и несжимаемой жидкости. Некоторые из этих алгоритмов стали классическими и легли в основу мощных коммерческих программных пакетов, таких как ANSYS CFX, Fluent, Numeca FINE Turbo. Понимание сути этих подходов важно для эффективного использования этих программных пакетов.

Авторы выражают благодарность С.Г. Черному за ценные замечания и полезные обсуждения отдельных теоретических вопросов.

# 1. Уравнения математической физики

Уравнения математической физики выводятся из фундаментальных законов сохранения массы, импульса, энергии, и т.д. Использование тех или иных упрощений, пренебрежение несущественными физическими процессами порождает многообразие уравнений, применимых для тех или иных задач. В дифференциальной форме уравнения математической физики представляют собой многомерные нелинейные системы уравнений в частных производных.

В общем случае будем обозначать их

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

где  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  – искомая вектор-функция, определенная в расчетной области  $\Omega$ ,  $L$  – дифференциальный оператор,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  – правая часть.

Ниже в качестве примера и рассмотрим уравнения Навье-Стокса, описывающие движение вязкого теплопроводного газа, уравнения Навье-Стокса несжимаемой вязкой жидкости и уравнения мелкой воды.

## 1.1. Уравнения Навье-Стокса сжимаемого газа в 3D случае

Уравнения Навье-Стокса, описывающие движение сжимаемого теплопроводного газа, имеют вид (см. [1])

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x_3} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{U}, U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3})$ ,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1^2 + p - \tau_{11} \\ \rho u_1 u_2 - \tau_{12} \\ \rho u_1 u_3 - \tau_{13} \\ (e + p)u_1 - q_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 - \tau_{12} \\ \rho u_2^2 + p - \tau_{22} \\ \rho u_2 u_3 - \tau_{23} \\ (e + p)u_2 - q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} \rho u_3 \\ \rho u_1 u_3 - \tau_{13} \\ \rho u_2 u_3 - \tau_{23} \\ \rho u_3^2 + p - \tau_{33} \\ (e + p)u_3 - q_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\rho$  – плотность [кг/м<sup>3</sup>],  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор скорости [м/с],  $p$  – давление [Па],  $e$  – полная энергия единицы объема [Дж/м<sup>3</sup>], равная  $e = \rho\varepsilon + \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2}$ , где  $\varepsilon$  [Дж/кг] – внутренняя энергия единицы массы. Уравнение состояния в случае идеального политропного газа с показателем адиабаты  $\gamma = const$  имеет вид

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений выражаются в виде линейной комбинации производных от компонент вектора скорости:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (1.2)$$

где  $\lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu$ , а  $\mu$  и  $\mu'$  – коэффициенты первый и второй вязкости, соответственно. В

уравнении сохранения энергии члены  $q_i$  имеют вид

$$q_i = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (1.3)$$

где  $T$  – температура [К],  $k$  – коэффициент теплопроводности. В общем случае  $\mu = \mu(\rho, T)$ ,  $k = k(T)$ .

Система (1.1) выражает закон сохранения массы (первое уравнение системы), импульса (2-4 уравнения) и энергии (последнее уравнение системы).

В случае, если  $\mu \equiv 0$  и  $k \equiv 0$ , т.е. вязкость и теплопроводность не учитываются, мы получаем *уравнения газовой динамики*. Для случая  $N$  пространственных направлений уравнения газовой динамики можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{U})}{\partial x_i} = 0, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \vdots \\ \rho u_N \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i} p \\ \vdots \\ \rho u_N u_i + \delta_{Ni} p \\ (e + p) u_i \end{pmatrix}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Уравнения газовой динамики являются гиперболической системой уравнений.

## 1.2. Уравнения Навье-Стокса несжимаемой жидкости в 3D случае

Движение несжимаемой жидкости с постоянной плотностью  $\rho = \rho_0 = const$  описывается уравнениями Навье-Стокса несжимаемой жидкости

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \equiv \text{div}(\mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{cases} \quad (1.5)$$

Система (1.5) представляет собой уравнение неразрывности и три уравнения сохранения импульса. Неизвестные здесь – давление  $p$  [Па] и компоненты вектора скорости  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  [м/с].  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости. Система (1.5) может быть представлена в векторном виде

$$\mathbf{R}^t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x_3} = 0$$

где  $\mathbf{R}^{-1} = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$ ,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1^2 + \hat{p} - \tau_{11} \\ u_1 u_2 - \tau_{12} \\ u_1 u_3 - \tau_{13} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 u_2 - \tau_{12} \\ u_2^2 + \hat{p} - \tau_{22} \\ u_1 u_3 - \tau_{23} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_1 u_3 - \tau_{13} \\ u_2 u_3 - \tau_{23} \\ u_3^2 + \hat{p} - \tau_{33} \end{pmatrix},$$

$$\hat{p} = \frac{p}{\rho_0}, \quad \tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Система (1.5) имеет смешанный тип. Уравнение неразрывности – эллиптического типа, уравнения сохранения импульса – параболического типа.

В случае  $\mu \equiv 0$  получаем уравнения Эйлера, описывающие движение идеальной невязкой жидкости.

### 1.3. Уравнения мелкой воды

Рассмотрим движение жидкости со свободной поверхностью в водоеме. В общем случае такое движение описывается трехмерной системой уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости (1.5). Однако, в ряде практически важных задач – например, в задаче о разрушении плотины, в задаче о распространении волн цунами в океане – глубина водоема  $h_d$  много меньше его горизонтальных масштабов. В этом случае можно сделать следующие предположения.

1. Горизонтальные компоненты скорости  $(u, v)$  не зависят от глубины.
2. В любой момент времени давление распределено по глубине гидростатически, т.е.  $\frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} = -\rho_0 g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения.
3. Давление на свободной поверхности постоянно.
4. Вязкостью потока можно пренебречь:  $\mu \equiv 0$ .

С учетом сделанных предположений система уравнений Навье-Стокса (1.5) упрощается. А именно, уравнение неразрывности интегрируется по высоте, в результате чего вертикальная скорость  $w$  (не равная нулю!) уходит из системы. В уравнениях сохранения импульса переходят от давления  $p$  к высоте свободной поверхности  $\eta$ . В результате мы получаем двумерную систему уравнений *мелкой воды*:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(\eta + h_d)u}{\partial x} + \frac{\partial(\eta + h_d)v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

Неизвестные здесь  $\eta$  – возвышение свободной поверхности,  $(u, v)$  – горизонтальные компоненты скорости. Глубина дна  $h_d = h_d(x, y) \geq 0$  предполагается известной функцией горизонтальных координат  $x, y$  (рис. 1). Необходимо отметить, что в случае произвольной функции  $h_d(x, y)$  уравнения мелкой воды не приводятся к дивергентному виду (см. п. 4.1).

Уравнения мелкой воды имеют гиперболический тип.

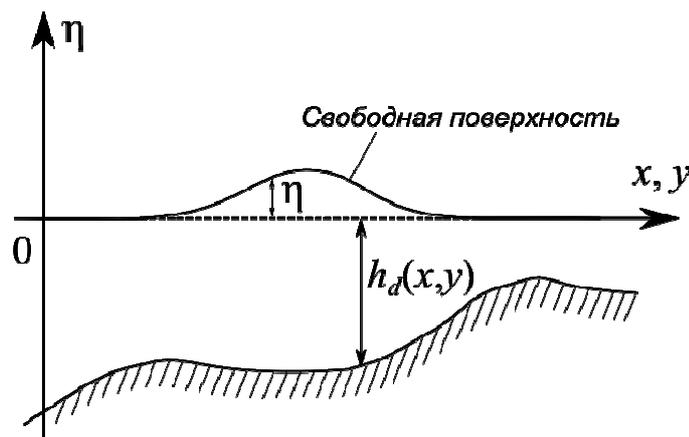


Рис. 1. Возвышение свободной поверхности и глубина дна в системе уравнений мелкой воды.

## 2. Основные понятия и подходы к исследованию разностных схем

В данном параграфе дается краткое напоминание основных понятий разностных схем. Более детально эти вопросы изложены, например, в пособиях [4–6] и монографиях [7–8].

### 2.1. Сетки и сеточные функции

Область непрерывного изменения аргумента, в которой отыскивается решение дифференциальных уравнений, заменяется *расчетной сеткой* – дискретным множеством точек, соединенных непересекающимися отрезками. Расчетную сетку можно трактовать как разбиение области на ячейки. В конечно-разностных методах решение отыскивается в узлах сетки, в методах конечных объемах – в «центрах» ячеек.

Назовем расчетную сетку *структурированной* (или *регулярной*), если она взаимно однозначно отображается на прямоугольную сетку в единичном кубе с сохранением порядка узлов сетки (рис. 2, а, б). Структурированные сетки могут быть равномерными (постоянный шаг сетки) и неравномерными. Также структурированные сетки можно разделить на *декартовы*, то есть прямоугольные (рис. 2, а), и криволинейные (рис. 2, б). Все остальные сетки назовем *неструктурированными* (рис. 2, в).

Достоинство структурированных сеток проявляется в возможности более точной аппроксимации производных. Однако такие сетки сложно строить в областях сложной геометрии.

Основным преимуществом неструктурированных сеток является простота их построения в областях произвольной геометрии. Платой за это служит более низкая фактическая точность решений. Построение разностных схем для неструктурированных сеток обычно ведется в рамках метода конечных объемов, рассмотренного в п. 9.

В настоящем пособии мы ограничимся случаем структурированных сеток: равномерной декартовой для схем на основе метода конечных разностей, и криволинейной для схем на основе метода конечных объемов.

Итак, рассмотрим равномерную декартову сетку в  $N$ -мерной прямоугольной области с шагами. Узлы  $(j_1, \dots, j_N)$  этой сетки имеют координаты  $x_1 = j_1 h_1, \dots, x_N = j_N h_N$ , где  $h_k = \text{const}$  – шаг сетки в  $k$ -м пространственном направлении. Такую сетку будем обозначать через  $\Omega_h$ , где  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)$  – вектор пространственных шагов сетки. Наряду с пространственной сеткой  $\Omega_h$  формально можно рассмотреть пространственно-временную сетку  $\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ , где  $\Omega_\tau = \{t^0, t^1, \dots, t^n, \dots\}$  – сетка (разбиение) на временной оси. Будем предполагать, что  $t^n = n\tau$ , где  $\tau$  – шаг по времени.

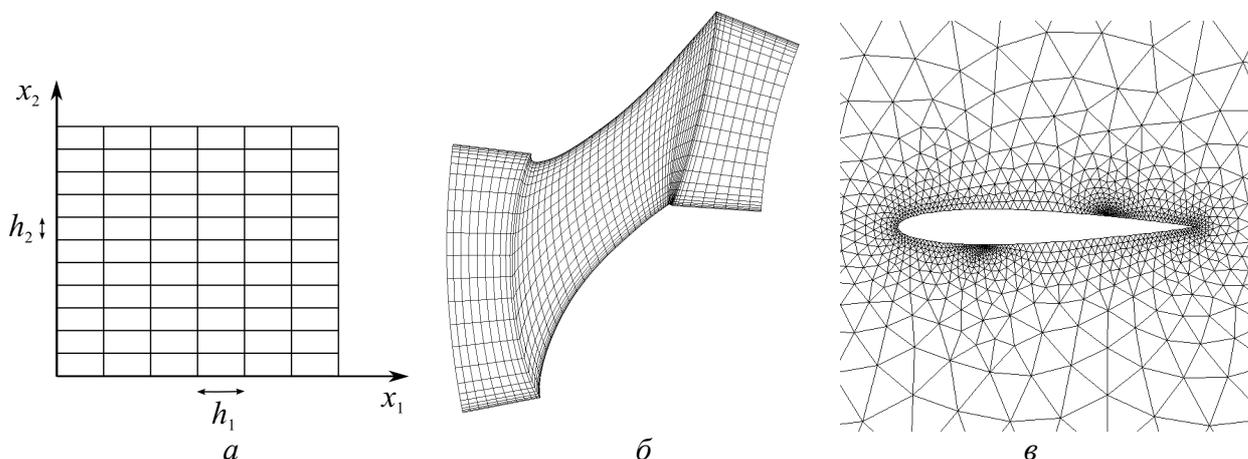


Рис. 2. Примеры сеток: а, б – структурированные декартова и криволинейная сетки;

$\mathcal{G}$  – неструктурированная сетка.

Функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки  $\Omega_{h,\tau}$  будем называть *сеточными функциями*. Сеточные функции будем обозначать  $u_h$  или  $u_h^n$ , если речь идет о сеточной функции на временном слое  $n$ . Значение сеточной функции в узле сетки  $(x_j, t^n)$  будем обозначать  $u_j^n$ . В случае двух или трех пространственных направлений будем использовать обозначения  $u_{j,k}^n$ ,  $u_{i,j,k}^n$ , соответственно, или как  $u^n$ , опуская нижние индексы.

Оценку близости непрерывной функции  $u = u(\mathbf{x}, t)$  и сеточной функции  $u_h$  будем осуществлять путем *проектирования* («сведения») функции  $u$  в пространство сеточных функций. Оператор проектирования функции непрерывного аргумента на сетку  $\Omega_{h,\tau}$  будем обозначать  $(\cdot)_h$ . В методе конечных разностей, как правило, используется следующий очевидный оператор проектирования:

$$((u)_h)_j^n = u(x_j, t^n).$$

Возможны и другие способы проектирования:

$$((u)_h)_j^n = \frac{1}{h} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} u(x, t^n) dx.$$

Близость в пространстве сеточных функций определяется скалярной величиной – нормой  $\|\cdot\|$ . Наиболее часто используется сеточный аналог нормы  $C$  в пространстве непрерывных функций:

$$\|u_h^n\| = \max_j |u_j^n|$$

(для фиксированного временного слоя).

## 2.2. Аппроксимация дифференциальных операторов

При переходе от дифференциальной задачи к разностной все дифференциальные операторы, входящие в уравнения, заменяются их разностными аналогами. Пусть  $L$  – дифференциальный оператор, действующий в пространстве функций непрерывного аргумента,  $L_h$  – соответствующий разностный оператор, действующий в пространстве сеточных функций.

**Определение.** Разностный оператор  $L_h$  *аппроксимирует* дифференциальный оператор  $L$ , если

$$\|L_h(u)_h - (Lu)_h\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0.$$

Если сверх того имеет место неравенство

$$\|L_h(u)_h - (Lu)_h\| \leq C(\tau^m + h^k),$$

то говорят, что  $L_h$  аппроксимирует оператор  $L$  с порядком  $m$  по  $\tau$  и  $k$  по  $h$ .

В таблице 1 показаны простейшие способы аппроксимации первой производной  $du/dx$  на равномерной сетке.

Таблица 1. Разностные операторы, аппроксимирующие  $du/dx$ .

Обозначение	Вид разностного оператора и главный член погрешности аппроксимации	Порядок аппроксимации
$\Lambda_-$	$\Lambda_- u_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = (u_x)_j - \frac{h}{2}(u_{xx})_j + \frac{h^2}{6}(u_{xxx})_j + O(h^3)$	$O(h)$

$\Lambda_+$	$\Lambda_+ u_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} = (u_x)_j + \frac{h}{2}(u_{xx})_j + \frac{h^2}{6}(u_{xxx})_j + O(h^3)$	$O(h)$
$\Lambda$	$\Lambda u_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = (u_x)_j + \frac{h^2}{6}(u_{xxx})_j + O(h^4)$	$O(h^2)$
$\Lambda_{2-}$	$\Lambda_{2-} u_j = \frac{3u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{2h} = (u_x)_j - \frac{h^2}{3}(u_{xxx})_j + O(h^3)$	$O(h^2)$
$\Lambda_{2+}$	$\Lambda_{2+} u_j = \frac{-3u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}}{2h} = (u_x)_j - \frac{h^2}{3}(u_{xxx})_j + O(h^3)$	$O(h^2)$

Для аппроксимации второй производной  $\partial^2/\partial x^2$  как правило используется центральная разность, имеющая второй порядок аппроксимации на равномерной сетке.

$$\Lambda_{11} u_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = (u_{xx})_j + \frac{h^2}{12}(u_{xxxx})_j + O(h^4) = (u_{xx})_j + O(h^2).$$

## 2.3. Аппроксимация дифференциальной задачи разностной схемой

### 2.3.1. Определения

Пусть для дифференциальной задачи

$$Lu = f \tag{2.1}$$

построена разностная схема

$$L_h u_h = f_h. \tag{2.2}$$

**Определение.** Разностная схема  $L_h u_h = f_h$  аппроксимирует дифференциальную задачу  $Lu = f$  на произвольной гладкой функции  $v$ , если

$$\|L_h(v)_h - (Lv)_h + (f)_h - f_h\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0.$$

Если сверх того имеет место неравенство

$$\|L_h(v)_h - (Lv)_h + (f)_h - f_h\| \leq C(\tau^m + h^k),$$

то говорят, что схема аппроксимирует с порядком  $m$  по  $\tau$  и  $k$  по  $h$ .

**Определение.** Разностная схема  $L_h u_h = f_h$  аппроксимирует дифференциальную задачу  $Lu = f$  на ее решении  $u(x, t)$ , если

$$\|L_h(u)_h - f_h\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0.$$

Если сверх того имеет место неравенство

$$\|L_h(u)_h - f_h\| \leq C(\tau^m + h^k),$$

то говорят, что схема (2.2) аппроксимирует задачу (2.1) на ее решении с порядком  $m$  по  $\tau$  и  $k$  по  $h$ .

**Определение.** Сеточная функция

$$\psi_h = L_h(v)_h - (Lv)_h + (f)_h - f_h$$

называется *погрешностью аппроксимации* разностной схемы.

Как правило, исследование аппроксимации разностной схемы относительно несложно. Подставляем в разностную схему произвольную гладкую функцию, сведённую

на сетку. Далее разлагаем в ряд Тейлора все входящие в шаблон разностной схемы значения относительно какого-нибудь точки (назовем эту точку *базовой*). Собираем вместе все члены и получаем выражение для погрешности аппроксимации  $\psi_h$ . Отметим здесь лишь несколько нюансов, касающихся исследования аппроксимации.

В случае исследования аппроксимации *на решении* (а именно ее и достаточно показать для обеспечения сходимости) можно использовать не только само уравнение  $Lu = f$ , но и дифференциальные следствия из него.

### 2.3.2. Замечание о выборе базовой точки

Порядок аппроксимации *отдельного дифференциального оператора*  $L$  разностным оператором  $L_h$  **зависит** от того, в какой точке мы его проверяем, то есть зависит от

выбора базовой точки. Например, оператор  $\Lambda_- u_j^n \equiv \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}$  аппроксимирует производную  $\frac{\partial u}{\partial x}$  в точке  $(x_j, t^n)$  с порядком  $O(h)$ , в точке  $\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}, t^n\right)$  - с порядком  $O(h^2)$ , а в точке  $(x_j, t^{n+1})$  - с порядком  $O(h + \tau)$ .

Порядок аппроксимации всего дифференциального уравнения  $Lu = f$  разностной схемой  $L_h u_h = f_h$  на произвольной гладкой функции также **зависит** от выбора базовой точки.

Однако, порядок аппроксимации всего дифференциального уравнения разностной схемой *на решении не зависит* от выбора базовой точки. Базовая точка может находиться в любом узле сетки, даже вне шаблона и даже вне сетки! Порядок аппроксимации на решении дифференциального уравнения от этого не изменится. Этот факт напрямую следует из определения погрешности аппроксимации на решении. Действительно, если  $u = O(1)$  – точное решение дифференциальной задачи, то погрешность аппроксимации на решении – это единственная сеточная функция

$$\psi_h = L_h(u)_h - f_h.$$

Порядок значения этой функции по отношению к  $\tau$  и  $h$ , например,  $O(\tau^m + h^k)$ , очевидно, не зависит от того, в каком узле мы будем на него смотреть.

Итак, при исследовании аппроксимации разностной схемы на решении базовую точку выбирают исключительно из соображений удобства, простоты вычислений.

### 2.3.3. Пример исследования аппроксимации

В большинстве случаев не удастся выбрать базовую точку так, чтобы остальные значения представлялись в виде рядов Тейлора по одному направлению. Если в этом случае действовать «в лоб», то значения сеточной функции в узлах сетки, не совпадающих с базовым, придется разлагать в ряд Тейлора как функции нескольких переменных.

Другой подход – назовем его *операторным* – заключается в представлении сложных разностных операторов в виде суперпозиции нескольких более простых операторов, каждый из которых содержит сдвиги *только по одному* пространственному или временному направлению. Как правило, операторный подход быстрее приводит к ответу. Проиллюстрируем оба этих подхода на примере схемы с несогласованной аппроксимацией для уравнения теплопроводности  $u_t = u_{xx}$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h} (\Lambda_+ u_j^{n+1} - \Lambda_- u_j^n) = \frac{u_{j-1}^n - u_j^n - u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2}, \quad (2.3)$$

шаблон которой показан на рис. 3.

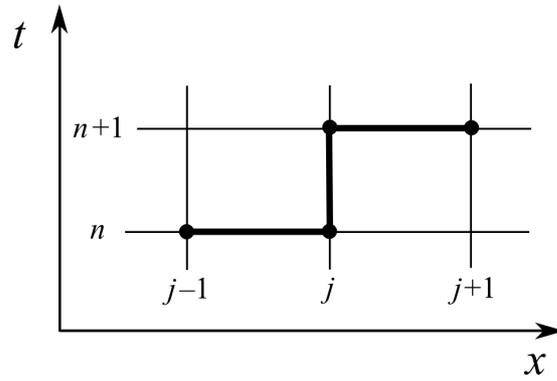


Рис. 3. Шаблон схемы (2.3).

Возьмем в качестве базовой точки узел  $(j, n)$ . Сначала исследуем аппроксимацию «в лоб»

$$\begin{aligned}
 u_{j-1}^n &= u_j^n - h(u_x)_j^n + \frac{h^2}{2!}(u_{xx})_j^n - \frac{h^3}{3!}(u_{xxx})_j^n + O(h^4) \\
 u_j^{n+1} &= u_j^n + \tau(u_t)_j^n + \frac{\tau^2}{2!}(u_{tt})_j^n + \frac{\tau^3}{3!}(u_{ttt})_j^n + O(\tau^4)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для разложения  $u_{j+1}^{n+1}$  вынуждены использовать ряд Тейлора для функции двух переменных:

$$\begin{aligned}
 u_{j+1}^{n+1} &= u(t^n + \tau, x_j + h) = u_j^n + \tau(u_t)_j^n + h(u_x)_j^n + \\
 &+ \frac{1}{2!}(\tau^2(u_{tt})_j^n + 2\tau h(u_{tx})_j^n + h^2(u_{xx})_j^n) + \\
 &+ \frac{1}{3!}(\tau^3(u_{ttt})_j^n + 3\tau^2 h(u_{ttx})_j^n + 3\tau h^2(u_{txx})_j^n + h^3(u_{xxx})_j^n) + \\
 &+ O(\tau^4 + h^4).
 \end{aligned}$$

Подставляя всё в правую часть схемы, после многочисленных сокращений, получаем:

$$\frac{1}{h}(\Lambda_+ u_j^{n+1} - \Lambda_- u_j^n) = (u_{xx})_j^n + \frac{\tau}{h}(u_{tx})_j^n + \frac{\tau}{2}(u_{ttx})_j^n + O\left(\frac{\tau^2}{h} + h^2\right). \tag{2.5}$$

Наконец, с учетом того, что

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = (u_t)_j^n + \frac{\tau}{2}(u_{tt})_j^n + O(\tau^2),$$

находим порядок аппроксимации разностной схемы на решении ( $u_t = u_{tx}$ ):

$$\psi = L_h u_h - f_h = -\frac{\tau}{h}(u_{tx})_j^n + O\left(\tau^2 + \frac{\tau^2}{h} + h^2\right) = O\left(\tau^2 + \frac{\tau}{h} + h^2\right).$$

Теперь посмотрим, как работает операторный подход. Учитывая (2.4), имеем:

$$\Lambda_+ u_j^{n+1} = \Lambda_+ \left( u_j^n + \tau(u_t)_j^n + O(\tau^2) \right) = \Lambda_+ u_j^n + \tau \Lambda_+ (u_t)_j^n + O(\tau^2).$$

Тогда правая часть схемы (2.3) есть

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(\Lambda_+ u_j^{n+1} - \Lambda_- u_j^n) &= \frac{1}{h}(\underbrace{\Lambda_+ u_j^n - \Lambda_- u_j^n}_{\Lambda_1 u_j^n}) + \frac{\tau}{h} \Lambda_+(u_t)_j^n + O\left(\frac{\tau^2}{h}\right) = \\
&= (u_{xx})_j^n + O(h^2) + \frac{\tau}{h} \left[ (u_{tx})_j^n + \frac{h}{2} (u_{txx})_j^n + O(h^2) \right] + O\left(\frac{\tau^2}{h}\right) = \\
&= (u_{xx})_j^n + \frac{\tau}{h} (u_{tx})_j^n + \frac{\tau}{2} (u_{txx})_j^n + O\left(\frac{\tau^2}{h} + h^2\right),
\end{aligned}$$

что совпадает с (2.5). Окончательно, как и в случае первого подхода, получаем, что порядок аппроксимации схемы (2.3) на решении равен  $\psi = O\left(\tau^2 + \frac{\tau}{h} + h^2\right)$ .

Заметим, что схема (2.3) является схемой с *условной аппроксимацией*. Если  $\tau \sim h$ , то погрешность аппроксимации  $\psi = O(1)$ , то есть схема (2.3) не аппроксимирует исходное уравнение  $u_t = u_{xx}$ . Аппроксимация будет иметь место лишь в случае, когда  $\tau \ll h$ , например,  $\tau \sim h^2$ .

#### 2.3.4. Замечание о регулярности схемы

При анализе порядка аппроксимации на решении важно работать с *регулярной* записью схемы. Введем следующее определение регулярной записи.

**Определение.** Разностная схема  $L_h u_h = f_h$  для задачи  $Lu = f$  записана в *регулярном* виде, если для любой гладкой функции  $u$

$$\|L_h(u)_h - (Lu)_h\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0.$$

Фактически регулярная запись означает, что в схеме не должно быть умножения на  $\tau, h$ . Продemonстрируем важность регулярности на простом примере. Возьмем схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad (2.6)$$

для уравнения  $u_t + au_x = 0$ . Очевидно, схема имеет порядок аппроксимации  $O(\tau + h)$ . Умножим разностную схему (2.6) на  $\tau$ . В результате получится полностью эквивалентная (но записанная в нерегулярном виде) схема

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{a\tau}{h} (u_j^n - u_{j-1}^n) = 0, \quad (2.7)$$

Если формально применить к (2.7) определение порядка аппроксимации на решении, то получим

$$\begin{aligned}
\psi &= L_h(u)_h - f_h = \tau(u_t)_j^n + O(\tau^2) + \tau a \left( (u_x)_j^n + O(h) \right) = \\
&= \tau \underbrace{(u_t + au_x)_j^n}_{=0} + O(\tau^2 + \tau h) = O(\tau^2 + \tau h).
\end{aligned}$$

Чудесным образом порядок аппроксимации схемы (2.6) по пространству и времени увеличился на  $\tau$ . Это произошло потому, что в данном случае при исследовании аппроксимации была использована ее нерегулярная запись (2.7).

Заметим, что если бы мы определяли порядок аппроксимации на произвольной гладкой функции  $u$ , то умножение схемы  $\tau$  сразу приводило бы к нарушению аппроксимации. Действительно,

$$\psi = (L_h(u)_h - f_h) - ((Lu)_h - (f)_h) = \left[ \tau(u_t)_j^n + O(\tau^2) + \tau a \left( (u_x)_j^n + O(h) \right) \right] - (u_t + au_x)_j^n.$$

В выражении для погрешности аппроксимации ничего не сокращается. Аппроксимации нет.

## 2.4. Теорема о сходимости

Пусть  $u_h$  – численное решение разностной схемы (2.2), полученное на пространственно-временной сетке с шагами  $(\tau, h)$ . Пусть  $(u)_h$  – точное решение дифференциальной задачи (2.1), спроектированное на эту сетку.

**Определение.** Разностная схема (2.2) называется *сходящейся*, если

$$\|u_h - (u)_h\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0.$$

Если сверх того имеет место неравенство

$$\|u_h - (u)_h\| \leq C(\tau^m + h^k),$$

то говорят, что схема сходится с порядком  $m$  по  $\tau$  и  $k$  по  $h$ .

Свойство сходимости – это именно то, что нам нужно от разностной схемы. Однако, в большинстве случаев непосредственная проверка сходимости невозможно, так как мы не знаем точного решения задачи. На помощь приходит следующая теорема.

**Теорема (Лакс, 1956 г.).** Для обеспечения сходимости численного решения схемы (2.2) к решению исходной задачи (2.1) с порядком  $p$  достаточно, чтобы разностная схема аппроксимировала на решении с порядком  $p$  и была устойчива.

$\text{Аппр.}^p + \text{Уст.} = \text{Сход.}^p$
---

В связи с этим в дальнейшем при анализе схем мы всегда будем проверять аппроксимацию именно на решении.

## 2.5. Исследование устойчивости

**Определение.** Разностная схема  $L_h u_h = f_h$  называется *устойчивой*, если существуют числа  $\tau_0, h_0$  и  $\delta > 0$  такие, что при любых  $\tau < \tau_0, h < h_0$  и любом  $\tilde{f}_h$  таком, что  $\|\tilde{f}_h - f_h\| < \delta$ , разностная задача

$$L_h z_h = \tilde{f}_h$$

имеет единственное решение  $z_h$  и это решение удовлетворяет неравенству:

$$\|z_h - u_h\| \leq C \|\tilde{f}_h - f_h\|,$$

где  $C$  – некоторая постоянная, не зависящая от  $\tau$  и  $h$ . Таким образом, разностная схема устойчива, если разностная задача с возмущенными входными данными имеет решение, оно единственно и слабо отличается от решения невозмущенной задачи.

**Определение.** Разностная схема называется *условно устойчивой*, если она устойчива лишь при некоторых дополнительных соотношениях на шаги сетки  $\tau$  и  $h$ .

**Определение.** Разностная схема называется *абсолютно устойчивой*, если она устойчива при любых шагах  $\tau$  и  $h$ .

При исследовании устойчивости разностных схем используются различные подходы: метод априорных оценок (принцип максимума) [4,5,8]; метод операторных неравенств [4]; спектральные методы [1,4,5,6,7] и т. д. Каждый из подходов имеет свою область применимости. Универсального метода исследования устойчивости, легко применимого для всех схем, не существует. Исследование устойчивости схем для численного решения нелинейных уравнений, таких как уравнения газовой динамики и уравнения Навье-Стокса, сопряжено со значительными трудностями. Поэтому часто анализ устойчивости проводят для системы линейных уравнений, полученных линеаризацией нелинейных уравнений или замораживанием их коэффициентов. Конечно, такой анализ является приближенным, но как показывают многочисленные расчеты,

оценки устойчивости разностных схем, полученные для системы линейных уравнений, справедливы также для систем нелинейных уравнений в широком диапазоне изменения параметров схемы. Именно этот подход будет использоваться в дальнейшем. Для исследования устойчивости линейных разностных схем мы будем использовать необходимый спектральный признак Неймана, (см. ниже, п.2.5.2).

### 2.5.1. Понятие линейной разностной схемы

**Определение.** Разностная схема  $L_h u_h = f_h$  *линейна*, если линеен ее разностный оператор:

$$L_h(\alpha u_h + \beta v_h) = \alpha L_h u_h + \beta L_h v_h.$$

Примеры линейных и нелинейных схем:

Схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{(u^2)_{j+1}^n - (u^2)_{j-1}^n}{2 \cdot 2h} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (2.8)$$

аппроксимирующие уравнение  $u_t + (u^2)_x = 0$ , очевидно, нелинейны.

Схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0,$$

где  $a = \text{const}$ , линейна. Линейные разностные схемы используются для анализа устойчивости спектральным методом Неймана (см. п. 2.5.2).

Введем также понятие разностной схемы, линейной относительно значений на новом временном слое  $u^{n+1}$ .

**Определение.** Схема

$$L_h u_h^{n+1} = R_h u_h^n$$

*линейна относительно  $u^{n+1}$* , если линеен разностный оператор  $L_h$ . Например, нелинейная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

в то же самое время линейна относительно  $u^{n+1}$ . Нелинейные разностные схемы (2.8) также линейны относительно  $u^{n+1}$ . Забегая вперед, отметим, что нахождение решения разностной схемы, линейной относительно  $u^{n+1}$ , сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Решение разностных схем, нелинейных относительно  $u^{n+1}$ , находится каким-нибудь итерационным методом, например методом установления (см. п. 2.8).

### 2.5.2. Необходимый спектральный признак Неймана

Обоснование спектрального метода Неймана для исследования устойчивости разностных схем хорошо изложено в работах [4,5,6,7]. Напомним лишь его формулировку. Пусть имеется линейная разностная схема

$$\mathbf{L}_h u_h = 0, \quad (2.9)$$

Ищем решение схемы (2.9) в виде *элементарной сеточной гармоник*

$$u_j^n = u_0 \lambda^n e^{ij\omega h} = u_0 \lambda^n [\cos(j\omega h) + i \sin(j\omega h)], \quad (2.10)$$

где  $u_0$  – произвольная константа,  $\lambda$  – комплексное число ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ),  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $\omega \in \mathbb{R}$  – волновое число,  $h$  – шаг сетки по пространственному направлению. Волновое число фактически определяет период гармоник. Обозначим для удобства

$\varphi = \omega h$ . Очевидно, функция  $u_j^n = u_0 \lambda^n e^{ij\varphi}$  по переменной  $\varphi$  имеет период  $2\pi$ . После подстановки (2.10) в разностную схему (2.9) получаем уравнение на  $\lambda$ , которое называется *характеристическим уравнением* разностной схемы. Из этого уравнения находим  $\lambda = \lambda(\varphi, \tau, h)$ . Для устойчивости схемы при заданных  $\tau$  и  $h$  необходимо, чтобы для любого  $\varphi \in [0, 2\pi]$  выполнялось

$$|\lambda(\varphi, \tau, h)| \leq 1. \quad (2.11)$$

**Замечание 1.** Чтобы решение оставалось ограниченным при  $t \in [0, T]$ , достаточно выполнения неравенства

$$|\lambda| \leq 1 + C\tau, \quad (2.12)$$

где  $C > 0$  – некоторая константа, не зависящая от  $\tau$  и  $h$ . Поэтому в ряде случаев, см. например, [3,6,7], схему считают устойчивой, если выполнено неравенство (2.12). Однако, часто схемы используются для решения задач методом установления. В этом случае  $T \rightarrow \infty$ , и чтобы решение оставалось ограниченным, необходимо потребовать  $|\lambda| \leq 1$ . Поэтому в настоящем пособии мы будем считать разностную схему устойчивой, если выполняется неравенство (2.11).

**Замечание 2.** В случае, если исходное уравнение и разностная схема нелинейны, проверяется выполнение признака Неймана для линеаризованной схемы. Например, для уравнения  $u_t + f(u)_x = 0$  построена схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{h} = 0.$$

Ее устойчивость проверяется в линейном случае  $f(u) = au$ ,  $a = const$ .

**Замечание 3.** Если разностная схема построена для системы  $m$  дифференциальных уравнений, то характеристическое уравнение схемы имеет вид:

$$\det \|\mathbf{M}(\lambda, \varphi)\| = 0,$$

где  $\mathbf{M}(\lambda, \varphi)$  – матрица размера  $m \times m$ . В этом случае для устойчивости условие (2.11) должно выполняться для всех корней характеристического уравнения.

**Замечание 4.** В случае  $N$  пространственных направлений элементарная гармоника имеет вид

$$u_{j_1, \dots, j_N}^n = u_0 \lambda^n e^{i(j_1 \omega_1 h_1 + \dots + j_N \omega_N h_N)}, \quad (2.13)$$

$j_1, \dots, j_N$  – индексы узла сетки,  $h_k$  – шаг сетки по  $k$ -му пространственному направлению,  $\omega_k$  – волновое число для  $k$ -го пространственного направления. Примеры исследования устойчивости разностных схем для двумерных гиперболических и параболических уравнений см. в п. 3.1, 6.4, 7.1, 7.2.

При анализе устойчивости часто помогает следующее. Если  $\lambda = \frac{a+ib}{c+id}$ , где  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , то

$$|\lambda|^2 = \left| \frac{a+ib}{c+id} \right|^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}. \quad (2.14)$$

Для большинства реальных задач (многомерный случай, система уравнений) характеристическое уравнение на  $\lambda$  сложное. В этом случае исследование устойчивости методом Неймана представляет отдельную задачу, решение которой может быть найдено с помощью ЭВМ.

Спектральный признак Неймана – всего лишь необходимый признак устойчивости. Его следует рассматривать как хороший способ отсеивания заведомо неустойчивых схем.



**Скалярная прогонка.** Назовем прогонку *скалярной*, если размер блока трехдиагональной матрицы  $m=1$ . Скалярная прогонка требует всего  $8M$  арифметических операций, т.е. пропорционально размерности матрицы.

**Векторная прогонка.** Если  $m > 1$ , но не зависит от шагов  $\tau$  и  $h$ , например,  $m$  равно числу уравнений в исходной дифференциальной системе, то прогонка – *векторная*. Число арифметических операций для векторной прогонки также  $O(M)$ .

**Матричная прогонка.** Если размер блока  $m$  имеет порядок числа узлов по какому-либо пространственному направлению (можно считать, что  $m \sim M$ ), то прогонку с такой матрицей назовем *матричной*. Число арифметических операций в методе матричной прогонки составляет порядка  $O(m^3 M) = O(M^4)$ . Пример разностной схемы, реализуемой матричной прогонкой, см. в п. 2.7.

## 2.7. Экономичность

Существует два подхода к определению понятия экономичности схемы. Пусть  $N$  – число пространственных направлений в задаче,  $M_k$  – число узлов конечно-разностной сетки по  $k$ -му пространственному направлению.

**Подход 1.** Разностная схема называется *экономичной*, если общее число арифметических операций при переходе с временного слоя  $n$  на слой  $n+1$  прямо пропорционально числу узлов сетки по пространству, то есть

$$Q_1 \sim M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_N.$$

В рамках этого определения все явные схемы – заведомо экономичные для любого числа пространственных направлений  $N$ .

Известно, что решение СЛАУ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

с трехдиагональной матрицей  $\mathbf{A}$  размера  $n \times n$  методом прогонки требует  $8n$  операций. Поэтому, если реализацию схемы, т.е. нахождение ее решения, удастся свести к скалярным или векторным прогонкам, то она экономична. Поэтому в 1D случае даже для неявных схем проблем с экономичностью не возникает. Проблемы начинаются, если мы рассматриваем многомерную неявную схему.

В качестве примера рассмотрим полностью неявную схему для двумерного уравнения теплопроводности  $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ .

$$\frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \frac{u_{j+1,k}^{n+1} - 2u_{jk}^{n+1} + u_{j-1,k}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{jk}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1}}{h_2^2} \quad j=2, \dots, J-1; \quad k=2, \dots, K-1. \quad (2.16)$$

Пусть для определенности на границах заданы условия Дирихле, то есть значения при  $j=1, j=J, k=1, k=K$  – известны. Тогда

$$\begin{cases} u_{1,k}^{n+1} = \varphi_1(t^{n+1}, y_k), & k = 1, \dots, K \\ u_{J,k}^{n+1} = \varphi_2(t^{n+1}, y_k), & k = 1, \dots, K \\ u_{j,1}^{n+1} = \psi_1(t^{n+1}, x_j), & j = 1, \dots, J \\ u_{j,K}^{n+1} = \psi_2(t^{n+1}, x_j), & j = 1, \dots, J \end{cases} \quad (2.17)$$

Схема (2.16) имеет шаблон, показанный на рис. 4. Видно, что на слое  $n+1$  «завязаны» значения в 5 узлах сетки. Как найти решение  $u^{n+1}$  схемы (2.16) с граничными условиями (2.17)?

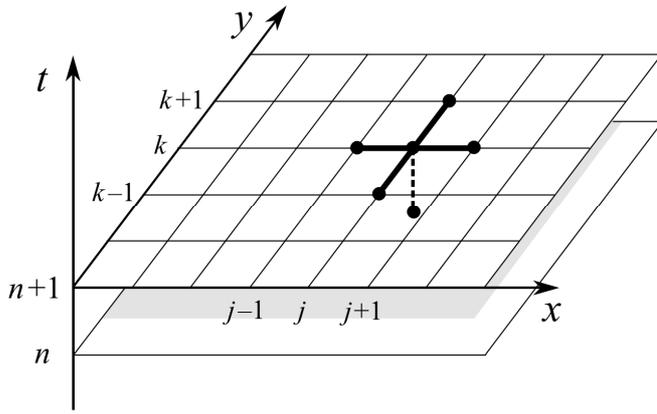


Рис. 4. Шаблон неявной схемы для уравнения теплопроводности.

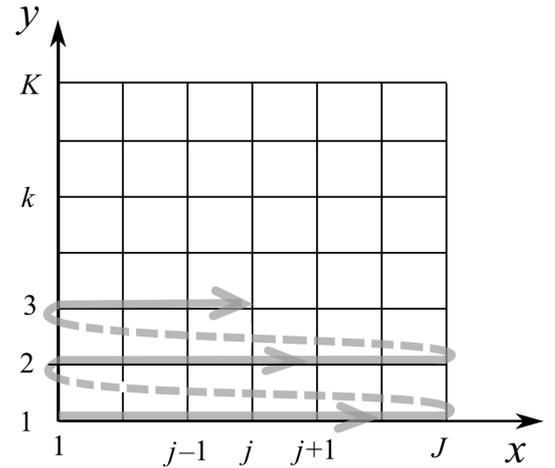


Рис. 5. Порядок нумерации неизвестных значений на слое  $n+1$ .

Здесь существует несколько подходов. Для начала заметим, что совокупность всех уравнений (2.16) и (2.17) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Чтобы конкретизировать вид системы, нужно ввести какой-нибудь способ нумерации (линейного упорядочивания) всех неизвестных на слое  $n+1$ . Например, можно перенумеровать неизвестные как на рис. 5. Такая нумерация соответствует замене

$$v_{j+J \cdot (k-1)} = u_{j,k}^{n+1}$$

В этом случае каждое уравнение системы будет иметь вид

$$a_m v_{m-J} + b_m v_{m-1} + c_m v_m + d_m v_{m+1} + e_m v_{m+J} = f_m,$$

где

$$a_m \equiv a = -\frac{\tau}{h_2^2}, \quad b_m \equiv b = -\frac{\tau}{h_1^2}, \quad c_m \equiv c = 1 + \frac{2\tau}{h_1^2} + \frac{2\tau}{h_2^2}, \quad d_m \equiv d = b, \quad e_m \equiv e = a, \quad f_m = u_{j,k}^n$$

Таким образом, СЛАУ будет иметь вид

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}, \tag{2.18}$$

где  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_M)^T$ ,  $M = J \cdot K$ , матрица  $\mathbf{A}$  является 5-диагональной матрицей, структура которой показана на рис. 6.

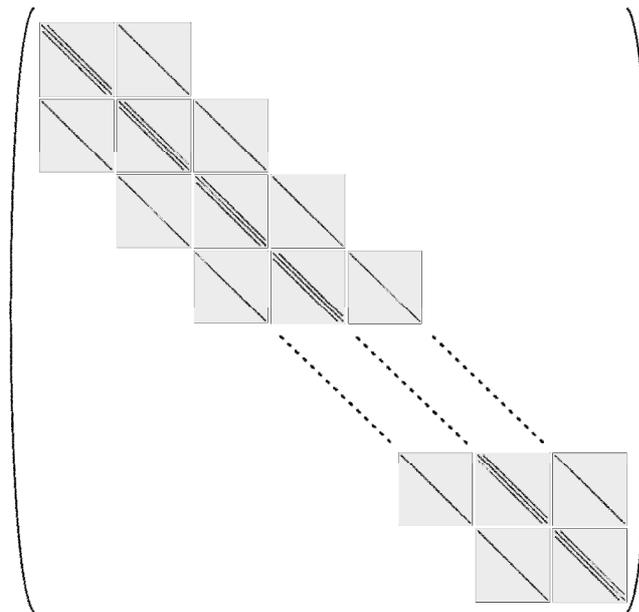


Рис. 6. Структура матрицы  $\mathbf{A}$ .

Итак, нахождение  $u^{n+1}$  эквивалентно решению СЛАУ (2.18) с сильно разреженной матрицей  $A$ . Решение системы (2.18) может быть найдено либо прямым, либо итерационным методом. Заметим, что пятиточечная скалярная прогонка не подходит, так как для ее применения необходимо, чтобы две верхних и две нижних диагонали лежали по соседству с главной, а не отстояли от нее. Одним из возможных методов решения данной задачи будет метод матричной прогонки. Действительно, матрицу  $A$  можно рассматривать как блочно-трехдиагональную, составленную из  $K \times K$  блоков, размер каждого из которых  $J \times J$  (см. рис. 6). В этом случае число арифметических операций для нахождения решения будет равно

$$Q_1 = O(J^3 K) \sim O(M^2).$$

Число арифметических операций растет как квадрат числа узлов по пространству. Поэтому неявная схема (2.16), реализуемая матричной прогонкой, не является экономичной.

Для решения системы (2.18) могут быть применены другие прямые и итерационные методы, см. например [11], однако число операций для нахождения решения в этих методах все равно оказывается порядка  $O(M^2)$ .

**Подход 2.** Под экономичностью понимается минимизация числа арифметических операций на узел сетки или на решение задачи с заданной точностью. В [2] разностная схема называется *экономичной*, если общее число арифметических операций, необходимых для решения всей задачи, прямо пропорционально числу узлов сетки по пространству, то есть

$$Q \sim M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_N.$$

Казалось бы, определения 1 и 2 эквивалентны, ведь  $Q = Q_1 \cdot N_t$ , где  $N_t$  – число шагов по времени  $t$ . Однако это верно лишь в том случае, когда число шагов по времени  $N_t$  не зависит от сгущения сетки по пространственным направлениям и выбирается только из соображений точности аппроксимации по времени. В случае условно-устойчивых схем шаг по времени  $\tau$  ограничен сверху величиной  $\tau_{\max}$ , пропорциональной  $h$ . Поэтому сгущение сетки по пространству неизбежно влечет необходимость пропорционального уменьшения шага по времени, а значит, увеличения  $N_t$ . Таким образом, для условно устойчивых схем  $Q \sim \max_k(M_k) \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_N$ . В результате в рамках «определения экономичности 2» явные схемы становятся заведомо неэкономичными.

## 2.8. Метод установления

Решение дифференциальной задачи

$$Lu = f$$

может быть найдено как предел при  $t \rightarrow \infty$  следующей нестационарной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f.$$

при постоянных краевых условиях. Этот подход называется методом *установления*. Метод установления очевидным образом переносится на разностные схемы и представляет собой ни что иное, как итерационный процесс отыскания решения «стационарной» разностной схемы.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть для эллиптического уравнения Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

построена разностная схема

$$(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})u_{jk} = f_{jk}, \tag{2.19}$$

где  $\Lambda_{11}$ ,  $\Lambda_{22}$  – центральные разности, аппроксимирующие  $\partial/\partial x^2$  и  $\partial/\partial y^2$ , соответственно. Нахождение решения  $u_{jk}$  разностной схемы (2.19) эквивалентно нахождению решения на слое  $n+1$  неявной схемы (2.16). Как показано в п. 2.7, это требует решения СЛАУ большой размерности, которое достигается примерно за  $O(M^2)$  арифметических операций, где  $M$  – число узлов сетки по пространству.

В ряде случаев решение схемы (2.19) проще отыскивать как предельное решение «нестационарной» разностной схемы, аппроксимирующей уравнение  $u_t = (u_{xx} + u_{yy}) - f(x, y)$ , например, такой

$$\frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22})u_{jk}^n - f_{jk}. \quad (2.20)$$

Таким образом мы получаем итерационный процесс нахождения решения схемы (2.19). Необходимо отметить, что схема (2.20) далеко не самая эффективная для этих целей.

К преимуществам метода установления перед другими итерационными методами решения СЛАУ нужно отнести отсутствие необходимости хранить всю СЛАУ  $A$  в памяти ЭВМ.

**Определение.** Разностная схема обладает свойством *полной аппроксимации*, если ее предельное решение (т.е. решение при  $n \rightarrow \infty$ ) не зависит от шага  $\tau$ .

Очевидно, в методе установления желательно использовать схемы, обладающие свойством полной аппроксимации.

### 3. Явные схемы

#### 3.1. Определение и примеры

В общем случае двухслойную разностную схему можно записать в виде

$$C_h u^{n+1} = B_h u^n \quad (3.1)$$

где  $C_h$  и  $B_h$  – некоторые разностные операторы с конечным шаблоном. Обычно явные схемы определяют как схемы, которые можно представить в виде (3.1), где  $C_h = I$ ,  $I$  – тождественный оператор. В противном случае схему считают неявной. Дадим более строгое определение явных схем.

**Определение.** Двухслойная разностная схема называется *явной*, если её можно представить в виде

$$u_j^{n+1} = L_h^0 u_j^n \equiv \mathcal{F}(u_{j-l}^n, \dots, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, \dots, u_{j+m}^n), \quad \text{где } l, m \geq 0.$$

Таким образом, значение  $u$  в любом узле  $j$  на слое  $n+1$  может быть найдено независимо от других узлов.

Явные схемы просты в реализации, однако, как мы увидим далее, являются условно устойчивыми, то есть допустимый шаг по времени  $\tau$  ограничен сверху величиной порядка  $O(h)$  или даже  $O(h^2)$ . Поэтому долгое время (в эпоху однопроцессорных ЭВМ) использование явных схем не было широко распространено.

В последнее время благодаря развитию многопроцессорных ЭВМ (вычислительных кластеров) явные схемы приобретают популярность. Расчет значений на слое  $u^{n+1}$  ведется параллельно на нескольких вычислительных процессорах (ядрах). Для этого расчетная область (сетка) разбивается на подобласти. Расчет в каждой подобласти ведется на своем процессоре, на границах подобластей производится обмен параметрами.

Исследуем аппроксимацию и устойчивость типичных явных схем для гиперболических и параболических уравнений. Рассмотрим явную схему для модельного **гиперболического** уравнения переноса

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

порядок аппроксимации которой  $O(\tau + h)$ . Исследуем устойчивость методом Неймана.

Ищем решение разностной схемы в виде  $u_j^n = u_0 \lambda^n e^{ij\omega h}$ . Обозначим для удобства  $\varphi = \omega h$ .

$$\begin{aligned} \frac{\lambda - 1}{\tau} + a \frac{1 - \cos \varphi + i \sin \varphi}{h} &= 0, \\ \lambda &= 1 - \frac{\tau a}{h} (1 - \cos \varphi) - \frac{\tau a}{h} i \sin \varphi \end{aligned}$$

Обозначим  $r = \tau a / h$ .

$$|\lambda|^2 = 1 - 2r(1 - \cos \varphi) + r^2(1 - \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi = 1 - 2r(1 - \cos \varphi) + 2r^2(1 - \cos \varphi)$$

Условие  $|\lambda|^2 \leq 1$  выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} -1 &\leq -r(1 - r)(1 - \cos \varphi) \leq 0, \\ 0 &\leq r(1 - r)(1 - \cos \varphi) \leq 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Необходимо рассмотреть несколько случаев.

- 1) Пусть  $r < 0$ . Тогда, очевидно, левая часть неравенства (3.3) заведомо не выполнена. Следовательно, при  $a < 0$  схема (3.2) неустойчива.
- 2) Пусть  $0 \leq r \leq 1$ , тогда левая часть неравенства (3.3) заведомо выполнено. Легко показать, что в этом случае для всех  $\varphi$  выполняется и правая часть.

3) Пусть  $r > 1$ . Тогда  $1 - r < 0$ , следовательно, левая часть неравенства (3.3) заведомо не выполнена.

Окончательно получаем, что схема с направленной разностью (3.2) неустойчива при  $a < 0$  и условно устойчива при  $a \geq 0$ , причем условие устойчивости имеет вид:

$$\frac{\tau a}{h} \leq 1.$$

Отношение  $\frac{\tau a}{h}$  называется *числом Куранта* (в зарубежной литературе обозначается CFL (Курант – Фридрихс – Леви)).

Для получения устойчивой схемы в случае  $a < 0$  в схеме (3.2) достаточно разность назад заменить на разность вперед:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0.$$

Наконец, рассмотрим для уравнения переноса схему с центральной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (3.4)$$

Порядок ее аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + a \frac{i \sin \varphi}{h} = 0,$$

откуда  $|\lambda|^2 = 1 + \left(\frac{\tau a}{h}\right)^2 \sin^2 \varphi > 1$ . Таким образом, схема (3.4) абсолютно неустойчива.

Для **параболических** уравнений, таких как уравнение теплопроводности  $u_t = \nu(u_{xx} + u_{yy})$  ( $\nu$  – коэффициент теплопроводности),

$$\frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = \nu (\Lambda_{11} u_{jk}^n + \Lambda_{22} u_{jk}^n). \quad (3.5)$$

Порядок аппроксимации, очевидно, равен  $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ . Исследуем устойчивость методом Неймана. Ищем решение разностной схемы в виде  $u_{jk}^n = u_0 \lambda^n e^{i(j\omega_1 h_1 + j\omega_2 h_2)}$ . Обозначим для удобства  $\varphi = \omega_1 h_1$ ,  $\theta = \omega_2 h_2$ . Для начала найдем собственные числа операторов  $\Lambda_{11}$  и  $\Lambda_{22}$

$$\Lambda_{11} u_{jk}^n = \Lambda_{11} u_0 \lambda^n e^{i(j\varphi + k\theta)} = u_0 \lambda^n e^{i(j\varphi + k\theta)} \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{h_1^2} = u_0 \lambda^n e^{i(j\varphi + k\theta)} \frac{2(\cos \varphi - 1)}{h_1^2},$$

$$\Lambda_{22} u_{jk}^n = \Lambda_{22} u_0 \lambda^n e^{i(j\varphi + k\theta)} = u_0 \lambda^n e^{i(j\varphi + k\theta)} \frac{e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}}{h_2^2} = u_0 \lambda^n e^{i(j\varphi + k\theta)} \frac{2(\cos \theta - 1)}{h_2^2}.$$

Подставляем это в схему:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} u_0 \lambda^n e^{i(j\varphi + k\theta)} = \nu \left[ \frac{2(\cos \varphi - 1)}{h_1^2} + \frac{2(\cos \theta - 1)}{h_2^2} \right] u_0 \lambda^n e^{i(j\varphi + k\theta)},$$

откуда находим

$$\lambda = 1 - \frac{2\tau\nu(1 - \cos \varphi)}{h_1^2} - \frac{2\tau\nu(1 - \cos \theta)}{h_2^2}.$$

Для устойчивости необходимо, чтобы  $|\lambda(\varphi, \theta)| \leq 1$ . В данном случае  $\lambda \in \mathbf{R}$ , поэтому неравенство  $|\lambda(\varphi, \theta)| \leq 1$  эквивалентно двойному неравенству

$$-1 \leq \lambda \leq 1.$$

Очевидно, правое неравенство заведомо выполняется для любых  $\tau > 0, h > 0, \varphi, \theta$ . Левое приобретает вид

$$\frac{2\tau\nu(1-\cos\varphi)}{h_1^2} + \frac{2\tau\nu(1-\cos\theta)}{h_2^2} \leq 2.$$

Условие устойчивости обычно записывается в виде ограничения на шаг по времени  $\tau$ .

$$\tau \leq \frac{1}{\nu \left( \frac{(1-\cos\varphi)}{h_1^2} + \frac{(1-\cos\theta)}{h_2^2} \right)}$$

Согласно определению, для устойчивости необходимо, чтобы  $|\lambda(\varphi, \theta)| \leq 1$  для всех  $\varphi$  и  $\theta$ . Поэтому мы обязаны найти самые «плохие»  $\varphi$  и  $\theta$ , дающие минимум правой части. Очевидно, минимум достигается при  $\varphi = \theta = \pi$ . Окончательно получаем следующее условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{1}{\frac{2\nu}{h_1^2} + \frac{2\nu}{h_2^2}} = \frac{h_1^2}{2\nu} \frac{1}{1 + \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2}.$$

Мы видим, что явная схема (3.5) для параболического уравнения имеет очень жесткое условие устойчивости:  $\tau \leq \frac{Ch^2}{\nu}$ . Поэтому на практике явные схемы для параболических уравнений, как правило, не применяются. А если и применяются, то только в случае малых  $\nu$ , см. [12]. По этой же причине практически не применяется явная аппроксимация вторых производных в уравнениях конвекции-диффузии.

### 3.2. Схемы Рунге-Кутты

Для решения исходного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(u)$$

рассмотрим следующее полу-дискретное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u), \tag{3.6}$$

где  $F(u) = -L_h u + f_h(u)$ ,  $L_h$  – разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор  $L$ ,  $f_h$  – оператор, аппроксимирующий функцию  $f(u)$ . Будем рассматривать (3.6) как обыкновенное дифференциальное уравнение по  $t$ .

Применим для его решения  $m$ -стадийный метод Рунге-Кутты, который запишем в следующем общем виде

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \tau \cdot a_{21} F(u^n) \\ u^{(2)} &= u^n + \tau (a_{31} F(u^n) + a_{32} F(u^{(1)})) \\ &\dots \\ u^{(m-1)} &= u^n + \tau (a_{m,1} F(u^n) + a_{m,2} F(u^{(1)}) + \dots + a_{m,m-1} F(u^{(m-2)})) \\ u^{(m)} &= u^n + \tau (b_1 F(u^n) + b_2 F(u^{(1)}) + \dots + b_m F(u^{(m-1)})) \\ u^{n+1} &= u^{(m)} \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  и  $b_i$  метода находятся на основе требования получения наибольшего порядка аппроксимации по времени, либо из соображений повышения запаса устойчивости, или повышения скорости подавления высокочастотных гармоник [14].

Для классического четырехстадийного метода Рунге-Кутты коэффициенты следующие:  $a_{21} = a_{32} = 1/2$ ,  $a_{31} = a_{41} = a_{42} = 0$ ,  $a_{43} = 1$ ,  $b_1 = b_4 = 1/6$ ,  $b_2 = b_3 = 1/3$ . Схема имеет порядок по времени  $O(\tau^4)$ . Условие устойчивости схемы для модельного уравнения  $u_t + au_x = 0$ , где производная  $\partial/\partial x$  аппроксимируется центральной разностью, следующее (см. [13])

$$\left| \frac{\tau a}{h} \right| \leq 2\sqrt{2} .$$

Таким образом, применение метода Рунге-Кутты для перехода со слоя  $n$  на слой  $n+1$  позволяют повысить порядок аппроксимации по времени, ослабить ограничение сверху на шаг по времени, а при решении задачи методом установления – увеличить скорость сходимости к стационарному решению. Построению и исследованию схем Рунге-Кутты высоких порядков посвящены работы [12], [14].

### 3.3. Достоинства и недостатки явных схем

Сформулируем основные достоинства и недостатки явных схем. Достоинства:

- простота реализации,
- простота распространения на многомерный случай,
- простота распараллеливания.

Недостатки:

- условная устойчивость. Ограничения на шаг по времени имеют вид:  $\tau < Ch$  для гиперболических задач,  $\tau < Ch^2$  для параболических задач.

Далее, в параграфах 4, 5, мы рассмотрим понятие консервативности и подходы к построению протоколовых схем. Изложение этих вопросов будет вестись на примере явных схем, однако рассмотренные подходы переносятся и на случай неявной аппроксимации.

## 4. Консервативность

### 4.1. Дивергентный вид системы уравнений

**Определение.** Говорят, что система уравнений может быть записана в *дивергентном виде*, если её можно представить в виде

$$\text{Div}(\mathbf{F}(u)) = g(u), \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{F}(u) = (f_0(u), f_1(u), \dots, f_N(u))^T$ , а оператор дивергенции есть

$$\text{Div}(F) = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

Законы сохранения массы, импульса, энергии представимы в дивергентном виде. Если существует запись дифференциальных уравнений в дивергентной форме, то можно получить и различные недивергентные формы записи. Например, распишем входящие в (4.1) производные как производные сложной функции:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i(u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \text{где } a_i(u) = \frac{\partial f_i}{\partial u}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

В результате получим

$$a_0(u) \frac{\partial u}{\partial t} + a_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + a_N(u) \frac{\partial u}{\partial x} = g(u),$$

Необходимо отметить, что не все уравнения математической физики представляются в дивергентном виде. Например, система уравнений мелкой воды (1.6) для случая произвольной формы дна  $h_d(x, y)$  не представляется в виде (4.1).

Если система может быть записана в дивергентном виде, значит, для нее существует более общий *интегральный закон сохранения*

$$\frac{d}{dt} \int_V u dV + \int_{\partial V} f(u) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V g(u) dV, \quad (4.2)$$

где  $V$  – произвольный объем,  $\partial V$  – поверхность объема  $V$ ,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\partial V$ . Интегральное уравнение (4.2) более общее потому, что все решения (4.1) являются решениями (4.2), однако уравнение (4.2) допускает также и разрывные решения. Разрывы могут быть как 1-го рода (производная от решения не является непрерывной), так и 2-го рода (само решение не является непрерывным). Пример: ударные волны в решении уравнений газовой динамики. Разрывные решения интегрального уравнения (4.2) называются *слабыми* решениями соответствующего ему дифференциального уравнения (4.1). Вообще говоря, нелинейные гиперболические уравнения могут приводить к появлению разрывов в решении внутри расчетной области даже при непрерывных начальных и краевых данных.

### 4.2. Консервативные схемы

При построении разностной схемы для уравнений и систем, допускающих представление в дивергентном виде, хочется, чтобы схема могла находить и разрывные решения, по крайней мере, корректно предсказывать положение разрывов и параметры решения по обе стороны от разрыва. Оказывается, для этого необходимо, чтобы схема обладала, помимо аппроксимации, дополнительным свойством – *консервативностью*.

Строгое определение консервативных схем дать затруднительно. А. А. Самарский [8] определяют консервативные схемы как схемы, для которых из выполнения дискретного аналога закона сохранения для элементарного объема следует выполнение этого аналога для всей расчетной области, составленной из элементарных объемов.

Дадим более строгое определение на примере одномерного скалярного уравнения. Распространение его на случай многомерной системы очевидно.

**Определение.** Схему для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (4.3)$$

назовем *консервативной*, если её удастся представить в виде

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{h} = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} f_{j-1/2} &= \mathcal{F}(u_{j-1}, u_{j-1/2}, \dots, u_j, u_{j+1/2}, \dots, u_{j+m}), \\ f_{j+1/2} &= \mathcal{F}(u_{j-1/2}, u_{j+1/2}, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+m+1}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, расчет величины  $f_{j+1/2}$  ведётся по той же формуле, что и  $f_{j-1/2}$ , но на сдвинутом шаблоне. Величины  $f_{j+1/2}$ ,  $f_{j-1/2}$  называются *численными потоками*, аппроксимирующими физические потоки  $f(u)$ . Покажем в чем достоинство вида (4.4) и как он связан с определением консервативности по А.А. Самарскому. Выражение (4.4) можно рассматривать как аппроксимацию интегрального закона сохранения

$$\frac{1}{V_j} \left[ \frac{d}{dt} \int_{V_j} u dV + f(u(x_{j+1/2}, t^n)) - f(u(x_{j-1/2}, t^n)) \right] = 0, \quad (4.6)$$

для контрольного объема  $V_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2} = h$ , заключенного между точками  $x_{j-1/2}$  и  $x_{j+1/2}$ . Действительно, величины  $u_j^n$  в разностной схеме (4.4) можно рассматривать как усредненное значение функции  $u(x, t^n)$  по объему  $V_j$ :

$$u_j^n = \frac{1}{V_j} \int_{V_j} u dV = \frac{1}{(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx. \quad (4.7)$$

Агрегаты  $f_{j+1/2}$  и  $f_{j-1/2}$  можно рассматривать как аппроксимацию потоков  $f(u(x_{j+1/2}, t^n))$  и  $f(u(x_{j-1/2}, t^n))$ , соответственно. При этом порядок аппроксимации зависит от вида функции  $\mathcal{F}$  в (4.5). Например, если взять

$$f_{j-1/2} = \mathcal{F}(u_{j-1}, u_j) = \frac{f(u_{j-1}^n) + f(u_j^n)}{2}, \quad f_{j+1/2} = \mathcal{F}(u_j, u_{j+1}) = \frac{f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)}{2},$$

то, очевидно, схема (4.7) будет аппроксимировать интегральный закон сохранения (4.6) с порядком  $O(\tau + h^2)$ .

Теперь рассмотрим расширенный контрольный объем  $V$ , составленный из нескольких элементарных объемов:  $V = \sum_{j=j_1}^{j_2} V_j = \sum_{j=j_1}^{j_2} (x_{j+1/2} - x_{j-1/2}) = x_{j_2+1/2} - x_{j_1-1/2}$ .

Просуммируем схему (4.7) по всем ячейкам, составляющим расширенный объем  $V$ . В силу (4.5) потоки  $f_{j\pm 1/2}$  через внутренние грани объема  $V$  сократятся, и мы будем иметь:

$$\frac{u_V^{n+1} - u_V^n}{\tau} + \frac{f_{j_2+1/2} - f_{j_1-1/2}}{h} = 0, \quad (4.8)$$

где введено обозначение  $u_V^n = \sum_{j=j_1}^{j_2} u_j^n$ . В силу того, что  $u_V^n = \frac{1}{h} \sum_{j=j_1}^{j_2} \int_{V_j} u dV = \frac{1}{h} \int_V u dV$ , мы

получаем, что схема (4.8) аппроксимирует интегральный закон сохранения для расширенной области  $V$

$$\frac{1}{h} \left[ \frac{d}{dt} \int_V u dV + f(u(x_{j_2+1/2}, t^n)) - f(u(x_{j_1-1/2}, t^n)) \right] = 0.$$

Таким образом, из аппроксимации закона сохранения для элементарного объема следует аппроксимация закона сохранения для любого объема  $V$ , составленного из элементарных объемов, то есть, выполнено определение консервативности по А. А. Самарскому.

Проверить, является ли схема, записанная в виде, отличном от (4.4), консервативной, достаточно легко. Действительно, если схема консервативна, то при сложении разностных уравнений для нескольких соседних ячеек сетки потоки через внутренние грани должны взаимно уничтожиться. Если такого не происходит, то схема неконсервативна.

Понятие консервативной схемы и введенное определение консервативности тесно связаны с методом конечных объемов, рассмотренном ниже в п. 9.

Рассмотрим несколько примеров консервативных и неконсервативных схем для уравнения (4.3).

### 1. Схема с центральной разностью

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \Lambda f_j^n = 0$$

очевидно, является консервативной, так как её можно представить в виде

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{h} = 0, \quad (4.9)$$

где

$$f_{j+1/2} = \frac{f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)}{2}, \quad f_{j-1/2} = \frac{f(u_{j-1}^n) + f(u_j^n)}{2}.$$

### 2. Схема с разностью назад

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \Lambda_- f_j^n = 0, \quad (4.10)$$

также является консервативной, поскольку представима в виде (4.9) с потоками

$$f_{j+1/2} = f(u_j^n), \quad f_{j-1/2} = f(u_{j-1}^n).$$

### 3. Схема с выбором направления разностного дифференцирования

Рассмотрим схему, где выбор разности (вперед или назад) определяется знаком производной  $\partial f / \partial u$  в узле  $j$ :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \Lambda^* f_j^n = 0, \quad (4.11)$$

где

$$\Lambda^* = \begin{cases} \Lambda_-, & \text{если } a_j^n \geq 0, \\ \Lambda_+, & \text{если } a_j^n < 0 \end{cases} \quad a_j^n = \frac{\partial f}{\partial u}(u_j^n).$$

В случае, если знак  $a_j^n$  меняется в расчетной области, схема не является консервативной.

Действительно, рассмотрим ситуацию, когда  $a_j^n > 0$ , при  $j \leq j_0$ , и  $a_j^n < 0$  при  $j > j_0$ . Тогда во всех узлах  $j \leq j_0$  схема (4.11) имеет вид

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)}{h} = 0$$

а в узлах  $j > j_0$  – вид

$$\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + \frac{f(u_{j+2}^n) - f(u_{j+1}^n)}{h} = 0.$$

При сложении разностных уравнений потоки  $f(u_{j_0}^n)$  и  $f(u_{j_0+1}^n)$  не сократятся. В п. 5.3 мы покажем, как можно модифицировать схему (4.11) так, чтобы она стала консервативной.

Рис. 7 иллюстрирует поведение неконсервативных и консервативных схем 1-го порядка аппроксимации по пространству при расчете двух модельных задач, имеющих разрывные решения. Видно, что в неконсервативной схеме (а, б) положение ударной волны предсказывается с ошибкой. Параметры газа за ударной волной также определяются с погрешностью. Консервативная схема (в, г) точнее предсказывает и положение разрыва, и параметры потока за ним.

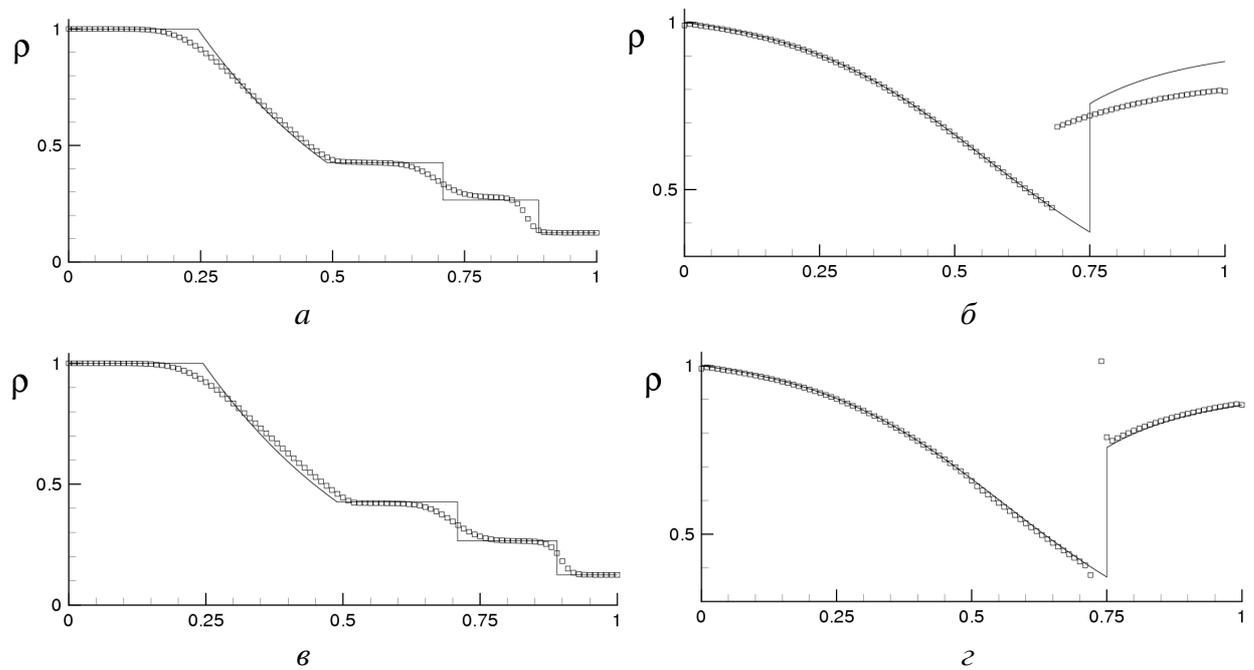


Рис. 7. Распределение плотности в задаче о распаде разрыва (а, в) и задаче о течении газа в сопле Лавала (б, г). Расчет по неконсервативной схеме (а, б) и по консервативной схеме (в, г). Сплошная линия – точное решение, символы – численное.

## 5. Противопотоковые схемы

В задачах газовой динамики, динамики несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса и т. д. преобладают конвективные процессы. То есть изменение параметров среды в выбранной точке потока происходит в основном за счет *переноса* массы, импульса, энергии, а не за счет диссипации этих величин.

Центрально-разностная аппроксимация конвективных членов, т.е. первых производных по пространственной координате,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + O(h^2)$$

дает второй порядок аппроксимации на компактном трехточечном шаблоне. Однако, как мы видели на примере скалярного уравнения переноса, в явном случае центрально-разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

абсолютно неустойчива (см. п. 3.1). Как будет показано в п. 6.1, переход к неявной схеме

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad (5.1)$$

делает схему абсолютно устойчивой по спектральному признаку. Однако для схемы (5.1) возникает дополнительное условие – условие хорошей обусловленности прогонки. Это условие ограничивает допустимый шаг по времени, причем оценка получается как в явных схемах:  $\tau < Ch$ . Кроме этого, схема (5.1) не является монотонной, что приводит к образованию осцилляций в областях больших градиентов в решении.

Поэтому для аппроксимации конвективных членов большое развитие получили схемы с разностями, направленными против потока, то есть *противопотоковые* схемы. Ниже мы изложим идею построения противопотоковых схем, постепенно переходя от простейшего уравнения переноса к системе нелинейных гиперболических уравнений.

### 5.1. Схема для скалярного уравнения

Рассмотрим скалярное линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const}. \quad (5.2)$$

Пусть  $a > 0$ . Аппроксимируем член  $\frac{\partial u}{\partial x}$  разностью назад

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \Lambda_- u_j^n = 0, \quad (5.3)$$

где, напомним,  $\Lambda_- u_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + O(h)$ . Полученная схема, очевидно, имеет

порядок  $O(\tau + h)$ . В п. 3.1 показано, что при  $a > 0$  схема устойчива при условии  $\tau \leq \frac{h}{a}$ .

Пусть теперь  $a < 0$ . В этом случае схема (5.3) не годится – как показывает анализ (см. п. 3.1.), при  $a < 0$  схема (5.3) неустойчива при любых  $\tau$ . Как легко догадаться, для получения устойчивой схемы при  $a < 0$  достаточно аппроксимировать член  $\frac{\partial u}{\partial x}$  разностью вперед:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\Lambda_+ u_j^n = 0, \quad \text{где } \Lambda_+ u_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{h} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j + O(h).$$

Правило выбора направления разностного дифференцирования (назад или вперед) можно интерпретировать следующим образом. Исходное уравнение (5.2) имеет характеристики – линии на плоскости  $(x, t)$ , заданные уравнением  $\frac{dx}{dt} = a$ . Вдоль характеристик решение сохраняется, т.е.  $\frac{du}{dt} = 0$ . Знак  $a$  определяет направление потока. При  $a > 0$  информация о решении в точку  $(x_j, t^{n+1})$  со слоя  $n$  приходит слева, а при  $a < 0$  – справа (рис. 8).

Устойчивая схема получается лишь в том случае, когда конечная разность, аппроксимирующая  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , направлена в ту сторону, откуда характеристика, т.е. информация, приходит в точку  $(x_j, t^{n+1})$ .

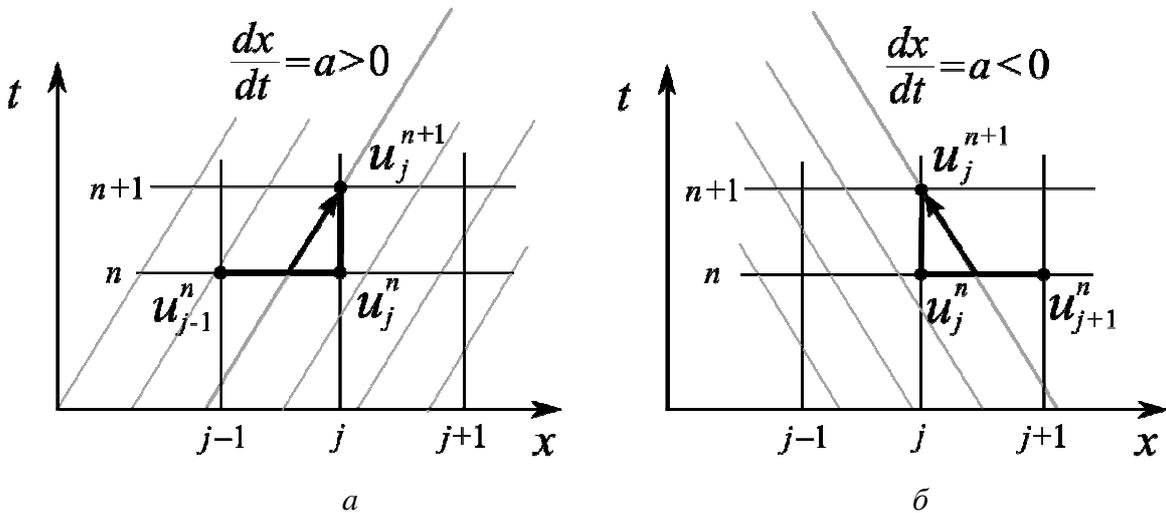


Рис. 8. Характеристики и шаблоны схем с направленными разностями.  
а)  $a > 0$ , б)  $a < 0$ .

Универсальная противопотоковая схема для случая произвольного  $a = const$  может быть записана следующим образом

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a^+ \Lambda_- u_j^n + a^- \Lambda_+ u_j^n = 0, \quad (5.4)$$

где введены обозначения  $a^+ = \max(0, a) = \frac{1}{2}(a + |a|)$ ,  $a^- = \min(0, a) = \frac{1}{2}(a - |a|)$ .

## 5.2. Схема для системы уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотренная выше противопотоковая схема легко распространяется на случай гиперболической системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_m)^T$ ,  $\mathbf{A} = const$  – матрица  $m \times m$ . Так как система гиперболическая, то все собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  вещественны и существует базис пространства  $\mathbf{R}^m$  из собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ . Следовательно, существует разложение

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L},$$

где  $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{L}^{-1}$ . Столбцы матрицы  $\mathbf{R}$  являются правыми собственными векторами матрицы  $\mathbf{A}$ , строки матрицы  $\mathbf{L}$  являются левыми собственными векторами матрицы  $\mathbf{A}$ . С учетом разложения матрицы  $\mathbf{A}$ , исходная система (5.5) может быть переписана в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0.$$

Умножим систему слева на матрицу  $\mathbf{L}$ , и, пользуясь тем, что  $\mathbf{L} = \text{const}$ , внесем ее под знак дифференцирования. Обозначим  $\mathbf{W} = \mathbf{L} \mathbf{U} = (w_1, \dots, w_m)^T$ . Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0.$$

Переменные  $\mathbf{W}$ , в которых система имеет диагональный вид, называются *характеристическими переменными*. Очевидно, полученная система представляет собой совокупность  $m$  независимых друг от друга уравнений

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Каждое из уравнений аппроксимируем противопотоковой схемой (5.4)

$$\frac{(w_i)_j^{n+1} - (w_i)_j^n}{\tau} + \lambda_i^+ \Lambda_- (w_i)_j^n + \lambda_i^- \Lambda_+ (w_i)_j^n = 0$$

где  $\lambda_i^+ = \max(0, \lambda_i)$ ,  $\lambda_i^- = \min(0, \lambda_i)$ . Очевидно,  $\lambda_i^\pm = (\lambda_i \pm |\lambda_i|)/2$ . В векторном виде будем иметь

$$\frac{\mathbf{W}_j^{n+1} - \mathbf{W}_j^n}{\tau} + \mathbf{D}^+ \Lambda_- \mathbf{W}_j^n + \mathbf{D}^- \Lambda_+ \mathbf{W}_j^n = 0,$$

где  $\mathbf{D}^\pm = \text{diag}(\lambda_1^\pm, \dots, \lambda_m^\pm) = (\mathbf{D} \pm |\mathbf{D}|)/2$ ,  $|\mathbf{D}| = \text{diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m|)$ ,  $\mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^- = \mathbf{D}$ . Матрица  $\mathbf{D}^+$  содержит все положительные собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ , а  $\mathbf{D}^-$  – все отрицательные собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ .

Возвращаемся теперь к переменным  $\mathbf{U}$

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \underbrace{\mathbf{R} \mathbf{D}^+ \mathbf{L}}_{\mathbf{A}^+} \Lambda_- \mathbf{U}_j^n + \underbrace{\mathbf{R} \mathbf{D}^- \mathbf{L}}_{\mathbf{A}^-} \Lambda_+ \mathbf{U}_j^n = 0.$$

Обозначим  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{A}^- = \mathbf{R} \cdot \mathbf{D}^- \cdot \mathbf{L}$ . Таким образом, все собственные значения матрицы  $\mathbf{A}^+$  неотрицательны, все собственные значения матрицы  $\mathbf{A}^-$  неположительны.  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$ . Это есть расщепление матрицы  $\mathbf{A}$  по знакам собственных значений. Окончательно противопотоковая схема принимает вид

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \mathbf{A}^+ \Lambda_- \mathbf{U}_j^n + \mathbf{A}^- \Lambda_+ \mathbf{U}_j^n = 0. \quad (5.6)$$

Порядок аппроксимации схемы  $O(\tau + h)$ . Анализ устойчивости этой схемы спектральным методом даст следующее условие устойчивости:

$$\tau \leq \frac{h}{\max_{k=1, \dots, m} |\lambda_k|}.$$

Действительно, ищем решение разностного уравнения (5.6) в виде

$$\mathbf{U}_j^n = \mathbf{U}_0 \mu^n e^{ij\varphi}$$

Здесь мы намеренно используем  $\mu$  вместо  $\lambda$ , чтобы не было коллизии с собственными значениями  $\lambda_k$  матрицы  $\mathbf{A}$ . После подстановки в (5.6) получаем следующее характеристическое уравнение на  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \det \left\| \frac{\mu-1}{\tau} \mathbf{I} + \mathbf{A}^+ \frac{(1-\cos \varphi) + i \sin \varphi}{h} + \mathbf{A}^- \frac{(\cos \varphi - 1) + i \sin \varphi}{h} \right\| &= 0, \\ \det \left\| \frac{\mu-1}{\tau} \mathbf{R}\mathbf{L} + \mathbf{R}\mathbf{D}^+\mathbf{L} \frac{(1-\cos \varphi) + i \sin \varphi}{h} + \mathbf{R}\mathbf{D}^-\mathbf{L} \frac{(\cos \varphi - 1) + i \sin \varphi}{h} \right\| &= 0, \\ \det \left\| \frac{\mu-1}{\tau} \mathbf{I} + \mathbf{D}^+ \frac{(1-\cos \varphi) + i \sin \varphi}{h} + \mathbf{D}^- \frac{(\cos \varphi - 1) + i \sin \varphi}{h} \right\| &= 0, \\ \prod_{k=1}^m \left[ \mu - 1 + \frac{\tau}{h} \lambda_k^+ ((1-\cos \varphi) + i \sin \varphi) + \frac{\tau}{h} \lambda_k^- ((\cos \varphi - 1) + i \sin \varphi) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\mu_k = 1 - \frac{\tau}{h} \lambda_k^+ ((1-\cos \varphi) + i \sin \varphi) - \frac{\tau}{h} \lambda_k^- ((\cos \varphi - 1) + i \sin \varphi).$$

Так как для любого  $k$ , либо  $\lambda_k^+ = 0$ , либо  $\lambda_k^- = 0$ . В случае  $\{\lambda_k^+ \geq 0, \lambda_k^- = 0\}$  получаем

$$\mu_k = 1 - \frac{\tau}{h} \lambda_k^+ ((1-\cos \varphi) + i \sin \varphi),$$

Это уравнение полностью совпадает с характеристическим уравнением рассмотренной выше схемы (3.2) для скалярного уравнения переноса (см. п. 3.1). Используя решение из п. 3.1, сразу получаем:  $|\mu_k| \leq 1$ , тогда и только тогда, когда

$$\frac{\tau \lambda_k^+}{h} \leq 1, \quad \text{или} \quad \tau \leq \frac{h}{\lambda_k^+}$$

Аналогичное рассмотрение второго случая  $\{\lambda_k^+ = 0, \lambda_k^- < 0\}$  дает:

$$|\mu_k| \leq 1 \Leftrightarrow \tau \leq \frac{h}{|\lambda_k^-|}.$$

Окончательно получаем условие устойчивости всей схемы:

$$\tau \leq \frac{h}{\max_{k=1, \dots, m} |\lambda_k|}.$$

Поскольку матрицы  $\mathbf{A}^+$  и  $\mathbf{A}^-$  постоянны, схема (5.6) консервативна. Действительно, схему (5.6) можно переписать в виде

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{h} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{j+1/2} &= \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) \equiv \mathbf{A}^+ \mathbf{U}_j^n + \mathbf{A}^- \mathbf{U}_{j+1}^n, \\ \mathbf{F}_{j-1/2} &= \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n) \equiv \mathbf{A}^+ \mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{A}^- \mathbf{U}_j^n, \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.3. Схема для нелинейной гиперболической системы

Попробуем распространить противопотоковую разностную схему (5.6) на случай нелинейной гиперболической системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0. \quad (5.8)$$

Запишем систему в нелинейном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \text{где} \quad \mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial u_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial u_m \\ \partial f_2 / \partial u_1 & \cdots & \partial f_2 / \partial u_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f_m / \partial u_1 & \cdots & \partial f_m / \partial u_m \end{pmatrix}.$$

Локально «заморозим» матрицу  $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ . То есть, будем считать, что в некоторой окрестности узла  $(n, j)$   $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \text{const}$ . Тогда формальное применение схемы (5.6) дает следующую противопотоковую схему, аппроксимирующую (5.8) с порядком  $O(\tau + h)$ :

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \mathbf{A}_j^+ \Lambda_- \mathbf{U}_j^n + \mathbf{A}_j^- \Lambda_+ \mathbf{U}_j^n = 0, \quad (5.9)$$

где

$$\mathbf{A}_j^+ = \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{D}_j^+ \cdot \mathbf{L}_j, \quad \mathbf{A}_j^- = \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{D}_j^- \cdot \mathbf{L}_j, \quad \mathbf{D}_j^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_j \pm |\mathbf{D}_j|).$$

Матрицы  $\mathbf{R}_j$ ,  $\mathbf{L}_j$ ,  $\mathbf{D}_j$  вычисляются через значение вектора  $\mathbf{U}_j^n$ .

Существенный недостаток построенной схемы – она не является консервативной. Действительно, при суммировании разностных соотношений (5.9) по  $j$  никакие слагаемые не сократятся, т.к., вообще говоря,  $\mathbf{A}_j \neq \mathbf{A}_{j+1}$ .

Консервативную противопотоковую схему для системы (5.8) можно получить, если в (5.7) вычислять матрицы  $\mathbf{A}^+$  и  $\mathbf{A}^-$  в полуцелых узлах:

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{h} = 0, \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{j+1/2} &= \mathbf{A}_{j+1/2}^+ \mathbf{U}_j^n + \mathbf{A}_{j+1/2}^- \mathbf{U}_{j+1}^n, \\ \mathbf{F}_{j-1/2} &= \mathbf{A}_{j-1/2}^+ \mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{A}_{j-1/2}^- \mathbf{U}_j^n, \\ \mathbf{A}_{j+1/2}^\pm &= \mathbf{R}_{j+1/2} \cdot \mathbf{D}_{j+1/2}^\pm \cdot \mathbf{L}_{j+1/2}, \quad \mathbf{D}_{j+1/2}^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_{j+1/2} \pm |\mathbf{D}_{j+1/2}|). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Матрицы  $\mathbf{R}_{j+1/2}$ ,  $\mathbf{L}_{j+1/2}$ ,  $\mathbf{D}_{j+1/2}$  вычисляются через значение вектора  $\mathbf{U}_{j+1/2}^n = (\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_{j+1}^n)/2$ . Аналогично с использованием  $\mathbf{U}_{j-1}^n$  и  $\mathbf{U}_j^n$  вычисляются матрицы  $\mathbf{A}_{j-1/2}^\pm$ .

## 5.4. Метод Годунова

### 5.4.1. Задача о распаде произвольного разрыва

Метод С.К. Годунова построения консервативных схем для нелинейных гиперболических уравнений основан на решении задачи о распаде произвольного разрыва. Поэтому, прежде чем переходить к описанию метода Годунова, рассмотрим отдельно постановку и свойства решения задачи о распаде разрыва. Итак, пусть имеется задача Коши для гиперболической системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^0(x), \end{cases}$$

с начальными данными вида

$$\mathbf{U}^0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0, \\ \mathbf{U}_R, & x \geq 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

где  $\mathbf{U}_L$  и  $\mathbf{U}_R$  – постоянные вектора. Таким образом, начальные данные при  $t=0$  представляют собой два постоянных состояния, разделенные разрывом в точке  $x=0$ . Задачу с начальными данными (5.12) называют *задачей о распаде произвольного разрыва* или *задачей Римана*.

Точное решение задачи в области  $t > 0$  постоянно вдоль лучей  $x/t = \text{const}$  (свойство автомодельности). Действительно, легко показать, что если  $\mathbf{U}(x, t)$  является решением, то  $\mathbf{U}(ax, at)$  также является решением задачи. Обозначим  $\omega_{RP}(\xi, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ , где

$\xi = x/t$ , точное решение задачи о распаде разрыва с состояниями  $\mathbf{U}_L$  и  $\mathbf{U}_R$ . Для многих уравнений математической физики решение задачи о распаде произвольного разрыва может быть найдено аналитически.

Для уравнений газовой динамики решение задачи о распаде разрыва дано в [9]. В общем случае оно представляет собой совокупность волн разрежения, ударных волн и контактного разрыва, выходящих с конечной скоростью из точки  $(x=0, t=0)$ . Одна из 10 возможных конфигураций решения показана на рис. 9.

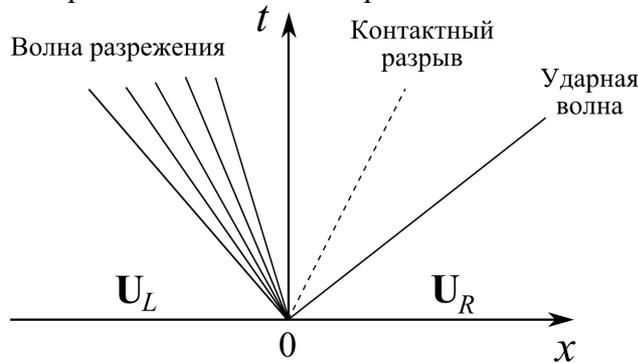


Рис. 9. Типичная структура решения задачи о распаде разрыва для уравнений газовой динамики.

Рассмотрим частный случай – задачу о распаде произвольного разрыва для системы линейных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0, & \mathbf{A} = const, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^0(x) \end{cases}$$

Найдем решение этой задачи с начальными данными (5.12). А именно, выразим решение  $\mathbf{U}(x, t)$  через  $\mathbf{U}_L$  и  $\mathbf{U}_R$ . Как было показано в п.5.2, существует представление матрицы  $\mathbf{A}$  в виде произведения

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{D}\mathbf{R}^{-1},$$

где  $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  – диагональная матрица с собственными значениями матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{R}$  – матрица правых собственных векторов,  $\mathbf{R}^{-1}$  – матрица левых собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ . С учетом этого разложения исходную систему можно записать в инвариантах Римана:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{D}\mathbf{W}_x = 0,$$

где  $\mathbf{W}(x, t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}(x, t)$ . Система представляет собой совокупность  $m$  независимых друг от друга уравнений

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0.$$

Решение каждого из этих уравнений имеет вид

$$w_i(x, t) = w_i^0(x - \lambda_i t),$$

где  $w_i^0(x)$  – компоненты вектора  $\mathbf{W}^0(x) \equiv \mathbf{W}(x, 0) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}^0(x)$ . Очевидно,

$$\mathbf{W}^0(x) = \begin{cases} \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_L, & x < 0, \\ \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_R, & x \geq 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} w_{1L} \\ \vdots \\ w_{mL} \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_L, \quad \mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} w_{1R} \\ \vdots \\ w_{mR} \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_R$$

Тогда

$$w_i(x, t) = \begin{cases} w_{iL}, & \text{если } x - \lambda_i t < 0, \\ w_{iR}, & \text{если } x - \lambda_i t \geq 0. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение диагональные матрицы  $\mathbf{I}^+$  и  $\mathbf{I}^-$ , определенные следующим образом

$$\mathbf{I}^+(x, t) = \text{diag}(\delta_1^+, \dots, \delta_m^+), \quad \mathbf{I}^-(x, t) = \text{diag}(\delta_1^-, \dots, \delta_m^-),$$

где

$$\delta_i^+(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \lambda_i t < 0, \\ 0, & \text{если } x - \lambda_i t \geq 0, \end{cases} \quad \delta_i^-(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \lambda_i t < 0, \\ 1, & \text{если } x - \lambda_i t \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно,  $\delta_i^+(x, t) + \delta_i^-(x, t) \equiv 1$ , и, следовательно,  $\mathbf{I}^+(x, t) + \mathbf{I}^-(x, t) \equiv \mathbf{I}$  – единичная матрица.

Тогда решение в терминах инвариантов Римана будет иметь вид

$$\mathbf{W}(x, t) = \begin{pmatrix} w_1^0(x - \lambda_1 t) \\ \vdots \\ w_m^0(x - \lambda_m t) \end{pmatrix} = \mathbf{I}^+(x, t) \mathbf{W}_L + \mathbf{I}^-(x, t) \mathbf{W}_R.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим.

$$\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{R} \mathbf{W}(x, t) = \mathbf{R} \mathbf{I}^+(x, t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_L + \mathbf{R} \mathbf{I}^-(x, t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_R. \quad (5.13)$$

Мы получили общее решение задачи о распаде разрыва для системы линейных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.

#### 5.4.2. Схема Годунова

Рассмотрим универсальный подход к построению противопотоковых схем для гиперболических уравнений, основанный на решении задачи о распаде произвольного разрыва на гранях расчетной ячейки. Этот метод был впервые предложен С. К. Годуновым для решения уравнений газовой динамики в 1959 г. [10].

Рассмотрим схему Годунова для системы уравнений газовой динамики, записанной в дивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad (5.14)$$

Как и прежде, предположим, что в расчетной области  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq t \leq T$  задана сетка с узлами  $(x_j, t^n)$ . Как и прежде, будем считать, что шаг сетки по пространству – постоянный и равен  $h$ , шаг по времени –  $\tau$ . Из дальнейшего будет видно, что схема Годунова тривиальным образом распространяется на случай неравномерной сетки.

Пусть на временном слое  $t^n$  мы имеем некоторую сеточную функцию  $\mathbf{U}^n$  со значениями  $\mathbf{U}_j^n$  в узлах сетки  $x_j$ . Построим  $\mathbf{U}^n(x)$  – кусочно-постоянную функцию, определенную для всех  $x \in [0, L]$ , и принимающую на каждом промежутке  $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$  значение  $\mathbf{U}_j^n$  (рис. 10). Рассмотрим построенную таким образом функцию как начальное условие для исходной системы дифференциальных уравнений (5.14). Очевидно, мы получаем  $N$  задач о распаде разрыва с центрами в полужелтых узлах  $x_{j-1/2}$ .

Пусть  $\omega_{RP}(\xi, \mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)$ , где  $\xi = (x - x_{j-1/2}) / (t - t^n)$ , – точное решение задачи о распаде разрыва с центром в точке  $x_{j-1/2}$ , а  $\omega_{RP}(\xi, \mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)$  – точное решение о распаде разрыва с центром в точке  $x_{j+1/2}$ . Тогда определим решение  $\mathbf{U}_j^{n+1}$  на новом временном слое  $n+1$  по следующей формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^{n+1} = & \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \omega_{RP} \left( \frac{x - x_{j-1/2}}{t^{n+1} - t^n}, \mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n \right) dx + \\ & + \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1/2}} \omega_{RP} \left( \frac{x - x_{j+1/2}}{t^{n+1} - t^n}, \mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n \right) dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

Здесь предполагается, что следующий слой по времени  $n+1$  настолько близок к  $t^n$ , что волны, выходящие из соседних полцелых узлов не успевают провзаимодействовать друг с другом. Формулу (5.15) можно записать короче. Пусть  $\tilde{\mathbf{U}}(x, t)$  – точное решение системы задач о распаде разрыва на момент времени  $t \geq t^n$ . Тогда выражение (5.15) приобретает вид

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{\mathbf{U}}(x, t^{n+1}) dx. \quad (5.16)$$

Таким образом, мы формально получаем некоторый алгоритм, который позволяет по известным значениям сеточной функции на временном слое  $t^n$  найти значения на новом слое  $t^{n+1}$ .

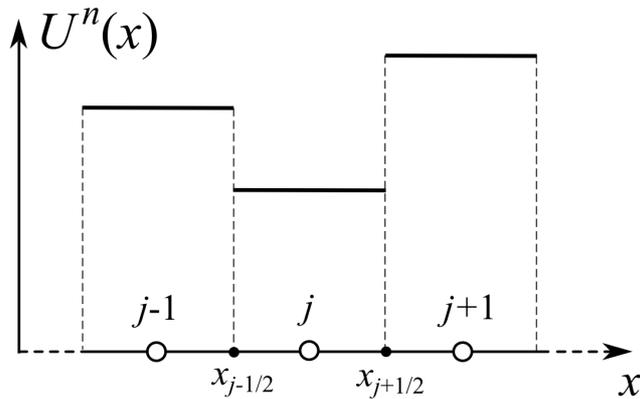


Рис. 10. Кусочно-постоянное распределение начальных данных на слое  $n$ .

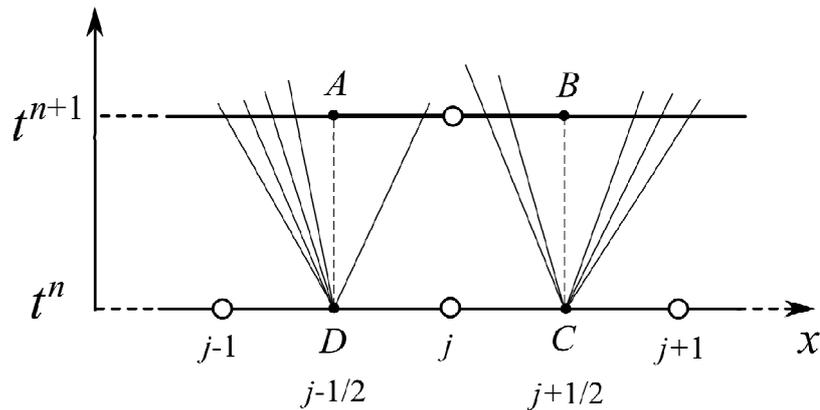


Рис. 11. Задачи о распаде разрыва в точках  $j-1/2$  и  $j+1/2$ .

Покажем, что без вычисления интеграла, стоящего в правой части (5.16), можно обойтись. Действительно, так как  $\tilde{\mathbf{U}}(x, t)$  – точное решение системы (5.14) с кусочно-постоянными начальными данными, то для него выполняется интегральный закон сохранения

$$\iint_G \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}})}{\partial x} dx dt = 0,$$

где  $G$  – произвольная область на плоскости  $(x,t)$ . По теореме Остроградского-Гаусса, интеграл по области  $G$  равен интегралу по границе области  $\partial G$ , откуда получаем

$$\oint_{\partial G} (\tilde{\mathbf{U}}dx + (-\mathbf{F})dt) = 0.$$

Возьмем в качестве области  $G$  прямоугольник  $ABCD$  (см. рис. 11). Тогда

$$\oint_{\partial G} (\tilde{\mathbf{U}}dx + (-\mathbf{F})dt) = \int_A^D (-\mathbf{F})dt + \int_D^B \tilde{\mathbf{U}}dx + \int_C^B (-\mathbf{F})dt + \int_B^A \tilde{\mathbf{U}}dx = 0. \quad (5.17)$$

Заметим, что вдоль отрезка  $DA$   $\tilde{\mathbf{U}}(x,t) \equiv \text{const} = \tilde{\mathbf{U}}_A$  в силу автомодельности решения задачи о распаде разрыва относительно преобразования растяжения. Аналогично, вдоль  $CB$   $\tilde{\mathbf{U}}(x,t) \equiv \text{const} = \tilde{\mathbf{U}}_B$ . Заметим также, что  $\tilde{\mathbf{U}}(x,t) \equiv \text{const} = \mathbf{U}_j^n$  на отрезке  $DC$ . Тогда соотношение (6.4) приобретает вид

$$\tau \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_A) + h \mathbf{U}_j^n - \tau \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_B) + \int_B^A \tilde{\mathbf{U}}(x, t^{n+1}) dx = 0,$$

откуда получаем схему Годунова

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \equiv \frac{1}{h} \int_A^B \tilde{\mathbf{U}}(x, t^{n+1}) dx = \mathbf{U}_j^n - \frac{\tau}{h} [\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_B) - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_A)].$$

Таким образом, для реализации схемы Годунова достаточно найти точные решения соответствующих задач о распаде разрыва в точках  $(x_{j-1/2}, t^{n+1})$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ . Очевидно, построенная нами схема консервативна, ее можно представить в виде.

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{h} = 0$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{j-1/2} &= \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_A) = \mathbf{F}(\omega_{RP}(0, \mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)), \\ \mathbf{F}_{j+1/2} &= \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{U}}_B) = \mathbf{F}(\omega_{RP}(0, \mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Можно показать, что схема Годунова имеет порядок аппроксимации  $O(\tau + h)$ . Условие устойчивости в данном случае совпадает с условием «невзаимодействия» двух соседних задач о распаде разрыва:

$$\tau \leq \frac{h}{2 \max_k |\lambda_k|},$$

где  $\lambda_k$  – собственные значения матрицы  $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ .

Решение задачи о распаде разрыва, как мы видели, требует, выполнения логических операций, и в общем случае – решения нелинейного уравнения каким-либо итерационным методом.

### 5.4.3. Частный случай: схема Годунова для $\mathbf{A}=\text{const}$

Метод Годунова, описанный в п. 5.4.2 может быть использован для построения разностной схемы для любой гиперболической системы. Посмотрим, что дает метод Годунова в частном случае, когда исходная система является линейной гиперболической системой с постоянными коэффициентами, то есть,  $\mathbf{F}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{A} = \text{const}$ . Точное решение задачи о распаде разрыва для этого случая получено нами ранее в п. 5.4.1. На луче  $x/t = 0$  оно имеет вид

$$\omega_{RP}(x/t, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \mathbf{R}\mathbf{I}^+(x,t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_L + \mathbf{R}\mathbf{I}^-(x,t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_R,$$

где матрицы  $\mathbf{I}^+$  и  $\mathbf{I}^-$  определены в п. 5.4.1. Вычислим численные потоки  $\mathbf{F}_{j+1/2}$  и  $\mathbf{F}_{j-1/2}$  по схеме Годунова (5.17) с учетом того, что  $\mathbf{F}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}\mathbf{U}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{j-1/2} &= \mathbf{F}(\omega_{RP}(0, \mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n)) = \mathbf{A}\omega_{RP}(0, \mathbf{U}_{j-1}^n, \mathbf{U}_j^n) = \\
&= \mathbf{RDR}^{-1}(\mathbf{RI}^+(0, t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{RI}^-(0, t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_j^n) = \\
&= \mathbf{RDI}^+(0, t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{RDI}^-(0, t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_j^n.
\end{aligned}$$

Заметим, что  $\mathbf{DI}^+(0, t) = \mathbf{D}^+$ ,  $\mathbf{DI}^-(0, t) = \mathbf{D}^-$ , где  $\mathbf{D}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \dots, \lambda_m^+)$ ,  $\mathbf{D}^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \dots, \lambda_m^-)$  – матрицы, определенные в п. 5.2. Тогда численный поток  $\mathbf{F}_{j-1/2}$  в схеме Годунова равен

$$\mathbf{F}_{j-1/2} = \mathbf{RD}^+\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{RD}^-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}_j^n = \mathbf{A}^+\mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{A}^-\mathbf{U}_j^n.$$

Аналогично,

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{A}^+\mathbf{U}_j^n + \mathbf{A}^-\mathbf{U}_{j+1}^n.$$

Легко видеть, что полученные численные потоки, найденные с помощью метода Годунова, в случае  $\mathbf{A} = \text{const}$  дают разностную схему, в точности совпадающую с ранее построенной схемой (5.7). Таким образом, метод Годунова, основанный на идее решения задачи о распаде разрыва на гранях контрольного объема, можно рассматривать как универсальный способ построения противопоточных схем.

## 5.5. Схемы, основанные на приближенном решении задачи о распаде разрыва

### 5.5.1. Простые схемы

В методе Годунова задача о распаде разрыва на гранях  $j \pm 1/2$  контрольного объема решается точно. Нахождение точного решения достаточно трудоемко. Поэтому большое развитие получили схемы, основанные на приближенном решении задачи о распаде разрыва. Причем в качестве приближенного решения выступает точное решение задачи о распаде разрыва для приближенной (линейной) системы уравнений с постоянной матрицей  $\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}$ . На грани  $j+1/2$  решается система

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

а на грани  $j-1/2$  – система

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

Применение подхода Годунова дает консервативную разностную схему

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{h} = 0,$$

с численными потоками

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{A}_{j+1/2}^+ \mathbf{U}_j^n + \mathbf{A}_{j+1/2}^- \mathbf{U}_{j+1}^n,$$

$$\mathbf{F}_{j-1/2} = \mathbf{A}_{j-1/2}^+ \mathbf{U}_{j-1}^n + \mathbf{A}_{j-1/2}^- \mathbf{U}_j^n,$$

$$\mathbf{A}_{j+1/2}^\pm = \mathbf{R}_{j+1/2} \mathbf{D}_{j+1/2}^\pm \mathbf{L}_{j+1/2}, \quad \mathbf{D}_{j+1/2}^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_{j+1/2} \pm |\mathbf{D}_{j+1/2}|),$$

$$\mathbf{A}_{j+1/2}^+ + \mathbf{A}_{j+1/2}^- = \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}.$$

Существует большой произвол в выборе матрицы  $\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}$ . Например, можно положить

$$\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}(\mathbf{U}_j) + \mathbf{A}(\mathbf{U}_{j+1})) \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} = \mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{U}_j + \mathbf{U}_{j+1}}{2}\right).$$

В последнем случае полученная схема совпадает со схемой (5.10)-(5.11).

### 5.5.2. Схема Роу

В задачах аэродинамики наибольшее распространение получила схема Роу [15], в которой матрица  $\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1})$  на грани  $j+1/2$  конструируется специальным образом. А именно, так, чтобы выполнялись требования

- 1) Все собственные значения матрицы  $\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1})$  вещественны и существует полный набор собственных векторов, образующий базис в  $\mathbf{R}^m$ .
- 2)  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U}) \equiv \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$ .
- 3)  $\forall \mathbf{U}, \mathbf{V}$  должно выполняться  $\mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \mathbf{V})(\mathbf{U} - \mathbf{V})$ .

Первое свойство гарантирует гиперболичность и разрешимость системы линейных уравнений  $\mathbf{U}_t + \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} \mathbf{U}_x = 0$ . Второе свойство необходимо для совместности этой системы с исходной нелинейной системой уравнений. Свойство 3) гарантирует следующее. В случае, если состояния  $\mathbf{U}_L$  и  $\mathbf{U}_R$  разделены изолированной ударной волной, то решение линейной задачи о распаде разрыва с постоянной матрицей  $\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}$  совпадает с точным решением нелинейной задачи о распаде разрыва.

Для уравнений газовой динамики матрицу  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$  с такими свойствами можно получить, если вычислить элементы матрицы Якоби  $\mathbf{A} \equiv \partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial \mathbf{U}$  через газодинамические переменные, усредненные следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \frac{\sqrt{\rho_L} \mathbf{u}_L + \sqrt{\rho_R} \mathbf{u}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \hat{H} &= \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \hat{c} &= \sqrt{(\gamma - 1) \left( \hat{H} - \frac{\hat{\mathbf{u}}^2}{2} \right)} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Здесь  $H \equiv \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2}$  – энтальпия.

В случае  $\mathbf{F}(-\mathbf{U}) = -\mathbf{F}(\mathbf{U})$ , а для уравнений газовой динамики это так, численный поток  $\mathbf{F}_{j+1/2}$  для схемы Роу можно представить в виде

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j+1}^n)] - \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2}| (\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_j^n). \quad (5.20)$$

Первое слагаемое соответствует абсолютно неустойчивой центрально-разностной аппроксимации  $\partial \mathbf{F} / \partial x$ , имеющей порядок  $O(h^2)$ . Второе слагаемое содержит диссипативный член, обеспечивающий устойчивость схемы. Общий порядок аппроксимации схемы Роу

$$\frac{\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}}{h} = 0$$

где  $\mathbf{F}_{j+1/2}$  и  $\mathbf{F}_{j-1/2}$  определены в (5.20) равен  $O(\tau + h)$ .

Заметим, что в случае линейной гиперболической системы уравнений с постоянной матрицей  $\mathbf{A} = \text{const}$  схемы (5.6), (5.10)-(5.11), схема Годунова, схемы из п. 5.5.1 и схема Роу тождественно совпадают.

Подробнее о схеме Роу и способах повышения порядка ее аппроксимации см. [16].

## 6. Неявные схемы

Как мы увидели, единственным недостатком явных схем является их условная устойчивость, то есть невозможность проводить расчет с произвольным шагом по времени  $\tau$ . Для решения этой проблемы используются неявные схемы, то есть схемы, шаблон которых содержит несколько точек на слое  $n+1$ .

### 6.1. Схема с весами

В качестве типичного примера неявных схем рассмотрим схему с весами. Для модельного одномерного гиперболического уравнения  $u_t + au_x = 0$  схема с весами имеет вид

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\Lambda [\alpha u_j^{n+1} + (1-\alpha)u_j^n] = 0, \quad (6.1)$$

где  $\alpha = \text{const}$  – вес, обычно  $\alpha \in [0, 1]$ . При  $\alpha = 0$  получаем чисто явную схему, при  $\alpha = 1$  – чисто неявную схему. При  $\alpha = 1/2$  получаем схему Кранка-Николсон. В качестве оператора  $\Lambda$  может быть взят любой разностный оператор, аппроксимирующий производную  $\partial/\partial x$  с порядком  $O(h^k)$ .

Легко показать, что порядок аппроксимации схемы  $O(\tau^m + h^k)$ , где  $m=2$  при  $\alpha = 1/2$ ,  $m=1$ , иначе. Пусть для определенности  $\Lambda$  – центральная разность. Шаблон схемы показан на рис. 12.

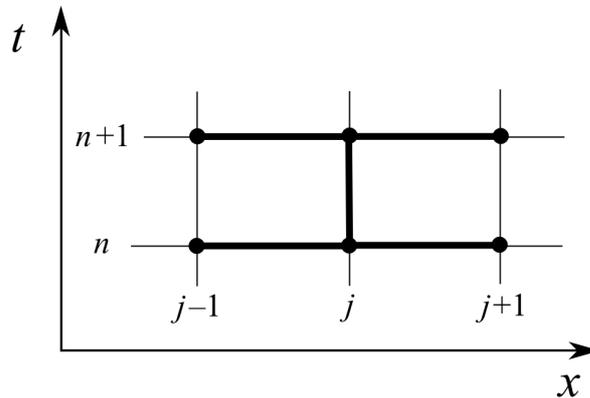


Рис. 12. Шаблон схемы с весами для уравнения  $u_t + au_x = 0$ .

Перепишем схему в виде

$$[1 + \tau\alpha a\Lambda] \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = -a\Lambda u_j^n, \quad (6.2)$$

Схема (6.2) может быть представлена в виде

$$a_j u_{j-1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j+1}^{n+1} = f_j,$$

где, например, при симметричной аппроксимации оператора  $\Lambda$  коэффициенты уравнения равны

$$a_j = -\tau\alpha \frac{a}{h}, \quad b_j = 1, \quad c_j = \tau\alpha \frac{a}{h}, \quad f_j = u_j^n - \tau(1-\alpha)a\Lambda u_j^n.$$

Реализация схемы (6.2) прогонкой, скалярной, если  $u$  – скаляр, и векторной, если  $u$  – вектор. Заметим, что прогонка хорошо обусловлена, только если  $\tau\alpha \frac{a}{h} \leq 1$ , то есть расчеты

необходимо проводить при значении временного шага  $\tau$ , как и для явной схемы. В этом недостаток схемы с центральной разностью. Заметим, что при использовании схемы с направленными разностями прогонка хорошо обусловлена всегда.

Схема с весами для модельного **параболического** уравнения  $u_t = u_{xx}$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \Lambda_{11} [\alpha u_j^{n+1} + (1 - \alpha) u_j^n]. \quad (6.3)$$

аппроксимирует уравнение с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где, как и выше,  $m=2$  при  $\alpha=1/2$  и  $m=1$ , иначе. Схема (6.3) реализуется скалярной трехточечной прогонкой, которая хорошо обусловлена для любого соотношения  $\tau$  и  $h$ . Она безусловно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$ , что следует из характеристического уравнения

$$\det \left\| \lambda - 1 + \frac{2\tau}{h^2} (\alpha \lambda + 1 - \alpha) (1 - \cos(\varphi)) \right\| = 0.$$

Его корень  $\lambda = \frac{1 - (1 - \alpha)r^2}{1 + \alpha r^2}$ , где  $r^2 = \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ . Очевидно, что при  $\alpha \geq 1/2$ ,  $|\lambda| \leq 1$ , т.е. схема абсолютно устойчива. Заметим, что при  $\alpha < 1/2$  схема также будет устойчива, но лишь условно, при выполнении условия  $r \equiv \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq \frac{2}{1 - 2\alpha}$ . Для устойчивости это условие должно выполняться для всех  $\varphi$ . Откуда получаем условие устойчивости

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1 - 2\alpha)}.$$

## 6.2. Метод линеаризации неявных схем

В случае, когда функция  $f(u)$  нелинейная, применение неявных схем также возможно. Рассмотрим для нелинейного уравнения переноса  $u_t + f(u)_x = 0$  схему с весами:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \Lambda [\alpha f(u_j^{n+1}) + (1 - \alpha) f(u_j^n)] = 0. \quad (6.4)$$

Пусть для определенности оператор  $\Lambda$  – центральная разность. Как и (6.1), схема (6.4) имеет порядок аппроксимации  $O(\tau^m + h^2)$ , где  $m=2$  при  $\alpha=1/2$ ,  $m=1$ , иначе. Для исследования устойчивости методом Неймана мы вынуждены положить  $f(u) = au$ , где  $a = const$ . Поэтому анализ устойчивости схемы (6.4) в точности повторяет анализ устойчивости схемы (6.1), а значит, схема (6.4), как и (6.1), абсолютно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$ .

Проблема возникает при *реализации* схемы. Как найти решение  $u_j^{n+1}$  системы уравнений (6.4) при  $j=1, \dots, J$ ? Один из наиболее простых и часто используемых плодотворных подходов состоит в *линеаризации* нелинейной разностной схемы. Разложим функцию  $f(u_j^{n+1})$  в ряд Тейлора в точке  $u_j^n$ :

$$f(u_j^{n+1}) = f(u_j^n) + \left( \frac{\partial f(u)}{\partial u} \right)_j^n (u_j^{n+1} - u_j^n) + O((u_j^{n+1} - u_j^n)^2)$$

Обозначим  $a_j^n = a(u_j^n) = \left( \frac{\partial f(u)}{\partial u} \right)_j^n$ . Заметим также, что  $u_j^{n+1} - u_j^n = \tau (u_t)_j^n + O(\tau^2) = O(\tau)$ .

Тогда

$$f(u_j^{n+1}) = f(u_j^n) + \tau a_j^n \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + O(\tau^2) \quad (6.5)$$

Подставим разложение (6.5) в схему (6.4) и пренебрежем членом  $O(\tau^2)$ . В результате получим линейную относительно  $u^{n+1}$  схему,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \Lambda \left[ \alpha a_j^n (u_j^{n+1} - u_j^n) + f(u_j^n) \right] = 0,$$

$$(I + \tau \alpha \Lambda a_j^n) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = -\Lambda f(u_j^n),$$

которая не эквивалентна (6.4), но, как и (6.4) аппроксимирует исходное уравнение также с порядком  $O(\tau^m + h^2)$ .

Рассмотрим более общий случай. Пусть в исходном уравнении и схеме (6.4)  $f = f(u, u_x)$ . Тогда линеаризация схемы осуществляется путем разложения в ряд Тейлора функции  $f_j^{n+1}$  как функции двух аргументов:

$$f_j^{n+1} = f(u_j^{n+1}, (u_x)_j^{n+1}) = f(u_j^n, (u_x)_j^n) + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_j^n (u_j^{n+1} - u_j^n) + \left( \frac{\partial f}{\partial u_x} \right)_j^n ((u_x)_j^{n+1} - (u_x)_j^n) + O(\tau^2)$$

Введем обозначения  $a_j^n = \left( \frac{\partial f(u, u_x)}{\partial u} \right)_j^n$ ,  $b_j^n = \left( \frac{\partial f(u, u_x)}{\partial u_x} \right)_j^n$  и аппроксимируем производную  $(u_x)_j = \Lambda u_j + O(h^2)$ . Тогда получим следующее представление для  $f_j^{n+1}$

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \tau a_j^n \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \tau b_j^n \Lambda \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + O(\tau^2).$$

Пренебрегая членом  $O(\tau^2)$  и подставляя  $f_j^{n+1}$  в схему, получим следующую линейную разностную схему:

$$(I + \tau \alpha \Lambda (a_j^n + b_j^n \Lambda)) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = -\Lambda f_j^n \quad (6.6)$$

Формально  $\Lambda b_j^n \Lambda u_j = \frac{b_{j+1}^n (u_{j+2} - u_j) - b_{j-1}^n (u_j - u_{j-2})}{h^2}$ , поэтому шаблон схемы становится пятиточечным, что требует использования для реализации схемы (6.6) пятиточечной прогонки. Однако, на практике сложный оператор  $\Lambda b_j^n \Lambda$  заменяют компактным трехточечным оператором  $\overline{\Lambda b_j^n \Lambda}$ , также имеющим второй порядок аппроксимации:

$$\overline{\Lambda b_j^n \Lambda} u_j = \frac{b_{j+1/2}^n (u_{j+1} - u_j) - b_{j-1/2}^n (u_j - u_{j-1})}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( b \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j + O(h^2),$$

где  $b_{j+1/2}^n = (b_j^n + b_{j+1}^n)/2$  или  $b_{j+1/2}^n = b \left( \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} \right)$ . При таком подходе шаблон схемы остается трехточечным, и схема реализуется обычной трехточечной скалярной прогонкой.

### 6.3. Метод предиктор-корректор

Метод предиктор-корректор – еще один способ построения линейных неявных схем для нелинейных уравнений. Рассмотрим его на примере решения одномерного гиперболического уравнения,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

Наряду с дивергентной формой, рассмотрим также недивергентную форму записи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ где } a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Построим следующую схему, состоящую из двух шагов:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1/2} - u_j^n}{\tau\alpha} + a_j^n \Lambda u_j^{n+1/2} = 0 & \text{предиктор} \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \Lambda f(u_j^{n+1/2}) = 0 & \text{корректор} \end{cases} \quad (6.7)$$

где  $\Lambda u_j = (\partial u / \partial x)_j + O(h^k)$ . Первый шаг схемы носит название предиктор, а второй – корректор. На первом дробном шаге находится значение  $u_j^{n+1/2}$  по неявной схеме, аппроксимирующей уравнение в недивергентном виде. На втором шаге по явной схеме «крест» находится решение  $u^{n+1}$  на новом временном слое. Обратим внимание, что так как на шаге корректора используется консервативная схема, то вся схема предиктор-корректор оказывается заведомо консервативной. Таким образом, неявный шаг предиктора обеспечивает большой запас устойчивости, а шаг корректора восстанавливает консервативность.

Покажем, что если  $f = au$ , где  $a = const$ , то схема предиктор-корректор тождественно совпадает со схемой с весами. Действительно, исключим неизвестные на шаге  $n+1/2$ . Для этого перепишем схему предиктора в виде

$$(1 + \tau\alpha a \Lambda) u_j^{n+1/2} = u_j^n \quad (*)$$

и подействуем оператором  $(1 + \tau\alpha a \Lambda)$  на схему второго шага. В результате получим

$$(1 + \tau\alpha a \Lambda) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + (1 + \tau\alpha a \Lambda) a \Lambda (u_j^{n+1/2}) = 0$$

Пользуясь перестановочностью операторов  $(1 + \tau\alpha a \Lambda)$  и  $\Lambda$ , и соотношением (\*), получим схему с исключенными значениями на шаге  $n+1/2$

$$(1 + \tau\alpha a \Lambda) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \Lambda u_j^n = 0,$$

которая совпадает со схемой с весами (6.2), а значит имеет аппроксимацию  $O(\tau^m + h^k)$ .

В случае, когда  $f(u)$  функция произвольного вида, исключение промежуточного шага невозможно. Покажем, однако, что и в этом случае схема предиктор-корректор имеет порядок аппроксимации  $O(\tau^2 + h^k)$ . Пусть для определенности  $\Lambda$  – центральная разность, т.е.  $k = 2$ ). Имеем

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = (u_t)_j^n + \frac{\tau}{2} (u_{tt})_j^n + O(\tau^2).$$

Теперь,

$$f(u^{n+1/2}) = f(u^n) + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_j^n (u^{n+1/2} - u^n) + O((u^{n+1/2} - u^n)^2) = f(u^n) + a_j^n \delta u + O((\delta u)^2), \quad (6.8)$$

где  $\delta u = u^{n+1/2} - u^n$ . Осталось оценить  $\delta u$ . Из первого уравнения, так как  $\Lambda u^{n+1/2} = O(1)$ , получаем первое приближение для  $\delta u$

$$\delta u = u^{n+1/2} - u^n = -\tau\alpha a_j^n \Lambda u^{n+1/2} = O(\tau),$$

Тогда

$$\Lambda u^{n+1/2} = \Lambda(u^n + \delta u) = \Lambda(u^n + O(\tau)) = \Lambda(u^n) + O(\tau).$$

Следовательно, более точно  $\delta u$  можно выразить следующим образом

$$\delta u = -\tau \alpha a_j^n \Lambda u^{n+1/2} = -\tau \alpha a_j^n \Lambda u^n + O(\tau^2).$$

Подставляя  $\delta u$  в (6.8), получаем

$$f(u^{n+1/2}) = f(u^n) - \tau \alpha (a_j^n)^2 \Lambda u^n + O(\tau^2).$$

Тогда

$$\Lambda f(u^{n+1/2}) = (f_x)_j^n - \tau \alpha \Lambda \left( (a_j^n)^2 \Lambda u_j^n \right) + O(\tau^2) + O(h^2).$$

Преобразуем

$$\Lambda \left( (a_j^n)^2 \Lambda u_j^n \right) = \Lambda \left( (a^2 u_x)_j^n + O(h^2) \right) = \left( (a^2 u_x)_x \right)_j^n + O(h^2) = (2a a_x u_x + a^2 u_{xx})_j^n + O(h^2).$$

Собирая вместе все слагаемые второго шага схемы, получаем

$$L_n u_h = (u_t + f_x)_j^n + \frac{\tau}{2} (u_{tt})_j^n - \tau \alpha (2a a_x u_x + a^2 u_{xx})_j^n + O(\tau^2) + O(h^2).$$

Откуда сразу получаем, что порядок аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ . При  $\alpha = 1/2$  главный член погрешности аппроксимации равен

$$\frac{\tau}{2} (u_{tt} - 2a a_x u_x - a^2 u_{xx})_j^n$$

**Утверждение.** Если  $u$  – решение исходного уравнения  $u_t + a u_x = 0$ , то

$$u_{tt} - 2a a_x u_x - a^2 u_{xx} = 0.$$

Докажите его самостоятельно с использованием дифференциальных следствий из уравнения и равенства  $a_t + a a_x = a_u (u_t + a u_x)$ .

Следовательно, при  $\alpha = 1/2$  схема предиктор-корректор имеет порядок аппроксимации на решении  $O(\tau^2 + h^2)$ . Более того, легко показать, что на шаге предиктора в качестве  $\Lambda$  можно использовать оператор 1-го порядка аппроксимации, например  $\Lambda_+$  или  $\Lambda_-$ , порядок аппроксимации всей схемы при  $\alpha = 1/2$  останется  $O(\tau^2 + h^2)$ .

#### 6.4. Неявные схемы в многомерном случае

Формальное распространение неявных схем на многомерный случай не вызывает сложностей. При этом сохраняются все свойства аппроксимации и абсолютной устойчивости.

Покажем это на примере схемы с весами для двумерного **параболического** уравнения  $u_t = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \sum_{i=1}^2 \Lambda_{ii} \left[ \alpha u^{n+1} + (1 - \alpha) u^n \right] = 0. \quad (6.9)$$

где разностные операторы  $\Lambda_{ii}$  имеют вид

$$\Lambda_{11} u_{jk} = \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{h_1^2}, \quad \Lambda_{22} u_{jk} = \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{h_2^2}$$

Очевидно,  $\Lambda_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + O(h_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда порядок аппроксимации всей схемы

$O(\tau^m + h_1^2 + h_2^2)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 1/2$ ,  $m = 1$ , иначе. Исследуем устойчивость этой схемы методом Неймана. Для начала перепишем ее в виде

$$\left( 1 - \tau \alpha \sum_{l=1}^2 \Lambda_{ll} \right) (u^{n+1} - u^n) = \tau \sum_{l=1}^2 \Lambda_{ll} u^n. \quad (6.10)$$

Ищем решение схемы в виде

$$u_{j,k}^n = u_0 \lambda^n e^{i(j\omega_1 h_1 + k\omega_2 h_2)}$$

Обозначим для удобства  $\varphi = \omega_1 h_1$ ,  $\theta = \omega_2 h_2$ .

Имеем

$$\tau \Lambda_{11} u_{jk}^n = \tau \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{h_1^2} u_{jk}^n = -\frac{4\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} u_{jk}^n.$$

Аналогично

$$\tau \Lambda_{22} u_{jk}^n = \tau \frac{e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}}{h_2^2} u_{jk}^n = -\frac{4\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} u_{jk}^n.$$

Обозначим

$$r_1 = \frac{4\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad r_2 = \frac{4\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (6.11)$$

Очевидно,  $r_1, r_2 \geq 0$ . После подстановки в (6.10) получаем следующее характеристическое уравнение на  $\lambda$

$$(1 + \alpha r)(\lambda - 1) = -r,$$

где  $r = r_1 + r_2$ . Находим  $\lambda$

$$\lambda = \frac{1 - (1 - \alpha)r}{1 + \alpha r}.$$

Условие устойчивости  $|\lambda| \leq 1$  равносильно выполнению двойного неравенства

$$-(1 + \alpha r) \leq 1 - (1 - \alpha)r \leq (1 + \alpha r).$$

Правое неравенство выполнено всегда. Левое приводится к виду

$$(1 - 2\alpha)r \leq 2.$$

Если  $1 - 2\alpha \leq 0$ , то неравенство выполняется для всех  $r$ . Следовательно, схема (6.9) абсолютно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$ . При  $\alpha < 1/2$  устойчивость также будет, но лишь условная.

Рассмотрим теперь схему с весами для двумерного **гиперболического** уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial g(u)}{\partial x_2} = 0.$$

Схема имеет вид

$$\frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} + \Lambda_1 [\alpha f_{jk}^{n+1} + (1 - \alpha) f_{jk}^n] + \Lambda_2 [\alpha g_{jk}^{n+1} + (1 - \alpha) g_{jk}^n] = 0. \quad (6.12)$$

где  $\Lambda_m = \frac{\partial}{\partial x_m} + O(h_m^{p_m})$ . Порядок ее аппроксимации  $O(\tau^m + h_1^{p_1} + h_2^{p_2})$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 1/2$

и  $m = 1$ , иначе. Нелинейная схема (6.12) может быть линеаризована:

$$f_{jk}^{n+1} = f(u_{jk}^n) + \tau a_{jk}^n \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} + O(\tau^2), \quad \text{где } a_{jk}^n = \left( \frac{\partial f(u)}{\partial u} \right)_{jk}^n;$$

$$g_{jk}^{n+1} = g(u_{jk}^n) + \tau b_{jk}^n \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} + O(\tau^2), \quad \text{где } b_{jk}^n = \left( \frac{\partial g(u)}{\partial u} \right)_{jk}^n.$$

В результате получим линейную относительно  $u^{n+1}$  схему

$$\left( I + \tau \alpha \Lambda_1 a_{jk}^n + \tau \alpha \Lambda_2 b_{jk}^n \right) \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = -\Lambda_1 f_{jk}^n + \Lambda_2 g_{jk}^n. \quad (6.13)$$

Очевидно, порядок ее аппроксимации остается  $O(\tau^m + h_1^{p_1} + h_2^{p_2})$ .

Иследуем устойчивость схемы с весами (6.12) или (6.13) на примере линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

Перепишем схему (6.13) в виде

$$\left(1 + \tau\alpha \sum_{l=1}^2 a_l \Lambda_l\right) (u^{n+1} - u^n) = -\tau \sum_{l=1}^2 a_l \Lambda_l u^n.$$

Ищем ее решение в виде

$$u_{j,k}^n = u_0 \lambda^n e^{i(j\varphi + k\theta)}.$$

Пусть для определенности  $\Lambda_1, \Lambda_2$  – центральные разности. Имеем

$$\Lambda_1 u_{jk}^n = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h_1} u_{jk}^n = \left(\frac{i}{h_1} \sin \varphi\right) u_{jk}^n,$$

откуда следует

$$\tau a_1 \Lambda_1 u_{jk}^n = i d_1 u_{jk}^n, \quad \text{где } d_1 = \frac{\tau a_1}{h_1} \sin \varphi. \quad (6.14)$$

Аналогично,

$$\tau a_2 \Lambda_2 u_{jk}^n = i d_2 u_{jk}^n, \quad \text{где } d_2 = \frac{\tau a_2}{h_2} \sin \theta.$$

Тогда получаем следующее характеристическое уравнение на  $\lambda$

$$\left(1 + i\alpha \sum_{m=1}^2 d_m\right) (\lambda - 1) = -i \sum_{m=1}^2 d_m,$$

откуда

$$\lambda = \frac{1 - i\beta \sum_{m=1}^2 d_m}{1 + i\alpha \sum_{m=1}^2 d_m}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Пользуясь формулой (2.14), находим

$$|\lambda|^2 = \frac{1 + \beta^2 \left(\sum d_m\right)^2}{1 + \alpha^2 \left(\sum d_m\right)^2}.$$

Условие  $|\lambda|^2 \leq 1$  заведомо выполняется при  $\beta^2 \leq \alpha^2$ . Следовательно, при  $\alpha \geq 1/2$  схема (6.13) абсолютно устойчива.

Полученные выше оценки устойчивости оказываются справедливы и для  $N > 2$ .

Итак, неявные схемы с весами для параболических и гиперболических уравнений в многомерном случае сохраняют свойства абсолютной устойчивости при  $\alpha \geq 1/2$ . Однако, серьезные проблемы возникают с *реализацией* этих алгоритмов. Действительно, шаблон схем (6.9) и (6.13) на слое  $n+1$  имеет сдвиг вперед и назад по каждому пространственному направлению, что делает использование скалярной прогонки для нахождения  $u^{n+1}$  невозможным. Реализация возможна лишь матричной прогонкой или другим, схожим по вычислительным затратам с матричной прогонкой, алгоритмом. Таким образом, при  $N \geq 2$  неявные схемы с весами становятся неэкономичными. Более подробно этот вопрос рассмотрен в п. 2.7 на примере схемы (6.9) при  $\alpha = 1$ . Следующий параграф посвящен подходам к построению экономичных неявных алгоритмов.

## 7. Экономичные неявные схемы для многомерных уравнений

Как было показано выше, простые неявные схемы вроде схемы с весами являются неэкономичными при решении многомерных уравнений (число пространственных направлений  $N \geq 2$ ). Для решения этой проблемы применяются специальные подходы, описанные ниже.

### 7.1. Метод расщепления Яненко (метод дробных шагов)

Пусть исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(u), \quad (7.1)$$

где  $L$  – дифференциальный оператор. Пусть оператор  $L$  можно представить в виде суммы более простых дифференциальных операторов.

$$L = L_1 + \dots + L_m$$

Наряду с (7.1) рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{1}{m} \frac{\partial u}{\partial t} + L_1 u = f(u), & t \in [t^n, t^n + \tau/m]; \\ \frac{1}{m} \frac{\partial u}{\partial t} + L_2 u = 0, & t \in [t^n + \tau/m, t^n + 2\tau/m]; \\ \dots \\ \frac{1}{m} \frac{\partial u}{\partial t} + L_m u = 0, & t \in [t^n + \tau(m-1)/m, t^{n+1}]; \end{cases} \quad (7.2)$$

То есть на  $k$  дробном шаге решается дифференциальное уравнение с оператором  $L_k$  (рис. 13). Оказывается, при  $\tau \rightarrow 0$  решение задачи (7.2) сходится сильно к решению задачи (7.1) [1].

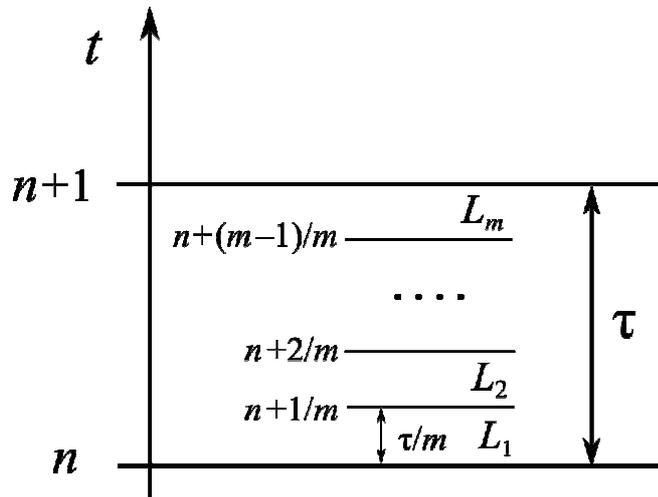


Рис. 13. Дробные шаги в методе расщепления

Построение схемы расщепления основано на решении системы (7.2). А именно, аппроксимируем по отдельности каждое уравнение из (7.2) на интервале длиной  $\tau/m$ , где оно определено. При этом аппроксимацию производной по пространству будем ввести по схеме с весами, которая включает в себя чисто явную схему (при  $\alpha = 0$ ) и чисто неявную схему (при  $\alpha = 1$ ). Вообще говоря, вес  $\alpha$  на каждом дробном шаге может быть своим, однако мы будем предполагать, что на всех шагах вес одинаков.

$$\begin{cases} \frac{1}{m} \frac{u^{n+1/m} - u^n}{\tau/m} + L_{1h}[\alpha u^{n+1/m} + (1-\alpha)u^n] = f(u^n), \\ \frac{1}{m} \frac{u^{n+2/m} - u^{n+1/m}}{\tau/m} + L_{2h}[\alpha u^{n+2/m} + (1-\alpha)u^{n+1/m}] = 0, \\ \dots \\ \frac{1}{m} \frac{u^{n+1} - u^{n+(m-1)/m}}{\tau/m} + L_{mh}[\alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^{n+(m-1)/m}] = 0, \end{cases} \quad (7.3)$$

Реализация схемы следующая. Сначала на 1-м дробном шаге находим значение  $u^{n+1/m}$  во всей расчетной области. Затем на 2-м дробном шаге находим значение  $u^{n+2/m}$  во всей расчетной области, и так далее. На  $m$ -м дробном шаге находим  $u^{n+1}$ . Преимущество схемы (7.3) состоит в том, что на каждом дробном шаге решается более простая разностная задача, как правило, одномерная, решение которой часто может быть получено экономичным образом. Более подробно см. [1,2].

Запись схемы в дробных шагах удобна лишь для понимания способа реализации схемы, это отправная точка при ее программировании. Для исследования же аппроксимации и устойчивости необходимо исключить все дробные шаги, то есть исключить значения  $u^{n+1/m}, u^{n+2/m}, \dots, u^{n+(m-1)/m}$ .

Делать выводы об аппроксимации и устойчивости всей схемы на основе анализа аппроксимации и устойчивости каждого дробного шага нельзя! Известны примеры, когда каждый шаг по отдельности не аппроксимирует дифференциальную задачу или не устойчив по Нейману, но результирующая схема аппроксимирует и устойчива. В качестве примера можно привести схему предиктор-корректор (6.7). На шаге корректора в ней используется явная схема «крест», которая абсолютно неустойчива. В то же время вся схема (6.7) после исключения дробного шага оказывается абсолютно устойчивой при  $\alpha \geq 1/2$ , как было показано в п. 6.3.

Итак, исключим дробные шаги в (7.3). Оказывается, в случае, если для любых  $j, k$  разностные операторы  $L_{jh}$  и  $L_{kh}$  перестановочны, это легко сделать с использованием стандартного приема, суть которого изложена ниже. Пусть для простоты  $f(u) = 0$ . Сначала перепишем схему в операторном виде, где все неизвестные собраны слева, а все известные – справа.

$$\begin{cases} [I + \tau\alpha L_{1h}]u^{n+1/m} = [I - \tau(1-\alpha)L_{1h}]u^n, \\ [I + \tau\alpha L_{2h}]u^{n+2/m} = [I - \tau(1-\alpha)L_{2h}]u^{n+1/m}, \\ \dots \\ [I + \tau\alpha L_{mh}]u^{n+1} = [I - \tau(1-\alpha)L_{mh}]u^{n+(m-1)/m}. \end{cases} \quad (7.4)$$

Теперь подействуем оператором  $[I + \tau\alpha L_{1h}] \dots [I + \tau\alpha L_{(m-1)h}]$  на последнее уравнение и воспользуемся перестановочностью операторов  $[I + \tau\alpha L_{(m-1)h}]$  и  $[I - \tau\alpha L_{mh}]$ . С учетом предпоследнего уравнения в (7.4) получим:

$$\begin{aligned} \left( \prod_{k=1}^m [I + \tau\alpha L_{kh}] \right) u^{n+1} &= \left( \prod_{k=1}^{m-2} [I + \tau\alpha L_{kh}] \right) [I - \tau(1-\alpha)L_{mh}] [I + \tau\alpha L_{(m-1)h}] u^{n+(m-1)/m} = \\ &= \left( \prod_{k=1}^{m-2} [I + \tau\alpha L_{kh}] \right) [I - \tau(1-\alpha)L_{mh}] [I - \tau(1-\alpha)L_{(m-1)h}] u^{n+(m-2)/m}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

В результате  $u^{n+(m-1)/m}$  оказывается исключено. Продолжаем процесс преобразования (7.5) и окончательно получаем схему (7.6), которая эквивалентна схемам в дробных шагах (7.3) и (7.4), но связывает лишь значения на временных слоях  $n$  и  $n+1$ :

$$\left( \prod_{k=1}^m [I + \tau \alpha L_{kh}] \right) u^{n+1} = \left( \prod_{k=1}^m [I - \tau(1-\alpha)L_{kh}] \right) u^n. \quad (7.6)$$

Заметим, что запись схемы с исключенными дробными шагами (7.6) не является регулярной в смысле п. 2.3.4. Чтобы сделать ее регулярной, нужно разделить обе части на  $\tau$ .

Исследуем устойчивость схемы расщепления по пространственным направлениям для  $N$ -мерного **уравнения теплопроводности**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = 0. \quad (7.7)$$

В этом случае дифференциальный оператор представим в виде

$$L = -\sum_{j=1}^N L_j = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Аппроксимируем вторые производные по пространству центральными разностями со вторым порядком по формулам  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \Lambda_{kk} u + O(h_k^2)$ . Тогда схема расщепления будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} - \Lambda_{11} [\alpha u^{n+1/N} + (1-\alpha)u^n] = 0, \\ \dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+(N-1)/N}}{\tau} - \Lambda_{NN} [\alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^{n+(N-1)/N}] = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Видно, что на каждом дробном шаге решение схемы находится скалярными прогонками, откуда следует экономичность всей схемы.

После исключения дробных шагов, в соответствии с (7.6), схема будет иметь вид

$$\left( \prod_{k=1}^N [I - \tau \alpha \Lambda_{kk}] \right) u^{n+1} = \left( \prod_{k=1}^N [I + \tau(1-\alpha)\Lambda_{kk}] \right) u^n. \quad (7.9)$$

Теперь можно применить спектральный метод Неймана. Для начала заметим, что если сеточная функция имеет вид элементарной гармоники  $u_{j_1, \dots, j_N}^n = u_0 \lambda^n e^{i(j_1 \omega_1 h_1 + \dots + j_N \omega_N h_N)}$ , то

$$\tau \Lambda_{kk} u_{j_1, \dots, j_N}^n = -\frac{4\tau}{h_k^2} \sin^2 \frac{\omega_k h_k}{2} \cdot u_{j_1, \dots, j_N}^n = -r_k \cdot u_{j_1, \dots, j_N}^n, \quad \text{где } r_k \geq 0.$$

Тогда, после подстановки элементарной гармоники в (7.9), получим

$$\left( \prod_{k=1}^N [1 + \alpha r_k] \right) \lambda = \left( \prod_{k=1}^N [1 - (1-\alpha)r_k] \right),$$

откуда

$$\lambda = \prod_{k=1}^N \left( \frac{1 - (1-\alpha)r_k}{1 + \alpha r_k} \right) = \prod_{k=1}^N \mu_k$$

Очевидно, для того чтобы  $|\lambda| \leq 1$ , достаточно, чтобы  $\forall k \ |\mu_k| \leq 1$ . В данном случае все  $\mu_k \in \mathbf{R}$ , поэтому условие  $|\mu_k| \leq 1$  равносильно условию  $-1 \leq \mu_k \leq 1$ . Найдем, в каких случаях это двойное неравенство выполнено.

$$-1 \leq \frac{1 - (1-\alpha)r_k}{1 + \alpha r_k} \leq 1$$

$$-1 - \alpha r_k \leq 1 - r_k + \alpha r_k \leq 1 + \alpha r_k$$

Очевидно, так как  $r_k \geq 0$ , правая часть неравенства выполнена всегда. Левая часть неравенства преобразуется к виду  $(1-2\alpha)r_k \leq 2$ , при  $\alpha \geq 1/2$  это неравенство всегда

выполнено. Поэтому при  $\alpha \geq 1/2$  схема (7.9) и эквивалентная ей схема в дробных шагах (7.8) абсолютно устойчива. Если  $\alpha < 1/2$ , то схема будет условно устойчивой.

Исследуем устойчивость схемы расщепления по пространственным направлениям для  $N$ -мерного **уравнения переноса**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_N \frac{\partial u}{\partial x_N} = 0. \quad (7.10)$$

Каждое  $L_j$  из  $N$ -мерного дифференциального оператора

$$L = -\sum_{j=1}^N L_j = -\sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

аппроксимируем разностным оператором с порядком  $O(h_k^s)$ :

$$a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = a_k \Lambda_k u + O(h_k^s).$$

Пока конкретизировать оператор  $\Lambda_k$  не будем. Тогда схема расщепления по пространственным направлениям для уравнения (7.10) представляется в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + a_1 \Lambda_1 [\alpha u^{n+1/N} + (1-\alpha)u^n] = 0, \\ \dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+(N-1)/N}}{\tau} + a_N \Lambda_N [\alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^{n+(N-1)/N}] = 0. \end{cases} \quad (7.11)$$

или, после исключения дробных шагов, в виде

$$\left( \prod_{k=1}^N [I + \tau \alpha a_k \Lambda_k] \right) u^{n+1} = \left( \prod_{k=1}^N [I - \tau(1-\alpha)a_k \Lambda_k] \right) u^n. \quad (7.12)$$

Теперь подставим в (7.12) элементарную гармонику. Пусть  $d_k \in \mathbb{C}$  - собственное значение разностного оператора  $\tau a_k \Lambda_k$ , то есть

$$\tau a_k \Lambda_k u_{j_1, \dots, j_N}^n = d_k \cdot u_{j_1, \dots, j_N}^n.$$

Тогда

$$\left( \prod_{k=1}^N [1 + \alpha d_k] \right) \lambda = \left( \prod_{k=1}^N [1 - (1-\alpha)d_k] \right)$$

Откуда получаем

$$\lambda = \prod_{k=1}^N \left( \frac{1 - (1-\alpha)d_k}{1 + \alpha d_k} \right) = \prod_{k=1}^N \mu_k$$

Заметим, что для устойчивости схемы по Нейману достаточно, чтобы  $\forall k \ |\mu_k| \leq 1$ .

Обозначим  $d_k = r + is$ . Тогда

$$\mu_k = \frac{(1 - (1-\alpha)r) - i(1-\alpha)s}{(1 + \alpha r) + i\alpha s}.$$

Условие  $|\mu_k| \leq 1$ , с учетом формулы (2.14), равносильно следующему:

$$|\mu_k|^2 = \frac{(1 - (1-\alpha)r)^2 + (1-\alpha)^2 s^2}{(1 + \alpha r)^2 + \alpha^2 s^2} \leq 1.$$

После элементарных преобразований получим

$$-2r + (1 - 2\alpha)(r^2 + s^2) \leq 0. \quad (7.13)$$

Для дальнейшего исследования необходимо конкретизировать оператор  $\Lambda_k$ .

Пусть  $\Lambda_k$  – центральная разность. Тогда  $r=0$ . В этом случае при  $\alpha \geq 1/2$  неравенство (7.13) оказывается заведомо выполнено, то есть схема (7.11) – абсолютно устойчива.

Пусть  $\Lambda_k$  – направленная против потока разность первого порядка аппроксимации, то есть

$$\Lambda_k u_{j_1, \dots, j_N} = \begin{cases} \frac{u_{\dots j_k \dots} - u_{\dots j_k - 1 \dots}}{h_k}, & \text{если } a_k > 0; \\ \frac{u_{\dots j_k + 1 \dots} - u_{\dots j_k \dots}}{h_k}, & \text{если } a_k < 0, \end{cases}$$

то

$$d_k = \begin{cases} \tau a_k \frac{1 - e^{-i\varphi}}{h_k} = \frac{\tau a_k}{h_k} (1 - \cos \varphi + i \sin \varphi), & \text{если } a_k > 0; \\ \tau a_k \frac{e^{i\varphi} - 1}{h_k} = \frac{\tau a_k}{h_k} (\cos \varphi - 1 + i \sin \varphi), & \text{если } a_k < 0, \end{cases}$$

Заметим, что вне зависимости от знака  $a_k$ ,  $r \equiv \text{Re}(d_k) > 0$ . Значит, и в этом случае при  $\alpha \geq 1/2$  неравенство (7.13) заведомо выполнено и схема (7.11) – абсолютно устойчива по Нейману.

Остановимся на преимуществах и недостатках метода расщепления.

**Достоинства:**

- метод позволяет строить экономичные абсолютно устойчивые схемы для гиперболических и параболических уравнений любой размерности.

**Недостатки:**

- отсутствие полной аппроксимации при  $N \neq 2$ . Для  $N > 2$  при использовании схемы расщепления для нахождения стационарного решения методом установления по времени, предельное (при  $t \rightarrow \infty$ ) решение будет зависеть от шага  $\tau$ ;
- порядок аппроксимации по времени составляет  $O(\tau^2)$  только в случае  $\{N=2, \alpha = 1/2\}$ ; в остальных случаях порядок аппроксимации по времени  $O(\tau)$ ;
- схема лишь предельно консервативна.

**7.2. Метод приближенной факторизации**

Метод приближенной факторизации – еще один способ построения экономичных алгоритмов для многомерных уравнений математической физики. Идея метода состоит в следующем. Пусть для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(u)$$

построена неявная разностная схема

$$M_h u^{n+1} = R_h u^n, \tag{7.14}$$

где  $M_h, R_h$  – некие разностные операторы. Очевидно, схему можно переписать в каноническом виде (такой вид также называют записью в  $\Delta$ -форме)

$$M_h \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \tilde{R}_h u^n, \tag{7.15}$$

где  $\tilde{R}_h = (R_h - M_h) / \tau$ . Для нахождения решения  $u^{n+1}$  схемы (7.14) или (7.15) необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (7.16)$$

с матрицей  $\mathbf{A}$ , соответствующей оператору  $M_h$ . Как мы уже видели, для многомерных задач матрица  $\mathbf{A}$ , хоть и является сильно разреженной (имеет несколько отстоящих друг от друга диагоналей), не позволяет получить решение системы (7.16) за  $O(q)$  операций, где  $q$  – общее число узлов сетки по пространству. Таким образом, исходная схема (7.14) или (7.15) не является экономичной. Для построения экономичной разностной схемы приближенно представим оператор  $M_h$  в виде суперпозиции, то есть произведения, нескольких разностных операторов

$$M_h \approx M_{1h} \cdot \dots \cdot M_{mh}$$

Разностный оператор  $\Psi = M_{1h} \cdot \dots \cdot M_{mh} - M_h$  называется *погрешностью факторизации*. В большинстве реальных задач точно факторизовать не представляется возможным, поэтому метод называется методом приближенной факторизации. Пренебрежем погрешностью факторизации, тогда вместо схемы (7.15) получим схему

$$M_{1h} \cdot \dots \cdot M_{mh} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \tilde{R}_h u^n. \quad (7.17)$$

Решение этой модифицированной разностной схемы может быть получено за  $m+1$  дробных шагов

$$\begin{cases} M_{1h} \xi^{n+1/m} = \tilde{R}_h u^n \\ M_{2h} \xi^{n+2/m} = \xi^{n+1/m} \\ \dots \\ M_{mh} \xi^{n+1} = \xi^{n+(m-1)/m} \\ u^{n+1} = u^n + \tau \xi^{n+1} \end{cases}$$

Операторы  $M_{1h}, \dots, M_{mh}$  выбираются так, чтобы их было легко обратить (желательно скалярной или векторной прогонкой) и чтобы погрешность факторизации была меньшей или минимальной. Чаще всего используется факторизация по пространственным направлениям. В этом случае каждый из операторов  $M_{ih}$  выбирается одномерным.

В качестве примера рассмотрим схему приближенной факторизации по направлениям для  **$N$ -мерного уравнения теплопроводности** (7.7). Для его аппроксимации рассмотрим разностную схему с весами

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \sum_{l=1}^N \Lambda_{ll} [\alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^n] = 0,$$

где  $\Lambda_{ll}$  – центральные разности,  $\Lambda_{ll} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} + O(h_l^2)$ . Порядок ее аппроксимации

$O(\tau^m + h^2)$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 1/2$  и  $m = 1$ , иначе;  $h = \max_{l=1, \dots, N} h_l$ . Схема абсолютно устойчива

$\alpha \geq 1/2$ , но, как было показано выше, неэкономична. Для применения метода факторизации перепишем схему с весами в каноническом виде (7.15):

$$\left(1 - \tau\alpha \sum_{l=1}^N \Lambda_{ll}\right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sum_{l=1}^N \Lambda_{ll} u^n. \quad (7.18)$$

Представим многомерный неявный оператор в виде произведения одномерных операторов.

$$\left(1 - \tau\alpha \sum_{l=1}^N \Lambda_{ll}\right) \approx (1 - \tau\alpha \Lambda_{11}) \cdot (1 - \tau\alpha \Lambda_{22}) \cdot \dots \cdot (1 - \tau\alpha \Lambda_{NN}),$$

что приведет нас к схеме приближенной факторизации

$$\prod_{l=1}^N (1 - \tau \alpha \Lambda_{ll}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sum_{l=1}^N \Lambda_{ll} u^n. \quad (7.19)$$

Погрешность факторизации, очевидно, равна  $\Psi = O(\tau^2)$ . Поэтому факторизованная схема (7.19) отличается от нефакторизованной (7.18) на величину

$$\Psi \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = O(\tau^2) \left( (u_t)^n + O(\tau) \right) = O(\tau^2)$$

Таким образом, схема приближенной факторизации (7.19) имеет порядок аппроксимации  $O(\tau^m + h^2 + \tau^2)$ , то есть такой же, как у нефакторизованной схемы с весами (7.18).

**Замечание.** Второй порядок аппроксимации по  $t$  (при  $\alpha = 1/2$ ) сохраняется только при факторизации схемы, записанной в каноническом виде. Продемонстрируем это в случае  $N = 2$ . Рассмотрим вместо (7.18) схему, разрешенную относительно  $u^{n+1}$

$$\left( 1 - \tau \alpha \sum_{l=1}^2 \Lambda_{ll} \right) u^{n+1} = \left( 1 + \tau \beta \sum_{l=1}^2 \Lambda_{ll} \right) u^n, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Приближенно факторизуем неявный оператор в левой части, получим

$$(1 - \tau \alpha \Lambda_{11})(1 - \tau \alpha \Lambda_{22}) u^{n+1} = \left( 1 + \tau \beta \sum_{l=1}^2 \Lambda_{ll} \right) u^n.$$

$$(1 - \tau \alpha (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) + \tau^2 \alpha^2 \Lambda_{11} \Lambda_{22}) u^{n+1} = \left( 1 + \tau \beta \sum_{l=1}^2 \Lambda_{ll} \right) u^n.$$

Чтобы сравнить с исходной схемой с весами, перепишем полученную схему в виде

$$(1 - \tau \alpha (\Lambda_{11} + \Lambda_{22})) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) u^n - \underbrace{\tau \alpha^2 \Lambda_{11} \Lambda_{22} u^{n+1}}_{O(\tau)}$$

Таким образом, при факторизации схемы с весами, записанной не в каноническом виде, вносится погрешность порядка  $O(\tau)$ . В результате общий порядок аппроксимации факторизованной схемы – лишь  $O(\tau + h^2)$  при всех  $\alpha$ .

Исследуем теперь устойчивость схемы (7.19) методом Неймана. Характеристическое уравнение на  $\lambda$  имеет вид

$$\prod_{l=1}^N (1 + \alpha r_l) (\lambda - 1) = - \sum_{l=1}^N r_l$$

где  $r_l \geq 0$  определены в (6.11). Отсюда находим  $\lambda$

$$\lambda = 1 - \frac{\sum_{l=1}^N r_l}{\prod_{l=1}^N (1 + \alpha r_l)}$$

Условие  $|\lambda| \leq 1$  эквивалентно условию  $-1 \leq \lambda \leq 1$ . Правое неравенство выполнено всегда.

Левое сводится к виду

$$\sum_{l=1}^N r_l \leq 2 \prod_{l=1}^N (1 + \alpha r_l) = 2 \left( 1 + \alpha \sum_{l=1}^N r_l + \underbrace{\dots}_{\geq 0} \right).$$

Очевидно, при  $\alpha \geq 1/2$  это условие выполнено для любых  $r_l$ . Таким образом, схема приближенной факторизации (7.19) абсолютно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$ .

Схема (7.19) эквивалентна схеме в дробных шагах

$$\begin{cases} (1 - \tau\alpha\Lambda_{11})\xi^{n+1/N} = \sum_{l=1}^N \Lambda_l u^n \\ (1 - \tau\alpha\Lambda_{22})\xi^{n+2/N} = \xi^{n+1/N} \\ \dots \\ (1 - \tau\alpha\Lambda_{NN})\xi^{n+1} = \xi^{n+(N-1)/N} \\ u^{n+1} = u^n + \tau\xi^{n+1}, \end{cases}$$

которая реализуется на каждом дробном шаге скалярными прогонками и поэтому, в отличие от нефакторизованной схемы (7.18), экономична.

Теперь рассмотрим уравнения **гиперболического** типа на примере многомерного линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{l=1}^N a_l \frac{\partial u}{\partial x_l} = 0, \quad a_l = \text{const.}$$

Разностная схема с весами

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \sum_{l=1}^N a_l \Lambda_l [\alpha u^{n+1} + (1 - \alpha)u^n] = 0. \quad (7.20)$$

где  $\Lambda_l = \frac{\partial}{\partial x_l} + O(h_l^{p_l})$ , аппроксимирует исходное уравнение с порядком

$O(\tau^m + h_1^{p_1} + \dots + h_N^{p_N})$ , где  $m = 2$  при  $\alpha = 1/2$ ,  $m = 1$  при  $\alpha \neq 1/2$ . Пусть для определенности  $\Lambda_l$  – центрально-разностный оператор. В п. 6.4 было показано, что в этом случае схема (7.20) абсолютно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$ , но не является экономичной. Для построения схемы приближенной факторизации перепишем (7.20) в каноническом виде:

$$\left(1 + \tau\alpha \sum_{l=1}^N a_l \Lambda_l\right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = - \sum_{l=1}^N a_l \Lambda_l u^n$$

Представим многомерный оператор в левой части в виде произведения одномерных разностных операторов

$$\left(1 + \tau\alpha \sum_{l=1}^N a_l \Lambda_l\right) = (1 + \tau\alpha a_1 \Lambda_{11}) \cdot (1 + \tau\alpha a_2 \Lambda_{22}) \cdot \dots \cdot (1 + \tau\alpha a_N \Lambda_{NN}) + O(\tau^2).$$

В результате получим схему приближенной факторизации

$$\prod_{l=1}^N (1 + \tau\alpha a_l \Lambda_l) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = - \sum_{l=1}^N a_l \Lambda_l u^n. \quad (7.21)$$

Схема (7.21) имеет тот же порядок аппроксимации, что и (7.20), но реализуется за  $N$  дробных шагов скалярными прогонками. Исследуем устойчивость схемы (7.21) по аналогии с п. 6.4. Характеристическое уравнение на  $\lambda$  имеет вид

$$\prod_{l=1}^N (1 + i\alpha d_l)(\lambda - 1) = -i \sum_{l=1}^N d_l,$$

где, по аналогии с (6.14),  $d_l = \frac{\tau a_l}{h_l} \sin \omega_l h_l$ . В данном случае его решением является

комплексное число

$$\lambda = \frac{\prod_{l=1}^N (1 + i\alpha d_l) - i \sum_{l=1}^N d_l}{\prod_{l=1}^N (1 + i\alpha d_l)}.$$

В случае  $N=2$

$$\lambda = \frac{1 - \alpha^2 d_1 d_2 - i\beta(d_1 + d_2)}{1 - \alpha^2 d_1 d_2 + i\alpha(d_1 + d_2)}, \quad \text{где } \beta = 1 - \alpha.$$

$$|\lambda|^2 = \frac{(1 - \alpha^2 d_1 d_2)^2 + \beta^2 (d_1 + d_2)^2}{(1 - \alpha^2 d_1 d_2)^2 + \alpha^2 (d_1 + d_2)^2}.$$

Очевидно, при  $\alpha \geq 1/2$  условие  $|\lambda| \leq 1$  выполнено для любых  $d_i$ . Следовательно, схема (7.21) в случае  $N=2$  абсолютно устойчива. Иная ситуация имеет место в случае  $N > 2$ .

Покажем, что уже в трехмерном случае схема (7.21) условно устойчива при любых  $\alpha$ . Пусть  $d_1 = d_2 = d_3 = d$ . Это может быть достигнуто за счет варьирования волнового числа  $\omega_i$ . Тогда

$$\lambda = \frac{(1 + i\alpha d)^3 - 3id}{(1 + i\alpha d)^3} = \frac{A + i(B - 3d)}{A + iB},$$

где  $A = 1 - 3\alpha^2 d^2$ ,  $B = \alpha d(3 - \alpha^2 d^2)$ . Пользуясь формулой (2.14), находим

$$|\lambda|^2 = \frac{A^2 + (B - 3d)^2}{A^2 + B^2} = \frac{A^2 + B^2 - 6Bd + 9d^2}{A^2 + B^2}.$$

Для выполнения условия устойчивости  $|\lambda|^2 \leq 1$  необходимо выполнение неравенства

$$3d^2 \leq 2Bd = 2\alpha d^2(3 - \alpha^2 d^2),$$

что эквивалентно

$$|d| = \left| \frac{\tau a_l}{h_l} \sin \omega_l h_l \right| \leq \sqrt{\frac{3(2\alpha - 1)}{2\alpha^3}}$$

Отсюда следует ограничение на шаг по времени  $\tau$

$$\tau \leq \min_{l=1, \dots, N} \left( \frac{h_l}{|a_l|} \right) \sqrt{\frac{3(2\alpha - 1)}{2\alpha^3}}.$$

Таким образом, схема условно устойчива для всех  $\alpha$ . Максимальное значение  $\tau$  принимает при  $\alpha = 3/4$ . В этом случае условие устойчивости имеет вид

$$\tau \leq \frac{4}{3} \min_l \left( \frac{h_l}{|a_l|} \right),$$

то есть близко к устойчивости явных схем. При замене в (7.21) симметричной аппроксимации на несимметричную (левостороннюю при  $a_l > 0$  и правостороннюю при  $a_l < 0$ ) оценки устойчивости не меняются.

Подведем итоги для метода приближенной факторизации.

**Достоинства:**

- при решении стационарной задачи методом установления предельное решение не зависит от  $\tau$  (свойство полной аппроксимации);

**Недостатки:**

- схема условно устойчива для гиперболических уравнений при  $N > 2$ ;
- схема лишь предельно консервативна.

### 7.3. Метод предиктор-корректор

Идея метода предиктор-корректор дана в п. 6.3. Там метод рассматривался как способ построения неявной консервативной схемы для нелинейного уравнения. Оказывается, такой подход позволяет строить экономичные схемы для многомерных уравнений.

Изложение метода предиктор-корректор дадим на примере многомерной гиперболической системы уравнений, которая может быть записана в дивергентной

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{W}_i(\mathbf{U})}{\partial x_i} = 0 \quad (7.22)$$

и недивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = 0, \quad \text{где } \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{W}_i(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}. \quad (7.23)$$

В ряде задач бывает удобно вместо вектора консервативных переменных  $\mathbf{U}$  рассмотреть другой вектор зависимых переменных  $\mathbf{f}$ , то есть сделать замену переменных  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{f})$ .

Пусть матрица  $\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}$ . Тогда вместо (7.23) запишем следующую общую запись исходной

системы уравнений (7.22) в недивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = 0, \quad \text{где } \mathbf{C}_i = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{S}. \quad (7.24)$$

При  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{f}$  система (7.24) совпадает (7.23). Схема предиктор-корректор для решения системы (7.22) имеет вид

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{f}^{n+1/2N} - \mathbf{f}^n}{\tau\alpha} + \mathbf{C}_1^n \Lambda_1 \mathbf{f}^{n+1/2N} = 0, \\ \frac{\mathbf{f}^{n+2/2N} - \mathbf{f}^{n+1/2N}}{\tau\alpha} + \mathbf{C}_2^n \Lambda_2 \mathbf{f}^{n+2/2N} = 0, \\ \dots \\ \frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+(N-1)/2N}}{\tau\alpha} + \mathbf{C}_N^n \Lambda_N \mathbf{f}^{n+1/2} = 0, \\ \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \sum_{i=1}^N \Lambda_i \mathbf{W}_i^{n+1/2} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{предиктор} \\ \\ \\ \text{корректор} \end{array} \quad (7.25)$$

где  $\Lambda_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + O(h_i^k)$ . Схема (7.25) аппроксимирует систему уравнений (7.22) с порядком

$O(\tau^m + h^k)$ , где  $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ ,  $m = 2$  при  $\alpha = 1/2$  и  $m = 1$  при  $\alpha \neq 1/2$ . На этапе предиктора разностные уравнения на дробных шагах аппроксимируют уравнения в недивергентной форме, причем на каждом дробном шаге задействовано лишь одно из пространственных направлений, как в схеме расщепления. Благодаря этому решение каждого из разностных уравнений предиктора находится с помощью скалярной или векторной прогонки. На этапе корректора исходные уравнения аппроксимируются в дивергентном виде. Новые значения находятся по явным формулам по схеме типа «крест», где значения  $\mathbf{W}_i^{n+1/2} = \mathbf{W}_i(\mathbf{f}^{n+1/2})$  получены из решения уравнений на этапе предиктора.

В случае линейной системы с постоянными коэффициентами,  $\mathbf{W}_j = \mathbf{A}_j \mathbf{U}$ , где  $\mathbf{A}_j = \text{const}$ , в схеме предиктор-корректор легко исключить промежуточные шаги. После исключения схема (7.25) приобретает вид:

$$\prod_{l=1}^N (1 + \tau\alpha \mathbf{C}_l \Lambda_l) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \sum_{l=1}^N \mathbf{C}_l \Lambda_l \mathbf{f}^n$$

Легко видеть, что в этом, линейном, случае схема предиктор-корректор совпадает со схемой приближенной факторизации по направлениям (7.21). Поэтому спектральный анализ устойчивости, поскольку проводится для линейного уравнения, полностью совпадает с анализом схемы приближенной факторизации. То есть, при  $N \leq 2$  схема (7.25) абсолютно устойчива при  $\alpha \geq 1/2$ , при  $N > 2$  схема условно устойчива для любых  $\alpha$ .

Благодаря консервативной аппроксимации на этапе корректора схема предиктор-корректор (7.25) является консервативной для нестационарных задач. В то время как схема приближенной факторизации, также как и схема расщепления, лишь *предельно* консервативны.

Недостатки схемы предиктор-корректор те же, что и в схеме приближенной факторизации. Основной из них – условная устойчивость для гиперболических уравнений при  $N > 2$ .

#### 7.4. Метод релаксаций Гаусса-Зейделя и его частный случай – приближенная LU-факторизация

Идея метода Гаусса-Зейделя для обращения неявного оператора схемы состоит в следующем. Пусть для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Ru = 0$$

построена неявная разностная схема

$$M_h \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \tilde{R}_h u^n. \quad (7.26)$$

Представим многомерный оператор  $M_h$  в виде

$$M_h = D + L + U,$$

где  $D$  – «диагональный» оператор (т.е. не содержит сдвигов по пространственным направлениям),  $L$  – разностный оператор, содержащий все операторы сдвига назад по всем пространственным направлениям,  $U$  – разностный оператор, содержащий все операторы сдвига вперед по всем пространственным направлениям. Тогда для нахождения решения разностной схемы (7.26) на каждом шаге по времени можно применить следующую итерационную процедуру

$$\begin{cases} (D + L)\psi^{s+1/2} + U\psi^s = \tilde{R}_h u^n \\ (D + U)\psi^{s+1} + L\psi^{s+1/2} = \tilde{R}_h u^n \end{cases} \quad s = 0, \dots, p-1, \quad \psi^0 = 0. \quad (7.27)$$

После вычисления  $\psi^p$  находим значения на слое  $n+1$

$$u^{n+1} = u^n + \tau\psi^p.$$

На каждой итерации значения  $\psi^{s+1/2}$  и  $\psi^{s+1}$  могут быть *последовательно* найдены без использования прогонок по формулам бегущего счета. Действительно, на первом полшаге значения  $\psi^{s+1/2}$  можно найти, двигаясь в направлении возрастания индексов, по формуле

$$\psi^{s+1/2} = D^{-1} (\tilde{R}_h u^n - U\psi^s - L\psi^{s+1/2}). \quad (7.28)$$

После того, как значения  $\psi^{s+1/2}$  найдены во всей расчетной области, находим значения  $\psi^{s+1}$ , двигаясь в направлении убывания индексов, по формуле

$$\psi^{s+1} = D^{-1} (\tilde{R}_h u^n - L\psi^{s+1/2} - U\psi^{s+1}) = \psi^{s+1/2} + D^{-1} (U\psi^s - U\psi^{s+1}). \quad (7.29)$$

Метод (7.27) и его реализация (7.28)-(7.29) есть не что иное, как метод Гаусса-Зейделя (попеременно-треугольный метод) решения системы линейных алгебраических уравнений (7.26). При  $p \rightarrow \infty$  мы получаем точное решение схемы (7.26). На практике обычно бывает достаточно взять  $p=10-20$ .

Схему (7.27) удобно использовать для решения задач методом установления. Очевидно, схема (7.27) обладает свойством полной аппроксимации. Предельное стационарное решение схемы (7.27) при  $n \rightarrow \infty$  совпадает с решением стационарного аналога разностной схемы (7.26):

$$\tilde{R}_h u^n = 0$$

Если нас интересует стационарное решение разностной схемы (7.26), то в методе Гаусса-Зейделя (7.27) нет нужды делать много внутренних итераций, достаточно взять  $p=1$ . В этом случае метод Гаусса-Зейделя часто называют методом *приближенной LU-факторизации*. В схеме (7.27) при  $p=1$  легко исключается промежуточный шаг

$$(D+L)D^{-1}(D+U)\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = \tilde{R}_h u^n. \quad (7.30)$$

Таким образом, схема Гаусса-Зейделя при  $p=1$  является по сути разновидностью схемы приближенной факторизации.

Проиллюстрируем применение метода на примере решения нелинейного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0$$

Строим полностью неявную консервативную схему в общем виде

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^{n+1}-f_{j-1/2}^{n+1}}{h_1} + \frac{g_{k+1/2}^{n+1}-g_{k-1/2}^{n+1}}{h_2} = 0. \quad (7.31)$$

Порядок ее аппроксимации по пространству определяется способом вычисления численных потоков  $f_{j\pm 1/2}^{n+1}$ ,  $g_{k\pm 1/2}^{n+1}$ . Возьмем противопотоковую аппроксимацию 1-го порядка, записанную в виде схемы Роу (см. п. 5.5.2):

$$f_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} [f_j + f_{j+1} - |a_{j+1/2}|(u_{j+1} - u_j)]^{n+1}, \quad (7.32)$$

где  $a_{j+1/2} = a\left(\frac{u_j + u_{j+1}}{2}\right)$ ,  $a(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}$ . Аналогично вычисляются  $g_{k\pm 1/2}^{n+1}$ . Схема (7.31) с

потоками (7.32) нелинейна. Линеаризуем ее. Для начала заметим, что

$$f(u_{j+1}) = f(u_j) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_j (u_{j+1} - u_j) + O(h^2) = f_j + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{j+\frac{1}{2}} (u_{j+1} - u_j) + O(h^2).$$

Тогда

$$f_{j+1/2} = f(u_j) + a_{j+1/2}^- (u_{j+1} - u_j) + O(h^2), \quad \text{где } a^- = \frac{a - |a|}{2}.$$

Аналогично,

$$f_{j-1/2} = f(u_j) - a_{j-1/2}^+ (u_j - u_{j-1}) + O(h^2), \quad \text{где } a^+ = \frac{a + |a|}{2}.$$

Тогда

$$\left(\frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{h_1}\right)^{n+1} = \frac{1}{h_1} [a_{j+1/2}^- (u_{j+1} - u_j) + a_{j+1/2}^+ (u_j - u_{j-1})]^{n+1} + O(h).$$

Теперь, собственно, делаем линеаризацию (замораживаем коэффициенты)

$$\left(\frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{h_1}\right)^{n+1} \approx \left(\frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{h_1}\right)^n + \left[ (a^-)_{j+1/2}^n \Lambda_+^{(j)} + (a^+)_{j-1/2}^n \Lambda_-^{(j)} \right] (u_j^{n+1} - u_j^n).$$

В результате получаем следующую линейную относительно  $u^{n+1}$  схему

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \tau (a_{j+1/2}^- \Lambda_+^{(j)} + a_{j-1/2}^+ \Lambda_-^{(j)} + a_{k+1/2}^- \Lambda_+^{(k)} + a_{k-1/2}^+ \Lambda_-^{(k)}) \right] \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \\ & = - \left[ \left( \frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{h_1} \right) + \left( \frac{g_{k+1/2} - g_{k-1/2}}{h_2} \right) \right]^n \equiv \tilde{R}_h u^n. \end{aligned}$$

Обозначим  $\hat{a}_{j\pm 1/2}^{\mp} = \frac{\tau}{h_1} (a_{j\pm 1/2}^{\mp})^n$ ,  $\hat{a}_{k\pm 1/2}^{\mp} = \frac{\tau}{h_2} (a_{k\pm 1/2}^{\mp})^n$  и перепишем схему в виде

$$\left( D_{jk} + \hat{a}_{j+1/2}^- T_{j+1} - \hat{a}_{j-1/2}^+ T_{j-1} + \hat{a}_{k+1/2}^- T_{k+1} - \hat{a}_{k-1/2}^+ T_{k-1} \right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \tilde{R}_h u^n,$$

где  $D_{jk} = 1 + \hat{a}_{j+1/2}^- - \hat{a}_{j-1/2}^+ + \hat{a}_{k+1/2}^- - \hat{a}_{k-1/2}^+$ , а  $T_{m\pm 1}$  – операторы сдвига на узел вперед или назад по направлению  $m$ .

Теперь, собственно, можно применить приближенную LU-факторизацию (7.30):

$$\left( D_{jk} - \hat{a}_{j-1/2}^+ T_{j-1} - \hat{a}_{k-1/2}^+ T_{k-1} \right) D_{jk}^{-1} \left( D_{jk} + \hat{a}_{j+1/2}^- T_{j+1} + \hat{a}_{k+1/2}^- T_{k+1} \right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \tilde{R}_h u^n.$$

Решение схемы находится в два этапа. На первом этапе по формулам бегущего счета вычисляется вспомогательная величина

$$\Delta \psi_{jk}^* = D_{jk}^{-1} \left( \tilde{R}_h u^n - \hat{a}_{j-1/2}^+ \Delta \psi_{j-1,k}^* - \hat{a}_{k-1/2}^+ \Delta \psi_{j,k-1}^* \right).$$

На втором, также по формулам бегущего счета, но в обратном направлении, вычисляется приращение  $\Delta \psi$ :

$$\Delta \psi_{jk} = \Delta \psi_{jk}^* - D_{jk}^{-1} \left( \hat{a}_{j+1/2}^- \Delta \psi_{j+1,k}^* + \hat{a}_{k+1/2}^- \Delta \psi_{j,k+1}^* \right).$$

После этого по явным формулам находится  $u^{n+1}$

$$u^{n+1} = u^n + \tau \Delta \psi.$$

Как видно, алгоритм не требует прогонок. Можно показать, что при  $p = 1$  метод Гаусса-Зейделя сохраняет свойство абсолютной устойчивости для любого числа пространственных направлений.

## 7.5. Сравнение методов

В таблице 2 приведено сравнение устойчивости, экономичности и способа реализации рассмотренных выше неявных схем для многомерных уравнений.

Таблица 2. Сравнение неявных схем для многомерных уравнений.

Схема	Устойчивость для парабол. задач	Устойчивость для гипербол. задач	Экономичность / реализация	Примечание
Схема с весами	АУ <sup>1</sup>	АУ	неэкономична	Консервативна.
Схема расщепления	АУ	АУ	Э <sup>3</sup> / прогонка	Отсутствие полной аппроксимации при $N \neq 2$ или $\alpha \neq 1/2$ Предельно консервативна.
Схема прилб. факторизации	АУ	АУ при $N=2$ , УУ <sup>2</sup> при $N>2$	Э / прогонка	Условная устойчивость для гиперб. задач. Предельно консервативна.
Схема предиктор-корректор	АУ	АУ при $N=2$ , УУ при $N>2$	Э / прогонка	Условная устойчивость для гиперб. задач. Консервативна.
Схема LU-факторизации	АУ	АУ	Э / бегущий счет	Предельно консервативна.

<sup>1</sup>АУ – абсолютная устойчивость при  $\alpha \geq 1/2$ .

<sup>2</sup>УУ – условная устойчивость

<sup>3</sup>Э – схема экономична.

## 8. Разностные методы решения одномерных уравнений газовой динамики

В настоящей главе рассматриваются разностные схемы для численного решения уравнений газовой динамики. Основное внимание уделено методологии построения экономичных неявных разностных схем. Другие подходы построения схем, такие как схемы повышенного порядка на расширенном шаблоне и компактные разностные схемы рассмотрены в различных работах (см., например, [2]).

### 8.1. Схемы с весами

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в декартовых координатах

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad p = p(\rho, \varepsilon), \quad (8.1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}, \quad E = \rho(\varepsilon + v^2/2).$$

а  $\rho, \varepsilon$  – плотность и внутренняя энергия единицы массы газа,  $v$  – скорость,  $p$  – давление, т.е. сила, действующая на единичную площадку,  $E = \rho(\varepsilon + v^2/2)$  – массовая плотность полной энергии.

Для численного решения уравнений газовой динамики рассмотрим разностную схему с весами

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda(\alpha \mathbf{W}_h^{n+1} + \beta \mathbf{W}_h^n) = 0,$$

аппроксимирующую систему уравнений (1) с порядком  $O(\tau^m + h^k)$ , где, как и выше,  $m = 2$  при  $\alpha = 0.5 + O(\tau)$ , а  $\Lambda = \partial/\partial x + O(h^k)$ . Линеаризуем вектор  $\mathbf{W}_h^{n+1}$  относительно вектора  $\mathbf{U}^{n+1}$ :

$$\mathbf{W}_h^{n+1} = \mathbf{W}_h(\mathbf{U}^{n+1}) = \mathbf{W}_h^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_h^n + \tau \tilde{\mathbf{B}}^n \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + O(\tau^2),$$

где для уравнения состояния  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3 - \gamma)v^2/2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ -\gamma v E/\rho + (\gamma - 1)v^3 & \gamma E/\rho - 3(\gamma - 1)v^2/2 & \gamma v \end{pmatrix}.$$

С учетом линеаризации разностная схема

$$(I + \tau \alpha \Lambda \tilde{\mathbf{B}}^n) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n, \quad (8.2)$$

аппроксимирует систему уравнений (8.1) также с порядком  $O(\tau^m + h^k)$  и реализуется, как следует из вида матрицы  $\tilde{\mathbf{B}}$ , векторной прогонкой на каждом временном шаге. Дадим определение однородной системы уравнений: назовем систему уравнений *однородной*

первой степени, если справедливо соотношение  $\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}$ , где  $\tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}$ . Для однородных

систем первой степени дивергентная (8.1) и недивергентная

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}$$

формы записи уравнений эквивалентны, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U} = -\tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}}.$$

Нетрудно убедиться, что уравнения газовой динамики являются однородной системой первой степени, так как  $\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{U}$ . Тогда и разностная схема

$$(I + \tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}^n \Lambda) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n$$

обладает теми же свойствами, что и базовая схема (8.2).

Выберем в качестве искомого функций вектор  $\mathbf{f} \neq \mathbf{U}$  и линеаризуем векторы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}$  относительно вектора  $\mathbf{f}$  (см., также [2]):

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}(\mathbf{f}^{n+1}) = \mathbf{U}^{n+1} + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_h^n + \tau \mathbf{A}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^2)$$

$$\mathbf{W}_h^{n+1} = \mathbf{W}_h(\mathbf{f}^{n+1}) = \mathbf{W}_h^n + \tau \left( \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}} \right)^n \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right)^n + O(\tau^2) = \mathbf{W}_h^n + \tau \tilde{\mathbf{B}}^n \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + O(\tau^2)$$

где  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ . Например, для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, \varepsilon)^T$  эти матрицы равны

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & \rho & 0 \\ \varepsilon + v^2/2 & \rho v & \rho \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ v^2 + (\gamma-1)\varepsilon & 2\rho v & (\gamma-1)\rho \\ \rho v(\gamma\varepsilon + v^2/2) & \rho(\gamma\varepsilon + 3v^2/2) & \gamma\rho v \end{pmatrix}.$$

Разностная схема

$$(\mathbf{A}^n + \tau \alpha \Lambda \tilde{\mathbf{B}}^n) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{W}_h^n, \quad (8.3)$$

аппроксимирует уравнения газовой динамики (8.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$  при всех значениях параметра  $\alpha$  и реализуется векторной прогонкой. Например, для  $k=2$  разностная схема (8.3) может быть представлена в виде системы трехточечных линейных уравнений

$$\mathbf{a}_i \mathbf{f}_{i-1}^{n+1} + \mathbf{b}_i \mathbf{f}_i^{n+1} + \mathbf{c}_i \mathbf{f}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{d}_i^n,$$

где при симметричной аппроксимации первых производных

$$\mathbf{a}_i = -\tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}_{i-1}^n, \quad \mathbf{b}_i = \mathbf{A}_i^n, \quad \mathbf{c}_i = \tau \alpha \tilde{\mathbf{B}}_{i+1}^n, \quad \mathbf{d}_i^n = \mathbf{A}_i^n \mathbf{f}_i^n - \tau \beta (\tilde{\mathbf{B}}_{i+1}^n \mathbf{f}_{i+1}^n - \tilde{\mathbf{B}}_{i-1}^n \mathbf{f}_{i-1}^n),$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  – матрицы размерности  $3 \times 3$ . Решение разностной схемы находится векторной прогонкой.

При несимметричной аппроксимации пространственных производных со вторым порядком разностная схема (8.3) представляется в виде системы пятиточечных уравнений

$$\mathbf{a}_i \mathbf{f}_{i-2}^{n+1} + \mathbf{b}_i \mathbf{f}_{i-1}^{n+1} + \mathbf{c}_i \mathbf{f}_i^{n+1} + \mathbf{d}_i \mathbf{f}_{i+1}^{n+1} + \mathbf{e}_i \mathbf{f}_{i+2}^{n+1} = \mathbf{d}_i^n$$

и реализуется пятиточечной векторной прогонкой. Для линеаризованных уравнений газовой динамики разностные схемы (8.2), (8.3) безусловно устойчивы при  $\alpha \geq 0.5$ , как схемы с весами.

Наряду с дивергентной формой (8.1) рассмотрим уравнения газовой динамики в недивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad (8.4)$$

Матрица  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{f})$  при различном выборе искомого функций  $\mathbf{f}$  может содержать различное число ненулевых членов, что позволяет рассматривать различные разностные схемы, требующие меньшего числа операций при их реализации. Например, для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, \varepsilon)^T$  оператор

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ a^2 & v & b^2 \\ 0 & c^2 & v \end{pmatrix}, \quad \text{где } a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}, \quad c^2 = \frac{p}{\rho}. \quad (8.5)$$

Еще более простой вид уравнения газовой динамики (8.4) принимают в переменных плотность, скорость и давление

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ 0 & v & b^2 \\ 0 & c^2 & v \end{pmatrix}, \quad b^2 = \frac{1}{\rho}, \quad c^2 = \gamma p. \quad (8.6)$$

Введем аппроксимации первых производных несимметричными операторами  $\Lambda^k = \partial/\partial x + O(h^k)$  с учетом знака скорости  $v$  по формулам:

$$\Lambda^k = \Lambda_{\mp}^k, \quad \bar{\Lambda}^k = \Lambda_{\pm}^k, \quad \text{если } v \geq 0 \quad \text{и} \quad \Lambda^k = \Lambda_{\pm}^k, \quad \bar{\Lambda}^k = \Lambda_{\mp}^k, \quad \text{если } v \leq 0,$$

или по формуле

$$\Lambda^k = \Lambda^2 = (\Lambda_+^1 + \Lambda_-^1)/2$$

— при симметричной аппроксимации. Аппроксимируем матричные операторы  $\mathbf{B} \cdot \partial/\partial x$  в (8.5), (8.6) подобно [1,2] по формулам

$$\mathbf{B}^n \Lambda^k = \begin{pmatrix} v^n \Lambda^k & \rho \Lambda^k & 0 \\ 0 & v^n \Lambda^k & (b^2)^n \bar{\Lambda}^k \\ 0 & (c^2)^n \Lambda^k & v^n \Lambda^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^n \bar{\Lambda}^k = \begin{pmatrix} v^n \Lambda^k & \rho \Lambda^k & 0 \\ 0 & v^n \Lambda^k & (b^2)^n \bar{\Lambda}^k \\ 0 & (c^2)^n \Lambda^k & v^n \Lambda^k \end{pmatrix},$$

с порядком  $O(h^k)$ , причем первые производные при конвективных членах в уравнениях аппроксимируем операторами  $\Lambda^k$ , а член с давлением в уравнении движения — сопряженным операторам  $\bar{\Lambda}^k$ . Разностная схема с весами

$$\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}^n \Lambda^k (\alpha \mathbf{f}^{n+1} + \beta \mathbf{f}^n) = 0$$

является линейной, аппроксимирует систему уравнений (8.1) с порядком  $O(\tau + h^k)$  при всех значениях  $\alpha$  и также реализуется векторной прогонкой. Перепишем ее в каноническом виде

$$(I + \tau \alpha \mathbf{B}^n \Lambda^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\mathbf{B}^n \Lambda^k \mathbf{f}^n$$

С учетом соотношений

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}$$

разностная схема

$$(I + \tau \alpha \mathbf{B}^n \Lambda^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = - \left[ (\mathbf{A}^{-1}) \Lambda \mathbf{W}_h^l \right]^n \quad (8.7)$$

аппроксимирует систему уравнений (8.1) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$  и реализуется векторной прогонкой подобно схеме (8.3). Напомним, что в схеме (8.7) дифференциальный оператор  $\partial \mathbf{W} / \partial x$  аппроксимирован симметричным оператором  $\Lambda^l \mathbf{W}$  с порядком  $O(h^l)$ .

## 8.2. Схемы приближенной факторизации

Для построения экономичных разностных схем, реализуемых *скалярными* прогонками, воспользуемся методом приближенной факторизации. Представим матричный оператор  $\mathbf{B}$  в виде суммы операторов

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \quad (8.8)$$

таким образом, чтобы разностные схемы, построенные на основе алгоритмов расщепления, удовлетворяли следующим свойствам:

- они были экономичными (по числу операций на узел сетки);
- обладали свойством безусловной устойчивости при соответствующем выборе весового множителя  $\alpha$ .

Тогда разностная схема приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^2 (I + \tau \alpha \mathbf{B}_{jh}^n \Lambda^k) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^l \mathbf{W}_h^n \quad (8.9)$$

с расщеплением (8.8) аппроксимирует уравнения (8.1) с порядком  $O(\tau + \tau h^k + h^l)$ . Ей эквивалентна схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^l \mathbf{W}_h^n, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{1h}^n \Lambda^k) \xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ (\mathbf{I} + \tau \alpha \mathbf{B}_{2h}^n \Lambda^k) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned} \quad (8.10)$$

При установлении она аппроксимирует стационарные уравнения  $\Lambda^l \mathbf{W}_h^n = 0$  в консервативной форме с порядком  $O(h^l)$ , так как матрица  $\mathbf{A}^{-1} \neq 0$ .

Рассмотрим уравнений газовой динамики (8.4) для  $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^T$ , где  $\mathbf{B}$  определено в (8.6). Введем расщепление оператора физическим процессам в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \\ 0 & c^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

и аппроксимируем систему уравнений газовой динамики (8.4) разностной схемой (8.9) или (8.10), где

$$\mathbf{B}_1^n \Lambda^k = v^n \Lambda^k, \quad \mathbf{B}_2^n \Lambda^k = \begin{pmatrix} 0 & \rho \Lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & (b^2)^n \bar{\Lambda}^k \\ 0 & (c^2)^n \Lambda^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, разностная схема (8.9) с расщеплением (8.11) аппроксимирует исходные уравнения с порядком  $O(\tau + \tau h + h^2)$  и реализуется на дробных шагах скалярными трехточечными прогонками. Действительно, на нулевом дробном шаге система разностных уравнений

$$\xi^n = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n \Lambda^l \mathbf{W}_h^n,$$

где, с учетом уравнения состояния  $\varepsilon = p/(\gamma-1)\rho$ ,

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_\rho \\ \xi_v \\ \xi_p \end{pmatrix}, \quad \Lambda^l \mathbf{W} = \Lambda^l \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} p + \rho \frac{v^2}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ (\gamma-1) \frac{v^2}{2} & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \end{pmatrix},$$

разрешается явно для каждой компоненты вектора  $\xi = (\xi_\rho, \xi_v, \xi_p)^T$ . Так как матрица  $\mathbf{B}_{1h}$  диагональная, то на первом дробном шаге разностные уравнения

$$\begin{aligned} \xi_\rho^{n+1/2} + \tau \alpha v^n \Lambda^1 \xi_\rho^{n+1/2} &= \xi_\rho^n \\ \xi_v^{n+1/2} + \tau \alpha v^n \Lambda^1 \xi_v^{n+1/2} &= \xi_v^n \\ \xi_p^{n+1/2} + \tau \alpha v^n \Lambda^1 \xi_p^{n+1/2} &= \xi_p^n \end{aligned}$$

реализуются трехточечными скалярными прогонками независимо для каждой компоненты вектора (или по неявной схеме бегущего счета, если компонента скорости одного знака). На втором дробном шаге решается система разностных уравнений

$$\begin{aligned} \xi_\rho^{n+1} &= \xi_\rho^{n+1/2} - \tau \alpha \rho^n \Lambda^k \xi_v^{n+1} \\ \xi_v^{n+1} + \tau \alpha b^2 \bar{\Lambda}^k \xi_p^{n+1} &= \xi_v^{n+1/2} \\ \xi_p^{n+1} &= \xi_p^{n+1/2} - \tau \alpha c^2 \Lambda^k \xi_v^{n+1} \end{aligned}$$

Исключая невязки давления из уравнения движения, получим разностное уравнение для невязки скорости

$$\left[ I - \tau^2 \alpha^2 b^2 \bar{\Lambda}^k c^2 \Lambda^k \right] \xi_v^{n+1} = \xi_v^{n+1/2} - \tau \alpha b^2 \bar{\Lambda}^k \xi_p^{n+1/2}.$$

Его решение находится трехточечной скалярной прогонкой, после чего значения  $\xi_\rho^{n+1}$  и  $\xi_p^{n+1}$  вычисляются явно. Новые значения функций на  $n+1$  слое определяются из последнего векторного уравнения также по явным формулам. Таким образом, решение уравнений газовой динамики (8.1),(8.4) по разностной схеме (8.11) сводится к  $m+1$  скалярной прогонке, где  $m$  - число уравнений.

Схема второго порядка аппроксимации по всем переменным может быть построена на основе метода предиктор – корректор при различном выборе вектора искомых функций  $\mathbf{f}$ . С учетом введенных выше расщеплений она может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{f}^{n+1/4} - \mathbf{f}^n}{\tau} + \mathbf{B}_{1h}^n \Lambda^k \mathbf{f}^{n+1/4} &= 0 \\
\frac{\mathbf{f}^{n+1/2} - \mathbf{f}^{n+1/4}}{\tau} + \mathbf{B}_{2h}^n \Lambda^k \mathbf{f}^{n+1/2} &= 0, \\
\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2} &= 0
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Она аппроксимирует уравнения (8.1) с порядком  $O(\tau^2 + \tau h^k + h^l)$  при  $\alpha = 0.5 + O(\tau)$ . На этапе предиктора решаются разностные уравнения в недивергентном виде по неявной схеме, что создает запас устойчивости, а консервативность схемы восстанавливается на этапе корректора при аппроксимации уравнений в дивергентной форме. Ее реализация для  $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^T$  и расщепления оператора (8.11) подобна схеме приближенной факторизации (8.10). На первом дробном шаге  $n + 1/4$  схемы (8.12) на этапе предиктора система разностных уравнений

$$\begin{aligned}
\rho^{n+1/4} + \tau \alpha v^n \Lambda^k \rho^{n+1/4} &= \rho^n \\
v^{n+1/4} + \tau \alpha v^n \Lambda^k v^{n+1/4} &= v^n \\
p^{n+1/4} + \tau \alpha v^n \Lambda^k p^{n+1/4} &= p^n
\end{aligned}$$

решается скалярными прогонками для каждого уравнения. На втором шаге  $n + 1/2$  решение системы разностных уравнений

$$\begin{aligned}
\rho^{n+1/2} + \tau \alpha \rho^n \Lambda^k v^{n+1/2} &= \rho^{n+1/4} \\
v^{n+1/2} + \tau \alpha (b^2)^n \bar{\Lambda}^k p^{n+1/2} &= v^{n+1/4} \\
p^{n+1/2} + \tau \alpha (c^2)^n \Lambda^k v^{n+1/2} &= p^{n+1/4}
\end{aligned}$$

сводится к скалярной прогонке для давления или скорости. Исключая, например, давление из уравнения движения, получим разностное уравнение

$$\left[ I - \tau^2 \alpha^2 (b^2)^n \bar{\Lambda}^k (c^2)^n \Lambda^k \right] v^{n+1/2} = v^{n+1/4} - \tau \alpha (b^2)^n \bar{\Lambda}^k p^{n+1/4}$$

Его решение может быть получено  $2k + 1$ -точечной скалярной прогонкой (при  $k = 1$  – трехточечной), после чего явно находятся новые значения  $\rho^{n+1/2}, p^{n+1/2}$ . Наконец, значения функций на новом временном шаге получают по явным формулам

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \tau \Lambda^l \mathbf{W}_h^{n+1/2}.$$

При  $k = 1, l = 2$  разностная схема (8.12) аппроксимирует исходные уравнения газовой динамики с порядком  $O(\tau^2 + \tau h + h^2)$ , реализуется трехточечными скалярными прогонками и безусловно устойчива при  $\alpha \geq 0.5$ . Для линейных уравнений газовой динамики с постоянными коэффициентами разностные схемы (8.9) и (8.12) для вектора  $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^T$  с расщеплением (8.11) эквивалентны.

Остановимся на анализе устойчивости схем (8.9) и (8.12), а именно, покажем, что они безусловно устойчивы при  $\alpha > 0.5$ . Покажем это для линеаризованных уравнений газовой динамики, полагая коэффициенты матричных операторов постоянными. Устойчивость схемы (8.9) будем исследовать спектральным методом, отыскивая решение в виде

$$\mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}_0 e^{i\omega_n + ikx_j} = \mathbf{f}_0 \lambda^n e^{ikjh},$$

где  $t_n = n\tau$ ,  $x_j = jh$ , а  $\mathbf{f}_0 = (\rho_0, v_0, \varepsilon_0)^T$ . Пусть для простоты  $\Lambda = \bar{\Lambda} = (\Lambda_+ + \Lambda_-)/2 = \partial/\partial x + O(h^2)$ . При такой симметричной аппроксимации операторов схем со вторым порядком им соответствует характеристическое уравнение

$$\det \begin{vmatrix} (1 + i\alpha vd)(\lambda - 1) + ivd & i\rho_0 d [\alpha(\lambda - 1) + 1] & 0 \\ 0 & (1 + i\alpha vd)(\lambda - 1) + ivd & ib^2 d [\alpha(\lambda - 1) + 1] \\ 0 & ic^2 d [\alpha(\lambda - 1) + 1] & (1 + i\alpha vd)(\lambda - 1) + ivd \end{vmatrix} = 0$$

где  $d = (\tau/h) \sin(kh)$ ,  $b^2 = 1/\rho$ ,  $c^2 = \gamma p$ . Его корни равны

$$\lambda_1 = \frac{1 - i(1 - \alpha)d}{1 + i\alpha d}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1 - i(1 - \alpha)d(v \pm s)}{1 + i\alpha d(v \pm s)}$$

и, очевидно,  $|\lambda| \leq 1$  при  $\alpha \geq 1/2$ . Здесь  $s = \sqrt{\gamma p / \rho}$  – скорость звука. Подобные оценки устойчивости схем (8.9) и (8.12) справедливы и при несимметричной аппроксимации.

**Замечание.** При симметричной аппроксимации оператора правой части разностные схемы (8.7), (8.9) и (8.12) имеют второй порядок аппроксимации по пространству. Хорошо известно (см., например, [6]), что симметричная аппроксимация первых производных в разностных схемах приводит к осцилляциям решения. Для их подавления подобно можно ввести сглаживающий оператор второго порядка малости следующего вида

$$\Lambda W_j = \frac{W_{j+1} - W_{j-1}}{2h} - \frac{h}{2} \cdot \text{sign}(v) \varepsilon \frac{W_{j+1} - 2W_j + W_{j-1}}{h^2},$$

где  $\varepsilon = \frac{|W_{j+1} - 2W_j + W_{j-1}|}{|W_{j+1} - W_j| + |W_j - W_{j-1}|}$  и  $\varepsilon = 0$ , если  $|W_{j+1} - W_j| + |W_j - W_{j-1}| = 0$ .

Как показывают расчеты различных задач, введение сглаживания практически устраняет осцилляции решения.

## 9. Метод конечных объемов

Метод конечных объемов (МКО) – универсальный способ построения консервативных схем для неравномерных, криволинейных и даже неструктурированных сеток. Мы уже использовали метод конечных объемов в одномерном случае при построении схемы Годунова (п. 5.4.2). В данном параграфе рассмотрим его более детально на примере двумерных и трехмерных уравнений.

### 9.1. Интегральный закон сохранения

Дифференциальные уравнения математической физики являются, как правило, следствиями более общих интегральных законов сохранения, таких как закон сохранения массы, импульса, энергии. Пусть имеется уравнение в частных производных, представимое в дивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = g(u), \quad (9.1)$$

Восстановим интегральный закон сохранения, эквивалентный (9.1) на гладких решениях.

Для этого введем в рассмотрение вектор-функцию  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ . Тогда (9.1) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{f}) = g(u), \quad \operatorname{div}(\mathbf{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}. \quad (9.2)$$

Проинтегрируем уравнение (9.2) по произвольному объему  $V$ .

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\mathbf{f}(u)) dV = \int_V g(u) dV$$

По теореме Гаусса-Остроградского интеграл по объему от  $\operatorname{div}(\mathbf{f})$  равен интегралу по поверхности объема  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{f}(u)) dV = \oint_{\partial V} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

где  $\partial V$  – поверхность объема  $V$ ,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\partial V$ . Интеграл  $\oint_{\partial V} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dS$  называется потоком векторного поля  $\mathbf{f}$  через поверхность  $\partial V$ .

В результате получим *интегральный закон сохранения*

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V g(u) dV. \quad (9.3)$$

Суть этого интегрального закона: скорость изменения величины  $u$  в объеме  $V$  равна сумме потока этой величины через границу объема  $V$  и мощности источника внутри объема  $V$ . Интегральное уравнение (9.3) является более общей моделью явления, нежели (9.1), в том смысле, что описывает, в частности, разрывные решения, такие как ударные волны, контактные разрывы на границе двух сред и т.д. Именно интегральный закон получают из общих физических соображений, а уже затем, предполагая гладкость решения и функции  $\mathbf{f}$ , выводят дифференциальный закон сохранения (9.1).

### 9.2. Дискретизация интегрального закона сохранения

Метод конечных объемов основан на аппроксимации закона сохранения в интегральном виде. Рассмотрим метод конечных объемов на примере двумерного нелинейного уравнения переноса, записанного в интегральном виде (9.3). Разобьем расчетную область на ячейки (рис. 2). Вообще говоря, ячейки могут быть произвольной формы, но их грани будем предполагать отрезками прямых (в 3D случае – плоскостями).

Пусть решение задачи (9.3) – функция непрерывного аргумента  $u$  – нам известно. Для каждой ячейки с номером  $i$  определим среднюю по объему ячейки величину  $u$ :

$$\bar{u}_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} u dV .$$

Отнесем  $\bar{u}_i$  ее к центру масс ячейки. Тогда для каждой ячейки с объемом  $V_i$  можем записать закон сохранения (9.3):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{V_i} \oint_{\partial V_i} (\mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} g(u) dV ,$$

где  $\partial V_i$  – совокупность граней ячейки  $i$ . Поверхностный интеграл равен сумме интегралов по всем  $N_i$  граням ячейки:

$$\oint_{\partial V_i} (\mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}) dS = \sum_{\alpha=1}^{N_i} \oint_{S_\alpha} (\mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}) dS$$

Задача построения разностной схемы сводится теперь к аппроксимации потоков через грани ячейки и интеграла от источника  $g(u)$ . В большинстве случаев поступают так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_i} \int_{V_i} g(u) dV &= g(\bar{u}_i) + O(h^2), \\ \oint_{S_\alpha} (\mathbf{f}(u) \cdot \mathbf{n}) dS &= \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha \cdot S_\alpha + O(h^k) \end{aligned} \tag{9.4}$$

где  $S_\alpha$  – площадь грани  $\alpha$  (в 2D случае – длина отрезка),  $\mathbf{n}_\alpha$  – единичная внешняя нормаль к грани  $\alpha$ ,  $\mathbf{f}_\alpha$  – значение вектора  $\mathbf{f}$  в центре грани  $\alpha$  (рис. 14). Фактически это означает вычисление интегралов по формуле прямоугольников. Под  $h$  в (9.4) подразумевается характерное расстояние между центрами соседних ячеек.

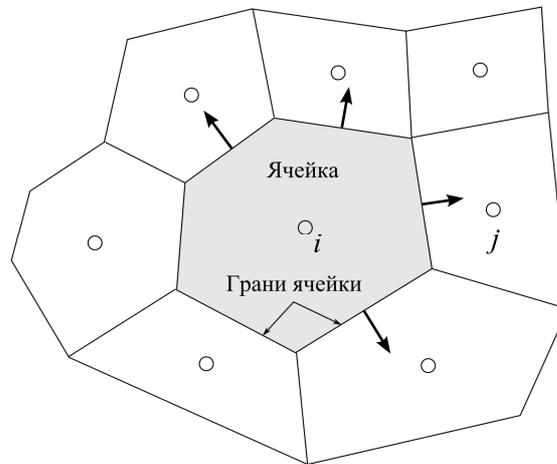


Рис. 14. Потоки через грани ячеек.

В результате разностная схема метода конечных объемов приобретает вид

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{V_i} \sum_{\alpha=1}^{N_i} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha \cdot S_\alpha = g(\bar{u}_i). \tag{9.5}$$

Остается конкретизировать способ вычисления  $\mathbf{f}_\alpha$  через значения искомой переменной  $\bar{u}_i$  в центрах ячеек, а также способ аппроксимации производной по времени.

Метод конечных объемов легко распространяется на случай системы уравнений.

### 9.3. МКО для уравнения диффузии

В предыдущем параграфе мы рассмотрели метод конечных объемов для гиперболического уравнения, где  $f_i = f_i(u)$ . В практических задачах такая ситуация имеет место при отсутствии или пренебрежении силами вязкости среды (процессами диффузии). Это относится к уравнениям газовой динамики, уравнениям Эйлера движения невязкой жидкости, уравнениям мелкой воды. В общем случае (уравнения Навье-Стокса) такие

силы есть, тогда вектора потоков имеют вид:  $f_i = f_i\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ .

В качестве примера рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$$

Его можно представить в дивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0,$$

где

$$f_1 = f_1(u, u_{x_1}) = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad f_2 = f_2(u, u_{x_2}) = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

что позволяет полностью перенести для этого уравнения идеологию метода конечных объемов.

### 9.4. Аппроксимация потоков через грани ячейки

Рассмотрим различные способы аппроксимации  $\mathbf{f}_\alpha$  на примере равномерной прямоугольной сетки с шагами  $h_1$  и  $h_2$  (рис. 15). Для нумерации ячеек сетки удобно ввести два индекса  $(i, j)$ . Грани ячейки  $(i, j)$  будем обозначать  $i \pm 1/2, j \pm 1/2$  (см. рис. 15).

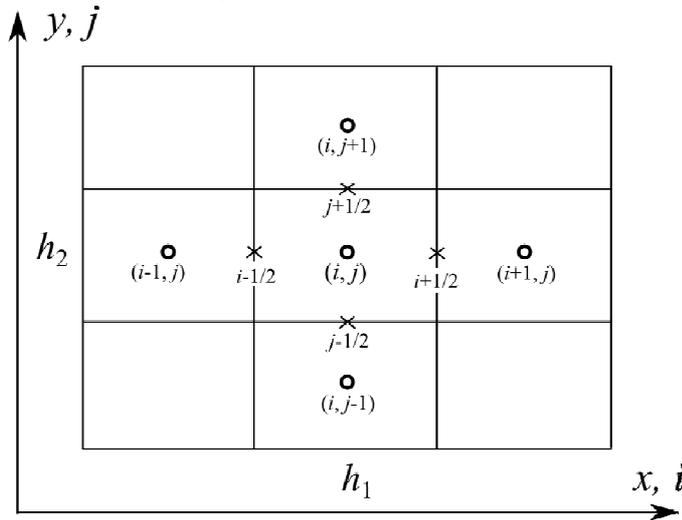


Рис. 15. Шаблон схемы в случае декартовой сетки.

В дальнейшем для краткости будем опускать черту над  $\bar{u}_{ij}$ . Также предположим, что  $g(u) = 0$ . В этом случае при аппроксимации производной по времени  $\partial/\partial t$  разностью вперед получим следующую запись схемы конечных объемов (9.5):

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau} + \frac{1}{V_{ij}} \left[ (\mathbf{f} \cdot \mathbf{S})_{i+1/2} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{S})_{i-1/2} + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{S})_{j+1/2} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{S})_{j-1/2} \right] = 0. \quad (9.6)$$

где для удобства введено обозначение  $\mathbf{S}_{m+1/2}$  – нормаль к грани  $m+1/2$ , равная по модулю площади этой грани и направленная в сторону увеличения индекса  $m$ . Так,  $\mathbf{S}_{i+1/2} = \mathbf{n}_{i+1/2} |S_{i+1/2}|$ ,  $\mathbf{S}_{i-1/2} = -\mathbf{n}_{i-1/2} |S_{i-1/2}|$ . Теперь остановимся на способах вычисления численных потоков  $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{S})_{i\pm 1/2}$  и  $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{S})_{j\pm 1/2}$ .

#### 9.4.1. Симметричная аппроксимация

Кажущийся логичным выбор

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{S})_{i+1/2} = \mathbf{f}_{i+1/2} \mathbf{S}_{i+1/2}, \quad \text{где } \mathbf{f}_{i+1/2} = \mathbf{f}\left(\frac{u_i + u_{i+1}}{2}\right),$$

приводит нас к центрально-разностной схеме. Действительно, с учетом введенных обозначений (9.5) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{V_{ij}} \left[ \mathbf{f}\left(\frac{u_{ij} + u_{i+1,j}}{2}\right) \mathbf{n}_{i+1/2} S_{i+1/2} + \mathbf{f}\left(\frac{u_{i-1,j} + u_{ij}}{2}\right) \mathbf{n}_{i-1/2} S_{i-1/2} + \right. \\ \left. + \mathbf{f}\left(\frac{u_{ij} + u_{i,j+1}}{2}\right) \mathbf{n}_{j+1/2} S_{j+1/2} + \mathbf{f}\left(\frac{u_{i,j-1} + u_{ij}}{2}\right) \mathbf{n}_{j-1/2} S_{j-1/2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Заметим, что  $\mathbf{n}_{i+1/2} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{n}_{i-1/2} = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{n}_{j+1/2} = (0, 1)$ ,  $\mathbf{n}_{j-1/2} = (0, -1)$ . Кроме этого,  $S_{i+1/2} = S_{i-1/2} = h_2$ ,  $S_{j+1/2} = S_{j-1/2} = h_1$ ,  $V_{ij} = h_1 h_2$ . После подстановки получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} \left[ f_1\left(\frac{u_{ij} + u_{i+1,j}}{2}\right) - f_1\left(\frac{u_{i-1,j} + u_{ij}}{2}\right) \right] + \\ + \frac{1}{h_2} \left[ f_2\left(\frac{u_{ij} + u_{i,j+1}}{2}\right) - f_2\left(\frac{u_{i,j-1} + u_{ij}}{2}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

В случае постоянных коэффициентов  $\mathbf{f}(u) = (a_1 u, a_2 u)$ ,  $a_1 = const$ ,  $a_2 = const$  схема (9.8) приобретает знакомый нам вид схемы с центральными разностями

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + a_1 \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1} + a_2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_2} = 0. \quad (9.9)$$

со всеми присущими ей свойствами аппроксимации и устойчивости (неустойчивости).

Необходимо отметить, что схема (9.8) и аналогичная ей схема (9.9) пригодны лишь для случая декартовой сетки. А схема (9.7), из которой получены (9.8) и (9.9), может быть использована для произвольной криволинейной сетки с четырехугольными ячейками.

Здесь мы намеренно не указываем, на каком временном слое берутся величины  $\bar{u}_i$  для расчета потока. Они могут быть взяты и на слое  $n$  (получим явную схему) и на слое  $n+1$  (получим неявную схему). Для неявной схемы в случае, если  $\mathbf{f}(u)$  – нелинейная функция, потребуется провести линеаризацию, как это описано в п. 6.2.

#### 9.4.2. Противопотоковая аппроксимация 1-го порядка

Схема с разностями против потока 1-го порядка аппроксимации получается при выборе

$$\mathbf{f}_{i+1/2} = \begin{cases} \mathbf{f}_i, & \text{если } a_{i+1/2} \geq 0, \\ \mathbf{f}_{i+1}, & \text{если } a_{i+1/2} < 0. \end{cases} \quad (9.10)$$

где  $a_{i+1/2} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial u}(u_{i+1/2}), \frac{\partial f_2}{\partial u}(u_{i+1/2}) \right) \cdot \mathbf{n}_{i+1/2}$ . Аналогично вычисляется  $\mathbf{f}_{j+1/2}$ . Приведенная

выше формула (9.10) пригодна лишь для скалярного закона сохранения. Если мы имеем дело с системой законов сохранения, то есть с системой уравнений, то осуществляется переход к инвариантам Римана и обратно, как в п. 5.3.

### 9.5.Связь метода конечных объемов и метода конечных разностей

Рассмотренный выше метод конечных объемов – лишь один из способов построения разностной схемы. Покажем, что схему (9.5) можно получить путем аппроксимации дифференциальных уравнений (9.1) методом конечных разностей. Правда, для этого придется перейти в криволинейную систему координат.

Пусть имеется уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (9.11)$$

где  $U = (u_1, \dots, u_m)^T$  – искомый вектор зависимых переменных,  $F = F(U)$ ,  $G = G(U)$ . Пусть расчетная область  $\Omega$  – криволинейная на плоскости  $(x, y)$ . Пусть имеется преобразование координат

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (9.12)$$

осуществляющее взаимнооднозначное отображение физической расчетной области  $\Omega$  на единичный квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$  в плоскости  $(\xi, \eta)$ , рис. 16. Наряду с преобразованием (9.12) формально рассмотрим и обратное преобразование

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{\partial G}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

Известно, что

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{pmatrix},$$

где  $J = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta$ . Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial F}{\partial \eta} y_\xi - \frac{\partial G}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial G}{\partial \eta} x_\xi \right)$$

Добавим и отнимем в правой части величину  $(F y_{\xi\eta} - G x_{\xi\eta})$ . В результате получим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} \right),$$

где  $\hat{F} = F y_\eta - G x_\eta$ ,  $\hat{G} = G x_\xi - F y_\xi$ . Тогда уравнение (1) может быть записано в виде

$$J \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0. \quad (9.14)$$

Уравнение (9.14) – это уравнение на  $U(t, \xi, \eta)$ , где  $(\xi, \eta) \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Таким образом, замена координат решает проблему расчета в криволинейной области.

Для решения уравнения (9.14) рассмотрим следующую конечно-разностную аппроксимацию производных по пространству:

$$J_{ij} \frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{\hat{F}_{i+1/2} - \hat{F}_{i-1/2}}{\Delta \xi} + \frac{\hat{G}_{j+1/2} - \hat{G}_{j-1/2}}{\Delta \eta} = 0. \quad (9.15)$$

где,  $\hat{F}_{i+1/2} = F_{i+1/2}(y_\eta)_{i+1/2} - G_{i+1/2}(x_\eta)_{i+1/2}$ , и т.д.

Необходимо отметить, что в реальных задачах функции  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ , как правило, не известны в явном виде. Это преобразование задано косвенно – положением узлов  $\mathbf{x}_{ij}$  регулярной сетки в физической области. Это же замечание относится и к обратному преобразованию (9.13). Поэтому даже в случае перехода в криволинейную систему координат производные  $x_\xi$ ,  $x_\eta$ ,  $y_\xi$ ,  $y_\eta$  приходится аппроксимировать конечно-разностными формулами. С учетом того, что точка  $i+1/2$  лежит на грани ячейки сетки, соединяющей вершины сетки  $\mathbf{x}_{i+1,j}$  и  $\mathbf{x}_{i+1,j+1}$ , возьмем следующую очевидную аппроксимацию:

$$(x_\eta)_{i+1/2} = \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}}{\Delta\eta} + O((\Delta\eta)^2),$$

$$(y_\eta)_{i+1/2} = \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}}{\Delta\eta} + O((\Delta\eta)^2).$$

Заметим, что  $\mathbf{x}_{i+1,j+1} - \mathbf{x}_{i+1,j} = |\mathbf{S}_{i+1/2}| \cdot \mathbf{t}$ , где  $|\mathbf{S}_{i+1/2}|$  – длина отрезка  $\mathbf{x}_{i+1,j} \mathbf{x}_{i+1,j+1}$ ,  $\mathbf{t} = (t_x, t_y)$  – касательный вектор к грани  $i+1/2$ . Имеем:  $(t_x, t_y) = (-n_y, n_x)$ , где  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  – нормаль к грани  $i+1/2$ , направленная в сторону увеличения индекса  $i$ . Тогда

$$x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j} = -|\mathbf{S}_{i+1/2}| n_y,$$

$$y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j} = |\mathbf{S}_{i+1/2}| n_x.$$

Откуда получаем следующую аппроксимацию вектора потока:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+1/2} &= \frac{1}{\Delta\eta} (F_{i+1/2}(n_x)_{i+1/2} + G_{i+1/2}(n_y)_{i+1/2}) |\mathbf{S}_{i+1/2}| = \\ &= \frac{1}{\Delta\eta} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})_{i+1/2} \cdot |\mathbf{S}_{i+1/2}| = \frac{1}{\Delta\eta} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, конечно-разностная схема (9.15) в криволинейной системе координат приобретает вид:

$$J_{ij} \frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i+1/2} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i-1/2}}{\Delta\xi \Delta\eta} + \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{j+1/2} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{j-1/2}}{\Delta\xi \Delta\eta} = 0. \quad (9.16)$$

Из курса математического анализа известно, что якобиан преобразования из системы координат  $(\xi, \eta)$  в систему координат  $(x, y)$  как раз и задает связь объемов:

$$J = \lim_{\substack{\Delta\xi \rightarrow 0 \\ \Delta\eta \rightarrow 0}} \frac{V^{xy}}{V^{\xi\eta}},$$

где  $V^{\xi\eta} = \Delta\xi \cdot \Delta\eta$  – объем ячейки в системе координат  $(\xi, \eta)$ , а  $V^{xy} = V_{ij}$  – объем ее образа в физической системе координат  $(x, y)$ . Для конечных значений  $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$  имеем

$$J_{ij} = \frac{V_{ij}}{\Delta\xi \Delta\eta} + O(\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2).$$

После подстановки этого значения  $J_{ij}$  в схему (9.16) получаем ( $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$  уходят из схемы):

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{V_{ij}} [(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i+1/2} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{i-1/2} + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{j+1/2} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S})_{j-1/2}] = 0. \quad (9.17)$$

Схема (9.17) в точности совпадает с формулой метода конечных объемов (9.6).

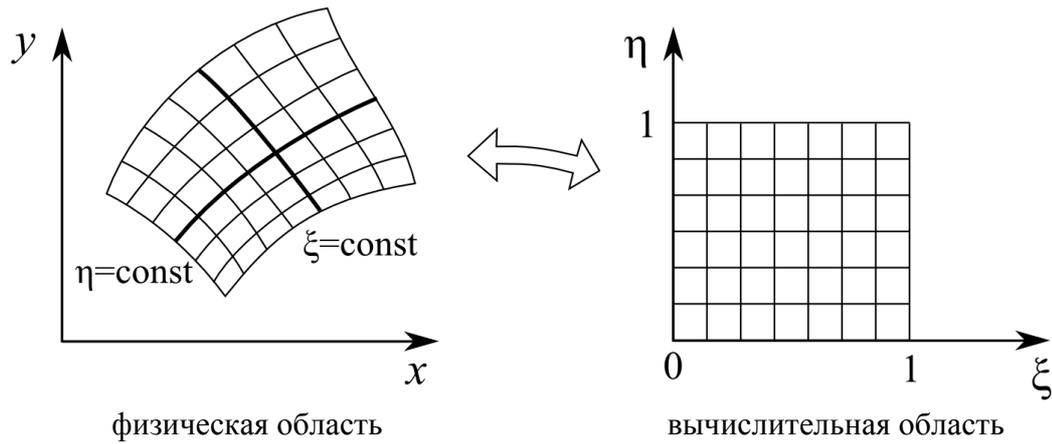


Рис. 16. Отображение физической области  $\Omega$  в вычислительную область  $\Omega_{11}$

Преимущества метода конечных объемов перед методом конечных разностей:

- разностная схема заведомо консервативна;
- результирующие конечно-разностные формулы более просты и наглядны;
- меньше геометрических величин нужно хранить в памяти ЭВМ.

К недостаткам метода конечных объемов следует отнести сложность повышения порядка аппроксимации, особенно в случае неравномерной сетки.

## 9.6. Вычисление геометрических величин

При программной реализации метода конечных объемов необходимо завести массивы, хранящие координаты центров ячеек  $\mathbf{x}_{ijk}$ , их объемов  $V_{ijk}$  и компоненты векторов нормалей к граням  $\mathbf{S}_{m+1/2}$ ,  $m=i, j, k$ .  $\mathbf{S}_{m+1/2} = \mathbf{n}_{m+1/2} |S_{m+1/2}|$ , где  $|S_{m+1/2}|$  – площадь грани  $m+1/2$ . Приведем формулы для вычисления этих геометрических величин в 2D и 3D случае.

### 9.6.1. 2D случай

Для случая двух пространственных направлений формулы для вычисления  $V_{ij}$  и  $\mathbf{S}_{m+1/2}$  были получены выше (в п. 9.5). Они равны:

$$\mathbf{S}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j} \\ -(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{j+1/2} = \begin{pmatrix} -(y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1}) \\ x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} \end{pmatrix},$$

$$V_{ij} = \frac{1}{4} \left( (\mathbf{x}_{i+1,j} - \mathbf{x}_{i,j}) + (\mathbf{x}_{i+1,j+1} - \mathbf{x}_{i,j+1}) \right) \times \left( (\mathbf{x}_{i,j+1} - \mathbf{x}_{i,j}) + (\mathbf{x}_{i+1,j+1} - \mathbf{x}_{i+1,j}) \right).$$

### 9.6.2. 3D случай

В общем случае четыре узла  $A, B, C, D$ , определяющие грань ячейки  $m+1/2$ , не лежат в одной плоскости, поэтому за вектор  $\mathbf{S}_{m+1/2}$  принимается сумма площадей треугольников  $ABC$  и  $ACD$ , умноженные на соответствующие единичные нормали:

$$\mathbf{S}_{m+1/2} = \mathbf{S}_{m+1/2}^1 + \mathbf{S}_{m+1/2}^2 = \frac{1}{2} \left( [\overline{AB} \times \overline{AC}] + [\overline{AC} \times \overline{AD}] \right).$$

Объем ячейки  $V_{ijk}$  вычисляется как сумма объемов 6 пирамид с треугольным основанием, имеющих общее ребро, соединяющее вершины  $\mathbf{x}_{i,j,k}$  и  $\mathbf{x}_{i+1,j+1,k+1}$  (рис. 17):

$$\begin{aligned}
 V_{ijk} = \frac{1}{6} (\mathbf{x}_{i+1,j+1,k+1} - \mathbf{x}_{i,j,k}) & \left( \left[ (\mathbf{x}_{i,j+1,k} - \mathbf{x}_{i,j,k+1}) \times (\mathbf{x}_{i,j+1,k+1} - \mathbf{x}_{i,j,k}) \right] + \right. \\
 & + \left[ (\mathbf{x}_{i,j,k+1} - \mathbf{x}_{i+1,j,k}) \times (\mathbf{x}_{i+1,j,k+1} - \mathbf{x}_{i,j,k}) \right] + \\
 & \left. + \left[ (\mathbf{x}_{i+1,j,k} - \mathbf{x}_{i,j+1,k}) \times (\mathbf{x}_{i+1,j+1,k} - \mathbf{x}_{i,j,k}) \right] \right).
 \end{aligned}$$

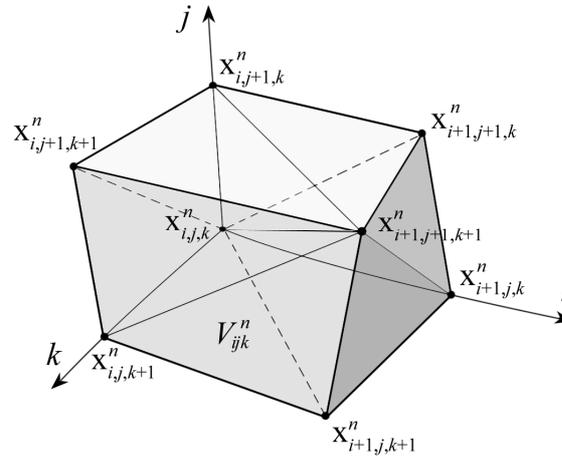


Рис. 17. Объем ячейки в 3D случае.

## 10. Схема конечных объемов для уравнений газовой динамики

В [2] подробно изложен ряд схем расщепления и приближенной факторизации, для многомерных уравнений газовой динамики и уравнений Навье-Стокса. Они иллюстрируют основные особенности построения конечно-разностных методов для многомерных задач. В [2] использовалась, главным образом, центрально-разностная аппроксимация производных по пространству.

В данном параграфе мы изложим получившую широкое распространение схему конечных объемов для решения уравнений газовой динамики. Численный алгоритм использует противопотоковую аппроксимацию невязких потоков и приближенную факторизацию (или LU-факторизацию) многомерного неявного оператора. Изложенная ниже схема естественным образом распространяется на случай решения уравнений Навье-Стокса. Схема, близкая к изложенной ниже используется в пакете ANSYS Fluent для расчета сжимаемых течений (density based solver) [17].

В данном разделе строится схема, пригодная для расчета стационарных пространственных течений методом установления по времени.

В основу численного алгоритма положена неявная схема конечных объемов. Исходная система уравнений газовой динамики записывается в виде системы интегральных законов сохранения для произвольного объема  $V$

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{U} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (10.1)$$

где, напомним,  $\mathbf{U} = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, e)^T$ ,  $\partial V$  – замкнутая поверхность произвольного фиксированного объема  $V$ ,  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS = (dS_1, dS_2, dS_3)$  – элемент поверхности  $\partial V$ , умноженный на единичную внешнюю нормаль  $\mathbf{n}$  к ней.  $\mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}$  – вектор потока через элемент поверхности  $dS$ .  $\mathbf{K} = (\mathbf{F}_1 | \mathbf{F}_2 | \mathbf{F}_3)$  – матрица, составленная из столбцов векторов потоков в направлениях  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 \\ \rho u_1^2 + p & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 \\ \rho u_1 u_2 & \rho u_2^2 + p & \rho u_2 u_3 \\ \rho u_1 u_3 & \rho u_2 u_3 & \rho u_3^2 + p \\ (e+p)u_1 & (e+p)u_2 & (e+p)u_3 \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Предположим, что в расчетной области построена структурированная сетка с объемами  $V_{ijk}$  в виде шестигранников (на самом деле – двенадцатигранников, см. рис. 17). Обозначим усредненные по объему  $V_{ijk}$  значения вектора неизвестных переменных  $\mathbf{U}$  через  $\mathbf{U}_{ijk}$ :

$$\mathbf{U}_{ijk} = \frac{1}{V_{ijk}} \int_{V_{ijk}} \mathbf{U} dV.$$

и отнесем их к центру ячейки. Тогда для каждой ячейки сетки можно записать следующую неявную аппроксимацию интегральных законов сохранения (10.1)

$$\frac{\mathbf{U}_{ijk}^{n+1} - \mathbf{U}_{ijk}^n}{\tau} V_{ijk} = \mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1}, \quad (10.3)$$

где  $\mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1}$  содержит сумму потоков через все грани ячейки  $(i, j, k)$ :

$$\mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1} = -[\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2} + \mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2} + \mathbf{F}_{k+1/2} - \mathbf{F}_{k-1/2}]^{n+1}.$$

Здесь  $\mathbf{F}_{m\pm 1/2}$ ,  $m = i, j, k$ , – численные потоки через грани ячейки, аппроксимирующие точные потоки  $\mathbf{K} \cdot d\mathbf{S}$ .

Для вычисления невязких численных потоков  $\mathbf{F}_{m+1/2}$  используется противопотоковая схема Роу (5.20) 1-го порядка аппроксимации:

$$\mathbf{F}_{m+1/2} = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_{m+1}) \mathbf{S}_{m+1/2} - |\mathbf{A}_{m+1/2}| (\mathbf{U}_{m+1} - \mathbf{U}_m) \right]. \quad (10.4)$$

Здесь

$$\mathbf{A}_{m+1/2} = \frac{\partial(\mathbf{K} \cdot \mathbf{S})}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}_{m+1/2})$$

где  $\mathbf{U}_{m+1/2}$  вычисляется либо с использованием усреднения Роу (5.19), либо  $\mathbf{U}_{m+1/2} = 0.5(\mathbf{U}_m + \mathbf{U}_{m+1})$ .

Матрица Якоби  $\mathbf{A}_{m+1/2}$  может быть представлена в виде  $\mathbf{A}_{m+1/2} = (\mathbf{RDL})_{m+1/2}$ , где  $\mathbf{R}_{m+1/2}$  – матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы  $\mathbf{A}_{m+1/2}$ ,  $\mathbf{L}_{m+1/2}$  – матрица, строки которой являются собственными векторами матрицы  $\mathbf{A}_{m+1/2}$ ,  $\mathbf{R}_{m+1/2} = \mathbf{L}_{m+1/2}^{-1}$ .  $\mathbf{D}_{m+1/2} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_5)$  – диагональная матрица, содержащая на диагонали собственные значения матрицы  $\mathbf{A}_{m+1/2}$ . Для уравнений Навье-Стокса и уравнений газовой динамики вид матрицы  $\mathbf{A}_{m+1/2}$  приведён в Приложении. Её собственные значения равны

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = U, \quad \lambda_4 = U - c |\mathbf{S}|, \quad \lambda_5 = U + c |\mathbf{S}|,$$

где  $U = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S} = u S_x + v S_y + w S_z$ ;  $u, v, w$  – компоненты скорости в декартовой системе координат;  $c$  – скорость звука на рассматриваемой грани ячейки.  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$  – вектор нормали к грани  $m+1/2$ , равный по модулю площади этой грани и направленный в сторону увеличения индекса  $m$ .

Для повышения порядка аппроксимации по пространству вместо (10.4) можно использовать MUSCL-схему [17,18]

$$\mathbf{F}_{m+1/2} = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{K}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{K}(\mathbf{U}_R)) \mathbf{S}_{m+1/2} - |\mathbf{A}_{LR}| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \right], \quad (10.5)$$

где  $\mathbf{U}_L$  и  $\mathbf{U}_R$  – линейные или квадратичные реконструкции вектора  $\mathbf{U}$  слева и справа от грани  $m+1/2$ , см. [18].

Полностью неявная схема (10.3) линеаризуется в соответствии с методикой, изложенной в пп. 6.2 и 7.4. Однако, прежде чем делать линеаризацию, проведем некоторые преобразования. Из свойства 3) матрицы  $\mathbf{A}$  для схемы Роу (см. п.5.5.2) следует, что

$$(\mathbf{K}_{m+1}^{in} - \mathbf{K}_m^{in}) \mathbf{S}_{m+1/2} = \mathbf{A}_{m+1/2} (\mathbf{U}_{m+1} - \mathbf{U}_m)$$

С учетом этого соотношения, а также соотношений  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$ ,  $|\mathbf{A}| = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-$ , поток для схемы 1-го порядка (10.4) можно представить в виде

$$\mathbf{F}_{m+1/2}^{in} = \mathbf{K}_m^{in} \cdot \mathbf{S}_{m+1/2} + \mathbf{A}_{m+1/2}^- (\mathbf{U}_{m+1} - \mathbf{U}_m)$$

Аналогично,

$$\mathbf{F}_{m-1/2}^{in} = \mathbf{K}_m^{in} \cdot \mathbf{S}_{m-1/2} - \mathbf{A}_{m-1/2}^+ (\mathbf{U}_m - \mathbf{U}_{m-1}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} -\mathbf{RHS}_{ijk} &= \sum_{m=i,j,k} (\mathbf{F}_{m+1/2} - \mathbf{F}_{m-1/2}) = \mathbf{K}_m^{in} \sum_{m=i,j,k} (\mathbf{S}_{m+1/2} - \mathbf{S}_{m-1/2}) + \\ &+ \sum_{m=i,j,k} \left[ \mathbf{A}_{m-1/2}^+ (\mathbf{U}_m - \mathbf{U}_{m-1}) + \mathbf{A}_{m+1/2}^- (\mathbf{U}_{m+1} - \mathbf{U}_m) \right] \end{aligned}$$

Заметим, что для любой ячейки  $\sum_{m=i,j,k} (\mathbf{S}_{m+1/2} - \mathbf{S}_{m-1/2}) = 0$  (интеграл по замкнутой поверхности от постоянной функции). Следовательно,

$$\mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1} = - \sum_{m=i,j,k} \left[ \mathbf{A}_{m-1/2}^+ (\mathbf{U}_m - \mathbf{U}_{m-1}) + \mathbf{A}_{m+1/2}^- (\mathbf{U}_{m+1} - \mathbf{U}_m) \right]^{n+1}$$

Теперь линеаризуем правую часть  $\mathbf{RHS}^{n+1}$  :

$$\mathbf{RHS}^{n+1} = \mathbf{RHS}^n + \left( \frac{\partial \mathbf{RHS}}{\partial \mathbf{U}} \right)^n (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) + O(\tau^2)$$

При вычислении  $(\partial \mathbf{RHS} / \partial \mathbf{U})^n$  матрицы  $\mathbf{A}_{m-1/2}^+$ ,  $\mathbf{A}_{m+1/2}^-$ , предполагаются локально замороженными, т.е. не зависящими от  $\mathbf{U}$ . В результате, опуская погрешность линеаризации, получаем

$$\left( \frac{\partial \mathbf{RHS}}{\partial \mathbf{U}} \right)^n (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) = - \left( \sum_{m=i,j,k} \mathbf{A}_{m-1/2}^+ \Delta_{m-1/2} + \mathbf{A}_{m+1/2}^- \Delta_{m+1/2} \right) (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n),$$

где разностные операторы  $\Delta_{m-1/2}$  и  $\Delta_{m+1/2}$  определяются следующим образом:

$$\Delta_{m-1/2} \varphi = \varphi_m - \varphi_{m-1}, \quad \Delta_{m+1/2} \varphi = \varphi_{m+1} - \varphi_m, \quad m = i, j, k.$$

В результате такой линеаризации схема (10.3) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \left( \frac{V_{ijk}}{\tau} + \mathbf{A}_{i-1/2}^+ \Delta_{i-1/2} + \mathbf{A}_{i+1/2}^- \Delta_{i+1/2} + \right. \\ & \quad + \mathbf{A}_{j-1/2}^+ \Delta_{j-1/2} + \mathbf{A}_{j+1/2}^- \Delta_{j+1/2} + \\ & \quad \left. + \mathbf{A}_{k-1/2}^+ \Delta_{k-1/2} + \mathbf{A}_{k+1/2}^- \Delta_{k+1/2} \right) (\mathbf{U}_{ijk}^{n+1} - \mathbf{U}_{ijk}^n) = \mathbf{RHS}_{ijk}^n \end{aligned} \quad (10.6)$$

Схему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{\mathbf{D}} - \mathbf{A}_{i-1/2}^+ T_{i-1} + \mathbf{A}_{i+1/2}^- T_{i+1} - \right. \\ & \quad - \mathbf{A}_{j-1/2}^+ T_{j-1} + \mathbf{A}_{j+1/2}^- T_{j+1} - \\ & \quad \left. - \mathbf{A}_{k-1/2}^+ T_{k-1} + \mathbf{A}_{k+1/2}^- T_{k+1} \right) (\mathbf{U}_{ijk}^{n+1} - \mathbf{U}_{ijk}^n) = \mathbf{RHS}_{ijk}^n, \end{aligned} \quad (10.7)$$

где  $T_{m-1}$ ,  $T_{m+1}$  – операторы сдвига назад и вперед по направлению  $m$ . Например,  $T_{i+1} \varphi_{ijk} = \varphi_{i+1,j,k}$ . Матрица  $\tilde{\mathbf{D}}$  имеет вид

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{V_{ijk}}{\tau} + \mathbf{A}_{i-1/2}^+ - \mathbf{A}_{i+1/2}^- + \mathbf{A}_{j-1/2}^+ - \mathbf{A}_{j+1/2}^- + \mathbf{A}_{k-1/2}^+ - \mathbf{A}_{k+1/2}^-.$$

Шаблон полученной схемы на слое  $n+1$  – трехточечный по каждому пространственному направлению, рис. 18.

Для реализации схема (10.6) приближенно факторизуется по пространственным направлениям в соответствии с методикой, изложенной в п. 7.2. Либо используется приближенная LU-факторизация (см. п. 7.4) схемы, записанной в виде (10.7).

Описанный выше метод может быть распространен на случай решения уравнений Навье-Стокса, в том числе нестационарных. Подробнее см. [17].

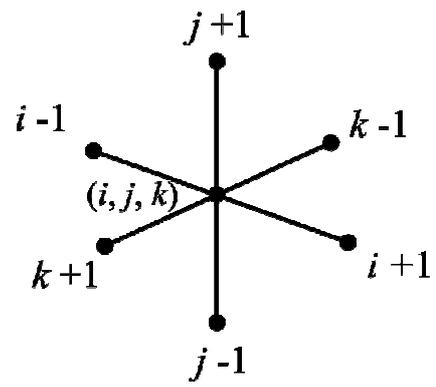


Рис. 18. Шаблон схемы (10.7).

## 11. Решение уравнений движения несжимаемой жидкости

### 11.1. Метод искусственной сжимаемости

Уравнения Навье-Стокса, описывающие движение несжимаемой жидкости, имеют вид

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{cases} \quad (11.1)$$

где  $\hat{p} = p[\text{Па}] / \rho_0$ ,  $\rho_0 = \text{const}$ . В дальнейшем для краткости будем опускать крышку над  $\hat{p}$ . Вследствие того, что первое уравнение системы – уравнение неразрывности – не содержит производных по времени от искомым функций, система (11.1) не является системой типа Коши-Ковалевской, то есть не может быть записана в виде, разрешенном относительно производных по времени:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{U}).$$

Это обстоятельство не позволяет формально применить для уравнений (11.1) схему, описанную в предыдущем параграфе. Одним из подходов к решению системы (11.1) является метод искусственной сжимаемости. Суть этого подхода состоит в добавлении в уравнение неразрывности производной по времени от давления  $\hat{p}$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{cases} \quad (11.2)$$

где  $\beta$  – коэффициент искусственной сжимаемости, имеющий размерность  $[\text{м}^2/\text{с}^2]$ . Модифицированная таким образом система уравнений становится системой типа Коши-Ковалевской, и, более того, в случае отсутствия вязкости ( $\mu \equiv 0$ ) – гиперболической. Конечно, решение модифицированной системы (11.2) не совпадает с решением исходной системы (11.1). Однако, при  $t \rightarrow \infty$ , когда решение устанавливается ( $\partial/\partial t = 0$ ), решения (11.1) и (11.2) совпадают. Таким образом, система уравнений (11.2) может быть использована для нахождения стационарных решений исходной системы (11.1) методом установления.

### 11.2. Схема конечных объемов

Для решения системы (11.2) применяется метод, аналогичный изложенному в п. 10. Система (11.2) может быть записана в дивергентном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (11.3)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i \left( \mathbf{U}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_N} \right) = \begin{pmatrix} \beta u_i \\ u_1 u_i + \delta_{1i} p - \tau_{1i} \\ \vdots \\ u_N u_i + \delta_{Ni} p - \tau_{Ni} \end{pmatrix},$$

Здесь  $\hat{p} = p / \rho_0$ , компоненты тензора вязких напряжений,  $\tau_{ij}$ , даны в п. 1.2.

Эквивалентная дифференциальному уравнению на гладких решениях интегральная форма уравнения (11.3)

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (11.4)$$

где  $\partial V$  – замкнутая поверхность произвольного фиксированного объема  $V$ ,  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS = (dS_1, \dots, dS_N)$  – элемент поверхности  $\partial V$ , умноженный на единичную внешнюю нормаль  $\mathbf{n}$  к ней. Вектор потоков представляется в виде суммы невязкого и вязкого потока:

$$\mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{K}^{in} + \mathbf{K}^{vis}) \cdot d\mathbf{S},$$

где матрицы  $\mathbf{K}^{in}$  и  $\mathbf{K}^{vis}$  имеют вид:

$$\mathbf{K}^{in} = \begin{pmatrix} \beta u_1 & \dots & \beta u_N \\ u_1^2 + p & \dots & u_1 u_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 u_N & \dots & u_N^2 + p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{vis} = - \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \tau_{11} & \dots & \tau_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{1N} & \dots & \tau_{NN} \end{pmatrix}.$$

В случае  $\mu = 0$  матрица  $\mathbf{K}^{vis} = 0$ . В дальнейшем будем предполагать, что число пространственных направлений  $N=3$ .

Предположим, что в расчетной области построена структурированная сетка с объемами  $V_{ijk}$ . Аппроксимируем (11.4) неявным методом конечных объемов, как в п. 10:

$$\frac{\mathbf{U}_{ijk}^{n+1} - \mathbf{U}_{ijk}^n}{\tau} V_{ijk} = \mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1}, \quad (11.5)$$

где  $\mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1}$  содержит сумму потоков через все грани ячейки  $(i,j,k)$ :

$$\mathbf{RHS}_{ijk}^{n+1} = - \left[ \mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2} + \mathbf{F}_{j+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2} + \mathbf{F}_{k+1/2} - \mathbf{F}_{k-1/2} \right]^{n+1}.$$

Численные потоки через грани ячейки вычисляются как сумма невязких и вязких потоков:

$$\mathbf{F}_{m+1/2} = \mathbf{F}_{m+1/2}^{in} + \mathbf{F}_{m+1/2}^{vis}, \quad \mathbf{F}^{in} = \mathbf{K}^{in} \cdot d\mathbf{S}, \quad \mathbf{F}^{vis} = \mathbf{K}^{vis} \cdot d\mathbf{S}.$$

Для вычисления невязкого численного потока  $\mathbf{F}_{m+1/2}^{in}$  используется схема Рунге (10.4) с усреднением  $\mathbf{U}_{m+1/2} = 0.5(\mathbf{U}_m + \mathbf{U}_{m+1})$  или MUSCL-схема (10.5). Матрицы Якоби даны в Приложении 1.

Вычисление вязкого численного потока  $\mathbf{F}_{m+1/2}^{vis}$  основано на формуле

$$\mathbf{F}^{vis} = \mathbf{K}^{vis} \cdot \mathbf{S} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{11} S_x + \tau_{12} S_y + \tau_{13} S_z \\ \tau_{12} S_x + \tau_{22} S_y + \tau_{23} S_z \\ \tau_{13} S_x + \tau_{23} S_y + \tau_{33} S_z \end{pmatrix}.$$

Для вычисления вязкого потока необходимо аппроксимировать на грани  $m+1/2$  компоненты тензора вязких напряжений  $\tau_{ij}$  – то есть производные от компонент вектора скорости по декартовым координатам. В 2D случае аппроксимация осуществляется на девятиточечном шаблоне, в 3D случае шаблон схемы занимает 27 точек. В случае равномерной декартовой сетки такой способ аппроксимации соответствует центрально-разностной схеме.

Линеаризация полностью неявной схемы (11.5) осуществляется так же, как в п. 10. При линеаризации вязких потоков неявно берутся только члены, соответствующие повторным производным по направлениям  $(i, j, k)$ , все смешанные производные берутся явно. Это позволяет остаться в рамках семиточечного шаблона на слое  $n+1$ , показанного на рис. 18.

Линеаризованная схема записывается в виде (10.7) и приближенно  $LU$ -факторизация, как описано в п. 7.4. Решение на слое  $n+1$  находится за два дробных шага, каждый из которых реализуется бегущим счетом. Более подробно алгоритм изложен в монографии [19].

Описанный алгоритм применим для нахождения стационарных решений методом установления.

Необходимо отметить, что константа  $\beta$  влияет на скорость сходимости к стационарному решению. Более того,  $\beta$  влияет на точность, так как входит в потоки и матрицы матрицы  $\mathbf{A}^+$  и  $\mathbf{A}^-$ . На практике рекомендуется брать  $\beta = K_\beta U_{ref}^2$ , где  $U_{ref}$  – характерная скорость,  $K_\beta$  – константа. Наилучшая сходимость и точность достигаются при задании  $K_\beta = 2 \div 5$ .

### 11.3. Распространение схемы на нестационарный случай

Метод искусственной сжимаемости и описанная выше схема конечных объемов, могут быть распространены и на случай расчета нестационарных течений несжимаемой жидкости. В этом случае к нестационарной системе (11.1) добавляются производные по фиктивному времени  $t'$ .

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t'} + \mathbf{R}' \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0,$$

где  $\mathbf{R}^{-1} = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$ . Установление ведется не по  $t$ , а по фиктивному времени  $t'$ . Таким образом, на каждом шаге  $n+1$  по времени ведется установление по  $\tau$ .

## Приложение

При реализации противопотоковых схем для уравнений газовой динамики, и динамики несжимаемой жидкости появляются матрицы Якоби векторов невязких потоков

$\mathbf{A} = \frac{\partial(\mathbf{K}^{in}\mathbf{S})}{\partial\mathbf{U}}$ . В данном приложении приведен вид этих матриц и их собственные значения. Матрицы даны для трехмерного случая. Двумерный случай получается занулением  $S_z = 0$ ,  $w = 0$  и вычеркиванием четвертого столбца и четвертой строки.

### Матрица Якоби $\mathbf{A}$ для уравнений газовой динамики

Матрица Якоби вектора невязкого потока для уравнений Навье-Стокса и газовой динамики:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial(\mathbf{K}^{in}\mathbf{S})}{\partial\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & S_x & S_y & S_z & 0 \\ -uU + \frac{\gamma-1}{2}\mathbf{v}^2 S_x & U + (2-\gamma)uS_x & uS_y - (\gamma-1)vS_x & uS_z - (\gamma-1)wS_x & (\gamma-1)S_x \\ -vU + \frac{\gamma-1}{2}\mathbf{v}^2 S_y & vS_x - (\gamma-1)uS_y & U + (2-\gamma)vS_y & vS_z - (\gamma-1)wS_y & (\gamma-1)S_y \\ -wU + \frac{\gamma-1}{2}\mathbf{v}^2 S_z & wS_x - (\gamma-1)uS_z & wS_y - (\gamma-1)vS_z & U + (2-\gamma)wS_z & (\gamma-1)S_z \\ U\left((\gamma-1)\frac{\mathbf{v}^2}{2} - H\right) & HS_x - (\gamma-1)uU & HS_y - (\gamma-1)vU & HS_z - (\gamma-1)wU & \gamma U \end{pmatrix},$$

где  $U = uS_x + vS_y + wS_z$ ,  $\mathbf{v}^2 = u^2 + v^2 + w^2$ ,  $H = \frac{e+p}{\rho} = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{\mathbf{v}^2}{2}$ .

Собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = U, \quad \lambda_4 = U - c|\mathbf{S}|, \quad \lambda_5 = U + c|\mathbf{S}|,$$

### Матрица Якоби $\mathbf{A}$ для уравнений движения несжимаемой жидкости

Вектор невязкого потока через грань  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$  для уравнений движения несжимаемой жидкости, модифицированных методом искусственной сжимаемости равен

$$\mathbf{K}^{in}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \beta U \\ uU + pS_x \\ vU + pS_y \\ wU + pS_z \end{pmatrix}$$

Матрица Якоби вектора потока имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{\partial(\mathbf{K}^{in}\mathbf{S})}{\partial\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & \beta S_x & \beta S_y & \beta S_z \\ S_x & U + uS_x & uS_y & uS_z \\ S_y & vS_x & U + vS_y & vS_z \\ S_z & wS_x & wS_y & U + wS_z \end{pmatrix},$$

где  $U = uS_x + vS_y + wS_z$ . Собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = U, \quad \lambda_3 = U - \sqrt{U^2 + \beta|\mathbf{S}|^2}, \quad \lambda_4 = U + \sqrt{U^2 + \beta|\mathbf{S}|^2}.$$

## Литература

1. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1981. 304 с.
2. Ковеня В. М. Разностные методы решения многомерных задач: Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2004. 146 с.
3. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений в 4 ч.: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2003. Часть 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. 160 с.
4. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений в 4 ч.: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2008. Часть 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов. 163 с.
5. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений в 4 ч.: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2009. Часть 4. Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа. 206 с.
6. Лебедев А. С., Черный С. Г. Практикум по численному решению уравнений в частных производных. – Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2003. 136 с.
7. Годунов С. К. Рябенский В. С. Разностные схемы: Введение в теорию. М.: Наука, 1973. 400 с.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. Изд. 3. М.: Наука, 1989. 616 с.
9. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981, 368 с.
10. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений: Матем. Сборник. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271-306.
11. Баландин М.Ю. Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Учебное пособие / Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 70 с.
12. Пинчуков В. И., Шу Ч.-В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. – 232 с.
13. Jameson A., Schmidt W., Turkel E. Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. Technical Report AIAA-81-1259, 1981.
14. Lynn J. F.. Multigrid Solution of the Euler Equations with Local Preconditioning. PhD thesis, University of Michigan, 1995.
15. Roe P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // J. of Comp. Physics. – 1981. – Vol. 43. – P. 337-372.
16. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: 2nd Ed., Springer-Verlag, 1999.
17. Weiss J. M., Maruszewski J. P., Smith W. A. Implicit Solution of Preconditioned Navier-Stokes Equations Using Algebraic Multigrid // AIAA J. - 1999. - Vol 37, № 1. - P. 29-36.
18. Anderson W. K., Thomas J. L., van Leer B. Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations // AIAA J. – 1986. – Vol 24, №9. – P. 1453-1460.
19. Чёрный С. Г., Чирков Д. В., Лапин В. Н. и др. Численное моделирование течений в турбомашинах. – Новосибирск: Наука, 2006. – 206 с.