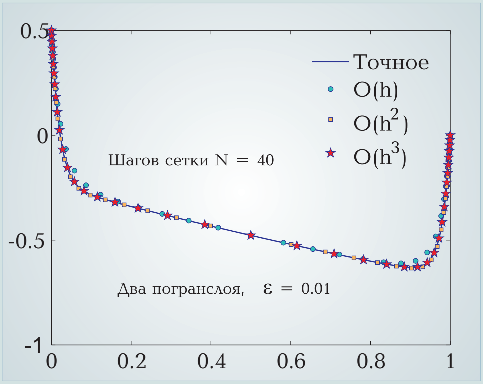
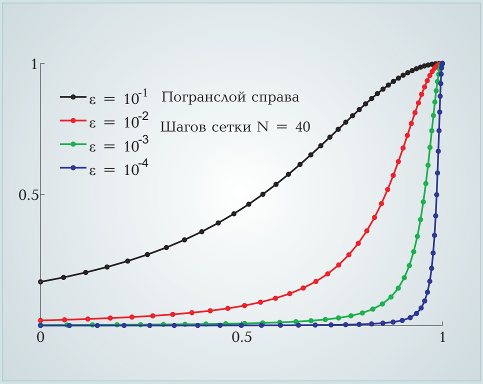
В. Д. Лисейкин, В. И. Паасонен

Высокоточные разностные схемы и адаптивные сетки для решения дифференциальных уравнений





$$-\varepsilon u_{xx} + a(x)\, u_x + F(x, u) = 0, \; x \in (0,1),$$

$$u(0) = U_0, \; u(1) = U_1$$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра математического моделирования

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ СО РАН

В. Д. Лисейкин, В. И. Паасонен

ВЫСОКОТОЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И АДАПТИВНЫЕ СЕТКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Новосибирск
2018

УДК 519.63
ББК В22.193
В 93

Рецензент
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. Г. Черных*

В 93 Высокоточные разностные схемы и адаптивные сетки для решения дифференциальных уравнений : учеб. пособие / В. Д. Лисейкин, В. И. Паасонен ; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2018. – 68 с.

ISBN 978-5-4437-0855-3

Пособие содержит дополнительные материалы для углубленного изучения курса лекций «Методы вычислений» и для использования при выполнении заданий вычислительного практикума на ЭВМ. В пособии излагаются высокоточные методы решения дифференциальных уравнений с малым параметром и алгоритмы построения адаптивных сеток на основе априорных оценок производных решения с пограничными и внутренними слоями. Приводятся примеры различных конфигураций слоев для формирования тестовых задач вычислительного практикума. Предназначено для студентов и преподавателей математических специальностей высших учебных заведений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00455).

Пособие опубликовано с разрешения ученых советов Новосибирского государственного университета и Института вычислительных технологий СО РАН.

УДК 519.63
ББК В22.193

ISBN 978-5-4437-0855-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В классе дифференциальных уравнений особое место принадлежит уравнениям с малым параметром при старшей производной. Решения начально-краевых задач для таких уравнений обычно имеют особенности в виде чрезвычайно узких зон быстрого изменения функции на фоне спокойного ее поведения в других частях области. По существу, такого рода задачи являются удобными и простыми для исследования моделями по отношению к широкому классу многомерных задач механики вязкой жидкости и газа с пограничными слоями в зонах обтекания объектов и внутренними слоями в сплошных средах. Решать такие задачи традиционными методами на равномерной сетке весьма затратно, поскольку для адекватного представления решения в слое потребуется сетка с весьма мелким шагом, которая вне слоев является, естественно, излишне детальной. Таким образом, использование равномерной сетки сопряжено с завышенными требованиями к вычислительным ресурсам — к размеру массивов и к объему вычислений. Особенно это касается именно многомерных задач.

Выход из положения вытекает из самого анализа проблемы, поскольку интуитивно ясно, что желательно использовать мелкий шаг в слое, и крупный — вне слоя, т. е. следует применять неравномерную сетку, сгущающуюся в зонах больших градиентов решения. Существует ряд методов построения сеток, подходящих для удовлетворительного описания решения с особенностями, а также позволяющих автоматически перестраивать сетки в динамических задачах, когда решение зависит не только от пространственных координат, но и от времени. Такие сетки называются адаптивными, поскольку они адаптируются к характеру решения. Сетка может или реально перестраиваться на каждом итерационном шаге или шаге по времени, когда задача решается в исходных физических координатах, или может быть «зашита» в алгоритм неявно, когда с помощью сеточного отображения преобразовано само уравнение, и в новых координатах задача решается на равномерной сетке.

В данном пособии речь идет о дифференциальных уравнениях первого и второго порядка с малым параметром при старшей производной, и мы не касаемся здесь динамических задач. Мы также не привлекаем методы для итеративной адаптации сетки, поскольку в этом нет необходимости для данного класса задач. Причина в том, что для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром без динамической составляющей часто удается, не решая задачи, по априорной информации предсказать не только число слоев и их расположение (пограничный или внутренний), но и характер изменения решения в слоях (например, экспоненциальный, логарифмический или степенной), тип слоя (простой или смешанный), а также его масштаб (показатель степени роста решения в слое). Поведение переменных коэффициентов дифференциального уравнения, их знак и отделенность от нуля, наличие нулей и их кратность, возрастание или убывание коэффициентов в окрестности нулей — все это формирует априорную информацию, позволяет классифицировать слои и на основе оценок производных различных порядков без итераций в явном виде заранее аналитически задавать целесообразную неравномерную сетку как образ равномерной сетки при гладком отображении единичного отрезка в промежуток, на котором решается задача. Сетку можно считать построенной удачно, если она оказывается приблизительно равномерной по модулю приращения решения на шаге.

На качество расчетов существенно влияет не только удачно или неудачно выбранная сетка, но и численный метод решения задачи Коши или краевой задачи на неравномерной сетке, его порядок точности. В данном пособии исследуется это влияние путем сравнений численных результатов, полученных с помощью разностных схем различных порядков точности. Для простейшего дифференциального уравнения первого порядка испытывались известные методы решения задачи Коши. Это метод Эйлера, одна из его модификаций и метод Рунге — Кутты, имеющие соответственно первый, второй и четвертый порядок точности. В их использовании нет новизны, это классические методы, особенность состояла лишь в применении их именно на специально построенных адаптивных сетках, задаваемых явно на основе априорных представлений о решении.

Дифференциальное уравнение второго порядка решалось разностными методами различной точности: с помощью простейшей схемы первого порядка точности с направленной разностью, схемы со взвешенной аппроксимацией первой производной и специально построенных компактных схем второго и третьего порядков точности. Компактные схемы построены с помощью метода исчерпания погрешности, при котором за основу принимается некоторая простая схема, а затем главные члены разложения ее погрешности компенсируются в схеме с обратным знаком подходящими разностными выражениями, имеющими ровно те же главные члены разложения. Схема, таким образом полученная, по построению обладает более высоким порядком аппроксимации, чем исходная.

Повторение цикла операций по исчерпанию погрешности к построенной схеме приводит к схеме еще более высокого порядка аппроксимации.

Для простой схемы с учетом знака равномерная по значению малого параметра сходимость численного решения к точному при его стремлении к нулю доказана теоретически, при этом помимо априорных оценок первой производной в числе достаточных условий для доказательства использовалось свойство так называемой обратной монотонности схемы. Схемы второго порядка и выше, к сожалению, этим свойством не обладают. В то же время обобщение явного способа задания адаптивных сеток на случай компактных схем представлялось не только полезным, но и вполне реализуемым с помощью оценок производных высших порядков, однако потеря свойства обратной монотонности схем при повышении порядка аппроксимации схем явилась препятствием для проведения теоретического доказательства равномерной сходимости. При этом оставался открытым вопрос, является ли отсутствие этого свойства фатальной причиной, исключающей равномерную сходимость решений, или же требование обратной монотонности лишь облегчает процесс доказательства, а в практическом плане в сущности является избыточным. Ответ на этот вопрос могло дать численное исследование высокоточных схем на адаптивных сетках, которое и было предпринято. Алгоритмы явного задания адаптивных сеток для различных типов слоев обобщены на схемы любого порядка точности, а порядок точности и степень требуемой гладкости стали параметрами этого обобщенного преобразования. Технология построения адаптивных сеток с помощью преобразований высокой степени гладкости исследована численно применительно к компактным схемам второго и третьего порядков точности на типичных тестовых задачах с различными видами пограничных и внутренних слоев.

Данное пособие описывает симбиоз эффективных разностных методов высокой точности и весьма целесообразно устроенных сеток, учитывающих особенности решений. Исследование имеет целью обратить внимание к данной теме студентов, преподавателей и вообще коллег-математиков. Хотя исследование проведено на примере простых дифференциальных уравнений, применимость описываемого подхода к расчету двумерных погранслоев не вызывает сомнения, так как современное состояние вычислительных методов, с одной стороны, располагает высокоточными компактными схемами для многомерных уравнений и, с другой стороны, развитыми технологиями для построения плоских и пространственных сеток, в том числе и в довольно произвольных областях, на основе одномерных алгоритмов. Это, например, довольно универсальный классический метод трансфинитной интерполяции для построения адаптивной сетки в «криволинейном прямоугольнике» с помощью гладкого отображения в него квадрата, покрытого равномерной сеткой, а также более современный эффективный метод, основанный на решении обращенных уравнений Бельтрами. Адаптивные методы для плоских областей обычно имеют более общие версии для построения сеток на поверхностях и в пространственных объектах.

К сожалению, в настоящее время многие наши отечественные специалисты по численным методам и преподаватели математических дисциплин не имеют элементарных навыков в использовании традиционных классических методов построения разностных сеток, не говоря уже о более современных технологиях, а также и по применению разностных схем повышенной точности, отчасти ввиду дефицита специальной учебной литературы, а больше по причине отсутствия в программах высших учебных заведений не только базовых курсов по изучению этих методов, но даже и факультативных спецкурсов. Поэтому остро назрела необходимость внедрения научных знаний о методах и технологиях построения адаптивных сеток и применении высокоточных разностных схем в университетские программы по вычислительной и прикладной математике и в программы технических вузов в качестве важных базовых дисциплин с целью подготовки специалистов, способных решать сложные актуальные прикладные задачи в различных приоритетных научно-технических направлениях.

Данное пособие является попыткой в определенной степени восполнить дефицит учебной литературы по заявленной проблеме и предназначено как дополнение к курсам лекций по вычислительной математике для более глубокого изучения предмета и в качестве вспомогательного материала при выборе нетривиальных и приближенных к реальности задач для их решения в рамках вычислительного практикума на ЭВМ. Представляется, что публикуемый материал окажется интересным также для научных работников и преподавателей математических специальностей высших учебных заведений.

1. Конструирование преобразований, устраняющих слои

Метод координатных преобразований, устраняющих слои сингулярных функций $u(x, \varepsilon)$, $0 \leq x \leq 1$, заключается в нахождении такого невырожденного отображения $x(\xi, \varepsilon)\colon [0, 1] \to [0, 1]$, что производные функции $u[x(\xi, \varepsilon), \varepsilon]$ по ξ равномерно ограничены по ε до некоторого порядка $p \geq 1$, т. е.

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}\xi^k}[x(\xi, \varepsilon), \varepsilon]\right| \leq M\,, \quad 0 < \varepsilon \leq m\,, \quad 0 \leq k \leq p\,, \quad 0 \leq \xi \leq 1\,. \qquad (1)$$

Здесь и далее M и m — некоторые положительные константы, не зависящие от ε. Если найдено преобразование $x(\xi, \varepsilon)$, обеспечивающее условие (1), то говорим, что это преобразование устраняет особенности функции $u(x, \varepsilon)$ до порядка p.

В приложении к начальным или краевым задачам для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений метод координатных преобразований легко переформулируется. В этом случае для его реализации требуется найти невырожденное отображение $x(\xi, \varepsilon)\colon [0, 1] \to [0, 1]$, которое устраняло бы до порядка $p \geq 1$ особенности каждой функции $u_i[x(\xi, \varepsilon), \varepsilon]$, $i = 1, \ldots, n$, являющейся i-й компонентой решения $\mathbf{u}(x, \varepsilon)$ (т. е. чтобы выполнялось соотношение (1) для каждой функции $u_i[x(\xi, \varepsilon), \varepsilon]$, $i = 1, \ldots, n$). Тогда найденное преобразование устраняет особенности функции $\mathbf{u}(x, \varepsilon)$ до порядка p.

Если искомое преобразование $x(\xi, \varepsilon)$ найдено, то равномерно сходящееся по ε решение может быть получено при помощи стандартных численных аппроксимаций интересующей задачи на неравномерной сетке x_i, $i = 0, 1, ..., N$, конструируемой по формуле $x_i = x(i/N, \varepsilon)$. Более того, решение может быть равномерно по ε проинтерполировано с узлов сетки на весь интервал $[0, 1]$, включая пограничные и внутренние слои. К тому же общее число узлов N, необходимое для получения требуемой точности, может выбираться независимо от ε.

Обобщение одномерной методики на случай многомерных задач осуществляется методами, разработанными в теории гармонических отображений.

1.1. Преобразования, полученные с помощью решения уравнений

Преобразование $x(\xi,\varepsilon) : [0,1] \to [0,1]$, устраняющее до порядка p включительно особенности решения сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения, может быть найдено как решение следующей начальной задачи:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}(\xi,\varepsilon) = c/\psi_p(x,\varepsilon)\,, \quad \xi > 0\,, \quad x(0,\varepsilon) = 0\,, \tag{2}$$

для подходящей весовой функции $\psi_p(x,\varepsilon)$, имеющей ограниченную вариацию, т. е. выполняется неравенство

$$\int\limits_0^1 \psi_p(x,\varepsilon)\mathrm{d}x \le M, \quad 0 < \varepsilon \le m\,. \tag{3}$$

Заметим, что для численного алгоритма, в основе которого лежит сетка $x_i = x(ih,\varepsilon)$, $i = 0,1,\dots,N$, $h = 1/N$, необходимо знание значений преобразования $x(\xi,\varepsilon)$ только в узлах сетки $\xi_i = ih$, $i = 0,1,\dots,N$. Эти дискретные величины могут быть вычислены при помощи численного решения задачи (2) или эквивалентной нелинейной двухточечной краевой задачи

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\;\psi_p(x,\varepsilon)\Big) = 0\,, \quad 0 < \xi < 1\,, \quad x(0,\varepsilon) = 0\,,\; x(1,\varepsilon) = 1\,, \tag{4}$$

на равномерной сетке $\xi_i = ih$.

Краевая задача (4) является дифференциальной формулировкой метода эквираспределения для конструирования адаптивных сеток с шагом, обратно пропорциональным значению весовой функции $\psi_p(x,\varepsilon)$. Уравнение (4) дает возможность конструировать сетку автоматически с динамической адаптацией, определенной весовой функцией. Для этого значение функции $\psi_p(x,\varepsilon)$ определяется через производные решения искомой задачи. В этом случае процесс конструирования сетки может осуществляться совместно с численным решением физической задачи, и, соответственно, узлы сетки конструируются итеративно.

Согласно результатам [18], производные решений сингулярно возмущенных уравнений мажорируются в слоях линейной комбинацией следующих четырех функций: $\psi_i^n(x,b,k,\varepsilon),\ i=1,2,3$ и $\psi_4^n(x,k,\varepsilon)$:

$$\psi_1^n(x,b,k,\varepsilon)=M\varepsilon^{-kn}\exp(-b|x-x_0|/\varepsilon^k)\ , \quad |x-x_0|\le\frac{kn}{b}\varepsilon^k|\ln\varepsilon|,$$

$$\psi_2^n(x,b,k,\varepsilon)=M\varepsilon^{kb}/(\varepsilon^k+|x-x_0|)^{b+n}\ , \quad |x-x_0|\le m\varepsilon^{kb/(b+n)},$$

$$\psi_3^n(x,b,k,\varepsilon)=M(\varepsilon^k+|x-x_0|)^{b-n}\ , \quad |x-x_0|\le m,$$

$$\psi_4^n(x,k,\varepsilon)=M/(\varepsilon^k+|x-x_0|)^n|\ln\varepsilon|\ , \quad |x-x_0|\le m|\ln\varepsilon|^{1/n} \tag{5}$$

для некоторых m и M; здесь n — порядок производной, x_0 — точка центра слоя, а $b\ge m_1>0$ и $k\ge m_2>0$ — константы. Заметим, что константы m, M, b и k свои для каждого выражения в (5), а интервал $|x-x_0|$ такой, что соответствующая мажоранта стремится к ∞ внутри его, когда $\varepsilon\to 0$ и ограничена константой M вне его.

Отметим, что и для решений сингулярно-возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений также справедливы аналогичные утверждения [18].

В общем виде оценка n-й производной решения $u(x,\varepsilon)$ сингулярно-возмущенного уравнения выглядит следующим образом:

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}(x,\varepsilon)\right|\le M[1+\psi_n(x,\varepsilon)]\,, \qquad 0\le x\le 1\,,$$

где ψ_n — линейная комбинация базисных мажорант, представленных формулой (5). Характерной чертой такой оценки является то, что она гарантирует, что локальное преобразование $x(\xi,\varepsilon)$, полученное из уравнения вида (4), подходит для сглаживания сингулярностей высокого порядка, т. е. следующая оценка является верной:

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}u[x(\xi,\varepsilon),\varepsilon]\right|\le M\,, \quad 0\le k\le n\,, \quad 0\le x\le 1\,.$$

1.2. Преобразования, задаваемые в явном виде

Одномерное преобразование $x(\xi,\varepsilon)$, удовлетворяющее уравнениям в (2) или (4) с весовой функцией $\psi_p(x,\varepsilon)$, которое устраняет особенности решения $u(x,\varepsilon)$ сингулярно возмущенного уравнения, может быть получено в явном виде. Для этого в окрестности каждой критической точки x_0 должен быть выделен интервал, на котором $\psi_p(x,\varepsilon)$ мажорируется одной из базисных функций в (5), умноженной на константу M. Далее, при решении уравнения (2) с данной мажорантой $\psi_p(x,\varepsilon)$ локальное преобразование $x(\xi,\varepsilon)$, обеспечивающее выполнение условия (1) в соответствующей части окрестности критической точки, находится в явном виде. Склеивая локальные преобразования с полиномиальными функциями вне окрестностей критических точек, получаем глобальное преобразование $x(\xi,\varepsilon) : [0,1] \to [0,1]$, устраняющее особенности функции $u(x,\varepsilon)$.

Однако, если задача имеет много критических точек и/или комбинированных слоев, этот процесс построения глобального преобразования может оказаться слишком сложным и неэффективным. В этом случае с точки зрения практической реализации более простым, надежным и эффективным способом нахождения устраняющих слои преобразований будет численное решение задач (2) или (4).

1.2.1. Построение локально-растягивающих преобразований

Здесь представлены некоторые одномерные локальные растягивающие отображения, полученные из сингулярных функций. Эти отображения используются для нахождения оптимальной координаты ξ неравномерно растягивающего преобразования $\xi(x,\varepsilon)$ (обратного к преобразованию $x(\xi,\varepsilon)$).

По результатам качественного поведения решений модельных задач здесь формулируется несколько новых видов растягивающих функций, которые подходят для нахождения решений со степенными и смешанными слоями, часто встречающимися в практических приложениях. Методика растяжения, использующая новые функции, обеспечивает эффективный контроль за построением координатных систем, устраняющих сингулярности в слоях, и сеток, адаптирующихся к решениям.

Определим основные типы локально-растягивающих функций. Производные решения сингулярно возмущенных уравнений принимают большие значения в центре слоев и уменьшаются к их границам. Вне слоев производные оцениваются константой M, не зависящей от малого параметра ε, а внутри слоя производные любого сингулярного решения, зависящего от x, могут быть ограничены одной базисной мажорантой или их комбинацией $\psi_i^n(x,\varepsilon)$, $i = 1,2,3,4$, которые определяются по формулам (5). Из этих базисных мажорант формулируются четыре одномерных преобразования $\xi_i(x,\varepsilon)$, растягивающих слои. Использование этих преобразований дает возможность построить новую локальную координату ξ, относительно которой решение не будет иметь слоев с большими значениями производных.

Четыре сингулярные функции, рассматриваемые как стандартные локально-растягивающие координатные преобразования, обозначаемые через $\xi_i(x,\varepsilon)$, $i=1,2,3,4$, где x — скалярная независимая переменная, а ε — малый параметр, предназначены только для того, чтобы растягивать граничный слой в окрестности точки $x=0$. Отображения, которые растягивают слои в окрестности внутренних точек $0<x_0<1$ и граничный слой вблизи $x=1$, получаются из этих основных преобразований с помощью процедур сдвига, масштабирования и комбинирования. Практически функции $\xi_i(x,\varepsilon)$ определяются посредством интегрирования основных мажорант (5) для $x_0=0$. В действительности эти локально-растягивающие преобразования являются сингулярными функциями, которые описывают качественное поведение физических решений в пограничных слоях.

Сингулярные функции $\xi_i(x,\varepsilon)$ для приведенных выше мажорант можно также находить через решение начальной задачи вида (2) с весовой функцией $\psi_p(x,\varepsilon)=\psi_i^1(x,\varepsilon)$, где $\psi_i^1(x,\varepsilon)$, $i=1,2,3,4$, — базисные мажоранты первой производной, представленные формулой (5) для $x_0=0$. Для удобства локальные растягивающие функции записываются в таком виде, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\xi_i(0,\varepsilon)=0\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\xi_i(x,\varepsilon)>0\,.$$

Первая функция — это хорошо известное отображение для слоев экспоненциального типа

$$\xi_1(x,\varepsilon)=\frac{1-\exp(-bx/\varepsilon^k)}{c}\,,\quad k>0\,,\quad b>0\,,\quad c>0\,, \tag{6}$$

представляющее собой погранслойную функцию первого порядка. Следующие два локальных растягивающих отображения — степенные функции, а именно

$$\xi_2(x,\varepsilon)=\frac{1-[\varepsilon^k/(\varepsilon^k+x)]^b}{c}\,,\quad k>0\,,\quad b>0\,,\quad c>0\,, \tag{7}$$

и

$$\xi_3(x,\varepsilon)=\frac{(\varepsilon^k+x)^b-\varepsilon^{kb}}{c}\,,\quad k>0\,,\quad 0<b<1\,,\quad c>0, \tag{8}$$

первая из которых является функцией слойного типа. Четвертое локальное растягивающее отображение — преобразование логарифмического типа

$$\xi_4(x,\varepsilon) = \frac{\ln(1 + x\varepsilon^{-k})}{c\ln(1+\varepsilon^{-k})}\,, \qquad k > 0\,, \qquad c > 0\,. \tag{9}$$

Величины k, b и c в этих выражениях для растягивающих функций $\xi_i(x,\varepsilon)$ — положительные константы, от которых зависят некоторые характеристики слоев и их особенностей. В частности число k влияет на размер слоя. Константа c контролирует длину интервала, который отображается в слой в новой растягивающей координате ξ. Константа b отвечает за тип растягивающей неравномерности и ширину слоя. От параметра ε зависит крутизна растягивающих функций в окрестности точки $x = 0$. В качестве условной границы слоя, определяющей его ширину, обычно принимают точку x, в которой модуль производной от мажоранты (5) равен единице.

1.2.2. Базисные локально-сжимающие преобразования

В данном разделе представлены базисные сжимающие функции возле граничной точки $x_0 = 0$. С помощью процедур сдвига, масштабирования, обращения, композиции и склеивания с полиномиальными отображениями конструируются глобальные преобразования и соответствующие разностные сетки, сгущающиеся в окрестности произвольных критических точек отрезка [0, 1].

Функции $\xi_i(x,\varepsilon)$, $i = 1,2,3,4$, определенные формулами (6)—(9), растягивают координату x внутри соответствующих пограничных слоев $[0, x_i^1]$, $i = 1,2,3,4$, поэтому отображения, обратные $\xi_i(x,\varepsilon)$, сжимают координату ξ в соответствующем интервале $[0, \xi_i^1]$. Эти обратные функции определяют локальные преобразования $x_i(\xi,\varepsilon)$.

Учитывая (6)—(9) можно утверждать, что локальные сжимающие функции $x_i(\xi,\varepsilon,b,k)$, $i = 1,2,3,4$, являющиеся обратными по отношению к соответствующим растягивающим функциям $\xi_i(x,\varepsilon)$, имеют следующий вид:

$$x_1(\xi,\varepsilon,b,k) = -\frac{\varepsilon^k}{b}\ln(1 - d\xi)\ , \quad k > 0\ , \quad b > 0\ , \tag{10}$$

$$x_2(\xi,\varepsilon,b,k) = \varepsilon^k\Big((1 - d\xi)^{-1/b} - 1\Big)\ , \quad k > 0\ , \quad b > 0\ , \tag{11}$$

$$x_3(\xi,\varepsilon,b,k) = (\varepsilon^{kb} + d\xi)^{1/b} - \varepsilon^k \ , \quad k > 0 \ , \quad 1 > b > 0 \ , \tag{12}$$

$$x_4(\xi,\varepsilon,b,k) = \varepsilon^k((1+\varepsilon^{-k})^{b\xi} - 1) \ , \quad k > 0 \ , \quad b > 0 \ . \tag{13}$$

Дифференцируя эти выражения p раз, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^p x_1(\xi,\varepsilon,b,k)}{\mathrm{d}\xi^p} &= d_1\varepsilon^k(1-d\xi)^{-p} \ , \\
\frac{\mathrm{d}^p x_2(\xi,\varepsilon,b,k)}{\mathrm{d}\xi^p} &= d_2\varepsilon^k(1-d\xi)^{-p-1/b} \ , \\
\frac{\mathrm{d}^p x_3(\xi,\varepsilon,b,k)}{\mathrm{d}\xi^p} &= d_3(\varepsilon^{kb}+d\xi)^{-p+1/b} \ , \\
\frac{\mathrm{d}^p x_4(\xi,\varepsilon,b,k)}{\mathrm{d}\xi^p} &= d_4\varepsilon^k(1+\varepsilon^{-k})^{b\xi}\ln^p(1+\varepsilon^{-k}) \ ,
\end{aligned} \tag{14}$$

где $|d_i| \le M, \ i = 1,2,3,4$. Поэтому точки ξ_i^p и $x_i(\xi_i^p,\varepsilon,b,k), \ i = 1,2,3,4$, такие, что p-я производная отображения $x_i(\xi,\varepsilon,b,k)$ на интервале $[0,\xi_i^p]$ равномерно ограничена по ε, задаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\xi_1^p = \frac{1-\varepsilon^{k/p}}{d} \ , && x_1(\xi_1^p,\varepsilon,b,k) = \frac{\varepsilon^k}{pb}\ln\varepsilon^{-k} \ , \\
&\xi_2^p = \frac{1-\varepsilon^{k\beta}}{d} \ , \quad \beta = \frac{b}{1+pb} \ , && x_2(\xi_2^p,\varepsilon,b,k) = \varepsilon^{k(1-\beta/b)} - \varepsilon^k \ , \\
&\xi_3^p = m \ , && x_3(\xi_3^p,\varepsilon,b,k) = (\varepsilon^{kb}+dm)^{1/b} - \varepsilon^k \ , \\
&\xi_4^p = \frac{\ln\varepsilon^{-k} - p\ln[\ln(1+\varepsilon^{-k})]}{b\ln(1+\varepsilon^{-k})} \ , && x_4(\xi_4^p,\varepsilon,b,k) = \frac{1}{\ln^p(1+\varepsilon^{-k})} - \varepsilon^k \ .
\end{aligned} \tag{15}$$

Числа $x_i(\xi_1^p,\varepsilon,b,k)$ задают ширину соответствующего слоя. Первая производная каждой функции $x_i(\xi,\varepsilon,b,k)$ мала в точках промежутка $\xi, \ 0 \le \xi < \xi_i(x_i^1,\varepsilon) = \xi_i^1$, и поэтому длина сеточного интервала, полученная с помощью этого отображения, также мала в слое и равна примерно $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi)[x_i(\xi,\varepsilon,b,k)]h$. Степень сгущения узлов в центре слоя достигает значений ε^k и уменьшается ближе к граничной точке $x_i(\xi_i^1,\varepsilon,b,k)$ слоя.

Ниже представлены локальные координатные преобразования, устраняющие сингулярности высокого порядка в пограничном слое возле $x_0 = 0$.

1.2.3. Преобразования для экспоненциальных слоев

1. Логарифмическое преобразование. Для функции $u(x, \varepsilon)$, p-я производная которой в окрестности граничной точки $x_0 = 0$ оценивается экспоненциальной мажорантой $\psi_1^p(x, b, k, \varepsilon)$ из (5) и M, т. е. для которой справедливы неравенства

$$\begin{gathered} | \, u^{(p)}(x, \varepsilon) \, | \leq M[\varepsilon^{-kp} \exp(-bx/\varepsilon^k) + 1] \, , \\ b \geq m > 0 \, , \quad 1 \leq p \leq n \, , \quad 0 \leq x \leq m_1 \, , \end{gathered} \tag{16}$$

имеем оценки

$$| \, u^{(p)}(x, \varepsilon) \, | \leq M \, , \quad 1 \leq p \leq n \, , \quad m_1 \geq x \geq x_1^n = \frac{kn\varepsilon^k}{b} \ln(\varepsilon^{-1}) \, , \tag{17}$$

в то время как внутри интервала $[0, x_1^n)$ производные не являются равномерно ограниченными по ε.

Для устранения локально (в пограничном слое возле $x_0 = 0$) экспоненциальной особенности (16) до порядка n функции $u(x, \varepsilon)$ в новой координате ξ можно использовать базисную логарифмическую сжимающую функцию $x_1(\xi, \varepsilon, a, k)$ в форме (10) на соответствующем интервале $[0, \ \xi_1^n]$ (см. (15)):

$$\begin{gathered} x_1(\xi, \varepsilon, a, k) = -\frac{\varepsilon^k}{a} \ln(1 - d\xi) \, , \\ a \geq m > 0 \, , \; d \geq 1 + m_1 > 1 \, , \; 0 \leq \xi \leq \xi_1^n = \frac{1 - \varepsilon^{k/n}}{d} \, . \end{gathered} \tag{18}$$

Заметим, что локальное преобразование такого вида при $k = 1$ было предложено Бахваловым Н. С. [2] для численного решения задач с экспоненциальными пограничными слоями.

Функция (18) отображает интервал $[0, \ \xi_1^n]$ на погранслойный интервал $[0, \ k\varepsilon^k \ln(\varepsilon^{-1})/an]$, и кроме того $\forall \xi \in [0, \xi_1^n]$

$$\left| \, \frac{\mathrm{d}^j x_1(\xi, \varepsilon, a, k)}{\mathrm{d}\xi^j} \, \right| \leq M \frac{\varepsilon^k}{(1 - d\xi)^j} \leq M \frac{\varepsilon^k}{\varepsilon^{jk/n}} \leq M \, , \quad j \leq n \, . \tag{19}$$

Учитывая (17), константа $a \geq m_1 > 0$ в (18) должна быть такой, чтобы

$$x_1(\xi_1^n, \varepsilon, a, k) = x\Big(\frac{1 - \varepsilon^{k/n}}{d}, \varepsilon, a, k\Big) = \frac{k\varepsilon^k}{na} \ln(\varepsilon^{-1}) \geq x_1^n = \frac{kn\varepsilon^k}{b} \ln(\varepsilon^{-1}) \, , \tag{20}$$

и, кроме того, она должна обеспечить ε-равномерность производных до порядка n функции $u(x,\varepsilon)$ в новой координате ξ на интервале $[0,\xi_1^n]$, т. е.

$$\Big|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}u[x_1(\xi,\varepsilon,a,k),\varepsilon]\Big| \le M\ , \quad 0\le\xi\le\frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}\ . \tag{21}$$

Из условия (20) получаем оценку на константу a:

$$0 < m \le a \le b/n^2\ . \tag{22}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}u[x_1(\xi,\varepsilon,a,k),\varepsilon] = \sum_{p=1}^{n}\frac{n!}{i!j!h!\cdots t!}\frac{\mathrm{d}^p u[x_1(\xi,\varepsilon,a,k),\varepsilon]}{\mathrm{d}x^p}\times\\ \times\sum_{i!j!h!\cdots t!}\Big(\frac{x_1'(\xi,\varepsilon,a,k)}{1!}\Big)^i\Big(\frac{x_1''(\xi,\varepsilon,a,k)}{2!}\Big)^j\cdots\Big(\frac{x_1^{(l)}(\xi,\varepsilon,a,k)}{l!}\Big)^t,\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$x_1^{(i)}(\xi,\varepsilon,a,k) = \frac{\mathrm{d}^i x_1}{\mathrm{d}\xi^i}(\xi,\varepsilon,a,k)\ ,$$

$i,\ j,\ h,\ \cdots,\ t$ — l целых положительных чисел со следующими ограничениями:

$$i+2j+3h+\cdots+lt = n \quad \text{и} \quad i+j+h+\ldots+t = p\ . \tag{24}$$

Из (16) и (18) получаем

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}u[x_1(\xi,\varepsilon,a,k),\varepsilon]\Big| \le M\Big[\varepsilon^{-kp}\exp\Big(\frac{b}{a}\ln(1-d\xi)\Big)+1\Big] =\\ = M[\varepsilon^{-kp}(1-d\xi)^{b/a}+1]\ , \quad 1\le p\le n\ , \quad 0\le\xi\le\frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}\ ,\end{aligned} \tag{25}$$

$$x_1^{(i)}(\xi,\varepsilon,a,k) \le M\frac{\varepsilon^k}{(1-d\xi)^i}\ , \quad 1\le i\le n\ , \quad 0\le\xi\le\frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}\ . \tag{26}$$

Для l целых положительных числе $i,\ j,\ h,\ \cdots,\ t$, удовлетворяющих (24), имеем из (26)

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\frac{x_1'(\xi,\varepsilon,a,k)}{1!}\Big)^i\Big(\frac{x_1''(\xi,\varepsilon,a,k)}{2!}\Big)^j\cdots\Big(\frac{x_1^{(l)}(\xi,\varepsilon,a,k)}{l!}\Big)^t\Big|\\ \le M\frac{\varepsilon^{kp}}{(1-d\xi)^n}\ , \quad 0\le\xi\le\frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}\ ,\end{aligned} \tag{27}$$

а из (19), (23), (25) и (27) следует

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}u[x_1(\xi,\varepsilon,a,k),\varepsilon]\right| \le M\Big[\frac{\varepsilon^{kp}(1-d\xi)^{b/a}}{\varepsilon^{kp}(1-d\xi)^n}+1\Big] \le M \ ,0\le\xi\le\frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d},$$

когда $0 < m \le a \le b/n$ для произвольного m из интервала $(0,b/n)$. Таким образом, заключаем, что оценка (21) справедлива, когда a в (18) удовлетворяет условию (22), т. е. $0 < m \le a \le b/n^2$.

Учитывая (16), преобразование $x_1(\xi,\varepsilon,a,k)$ с условием (22) на интервале $[0,\xi_1^n]$ может быть получено решением задачи (2) или (4) с

$$\psi(x,\varepsilon) = (m_1 + (u^{(p)}(x,\varepsilon))^2)^{1/(2p)} \ , \ \ m_1 > 0 \ , \ \ p = n^2 \ , \ \ 0 \le x \le 1 \ . \quad (28)$$

Вне интервала $[0,(1-\varepsilon^{k/n})/d]$ логарифмическое преобразование (18) может быть продолжено, например, с помощью полинома непрерывно или с необходимой гладкостью. Так, на интервале $[0,m]$ такое преобразование $x_1(\xi,\varepsilon,a,k)\in C^l[0,m]$, $n\ge l\ge 0$ можно представить в виде

$$x_1(\xi,\varepsilon,a,k) = \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^k}{a}\ln(1-d\xi)\ , & 0\le\xi\le\xi_1^n, \\ \dfrac{k\varepsilon^k}{na}\ln(\varepsilon^{-1}) + \dfrac{d\varepsilon^{k(1-1/n)}}{a}(\xi-\xi_1^n)+ & \\ +\dfrac{d^2\varepsilon^{k(1-2/n)}}{2a}(\xi-\xi_1^n)^2+\cdots & \\ +\dfrac{d^l\varepsilon^{k(1-l/n)}}{la}(\xi-\xi_1^n)^l + c_0(\xi-\xi_1^n)^{l+1}, \xi_1^n\le\xi\le m\ . & \end{cases}$$

2. Степенное преобразование. Экспоненциальная особенность типа (16) может быть устранена локально и с помощью степенного преобразования в виде (11):

$$x_2(\xi,\varepsilon,a,k) = \varepsilon^k((1-d\xi)^{-1/a}-1)\ , \quad a\ge m>0\ , \quad 0\le\xi\le\xi_2^n\ , \quad (29)$$

где $d = (1-\varepsilon^{k\beta})/\xi_2^n$, $0 < m \le \beta \le a/(1+na)$. Это преобразование отображает интервал $[0,\xi_2^n]$ на соответствующий пограничный интервал $[0,\ x_2^n]$, $x_2^n = \varepsilon^{k(1-\beta/a)} - \varepsilon^k$. Отображение $x_2(\xi,\varepsilon,a,k)$ было предложено Лисейкиным В. Д. [18] для конструирования неравномерно сгущающихся сеток внутри экспоненциальных и степенных (первого вида) и комбинированных слоев. Частный случай преобразования $x_2(\xi,\varepsilon,a,k)$

для $a = 1$, $k = 1/2$, имеющего вид

$$x_2(\xi, \varepsilon, 1, 1/2) = \varepsilon^{1/2} \frac{d\xi}{1 - d\xi} \ ,$$

был предложен Вулановичем Р. [20] для построения сеток внутри экспоненциальных слоев масштаба $k = 1/2$.

Из (29) имеем

$$x_2(\xi_2^n, \varepsilon, a, k) = x_2\Big(\frac{1 - \varepsilon^{k\beta}}{d}, \varepsilon, a, k\Big) = \varepsilon^{k(1-\beta/a)} - \varepsilon^k \geq x_1^n = \frac{kn\varepsilon^k}{b} \ln(\varepsilon^{-1}) \ ,$$

когда $\varepsilon \leq m_1$ для некоторого $m_1 > 0$, т. е. эта функция отображает интервал $[0,\ \xi_2^n]$ на интервал, который при достаточно малом ε шире интервала $[0,\ x_1^n]$ для $b \geq m > 0$ в (17). Далее, для всех ξ из промежутка

$$0 \leq \xi \leq \xi_2^n = \frac{1 - \varepsilon^{k\beta}}{d}$$

справедлива оценка

$$x_2^{(l)}(\xi, \varepsilon, a, k) \leq M \frac{\varepsilon^k}{(1 - d\xi)^{l+1/a}} \ , \quad 1 \leq l \leq n \ , \tag{30}$$

поэтому

$$x_2^{(l)}(\xi, \varepsilon, a, k) \leq M \varepsilon^{k(1-\beta(l+1/a))} \leq M \ , \quad 1 \leq l \leq n \ , \tag{31}$$

если только $0 < m \leq \beta \leq a/(1 + na)$. Когда l целых положительных чисел i, j, …, t удовлетворяют условию (24), тогда из (30) имеем

$$\begin{aligned} &\Big|\Big(\frac{x_2'(\xi, \varepsilon, a, k)}{1!}\Big)^i \Big(\frac{x_2''(\xi, \varepsilon, a, k)}{2!}\Big)^j \cdots \Big(\frac{x_2^{(l)}(\xi, \varepsilon, a, k)}{l!}\Big)^t\Big| \\ &\leq M \frac{\varepsilon^{kp}}{(1 - d\xi)^{n+p/a}} \ , \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1 - \varepsilon^{k\beta}}{d} \ , \end{aligned} \tag{32}$$

а из (16) и (29) при $0 \leq \xi \leq \xi_2^n$

$$\Big|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p} u[x_2(\xi, \varepsilon, a, k), \varepsilon]\Big| \leq M[\varepsilon^{-kp} \exp(-b(1 - d\xi)^{-1/a}) + 1] \ . \tag{33}$$

Отметим, что формула (23) также справедлива для координатного преобразования $x_2(\xi, \varepsilon, a, k)$, поэтому из (23), (31), (32) и (33) следует

$$\Big|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} u[x_2(\xi, \varepsilon, a, k), \varepsilon]\Big| \leq M\Big[\frac{\exp(-b(1 - d\xi)^{-1/a})}{(1 - d\xi)^{n+p/a}} + 1\Big] \leq M$$

для произвольного $a \geq m > 0$.

Преобразование (29) более удобно для устранения экспоненциальных особенностей, чем преобразование (18), так как константа a в (29) не зависит от b в (16), поэтому это преобразование с произвольной фиксированной константой $a \geq m > 0$ годится для всех констант $b \in (0, \infty)$ в (16) для устранения особенностей функции $u(x, \varepsilon)$ до порядка n. Другое популярное кусочно-линейное преобразование

$$x(\xi, \varepsilon, b) = \begin{cases} 2\sigma\xi \ , & 0 \leq \xi \leq 1/2 \ , \\ \\ \sigma + 2(1-\sigma)\xi \ , & 1/2 \leq \xi \leq 1 \ , \end{cases} \tag{34}$$

где $\sigma = \min\{0.5, (n/b)\varepsilon \ln N\}$, предложенное Шишкиным Г. И. [17] для построения сеток в экспоненциальных слоях, также зависит от b в (16).

Таким же образом вместо $x_2(\xi, \varepsilon, a, k)$ можно использовать более общее отображение

$$c_1 x_2(\xi, \varepsilon, a, k) \ , \quad 0 < m_3 \leq c_1 \leq m_4 \ , \tag{35}$$

которое является более удобным для удовлетворения граничных условий. Например, равенство $c_1 x_2(m, \varepsilon, a, k) = x_0$ удовлетворяется значением $c_1 = x_0 / x_2(m, \varepsilon, a, k)$.

Вне интервала $[0, \ \xi_2^n]$ преобразование (35) может быть продолжено гладко с помощью полинома. В частности глобальное преобразование, обозначенное как $x_2(\xi, \varepsilon, a, k) \in C^l[0, m]$, $n \geq l \geq 0$, может иметь следующий вид:

$$x_2(\xi, ...) = \begin{cases} c_1 \, F(\xi) \ , & 0 \leq \xi \leq \xi_2^n \ , \\ \\ c_1 \Big[\displaystyle\sum_{r=0}^{l} F^{(r)}(\xi_2^n) \frac{z^r}{r!} + c_0 z^{l+1} \Big] \ , & \xi_2^n \leq \xi \leq m \ , \end{cases} \tag{36}$$

где

$$F(\xi) = \frac{\varepsilon^k}{(1 - d\xi)^{1/a}} - \varepsilon^k, \quad z = \xi - \xi_2^n, \quad d = \frac{1 - \varepsilon^{k\beta}}{\xi_2^n}, \quad \beta = \frac{a}{1 + na},$$

константа $c_1 > 0$ находится из условия $x_2(m, \varepsilon, a, k) = x_0$, а произвольная положительная константа a удовлетворяет условию $a \geq m_1 > 0$. Из (36) при $n \geq i \geq 1$ легко следует

$$F^{(i)}(\xi_2^n) = d^i \frac{1}{a}\Big(\frac{1}{a}+1\Big)\dots\Big(\frac{1}{a}+i-1\Big)\varepsilon^{ka(n-i)/(1+na)} \ . \qquad (37)$$

Отметим, когда $l = n \geq 1$, тогда из (37) имеем

$$F^{(l)}(\xi_2^n) = d^n \frac{1}{a}\Big(\frac{1}{a}+1\Big)\dots\Big(\frac{1}{a}+n-1\Big)\varepsilon^0 \geq m > 0 \ .$$

Таким образом, в этом случае в (36) можно положить $c_0 = 0$.

1.2.4. Преобразования для устранения степенных особенностей

Преобразования для устранения особенностей первого типа. Локальное степенное преобразование (29) или (35) с подходящим выбором константы $a \geq m > 0$ также годится для устранения степенной особенности типа 1 возле $x_0 = 0$, т. е. когда производные решения оцениваются функцией $\psi_2^n(x, b, k, \varepsilon)$ из (5) для $x_0 = 0$ и константы M, а именно

$$|u^{(p)}(x,\varepsilon)| \leq M[\varepsilon^{kb}/(\varepsilon^k + x)^{b+p} + 1] \ , \quad 1 \leq p \leq n \ , \quad 0 \leq x \leq m \ . \qquad (38)$$

Здесь пограничным интервалом, в котором все производные до порядка n функции $u(x,\varepsilon)$ не будут равномерно ограничены по ε, является интервал $[0,\ x_2^n]$, $x_2^n = m\varepsilon^{kb/(b+n)} \gg x_1^n = (kn/b)\varepsilon^k \ln(\varepsilon^{-1})$ для малого ε, поэтому преобразования (18) и (34) не годятся для построения сгущающихся сеток для таких особенностей. Однако преобразование (29)

$$x_2(\xi,\varepsilon,a,k) = \varepsilon^k((1-d\xi)^{-1/a} - 1) \ , \quad a \geq m > 0 \ , \quad 0 \leq \xi \leq \xi_2^n \ , \qquad (39)$$

где $d = (1-\varepsilon^{k\beta})/\xi_2^n$, $0 < m \leq \beta \leq a/(1+na)$, может отобразить интервал $[0,\ \xi_2^n]$ на интервал, содержащий $[0,\ x_2^n]$, т. е.

$$x_2(\xi_2^n,\varepsilon,a,k) = x_2\Big(\frac{1-\varepsilon^{k\beta}}{d},\varepsilon,a,k\Big) = \varepsilon^{k(1-\beta/a)} - \varepsilon^k \geq x_2^n = m\varepsilon^{kb/(b+n)} \ ,$$

где $0 < m_1 \leq \beta \leq a/(1+na)$. Это может быть, когда

$$k - \frac{k\beta}{a} \leq \frac{kna}{1+na} \leq \frac{kb}{b+n} \ ,$$

что, аналогично (22), ведет к $0 < m \leq a \leq b/n^2$. Из (39) и (38) для всех значений ξ из интервала $0 \leq \xi \leq (1-\varepsilon^{k\beta})/d$ получаем

$$\Big|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}u[x_2(\xi,\varepsilon,a,k),\varepsilon]\Big| \leq M\Big[\frac{\varepsilon^{kb}(1-d\xi)^{(b+p)/a}}{\varepsilon^{k(b+p)}}+1\Big] \ , \quad 1 \leq p \leq m \ , \ . \qquad (40)$$

Таким образом, из (19), (23), (32) и (40) в указанном интервале имеет место оценка

$$\Big|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}u[x_2(\xi,\varepsilon,a,k),\varepsilon]\Big| \le M\Big[\frac{(1-d\xi)^{(b+p)/a}}{(1-d\xi)^{n+p/a}}+1\Big] \le M \ ,$$

так как

$$(b+p)/a-n-p/a=b/a-n>0 \ ,$$

когда $0<m\le a\le b/n^2$.

Глобальное преобразование $x_2(\xi,\varepsilon,a,k)\in C^l[0,m]$ может иметь вид (36) при следующей зависимости a от b из (38): $0<m\le a\le b/n^2$. Следовательно, это преобразование может быть получено посредством решения задач (2) или (4) с $\psi(x,\varepsilon)$ из (28).

Преобразования для устранения особенностей второго типа. В некоторых случаях производные решения возле $x_0=0$ оцениваются мажорантой $\psi_3^n(x,b,k,\varepsilon)$ из (5) и константой M, а именно

$$|u^{(p)}(x,\varepsilon)|\le M[(\varepsilon^k+x)^{b-p}+1] \ , b>0 \ , 1\le p\le n \ , 0\le x\le m \ . \quad (41)$$

Заметим, когда $b\ge n$, то производные до порядка n будут равномерно ограниченными, поэтому рассматриваем эту особенность для $0<b<n$, которая устраняется с помощью локального преобразования вида (12):

$$x_3(\xi,\varepsilon,a,k)=(\varepsilon^{ak}+\xi)^{1/a}-\varepsilon^k \ , 0<m_1\le c_1\le m_2 \ , 0\le\xi\le\xi_3^n=m \ , \quad (42)$$

где $0<m\le a\le\min\{b/n,1/n\}$. Действительно, из (42) мы получаем

$$|x_3^{(r)}(\xi,\varepsilon,a,k)|\le M(\varepsilon^{ak}+\xi)^{-r+1/a}\le M \ , 1\le r\le n \ , 0\le\xi\le m \ , \quad (43)$$

когда $0<m\le a\le 1/n$. Таким образом, из (41) и (43) следует оценка

$$\Big|\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}u[x_3(\xi,\varepsilon,a,k),\varepsilon]\Big|\le M[(\varepsilon^{ak}+\xi)^{(b-p)/a}+1], \quad (44)$$

которая справедлива $\forall p\in[1,n]$ и $\forall\xi\in[0,m]$. Значит, учитывая (24), получим

$$\Big|\Big(\frac{x_3'(\xi,\varepsilon,a,k)}{1!}\Big)^i\Big(\frac{x_3''(\xi,\varepsilon,a,k)}{2!}\Big)^j\cdots\Big(\frac{x_3^{(l)}(\xi,\varepsilon,a,k)}{l!}\Big)^t\Big| \le M(\varepsilon^{ak}+\xi)^{-n+p/a} \ , \quad 0\le\xi\le m \ . \quad (45)$$

Учитывая теперь формулу (23), в которой $x_1(\xi,\varepsilon,a,k)$ заменяется на $x_3(\xi,\varepsilon,a,k)$, и оценки (43)–(45), получаем

$$\Big|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}u[x_3(\xi,\varepsilon,a,k)]\Big| \le M[(\varepsilon^{ak}+\xi)^{-n+b/a}+1] \le M\ , \quad 0\le\xi\le m\ , \tag{46}$$

когда $0 < m \le a \le \min\{b/n, 1/n\}$. Это преобразование может быть также получено с помощью решения задач (2) или (4) с $\psi(x,\varepsilon)$ из (28) при $p=n$.

2. Разностные методы

2.1. Сеточная область

Введем на отрезке $a \le x \le b$ сетку, в общем случае неравномерную $a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b$, с шагами $h_i = x_{i+1} - x_i$. При приближенном решении континуальных задач на сетке естественным требованием является равномерное стремление шагов сетки к нулю при безграничном росте числа ее узлов: $h = max\{h_i\} \to 0$. Для равномерных сеток это свойство выполняется автоматически ввиду обратно-пропорциональной зависимости $Nh = b - a$ между числом шагов и размером шага. В случае же неравномерных сеток при ее определении нужно специально обеспечить стремление к нулю максимального шага сетки, иначе сложно гарантировать сходимость приближенного решения к точному при $N \to \infty$. Поясним сказанное несколько неожиданным примером сетки, для которой равномерное стремление шагов к нулю не имеет места [19].

Речь идет о сетке с неравномерным шагом, растущим в геометрической прогрессии. Такие сетки иногда реально используются при численном решении задач, в частности при расчете пограничных слоев, когда основное изменение параметров течения происходит вблизи твердой стенки, а по мере удаления от нее характеристики потока стремятся к постоянным значениям. Рассмотрим, что происходит при безграничном росте числа узлов такой сетки. Зададимся близким к единице знаменателем прогрессии $q > 1$ и при каждом фиксированном числе шагов N будем подбирать такой начальный шаг $h_0 = h_0(N)$, чтобы сумма всех шагов сетки, растущих от начального шага прогрессивно со знаменателем q, укладывалась бы точно в единичный отрезок, т. е.

$$h_0\,(1 + q + q^2 + ... + q^{N-1}) = h_0\,\frac{q^N - 1}{q - 1} = 1.$$

Устремляя теперь N к бесконечности, получим последовательность сеток на единичном отрезке. Вычислим наибольший шаг, примыкающий к правому концу отрезка. Очевидно, это

$$h_N = h_0\,q^{N-1} = \frac{(q-1)}{q^N - 1}\,q^{N-1} = \frac{q^N - q^{N-1}}{q^N - 1} \to \frac{q-1}{q}.$$

Таким образом, наибольший шаг не стремится к нулю при детализации сетки, поэтому такую сетку нельзя признать удачной. Использование в вычислительных задачах сеток, построенных с помощью геометрической прогрессии, проходит безнаказанно лишь тогда, когда производные решения в области больших шагов действительно близки к нулю. Если это условие не выполняется, то разностные аппроксимации производных не стремятся к значениям производных при дроблении сетки, и о сходимости приближенного решения к точному не может быть речи. Если же сетка построена с соблюдением условия стремления к нулю нормы шага, то подобных проблем с аппроксимацией производных нет. Однако порядки аппроксимации производных разностными аналогами могут быть различными в зависимости от качества сеток.

Рассмотрим сетки, называемые квазиравномерными [4]. Название это связано с тем, что такие сетки являются образом равномерной сетки при гладком преобразовании. Пусть функция $x = \psi(\xi)$ является строго монотонно возрастающей и достаточно гладкой, определена на отрезке $0 \le \xi \le 1$ и отображает его на отрезок $a \le x \le b$. Тогда равномерная сетка $\{\xi_i\}$, $(\xi_i = i/N, i = 0, 1, ...N)$ генерирует в области образа сетку $\{x_i\}$ с координатами $x_i = \psi(\xi_i)$. Зафиксируем произвольно внутренний узел сетки x_i и обозначим местные шаги сетки слева и справа от него через h_- и h_+.

Оценим разность соседних шагов сетки. Имеем

$$h_+ = \psi(\xi_{i+1}) - \psi(\xi_i) = \psi'(\theta_1)\frac{1}{N}, \quad h_- = \psi(\xi_i) - \psi(\xi_{i-1}) = \psi'(\theta_2)\frac{1}{N}.$$

Отсюда следует, что при условии ограниченности первой производной функции $\psi(\xi)$

$$|h_+ - h_-| = |\psi'(\theta_1) - \psi'(\theta_2)|\frac{1}{N} \le M_1|\theta_1 - \theta_2|\frac{1}{N} \le 2\,M_1\frac{1}{N^2}.$$

Следовательно, разность соседних шагов квазиравномерной сетки есть величина второго порядка малости: $h_+ - h_- = O(h^2)$.

Однако в случае сетки, не являющейся квазиравномерной, для разности соседних шагов не гарантируется второй порядок малости. Тривиальным примером является сетка с парой попеременно чередующихся шагов $\{h,\ 0.9h,\ h,\ 0.9h,\ ...\}$. Для нее разность соседних шагов, очевидно, составляет величину первого порядка $|h_+ - h_-| = 0.1\,h$.

2.2. Аппроксимации производных

Порядок аппроксимации производных разностными отношениями может зависеть от того, является сетка квазиравномерной или не является, так как порядок разности соседних шагов зависит от типа сетки. Зададим на отрезке неравномерную сетку и для пары соседних шагов h_- и h_+ при фиксированном внутреннем узле x_i введем обозначения для их суммы, разности и произведения:

$$s = h_+ + h_-, \quad d = h_+ - h_-, \quad p = h_+ h_-.$$

Рассмотрим сначала односторонние разделенные разности первого порядка:

$$\Delta_+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_+}, \quad \Delta_- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_-}.$$

Очевидно, данные разностные отношения аппроксимируют производную в узле x_i с первым порядком независимо от того, является сетка квазиравномерной или не является.

Для аппроксимации производной в виде линейной комбинации с весами

$$\Delta_\beta = \beta\Delta_+ + (1-\beta)\Delta_-$$

из разложения в окрестности узла x_i:

$$\Delta_\beta = D + \frac{1}{2}(\beta h_+ - (1-\beta)h_-)D^2 + O(h^2), \quad D = \frac{\partial}{\partial x}$$

следует, что

1) при значении веса $\beta = \beta_- + O(h)$, где $\beta_- = h_-/s$, достигается второй порядок при любой сетке;

2) при $\beta = \beta_0 = 1/2 + O(h)$, а также при $\beta = \beta_+ + O(h)$, где $\beta_+ = h_+/s$, достигается второй или первый порядок в зависимости от того, является сетка квазиравномерной или нет;

3) при прочих значениях веса $\beta \in (0,1)$ порядок аппроксимации в узле x_i равен единице на любых сетках.

Это непосредственно следует из легко проверяемых разложений

$$\Delta_{\beta_-} = D + O(h^2), \quad \Delta_{\beta_0} = D + \frac{d}{4}\, D^2 + O(h^2), \quad \Delta_{\beta_+} = D + \frac{d}{2}\, D^2 + O(h^2)$$

и из оценки для разности соседних шагов $d = O(h^2)$, справедливой только для квазиравномерной сетки.

Для разностного аналога оператора двойного дифференцирования

$$\Lambda = \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{s/2} \approx D^2$$

справедливо разложение

$$\Lambda = D^2 + \frac{d}{3}D^3 + \frac{p+d^2}{12}D^4 + O(d\,h^2),$$

из которого следует, что на квазиравномерной сетке аппроксимация имеет второй порядок, а в общем случае — только первый. Нетрудно также заметить, что в случае квазиравномерной сетки при разложении Λ в бесконечный ряд слагаемые с нечетными производными имеют на единицу больший порядок, чем в общем случае произвольной сетки.

2.3. Методы решения простейшей задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\varepsilon u' = f(x,u), \quad x \in (0,1), \quad f'_u(u,x) \le 0, \quad u(0) = U_0 \tag{47}$$

с малым параметром ε, в механике называемым коэффициентом вязкости или коэффициентом диффузии. Разделив обе части уравнения на малый параметр, приведем уравнение к канонической форме $u' = F(x,u)$ где $F = f/\varepsilon$ — новая правая часть с малым параметром в знаменателе.

Предположим, что на отрезке $0 \le x \le 1$ построена некоторая неравномерная сетка. Обозначим символом h локальное значение шага сетки $h = x_{i+1} - x_i$ в фиксированном узле x_i. Для решения задачи Коши применим три различных классических метода: одношаговый явный метод Эйлера (ME)

$$u_{i+1} = u_i + h\,F(x_i,u_i), \quad 0 < i < N,$$

первого порядка точности, модификацию метода Эйлера (MME)

$$k_1 = h\,F(x_i,u_i), \quad k_2 = h\,F(x_i+h, u_i+k_1),$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{k_1+k_2}{2}, \quad 0 < i < N,$$

второго порядка точности и один из вариантов метода Рунге — Кутты (MRK)

$$k_1 = h\,F(x_i,u_i), \quad k_2 = h\,F(x_i+h/4, u_i+k_1/4),$$

$$k_3 = h\,F(x_i+h/2, u_i+k_2/2), \quad k_4 = h\,F(x_i+h, u_i+k_1-k_2+k_3),$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{k_1 + 4\,k_3 + k_4}{6}, \quad 0 < i < N,$$

четвертого порядка точности.

Представленные выше методы являются классическими, и более подробно с ними и рядом других методов можно познакомиться по любым учебникам, посвященным вычислительным методам, например [1, 5, 10, 15, 16]. Следует отметить, что методы выглядят одинаково как при постоянном, так и при переменном шаге, хотя обычно в учебниках на этом внимание не акцентируется. Специфика рассматриваемых нами задач с малым параметром состоит в том, что расчеты необходимо проводить на специальных адаптивных сетках, равномерные сетки применять нецелесообразно.

2.4. Разностные схемы для дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + F(x,u) = 0, \quad x \in (0,1), \quad F'_u(u,x) \geq 0 \tag{48}$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$ и с граничными условиями первого рода на концах отрезка: $u(0) = U_0$, $u(1) = U_1$. В частном случае уравнение может быть линейным

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x), \quad x \in (0,1), \quad c(x) \geq 0.$$

Для численного решения задачи (48) будем использовать несколько разностных схем, допускающих реализацию трехточечной прогонкой.

Первая схема — схема первого порядка точности со стандартной аппроксимацией второй производной

$$\Lambda u = \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{s/2}\,u, \quad s = h_+ + h_-$$

и односторонней разделенной разностью $\Delta_\pm u$, учитывающей знак $a(x_i)$, в качестве аппроксимации первой производной. Условимся для простоты записи опускать индексы значений функций u, a, c, F в узле x_i, в котором записана схема. Схема при такой форме записи имеет простой вид:

$$-\varepsilon\Lambda u + a\Delta_\pm u + F = 0. \tag{49}$$

Здесь приведена схема для нелинейного уравнения, в линейном случае функцию F следует формально заменить разностью $cu - f$. Это справедливо и в отношении других схем, которые ниже также приведены лишь для нелинейного случая.

Как показано выше, односторонние разности аппроксимируют производную с первым порядком на любой сетке, поэтому схема с «ориентированной разностью» (49) всегда имеет первый порядок точности, в том числе на квазиравномерной и даже на равномерной сетке.

Если в (49) заменить односторонние разности их линейными комбинациями с весом $\beta = \beta_0 = 1/2$ или $\beta = \beta_+ = h_+/s$, получим схему

$$-\varepsilon\Lambda u + a\Delta_\beta u + F = 0, \quad (\beta = 1/2 \quad \text{или} \quad \beta = h_+/s) \tag{50}$$

первого порядка на произвольной сетке, но имеющей второй порядок на квазиравномерной сетке.

В следующей схеме первую производную заменим разделенной разностью Δ_β, выбрав специальный вес $\beta = \beta_- = h_-/s$, обеспечивающий на любых сетках второй порядок погрешности аппроксимации, а главный член погрешности разностного аналога второй производной Λu компенсируем дополнительными слагаемыми в разностной схеме так, чтобы в целом получилась схема второго порядка аппроксимации на любой сетке. С этой целью за исходную примем схему

$$-\varepsilon\Lambda u + a\Delta u + F = 0, \quad \Delta = \Delta_{\beta_-} = \frac{h_-\Delta_+ + h_+\Delta_-}{s},$$

и применим к ней метод исчерпания погрешности (см., например, [11]), названный так еще в шестидесятых годах прошлого столетия академиком Яненко Н. Н.

Суть его заключается в определении погрешности некоторой простой исходной схемы с последующей попыткой включить в схему, если это возможно, разностную аппроксимацию главного члена погрешности с обратным знаком. К полученной таким образом схеме более высокого порядка аппроксимации можно снова применить метод исчерпания погрешности, с тем чтобы улучшить аппроксимацию еще на порядок. Метод использует продолженную систему, включающую в себя исходное уравнение и его следствия, полученные дифференцированием. Привлечение продолженной системы позволяет выразить старшие производные через младшие.

Вычислим погрешность исходной схемы на решениях уравнения (48):

$$\Psi = -\varepsilon(u'' + \frac{d}{3}u''' + O(h^2)) + a(u' + O(h^2)) + F = -\frac{d}{3}\varepsilon u''' + O(h^2) =$$

$$-\frac{d}{3}(F+au')'+O(h^2)=-\frac{d}{3}F'-\frac{d}{3}(au')'+O(h^2).$$

Полученные выражения первого порядка аппроксимируем разностными выражениями и с целью компенсации главного члена погрешности включим их с обратным знаком в исходную схему. Очевидно, выражения F' и $(au')'$ достаточно аппроксимировать с первым порядком, поскольку перед ними имеется коэффициент $d/3$, имеющий минимум первый порядок малости. В результате описанных манипуляций получим схему

$$-\varepsilon\Lambda u+a\Delta u+\frac{d}{3}\Omega u+(E+\frac{d}{3}\Delta)F=0, \tag{51}$$

где

$$\Omega u=\frac{a_+\Delta_+-a_-\Delta_-}{s/2}u\approx(a\,u')'+O(h),$$

E — тождественный оператор, $a_\pm$ — местные значения функции $a(x)$ в полуцелых узлах справа и слева.

Применим к схеме второго порядка (51) еще раз метод исчерпания погрешности. Для этого вычислим главные члены разложения погрешности схемы (51) и понизим в них порядок производных с помощью продолженной системы уравнений (в данном случае выразим четвертые и третьи производные через младшие производные), а затем компенсируем их в схеме с противоположными знаками разностными аппроксимациями. Опуская довольно громоздкие детали, приведем в качестве результата описанных манипуляций схему третьего порядка аппроксимации

$$(-\varepsilon+\frac{p}{6}\Delta a)\Lambda u+(a+\frac{p}{12}\Lambda a)\Delta u+(\frac{d}{3}-ar)\Omega u+\Sigma F=0, \tag{52}$$

где

$$\Sigma=E+(\frac{d}{3}-ar)\Delta+\frac{p+d^2}{12}\Lambda,\quad r=\frac{3p+d^2}{36\varepsilon}.$$

Схемы (51), (52) по структуре компактны, все слагаемые аппроксимируются в пределах трехточечного шаблона, как и в случае простейших схем. Более подробно с методами построения компактных схем и их свойствами можно познакомиться по работам [11, 12]. Для других типов дифференциальных уравнений такого рода компактные схемы на неравномерных сетках построены в работе [13]. В двумерном нелинейном случае аналогичное построение выполнено в работе [14] и применено в работе [3] для численного моделирования стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, описываемых системой уравнений Навье — Стокса.

2.5. Ожидаемые свойства численных решений и технические подробности тестирования

В случае постоянных коэффициентов или при наличия полной информации о выражениях старших производных правой части и коэффициентов уравнения процесс исчерпания погрешности можно продолжать до бесконечности, оставаясь в рамках трехточечного шаблона, но при переменных коэффициентах попытка повышения порядка до четвертого приводит к необходимости аппроксимировать третью производную $a'''(x)$, что требует уже привлечения минимум четырех узлов. Поэтому на трехточечном шаблоне неравномерной сетки дифференциальное уравнение второго порядка невозможно аппроксимировать с погрешностью выше третьего порядка, если коэффициенты уравнения являются сеточными функциями. Следует заметить, что в частном случае равномерной сетки порядок аппроксимации схемы (52) будет четвертым, поскольку в этом случае погрешность разлагается по четным степеням шага.

На квазиравномерных сетках схема (52) также может иметь четвертый порядок, если только старшие производные, входящие в главный член погрешности, ограничены. Это очевидно, если принять во внимание, что при численном решении задач с малым параметром главная цель состоит в обеспечении равномерной по ε сходимости численного решения к точному, а для этого, разумеется, требуется равномерная по ε оценка производных решения относительно новой сеточной координаты ξ, т. е.

$$\left|\frac{d^p u(x(\xi,\varepsilon),\varepsilon)}{d\xi^p}\right| \le M, \quad p \le n, \tag{53}$$

где M — константа, не зависящая от ε.

Без применения специальных адаптивных сеток эта цель недостижима. Ясно, что при использовании схем повышенной точности от преобразования $x = \psi(\xi)$, осуществляющего генерацию сетки, следует требовать принадлежности к классу гладкости более высокой степени, чем в случае схемы первого порядка. Непрерывности первой производной на замкнутом отрезке, достаточной для схем первого порядка точности, для высокоточных схем не достаточно, так как оценка старших производных решения резко ухудшается в окрестности точек, где терпят разрыв старшие производные преобразования $x = \psi(\xi)$. Таким образом, чем выше порядок аппроксимации схемы, тем выше требования к классу гладкости функции, генерирующей сетку.

Для некоторых тестовых задач, решаемых ниже, точное решение не было известно, однако на графиках некоторые кривые помечены в легендах как точные. В таких случаях под «точным» решением на приводимых графиках подразумевается численное решение, полученное на самой подробной сетке в процессе ее детализации. В расчетах, разумеется, контролировалась сходимость при детализации сетки приближенных решений, полученных по различным схемам, к одному и тому же пределу. Для апостериорной оценки C-нормы ошибки (т. е. разности между приближенным и точным решением) на сгущающихся сетках при неизвестном точном решении использовалась разность приближенных решений на двух последовательных сетках:

$$\delta^h = \max_{i=0}^{N} |u_{2i}^{2N} - u_i^N|, \quad h = 1/N,$$

где u^N и u^{2N} — приближенные решения на сетках с N и $2N$ шагами. По оценкам ошибки вычислялась апостериорная оценка реально наблюдаемого порядка точности $p^h = \log_2(\delta^h/\delta^{h/2})$. Во всех таблицах оценки ошибки δ и порядка p снабжены нижними индексами со значениями 1, 2 и 3, соответствующими порядку точности схем, по которым получены результаты.

Важной характеристикой алгоритма явного задания узлов адаптивной сетки является равномерность модуля приращения решения на шаге, т. е. оценка $|u_{i+1}^N - u_i^N| \le m/N$, где m не зависит от ε и N. Практически во всех расчетах это свойство имело место. Нарушалось оно лишь при грубой сетке, недостаточно детальной для данного значения вязкости, и обычно проявлялось в осциллирующем характере приближенных решений.

2.6. Базовое преобразование, генерирующее сетку

Для построения разностных сеток, сгущающихся в экспоненциальных слоях возле точки $x_0 = 0$, будет использовано преобразование класса $C^l[0,\ 1]$, устраняющее в слое экспоненциальные особенности масштаба k до порядка n (т. е. обеспечивающего справедливость оценки (53)). С этой целью вблизи $\xi = 0$ определим функцию $x = \phi(\xi, \varepsilon)$ в виде

$$x = \phi(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^k \left((1 - d\xi)^{-1/a} - 1 \right), \quad 0 \le \xi \le \xi_0, \tag{54}$$

где $d = (1-\varepsilon^{k\beta})/\xi_0 \geq 1 + m_1 > 1$, $\beta = a/(1+na)$, при этом a — любая положительная константа, отделенная от нуля ($a \geq m_2 > 0$).

Для построения преобразования следует доопределить функцию (54) для значений $\xi_0 < x \leq 1$ с соблюдением необходимого класса гладкости. Этому условию отвечает базовое преобразование $x_b(\xi, \varepsilon, a, k, l, n, \xi_0)$, сгущающее сетку вблизи левого конца отрезка ($0 \leq x \leq 1$), в следующей форме:

$$x_b(\xi,\varepsilon,...) = \begin{cases} c_1\phi(\xi,\varepsilon)\ , & 0 \leq \xi \leq \xi_0\ , \\ c_1\Big[\phi(\xi_0,\varepsilon) + \phi'(\xi_0,\varepsilon)(\xi-\xi_0) + \\ +\dfrac{1}{2}\phi''(\xi_0,\varepsilon)(\xi_0)(\xi-\xi_0)^2 + \ldots + \\ +\dfrac{1}{l!}\phi^{(l)}(\xi_0,\varepsilon)(\xi_0)(\xi-\xi_0)^l + c_0(\xi-\xi_0)^{l+1}\Big]\ , & \xi_0 \leq \xi \leq 1\ , \end{cases} \tag{55}$$

где $l \leq n$, $c_0 > 0$; константа $c_1 > 0$ выбирается из условия $x_b(1,\varepsilon,...) = 1$.

Данное преобразование (55) учитывает оценки старших производных и является обобщением на случай $n > 2$ формулы из работы [8], предназначенной для схемы первого порядка точности. На практике параметр n означает порядок производной в главном члене погрешности аппроксимации схемы. Отметим, что формула (55) и все следующие аналогичные формулы справедливы для $\varepsilon \in (0,\ 1)$.

Базовое преобразование (55), отображающее взаимно-однозначно отрезок $0 \leq \xi \leq 1$ на отрезок $0 \leq x \leq 1$, построено следующим образом. На части отрезка $0 \leq \xi \leq \xi_0$ определена функция (54), предложенная в работе[8], которая устраняет экспоненциальную особенность в погранслое. Термин «устраняет» означает, что выбранная таким образом функция сгенерирует в окрестности нуля (где сосредоточен погранслой) сетку, приблизительно равномерную по приращению решения на шаге. Затем функция (54) сопрягается с полиномом, определенным на остальной части отрезка $\xi_0 \leq \xi \leq 1$ так, чтобы производные до порядка l составной функции были непрерывны в точке склейки. Для построения этого полинома достаточно знать значения функции (54) и ее производных до порядка l в точке $\xi = \xi_0$, которые выражаются явно:

$$\phi^{(i)}(\xi_0) = d^i \frac{1}{a}\Big(\frac{1}{a}+1\Big)\ldots\Big(\frac{1}{a}+i-1\Big)\varepsilon^{ka(n-i)/(1+na)}\ , \quad i \geq 1. \tag{56}$$

После этого обе ветви склеенной гладкой функции множатся на постоянный коэффициент c_1, с тем чтобы значение функции на правом конце подтянуть к значению $x = 1$.

Число ξ_0 в (55) означает долю длины отрезка, относящуюся к ветви (54) составного преобразования, т. е. часть отображаемую в предполагаемую зону погранслоя. В частности при равномерной сетке по ξ число ξ_0 означает долю от общего числа шагов сетки, попадающих в погранслой. Числа n и l выбираются в зависимости от порядка аппроксимации схемы. В расчетах, как правило, $l = p$, а $n = p + 1$, где p — порядок аппроксимации схемы. Однако проведенные численные эксперименты показали, что при умеренных значениях вязкости $\varepsilon > 1.e-04$ компактные схемы вполне удовлетворительно работают также и при меньших l и n, в частности на сетках, построенных для простейшей схемы с учетом знака первой производной.

Отметим, что для численного решения задач с экспоненциальными погранслоями применяются также разностные сетки Бахвалова Н. С. [2] и Шишкина Г. И. [17], однако они зависят от значения функции $a(x)$ в точке $x = 0$. Преобразование (55) более удобно и универсально для устранения экспоненциальных особенностей функции $u(x, \varepsilon)$ до порядка n, так как константа a в (55) не зависит от $a(0)$, поэтому преобразование с произвольной фиксированной константой $a \geq m > 0$ годится для любых значений $a(0)$. Кроме того, преобразование (55) в равной степени пригодно также для устранения степенных сингулярностей, хотя в этом случае константа a не может задаваться произвольной. Это свойство универсальности является весьма удобным, поскольку при решении широкого класса задач избавляет от необходимости для каждой отдельной задачи существенно корректировать преобразование.

Если особенность решения в виде экспоненциального или степенного слоя располагается вблизи правого конца, проблему построения адаптивной сетки решает функция $x = x_r(\xi, ...) = x_b(1 - \xi, ...)$. При наличии слоев на обоих концах отрезка можно использовать суперпозицию отображений x_r и x_b для поочередного сгущения сеток в разных концах. Однако при использовании суперпозиции следует внимательно контролировать результирующее преобразование, так как на первом шаге преобразования сетка сгущается на одном краю отрезка, а на втором все узлы «стягиваются» в обратном направлении, в результате часть узлов сетки, построенной на первом шаге, покидают первый слой. Поэтому рекомендуется на первом шаге завышать параметр ξ_0, реализуя несколько чрезмерное сгущение в надежде на нормализацию сгущения при втором шаге суперпозиции.

Вместо суперпозиции при наличии двух слоев на концах отрезка возможна также гладкая склейка внутри отрезка полиномиальной части левого и правого отображений, построенных на основе базовых. При внутреннем расположении слоя необходимо склеивать «обращенные» по знаку аргумента сгущающие отображения, аналогичные x_r и x_b, с двусторонним сжатием области значений в окрестности внутреннего слоя.

3. Результаты решения задачи Коши для ОДУ первого порядка

3.1. Погранслой масштаба k = 1 на левой границе

Задача 1. В первой тестовой задаче

$$\varepsilon u' + u^2 = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1},$$

имеющей точное решение $u = \varepsilon/(\varepsilon + x)$, в окрестности нуля реализуется экспоненциальный слой масштаба $k = 1$. На рис. 1 показаны профили

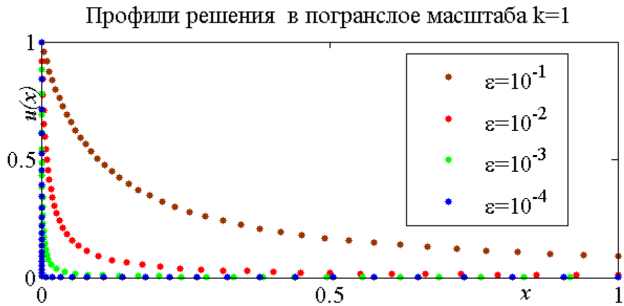


Рис. 1. **Точные решения задачи с экспоненциальным погранслоем**

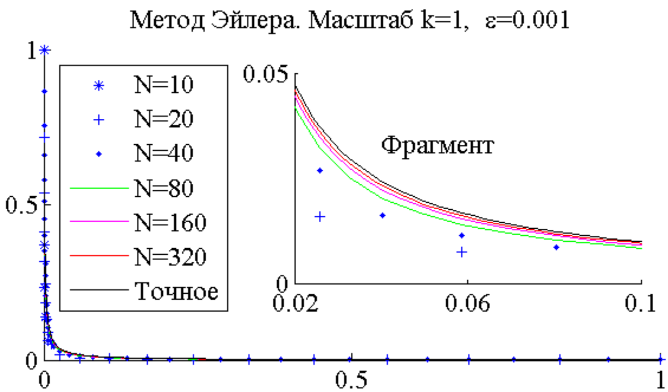


Рис. 2. **Медленная сходимость метода Эйлера**

точного решения на адаптивной сетке, иллюстрирующие также зависимость меры сгущения сетки от вязкости.

На рис. 2–4 представлены результаты расчетов данной задачи численными методами различной точности на сгущающихся сетках с последовательным удвоением числа шагов N. На каждом из рисунков приведены фрагменты численных решений в увеличенном масштабе. Из них видно существенное различие в качестве расчетов, возрастающем по мере роста порядка точности метода.

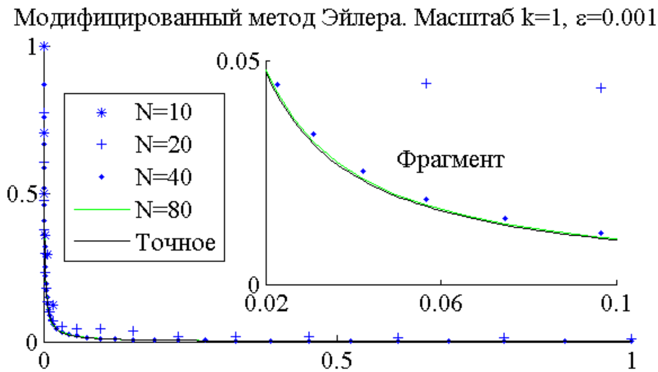


Рис. 3. **Умеренная сходимость модифицированного метода Эйлера**

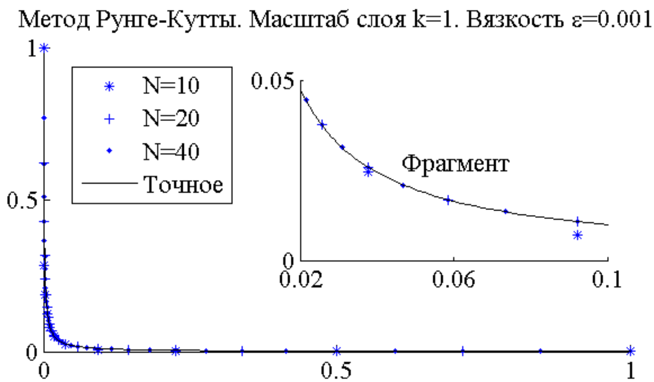


Рис. 4. **Быстрая сходимость метода Рунге — Кутты**

Оценки численных результатов расчета для этой задачи приведены в табл. 1. В столбцах приведены C-нормы ошибок и оценки порядков

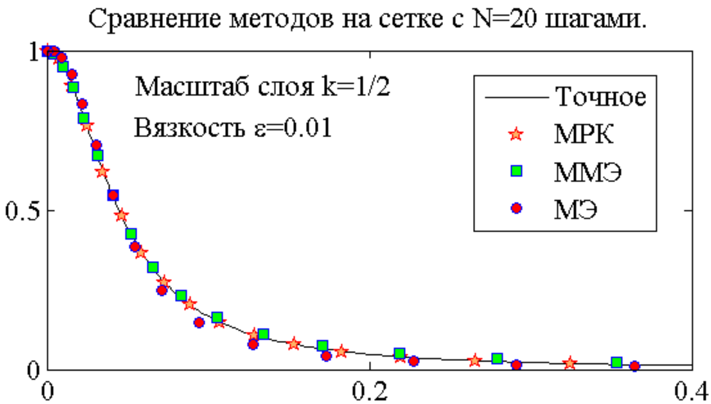


Рис. 5. **Расчет погранслоя разными методами на эквивалентных сетках**

точности методов. Из таблицы нетрудно заметить, что практически наблюдаемые порядки точности соответствуют теоретическим, а наблюдаемые ошибки ранжируются по величине в соответствии с порядками точности методов.

Таблица 1. **Результаты расчета первой задачи**

Метод	МЭ		ММЭ		МРК	
N	δ_1	p_1	δ_2	p_2	δ_4	p_4
40	4.23-02	23.2	3.26-02	∞	1.41-03	6.69
80	1.73-02	1.29	3.22-03	3.34	1.14-04	3.63
160	8.03-03	1.11	7.02-04	2.20	6.45-06	4.14
320	3.88-03	1.05	1.64-04	2.10	3.69-07	4.13

3.2. Погранслой масштаба $\mathbf{k = 1/2}$

Задача 2. Вторая задача и ее точное решение имеют вид

$$\varepsilon\, u' + x\, u^2 = 0, \quad u(0) = 1, \qquad u = \frac{2\,\varepsilon}{2\,\varepsilon + x^2}.$$

Функция $F(u, x) = x\, u^2$ имеет простой корень при $x = 0$, поэтому в нуле реализуется экспоненциальный слой масштаба $k = 1/2$. На рис. 5

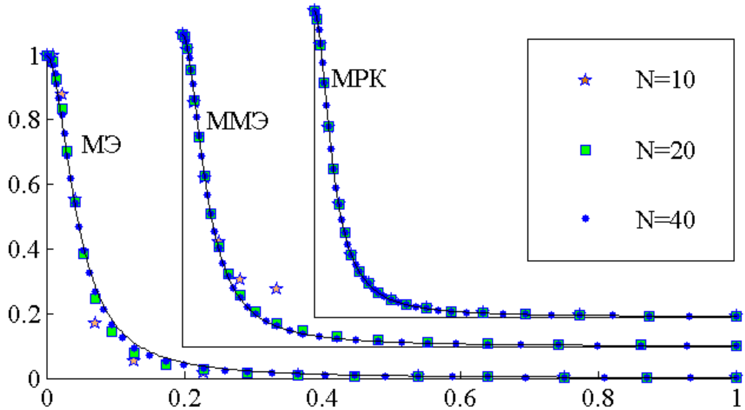


Рис. 6. **Сравнение плотности результатов при детализации сеток**

приведены расчеты различными методами данной тестовой задачи на довольно грубых сетках с числом шагов $N = 20$. По переменной x масштаб увеличен примерно в 5 раз, и приводится только фрагмент с зоной погранслоя. Маркеры расчетов, полученные по методу Рунге — Кутты на разных сетках, располагаются плотно на кривой точного решения, тогда как другие два метода уступают ему в точности. Наибольшую ошибку имеет простейший метод Эйлера. Следует заметить, что сетки на рис. 5, да и в других подобных расчетах, для каждого метода свои, поскольку преобразование, генерирующее адаптивные сетки, зависит от порядка производных n в главном члене погрешности.

Рис. 6 иллюстрирует скорость сходимости при детализации сетки, проявленную разными методами при решении задачи с левым погранслоем масштаба $k = 1/2$. Разным методам соответствуют на рисунке отдельные системы координат, для наглядности результатов изображенные со смещением, но в одинаковых масштабах. Из рисунка видно, что расчеты по более точному методу Рунге - Кутты на всех сетках лежат более плотно близ точного решения. Расчеты по модификации метода Эйлера проявляют на самых грубых сетках склонность к осцилляциям.

На рис. 7–10 представлены результаты расчетов второй задачи разными методами для коэффициентов вязкости различных порядков. Чем меньше вязкость, тем более крупный масштаб в направлении координаты x используется при изображении результатов. В нижней части рисунков приводятся значения C-нормы ошибки δ, полученные на са-

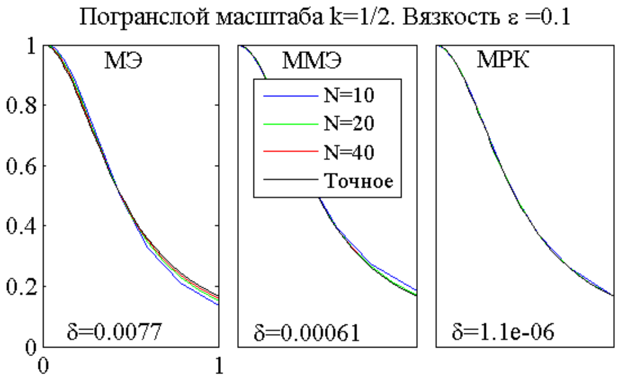


Рис. 7. **Расчет погранслоя масштаба** $k = 1/2$ **при** $\varepsilon = 0.1$

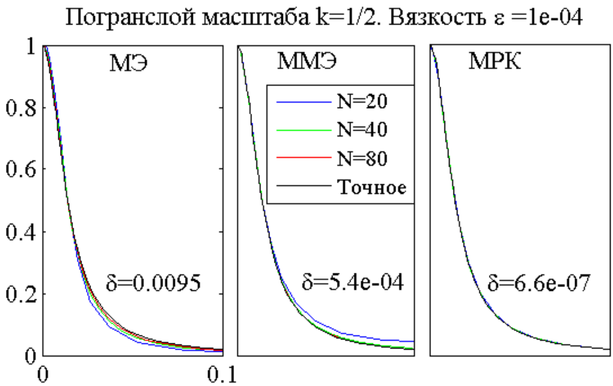


Рис. 8. **Расчет погранслоя масштаба** $k = 1/2$ **при** $\varepsilon = 1.e-04$

мой детальной сетке для данного рисунка. Заметим, что степень детализации сеток различная для различных рисунков: чем меньше ε, тем большее число шагов N требуется.

3.3. Погранслой на правой границе

Задача 3. В третьей задаче уравнение и точное решение имеют вид

$$\varepsilon\, u' + (x-1)\, u^2 = 0, \quad u = \frac{2\,\varepsilon}{2\,\varepsilon + (x-1)^2}.$$

Начальное данное задается из точного решения. Теперь функция $F(u, x)$

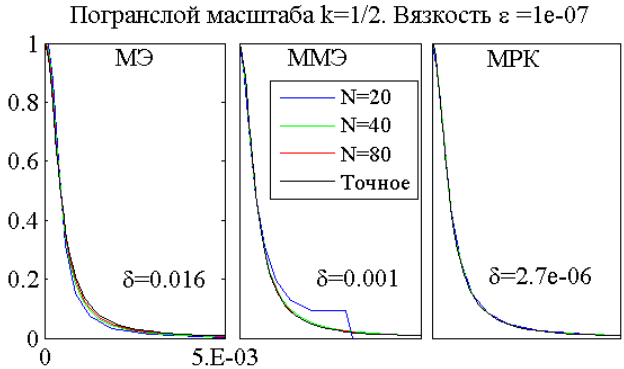


Рис. 9. **Расчет погранслоя масштаба** $k = 1/2$ **при** $\varepsilon = 1.e - 07$

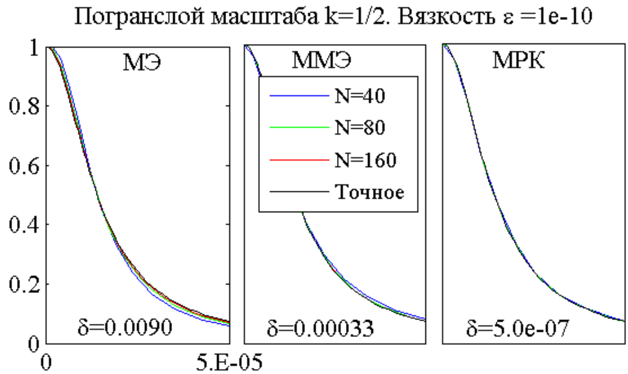


Рис. 10. **Расчет погранслоя масштаба** $k = 1/2$ **при** $\varepsilon = 1.e - 10$

имеет простой нуль при $x = 1$, поэтому экспоненциальный слой масштаба $k = 1/2$ располагается, в отличие от предыдущей задачи, в окрестности единицы. Точные решения на адаптивной сетке приведены на рис. 11 маркерами, с тем чтобы иметь возможность составить представление также и о характере сеток при различных значениях вязкости. В данном примере число шагов $N = 40$.

Данная задача представляется более сложной для численного решения, так как интегрирование задачи Коши начинается, как и прежде, от нуля, но на этот раз сетка сгущена в окрестности единицы, и при крупном шаге на старте есть вероятность накопить серьезные ошибки, которые отклонят численное решение от точной интегральной кривой

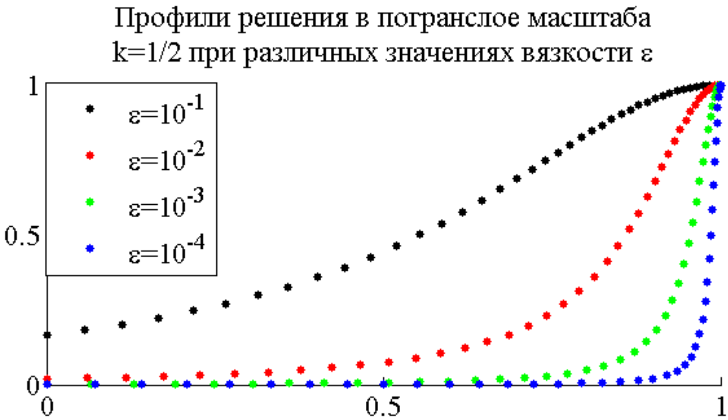


Рис. 11. **Точное решение с погранслоем справа**

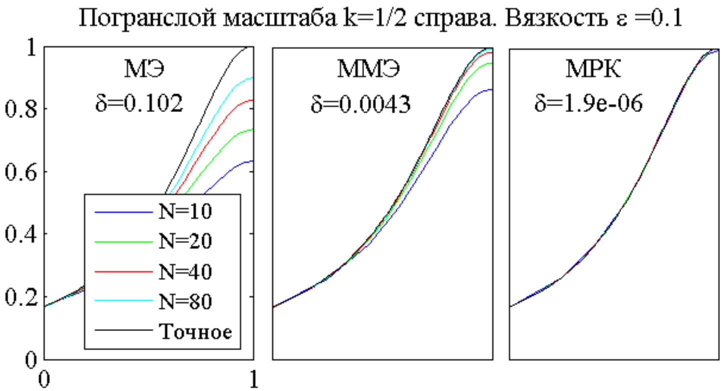


Рис. 12. **Сравнение методов при умеренной вязкости**

задолго до зоны сгущения сетки. Такой вариант задачи не рассматривался нами в теоретических построениях как вполне равноценный по сложности предыдущим задачам, тем не менее было решено испытать предлагаемую технологию расчета и в данных экстремальных условиях, не прибегая к дополнительному инструментарию для дробления сетки вне погранслоя. Между тем следует заметить, что в рамках базового преобразования такой механизм предусмотрен — это параметр преобразования ξ_0, представляющий собой долю числа шагов сетки, попа-

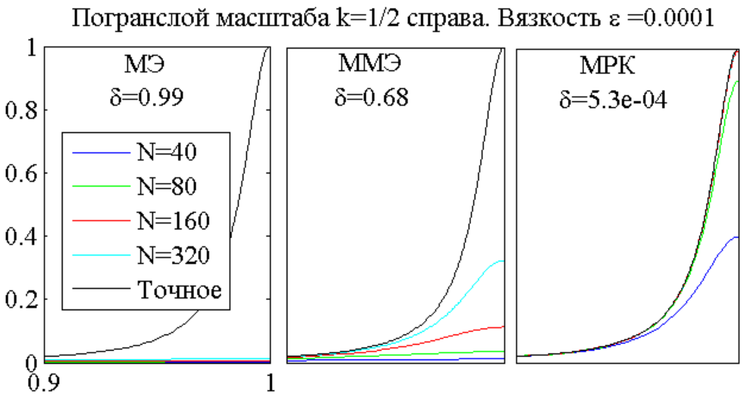


Рис. 13. **Сравнение методов при малой вязкости**

дающих в зону погранслоя. Всюду в предыдущих расчетах эта доля составляла 1/2. При ее уменьшении шаги сетки перераспределятся, и размеры шагов вне слоя уменьшатся.

Численные эксперименты показали, что предположение о возможном ухудшении качества расчетов для данной задачи оправдались тем сильнее, чем ниже порядок точности метода. В частности метод Эйлера даже при весьма умеренной вязкости (левый фрагмент рис. 12) на сетках разной детальности дает веер кривых, сильно отличающихся от точного решения, а при малой вязкости (левый фрагмент рис. 13) его приближенные решения вообще «прижаты» к оси x, имея ошибку в 99%. Модифицированный метод несколько лучше, но и он не дает сколько-нибудь удовлетворительных результатов. Как показывают центральные фрагменты рис. 12–13, ошибка метода составляет 68%.

В данном экстремальном случае свою решающую роль играет фактор порядка точности метода, и здесь метод Рунге — Кутты демонстрирует свое огромное преимущество перед менее точными методами (правые фрагменты рис. 12–13). Действительно, при умеренной вязкости все результаты расчета (даже на самых грубых сетках) визуально совпадают с точным решением, но и при малой вязкости показывают очень хорошее совпадение с точным решением. На наш взгляд, это связано не только с хорошей аппроксимацией методом Рунге — Кутты, но и с высоким качеством базового преобразования, генерирующего сетку со сбалансированным распределением узлов не только в области погранслоя, но и во всей расчетной области. Если решать данную задачу на других сетках (например, на довольно употребительной в практике вычислений кусочно равномерной сетке со сгущением в погранслое), то и метод Рунге — Кутты был бы здесь несостоятелен.

3.4. Расчет внутреннего слоя

Задача 4. Наконец, четвертый тест дает пример задачи с внутренним слоем. Уравнение и его точное решение имеют соответственно вид

$$\varepsilon\, u' + (x - 1/2)\, u^2 = 0, \quad u = \frac{2\,\varepsilon}{2\,\varepsilon + (x - 1/2)^2}.$$

Точное решение при различных ε изображено на рис. 14, а примеры отображения $x(\xi)$, склеенного в точке $x = 1/2$ на основе базового из двух, даны на рис. 15

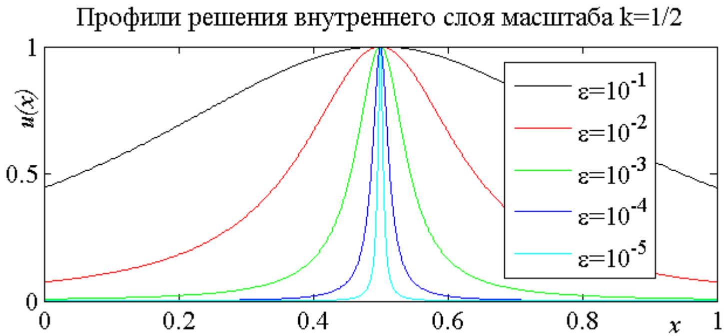


Рис. 14. **Точные решения задачи с внутренним слоем при различных** ε

Следует заметить, что при решении задачи с внутренним слоем стоит та же проблема, что и в предыдущей задаче: начальное данное задачи Коши ставится при $x = 0$, а зона сгущения сетки находится в ином месте. Только теперь это не правый конец отрезка, а его середина.

На рис. 16–18 представлены расчеты разными методами на последовательности сгущающихся сеток при различных значениях ε. Как и выше, нормы ошибок приближенного решения δ соответствуют самой детальной из сеток на рисунке, но самая детальная сетка на разных

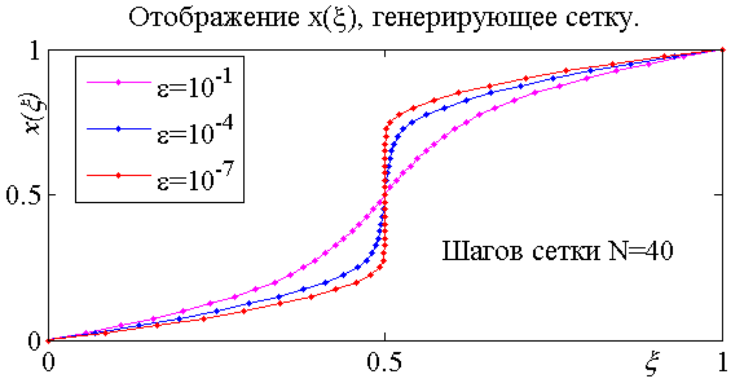


Рис. 15. **Примеры отображения для задачи с внутренним слоем**

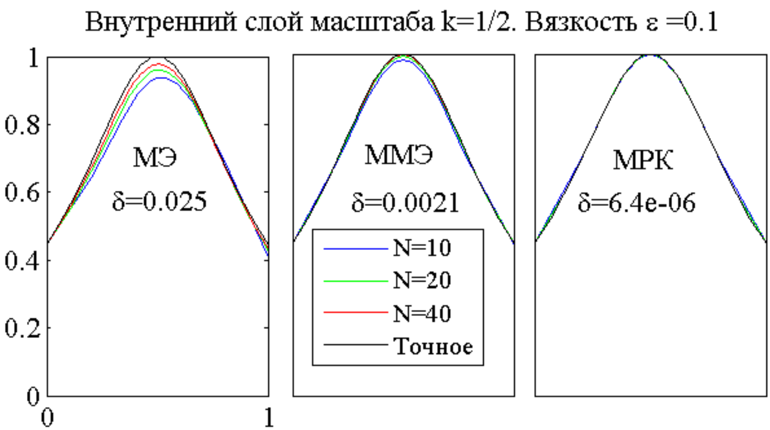


Рис. 16. **Расчет внутреннего слоя при большой вязкости**

рисунках не одна и та же. Так, на рис. 16 самая подробная сетка имеет 40 шагов, на рис. 17 — 320 шагов, а на последнем рис. 18 — 2560 шагов. Следует также обратить внимание на изменение масштаба изображения решений по x при уменьшении вязкости. В каждом случае масштаб выбирался так, чтобы сужающаяся зона внутреннего слоя была изображена с достаточной степенью подробности. Расчеты показали полную несостоятельность метода Эйлера при решении данной задачи, очень ограниченные возможности модифицированного метода Эйлера

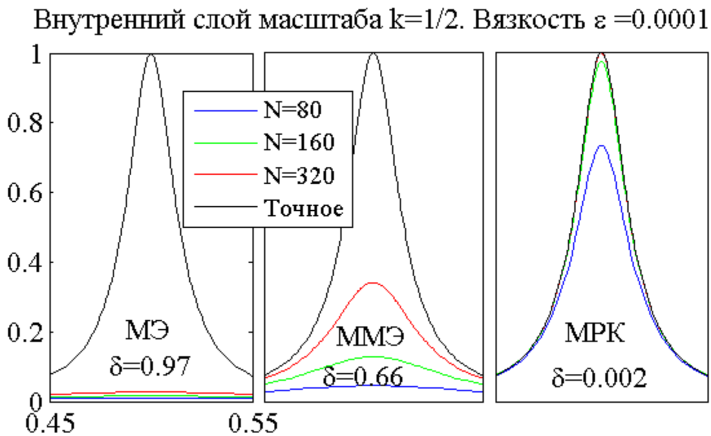


Рис. 17. **Расчет внутреннего слоя при умеренной вязкости**

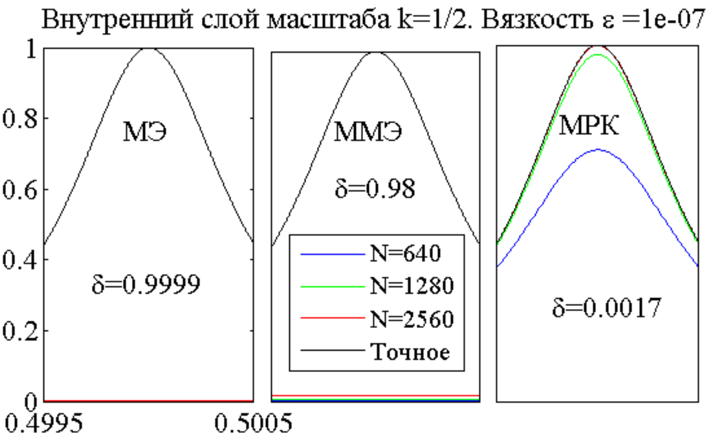


Рис. 18. **Расчет внутреннего слоя при малой вязкости**

и приемлемость высокоточного метода Рунге — Кутты.

Применение сеток, учитывающих особенности решения, и повышение порядка точности разностных схем являются по отдельности важными факторами улучшения точности расчетов. На основании проведенного тестирования адаптивных сеток и высокоточных методов численного решения ОДУ первого порядка можно утверждать, что при сочетании этих факторов позитивный эффект возрастает многократно.

4. Результаты расчетов краевых задач для ОДУ второго порядка

4.1. Экспоненциальный погранслой

Задача 1. Рассмотрим тест с экспоненциальным слоем масштаба $k = 1$ в окрестности левой границы $x = 0$, который реализуется при всюду отрицательном коэффициенте $a(x)$, отделенном от нуля константой (см. [6] и [18]). Разностная сетка для этого примера определяется с

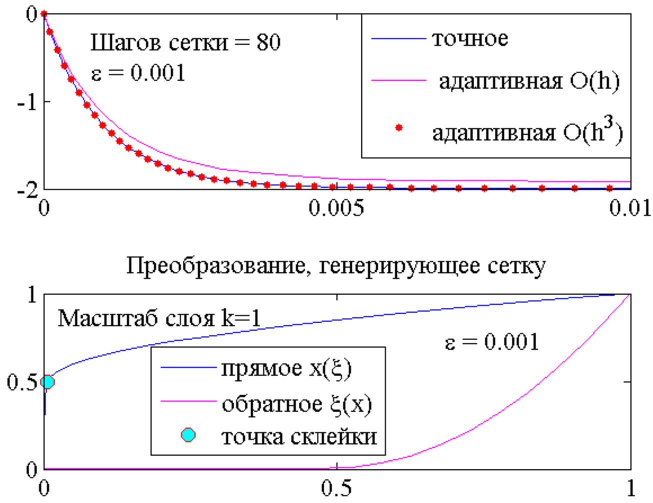


Рис. 19. **Результаты расчета и базовое преобразование**

помощью функции (55) по формуле $x_i = x_b(ih,\ \varepsilon,\ a,\ 1,\ l,\ n,\ \xi_0)$, а его параметры имеют значения $a = 2$, $\xi_0 = 1/2$. Тестовая краевая задача имеет вид

$$-\varepsilon u'' - u' + 2x + 1 = 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Задача имеет точное решение

$$u(x, \varepsilon) = \frac{2(\varepsilon - 1)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)}(1 - \exp(-x/\varepsilon)) + x(x + 1 - 2\varepsilon)\ .$$

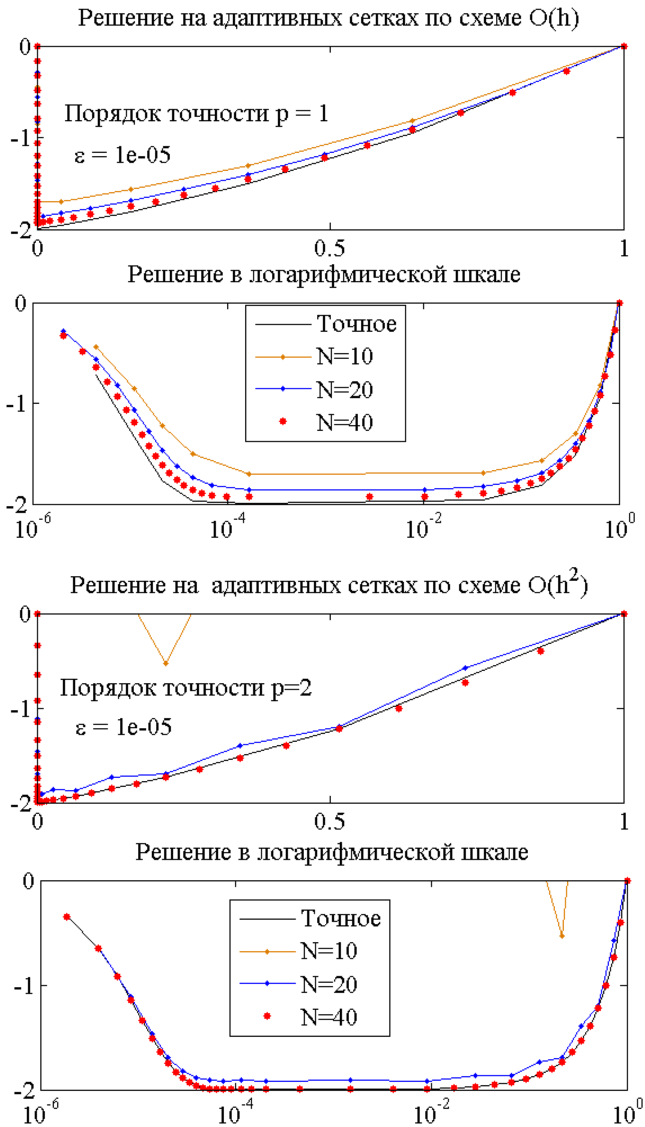


Рис. 20. **Расчеты слоя по схемам** $O(h^p)$, $p = 1, 2$

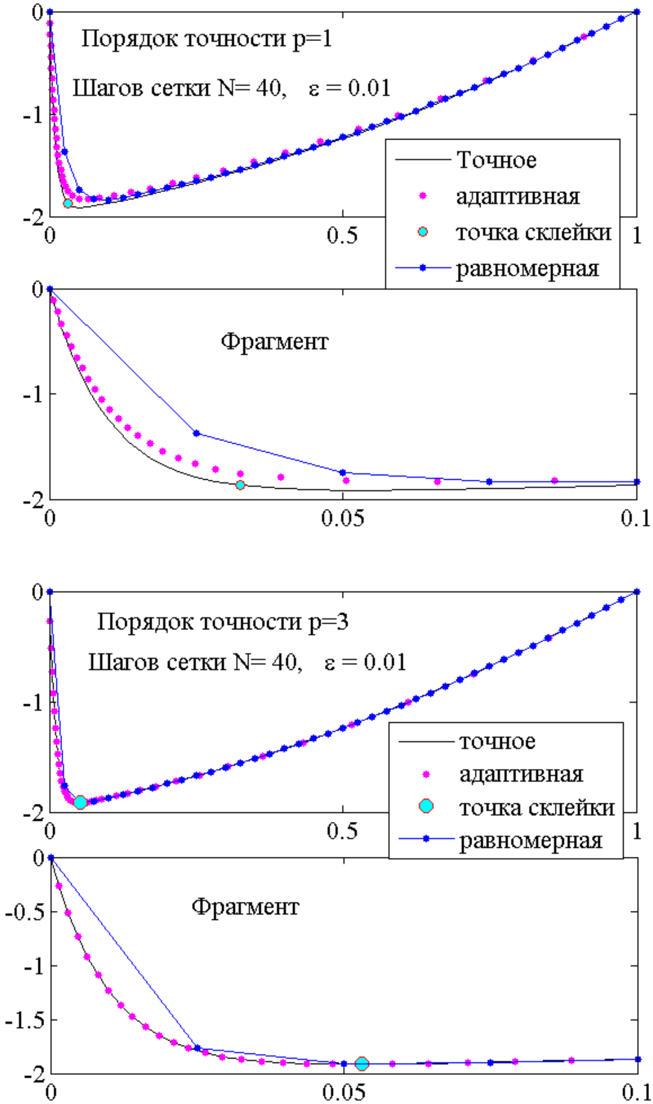


Рис. 21. **Расчеты слоя по схемам** $O(h^p)$**,** $p = 1, 3$

На рис. 19 (вверху) приведен фрагмент результатов расчетов задачи 1 на адаптивных сетках с равным числом шагов $N = 40$ по схемам первого и третьего порядков точности. В нижней части рисунка изображены графики прямого и обратного базового преобразования.

Рис. 20 иллюстрируют характер сходимости численных решений, полученных по различным схемам для погранслоя масштаба $k = 1$ с малой вязкостью, при последовательном удвоении числа шагов сетки. При

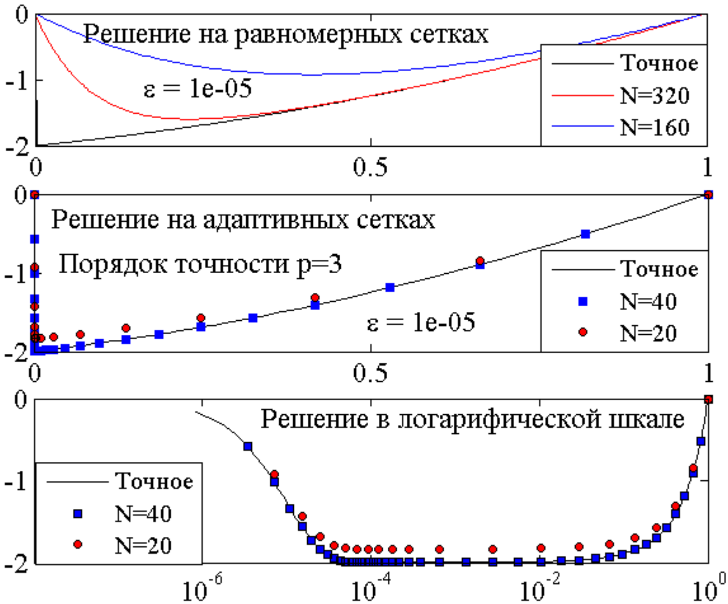


Рис. 22. **Расчеты слоя по схеме третьего порядка точности**

расчетах по схеме первого порядка как данной задачи, так и всех последующих, заметен монотонный характер сходимости и сглаживание выпуклостей решения. Впрочем, это было вполне ожидаемым, поскольку схема первого порядка обладает и свойством монотонности, и существенной дополнительной аппроксимационной вязкостью, вызывающей сглаживающий эффект. Решения по схеме второго порядка (в данном и последующих расчетах) проявляют осциллирующий характер, особенно заметный на грубых сетках. Это также вполне ожидаемое явление, так как в главном члене разложения погрешности схемы не вторая производная, как у схемы первого порядка, а третья. В связи с этим схема лишена аппроксимационной вязкости, которая оказывала бы диссипативное сглаживающее воздействие на решение.

На рис. 21 приведены результаты для погранслоя, полученные на равномерных и неравномерных сетках с равным числом шагов, и соответствующие фрагменты в увеличенном масштабе. Сравнение схем между собой говорит в пользу компактной схемы третьего порядка, а сравнение типов сеток свидетельствует о преимуществе разумно построенных неравномерных сеток перед равномерными.

На рис. 22 приведены результаты, полученные при сгущении равномерных(вверху) и неравномерных (в центре) сеток по компактной схеме третьего порядка точности, в нижней части соответствующие графики приведены в логарифмической шкале. Из рисунка видно, что на равномерной сетке числа шагов $N = 320$ еще далеко не достаточно для достижения хотя бы отдаленного сходства расчетного и точного решения, в то время как на неравномерной сетке с числом шагов $N = 40$ маркеры расчетных данных превосходно соответствуют кривой точного решения. Из этого теста совершенно ясно, что до сих пор встречающиеся в научной литературе утверждения об успешных расчетах на равномерных сетках ламинарных течений с большими числами Рейнольдса являются сильным преувеличением. Как было видно из рис. 19, для умеренных

Таблица 2. **Решение задачи 1 по схемам** $O(h^p)$ $(p = 1, 2, 3)$ **при** $\varepsilon = 1e{-}05$

N	δ_1	p_1	δ_2	p_2	δ_3	p_3
20	2.96e-01	—	1.60e-01	—	1.64e-01	—
40	1.54e-01	0.94	7.54e-03	4.41	1.62e-04	9.98
80	7.83e-02	0.98	1.93e-03	1.97	7.66e-06	4.41
160	3.95e-02	0.98	4.83e-04	2.00	4.76e-07	4.00
320	1.98e-02	0.99	1.21e-04	2.00	2.97e-08	4.00

значений вязкости схема третьего порядка точности даже на довольно грубых адаптивных сетках показывает лучшие результаты, чем менее точные по порядку схемы. Однако при малых значениях ε ситуация иная — на грубых сетках монотонная схема первого порядка точности, а также иногда схема второго порядка точности, если не возникают осцилляции, имеет лучшую точность. Только при дальнейшей достаточной детализации сетки расчеты по схеме третьего порядка становятся более точными. Парадокс объясняется тем, что производные высших порядков в погранслое могут быть существенно бо́льшими по масштабу, чем производные низших порядков, и оценка сверху вида $\delta_3 \le M_4 h^3$ для ошибки решения по схеме $O(h^3)$ при крупном шаге может быть хуже оценки $\delta_1 \le M_2 h$ для схемы $O(h)$. Однако при детализации сетки такое различие непременно компенсируется за счет более высокого показателя степени в главном члене погрешности $O(h^p)$ схем высоких порядков. Именно это происходит на практике в наших тестах.

Таблица 3. **Решение задачи 1 по схемам** $O(h^p)$ $(p = 1, 2, 3)$ **при** $\varepsilon = 1e-09$

N	δ_1	p_1	δ_2	p_2	δ_3	p_3
20	3.04e-01	—	3.73e+00	—	2.00e+00	—
40	1.58e-01	0.95	4.33e-01	3.11	8.73e-01	1.20
80	8.01e-02	0.98	2.11e-03	7.68	7.48e-05	13.51
160	4.04e-02	0.99	5.61e-04	1.91	7.91e-07	6.56
320	2.03e-02	0.99	1.40e-04	2.00	4.33e-08	4.19

В табл. 2–3 сравниваются расчеты по трем схемам на последовательности сеток при малой ($\varepsilon = 1e - 05$) и очень малой ($\varepsilon = 1e - 09$) вязкости соответственно. В первой колонке приведено число шагов, затем колонки попарно содержат апостериорные оценки C-нормы ошибки δ_k и порядка точности p_k, вычисленные по двум последовательным расчетам по схеме $O(h^k)$. При очень малой вязкости, как видно из последней колонки табл. 3, в сходимости оценки порядка по компактным схемам нет монотонности, хотя по оценке нормы ошибки результаты соответствуют порядкам. Высказанное выше суждение о зависимости качества расчетов от порядка точности при малой вязкости наглядно демонстрирует предпоследняя колонка табл. 3. Из нее видно, что при $N \le 40$ точность расчетов по схеме третьего порядка аппроксимации ниже точности, присущей менее точным схемам, однако при $N = 80$ происходит резкое улучшение точности и достигается преимущество высокоточной схемы на 2–3 значащие цифры, которое еще более утверждается при дальнейшей детализации сетки.

Заметим, что если погранслой расположен не на левой, а на правой границе (реализуется при отделенном от нуля положительном $a(x)$), то в качестве отображения, генерирующего сетку, можно взять функцию

$$x_r(\xi,\varepsilon,a,k,l,n,\xi_0) = 1 - x_b(1-\xi,\varepsilon,a,k,l,n,\xi_0) \tag{57}$$

В отличие от задачи Коши, в случае краевой задачи алгоритм расчета и характер ожидаемых ошибок одинаков при расположении погранслоя как слева, так и справа, поэтому проводить специальное численное исследование случая правостороннего погранслоя не имеет смысла.

4.2. Два экспоненциальных погранслоя

Задача 2. Рассмотрим случай, когда на концах отрезка $(0, 1)$ расположены слои одинакового масштаба $k = 1$. Такая конфигурация реализуется при $a(0) < 0$, $a(1) > 0$ и $a'(x_0) \geq 0$, если $a(x_0) = 0$. Например, это имеет место при возрастающей функции $a(x)$, меняющей знак внутри отрезка $(0, 1)$. Для расчета была взята следующая задача:

$$-\varepsilon u'' + (x - \frac{1}{2})\, u' + u + \sin(x) \ = 0, \quad u(0) = \frac{1}{2}\,, \quad u(1) = 0.$$

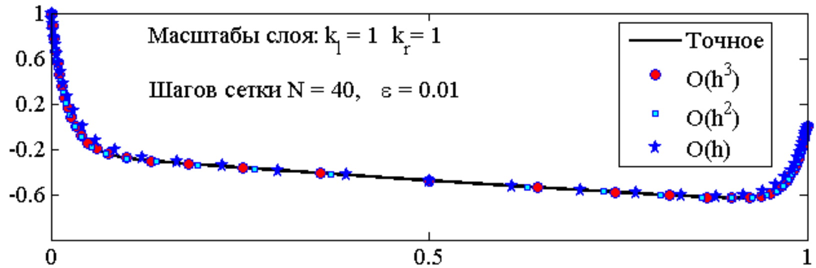


Рис. 23. **Расчеты с умеренной вязкостью на эквивалентных сетках**

Ввиду наличия двух пограничных слоев в данной задаче необходимо сгущать сетку на обоих концах отрезка. Это можно осуществить как суперпозицией левостороннего и правостороннего преобразований (55), (57), так и отображением, склеенным из двух, построенных на основе базовых. В нашем примере применялся второй способ, при котором результирующее отображение имеет вид

$$z(\xi) = \frac{1}{2}(1 + y(\eta)), \quad \eta = 2\xi - 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

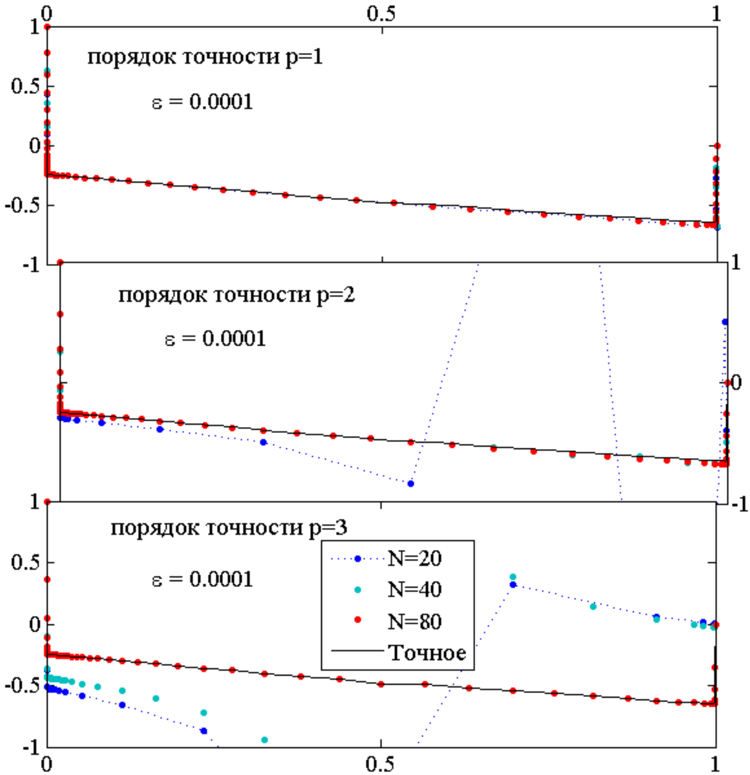


Рис. 24. **Решение задачи 2 на сгущающихся сетках**

где

$$y(\eta) = \begin{cases} -x_r(-\eta, ...), & -1 \le \eta \le 0, \\ \quad x_r(\eta, ...), & \quad 0 \le \eta \le 1, \end{cases}$$

а x_r — отображение (57) с параметрами $a = 2$, $\xi_0 = 0.5 - 0.05\,(p-1)$, где p — порядок точности схемы. Зависимость координаты точки склейки ξ_0 от порядка точности p позволяет для различных схем по разному корректировать долю числа узлов адаптивной сетки, попадающих в зону погранслоя. При данном выборе зависимости $\xi_0(p)$ для схем первого, второго и третьего порядков точности в погранслой отображается соответственно 50, 55 и 60 процентов шагов.

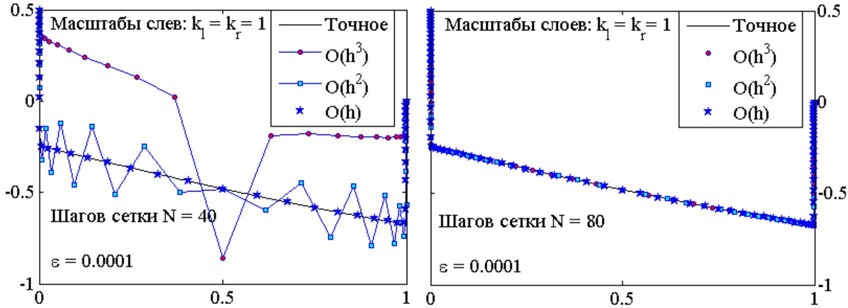


Рис. 25. **Решение задачи 2 на сетке с $N = 40$ и с $N = 80$**

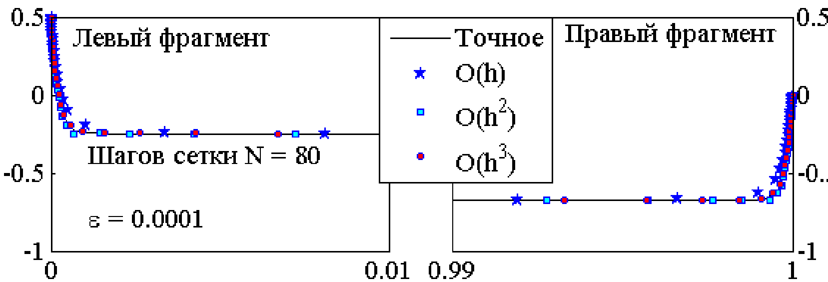


Рис. 26. **Фрагменты решения задачи 2 близ границ**

На рис. 23 приведены результаты, полученные разными методами на сетках с сорока шагами при умеренной вязкости. Результаты хорошо согласуются между собой, в зоне наибольшей кривизны графиков заметно некоторое размазывание решения монотонной схемой $O(h)$, «добавляющей» к истинной вязкости аппроксимационную. На рис. 24 иллюстрируется характер сходимости разных методов при дроблении сетки путем удвоения числа шагов в случае вязкости $\varepsilon = 0.0001$. Из левого рис. 25 видно, что для адекватного приближения решения по схемам $O(h^p)$,$(p = 2, 3)$ сорока шагов не достаточно. При дальнейшей детализации сетки до $N = 80$ все три схемы дают визуально одинаково приемлемые результаты (рис. 25 справа), а фрагментация этого расчета в растянутом по x масштабе (рис. 26) ранжирует результаты в полном соответствии с порядками аппроксимации схем.

Таким образом, иногда методы более высокого порядка точности на-

Таблица 4. **Результаты расчета задачи 2 по различным схемам**

	$\varepsilon = 1.e-04$			$\varepsilon = 1.e-06$		
N	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
20	9.87e-04	2.24e-03	1.40e-02	2.00e-03	7.07e-04	7.03e-03
40	2.87e-03	2.03e-03	8.06e-03	8.61e-04	3.62e-04	5.61e-03
80	3.09e-03	2.46e-03	2.15e-03	8.72e-04	3.33e-04	1.07e-03
160	1.88e-03	1.54e-03	2.87e-04	5.58e-04	7.83e-05	1.55e-04
320	6.00e-04	4.70e-04	1.99e-05	3.21e-04	2.30e-05	1.36e-05
640	1.97e-04	1.27e-04	1.29e-06	1.75e-04	6.53e-06	9.06e-07
1280	6.73e-05	3.24e-05	8.15e-08	9.13e-05	1.65e-06	7.02e-08

ходятся в менее выгодном положении при графическом представлении, чем методы низкого порядка. Причина заключается в том, что на самых грубых сетках высокоточные методы, не будучи монотонными, уступают в реальной точности схеме, построенной с учетом направления потока (это демонстрирует левый рис. 25). Ситуация меняется на более подробных сетках (высокоточные методы обгоняют по точности схемы низких порядков), однако на мелкой сетке общий масштаб ошибок много меньше, чем на грубых, поэтому визуально графики сливаются, скрывая преимущество высокоточных схем (см. правый рис. 25). Для его обнаружения приходится прибегать к существенному увеличению масштаба изображений (см. фрагменты на рис. 26).

Подтверждение данного тезиса и более подробное представление о результатах расчета задачи 2 на адаптивных сетках можно составить по приведенным в табл. 4 данным для двух значений малого параметра вязкости.

4.3. Степенной слой

Задача 3. Для построения сеток в задачах со степенными пограничными слоями можно использовать базовое преобразование (55), однако параметр a в нем уже не будет произвольной константой, как это было в задаче с экспоненциальным погранслоем.

Пусть в нашем уравнении $F_u(x, u) \geq c > 0$, $a(0) = 0$, $a'(0) > 0$, $a(1) < 0$ и $a'(x_0) \geq 0$ для каждого x_0, для которого $a(x_0) = 0$, $0 < x_0 < 1$. В этом случае производные решения, согласно [6] и [18], оцениваются следующей формулой:

$$|u^{(p)}(x,\varepsilon)| \le M[1+\varepsilon^{b/2}(\varepsilon^{1/2}+x)^{-b-p}]\,, \quad p \le n\,, \quad 0 \le x \le 1\,, \qquad (58)$$

где $0 < m \le b \le c/a'(0)$. Таким образом, решение имеет единственный степенной погранслой масштаба $1/2$ возле $x_0 = 0$. Поэтому для построения сетки, сгущающейся в слое, можно использовать преобразование $x_b(\xi, \varepsilon, a, 1/2, ...)$, в котором $0 < m \le a \le b/n^2$.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

$$-\varepsilon u'' - 8x(x-1/2)^3 u' + 16u - \exp(x) \ = 0, \quad u(0) = 0\,, \quad u(1) = 0.2\,.$$

Здесь $c = 16$, $a'(0) = 1$, поэтому можно положить

$$l = 2\,, \quad b = 16\,, \quad \xi_0 = 1/2\,, \quad a = 16/n^2\,, \quad \beta = 16/(n(16+n)).$$

На рис. 27 приведены расчеты степенного слоя (задача 3) при умерен-

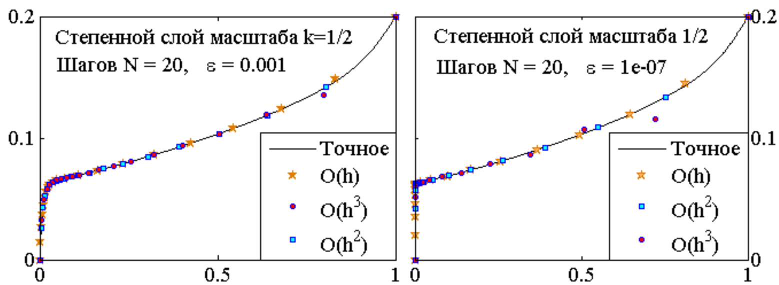


Рис. 27. **Решение задачи 3 при различных ε на грубой сетке**

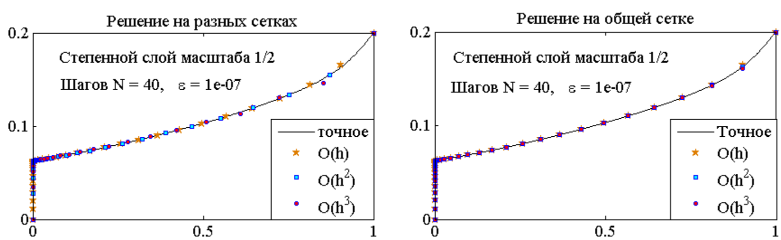


Рис. 28. **Решение задачи 3 на индивидуальных и на общей сетке**

ной (слева) и при малой вязкости (справа) на сетках с $N = 20$ шагами. Расчеты выполнены на различных сетках, генерируемых для каждой схемы в отдельности. Вне погранслоя, вблизи правой границы $x = 1$, заметна локальная ошибка схемы третьего порядка точности. С одной стороны, это эффект высокоточной схемы на грубой сетке, упоминавшийся выше. Действительно, соответствующие маркеры схемы $O(h^3)$ в случае малой вязкости несколько осциллируют, располагаясь поочередно выше и ниже кривой точного решения. С другой стороны, в данном расчете для схемы $O(h^3)$ вне слоя сетка является более разреженной, чем для других схем, что хорошо видно по маркерам графиков.

Таблица 5. **Расчет степенного слоя масштаба $k = 1/2$ при $\varepsilon = 1.e - 03$**

	равномерная сетка			адаптивная сетка		
N	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
20	9.87e-04	2.24e-03	1.40e-02	2.00e-03	7.07e-04	7.03e-03
40	2.87e-03	2.03e-03	8.06e-03	8.61e-04	3.62e-04	5.61e-03
80	3.09e-03	2.46e-03	2.15e-03	8.72e-04	3.33e-04	1.07e-03
160	1.88e-03	1.54e-03	2.87e-04	5.58e-04	7.83e-05	1.55e-04
320	6.00e-04	4.70e-04	1.99e-05	3.21e-04	2.30e-05	1.36e-05
640	1.97e-04	1.27e-04	1.29e-06	1.75e-04	6.53e-06	9.06e-07
1280	6.73e-05	3.24e-05	8.15e-08	9.13e-05	1.65e-06	7.02e-08

На общей сетке данный эффект нивелируется, соответствующие результаты специально проведенного расчета приведены на рис. 28. Следует заметить, что в принципе базовое преобразование располагает механизмом перераспределения узлов сетки между слоем и остальной расчетной областью за счет выбора параметра ξ_0, определяющего долю шагов сетки, отображаемых в слой, но в данном расчете этот ресурс не использовался — для всех схем ровно половина шагов принадлежала погранслою. Однако сеточные базовые отображения, будучи зависимы от порядков производных, участвующих в определении мажоранты, различны для схем различных порядков, поэтому условная граница слоя, а с ней и степень сгущения сетки, для них также различны.

Результаты расчета степенного слоя (задача 3) на сгущающихся равномерных и адаптивных сетках приведены в табл. 5. Из таблицы видно, что схема $O(h^3)$ на грубых сетках уступает схемам-оппонентам по реальной точности расчетов. Однако на достаточно детальных сетках она вырывается вперед, обгоняя схемы меньшего порядка (начиная с $N = 160$ для равномерной сетки и $N = 320$ для неравномерной).

4.4. Внутренний слой

Задача 4. Пусть

$$F_u(x,u) \geq c > 0, \quad a(x) = c_1(x_0 - x), \quad c_1 > 0, \quad 0 < x_0 < 1,$$

тогда $a(0) > 0$, $a(1) < 0$, $a'(x_0) = -c_1 < 0$. В этом случае, согласно [6] и [18], производные решения $\forall x \in (0,1)$ оцениваются как

$$|u^{(p)}(x,\varepsilon)| \leq M \begin{cases} [1 + (\varepsilon^{1/2} + |x - x_0|)^{b-p}] \,, & p \leq n \,, \quad -pc_1 + c \leq 0 \,, \\ 1 \,, \quad p \leq n \,, \quad -pc_1 + c > 0 \,, \end{cases} \tag{59}$$

где $0 < m \leq b \leq c/c_1$, т. е. решение имеет внутренний степенной слой масштаба 1/2 возле $x = x_0$. Отметим, что при $b \geq n$ производные до порядка n равномерно ограничены по ε, поэтому рассматривается более жесткий случай $0 < b < n$. Для устранения сингулярности (59) можно воспользоваться функцией, предложенной в [7]:

$$x_3(\xi,\varepsilon,a,k) = \frac{(\varepsilon^{ak} + \xi)^{1/a} - \varepsilon^k}{(\varepsilon^{ak} + 1)^{1/a} - \varepsilon^k} \,, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \,, \tag{60}$$

где $k = 1/2$ и $0 < m \leq a \leq \min(b/n, 1/n)$.

В качестве примера рассматривается следующая задача:

$$-\varepsilon u'' + 2(0.4 - x)u' + u + \sin(x) \ = 0, \quad u(0) = 0 \,, \quad u(1) = 1 \,.$$

Внутренний слой сосредоточен в окрестности точки $x_0 = 0.4$. Для построения склеенного преобразования, сгущающую сетку в окрестности x_0, вначале определим функцию, отображающую отрезок $[-1,1]$ в себя, в форме

$$\overline{x}_3(z,\varepsilon,a,k) = \begin{cases} -x_3(-z,\varepsilon,a,k) \,, & -1 \leq z \leq 0 \,, \\ x_3(z,\varepsilon,a,k) \,, & 0 \leq z \leq 1 \,. \end{cases} \tag{61}$$

Далее, для построения отображения, гладко склеенного в центре слоя, рассмотрим вспомогательную функцию $z(\xi) = -1 + 2\xi$, линейно

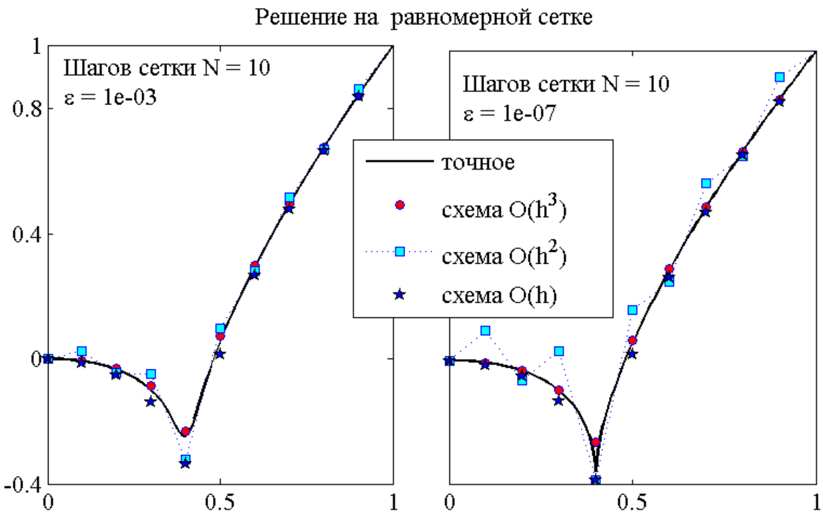


Рис. 29. **Решение задачи 4 при умеренной и малой вязкости**

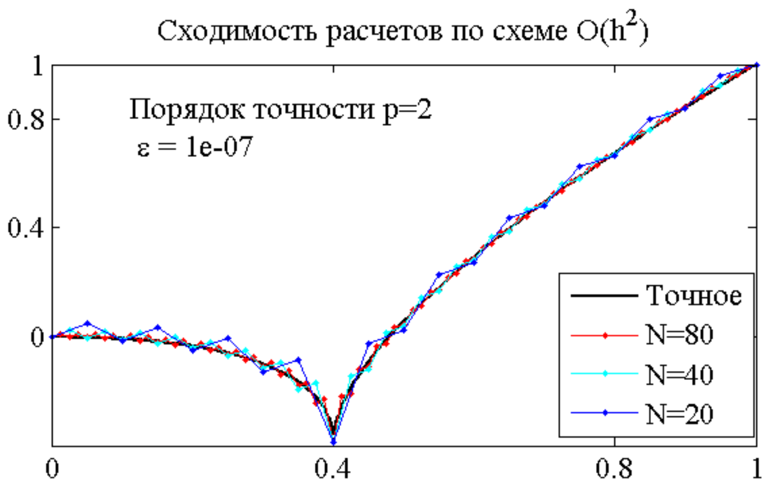


Рис. 30. **Осциллирующий характер сходимости схемы** $O(h^2)$

отображающую [0, 1] на [−1, 1], и какую-нибудь монотонную функцию $\varphi_{x_0}(x)$, отображающую отрезок [−1, 1] на [0, 1] так, чтобы нуль отображался в x_0. Тогда результирующее преобразование, устраняющее особенность (59), может быть задано в виде суперпозиции

$$\overline{y}(\xi, \varepsilon, a, 1/2) = \varphi_{x_0}[\overline{x}_3(z(\xi), \varepsilon, a, 1/2)] \,. \tag{62}$$

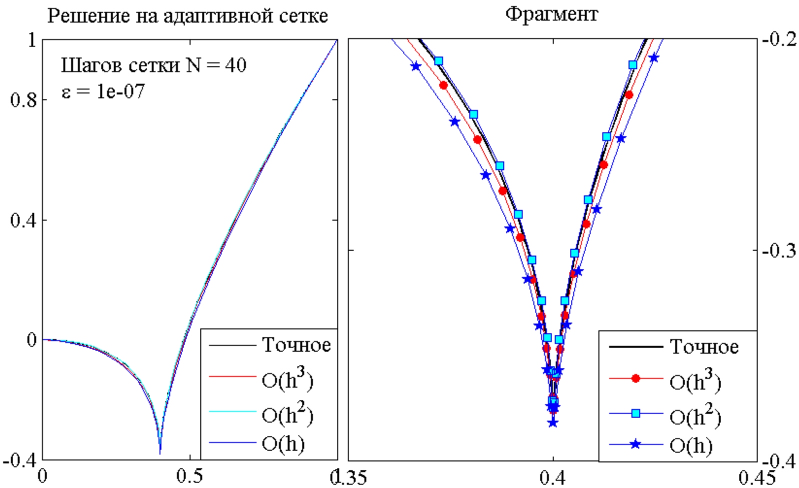


Рис. 31. **Результаты расчета внутреннего слоя**

Преобразование $\varphi_{x_0}(x)$: $[-1,\ 1] \to [0,\ 1]$ можно определить, например, в виде функции класса C_l, склеенной в нуле:

$$\varphi_{x_0}(x) = x_0 + Px + \begin{cases} (P - x_0)(-x)^l, & x \le 0, \\ (1 - P - x_0)x^l, & x > 0, \end{cases} \tag{63}$$

где $P = Q \min\{x_0, 1 - x_0\}$, а $Q \in [0,\ 1]$ — произвольный параметр. В частности, при $Q = 1$ одна из двух ветвей линейна, а другая является суммой этой линейной функции и степенной функции $c|x|^l$. При иных значениях Q в линейной составляющей функции уменьшается наклон, а степенная функция прибавляется к обеим ветвям с разными знаками.

На рис. 29 представлены результаты расчета внутреннего слоя на грубой равномерной сетке для двух значений вязкости — умеренного

($1.e-03$) и малого ($1.e-07$). Рис. 30 иллюстрирует осциллирующий характер сходимости для схемы $O(h^2)$. Расчеты по всем схемам на неравномерной сетке с $N = 40$ для малой вязкости представлены на рис. 31. Слева помещены графики решений на всем отрезке, справа — фрагмент в окрестности внутреннего слоя, свидетельствующий о преимуществе компактной схемы второго порядка точности. В табл. 6 более подроб-

Таблица 6. **Расчет внутреннего слоя по схемам 1–3 порядков точности**

	$\varepsilon = 1e-03$			$\varepsilon = 1e-05$		
N	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
20	2.5e-02	1.8e-02	1.3e-02	2.8e-02	2.3e-02	2.6e-02
40	1.4e-02	6.0e-03	4.5e-03	1.6e-02	7.9e-03	1.2e-02
80	7.8e-03	1.4e-03	6.8e-04	8.5e-03	1.9e-03	3.0e-03
160	4.0e-03	3.5e-04	8.0e-05	4.4e-03	5.0e-04	5.8e-04
320	2.0e-03	8.9e-05	7.5e-06	2.2e-03	1.2e-04	1.0e-04
640	1.0e-03	2.2e-05	5.7e-07	1.1e-03	3.1e-05	1.7e-05
1280	5.2e-04	5.5e-06	3.8e-08	5.6e-04	7.7e-06	2.3e-06

но представлены C-нормы ошибки решения для задачи 3 с внутренним слоем, полученные при двух значениях малого параметра по различным схемам. При $\varepsilon = 1e-03$ практическая точность расчетов соответствует порядкам аппроксимации схем. При уменьшении вязкости до значения $\varepsilon = 1e-05$ преимущество схемы третьего порядка перед схемой $O(h)$ наблюдается на всех сетках, а небольшое преимущество перед схемой $O(h^2)$ возникает только начиная с достаточно детальных сеток. Заметим, что при дальнейшем уменьшении вязкости до $\varepsilon = 1e-07$ этот порог сдвигается настолько, что на всех испытанных сетках до $N = 1280$ наилучшая точность неизменно достигается схемой второго порядка аппроксимации, а не третьего.

Заметим, что если вместо преобразования, заданного единой формулой (60) на всем промежутке использовать склеенное отображение, подобное базовому преобразованию (55), на основе (60) в окрестности нуля и полиномиального продолжения вне этой окрестности, можно, по-видимому, получить более привлекательную сетку со сбалансированным распределением узлов в слое и вне его.

4.5. Смешанный слой

Задача 5. Пусть $a(0) = 0$, $a'(0) < 0$, $a(x) < 0$, $0 < x \leq 1$. В этом случае производные решения оцениваются, согласно [6] и [18], следующей формулой для $0 \leq x \leq 1$ и $p \leq n$:

$$|u^{(p)}(x,\varepsilon)| \leq M \begin{cases} 1 + \varepsilon(\varepsilon^{1/2} + x)^{-2-p} + (\varepsilon^{1/2} + x)^{b-p}, (c \leq -a'(0)), \\ 1 + \varepsilon^{-p/2} \exp(a'(0)(x^2)/(2\varepsilon)), \qquad (c > -a'(0)), \end{cases} \tag{64}$$

где $0 < m \leq b \leq |c/a'(0)|$. Таким образом, в случае $c > -a'(0)$ решение имеет экспоненциальный погранслой масштаба $1/2$ возле $x_0 = 0$, а при $c \leq -a'(0)$ решение имеет смешанный пограничный слой (комбинация двух степенных слоев) масштаба $1/2$ в окрестности $x_0 = 0$. Соответствующая тестовая задача имеет вид

$$-\varepsilon u'' - x\, u' + \frac{1}{2} u = \sin(x)\ , \quad u(0) = 0\ , \quad u(1) = 1.$$

Преобразование, генерирующее сетку, определяется суперпозицией

$$z_4(\xi, \varepsilon, ...) = \frac{(\varepsilon^{1/4} + x_b(\xi, \varepsilon, a, 1/4, ...))^2 - \varepsilon^{1/2}}{(\varepsilon^{1/4} + 1)^2 - \varepsilon^{1/2}} \tag{65}$$

преобразований (55), (60).

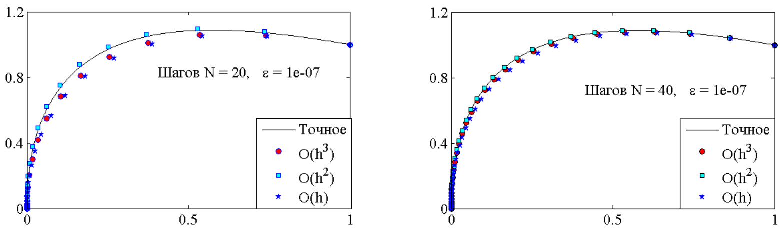


Рис. 32. **Расчет смешанного слоя на сетках с $N = 20$ и $N = 40$**

На рис. 32–33 представлены расчеты смешанного слоя при вязкости $\varepsilon = 1e-07$ на трех сгущающихся сетках. Справа на рис. 33 приведен фрагмент расчета, полученного на сетке с $N = 80$. Из рисунков видно, что на грубой сетке компактная схема $O(h^2)$ дает лучшие результаты, а на более детальной сетке решение тем точнее, чем выше порядок точности.

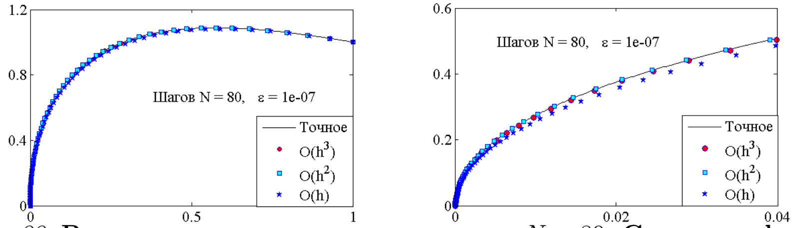


Рис. 33. **Расчет смешанного слоя на сетке с $N = 80$. Справа — фрагмент**

Таблица 7. **Расчет смешанного слоя по схемам 1–3 порядка точности**

N	$\varepsilon = 1e-03$ δ_1	δ_2	δ_3	$\varepsilon = 1e-05$ δ_1	δ_2	δ_3
40	2.8e-02	8.2e-03	2.7e-03	3.5e-02	1.1e-02	2.3e-02
80	1.4e-02	2.0e-03	2.5e-04	1.8e-02	3.0e-03	4.2e-03
160	7.5e-03	5.2e-04	1.8e-05	9.1e-03	7.7e-04	7.2e-04
320	3.8e-03	1.3e-04	1.1e-06	4.6e-03	1.9e-04	1.0e-04
640	1.9e-03	3.2e-05	7.2e-08	2.3e-03	4.8e-05	1.1e-05
1280	9.6e-04	8.1e-06	4.4e-09	1.1e-03	1.2e-05	1.0e-06
2560	4.8e-04	2.0e-06	2.8e-10	5.8e-04	3.0e-06	7.1e-08

В табл. 7 приведены результаты расчета смешанного погранслоя при различных значениях вязкости. Из таблицы видно преимущество схемы третьего порядка точности на всех сетках для умеренной вязкости $\varepsilon = 1e - 03$ и преимущество при $N \geq 160$ для меньших значениях вязкости ($\varepsilon = 1e - 05$). Для очень малых значении вязкости $\varepsilon = 1e - 07$ (не вошедших в таблицу), преимущество схемы третьего порядка точности возникает лишь на самой детальной ($N = 2560$) из приведенных сеток.

Заключение

Численное исследование свидетельствуют об эффективности симбиоза компактных схем и специальных адаптивных сеток, явно задаваемых на основе априорных оценок производных решения. В большинстве расчетов реальная точность тем выше, чем выше порядок точности схем, исключения возникают при использовании грубых сеток, когда константы в оценках производных высших порядков существенно больше, чем в оценках производных меньших порядков. При детализации сетки более высокий показатель степени шага в погрешности схемы делает свое дело, и преимущество высокоточных схем проявляется. Иначе говоря, используемые оценки решений на специальных сетках носят асимптотический характер при $h \to 0$, и поэтому рекомендации по распределению узлов сетки тем более точны, чем детальнее сетка.

Однако эксперименты показывают, что в некоторых случаях задача распространения преимущества потенциально более перспективных высокоточных схем на область умеренных шагов сетки при малой вязкости может быть решена с помощью более тонкого выбора преобразования, генерирующего сетку. В области слоя мажоранты построены довольно точно, поэтому резервом остается решение вопроса о пороге необходимой гладкости преобразования, а также о способе продолжения мажоранты в область вне слоя. В этой части экспериментальная работа еще далека от завершения, но первые опыты показывают, что высокоточные схемы чувствуют себя уверенно на «чужих» сетках, т. е. построенных для менее точных схем. Причина, очевидно, в том, что оценки не всегда являются достижимыми, поэтому рекомендации носят достаточный, а не необходимый характер, и в реальных расчетах иногда им можно не следовать буквально.

Расчеты различных типов слоев показывают, что хотя монотонная схема первого порядка работает исключительно надежно на любых сетках и при любых значениях ε, однако при недостаточной детализации сетки, когда аппроксимационная вязкость превышает физическую, результаты при фиксированной сетке перестают зависеть от уменьшающегося значения малого параметра. Это свойство вполне согласуется с опытом расчета течений вязкой несжимаемой жидкости с большими числами Рейнольдса — на фиксированной сетке схема первого порядка работает при сколь угодно малой физической вязкости, выдавая однако результаты, характерные для большей вязкости, поскольку воздействие физической и аппроксимационной вязкости в расчетах суммируется. При численном решении уравнений Навье — Стокса схема второго порядка точности с центральными разностями, не располагая, в отличие от схемы первого порядка, аппроксимационной вязкостью, при уменьшении физической вязкости теряет устойчивость и внезапно перестает работать ввиду переполнения разрядной сетки. У схемы третьего порядка есть черты обеих упомянутых схем. Аппроксимационная вязкость у схемы третьего порядка, как у схемы первого порядка, имеется, но она порядка малости $O(h^3)$, вместе с тем порог неустойчивости и переполнения разрядной сетки для нее тоже наступает, но при меньших значениях вязкости, чем для схемы второго порядка.

В реальных течениях, как известно, наблюдается явление гидродинамической неустойчивости, которое заключается в турбулизации ламинарных течений при уменьшении вязкости до некоторого порогового значения. С точки зрения механики жидкости за порогом устойчивости к физической вязкости добавляется турбулентная, и, таким образом, ламинарные течения с такими малыми значениями вязкости, которые встречаются в данной работе, на практике не реализуются. Следовательно, таких жестких условий в пограничных и внутренних слоях не бывает — реально градиенты решения на порядки ниже, чем в некоторых приведенных расчетах. Это совершенно справедливое суждение по отношению к реальным течениям вязкой жидкости и газа. Однако, во-первых, рассматриваемые задачи являются лишь моделями реальных явлений, и в рамках моделей ничто не мешает градиентам решения неограниченно возрастать при стремящемся к нулю параметре вязкости. Об этом, в частности, свидетельствуют сами выражения для точных решений в тестовых примерах. Во-вторых, рассмотренные в пособии примеры являются моделями не только для задач механики жидкости и газа, но также для задач теории упругости и задач, связанных с химическими превращениями, где градиенты решения в слоях могут быть неограниченными. Наконец, в-третьих, если технология расчета слоев, будучи испытана в жестких условиях на моделях с чрезвычайно малой вязкостью и неограниченными градиентами решений, показывает хорошие результаты, то тем более она с успехом может быть применена для расчета турбулентных слоев с комбинированной вязкостью большего масштаба и более спокойным изменением решения в слое.

Список литературы

1. *Барахнин В. Б., Шапеев В. П.* Введение в численный анализ. СПб.; М; Краснодар: Лань, 2005.

2. *Бахвалов Н. С.* Об оптимизации методов численного решения краевых задач с пограничными слоями // Журн. Вычисл. матем. и матем. физики, 1969. Т. 9. № 4. С. 842–859.

3. *Глуховский А. С., Паасонен В. И.* Компактные разностные схемы для уравнений Навье – Стокса на неравномерных сетках // Марчуковские научные чтения 2017. Тр. междунар. конф. «Вычислительная и прикладная математика 2017». Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ, 2017. С. 211–217.

4. *Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Рогов Б. В.* Вычисления на квазиравномерных сетках М: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

5. *Квасов Б. И.* Численные методы анализа и линейной алгебры. Новосибирск: НГУ, 2010.

6. *Лисейкин В. Д.* Оценки производных решения дифференциальных уравнений с пограничными и внутренними слоями // Сибирский математический журнал, 1992. Т. 33. № 6. С. 106–117.

7. *Лисейкин В. Д.* О численном решении сингулярно возмущенных уравнений с точками поворота // Журн. Вычисл. матем. и матем. физики, 1984. Т. 24. № 12. С. 1812–1818.

8. *Лисейкин В. Д.* О численном решении уравнений со степенным пограничным слоем // Журн. Вычисл. матем. и матем. физики, 1986. Т. 26. № 12. С. 1813–1820

9. *Лисейкин В. Д, Лиханова Ю. В., Шокин Ю. И.* Разностные сетки и координатные преобразования для численного решения сингулярно возмущенных задач. Новосибирск: Наука, 2007.

10. *Михайлов А. П.* Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе. Новосибирск: НГУ, 2003.

11. *Паасонен В. И.* Компактные разностные схемы. В 3 ч. Новосибирск: НГУ, 2006. Ч. 1. Классические схемы и их обобщения.

12. *Паасонен В. И.* Компактные разностные схемы. В 3 ч. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 2. Схемы на неравномерных сетках.

13. *Паасонен В. И.* Компактные схемы третьего порядка точности на неравномерных адаптивных сетках // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20. № 2. С. 56–64.

14. *Паасонен В. И.* Схема третьего порядка аппроксимации на неравномерной сетке для уравнений Навье — Стокса // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5. № 5. С. 78–85.

15. *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

16. *Шарый С. П.* Курс вычислительных методов. Электронный учебник: Новосибирск: НГУ, 2015.

17. *Шишкин Г. И.* Разностная схема для сингулярно возмущенного уравнения параболического типа с разрывным начальным условием. ДАН СССР, 1988. Т. 37. С. 792–796.

18. *Liseikin V. D.* Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems // VSP: Utrecht, 2001.

19. *Liseikin V. D.* Grid generation methods (third edition). Berlin: Springer, 2017.

20. *Vulanovic R.* Mesh construction for numerical solution of a type of singular perturbation problems// Numer. Meth. Approx. Theory, 1984. P. 137–142.

Учебное издание

Лисейкин Владимир Дмитриевич,
Паасонен Виктор Иванович

ВЫСОКОТОЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И АДАПТИВНЫЕ СЕТКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор *Скворцова А. А.*
Обложка *Неклюдовой Е. В.*

Подписано в печать 25.12.2018.
Формат 60x84 1/16.
Уч.-изд. л. 4,25. Усл. печ. л. 3,9.
Тираж 110 экз. Заказ № 32.

Издательско-полиграфический центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

ISBN 978-5-4437-0855-3
9 785443 708553