Высшая математика

Н.С.Бахвалов А.В.Лапин
Е.В.Чижонков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

ВЫСШАЯ ШКОЛА

Н.С.Бахвалов А.В.Лапин
Е.В.Чижонков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Москва
«Высшая школа» 2000

Предисловие

В России исторически сложилось так, что представление об образовании включает в себя органичное единство школы как системы приобретения знаний, фундаментальной науки как показателя уровня подготовки специалистов и гуманитарной культуры как основы духовного богатства человека.

Формулируя задачи образования, академик А. Н. Крылов говорил: "Школа не может дать вполне законченного знания; главная задача школы — дать общее развитие, дать необходимые навыки, одним словом... главная задача школы — научить учиться, и для того, кто в школе *научится учиться*, практическая деятельность всю его жизнь будет наилучшей школой."

Отметим, что особенность отечественной школы состоит в сочетании четкости рассуждений с глубиной содержания и простотой, доступностью, конкретностью изложения материала, которые всегда предпочитаются формальным конструкциям. Практическое воплощение данных идей подразумевает наличие высококвалифицированных и творчески мыслящих преподавателей.

Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает.

Для решения этих задач требуются учебники, отражающие в определенной полноте современное состояние исследований и мировоззренческие принципы данной области науки.

Предлагаемые к публикации в серии "Высшая математика" избранные учебники по математике реализуют указанный выше подход. Они написаны, в основном, профессорами Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

В данной серии уже изданы учебники Г. И. Архипова, В. А. Садовничего, В. Н. Чубарикова "Лекции по математическому анализу", И. М. Виноградова "Элементы высшей математики (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел)",

Введение

Математика как наука возникла в связи с необходимостью решения практических задач: измерений на местности, навигации и т.д. Вследствие этого математика всегда была численной математикой, ее целью являлось получение решения в виде числа.

Крупнейшие ученые прошлого сочетали в своих трудах как построение математического описания явления природы (математической модели), так и его исследование. Анализ усложненных моделей требовал создания новых, как правило, численных или асимптотических методов решения задач. Названия некоторых из таких методов — методы Ньютона, Эйлера, Гаусса, Чебышева — свидетельствуют о том, что их разработкой занимались крупнейшие ученые своего времени.

Последние полвека характерны бурным развитием вычислительной техники и теории численных методов. В результате происходит быстрое изменение взглядов на весь комплекс вопросов, связанных с применением компьютеров, в частности, на требования к численным методам. Поэтому нельзя предложить пособия по численным методам, содержащего рецепты решения всех реально встречающихся проблем. При выборе способа решения конкретной задачи всякое пособие играет роль лишь общего руководства, отталкиваясь от которого исследователь анализирует свои проблемы.

Настоящее пособие написано на основе опыта преподавания курса "Численные методы" на механико – математическом факультете и факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. Каждый раздел начинается с изложения базовых определений и теоретических результатов; далее рассматриваются типовые задачи, как правило, снабженные подробными решениями; а в завершение раздела (это место отмечено чертой) приводятся упражнения для самостоятельных занятий.

В процессе написания использовалась литература, список которой полностью приведен в конце книги. Поскольку многие задачи встречаются в различных изданиях, установить авторство практически невозможно. Поэтому для единообразия ссылки на литературу по задачам в тексте отсутствуют.

Пособие охватывает традиционный материал по приближению функций, численному интегрированию и дифференцированию, задачам алгебры и решению нелинейных уравнений, приближенным методам решения дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными. Оно соответствует курсу лекций для студентов механико – математического факультета МГУ, читаемому на основе учебного пособия Бахвалова Н. С., Жидкова Н. П., Кобелькова Г. М. "Численные методы". Новое издание этой книги выходит в издательстве "БИНОМ".

Авторы надеются, что предлагаемое пособие окажется полезным для студентов и аспирантов, изучающих и применяющих численные алгоритмы, преподавателей, проводящих занятия, а также для инженеров и исследователей, использующих в своей деятельности методы вычислительной математики.

Авторы

Глава I
Погрешность решения задачи

Если a — точное значение некоторой величины, а a^* — известное приближение к нему, то *абсолютной погрешностью* приближенного значения a^* называют обычно некоторую величину $\Delta(a^*)$, про которую известно, что

$$|a^* - a| \le \Delta(a^*) .$$

Относительной погрешностью приближенного значения называют некоторую величину $\delta(a^*)$, про которую известно, что

$$\left|\frac{a^* - a}{a^*}\right| \le \delta(a^*) .$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

§ 1. Вычислительная погрешность

Наиболее распространенная форма представления действительных чисел в компьютерах — это *числа с плавающей точкой*. Множество F чисел с плавающей точкой характеризуется четырьмя параметрами: основанием системы счисления p, разрядностью t и интервалом показателей $[L, U]$. Каждое число x, принадлежащее F, представимо в виде

$$x = \pm\left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \ldots + \frac{d_t}{p^t}\right) \cdot p^\alpha ,$$

где целые числа $p, \alpha, d_1, \ldots, d_t$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \le d_i \le p - 1 , \quad i = 1, \ldots, t ; \qquad L \le \alpha \le U .$$

Часто d_i называют *разрядами*, t — *длиной мантиссы*, α — *порядком числа*. *Мантиссой* (дробной частью) x называется число в скобках.

Удобно считать, что округление — это некоторое отображение действительных чисел в множество F чисел с плавающей точкой.

Если y — такое действительное число, что результат отображения $fl(y) \in F$, то имеет место аксиома

$$fl(y) = y(1+\eta),$$

где в случае $fl(y) \neq 0$ $|\eta| \leq \varepsilon$. Будем считать, что ε есть точная верхняя грань для $|\eta|$. При традиционном способе округления чисел имеем $\varepsilon = \frac{1}{2}p^{1-t}$, при округлении отбрасыванием разрядов $\varepsilon = p^{1-t}$. Величину ε часто называют ***машинной точностью***.

Обозначим результат арифметической операции $*$ с числами $a, b \in F$ через $fl(a*b)$. Если $fl(a*b) \neq 0$, то

$$fl(a*b) = a*b(1+\eta), \quad |\eta| \leq \varepsilon.$$

Приведенное соотношение является основной аксиомой, позволяющей изучать влияние ошибок округления в различных алгоритмах.

1.1. Верно ли, что всегда $fl\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \in [a,b]$?

1.2. Пусть отыскивается наименьший корень уравнения

$$y^2 - 140y + 1 = 0.$$

Вычисления производятся в десятичной системе счисления, причем в мантиссе числа после округления удерживается 4 разряда. Какая из формул

$$y = 70 - \sqrt{4899} \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{70+\sqrt{4899}}$$

дает более точный результат?

1.3. Пусть вычисляется сумма

$$S_{1\,000\,000} = \sum_{j=1}^{1\,000\,000} \frac{1}{j^2}.$$

По какому алгоритму

$$S_0 = 0, \quad S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, \ldots, 1\,000\,000,$$

или

$$\sum_{1\,000\,000} = 0, \quad \sum_{n-1} = \sum_{n} + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1\,000\,000, \ldots, 1,$$

следует считать, чтобы суммарная вычислительная погрешность была меньше?

1.4. Предложить наилучший способ вычисления знакопеременной суммы.

1.5. Пусть приближенное значение производной функции $f(x)$ определяется при $h \ll 1$ по одной из формул:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

или

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h},$$

а сами значения $f(x)$ вычисляются с абсолютной погрешностью Δ. Какую погрешность можно ожидать при вычислении производной, если $\left|f^{(k)}\right| \leq M_k, \quad k = 0, 1, \ldots$?

1.6. Пусть значение многочлена $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ вычисляется в точке $x = 1$ по схеме Горнера:

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(\ldots(a_{n-1} + a_n x)\ldots)).$$

Какую погрешность можно ожидать в результате, если коэффициенты заданы с погрешностью δ?

1.7. Пусть вычисляется величина $S = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, где коэффициенты a_i заданы с погрешностью δ. Найти погрешность вычисления S при условии, что $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

1.8. Пусть вычисляется $f(x)$, причем f имеет непрерывную производную в этой точке. Найти главный член погрешности при условии, что x задано приближенно с точностью δ.

1.9. Пусть $|x| < 1$. В каком порядке лучше вычислять сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ с точки зрения уменьшения вычислительной погрешности?

1.10. Пусть вычисления ведутся по формуле

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 f_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y_0, y_1 заданы точно, $|f_n| \leq M, \quad h \ll 1$. Какую вычислительную погрешность можно ожидать при вычислении y^k? Улучшится ли ситуация, если вычисления вести по формулам

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = f_n, \quad \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = z_n?$$

1.11. Вычислить постоянную Эйлера

$$C = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n - \ln n)$$

с 10 верными знаками.

§ 2. Погрешность функции

Пусть искомая величина y является функцией параметров a_i, $i = \overline{1,n}$: $y = y(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Область G допустимого изменения параметров a_i известна, требуется получить приближение к y и оценить его погрешность. Если y^* — приближенное значение величины y, то *предельной абсолютной погрешностью* называется величина

$$A(y^*) = \sup_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in G} |y(a_1, a_2, \ldots, a_n) - y^*| ;$$

при этом *предельной относительной погрешностью* называется величина $\dfrac{A(y^*)}{|y^*|}$.

2.1. Доказать, что предельная абсолютная погрешность $A(y^*)$ минимальна при $y^* = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, где

$$y_1 = \inf_G y(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad y_2 = \sup_G y(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

2.2. Положим

$$A^0(y^*) = \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial y(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)}{\partial a_j} \right| \Delta(a_j^*), \quad A_0(y^*) = \sum_{j=1}^{n} B_j \Delta(a_j^*),$$

где $B_j = \sup\limits_G \left| \dfrac{\partial y(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial a_j} \right|$. Доказать, что

$$A_0(y^*) - A(y^*) = o(\rho), \quad A^0(y^*) - A(y^*) = o(\rho),$$

где $\rho = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \Delta^2(a_j^*) \right)^{1/2}$.

2.3. Пусть $y = a^{10}$, $a^* = 1$ и задана $\Delta(a^*)$. Вычислить величины $A_0(y^*)$, $A^0(y^*)$, $A(y^*)$.

2.4. Показать, что предельная абсолютная погрешность суммы или разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей с точностью до членов второго порядка малости.

2.5. Показать, что предельная относительная погрешность произведения или частного равна сумме предельных относительных погрешностей с точностью до членов второго порядка малости.

2.6. Имеется приближение y^* к корню уравнения $f(y) = 0$. Вывести приближенное равенство

$$y - y^* \approx -\frac{f(y^*)}{f'(y^*)}.$$

2.7. Пусть y^* — решение уравнения $y^2+a_1y+a_2=0$ при заданных приближенных значениях коэффициентов a_1^*, a_2^* и их погрешностях $\Delta(a_1^*), \Delta(a_2^*)$. Доказать, что

$$A^0(y^*) = \frac{|y^*|\Delta(a_1^*) + \Delta(a_2^*)}{|2y^* + a_1^*|}.$$

2.8. Показать, что в случае, когда уравнение из предыдущей задачи имеет корень кратности ν, погрешность приближенного значения корня имеет порядок $O(\rho^{1/\nu})$, где $\rho = \left(\Delta^2(a_1^*) + \Delta^2(a_2^*)\right)^{1/2}$.

2.9. С каким числом знаков надо взять $\lg 2$, для того чтобы вычислить корни уравнения $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ с четырьмя верными знаками?

2.10. Пусть ограниченные по модулю величиной M коэффициенты уравнений:

$$1) ax^2 + c = 0; \quad 2) ax^2 + bx = 0; \quad 3) x^2 + bx + c = 0;$$

$$4) ax^2 + bx + 1 = 0; \quad 5) ax^2 + bx + c = 0$$

вычисляются с одинаковой относительной погрешностью δ. Найти максимальную погрешность, с которой могут вычисляться их корни.

Глава II
Приближение функций и производных

§ 3. Полиномиальная интерполяция

Пусть $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ — набор различных точек (узлов) на отрезке $[a,b]$, в которых заданы значения функции $f(x)$ так, что $f_i = f(x_i)$, $i = 1,\ldots,n$. Требуется построить многочлен, принимающий в точках x_i значения f_i, и оценить погрешность приближения достаточно гладкой функции этим многочленом на всем отрезке $[a,b]$.

Приведем в явном виде вспомогательные многочлены $\Phi_i(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющие условиям $\Phi_i(x_i) = 1$, $\Phi_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$:

$$\Phi_i(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Далее с их помощью запишем формулу для многочлена Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,\Phi_i(x).$$

Существование и единственность многочлена степени $n-1$, принимающего в n различных точках заданные значения, следует из отличия от нуля соответствующего определителя Вандермонда; поэтому указанный многочлен $L_n(x)$ есть решение поставленной задачи.

Пусть n-я производная функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда для любой точки $x \in [a,b]$ существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что справедливо равенство

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,\omega_n(x), \quad \text{где } \omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Следствием этого представления является оценка погрешности в равномерной норме

$$\|f(x) - L_n(x)\| \le \frac{\|f^{(n)}(x)\|}{n!} \|\omega_n(x)\|, \quad \text{где} \quad \|f(x)\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Величина

$$\lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=1}^{n} |\Phi_i(x)|$$

называется *константой Лебега интерполяционного процесса.* Скорость ее роста в зависимости от величины n определяет как сходимость $L_n(x)$ к $f(x)$ в равномерной норме, так и оценку вычислительной погрешности интерполяции.

3.1. Построить многочлен Лагранжа при $n = 3$ для следующих случаев:

$$\begin{aligned} &1)\ x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \\ &\quad\ f_1 = 3, \quad f_2 = 2, \quad f_5 = 5; \\ &2)\ x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4, \\ &\quad\ f_1 = 3, \quad f_2 = 4, \quad f_5 = 6. \end{aligned}$$

3.2. Вычислить

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p \Phi_i(x) \ \text{ при } \ p = 0, \ldots, n.$$

3.3. Пусть $x_i = a + \dfrac{b-a}{n-1}(i-1)$, $i = 1, \ldots, n$. Вычислить $\|\omega_n(x)\|$ при $n = 2, 3, 4$.

3.4. Функция $f(x)$ приближается на $[a, b]$ по n равноотстоящим узлам $x_i = a + \frac{b-a}{n-1}(i-1)$, $i = 1, \ldots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности вида $\varepsilon_n = 10^{-p}$ в равномерной норме для следующих случаев:

1) $[0, 0.1]$, $f(x) = \sin 2x$, $n = 2$; 2) $[-1, 0]$, $f(x) = \exp x$, $n = 3$.

3.5. Число $\ln 15.2$ вычислено следующим образом. Найдены точные значения $\ln 15$ и $\ln 16$ и проведена линейная интерполяция между этими числами. Показать, что если x и y — соответственно точное и приближенное значения $\ln 15.2$, то справедлива оценка

$$0 < x - y < 4 \cdot 10^{-4}.$$

3.6. Функция $f(x) = \dfrac{1}{A^2 - x}$ приближается на $[-4, -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -4, -3, -2, -1$. При каких значениях A оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5}?

3.7. Доказать, что если узлы интерполяции расположены симметрично относительно некоторой точки c, а значения интерполируемой функции в симметричных узлах равны, то интерполяционный многочлен Лагранжа — функция, четная относительно точки c.

3.8. Пусть $a \le x \le b$ и $-1 \le y \le 1$, и, соответственно, узлы интерполяции x_i и y_i, $i = 1, \ldots, n$, связаны линейным соотношением $x_i = x(y_i) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} y_i$. Доказать, что константы Лебега интерполяционного процесса $\lambda_n^{[a,b]}$ и $\lambda_n^{[-1,1]}$, соответствующие этим отрезкам, совпадают.

3.9. Показать, что для системы равноотстоящих узлов $\{x_i = i,\ i = 1, \ldots, n\}$ при $n \ge 2$ справедлива оценка снизу для константы Лебега $\lambda_n \ge K\, 2^n / n^{3/2}$ с постоянной K, не зависящей от n.

3.10. Показать, что для системы равноотстоящих узлов $\{x_i = i,\ i = 1, \ldots, n\}$ при $n \ge 2$ справедлива оценка сверху для константы Лебега $\lambda_n \le K\, 2^n$ с постоянной K, не зависящей от n.

3.11. Определить узлы интерполяции, при которых константа Лебега λ_3 минимальна.

3.12. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(-1) = 0$, $P_3(1) = 1$, $P_3(2) = 2$, $a_3 = 1$.

3.13. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(0) = P_3(-1) = P_3(1) = 0$, $a_2 = 1$.

3.14. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(-1) = 0$, $P_3(1) = 1$, $P_3(2) = 2$, $a_1 = 1$.

3.15. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, удовлетворяющий условиям: $P_3(0) = P_3(-2) = P_3(1) = 0$, $a_0 = 1$.

3.16. Построить многочлен $P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$, удовлетворяющий условиям:

$$\sum_{i=0}^{4} a_i = 0, \quad P(0) = 0, \quad P(-1) = 1, \quad P(2) = 2, \quad P(3) = 3.$$

3.17. Построить многочлен $P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$, удовлетворяющий условиям: $P_4(1) = P_4(-1) = P_4'(0) = P_4''(0) = 0$, $P_4(0) = 1$.

3.18. Построить многочлен $P_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, удовлетворяющий условиям:

$$P_4(0) = 0\,, \quad P_4(1) = 1\,, \quad P_4(2) = 2\,, \quad P_4(3) = 3\,, \quad \sum_{i=1}^{4} a_i = 0\,.$$

3.19. Построить многочлен Лагранжа $L_n(x)$ степени $n-1$, удовлетворяющий условиям $L_n(x_k) = y_k$:

$$1) n = 4;\; x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 4;\;\; y_1 = 2, y_2 = 3, y_3 = 4, y_4 = 6;$$

$$2) n = 3;\; x_k = 2k-1,\;\; y_k = 8\sin\frac{\pi}{6}(2k-1),\;\; k = 1,2,3.$$

3.20. Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = |x|$ по узлам $-1, 0, 1$.

3.21. Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = x^2$ по узлам $x_i = i,\; i = 0,1,2,3$.

3.22. Построить многочлен Лагранжа $L_4(x)$ третьей степени, удовлетворяющий условиям $L_4(x_k) = y_k$: $x_k = k - 5$, $y_k = 3k^3 + 2k^2 + k + 1$, $k = 1,2,3,4$.

3.23. Функция $f(x)$ приближается на $[a,b]$ по n равноотстоящим узлам $x_i = a + \frac{b-a}{n-1}(i-1)$, $i = 1,\ldots,n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности вида $\varepsilon_n = 10^{-p}$ в равномерной норме для следующих случаев:

$$1) \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)dt, \quad [0,1], \quad n = 3\,;$$

$$2) \quad f(x) = \ln x, \quad [1,2], \quad n = 4\,.$$

3.24. Оценить погрешность приближения функции e^x интерполяционным многочленом Лагранжа $L_2(x)$, построенным по узлам $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, в точке: 1) $x = 0.05$; 2) $x = 0.15$.

3.25. Функция $\sin x$ приближается на отрезке $[0, \pi/4]$ интерполяционным многочленом по значениям в точках $0, \pi/8, \pi/4$. Оценить погрешность интерполяции на этом отрезке.

3.26. Функция $\ln(x)$ приближается на отрезке $[1,2]$ интерполяционным многочленом третьей степени по четырем узлам 1, $4/3$, $5/3$, 2. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $1/300$.

3.27. Функция $f(x) = \exp(2x)$ приближается на отрезке $[-1/2, 1/2]$ интерполяционным многочленом второй степени по трем узлам: $-1/2$, 0, $1/2$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $\sqrt{3}/9$.

3.28. Оценить погрешность интерполяции функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $[0,1]$ многочленом Лагранжа пятой степени на равномерной сетке.

3.29. Оценить число узлов интерполяции на отрезке $[0,\pi/4]$, обеспечивающее точность $\varepsilon \le 10^{-2}$ приближения функции $f(x) = \sin x$.

3.30. С каким шагом следует составлять таблицу функции $\sin x$ на $[0,\pi/2]$, чтобы погрешность линейной интерполяции не превосходила $0.5\cdot 10^{-6}$?

3.31. Определить степень многочлена Лагранжа на равномерной сетке, обеспечивающую точность приближения функции e^x на отрезке $[0,1]$ не хуже 10^{-3}.

3.32. Пусть функция $f(x) = \sin x$ задана на отрезке $[0,b]$. При каком b многочлен Лагранжа $L_3(x)$, построенный на равномерной сетке, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon \le 10^{-3}$?

3.33. Пусть $f \in C^{(1)}[a,b]$ и $p(x)$ — полином, аппроксимирующий $f'(x)$ с точностью ε в норме $C[a,b]$. Доказать, что полином $q(x) = f(a) + \int\limits_a^x p(t)dt$ аппроксимирует $f(x)$ с точностью $\varepsilon(b-a)$ в норме $C[a,b]$.

3.34. Пусть функция $f(x)$ задана на $[a,b]$ и $\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)| \le 1$. Оценить погрешность приближения этой функции ломаной, построенной на равномерной сетке с шагом h.

3.35. Пусть $\omega_f(h) = \max\limits_{x\in[a,b-h]}|f(x+h) - f(x)|$ — модуль непрерывности функции $f(x)$. Доказать, что $|f(x) - L_1(x)| \le \omega_f(h)$.

3.36. Привести пример непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции, для которой интерполяционный процесс Лагранжа на равномерной сетке расходится.

3.37. Доказать, что для любой таблицы узлов интерполяции $(x_0^n, x_1^n, \ldots, x_n^n)$ на отрезке $[0,1]$ существует аналитическая на этом отрезке функция $f(x)$ такая, что $||L_n(x) - f(x)||_C$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, где $L_n(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа.

3.38. Доказать формулу:

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} C_t^k \Delta^k f_0, \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

3.39. Доказать формулу:

$$L_n(x_0 - th) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_t^k \nabla^k f_0, \quad \nabla f_i = f_i - f_{i-1}.$$

3.40. Доказать формулу:

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} C_t^k \delta^k f_{k/2}, \quad \delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}.$$

3.41. Доказать, что если многочлен $P_s(x)$ степени $s-1$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{gathered}
P_s(x_1) = f(x_1), \quad \ldots, \quad P_s^{(M_1-1)}(x_1) = f^{(M_1-1)}(x_1),\\
P_s(x_2) = f(x_2), \quad \ldots, \quad P_s^{(M_2-1)}(x_2) = f^{(M_2-1)}(x_2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P_s(x_n) = f(x_n), \quad \ldots, \quad P_s^{(M_n-1)}(x_n) = f^{(M_n-1)}(x_n),\\
M_1 + M_2 + \ldots + M_n = s\,,
\end{gathered}$$

то справедливо равенство

$$f(x) - P_s(x) = \frac{f^{(s)}(\xi)}{s!}\omega(x), \; \omega(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^{M_i}.$$

3.42. Функция двух переменных $f(x_1, x_2)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом $P(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2$. При этом $f(0,0) = 1, f(1,0) = 2, f(0,1) = 4, f(1,1) = 3$. Найти $P(1/2, 1/2)$.

3.43. Пусть $P(x_1, x_2)$ — многочлен от двух переменных степени не выше n по каждой переменной и $P(k/n, m/n) = 0, \; k, m = 0, 1, ..., n$. Доказать, что $P(x_1, x_2) \equiv 0$.

3.44. Доказать, что для любых $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$, удовлетворяющих условиям $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} < a + 2\pi$, и для любых $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ существует единственный тригонометрический полином $T(x) = a_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, удовлетворяющий условиям $T(x_k) = y_k, \; k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. Если при этом $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ — вещественные, то и коэффициенты a_k, b_k являются вещественными.

3.45. Показать, что если $x_1, \ldots, x_{2n}$ — вещественные, то функция $T(x) = \prod\limits_{k=1}^{2n} \sin \dfrac{x - x_k}{2}$ является тригонометрическим полиномом вида $a_0/2+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ с вещественными коэффициентами a_k, b_k.

3.46. Доказать, что интерполяционный тригонометрический полином $T(x)$, удовлетворяющий условиям $T(x_k)=y_k$, $k=0,1,\ldots,2n$, где $a\le x_0<x_1<\ldots<x_{2n}<a+2\pi$, может быть записан в виде

$$T(x)=\sum_{k=0}^{2n}y_k t_k(x)\,,\quad \text{где}\quad t_k(x)=\prod_{\substack{s=0\\ s\ne k}}^{2n}\sin\frac{x-x_s}{2}\Big/\sin\frac{x_k-x_s}{2}\,.$$

3.47. Доказать, что для любых $x_0,x_1,\ldots,x_n$, удовлетворяющих условиям $a\le x_0<x_1<\ldots<x_n<a+\pi$, и для любых $y_0,y_1,\ldots,y_n$ существует единственный тригонометрический полином $C(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\cos kx$, удовлетворяющий условиям $C(x_k)=y_k$, $k=0,1,2,\ldots,n$.

3.48. Построить тригонометрический полином на отрезке $[0,1]$ по заданным значениям $f(0)$, $f(h)$, $f(2h)$, $f(3h)$, $h=1/4$.

3.49. Построить тригонометрический интерполяционный полином второй степени $T_2(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x$, удовлетворяющий условиям:

$$T_2(0)=0,\ T_2(\pi/4)=1,\ T_2(\pi/2)=1,\ T_2(3\pi/4)=1,\ T_2(\pi)=1\,.$$

3.50. Построить интерполяционный тригонометрический полином минимальной степени по заданным значениям $f(-\pi)=0$, $f(-\pi/2)=0$, $f(\pi/2)=1$.

3.51. Доказать, что тригонометрический полином $T_n(z)$ степени n имеет в любой полосе $\mathrm{Re}(z)\in[a,a+2\pi]$ ровно $2n$ корней.

3.52. Пусть $T_n(x)$ — тригонометрический интерполяционный многочлен степени n, построенный по равноотстоящим узлам на $[0,2\pi]$ для функции $f(x)\in C^{(\alpha)}$, $\alpha>0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}||T_n-f||_C=0\,.$$

§ 4. Многочлены Чебышева

Имеется несколько способов определения последовательности многочленов Чебышева первого рода. Рассмотрим некоторые из них.

а) *Рекуррентное соотношение*:

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\quad T_{n+1}(x)=2x\,T_n(x)-T_{n-1}(x)\,.$$

б) *Тригонометрическая форма.* При любом η имеем

$$\cos\big((n+1)\eta\big) = 2\cos\eta\cos(n\eta) - \cos\big((n-1)\eta\big).$$

Полагая $\eta = \arccos x$, получаем

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) \quad \Longrightarrow \quad \big|T_n(x)\big| \le 1 \quad \text{при} \quad |x| \le 1.$$

в) *Разностное уравнение.* Рекуррентное соотношение является разностным уравнением по переменной n. Ему соответствует характеристическое уравнение

$$\mu^2 - 2x\mu + 1 = 0.$$

Следовательно,

$$\mu_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2-1} \quad \text{и} \quad T_n(x) = C_1\mu_1^n + C_2\mu_2^n.$$

Из начальных условий получаем $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$. Это дает

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right).$$

Отметим, что все многочлены $T_{2n}(x)$ — четные, а $T_{2n+1}(x)$ — нечетные. При этом коэффициент при старшем члене равен 2^{n-1}.

4.1. Доказать следующие свойства многочленов Чебышева:

$$1) T_{2n(x)} = 2\,T_n^2(x) - 1;$$

$$2) I_{mn} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & n \ne m, \\ \pi/2, & n = m \ne 0, \\ \pi, & n = m = 0; \end{cases}$$

$$3) \int\limits_{-1}^{x} T_n(y)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}T_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T_{n-1}(x)\right) - \frac{(-1)^n}{n^2-1}, \quad n \ge 2;$$

$$4) \left(1-x^2\right)T_n''(x) - x\,T_n'(x) + n^2\,T_n(x) = 0, \quad n \ge 0.$$

4.2. Найти все нули многочленов Чебышева $T_n(x)$.

4.3. Найти все экстремумы многочлена Чебышева $T_n(x)$ на отрезке $[-1,1]$.

4.4. Доказать, что приведенный многочлен Чебышева $\overline{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$ является наименее уклоняющимся от нуля среди всех многочленов со старшим коэффициентом 1 на отрезке $[-1,1]$, т.е.

$$\max_{[-1,1]} \left|P_n(x)\right| \geq \max_{[-1,1]} \left|\overline{T}_n(x)\right| = 2^{1-n}.$$

4.5. Найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля среди всех многочленов со старшим коэффициентом 1 на отрезке $[a,b]$.

4.6. Пусть $\omega_n(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)$. Показать, что при любом выборе узлов x_i имеет место неравенство $\|\omega_n(x)\| \geq (b-a)^n\, 2^{1-2n}$. Сравнить полученный результат с имеющимся для равномерного распределения узлов.

4.7. Пусть $k \leq n$, $0 \leq a \leq b$. В классе многочленов $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющих условию $P_n^{(k)}(0) = c \neq 0$, найти наименее уклоняющийся от нуля на $[a,b]$.

4.8. Среди всех многочленов $P_n(x) = x^n + \ldots$ степени $n \geq 2$, удовлетворяющих условиям $P_n(-1) = P_n(1) = 0$, найти наименее уклоняющийся от нуля на $[-1,1]$.

4.9. Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени n и $\max\limits_{x\in[-1,1]} \left|P_n(x)\right| = M$. Доказать, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| \geq 1$, выполняется неравенство $\left|P_n(x)\right| \leq M\left|T_n(x)\right|$, где $T_n(x)$ — многочлен Чебышева степени n.

4.10. Показать, что для системы узлов интерполяции $x_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi$, $i = 1,\ldots,n$ (нули многочлена Чебышева $T_n(x)$), справедлива асимптотическая оценка сверху для константы Лебега $\lambda_n \leq K\ln n$ с постоянной K, не зависящей от n.

4.11. Определить константу Лебега λ_3 для узлов интерполяции — нулей многочлена Чебышева $T_3(x)$.

4.12. Получить представления для производных многочленов Чебышева следующего вида:

$$\frac{T'_{2n}}{2n} = 2(T_{2n-1}+T_{2n-3}+\ldots+T_1), \quad \frac{T'_{2n+1}}{2n+1} = 2(T_{2n}+T_{2n-2}+\ldots+T_2)+1.$$

4.13. Вычислить значение многочлена Чебышева n-й степени в точке: 1)$x = \frac{1}{2}$; 2)$x = -\frac{1}{2}$.

4.14. Вычислить значение производной многочлена Чебышева n-й степени в точке: 1)$x = 1$; 2)$x = -1$.

4.15. Функция $f(x) = \sin 2x$ приближается многочленом Лагранжа на $[0,2]$ по n чебышевским узлам: $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2i-1}{2n}\pi$,

$i = 1, \ldots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида $\varepsilon_n = \frac{1}{3} 10^{-p}$, если $n = 6$.

4.16. Функция $f(x) = \cos x$ приближается многочленом Лагранжа на $[-1, 1]$ по n чебышевским узлам: $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i-1}{2n}\pi$, $i = 1, \ldots, n$. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида $\varepsilon_n = 10^{-p}$, если $n = 5$.

4.17. Среди всех многочленов вида $a_3x^3 + 2x^2 + a_1x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на $[3, 5]$.

4.18. Среди всех многочленов вида $5x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на $[1, 2]$.

4.19. Среди всех многочленов вида $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 4$ найти наименее уклоняющийся от нуля на $[1, 3]$.

4.20. Среди всех многочленов вида $a_3x^3 + a_2x^2 + 3x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на $[2, 4]$.

4.21. Пусть $x^2 + y^2 = 1$. Доказать, что $T_{2n}(y) = (-1)^n T_{2n}(x)$.

4.22. Доказать следующие представления многочленов Чебышева:

$$1) T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left((1 - x^2)^{n-1/2}\right), \ n \geq 0;$$

$$2) T_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}\right)\bigg|_{t=0}, \ n \geq 0;$$

$$3) T_n(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1 - t^2}{1 - 2tx + t^2}\right)\bigg|_{t=0}, \ n \geq 1;$$

$$4) T_n(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^n}{dt^n} \left(\ln(1 - 2tx + t^2)\right)\bigg|_{t=0}, \ n \geq 1;$$

$$5) T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \ n \geq 1.$$

4.23. Пусть функция $f(x)$ представима при $|x| \leq 1$ в виде $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$, где $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$, $T_k(x)$ — полиномы Чебышева. Доказать, что для всех $x \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$\int_{-1}^{x} f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}(a_{k-1} - a_{k+1})T_k(x) + a_0 - \frac{a_1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_k}{k^2 - 1}.$$

4.24. В классе алгебраических полиномов степени n, принимающих в точке $a(|a| \geq 1)$ значение $b \neq 0$, найти наименее уклоняющийся от нуля на $[-1, 1]$.

4.25. Функция e^x приближается на $[0,1]$ интерполяционным многочленом степени 3 с чебышевским набором узлов интерполяции: $x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{8}$, $k = \overline{1,4}$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит величины $e \cdot 10^{-3}$.

4.26. Доказать, что если узлы интерполяции на отрезке совпадают с нулями многочлена Чебышева соответствующей степени, то справедливо неравенство

$$\lambda_n = \max_x \sum_{i=0}^{n} |\Phi_i(x)| \ge K \ln n$$

с постоянной K, не зависящей от n.

§ 5. Численное дифференцирование

Пусть известны значения функции $f(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и требуется приближенно определить производную $f^{(k)}(x)$ для некоторого $0 \le k \le n-1$. Построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$ и положим $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$; при этом для погрешности справедливо представление

$$f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!(n+j)!} f^{(n+j)}(\xi_j)\omega_n^{(k-j)}(x).$$

Для системы равноотстоящих узлов ($x_{i+1} - x_i = h$, $i = \overline{1, n-1}$) часто используется другой подход, основанный, как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, на получении старших аналогов производных через младшие. Базовыми являются следующие выражения:

$$\partial f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \; \bar{\partial} f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \; \mathring{\partial} f(x) = \frac{1}{2}(\partial + \bar{\partial}).$$

Это простейшие аналоги первой производной функции $f(x)$, называемые *разностями вперед, назад и центральной* соответственно. При этом для получения оценок погрешностей удобно использовать разложения Тейлора.

Для получения формул численного дифференцирования на практике также используется *метод неопределенных коэффициентов*. Он заключается в следующем: искомая формула записывается в виде

$$f^{(k)}(x_0) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) + R(f),$$

и коэффициенты c_i определяются из системы линейных уравнений $R(f) = 0$, где $f(x)$ последовательно полагают $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Будем далее использовать обозначение $f(x) \in C^{(r)}$, если функция $f(x)$ имеет на интересующем нас отрезке все непрерывные производные до порядка r включительно.

5.1. Показать, что в точке $x = x_i$ (один из узлов интерполяции) справедлива оценка погрешности

$$|f'(x_i) - L_n'(x_i)| \leq \frac{\|f^{(n)}(x)\|_C}{n!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |x_i - x_j|.$$

5.2. Доказать равенства:

1) если $f \in C^{(2)}$, то $\partial f(x) - f'(x) = \dfrac{h}{2} f''(\xi)$, $x < \xi < x + h$;

2) если $f \in C^{(3)}$, то $\tilde{\partial} f(x) - f'(x) = \dfrac{h^2}{6} f'''(\xi)$, $x - h < \xi < x + h$.

5.3. Получить явные формулы для разностных аналогов старших производных: $\bar{\partial}\partial f(x)$, $\tilde{\partial}\,\bar{\partial}\partial f(x)$, $\bar{\partial}^2\partial^2 f(x)$.

5.4. Найти величину $K_i = K_i(h)$ в равенствах:

1) если $f \in C^{(4)}$, то $\bar{\partial}\partial f(x) - f''(x) = K_2\, f^{(4)}(\xi)$, $x - h < \xi < x + h$;

2) если $f \in C^{(5)}$, то $\tilde{\partial}\,\bar{\partial}\partial f(x) - f'''(x) = K_3\, f^{(5)}(\xi)$, $x - 2h < \xi < x + 2h$;

3) если $f \in C^{(6)}$, то $\bar{\partial}^2\partial^2 f(x) - f^{(4)}(x) = K_4\, f^{(6)}(\xi)$, $x - 2h < \xi < x + 2h$.

5.5. Считая, что значения функции в формулах численного дифференцирования (для аналогов второй и четвертой производных из предыдущей задачи) заданы с абсолютной погрешностью ε, получить оценки полной погрешности этих формул как суммы погрешности метода и неустранимой погрешности. Найти оптимальный шаг h_0, при котором минимизируется величина оценки полной погрешности.

5.6. Методом неопределенных коэффициентов построить формулы численного дифференцирования наиболее высокого порядка точности по h:

1) $f'(0) \approx [a\, f(-2h) + b\, f(0) + c\, f(h)]/h$;

2) $f''(0) \approx [a\, f(-h) + b\, f(h) + c\, f(2h) + d\, f(3h)]/h^2$.

5.7. Доказать, что

$$\tilde{\partial} f(0) - f'(0) = \frac{1}{4h} \int_{-h}^{h} \left(h - |x|\right)^2 f'''(x)\,dx.$$

5.8. Получить формулу численного дифференцирования наиболее высокого порядка точности по h следующего вида:

$$1)\ f'(0) \approx h^{-1}[a\,f(0) + b\,f(h) + c\,f(2h)];$$

$$2)\ f'(0) \approx h^{-1}[a\,f(0) + b\,f(-h) + c\,f(2h)];$$

$$3)\ f'(0) \approx h^{-1}[a\,f(0) + b\,f(-h) + c\,f(-2h)];$$

$$4)\ f'(0) \approx h^{-1}[a\,f(0) + b\,f(2h) + c\,f(3h)];$$

и найти h, при котором достигается минимум оценки погрешности, если $\max\limits_x |f^{(k)}(x)| \le A_k$, а абсолютная вычислительная погрешность не превосходит ε, т.е. $\max\limits_x |f(x) - f^*(x)| \le \varepsilon$.

5.9. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \\ + \frac{1}{n!}\int\limits_a^b (b-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\,d\xi,$$

получить оценки погрешности формул численного дифференцирования (постоянные C_1, C_2 не зависят от f и h)

$$\left|\bar\partial f(x) - f'(x)\right| \le C_1 \int\limits_{x-h}^{x} \left|f''(\xi)\right| dx,$$

$$\left|\bar\partial\partial f(x) - f''(x)\right| \le C_2\, h \int\limits_{x-h}^{x+h} \left|f^{(4)}(\xi)\right| dx.$$

5.10. Доказать справедливость следующих равенств:

$$\partial(f\,g) = f\,\partial g + g\,\partial f + h\,\partial f\,\partial g, \quad \bar\partial(f/g) = \frac{g\,\bar\partial f - f\,\bar\partial g}{g\,(g - h\,\bar\partial g)}.$$

5.11. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, получить оценки погрешности формул численного дифференцирования (постоянные C_i не зависят от f и h):

$$1)\ \left|\partial f(x) - f'(x)\right| \le C_1 \int\limits_x^{x+h} \left|f''(\xi)\right| d\xi;$$

$$2)\ \left|\tilde{\partial} f(x) - f'(x)\right| \le C_2 h \int\limits_{x-h}^{x+h} \left|f'''(\xi)\right| d\xi;$$

$$3)\ \left|2\partial f(x) - \tilde{\partial} f(x+h) - f'(x)\right| \le C_3 h \int\limits_{x}^{x+2h} \left|f'''(\xi)\right| d\xi;$$

$$4)\ \left|2\bar{\partial} f(x) - \tilde{\partial} f(x-h) - f'(x)\right| \le C_4 h \int\limits_{x-2h}^{x} \left|f'''(\xi)\right| d\xi;$$

$$5)\ \left|\bar{\partial}^2 \partial^2 f(x) - f^{(4)}(x)\right| \le C_5 h \int\limits_{x-2h}^{x+2h} \left|f^{(6)}(\xi)\right| d\xi.$$

5.12. Пусть $f \in C^{3,\lambda}$, $0 \le \lambda \le 1$, т.е. $f \in C^{(3)}$, $|f'''(x) - f'''(y)| \le k\,|x-y|^3$ $\forall x, y$. Доказать, что $\bar{\partial}\partial f(x) - f''(x) = O(h^{1+\lambda})$.

5.13. Доказать справедливость следующих равенств:

$$1)\quad \bar{\partial}(f\,g) = f\,\bar{\partial} g + g\,\bar{\partial} f - h\,\bar{\partial} f\,\bar{\partial} g;$$

$$2)\quad \tilde{\partial}(f\,g) = f\,\tilde{\partial} g + g\,\tilde{\partial} f + \frac{h^2}{2}\left(\bar{\partial}\partial f\,\tilde{\partial} g + \bar{\partial}\partial g\,\tilde{\partial} f\right);$$

$$3)\quad \partial(f/g) = \frac{g\,\partial f - f\,\partial g}{g\,(g + h\,\partial g)}.$$

5.14. Пусть числа α_j, не зависящие от h, порождают формулу численного дифференцирования максимального порядка точности $f^{(k)}(x) \approx h^{-k} \sum\limits_{j=-n}^{n} \alpha_j f(x+jh)$. Доказать, что:

1) $\alpha_j = \alpha_{-j}$, если k четно, $\alpha_j = -\alpha_{-j}$, если k нечетно;

2) формула $f^{(k)}(x) \approx h^{-k} \sum\limits_{j=-n}^{n+1} \beta_j f(x+jh)$ не может иметь больший порядок точности, причем она имеет тот же порядок точности тогда и только тогда, когда $\beta_{n+1} = 0$, $\beta_j = \alpha_j$, $j = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$.

5.15. Пусть вычислены точное и приближенное значения $f''(x_0)$ при узлах интерполяции $x_{-l}, \ldots, x_0, \ldots, x_l$, $x_i - x_{i-1} = h$. Показать, что справедливо представление

$$f''(x_0) - L_n''(x_0) = \frac{2(-1)^l (l!)^2}{(2l+2)!} f^{(2l+2)}(\xi) h^{2l}.$$

5.16. Доказать, что если все точки x_i различны и удалены от точки x_0 на расстояние $O(h)$, где h — малая величина, то при гладкой $f(x)$ приближенная формула численного дифференцирования $f^{(k)}(x) \approx \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$ имеет порядок погрешности $O(h^m)$. Здесь $m \geq j+1-k$, j — максимальная степень многочленов, для которых эта формула точна.

5.17. Найти аппроксимацию $f''(x)$ на сетке x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3} с максимально возможным порядком точности по $h = \max\limits_{i \leq k \leq i+3} h_k$.

5.18. Найти коэффициенты формул численного дифференцирования максимальной степени точности:

1) $f'(x) \approx (af(x) + bf(x+h) + cf(x-h))/h$;

2) $f'(x) \approx (af(x) + bf(x+h) + cf(x-2h))/h$;

3) $f''(x) \approx (af(x) + bf(x+h) + cf(x+2h))/h^2$;

4) $f''(x) \approx (af(x) + bf(x+h) + cf(x-h))/h^2$;

5) $f''(x) \approx (af(x) + bf(x-h) + cf(x-2h))/h^2$.

§ 6. Многочлен наилучшего равномерного приближения

Пусть $\mathbf{R}$ — пространство ограниченных вещественных функций, определенных на отрезке $[a,b]$ вещественной оси с нормой $\|f(x)\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Для элемента $f \in \mathbf{R}$ отыскивается наилучшее приближение вида

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j .$$

Многочлен $Q_n^0(x)$ называется *многочленом наилучшего равномерного приближения* для функции $f(x)$, если для любого многочлена $Q_n(x)$ степени n справедливо неравенство

$$\|f - Q_n^0\| \leq \|f - Q_n\| .$$

Такой многочлен существует всегда, а его единственность имеет место при дополнительном предположении о непрерывности $f(x)$.

Теорема Чебышева. *Чтобы многочлен $Q_n(x)$ был многочленом наилучшего равномерного приближения непрерывной функции $f(x)$,* *необходимо и достаточно существования на* $[a,b]$ *по крайней мере* $n+2$ *точек* $x_0 < \ldots < x_{n+1}$ *таких, что*

$$f(x_i) - Q_n(x_i) = \alpha(-1)^i \|f - Q_n\|,$$

где $i = 0, \ldots, n+1$ *и* $\alpha = 1$ (*или* $\alpha = -1$) *одновременно для всех* i.

Точки $x_0, \ldots, x_{n+1}$, удовлетворяющие условию теоремы, называются *точками чебышевского альтернанса.*

6.1. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 50$ для $f(x) = \sin 100x$ на отрезке $[0, \pi]$.

6.2. Пусть $f(x)$ — выпуклая непрерывная функция на $[a,b]$ и $Q_1(x)$ — ее многочлен наилучшего равномерного приближения первой степени. Доказать, что концы отрезка a и b входят в альтернанс.

6.3. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 1$ для $f(x) = x^3$ на отрезке $[1, 2]$.

6.4. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 1$ для $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 5]$.

6.5. Пусть $f^{(n+1)}(x)$ не меняет знак на $[a,b]$ и $Q_n(x)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения степени n для $f(x)$. Оценить величины C_1 и C_2 в неравенстве

$$C_1 \le \|f(x) - Q_n(x)\| \le C_2\,.$$

6.6. Пусть $f(x)$ — непрерывная нечетная функция на отрезке $[-1, 1]$. Показать, что многочлен наилучшего равномерного приближения *произвольной* степени n — также нечетная функция.

6.7. Получить оценку вида $C_n \le \|\sin x - Q_n(x)\| \le 2\,C_n$ для многочлена наилучшего равномерного приближения степени n на $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

6.8. Построить пример функции $f(x)$ и ее многочлена наилучшего равномерного приближения $Q_n(x)$, не удовлетворяющих теоремам Чебышева и единственности.

6.9. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени n для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$1)\ n = 1, \quad f(x) = x^3, \quad [-1,1]; \quad 2)\ n = 3, \quad f(x) = e^{x^2}, \quad [-1,1];$$

$$3)\ n = 3, \quad f(x) = 3\sin^2 10x + |x^2 - 7x + 10|, \quad [3,4]\,.$$

6.10. Найти многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 1$ для функции $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ на отрезке $[0, 1]$.

6.11. Найти многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 3$ для функции $f(x) = \sin x^2$ на отрезке $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.

6.12. Найти многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 1$ для функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 2]$.

6.13. Найти многочлен наилучшего равномерного приближения степени $n = 2$ для функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[-1, 1]$.

6.14. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения первой степени к функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ на отрезке $[0, 1]$.

6.15. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения четвертой степени к функции $f(x) = \sin(6\pi x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

6.16. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения степени n для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1) $n = 2, \quad f(x) = x^3, \quad a = 0, b = 1;$
2) $n = 2, \quad f(x) = x^4, \quad a = -1, b = 1;$
3) $n = 1, \quad f(x) = \sin x, \quad a = -1, b = \pi;$
4) $n = 3, \quad f(x) = |x^2 - 7x + 10|, \quad a = 3, b = 4;$
5) $n = 30, \quad f(x) = 2x^2 + 3x + \cos 50x, \quad a = 0, b = \pi;$
6) $n = 1, \quad f(x) = 1 + x^p, p > 0, \quad a = 0, b = 1;$
7) $n = 2, \quad f(x) = 2x^2 + 3x + 5, \quad a = 1, b = 7.$

6.17. Найти константу C в оценке

$$C/2 \le \|\cos x - Q_4^0(x)\|_{C[\pi/6, \pi/2]} \le C,$$

где $Q_4^0(x)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения четвертой степени.

6.18. Доказать, что $\|\exp(x) - Q_4^0(x)\|_{C[0,1]} \ge 1/64000$, где $Q_4^0(x)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения четвертой степени.

6.19. Рассматривается задача наилучшего равномерного приближения функции e^x на $[-1, 1]$. Показать, что $10^{-6} \le \|\exp(x) - Q_6^0(x)\|_{C[-1,1]} \le 10^{-5}$, где $Q_6^0(x)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения шестой степени.

6.20. Показать, что чебышевский альтернанс для функции e^x всегда содержит крайние точки отрезка, на котором решается задача наилучшего равномерного приближения.

6.21. Привести пример функции и соответствующего ей многочлена наилучшего равномерного приближения, для которых среди точек чебышевского альтернанса нет граничных точек отрезка, на котором решается задача приближения.

6.22. Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$ — некоторый ряд по системе многочленов Чебышева $T_k(x)$. Доказать, что каждая частичная сумма ряда

$S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$ есть многочлен наилучшего равномерного приближения степени n на $[-1,1]$ для $S_{n+1}(x)$.

6.23. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x+9}$ приближается на $[-1,1]$ многочленом первой степени следующими способами:

1) наилучшее равномерное приближение;

2) отрезок ряда Тейлора в точке $x = 0$;

3) интерполяция с оптимальными узлами $x_{1,2} = \pm 2^{-1/2}$.

Построить эти многочлены и вычислить нормы погрешностей в $C[-1,1]$.

6.24. Функция $f(x) = e^{-x}$ приближается на $[-1,1]$ многочленом первой степени следующими способами:

1) наилучшее равномерное приближение;

2) наилучшее приближение в $L_2(-1,1)$;

3) отрезок ряда Тейлора в точке $x = 0$, т.е. интерполяция с узлами $x_1 = x_2 = 0$;

4) интерполяция с узлами $x_1 = -1, x_2 = 1$;

5) интерполяция с оптимальными узлами $x_{1,2} = \pm 2^{-1/2}$.

Построить эти многочлены и вычислить нормы погрешностей в $C[-1,1]$.

6.25. Найти наилучшее приближение e^x константой в норме $L_1(0,1)$.

6.26. Пусть P_2 — пространство алгебраических полиномов второй степени с нормой $||p|| = |p(-1)| + |p(0)| + |p(1)|$. Найти наилучшее приближение функции $p(x) = x^2 \in P_2$ константой.

6.27. Пусть $n \geq 1$ и заданы (x_k, y_k), $k = 0, 1, ..., n$. Найти линейную функцию $p(x) = ax + b$, минимизирующую функционал

$$\sum_{k=0}^{n} (y_k - ax_k - b)^2 .$$

6.28. Пусть A и x — вещественные $n \times n$ матрица и n-мерный вектор, $f(t) = ||Ax - tx||_2 = \sqrt{(Ax - tx, Ax - tx)}$. Доказать, что $f(t)$ достигает минимума при $t = \dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}$.

6.29. Найти наилучшее приближение в $L_2(a,b)$ функции $f(x)$ алгебраическими многочленами $P_n(x)$ степени n :

1)$a = -1, b = 1;\ f(x) = |x|;\ n = 1;$ 2)$a = -1, b = 1;\ f(x) = x^2;\ n = 1;$

3)$a = -1, b = 1;\ f(x) = x^3;\ n = 1;$ 4)$a = -1, b = 1;\ f(x) = x^3;\ n = 2;$

5)$a=0, b=\pi$; $f(x)=\sin x$; $n=2$; 6)$a=0, b=2$; $f(x)=x^3$; $n=3$.

6.30. Для заданной функции $f(x)$ найти алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени n, минимизирующий весовой функционал в $L_2(-1,1)$ следующего вида $\int\limits_{-1}^{1}\frac{(f(x)-P_n(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$:

1)$f(x)=\frac{1}{4}(x^2+2x+1), n=1$; 2)$f(x)=x^2$, $n=1$; 3)$f(x)=x^3$, $n=2$.

§ 7. Приближение сплайнами

Пусть на отрезке $[a,b]$ вещественной оси задана сетка: $a=x_0< < x_1<\ldots<x_n=b$, $P_m(x)$ — множество многочленов степени не выше $m\,(m\geq 1)$, $C^{(r)}[a,b]$ — множество функций, имеющих на $[a,b]$ непрерывные производные до r - го порядка включительно $(r\geq 0)$.

Функцию $S_m(x)=S_{m,k}(x)$ называют полиномиальным сплайном степени m дефекта k $(1\leq k\leq m)$ с узлами $\{x_i\}$, $i=\overline{0,n}$ для функции $f(x)\in C[a,b]$, если выполнены следующие условия:

1) на каждом из отрезков $[x_i,x_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$ она является многочленом — $S_m(x)\in P_m(x)$;

2) на всем отрезке $[a,b]$ обладает непрерывностью производных — $S_m(x)\in C^{(m-k)}[a,b]$.

В дальнейшем термин "дефекта k" будет опускаться, так как в задачах рассматривается только случай $k=1$.

Сплайн называется *интерполяционным*, если в узлах $\{x_i\}$ справедливы равенства $S_m(x_i)=f(x_i)$, $i=\overline{0,n-1}$.

Используются также *локальные (аппроксимационные)* сплайны, значения которых в узлах, как правило, не совпадают со значениями $f(x)$. Это обстоятельство не носит принципиального характера, так как при вычислениях обычно используются приближеные значения функций. Приведем построение локального сплайна третьей степени на сетке с постоянным шагом $h=x_{i+1}-x_i$, $i=\overline{0,n-1}$ для отрезка $[0,1]$. Для этого используется стандартный сплайн $B(x)$, определяемый соотношениями

$$B(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}-x^2+\frac{1}{2}|x|^3 & \text{при } |x|\leq 1,\\ \frac{1}{6}\left(2-|x|\right)^3 & \text{при } 1\leq |x|\leq 2,\\ 0 & \text{при } 2\leq |x|.\end{cases}$$

Локальные сплайны третьей степени $B_2^{(1)}(x)$ и $B_2^{(2)}(x)$ записываются в виде

$$B_2^{(k)}(x)=\sum_{i=-1}^{n+1}\alpha_i^{(k)}B\left(\frac{x-ih}{h}\right),\quad k=1,2.$$

При $k = 1$ доопределяют значения f_{-1} и f_{n+1} линейной интерполяцией по значениям f_0, f_1 и f_n, f_{n-1} соответственно и полагают $\alpha_i = f_i$ $(f_i = f(x_i))$ при $-1 \le i \le n+1$.

При $k = 2$ доопределяют значения f_{-2}, f_{-1} и f_{n+1}, f_{n+2} кубической интерполяцией по значениям f_0, f_1, f_2, f_3 и $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}$ соответственно и полагают $\alpha_i = (8f_i - f_{i+1} - f_{i-1})/6$.

7.1. Построить линейный интерполяционный сплайн по значениям $f(0), f(1)$.

7.2. Получить оценки погрешности приближения функции $f(x)$ линейным интерполяционным сплайном на равномерной сетке с шагом h, если: 1) $f(x) \in C^{(1)}[0,1]$; 2) $f(x) \in C^{(2)}[0,1]$.

7.3. Построить кубический интерполяционный сплайн по значениям $f(0), f(1), f(2)$.

7.4. Обозначим через M_i значения второй производной $S_3''(x)$ кубического интерполяционного сплайна в узлах $\{x_i\}$, $i = \overline{0, n}$. Показать, что они удовлетворяют системе линейных уравнений $C\,M = d$, где

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{h_i}{6} & \text{при } j = i-1, \\ \dfrac{h_i + h_{i+1}}{3} & \text{при } j = i, \\ \dfrac{h_{i+1}}{6} & \text{при } j = i+1, \\ 0 & \text{при } |j-i| > 1; \end{cases} \qquad d_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad h_i = x_i - x_{i-1}.$$

7.5. Пусть в предыдущей задаче $M_0 = M_n = 0$. Показать, что в этом случае решение системы $C\,M = d$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{1\le i\le n-1} |M_i| \le 3\frac{\max\limits_{1\le i\le n-1} |d_i|}{\min\limits_{1\le i\le n-1} |h_i|}.$$

7.6. Пусть $f(x) \in C^{(4)}[a,b]$ $(|f^{(4)}(x)| \le A_4)$, задана сетка с постоянным шагом $h_i = h$, и дополнительные условия для определения кубического интерполяционного сплайна имеют следующий вид:

$$S_3'(x_0 + 0) = f'(x_0), \quad S_3'(x_n - 0) = f'(x_n).$$

Показать, что справедлива оценка погрешности

$$|S_3^{(l)}(x) - f^{(l)}(x)| \le C_l A_4 h^{4-l}, \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

7.7. Выписать приближенные выражения f_{-1} и f_{n+1}, необходимые для определения локального сплайна $B_2^{(1)}(x)$.

7.8. Выписать приближенные выражения f_{-2}, f_{-1} и f_{n+1}, f_{n+2}, необходимые для определения локального сплайна $B_2^{(2)}(x)$.

7.9. Показать, что значения $B_2^{(1)}(x)$ зависят только от значений f_i в четырех ближайших к x точках x_i, а значения $B_2^{(2)}(x)$ — в шести.

7.10. Показать, что при любых $\alpha_i^{(k)}$ функции $B_2^{(k)}(x)$ являются сплайнами третьей степени, причем $B_2^{(k)}(x)$ тождественно равны нулю вне отрезка $[-3h, 1+3h]$.

7.11. Показать, что:

$$B_2^{(i)}(x_0) = f_0\,, \quad B_2^{(i)}(x_n) = f_n\,, \quad i = 1, 2\,;$$
$$B_2^{(2)}(x_1) = f_1\,, \quad B_2^{(2)}(x_{n-1}) = f_{n-1}\,.$$

7.12. Пусть $|f^{(l)}(x)| \le A_l$ при $l = 2, 3, 4$. Показать, что:

$$\left|\left(B_2^{(1)}(x)\right)^{(l)} - f^{(l)}(x)\right| \le C_l A_2 h^{2-l}\,, \quad l = 0, 1\,,$$
$$\left|\left(B_2^{(2)}(x)\right)^{(l)} - f^{(l)}(x)\right| \le C_l A_4 h^{4-l}\,, \quad l = 0, 1, 2, 3\,.$$

Глава III
Численное интегрирование

Рассмотрим интеграл вида

$$I(f) = \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx\,,$$

где $[a, b]$ — конечный или бесконечный промежуток числовой оси и $f(x)$ — произвольная функция из некоторого класса F. Если не оговаривается противное, то будем считать, что все $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Заданная функция $p(x)$ называется *весовой*. Будем предполагать, что на $[a, b]$ она измерима, тождественно не равна нулю и ее произведение на любую $f(x) \in F$ суммируемо.

Для приближенного вычисления интеграла $I(f)$ строятся линейные квадратурные формулы (*квадратуры*) следующего вида:

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, f(x_i)\,.$$

Постоянные c_i называются *коэффициентами* (*весами*) квадратуры, а x_i — ее *узлами*.

Для каждой функции $f(x) \in F$ погрешность квадратурной формулы $S_n(f)$ определяется как $R_n(f) = I(f) - S_n(f)$. При этом оценкой погрешности на классе F называют величину

$$R_n(F) = \sup_{f \in F} \left| R_n(f) \right|.$$

§ 8. Квадратурные формулы интерполяционного типа

Имеется большая группа квадратурных формул, построенных на основе замены $f(x)$ алгебраическим интерполяционным многочленом. Пусть на конечном промежутке $[a, b]$ по заданному набору различных узлов $\{x_i\}_{i=1}^n$ функция $f(x)$ приближается интерполяционным многочленом Лагранжа $L_n(x)$ степени $n-1$

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Положим

$$S_n(f) = \int_a^b p(x)\, L_n(x)\, dx.$$

Отсюда получаем явные формулы для набора коэффициентов $\{c_i\}_{i=1}^n$ и оценку погрешности R_n:

$$c_i = \int_a^b p(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx, \quad R_n = \frac{\left\| f^{(n)}(x) \right\|}{n!} \int_a^b |p(x)|\, |\omega_n(x)|\, dx,$$

где

$$\left\| f^{(n)}(x) \right\| = \max_{[a,b]} \left| f^{(n)}(x) \right|, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

В оценках, приводимых ниже, также используется равномерная норма.

Квадратурные формулы интерполяционного типа, построенные в случае весовой функции $p(x) \equiv 1$ для системы равноотстоящих узлов, называются *формулами Ньютона — Котеса.*

8.1. Получить формулы Ньютона—Котеса и соответствующие оценки погрешностей при числе узлов $n = 1, 2, 3$.

8.2. Рассмотрим формулы прямоугольников и трапеций. Какая из них имеет лучшую точность?

8.3. Пусть весовая функция $p(x)$ четна, узлы x_i расположены симметрично относительно нуля, т.е. $x_{n+1-i} = -x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Доказать, что в интерполяционной квадратурной формуле для вычисления интеграла

$$I(f) = \int_{-a}^{a} p(x)\, f(x)\, dx$$

коэффициенты, соответствующие симметричным узлам, равны, т.е. $c_{n+1-i} = c_i$, $i = 1, \ldots, n$.

8.4. Доказать, что для погрешности квадратурной формулы трапеций справедливо представление

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \frac{1}{2}\int_a^b (a-\xi)(b-\xi)f''(\xi)\,d\xi.$$

Составные квадратурные формулы. Рассмотрим задачи на построение составных квадратурных формул и вывод оценок их погрешностей. Пусть $h = (b-a)/N$ и $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, N$. Введем следующие обозначения для отрезка $[x_k, x_{k+1}]$:

$$I^{(k)}(f) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x)f(x)\,dx, \quad S_n^{(k)}(f) = S_n(f), \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Поскольку исходный интеграл $I(f)$ равен

$$I(f) = \sum_{k=0}^{N-1} I^{(k)}(f),$$

соответствующая составная квадратурная формула принимает вид

$$S_n^N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} S_n^{(k)}(f),$$

а для ее погрешности справедливо неравенство

$$\left|R_n^N(f)\right| \le \sum_{k=0}^{N-1} \left|R_n^{(k)}(f)\right|.$$

Например, в случае составной формулы прямоугольников

$$S_1^N(f) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right),$$

а для погрешности на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ имеем неравенство

$$\left|R_1^{(k)}(f)\right| \le \|f''(x)\|\,\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{24} = \|f''(x)\|\,\frac{h^3}{24} = \|f''(x)\|\,\frac{(b-a)^3}{24N^3}.$$

Следовательно, для всего отрезка $[a,b]$ оценка погрешности имеет вид

$$R_1^N = \|f''(x)\| \frac{(b-a)^3}{24\,N^2}\,.$$

8.5. Для вычисления $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ применяется составная формула трапеций. Оценить минимальное число разбиений N, обеспечивающее точность $0.5\cdot 10^{-3}$ на двух классах функций:

$$1)\ \|f''(x)\| \le 1\,; \qquad 2)\ \int\limits_0^1 |f''(x)|\,dx \le 1.$$

8.6. Получить оценки погрешностей для составной квадратурной формулы трапеций

$$R_2^N(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{N}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}\,f(x_N) + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)\right)$$

следующего вида $(h\,N = b-a)$:

$$1)\ R_2^N = \frac{h^2}{8}\int\limits_a^b \bigl|f''(x)\bigr|\,dx; \quad 2)\ R_2^N = \frac{h^2}{2}\sqrt{\frac{b-a}{30}}\left(\int\limits_a^b \bigl|f''(x)\bigr|^2 dx\right)^{1/2}$$

8.7. Найти оценку погрешности вычисления интеграла

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx \quad \text{при} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

по составной квадратурной формуле

$$S(f) = [f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + 4f(0.3) + \ldots + 4f(0.9) + f(1.0)]\,/30.$$

8.8. Найти оценку погрешности вычисления интеграла

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx \quad \text{при} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

по составной квадратурной формуле

$$S(f) = [f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + \ldots + 2f(0.9) + f(1.0)]\,/20\,.$$

8.9. Оценить минимальное число разбиений отрезка N для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \sin(x^2)\,dx$ по составной квадратурной формуле трапеций, обеспечивающее точность 10^{-4}.

8.10. Оценить минимальное число разбиений отрезка N для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \exp(x^2)\,dx$ по составной квадратурной формуле прямоугольников, обеспечивающее точность 10^{-4}.

8.11. Оценить минимальное число узлов составной квадратурной формулы трапеций для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$, обеспечивающее точность $\varepsilon \le 10^{-3}$.

8.12. Оценить минимальное число узлов составной квадратурной формулы Симпсона для вычисления интеграла $\int\limits_0^2 f(x)dx$, обеспечивающее точность $\varepsilon \le 0.5 \cdot 10^{-4}$ на классе функций, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in[0,2]} |f^{(4)}(x)| \le 1$.

8.13. Написать квадратурную формулу для вычисления с точностью 10^{-4} интегралов вида:

$$1)\ \int\limits_0^\infty e^{-x} f(x)dx\,; \quad 2)\ \int\limits_0^\infty x e^{-x} f(x)dx\,.$$

8.14. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$ по формуле Ньютона — Котеса с узлами $x_1 = 0$, $x_2 = 1/4$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 3/4$, $x_5 = 1$ и оценить погрешность.

8.15. Доказать справедливость следующих представлений погрешностей квадратурных формул:

$$1)\ \int\limits_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right) =$$

$$= -\left(\frac{b-a}{3}\right)^5 \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi), \qquad a < \xi < b\,;$$

$$2)\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{90}\left(7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 32f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7f(b)\right) = -\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 \frac{8}{945} f^{(6)}(\xi), \qquad a < \xi < b;$$

$$3)\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a) - f'(b)) =$$

$$= \frac{(b-a)^5}{720} f^{(4)}(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

8.16. Пусть $f \in C^{(1)}[-1,1]$ и $P_5(x)$ — алгебраический полином пятой степени, удовлетворяющий условиям $P(x_k) = f(x_k)$, $P'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 1,2,3$, где $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Рассмотрим квадратурную формулу следующего вида:

$$S_5(f) = \frac{1}{15}(7f(-1) + 16f(0) + 7f(1) + f'(-1) - 15f'(1)).$$

Проверить, что

$$\int_{-1}^{1} P_5(x)dx = S_5(P_5),$$

и доказать, что $S_5(f)$ точна на полиномах пятой степени, но найдется полином степени 6, на котором она не точна.

8.17. Пусть $C_q = \int_a^b |f^{(q)}(x)|dx < \infty$, $q \le 2$. Получить оценку погрешности формулы трапеций $|R_2^N(f)| \le \tau_q C_q h^q$, где τ_q — абсолютная постоянная, h — шаг интегрирования.

8.18. Пусть $C_q = \int_a^b |f^{(q)}(x)|dx < \infty$, $q \le 4$. Получить оценку погрешности формулы Симпсона $|R_4^N(f)| \le \rho_q C_q h^q$, где ρ_q — абсолютная постоянная, h — шаг интегрирования.

В следующих задачах рассматривается приближенное вычисление интеграла

$$\int_0^1 f_b(x)dx \tag{1}$$

от функции с параметром b:

$$f_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0; \\ x^b & \text{при } x \in (0,1]; \end{cases}$$

где $-1 < b < 1$.

8.19. Интеграл (1) вычисляется по составной квадратурной формуле трапеций с постоянным шагом $1/N$. Доказать, что суммарная погрешность удовлетворяет соотношению $R_N(f) \approx D_1(b)/N^{1+b}$, $D_1(b) \neq 0$.

8.20. Интеграл (1) вычисляется по составной квадратурной формуле трапеций с распределением узлов $x_q = \varphi(q/N)$, $\varphi(t) = t^{3/(1+b)}$. Доказать, что суммарная погрешность удовлетворяет соотношению $R(f) \approx D_2(b)/N^2$, $D_2(b) \neq 0$.

8.21. Интеграл (1) вычисляется по составной квадратурной формуле трапеций с распределением узлов $x_q = \varphi(q/N)$, $\varphi(t) = t^a$. Доказать, что при $a > 2/(b+1)$ суммарная погрешность удовлетворяет соотношению $R(f) \approx D(a,b)/N^2$, $D(a,b) \neq 0$. Проверить, что $D(a,b) > D(b)$.

§ 9. Метод неопределенных коэффициентов

Из явного вида оценок погрешностей для квадратурных формул $S_n(f)$ интерполяционного типа

$$R_n = \frac{\|f^{(n)}(x)\|}{n!} \int_a^b |p(x)|\,|\omega(x)|\,dx$$

следует, что они точны для многочленов $Q(x)$, по крайней мере, степени $n-1$, т.е. для $f = Q_{n-1}(x)$ имеем $S_n(f) = I(f)$. Поэтому если интегралы вида $\int_a^b p(x)x^k\,dx$ вычисляются просто, то коэффициенты c_i квадратуры могут быть вычислены из решения системы линейных уравнений $I(x^k) = S_n(x^k)$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Из условия точности квадратурной формулы на функциях заданного вида можно получить уравнения (в общем случае нелинейные) не только на коэффициенты, но и на узлы квадратуры.

Квадратурными формулами Чебышева называются квадратуры с одинаковыми коэффициентами, т.е.

$$S_n(f) = c\sum_{k=1}^{n} f(x_k), \quad \text{где} \quad c = \frac{1}{n}\int_a^b p(x)\,dx.$$

Их построение заключается в нахождении узлов x_k из условий максимальной алгебраической степени точности.

9.1. Получить формулу Симпсона методом неопределенных коэффициентов.

9.2. Для приближенного вычисления интегралов вида

$$I(f) = \int\limits_0^1 \sin(100\pi x) f(x)\, dx$$

построить методом неопределенных коэффициентов квадратурную формулу с заданными узлами $S(f) = c_1\, f(0) + c_2\, f(1)$.

9.3. Для вычисления интегралов:

$$1) I(f) = \int\limits_0^2 (x+1) f(x) dx\,; 2) I(f) = \int\limits_{-1}^0 x^2 f(x) dx\,; 3) I(f) = \int\limits_{-1}^1 x^2 f(x) dx$$

построить формулы вида $S(f) = C_1\, f(\tilde{x}) + C_2\, f(x_2)$ с одним фиксированным узлом $\tilde{x}$, точные для многочленов максимально высокой степени, если $\tilde{x} = 0$.

9.4. Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n\,.$$

Доказать, что:

$$B_1 = -a_1,$$

$$a_1 B_1 + B_2 = -2a_2,$$

$$a_2 B_1 + a_1 B_2 + B_3 = -3a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-1} B_1 + a_{n-2} B_2 + \cdots + a_1 B_{n-1} + B_n = -n a_n,$$

где $B_j = \sum\limits_{k=1}^n x_k^j$, $j = 1, \ldots n$.

9.5. Построить квадратурные формулы Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) \equiv 1$ для $n = 2, 3, 4$.

9.6. Показать, что квадратурная формула

$$S_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right)$$

для вычисления интегралов вида

$$I(f) = \int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

точна для алгебраических многочленов степени $2n-1$.

9.7. Показать, что квадратурная формула

$$S_n(f) = \frac{\omega}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j\omega}{n}\right)$$

для вычисления интегралов вида

$$I(f) = \int\limits_0^{\omega} f(x)\,dx$$

точна для всех тригонометрических многочленов с периодом ω степени не выше $n-1$.

9.8. Пусть T — треугольник на плоскости, A, B, C — середины его сторон. Показать, что квадратурная формула

$$\iint\limits_T f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\,\mathrm{mes}\,(T)\big(f(A)+f(B)+f(C)\big)$$

точна для всех полиномов второй степени вида

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2\,.$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $dx = dx_1dx_2$.

9.9. Пусть П — прямоугольник на плоскости, A, B, C, D — середины его сторон, E — центр прямоугольника. Показать, что квадратурная формула

$$\iint\limits_{\Pi} f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}\,\mathrm{mes}(\Pi)\,\big(f(A)+f(B)+f(C)+f(D)+2f(E)\big)$$

точна для всех алгебраических многочленов от двух переменных третьей степени.

9.10. Построить квадратурную формулу Чебышева с тремя узлами для вычисления интегралов вида:

$$1)\int\limits_0^2 f(x)\,dx\,;\ 2)\int\limits_0^1 f(x)\,dx\,;\ 3)\int\limits_{-1}^0 f(x)\,dx\,;\ 4)\int_{-2}^0 f(x)\,dx.$$

9.11. Для вычисления интегралов вида:

$$1) \int_{-2}^{0} x^2 f(x)dx;\ 2) \int_{0}^{1} x f(x)dx;\ 3) \int_{0}^{\pi/2} \cos(x) f(x)dx;\ 4) \int_{0}^{2} (x+2) f(x)dx$$

построить квадратурную формулу вида $c_1 f(0) + c_2 f(x_2)$, точную для многочленов максимально возможной степени.

9.12. Построить квадратурную формулу вида

$$\int_{0}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(0) + c_2 f(2/3),$$

точную для многочленов максимально возможной степени.

9.13. Построить квадратурную формулу вида

$$\int_{0}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(1/2) + c_2 f(2/3),$$

точную для многочленов максимально возможной степени.

9.14. Для вычисления следующих интегралов построить квадратурные формулы вида $S(f) = c_1 f(0) + c_2 f(x_2)$, точные для многочленов наиболее высокой степени:

$$\int_{-1}^{0} x^2 f(x)dx;\ \int_{0}^{2} (x+1) f(x)dx.$$

9.15. Найти коэффициенты квадратурной формулы

$$\int_{0}^{2} f(x)dx \approx c_1 f(0) + c_2 f(1/2) + c_3 f(2),$$

точной на многочленах максимально возможной степени.

9.16. Построить квадратурную формулу вида

$$\int_{a}^{b} e^{\alpha x} f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b),$$

точную для многочленов максимально возможной степени.

9.17. Определить параметры c_1, c_2, x_2 так, что квадратурная формула $\int\limits_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(x_2)$ будет точна на многочленах максимально возможной степени.

9.18. Для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$ построить квадратурную формулу вида $S(f) = c_1 f(-1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(1)$, точную для многочленов максимально высокой степени.

9.19. Построить квадратурную формулу по четырем равноотстоящим узлам

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4)$$

максимальной степени точности.

§ 10. Квадратурные формулы Гаусса

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу. При заданном числе узлов n построить квадратурную формулу

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \tag{1}$$

для вычисления интегралов вида

$$I(f) = \int\limits_a^b p(x) f(x)\, dx\,,$$

точную для многочленов максимально высокой степени. Весовая функция $p(x)$ здесь предполагается почти всюду положительной.

В этой постановке имеется $2n$ свободных параметров (узлы x_i и коэффициенты c_i неизвестны), поэтому можно попытаться построить квадратуру, точную для многочленов степени $2n-1$. Легко убедиться в том, что не существует квадратуры с n узлами, точной для всех многочленов степени $2n$. Действительно, возьмем $P_{2n}(x) = (x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2$. Тогда $0 = S_n(P_{2n}) \neq I(P_{2n}) > 0$.

Важную роль при построении формул Гаусса играют ортогональные многочлены на отрезке $[a,b]$ с весом $p(x) > 0$. Они могут быть получены, например, в результате стандартной процедуры ортогонализации, примененной к системе $\{1, x, \ldots, x^k, \ldots\}$, при скалярном произведении

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx\,.$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ имеется система ортогональных многочленов с весом $p(x)$

$$\{\, 1, \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_k(x), \ldots \,\}\,.$$

Тогда многочлен k-й степени $\psi_k(x)$ ортогонален произвольному многочлену $P_n(x)$ при $n = 0, \ldots, k-1$. Действительно, многочлен $P_n(x)$ представим в виде $P_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j \psi_j(x)$, и при $k \neq n$ имеют место равенства

$$\int_a^b p(x) \psi_k(x) \psi_n(x)\, dx = 0\,.$$

В практических расчетах наиболее употребительны следующие ортогональные многочлены: Лежандра $\big([-1, 1],\ p(x) = 1\big)$, Чебышева $\left([-1, 1],\ p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$, Лагерра $\big([0, \infty),\ p(x) = e^{-x}\big)$, Эрмита $\left((-\infty, \infty),\ p(x) = e^{-x^2}\right)$.

При построении квадратурных формул Гаусса ключевым является утверждение:

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — нули ортогонального многочлена $\psi_n(x)$ степени n и (1) — квадратура, точная для многочленов степени $n-1$. Тогда квадратура (1) будет точна для многочленов степени $2n-1$.

Поэтому сам процесс построения может быть разбит на два последовательных этапа:

— нахождение нулей ортогонального многочлена,

— нахождение весов методом неопределенных коэффициентов.

Приведем оценку погрешности формул Гаусса

$$R_n = \left\| f^{(2n)}(x) \right\| \int_a^b p(x) \frac{\psi_n^2(x)}{(2n)!}\, dx\,,$$

которая для случая $[-1, 1]$, $p(x) \equiv 1$ имеет вид

$$R_n = \left\| f^{(2n)}(x) \right\| \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{((2n)!)^3 (2n+1)}\,.$$

10.1. Методом ортогонализации построить многочлены Лежандра со старшим коэффициентом 1, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) = 1$.

10.2. Доказать, что ортогональный многочлен степени n имеет ровно n различных корней на отрезке $[a, b]$.

10.3. Доказать, что среди всех многочленов степени n вида $P_n(x) = x^n + \ldots$ минимальную норму $\|P_n\|^2 = \int\limits_a^b p(x)P_n^2(x)\,dx$ имеет ортогональный многочлен $\psi_n(x)$ со старшим коэффициентом 1.

10.4. Для ортогональных многочленов вида $\psi_n(x) = x^n + \ldots$ показать справедливость рекуррентного соотношения

$$\psi_n(x) = (x + b_n)\psi_{n-1}(x) - c_n\psi_{n-2}(x)$$

с коэффициентом $c_n > 0$.

10.5. Доказать, что ортогональные многочлены на симметричном относительно нуля отрезке с четным весом $p(x)$ обладают свойством $\psi_n(-x) = (-1)^n\psi(x)$.

10.6. Пусть задан отрезок $[a, b]$. Доказать, что при $b > a \geq 0$ все коэффициенты ортогонального многочлена отличны от нуля.

10.7. Доказать, что нули ортогональных многочленов с фиксированным на отрезке $[a, b]$ весом $p(x) > 0$ перемежаются, т.е.

$$a < x_1^{(n)} < x_1^{(n-1)} < \ldots < x_{n-1}^{(n-1)} < x_n^{(n)} < b.$$

10.8. Построить квадратуру Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла:

$$1)\ I(f) = \int\limits_0^1 xf(x)\,dx; \quad 2)\ I(f) = \int\limits_0^1 e^x f(x)\,dx\,.$$

10.9. Построить квадратуру Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла:

$$1)\ I(f) = \int\limits_{-1}^1 x^2 f(x)\,dx; \quad 2)\ I(f) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x f(x)\,dx\,.$$

10.10. Построить квадратуру Гаусса с тремя узлами для вычисления интеграла

$$I(f) = \int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx\,.$$

10.11. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

10.12. Пусть весовая функция $p(x)$ четна относительно середины отрезка интегрирования — точки $(a+b)/2$. Доказать, что узлы квадратуры Гаусса для вычисления $I(f) = \int\limits_a^b p(x)f(x)\,dx$ расположены симметрично относительно $(a+b)/2$, а соответствующие симметричным узлам коэффициенты квадратуры равны.

10.13. На интервале $(-\infty, \infty)$ найти ортогональный многочлен вида $\Psi_3(x) = x^3 + \ldots$ при заданной весовой функции $p(x) = \exp(-x^2)$.

10.14. На отрезке $[-1, 1]$ найти ортогональный многочлен вида $\Psi_3(x) = x^3 + \ldots$ при заданной весовой функции $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10.15. На отрезке $[-1, 1]$ найти ортогональный многочлен вида $\Psi_3(x) = x^3 + \ldots$ при заданной весовой функции $p(x) = \sqrt{1-x^2}$.

10.16. На полуинтервале $[0, \infty)$ найти ортогональный многочлен вида $\Psi_3(x) = x^3 + \ldots$ при заданной весовой функции $p(x) = \exp(-x)$.

10.17. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интегралов вида $\int\limits_0^\pi \sin(x)\, f(x)\,dx$.

10.18. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интегралов вида $\int\limits_0^\infty \exp(-x)\, f(x)\,dx$.

10.19. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интегралов вида $\int\limits_0^1 \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 f(x)\,dx$.

10.20. Доказать, что полиномы $\{x^m\}_{m=0}^{\infty}$ не могут быть ортогональны на $[0, 1]$ ни с каким весом $p(x) > 0$.

10.21. Для заданных $c_0, c_1, \ldots, c_n$ построить алгебраический полином $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющий условиям

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = c_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

10.22. Доказать, что для ортогональных многочленов Лежандра

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$

справедливы следующие соотношения:

$$1) L_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\right)\bigg|_{t=0},\ n \geq 0;$$

$$2)(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,\ n \geq 1;$$

$$3)L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x) = (2n+1)L_n(x),\ n \geq 1;$$

$$4)L'_{n+1}(x) - xL'_n(x) = (n+1)L_n(x),\ n \geq 0;$$

$$5)xL'_n(x) - L'_{n-1}(x) = nL_n(x),\ n \geq 1;$$

$$6)(x^2-1)L'_n(x) = nxL_n(x) - nL_{n-1}(x),\ n \geq 1;$$

$$7)(1-x^2)L''_n(x) - 2xL'_n(x) + n(n+1)L_n(x) = 0,\ n \geq 0;$$

$$8) \int\limits_{-1}^{1} x^k L_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq k \leq n-1, \\ \dfrac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}, & \text{если } k = n; \end{cases}$$

$$9) \int\limits_{-1}^{1} L_k(x)L_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m, \\ \dfrac{2}{2k+1}, & \text{если } k = m; \end{cases}$$

$$10) \text{ Если } L_n(x_k) = 0, \text{ то } \int\limits_{-1}^{1} \frac{L_n(x)}{(x-x_k}dx = -\frac{2}{(n+1)L_{n+1}(x_k)},\ n \geq 1;$$

$$11)L_n(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^k C_{2n-2k}^n x^{n-2k},\ n \geq 0.$$

10.23. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — корни полинома Лежандра $L_n(x)$ и $\gamma_k = \int\limits_{-1}^{1}\prod\limits_{\substack{s=1\\s\neq k}}^{n}\frac{x-x_s}{x_k-x_s}dx$. Доказать, что если f, g — алгебраические многочлены степени $n-1$, то

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k f(x_k)g(x_k).$$

10.24. Доказать следующие свойства узлов и коэффициентов квадратурной формулы Гаусса $S_n(f)$ для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$:

1) $L_n(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где L_n — ортогональный многочлен Лежандра степени n;

$$2) c_k = -\frac{2}{(n+1)L_{n+1}(x_k)L_n'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$3) c_k = \frac{2(1-x_k^2)}{n^2(L_{n-1}(x_k))^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$4) c_k = \frac{2}{nL_{n-1}(x_k)L_n'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

10.25. Пусть ε_n — погрешность на функции $f(x) = x^{2n}$ квадратурной формулы Гаусса с n узлами. Вычислить ε_n и показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{2n}\varepsilon_n = \pi$.

10.26. Показать, что квадратурная формула

$$S_3(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left(f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

для вычисления интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx$ точна для всех алгебраических полиномов пятой степени.

10.27. Показать, что квадратурная формула

$$S_3(f) = \frac{\pi}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ точна для всех алгебраических полиномов пятой степени.

10.28. Для вычисления следующих интегралов построить квадратурные формулы Гаусса с одним узлом:

$$1) \int\limits_{0}^{1} x^2 f(x)dx; \quad 2) \int\limits_{-1}^{1} |x| f(x)dx.$$

10.29. Для вычисления следующих интегралов построить квадратурные формулы Гаусса с двумя узлами:

$$1) \int\limits_{-1}^{1} |x| f(x) dx; \quad \int\limits_{-1}^{1} x^4 f(x) dx.$$

10.30. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами для вычисления интеграла $\int\limits_{0}^{1} p(x) f(x) dx$, $p(x)$ — весовая функция:

$$1)\ p(x) = x;\ \ 2)\ p(x) = \sin \pi x;\ \ 3)\ p(x) = e^x;$$

$$4)\ p(x) = \ln(1+x);\ \ 5)\ p(x) = 1 - x;\ \ 6)\ p(x) = e^{-x}.$$

10.31. Построить квадратуру Гаусса с четырьмя узлами для вычисления интеграла

$$I(f) = \int\limits_{0}^{1} f(x)\, dx\,.$$

10.32. Пусть $f(x)$ — функция, интегрируемая по Риману. Доказать, что для формул Гаусса $R_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$.

10.33. Построить составную квадратурную формулу Гаусса с двумя узлами на каждом отрезке разбиения для вычисления интегралов вида $\int\limits_{a}^{b} e^{\alpha x} f(x) dx$, $e^{\alpha x}$ — весовая функция. Оценить погрешность построенной формулы.

10.34. Доказать, что не существует квадратур с n узлами, точных для всех тригонометрических полиномов степени n.

10.35. Введением весовых функций и заменой переменных $x = \mu(t)$ свести построение квадратуры Лобатто

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{n} b_j f(d_j), \qquad d_0 = -1,\, d_n = 1\,,$$

к построению некоторых квадратур Гаусса.

§ 11. Главный член погрешности

Будем считать промежуток $[a, b]$ конечным и предположим, что $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывные производные до порядка $m + s$. Возьмем квадратурную формулу $S_n(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$:

$$\int\limits_a^b p(x)\, f(x)\, dx = S_n(f) + R_n(f)\,,$$

имеющую алгебраический порядок точности $m - 1$, и рассмотрим ее погрешность $R_n(f)$:

$$R_n(f) = \int\limits_a^b f^{(m)}(t) K(t) dt\,.$$

Здесь ядро $K(t)$ имеет вид

$$K(t) = \int\limits_t^a p(x) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dx - \sum_{i=1}^{n} c_i E(x_i - t) \frac{(x_i - t)^{m-1}}{(m-1)!}\,,$$

где "гасящая" функция $E(x)$ определяется формулой

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Имеет место представление Эйлера для погрешности:

$$R_n(f) \equiv R_m(f) = A_0 \left[f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a) \right] + \ldots$$

$$\ldots + A_{s-1} \left[f^{(m+s-2)}(b) - f^{(m+s-2)}(a) \right] + R_{m+s}(f)\,,$$

$$A_j = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b L_j(t) dt\,, L_{j+1} = \int\limits_a^t \left[A_j - L_j(x) \right] dx\,, L_0(t) = K(t)\,,$$

$$R_{m+s}(f) = \int\limits_a^b f^{(m+s)}(t) L_s(t) dt\,.$$

Главным членом погрешности обычно называют первое слагаемое в этом представлении.

Правило Рунге. Пусть на отрезке длины h для вычисления интеграла $I(f)$ используется некоторая квадратурная формула $S_h(f)$, имеющая алгебраический порядок точности $m-1$. После разложения $f(x)$ в ряд Тейлора в середине отрезка (точке c) получим:

$$I(f) - S_h(f) = \alpha f^{(m)}(c)h^{m+1} + O\left(h^{m+2}\right) .$$

Обозначим через $S_{h/2}(f)$ составную формулу, полученную применением формулы $S_h(f)$ для двух половинок отрезка длины h. Тогда с тем же α находим:

$$I(f) - S_{h/2}(f) = \alpha f^{(m)}(c)\frac{h^{m+1}}{2^m} + O\left(h^{m+2}\right) .$$

Следовательно, с точностью до членов $O\left(h^{m+2}\right)$ справедливо следующее *правило Рунге*:

$$I(f) - S_{h/2}(f) \approx \frac{S_{h/2}(f) - S_h(f)}{2^m - 1} .$$

11.1. Пусть интеграл

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx ,$$

где $f(x)$ — гладкая функция, вычисляется по составной формуле трапеций $S_2^N(f)$ с постоянным шагом $h = \dfrac{b-a}{N}$.

1) Показать, что суммарная погрешность удовлетворяет соотношению

$$R_2^N = a_1h^2 + a_2h^4 + a_3h^6 + \ldots .$$

2) Показать, что

$$R_2^N(f) = I(f) - S_2^N(f) = -\frac{h^2}{12}\int_a^b f''(x)dx + Z(f),\ \ Z(f) = o(h^2).$$

3) Пусть $|f^{(3)}(x)| \le M_3$ на отрезке $[a,b]$. Показать, что $|Z(f)| \le \le c_3M_3(b-a)h^3$.

4) Пусть $|f^{(4)}(x)| \le M_4$ на отрезке $[a,b]$. Показать, что $|Z(f)| \le \le c_4M_4(b-a)h^4$.

11.2. Пусть $\int\limits_0^1 f(x)dx$ вычисляется по составной формуле трапеций с переменным шагом интегрирования: $x_i = \varphi(i/N)$, $\varphi(t)$ — гладкая функция. Доказать, что главный член погрешности есть

$$-\frac{1}{12N^2}\int\limits_0^1 f''(\varphi(t)(\varphi'(t))^3 dt.$$

11.3. Пусть интеграл

$$I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,,$$

где $f(x)$ — гладкая функция, вычисляется по составной формуле Симпсона $S_3^N(f)$ с постоянным шагом $h = \dfrac{b-a}{N}$. Показать, что для составной формулы Симпсона суммарная погрешность удовлетворяет соотношению

$$R_3^N(f) = b_1h^4 + b_2h^6 + \ldots\,.$$

11.4. Пусть интеграл

$$\int\limits_0^1 x^\lambda f(x)\,dx\,,$$

где $f(x)$ — гладкая функция и $f(0) \neq 0$, вычисляется по составной формуле трапеций с постоянным шагом $h = \dfrac{1}{N}$. Показать, что при $-1 < \lambda < 1$ суммарная погрешность удовлетворяет соотношению

$$R_2^N = a_1h^{1+\lambda} + a_2h^{2+\lambda} + \ldots\,.$$

11.5. Используя S_h и $S_{h/2}$, построить квадратурную формулу более высокого порядка.

11.6. Пусть M_1, M_2 — количества узлов одной и той же квадратурной формулы S_M с порядком точности $O(1/M^2)$.

1) Доказать справедливость приближенного равенства:

$$I(f) - S_{M_1}(f) \approx \frac{1}{3}\left(S_{M_2}(f) - S_{M_1}(f)\right).$$

2) Доказать, что выражение $S_{M_1}(f) + \frac{1}{3}(S_{M_2}(f) - S_{M_1}(f))$ совпадает с квадратурной формулой Симпсона.

11.7. Показать, что при применении правила Рунге к формуле трапеций получается формула Симпсона. Насколько при этом увеличится порядок главного члена погрешности?

11.8. Показать, что операция построения формулы

$$S_{h,h/2} = S_{h/2} + \frac{S_{h/2} - S_h}{2^m - 1}$$

является экстраполяционной, т.е. при $S_h \neq S_{h/2}$ величина $S_{h,h/2}$ всегда лежит вне отрезка с концами S_h и $S_{h/2}$.

11.9. Пусть для вычисления интеграла от некоторой функции используется квадратурная формула, фактический порядок точности p которой неизвестен для данной функции. Предложить способ численной оценки значения порядка p.

11.10. Пусть имеется некоторый метод решения задачи с погрешностью $I(f) - S_M(f) \approx c/M^m$ и вычислен интеграл с M_1 и $M_2 = \lambda M_1$ отрезками разбиения. Показать, что

$$I(f) - S_{M_2}(F) \approx \frac{S_{M_2}(f) - S_{M_1}(f)}{\lambda^m - 1}.$$

Здесь имеется в виду предельный переход при $M_2 \to \infty, \lambda = \mathrm{const}$.

11.11. Пусть $I(f) - S_M(F) = c/M^m + O(1/M^{m+1})$. Доказать, что

$$I(f) - S_{M_2}(F) \approx \frac{S_{M_2}(f) - S_{M_1}(f)}{(M_2/M_1)^m - 1}$$

при условии, что $M_1, M_2 - M_1 \to \infty$.

11.12. Пусть $I(f) - S_M(F) = c/M^m + O(1/M^{m+2})$. Доказать, что

$$I(f) - S_{M_2}(F) \approx \frac{S_{M_2}(f) - S_{M_1}(f)}{(M_2/M_1)^m - 1}$$

при условии, что $M_1 \to \infty, M_2 > M_1$.

§ 12. Численное интегрирование функций с особенностями

Быстро осциллирующие функции. Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b \exp\{i\omega x\} f(x)dx$, где $\omega(b-a) \gg 1$, $f(x)$ — гладкая функция. Функции $\mathrm{Re}(\exp\{i\omega x\}f(x))$, $\mathrm{Im}(\exp\{i\omega x\}f(x))$ имеют на рассматриваемом отрезке примерно $\omega(b-a)/\pi$ нулей. Поскольку многочлен степени n имеет не более n нулей на этом отрезке, такие функции могут быть хорошо приближены многочленами степени n лишь при $n \gg \omega(b-a)/\pi$. Поэтому для непосредственного вычисления интегралов от таких функций потребуется применение квадратур, точных для многочленов очень высокой степени.

Более выгодным может оказаться использование $\exp\{i\omega x\}$ в качестве весовой функции. Зададимся узлами интерполирования

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} d_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

построим многочлен Лагранжа $L_n(x)$ и рассмотрим квадратурную формулу

$$\begin{aligned} S_n^{\omega}(f) &\equiv \int\limits_a^b \exp\{i\omega x\} L_n(x)dx = \\ &= \frac{b-a}{2} \exp\left\{i\omega\frac{a+b}{2}\right\} \sum_{j=1}^{n} D_j\left(\omega\frac{b-a}{2}\right) f(x_j), \end{aligned} \qquad (1)$$

где

$$D_j(p) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\prod_{k\neq j} \frac{\xi - d_k}{d_j - d_k}\right) \exp\{ip\xi\}d\xi.$$

При этом оценка погрешности

$$R_n = D\left(d_1, \ldots, d_n\right) \max_{[a,b]} \left|f^{(n)}(x)\right| \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$$

не зависит от ω.

12.1. Для приближенного вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций вида

$$I(f) = \int\limits_0^1 \cos\left(10^4 \pi x\right) f(x)\, dx$$

построить методом неопределенных коэффициентов квадратурную формулу с заданными узлами $S(f) = c_1 f(0) + c_2 f(1)$.

12.2. Построить формулу вида (1) для $n = 2$, $d_1 = -1$, $d_2 = 1$.

12.3. Построить формулу вида (1) для $n = 3$, $d_1 = -1$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$ (формула Филона).

12.4. Построить формулу вида (1) для $n = 5$, $d_1 = -1$, $d_2 = -0.5$, $d_3 = 0$, $d_4 = 0.5$, $d_5 = 1$.

12.5. Показать, что при малых ω полученные в предыдущих задачах формулы неудовлетворительны с точки зрения оценки вычислительной погрешности.

Вычисление интегралов от функций с особенностями. Существенную часть реально встречающихся подынтегральных функций составляют функции с особенностями, причем особенность может содержаться либо в функции, либо в ее производных. Если нерегулярность функции не вызвана колебательным характером ее поведения, то для вычисления больших серий интегралов такого типа применяется ряд специальных приемов: выделение особенности в весовую функцию, разбиение интеграла на части, аддитивное представление подынтегральной функции, замена переменных и т.д.

12.6. Пусть вычисляется интеграл $I(f) = \int\limits_0^1 f(x)dx$, причем $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = g(x)x^\alpha$, где $\alpha \in (0,1)$, $g(x)$ — гладкая функция, $g(0) \neq 0$. Построить квадратурную формулу вида

$$I(f) \approx \sum_{q=o}^{M} D_q f(qh)$$

с оценкой погрешности $\text{const} \cdot \max\limits_{x\in[0,1]} |g''(x)| \cdot M^{-2}$.

12.7. Пусть вычисляется интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)\lambda}{\lambda^2 + x^2}\,dx, \quad f \in C^{(2)}([0,1]), \quad |\lambda| \ll 1.$$

Показать, что при использовании составной формулы трапеций с постоянным шагом $h = \dfrac{1}{N}$ суммарная погрешность оценивается через $\text{const} \cdot \min\left(\dfrac{1}{N\lambda}, \dfrac{1}{(N\lambda)^2}\right)$.

12.8. Для вычисления интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)\lambda}{\lambda^2 + x^2}\,dx, \quad f \in C^{(1)}([0,1]), \quad |\lambda| \ll 1,$$

используется следующая квадратурная формула с постоянным шагом $h = \dfrac{1}{N}$:

$$I(f) \approx \sum_{j=1}^{M} f(\xi_j) \left[\arctan\left(\frac{jh}{b}\right) - \arctan\left(\frac{(j-1)h}{b}\right) \right],$$

где $(j-1)h \le \xi_j \le jh$. Получить оценку погрешности

$$|R^M| \le \mathrm{const} \cdot \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \cdot M^{-1}.$$

12.9. Как вычислять интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln x}{1+x^2} dx$ по составной квадратурной формуле с постоянным шагом h, чтобы погрешность имела порядок $O\left(h^2\right)$?

12.10. Как вычислять интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln x}{1+x^2} dx$ по составной квадратурной формуле с постоянным шагом h, чтобы погрешность имела порядок $O\left(h^4\right)$?

12.11. Как вычислять интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{e^x}{x^2+b^2} dx$, где $b \ll 1$?

12.12. Предложить квадратурную формулу для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 f(x) x^{-\alpha} \sin(\omega x) dx$, где $\alpha > 1$, $\omega \gg 1$, $f(0) \ne 0$.

12.13. Построить квадратурную формулу для вычисления интеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{f(x)}{1+x^2} dx$, где $|f(x)| \le \mathrm{const}$.

12.14. Построить квадратурную формулу для вычисления интеграла $\int\limits_0^\infty f(x) e^{-x} dx$, где $|f(x)| \le \mathrm{const}$.

12.15. Для вычисления интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx, \quad \left|f^{(k)}\right| \le 1, \quad k = 0, 1, 2,$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ построить квадратурную формулу с числом узлов, меньшим 100 (не проводя замену переменных).

12.16. Построить квадратурную формулу для вычисления с точностью 10^{-4} интегралов вида:

$$1)\ \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx; \quad 2)\ \int_0^1 f(x)\frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx$$

при условии, что $|f''(x)| \le 1$.

Глава IV
Матричные вычисления

§ 13. Векторные и матричные нормы

Нормой вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ называется функционал, обозначаемый $||\mathbf{x}||$ и удовлетворяющий следующим условиям:

$$||\mathbf{x}|| > 0\,, \quad \text{если} \quad \mathbf{x} \neq 0\,, \quad ||0|| = 0,$$
$$||\alpha \mathbf{x}|| = |\alpha|\, ||\mathbf{x}||,$$
$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \le ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$

Наиболее употребительны следующие нормы:

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad ||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Нормы $||\cdot||_{\mathrm{I}}$ и $||\cdot||_{\mathrm{II}}$ называются *эквивалентными*, если для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ справедливы неравенства с одними и теми же положительными постоянными c_1 и c_2:

$$c_1\, ||\mathbf{x}||_{\mathrm{II}} \le ||\mathbf{x}||_{\mathrm{I}} \le c_2\, ||\mathbf{x}||_{\mathrm{II}}.$$

Нормой матрицы A называется функционал, обозначаемый $||A||$ и удовлетворяющий следующим условиям:

$$||A|| > 0\,, \quad \text{если} \quad A \neq 0\,, \quad ||0|| = 0,$$
$$||\alpha A|| = |\alpha|\, ||A||,$$
$$||A + B|| \le ||A|| + ||B||,$$
$$||A\,C|| \le ||A||\, ||C||.$$

Пусть задана некоторая векторная норма $||\cdot||_V$. Тогда матричную норму можно определить как операторную:

$$||A|| = \sup_{||\mathbf{x}||_V \neq 0} \frac{||A\,\mathbf{x}||_V}{||\mathbf{x}||_V} = \sup_{||\mathbf{x}||_V = 1} ||A\,\mathbf{x}||_V.$$

В этом случае матричная норма называется *подчиненной* векторной норме $\|\cdot\|_V$.

13.1. Является ли выражение

$$\min(|x_1| + 2|x_2|, 2|x_1| + |x_2|)$$

нормой вектора $\mathbf{x}$ в $\mathbf{R}^2$?

13.2. Является ли выражение

$$\max_{t\in[0,1]} \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\, t^{k-1}\right|$$

нормой вектора $\mathbf{x}$ в $\mathbf{R}^n$?

13.3. Найти константы эквивалентности, связывающие нормы $\|\mathbf{x}\|_\infty$, $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$, а также векторы, на которых они достигаются.

13.4. Доказать, что если C — симметричная положительно определенная матрица, то $\sqrt{(C\mathbf{x},\mathbf{x})}$ можно принять за норму вектора $\mathbf{x}$. Найти константы эквивалентности, связывающие эту норму с нормой $\|\mathbf{x}\|_2$.

13.5. Найти матричные нормы, подчиненные векторным нормам $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_2$.

13.6. Показать, что модуль любого собственного значения матрицы не больше любой ее нормы.

13.7. Пусть A — вещественная $(n\times m)$-матрица, $\mathbf{x}$ — вещественный m-вектор и $\mathbf{y}$ — вещественный n-вектор. Доказать следующие три свойства спектральной нормы:

$$\|A\|_2 = \max_{\substack{\|\mathbf{x}\|_2=1\\ \|\mathbf{y}\|_2=1}} |\mathbf{y}^T A\mathbf{x}|,\ \|A^T\|_2 = \|A\|_2,\ \|A^T A\|_2 = \|AA^T\|_2 = \|A\|_2^2.$$

13.8. Пусть A — вещественная прямоугольная матрица. Показать, что умножение ее справа или слева на ортогональную матрицу Q соответствующих размеров не меняет ее спектральную норму.

13.9. Используя, что $\|A\|_1 = \max\limits_j \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$, показать справедливость неравенства

$$\|A\|_2^2 \le \|A\|_1 \|A\|_\infty.$$

13.10. Рассмотрим функцию от элементов матрицы

$$\eta(A) = \max_{i,j} |a_{i,j}|.$$

Показать, что $\eta(A)$ не может быть нормой в пространстве матриц (хотя и является нормой вектора в $\mathbf{R}^{n\times n}$).

13.11. Доказать, что выражение $M(A) = n\,\eta(A)$ является матричной нормой.

13.12. Доказать, что для вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $h > 0$ выражение $\|\mathbf{x}\|_h = \max\left(|x_1|, \dfrac{|x_2 - x_1|}{h}\right)$ является нормой. Найти матричную норму, подчиненную этой векторной норме.

13.13. Пусть $N(A) = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$. Показать, что $N(AB) \leq$ $\leq N(A)N(B)$, и найти константы эквивалентности, связывающие $N(A)$ и нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ $\|\cdot\|_\infty$.

13.14. Пусть числа $d_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\max\limits_k (d_k|x_k|)$ есть норма вектора $\mathbf{x}$. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

13.15. Пусть числа $d_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k|x_k|$ есть норма вектора $\mathbf{x}$. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

13.16. Пусть числа $d_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\, x_k^2}$ есть норма вектора $\mathbf{x}$. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

13.17. Доказать, что $\max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\left|\sum\limits_{k=1}^{i} x_k\right|\right)$ есть норма вектора $\mathbf{x}$. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

13.18. Пусть $M(A) = n \cdot \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$. Найти наилучшие константы C_1, C_2 в матричном неравенстве

$$C_1\, M(A) \leq \|A\|_2 \leq C_2\, M(A).$$

13.19. Пусть $M(A) = n \cdot \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$. Найти наилучшие константы C_1, C_2 в матричном неравенстве

$$C_1\, M(A) \leq \|A\|_1 \leq C_2\, M(A).$$

13.20. Пусть $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$. Доказать неравенство Иенсена:

$$\|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_q,\quad 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

13.21. Доказать, что при $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ справедливо равенство $\lim\limits_{p\to\infty} ||\mathbf{x}||_p = ||\mathbf{x}||_\infty$.

13.22. Доказать, что для любой нормы пространства $\mathbf{R}^n$ имеет место утверждение:

$$\mathbf{x}^k \to \mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x_i^k \to x_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

13.23. Пусть $||\cdot||$ — векторная норма в $\mathbf{R}^m$ и $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ — прямоугольная $m \times n$ матрица. Показать, что если ранг матрицы $\operatorname{rank}(A) = n$, то $||A\mathbf{x}||$ — векторная норма в $\mathbf{R}^n$.

13.24. Проверить, что $||\mathbf{x}||_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$, является нормой в пространстве $\mathbf{C}^n$ векторов с комплексными координатами. Показать, что при $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ справедливо неравенство $||\mathbf{x}||_p \leq$ $\leq c(||\mathrm{Re}[\mathbf{x}]||_p + ||\mathrm{Im}[\mathbf{x}]||_p)$, $c = \mathrm{const}$. Найти такую постоянную c_0, что $c_0(||\mathrm{Re}[\mathbf{x}]||_2 + ||\mathrm{Im}[\mathbf{x}]||_2) \leq ||\mathbf{x}||_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$.

13.25. Пусть $||\cdot||$ — некоторая норма в $\mathbf{R}^n$. Доказать, что равенство

$$||\mathbf{x}||_* = \max_{\mathbf{y}\neq 0} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{y}||}$$

также задает норму в $\mathbf{R}^n$, называемую двойственной к $||\cdot||$.

13.26. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и B — любая подматрица квадратной матрицы A. Доказать, что $||B||_p \leq ||A||_p$.

13.27. Доказать, что если $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, ..., d_k) \in \mathbf{R}^{m\times n}$, где $k =$ $= \min\{m, n\}$, то $||D||_p = \max\limits_i |d_i|$.

13.28. Пусть B — невырожденная матрица, $||\cdot||$ — некоторая норма в пространстве векторов размерности n. Доказать, что $||\mathbf{x}||_* = = ||B\mathbf{x}||$ также является нормой в пространстве векторов. Какая норма в пространстве матриц порождается нормой $||\mathbf{x}||_*$ в пространстве векторов?

13.29. Показать, что если A — невырожденная матрица, то

$$||A||^{-1} = \inf_{\mathbf{x}\neq 0} ||A\mathbf{x}||/||\mathbf{x}||.$$

13.30. Доказать неравенство $||A||_2 \leq ||A||^{1/2}||A^T||^{1/2}$ для любой нормы A, подчиненной какой-либо векторной норме.

13.31. Доказать, что если $A = A^T$, то

$$||A||_2 = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{(A\mathbf{x}, \mathbf{x})}{||\mathbf{x}||_2^2}.$$

13.32. Пусть $||\cdot||$ — норма в пространстве матриц, подчиненная некоторой норме векторов. Доказать, что для любых матриц A и B справедливо неравенство $||AB|| \leq ||A||\,||B||$.

13.33. Пусть $A = A^T > 0$ и $||\mathbf{x}||_A = (A\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$. Доказать, что для произвольного многочлена $p_m(t)$ степени $m \geq 0$ верно равенство

$$||p_m(A)||_A = ||p_m(A)||_2.$$

13.34. Пусть $A = A^T > 0$ и $F(\mathbf{x}) = 1/2(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{b}, \mathbf{x})$ — квадратичная функция. Доказать, что:

$$1) \quad F(\mathbf{x}) = 1/2||\mathbf{x} - \mathbf{x}^*||_A^2 - 1/2||\mathbf{x}^*||^2,$$

где $\mathbf{x}^*$ — точное решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

2) равенство $F(\mathbf{x}^*) = \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} F(x)$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^*$ — решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

3) для градиента функции $F(\mathbf{x})$ справедлива формула

$$\nabla F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}.$$

13.35. Доказать, что если $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x}$, то существует постоянная $\delta > 0$, не зависящая от $\mathbf{x}$, и такая, что $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq \delta||\mathbf{x}||^2$ для всех $\mathbf{x}$.

13.36. Привести пример положительно определенной в $\mathbf{R}^n$ матрицы, спектр которой не является вещественным.

13.37. Доказать, что нормы матрицы A, определенные равенствами $M(A) = n \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$ и $N(A) = (\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2)^{1/2}$, не подчинены никаким векторным нормам.

13.38. Показать, что для любого собственного значения $\lambda(A)$ невырожденной матрицы A справедлива оценка $1/||A^{-1}|| \leq |\lambda(A)|$.

13.39. Доказать, что для любого собственного значения $\lambda(A)$ матрицы A справедливо неравенство $|\lambda(A)| \leq \inf\limits_{k} ||A^k||^{1/k}$, где k — натуральное число.

13.40. Доказать, что если A — нормальная матрица ($AA^T = A^T A$), то $||A||_2 = \rho(A)$, где $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A.

13.41. Убедиться, что $n \times n$ - матрица A при $n \geq 2$ не определяется полностью квадратичной формой $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$, т.е. найдутся две не равные матрицы A и B, для которых $(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (B\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

§ 14. Элементы теории возмущений

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

с квадратной невырожденной матрицей A.

При ее решении в результате вычислений с конечной разрядностью вместо $\mathbf{x}$ получается *приближенное* решение $\tilde{\mathbf{x}}$, которое можно рассматривать как *точное* решение *возмущенной* системы

$$(A + \delta A)\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b},$$

где матрица возмущений δA мала в каком-либо смысле.

Другой источник ошибок в $\tilde{\mathbf{x}}$ определяется возмущениями δA и $\delta\mathbf{b}$ в элементах матрицы A и в компонентах вектора правой части $\mathbf{b}$ (например, вследствие ошибок округлений, возникающих в процессе ввода вещественных чисел в память компьютера).

Для оценки того, насколько приближенное решение $\tilde{\mathbf{x}}$ отличается от точного решения $\mathbf{x}$, используются нормы векторов и подчиненные нормы матриц, для которых норма единичной матрицы равна 1.

Пусть в системе $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ возмущается только вектор $\mathbf{b}$, т.е. вместо исходной системы решается возмущенная система $A\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$, и пусть $\tilde{\mathbf{x}}$ — точное решение возмущенной системы. Тогда для относительной ошибки в $\tilde{\mathbf{x}}$ верна оценка

$$\frac{||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||}{||\mathbf{x}||} \le ||A||\,||A^{-1}||\,\frac{||\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}||}{||\mathbf{b}||} = ||A||\,||A^{-1}||\,\frac{||\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}||}{||\mathbf{b}||}.$$

Величина $||A||\,||A^{-1}||$ называется *числом обусловленности* матрицы A и часто обозначается $\mathrm{cond}(A)$. Для вырожденных матриц $\mathrm{cond}(A) = \infty$. Конкретное значение $\mathrm{cond}(A)$ зависит от выбора матричной нормы, однако в силу их эквивалентности при практических оценках этим различием можно пренебречь.

Из приведенного выше неравенства следует, что даже если *вектор невязки* $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$ мал, относительные возмущения в решении могут быть большими, если $\mathrm{cond}(A)$ велико (такие матрицы называют *плохо обусловленными*).

14.1. Доказать неравенство

$$\frac{||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||}{||\mathbf{x}||} \le \mathrm{cond}(A)\,\frac{||\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}||}{||\mathbf{b}||} = \mathrm{cond}(A)\,\frac{||\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}||}{||\mathbf{b}||}.$$

14.2. Показать, что $\operatorname{cond}(A) \geq 1$ для любой матрицы A и $\operatorname{cond}_2(Q) = 1$ для ортогональной матрицы Q.

14.3. Можно ли утверждать, что если определитель матрицы мал, то матрица плохо обусловлена?

14.4. Пусть дана жорданова клетка порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $\operatorname{cond}_\infty(A)$ и оценить возмущение в компоненте x_1 решения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, если компонента b_n вектора $\mathbf{b}$ возмущена на ε.

14.5. Решается система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad |\varepsilon| \ll 1, \ \ t = -1.$$

После замены $x_1' = x_1$, $x_2' = \varepsilon x_2$, $x_3' = \varepsilon x_3$ для нахождения новых неизвестных x' возникает система $A'x' = b'$ с матрицей

$$A' = \begin{pmatrix} \varepsilon & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В каком случае число обусловленности меньше?

14.6. Пусть $A = A^T > 0$, $\lambda(A) \in [m, M]$ и $A \neq \beta E$. Доказать, что $\operatorname{cond}_2(A + \alpha E)$ монотонно убывает по α при $\alpha > 0$.

14.7. Существуют ли несимметричные матрицы, для которых справедливо неравенство: $\operatorname{cond}^2(A) = \operatorname{cond}(A^2) > 1$?

14.8. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{cond}_1(A)}{\operatorname{cond}_2(A)} \leq n.$$

14.9. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что данная матрица имеет наибольшее число обусловленности $\operatorname{cond}_2(A)$ из всех невырожденных матриц второго порядка, элементами которых являются положительные целые числа, меньшие или равные 100.

14.10. Пусть для некоторого $1 > \alpha > 0$ и элементов каждой строки i невырожденной матрицы A выполнено неравенство

$$\alpha\,|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Оценить снизу и сверху $\mathrm{cond}_\infty(A)$, используя только диагональные элементы матрицы.

14.11. Пусть R — треугольная матрица размера $n \times n$, у которой: 1) $|r_{ij}| \leq 1$ для всех i, j; 2) $r_{ii} = 1$ для всех i. Найти максимально возможное значение числа обусловленности $\mathrm{cond}_\infty(R)$.

14.12. Оценить снизу и сверху $\mathrm{cond}_\infty(A)$, используя границы сингулярных чисел невырожденной матрицы A размера $n \times n$: $\lambda(A^T A) \in [\alpha, \beta]$.

14.13. Оценить $\mathrm{cond}_2(A)$ $(n \times n)$-матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

14.14. Матрица Уилкинсона

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 20 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 20 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет наименьшее по модулю собственное значение, равное 1. Как оно изменится в результате возмущения первого элемента последней строки на величину $\varepsilon = 20^{-19} \cdot 20! \approx 5 \cdot 10^{-7}$?

14.15. Пусть E — единичная матрица и $||\delta E|| < 1$. Показать, что матрица $E - \delta E$ невырожденная и выполнена оценка

$$||(E - \delta E)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||\delta E||}.$$

14.16. Пусть E — единичная матрица и $||\delta E|| < 1$. Получить оценку отклонения матрицы E от матрицы $(E - \delta E)^{-1}$.

14.17. Пусть A — невырожденная матрица и $||A^{-1}\delta A|| < 1$. Показать, что матрица $A + \delta A$ невырожденная и выполнена оценка

$$||(A+\delta A)^{-1}|| \le \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}\delta A||}.$$

14.18. Пусть A — невырожденная матрица и $||A^{-1}\delta A|| < 1$. Получить оценку отклонения матрицы $(A+\delta A)^{-1}$ от A^{-1}.

14.19. Найти решения двух систем с близкими коэффициентами:

$$\begin{cases} x + 3y &= 4, \\ x + 3.00001y &= 4.00001; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y &= 4, \\ x + 2.99999y &= 4.00001; \end{cases}$$

и объяснить результат.

14.20. Пусть A — квадратная матрица порядка n с элементами $a_{ij} = \{p$ для $i = j$, q для $i = j-1$, 0 для остальных индексов $\}$. Вычислить матрицу A^{-1} и показать, что при $|q| < |p|$ матрица A хорошо обусловлена, а при $|q| > |p|$ и больших значениях n — плохо обусловлена.

14.21. Пусть A определена как в предыдущей задаче. Выразить явно решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ через правую часть.

14.22. Доказать, что $\mathrm{cond}(AB) \le \mathrm{cond}(A)\,\mathrm{cond}(B)$ для любой заданной нормы в определении числа обусловленности и для любых квадратных матриц.

14.23. Пусть

$$A_n(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица размерности $n \times n$. Доказать, что характеристическое уравнение матрицы $A_n(\alpha)$ имеет вид $\lambda^n = \alpha$. Сравнить собственные числа близких матриц $A_{20}(2^{-20})$ и $A_{20}(0)$.

14.24. Оценить снизу число обусловленности $\mathrm{cond}_2 A$ матрицы:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 30 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.03 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}; \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -400 \\ 0.2 & -2 & -20 \\ -0.04 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.25. Система $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 10^{-10} & 10^{-10} \\ 1 & 10^{-10} & 10^{-10} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2(1+10^{-10} \\ -10^{-10} \\ 10^{-10} \end{pmatrix},$$

имеет решение $x = (10^{-10}, -1, 1)$. Доказать, что если $(A+E)y = b$, $|E| \le 10^{-8}|A|$, то $|x - y| \le 10^{-7}$. Это означает, что относительно малые изменения в элементах матрицы A не приводят к большим изменениям в решении, хотя $\mathrm{cond}_\infty(A) = 10^{10}$.

14.26. Получить неравенство $\mathrm{cond}(A) \ge |\lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A)|$ для произвольной невырожденной матрицы A и любой матричной нормы, используемой при определении числа обусловленности. Верно ли, что если отношение соответствующих собственных чисел велико, то матрица обязательно будет плохо обусловленной?

14.27. Пусть $n \times n$ — матрица A такая, что $a_{ii} > \sum\limits_{j \ne i} |a_{ij}|, a_{ij} < 0$, при $j \ne i$. Доказать, что матрица A^{-1} имеет только положительные элементы.

14.28. Пусть $n \times n$ — матрица A такая, что $a_{ii} > \sum\limits_{j \ne i} |a_{ij}|$, $a_{ij} < 0$, при $j \ne i$. Пусть, далее, $C = A + \alpha E$, $\alpha > 0$. Доказать, что $(A^{-1})_{ij} > > (C^{-1})_{ij}$ $\forall i, j$.

§ 15. Метод простой итерации

Преобразуем систему линейных алгебраических уравнений

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

с невырожденной матрицей A к виду

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}. \tag{2}$$

Если решение системы (2) находится как предел последовательности

$$\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{c}, \tag{3}$$

то такой процесс называется *двухслойным итерационным методом*, или *методом простой итерации*. При этом B называется *оператором перехода*. Справедливы следующие теоремы о сходимости метода.

Если $\|B\| < 1$, то система уравнений (2) *имеет единственное решение и итерационный процесс* (3) *сходится к решению со скоростью геометрической прогрессии.*

Пусть система (2) *имеет единственное решение. Итерационный процесс* (3) *сходится к решению системы* (2) *при любом начальном* *приближении тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B по модулю меньше* 1.

Рассмотрим общий способ перехода от системы (1) к системе (2). Всякая система

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - D\,(A\,\mathbf{x} - \mathbf{b}) \tag{4}$$

имеет вид (2) и при $\det(D) \neq 0$ равносильна системе (1). В то же время всякая система (2), равносильная (1), записывается в виде (4) с матрицей $D = (E - B)\,A^{-1}$. Для систем со знакоопределенными матрицами метод (3) обычно строится в виде

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\,\mathbf{x}^k = \mathbf{b}, \qquad \text{т.е.} \quad B = E - \tau\,A, \quad \mathbf{c} = \tau\,\mathbf{b}.$$

Здесь τ — итерационный параметр.

15.1. Пусть элементы матрицы B имеют вид $b_{kj} = \frac{1}{2}\cdot 3^{-|k-j|}$. Доказать, что система $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ имеет единственное решение и метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

15.2. При каких α, β сходится метод простой итерации $\mathbf{x}^{k+1} = B\,\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$, где

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

15.3. Привести пример задачи $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ такой, что у матрицы B есть собственное значение λ вне единичного круга, но метод (3) сходится при *некотором* начальном приближении.

15.4. Пусть матрица B в методе (3) имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

Показать, что величина ошибки $\mathbf{e}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}$ в норме $\|\cdot\|_\infty$ начинает монотонно убывать лишь с некоторого номера итерации N. Оценить N при $\alpha = \beta \approx 1$.

15.5. Пусть все собственные значения матрицы A вещественны и положительны: $\lambda(A) > 0$. Доказать сходимость метода

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b}$$

при $\tau = \|A\|^{-1}$ с любой матричной нормой.

Для оценок собственных значений используется следующее утверждение (теорема Гершгорина):

Все собственные значения матрицы A принадлежат объединению кругов

$$|z - a_{ii}| \le \sum_{j \ne i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если указанное объединение кругов распадается на несколько связных частей, то каждая такая часть содержит столько собственных значений, сколько кругов ее составляют.

15.6. Доказать, что у матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 5 \end{pmatrix}$$

все собственные значения вещественны. Найти интервалы, которым принадлежат собственные числа.

15.7. Пусть A — матрица простой структуры, т.е. подобна диагональной ($A = Q^{-1}DQ$, где столбцы $\mathbf{q}_i$ матрицы Q есть собственные векторы матрицы A, а элементы диагональной матрицы D есть соответствующие собственные значения, т.е. $d_{ii} = \lambda_i$), и все $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$. Доказать, что метод

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b}$$

сходится при $0 < \tau < \dfrac{2}{M}$.

15.8. Пусть матрица в системе $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4.8 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что метод простой итерации $\mathbf{x}^{k+1} = (E - \tau A)\mathbf{x}^k + \tau\mathbf{b}$ сходится начиная с любого начального приближения при $0 < \tau < 2/5$.

15.9. Пусть матрица системы является симметричной и положительно определенной (это означает, что $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$). Для циклического итерационного метода длины N вида

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau_k} + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b}$$

с параметрами $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N, \tau_1, \ldots$ требуется найти их оптимальные последовательности, т.е. минимизирующие норму ошибки за весь цикл.

15.10. Пусть все собственные значения λ невырожденной матрицы A порядка n известны. Построить итерационный метод с переменным параметром τ_k, который не более чем за n шагов приводил бы к точному решению системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

15.11. Пусть у задачи $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей простой структуры имеется одно отрицательное собственное значение

$$\lambda_1 \in [-2-\varepsilon, -2+\varepsilon], \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

а остальные — положительны: $\lambda_i \in [1,3]$, $i = 2,\ldots,n$. Предложить итерационный метод для решения такой системы.

15.12. Для решения системы $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ рассмотрим алгоритм с некоторым начальным приближением $\mathbf{x}^0$:

$$\mathbf{z}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{c}, \quad \mathbf{x}^{k+1} = \alpha\mathbf{x}^k + (1-\alpha)\mathbf{z}^{k+1}.$$

Пусть $\lambda(B) \in [m, M]$, $m > 1$. Найти оптимальное значение итерационного параметра α.

15.13. Построить квадратную матрицу A размера 31×31 с элементами $|a_{ij}| \le 1$ и собственными значениями $|\lambda(A)| \le 1$ такую, что $\|A^{30}\|_\infty \ge 10^9$.

15.14. Для системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей $A = A^T > 0$, $\lambda(A) \in$ $\in [m, M]$ рассмотрим метод наискорейшего спуска

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha_k \mathbf{r}^k, \quad \alpha_k = \frac{(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{(A\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}.$$

Здесь $\mathbf{r}^k = A\mathbf{x}^k - \mathbf{b}$ — невязка на k-й итерации. Доказать справедливость неравенства для ошибки

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_2 \le \left(1 - \frac{m}{M}\right)^k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_2.$$

15.15. Пусть собственные числа симметричной матрицы B таковы, что $\lambda_1 = -\lambda_2$ и $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$. Построить аналог δ^2 – процесса Эйткена ускорения сходимости итерационного процесса $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{c}$.

15.16. Пусть A — невырожденная матрица размера $n \times n$ и X_0 — произвольная $n \times n$ матрица. Рассмотрим итерационный процесс:

$$X_{k+1} = X_k + X_k(E - AX_k), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ тогда и только тогда, когда спектральный радиус матрицы $E - AX_0$ меньше 1. При этом $E - AX_k =$

$= (E - AX_0)^{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$. Доказать также, что если $AX_0 = X_0 A$, то $AX_k = X_k A$ для всех k.

15.17. При каких значениях параметра τ метод

$$\mathbf{x}^{k+1} = (E - \tau A)\mathbf{x}^k + \tau \mathbf{b}$$

для системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 0.8 & 4 \\ 2.5 & 2 & 0 \\ 2 & 0.8 & 4 \end{pmatrix};\quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad 4)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1.2 & 0.8 \\ 1.4 & 2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

сходится с произвольного начального приближения?

15.18. Пусть собственные числа матрицы A таковы, что $\lambda_1 \approx \approx -1$, $\lambda_k \in [1, 5]$ для всех $k > 1$. Написать сходящийся итерационный процесс простой итерации для системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

15.19. Пусть $A = A^* > 0$. Написать наилучший по скорости сходимости итерационный процесс вида

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - P_1(A)(A\mathbf{x}^k - \mathbf{b}),\ \ P_1(t) = \alpha t + \beta.$$

15.20. Пусть итерации метода $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{f}, ||B|| < 1$, сходятся к решению $\mathbf{x}^*$ системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Доказать, что

$$||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*|| \le ||(E - B)^{-1}||\ ||\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k||.$$

15.21. Пусть итерации метода $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{f}, ||B|| < 1$, сходятся к решению $\mathbf{x}^*$ системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Доказать, что

$$||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*|| \le ||B||^k ||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*|| + ||B||^k ||\mathbf{f}||/(1 - ||B||).$$

15.22. Пусть $A = E - C$, $c_{ij} \ge 0$, $f_i \ge 0$. Доказать, что если решение $\mathbf{x}^*$ системы $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ неотрицательно, то итерации метода $\mathbf{x}^{k+1} = C\mathbf{x}^k + \mathbf{f}$, $\mathbf{x}^0 = 0$, сходятся к $\mathbf{x}^*$.

15.23. Пусть B — трехдиагональная неразложимая матрица, у которой сумма модулей элементов в строке удовлетворяет условию $\sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}| \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем строгое неравенство выполняется хотя бы в одной строке. Доказать, что итерационный метод $\mathbf{x}^{k+1} = C\mathbf{x}^k + \mathbf{f}$ сходится. (Неразложимая матрица не может быть приведена к блочно треугольному виду перестановкой одноименных строк и столбцов).

15.24. Найти область значений итерационного параметра τ, при которых итерационный процесс $\mathbf{x}^{k+1} = (E - \tau A)\mathbf{x}^k + \tau\mathbf{b}$ сходится, если $\mathrm{Re}\{\lambda(A)\} \geq \delta > 0$.

15.25. Исследовать сходимость метода $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{f}$ для решения системы уравнений с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & \dots & 1/2^n & 1/2^{n+1} \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/8 & \dots & 1/2^{n-1} & 1/2^n \\ 1/8 & 1/4 & 0 & 1/4 & \dots & 1/2^{n-2} & 1/2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2^{n+1} & 1/2^n & 1/2^{n-1} & \dots & \dots & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

15.26. Построить сходящийся метод простой итерации для системы уравнений с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15.27. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис пространства $\mathbf{R}^n$. Доказать сходимость с любого начального приближения следующего итерационного метода (метода оптимального координатного спуска) для системы уравнений с невырожденной матрицей A :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{(\mathbf{f} - A\mathbf{x}^k, A\mathbf{e}_j)}{\|A\mathbf{e}_j\|^2}, \quad j = \arg\min_l \frac{(\mathbf{f} - A\mathbf{x}^k, A\mathbf{e}_l)}{\|A\mathbf{e}_l\|}.$$

15.28. При каких условиях итерационный метод

$$\mathbf{x}^{k+1} = (2A^2 - E)\mathbf{x}^k + 2(A - E)\mathbf{f}$$

сходится быстрее метода простой итерации $\mathbf{x}^{k+1} = A\mathbf{x}^k + \mathbf{f}$?

15.29. Пусть λ и $\mathbf{e}$ — собственное число и соответствующий собственный вектор матрицы простой структуры A, $\mathbf{x}_0$ — начальное приближение в методе простой итерации для решения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Написать шаг метода простой итерации так, чтобы в разложении по собственным векторам ошибки метода на первой итерации коэффициент при векторе $\mathbf{e}$ был равен нулю.

§ 16. Методы релаксации

Представим матрицу системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ в виде $A = L + D + R$, где D — диагональная матрица, L и R — соответственно левая нижняя и правая верхняя треугольные матрицы с нулевыми диагоналями (строго нижняя и строго верхняя треугольные матрицы). Будем предполагать, что все диагональные элементы a_{ii} отличны от нуля, и, следовательно, любая матрица вида $D + \tau L$ с произвольным параметром τ обратима.

Методы Якоби, Гаусса — Зейделя и релаксации записываются в виде:

$$D\,\mathbf{x}^{k+1} + (L + R)\,\mathbf{x}^k = \mathbf{b},$$

$$(D + L)\,\mathbf{x}^{k+1} + R\,\mathbf{x}^k = \mathbf{b},$$

$$(D + \tau L)\,\mathbf{x}^{k+1} + [\tau R + (\tau - 1)\,D]\,\mathbf{x}^k = \tau\,\mathbf{b}.$$

Здесь итерационный параметр τ называется *параметром релаксации.*

16.1. Найти области сходимости методов Якоби и Гаусса — Зейделя для систем с матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

16.2. Доказать, что для систем линейных уравнений второго порядка ($n = 2$) методы Якоби и Гаусса — Зейделя сходятся и расходятся одновременно.

16.3. Пусть невырожденная матрица A обладает свойством диагонального преобладания, т.е. для всех i справедливо

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| \le q|a_{ii}|, \quad q < 1.$$

Тогда для ошибки в методе Гаусса — Зейделя имеет место неравенство

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_\infty \le q^k\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty.$$

16.4. Исследовать сходимость метода Гаусса — Зейделя для матриц с элементами:

$$1)\quad a_{kj} = 3^{-|k-j|};$$

$$2)\quad a_{kj} = \begin{cases} 2, & k = j, \\ -1, & |k-j| = 1, \\ 0, & |k-j| > 1. \end{cases}$$

16.5. Показать, что выполнение неравенства $0 < \tau < 2$ является необходимым для сходимости метода релаксации.

16.6. Пусть матрица A простой структуры имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$. Доказать, что при любом положительном значении итерационного параметра τ сходится метод следующего вида:

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\left(\frac{\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{x}^k}{2}\right) = \mathbf{b}.$$

Определить оптимальное значение τ_{opt}.

16.7. При каких $\alpha \in [0, 1]$ для матрицы из предыдущей задачи метод

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\left(\alpha\mathbf{x}^{k+1} + (1-\alpha)\mathbf{x}^k\right) = \mathbf{b}$$

сходится при любом $\tau > 0$?

16.8. Система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ решается методом Гаусса — Зейделя. Доказать, что:

если $|a| > 1$, то для некоторого начального приближения итерационный процесс расходится;

если $|a| < 1$, то итерации сходятся при любом начальном приближении.

16.9. Показать, что существует система уравнений третьего порядка, для которой метод Якоби сходится, а метод Гаусса — Зейделя расходится.

16.10. Показать, что существует система уравнений третьего порядка, для которой метод Гаусса — Зейделя сходится, а метод Якоби расходится.

16.11. Доказать, что обобщенный метод простой итерации

$$B\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A\mathbf{x}^k = \mathbf{b}, \quad A = A^T > 0, \ \det(B) \neq 0, \ \tau > 0,$$

сходится при условии $B - \frac{\tau}{2}A > 0$ $\left((B\mathbf{x}, \mathbf{x}) > \frac{\tau}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \neq 0\right)$.

16.12. Пусть $A = L + D + L^*$, где L — левая треугольная, а D — диагональная подматрицы A. Доказать, что метод релаксации сходится с любого начального приближения при $\tau \in (0, 2)$.

16.13. Пусть $B = L + U$, где L — нижняя треугольная матрица с нулями на диагонали, U — верхняя треугольная матрица. Пусть далее $\|B\|_\infty < 1$, так что итерационный процесс $\mathbf{x}^{k+1} = B\mathbf{x}^k + \mathbf{f}$ сходится. Доказать что метод $\mathbf{x}^{k+1} = L\mathbf{x}^{k+1} + U\mathbf{x}^k + \mathbf{f}$ также сходится.

16.14. Для системы уравнений

$$4u_{i,j} - u_{i+1,i} - u_{i-1,i} - u_{i,i+1} - u_{i,i-1} = h^2 f_{ij},$$
$$i, j = 1, 2, ..., n-1; \; nh = 1;$$
$$u_{0,i} = u_{i,0} = u_{n,i} = u_{i,n} = 0, \;\; i = 0, 1, ..., n$$

написать расчетные формулы и найти асимптотическую скорость сходимости следующих итерационных методов:

1) метода Якоби;

2) метода Гаусса — Зейделя;

3) метода верхней релаксации с оптимальным параметром релаксации;

4) Чебышевского циклического итерационного метода с длиной цикла 8.

16.15. Исследовать сходимость метода Якоби для решения системы уравнений с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -3 & 1 & -1.4 \\ 0.4 & 0.8 & 4 & 2.4 \\ -0.5 & 1.2 & -2.5 & -5 \end{pmatrix}.$$

16.16. Найти α, β, при которых метод Гаусса — Зейделя будет сходящимся для систем уравнений с матрицами:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

16.17. Пусть матрицы A_i, $i = 1, 2$, простой структуры имеют собственные значения $\lambda(A_i) \in [m, M]$, $m > 0$ и $A_1 A_2 = A_2 A_1$, $A = A_1 + A_2$. Доказать, что при любом положительном значении параметра τ сходится итерационный метод следующего вида для решения системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1/2} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A_1 \mathbf{x}^{k+1/2} + A_2 \mathbf{x}^k = \mathbf{b};$$

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k+1/2}}{\tau} + A_1 \mathbf{x}^{k+1/2} + A_2 \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{b}.$$

Определить оптимальное значение τ_{opt}.

16.18. Доказать сходимость итерационного процесса из предыдущей задачи, если матрицы A_1, A_2 удовлетворяют следующим условиям:

$$A_1A_2 \neq A_2A_1, \quad (A_i\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \text{ для } i = 1, 2.$$

16.19. Пусть матрицы A_i, $i = 1, 2$, простой структуры имеют собственные значения $\lambda(A_i) \in [m, M]$, $m > 0$ и $A_1A_2 = A_2A_1$, $A = A_1 + A_2$. Доказать, что при любом положительном значении итерационного параметра τ сходится итерационный метод следующего вида для решения системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1/2} - \mathbf{x}^k}{\tau} + A_1\mathbf{x}^{k+1/2} + A_2\mathbf{x}^k = \mathbf{b};$$

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k+1/2}}{\tau} + A_2(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = 0.$$

Определить оптимальное значение τ_{opt}.

16.20. Доказать сходимость итерационного процесса из предыдущей задачи, если матрицы A_1, A_2 удовлетворяют следующим условиям:

$$A_1A_2 \neq A_2A_1, \quad (A_i\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \text{ для } i = 1, 2.$$

16.21. Показать, что если матрица $A = M - N$ вырожденная, то нельзя получить $\rho(M^{-1}N) < 1$ ни для какой невырожденной матрицы M.

16.22. Доказать, что если итерации $M\mathbf{x}^{k+1} = N\mathbf{x}^k + \mathbf{b}$ всегда сходятся, то $\rho(M^{-1}N) < 1$.

16.23. Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ -1/12 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть B_1 и B_2 — соответствующие этим матрицам операторы перехода в итерационном методе Якоби. Показать, что $\rho(B_1) > \rho(B_2)$, т.е. опровергнуть мнение о том, что усиление диагонального преобладания влечет за собой более быструю сходимость метода Якоби.

§ 17. Задачи на собственные значения

Степенной метод вычисления максимального по модулю собственного значения матрицы A имеет вид:

$$\mathbf{x}^0 \neq 0; \; \mathbf{x}^{k+1} = A\mathbf{x}^k, \; \lambda^{k+1} = \frac{(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^k)}{\|\mathbf{x}^k\|_2^2}, \; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(Предполагается, что $\mathbf{x}^k \neq 0$ при всех $k \geq 1$.)

17.1. Пусть A — матрица простой структуры (собственные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ матрицы образуют базис в $\mathbf{C}^n$). Пусть далее $|\lambda_{\max}| \equiv |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \geq \lambda_n$ и L — линейная оболочка $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, ..., \mathbf{e}_n$. Доказать, что в случае симметричной матрицы для степенного метода при условии $\mathbf{x}^0 \notin L$ справедлива оценка

$$\lambda^k = \lambda_1 + O(|\lambda_2/\lambda_1|^{2k}).$$

17.2. Доказать, что при $\mathbf{x}^0 \notin L$ для степенного метода справедливо соотношение $\lambda^k = \lambda_1 + O(|\lambda_2/\lambda_1|^k)$.

17.3. Пусть A — симметричная матрица с собственными значениями $\lambda_1 \approx 5$, $1 \leq \lambda_i \leq 3$ при $i = 2, 3, ..., n$. Построить итерационный процесс вида $\mathbf{x}^{k+1} = (A + cE)\mathbf{x}^k, c = \text{const}$, E — единичная матрица, для получения λ_1 с наилучшей при данной информации скоростью сходимости.

17.4. Пусть A — симметричная матрица с собственными значениями $\lambda_1 \approx 1$, $1 \leq \lambda_i \leq 3$ при $i = 2, 3, ..., n$. Построить итерационный процесс вида $\mathbf{x}^{k+1} = (A + cE)\mathbf{x}^k, c = \text{const}$, E — единичная матрица, для получения λ_1 с наилучшей при данной информации скоростью сходимости.

17.5. Собственные числа симметричной матрицы A удовлетворяют соотношениям $\lambda_1 \approx 5$, $-1 \leq \lambda_i \leq 3$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Выбрать постоянную c так, чтобы итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{k+1} = A\mathbf{x}^k + c\mathbf{x}^k, \ \lambda_1^k = -c + \frac{(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^k)}{(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k)}$$

давал наилучшую информацию о λ_1.

17.6. Пусть $n \times n$ матрица A имеет n различных собственных значений. Предположим, что $\mathbf{x}^0$ принадлежит линейной оболочке некоторых собственных векторов $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_t}$, но не принадлежит никакой их линейной подоболочке. К какому собственному значению матрицы сходятся итерации степенного метода и с какой скоростью?

17.7. Пусть A — симметричная $n \times n$ матрица, $\lambda \in R$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ — произвольные число и вектор, причем $||\mathbf{x}||_2 = 1$. Доказать, что существует собственное число λ_k матрицы A, для которого $|\lambda_k - \lambda| \leq$ $\leq ||A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}||_2$.

17.8. Показать, что для максимального и минимального собственных чисел симметричной матрицы A справедливы оценки:

$$\lambda_{\min}(A) \leq \min_{1 \leq i \leq n} a_{ii}; \qquad \lambda_{\max}(A) \geq \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}.$$

17.9. Пусть задана матрица $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ с собственными значениями $\{\lambda_i\}$. Показать, что для их абсолютных величин имеют место оценки

$$\min_{\mathbf{x}\neq 0}\left|\frac{(A\mathbf{x},\mathbf{x})}{(\mathbf{x},\mathbf{x})}\right| \le |\lambda_i| \le \max_{\mathbf{x}\neq 0}\left|\frac{(A\mathbf{x},\mathbf{x})}{(\mathbf{x},\mathbf{x})}\right|, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

даже если A не является эрмитовой.

17.10. Доказать, что у вещественной трехдиагональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

все собственные значения вещественны, если

$$a_{i+1}c_i > 0\,, \quad i = 1,2,\ldots,n-1\,.$$

17.11. Доказать, что у трехдиагональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

$|\lambda_k(A)| < 1\ \forall k$, если $|a_i| + |b_i| + |c_i| \le 1\ \forall i$, $a_1 = c_n = 0$ и если хотя бы для одного значения индекса i неравенство строгое, а $a_{i+1}c_i \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,n-1$.

17.12. Доказать, что для квадратных матриц A, B одинакового размера спектры матриц AB и BA совпадают.

17.13. Пусть A и B — матрицы размера $m\times n$ и $n\times m$ соответственно, $m \ge n$, $P_C(\lambda) = \det(\lambda E - C)$ — обозначение характеристического многочлена квадратной матрицы C. Доказать справедливость равенства

$$P_{AB}(\lambda) = \lambda^{m-n}P_{BA}(\lambda)\,.$$

17.14. Доказать, что если матрицы A и B коммутируют, то существует собственное число $\lambda(AB)$, равное произведению собственных чисел $\lambda(A)\lambda(B)$.

17.15. Доказать, что если A — симметричная и положительно определенная матрица, а B — симметричная матрица, то все собственные числа $\lambda(AB)$ матрицы AB вещественные.

17.16. Доказать, что если A, B — симметричные и положительно определенные матрицы, то все собственные числа $\lambda(AB)$ матрицы AB положительные.

17.17. Доказать, что если A — симметричная и положительно определенная матрица, а B — симметричная матрица, то система собственных векторов матрицы AB полна.

17.18. Пусть A — симметризуемая матрица, т.е. существует невырожденная матрица T такая, что TAT^{-1} — симметричная матрица. Доказать, что система собственных векторов матрицы A полна.

17.19. Доказать, что если A, B — симметричные и положительно определенные, коммутирующие матрицы, то матрица AB положительно определена.

17.20. Доказать положительную определенность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4.5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-3 & 1/2(4n-3) \end{pmatrix}.$$

17.21. Доказать положительную определенность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1/2 & -1/3 \\ -1 & 3 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 4 & 2 \\ -1/3 & -1/2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

17.22. Доказать положительную определенность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 3 & -2 \\ -6 & 18 & -6 & 6 \\ 3 & -6 & 24 & 15 \\ -2 & 6 & 15 & 20 \end{pmatrix}.$$

17.23. Пусть обе матрицы $A, A^T \in \mathbf{R}^{n\times n}$ имеют строгое диагональное преобладание и положительные диагональные элементы. Доказать, что A положительно определена.

17.24. Построить пример симметричной положительно определенной 3×3 матрицы, трехдиагональная часть которой не является положительно определенной.

17.25. Доказать, что если A, B — симметричные $n \times n$ матрицы, то необходимым и достаточным условием равенства $AB = BA$ является существование базиса в пространстве $\mathbf{R}^n$, составленного из общих собственных векторов матриц A и B.

17.26. Пусть $A = A^T > 0$. Доказать, что

$$\lambda_{\max}(A) = \max R_A(\mathbf{x}); \qquad \lambda_{\min}(A) = \min R_A(\mathbf{x}),$$

где $R_A(\mathbf{x}) = \dfrac{(A\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ — отношение Рэлея.

17.27. Пусть $A = A^T > 0$. Доказать, что если $\lambda_{\max}(A) = a_{kk}$ при некотором $1 \le k \le n$, то $a_{ik} = a_{kj} = 0$ при всех $i \ne k$, $j \ne k$.

17.28. Доказать, что если для некоторого i и при всех j выполняются неравенства

$$|a_{ii} - a_{jj}| > \sum_{k \ne i} |a_{ik}| + \sum_{k \ne j} |a_{jk}|,$$

то в области $|\lambda - a_{ii}| \le \sum\limits_{k \ne j} |a_{ik}|$ лежит точно одно собственное значение матрицы A.

17.29. Доказать, что каждое собственное значение матрицы A лежит по крайней мере в одной из следующих областей:

$$|\lambda - a_{ii}||\lambda - a_{jj}| \le \sum_{k \ne i} |a_{ik}| \sum_{k \ne j} |a_{jk}|, \ i \ne j.$$

17.30. Доказать, что каждое собственное значение матрицы A лежит по крайней мере в одной из областей:

$$|\lambda - a_{ii}| \le \left(\sum_{k \ne i} |a_{ik}| \right)^{\alpha} \left(\sum_{k \ne j} |a_{jk}| \right)^{1-\alpha}, \ i \ne j, \ \alpha \in [0, 1].$$

17.31. Пусть

$$A_n(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

— матрица размера $n \times n$. Доказать следующие равенства:

$$1) \det A_{n+1}(a, b) = a \det A_n(a, b) - b^2 \det A_{n-1}(a, b), \ \ n \ge 2;$$

$$2)\ \det A_n(a,b) = \left(\left(a/2 + \sqrt{a^2/4 - b^2}\right)^{n+1} - \right.$$

$$\left. - \left(a/2 - \sqrt{a^2/4 - b^2}\right)^{n+1}\right) / 2\sqrt{a^2/4 - b^2}, \ \ n \geq 1;$$

$$3)\ \det A_n(a,b) = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_{n+1}^{2k+1} (a^2/4 - b^2)^k (a/2)^{n-2k}, \ \ k \geq 1.$$

17.32. Пусть матрица $A_n(a,b)$ определена как и в предыдущей задаче. Найти все ее собственные числа и собственные векторы.

17.33. Пусть матрица $A_n(a,b)$ определена как и в предыдущей задаче. Доказать, что она положительно определена тогда и только тогда, когда $a - 2\,|b| \cos \dfrac{\pi}{n+1} > 0$.

17.34. Предположим, что матрица $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ — симметричная и положительно определенная.

1) Показать, что существует единственная симметричная и положительно определенная матрица X такая, что $A = X^2$.

2) Показать, что если $X_0 = I$, $X_{k+1} = (X_k + AX_k^{-1})/2$, то $X_k \to \sqrt{A}$, где $\sqrt{A}$ означает матрицу X из 1).

17.35. Предположим, что матрица $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ — симметричная и положительно определенная. Рассмотрим следующие итерации:

$$A_0 = A$$

$$\mathit{for}\ k = 1, 2, \ldots$$

$$A_{k-1} = G_k G_k^T \ \text{(разложение Холецкого)}$$

$$A_k = G_k^T G_k$$

$$\mathit{end}$$

1) Показать, что эти итерации сходятся;

2) Показать, что если матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a \geq c,$$

имеет собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$, то матрицы A_k сходятся к матрице $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Глава V
Решение нелинейных уравнений

Итерационные методы вычисления *изолированного* (отделенного от других) корня z уравнения $f(x) = 0$, как правило, требуют указания какой - либо области D, содержащей этот единственный корень.

Широко используемые способы отделения корней — графический и табличный — базируются на свойствах гладкости функции; в случае, когда $f(x)$ является алгебраическим полиномом степени n, имеются аналитические подходы.

Если $f(x)$ — непрерывна, то вещественный корень z принадлежит любому отрезку, на концах которого, функция имеет значения разных знаков. Деля отрезок пополам, получаем универсальный метод вычисления корня (метод бисекции). Этот подход не требует знания хорошего начального приближения. Если оно имеется, то для гладких функций используются более эффективные методы.

Пусть отыскивается единственный на отрезке $[a, b]$ корень z уравнения $f(x) = 0$ в предположении непрерывности функции $f(x)$. Если в его окрестности функция представляется в виде $f(x) = (x - z)^p g(x)$, где p — натуральное, а $g(x)$ — ограниченная функция такая, что $g(z) \neq 0$, то p называют *кратностью* корня. Если $p = 1$, то корень называют *простым*. При нечетном p функция $f(x)$ меняет знак на $[a, b]$, т.е. $f(a)f(b) < 0$, а при четном p — нет.

Итерационный метод решения порождает последовательность приближений $\{x_n\}$, которая сходится к корню: $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - z| = 0$. Величину $e_n = x_n - z$ называют *абсолютной ошибкой* на n-й итерации. Итерационный метод имеет *порядок* m (или *скорость сходимости* m), если m есть наибольшее положительное число, для которого существует такая конечная постоянная $q > 0$, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{e_{n+1}}{e_n^m} \right| \leq q < \infty.$$

Постоянную q называют *константой асимптотической ошибки*, она обычно оценивается через производные функции $f(x)$ в точке $x = z$.

При $m = 1$ ($q \in (0,1)$) сходимость называется *линейной* (иногда говорят, что в этом случае метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q), при $1 < m < 2$ — *сверхлинейной*, при $m = 2$ — *квадратичной* и т.д.

§ 18. Метод простой итерации и смежные вопросы

Исходное уравнение $f(x) = 0$ часто заменяют эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x).$$

Эту замену можно сделать, положив, например,

$$\varphi(x) = x + \psi(x)f(x),$$

где $\psi(x)$ — произвольная непрерывная знакопостоянная функция.

Метод простой итерации. Выберем некоторое начальное приближение $x_0 \in [a,b]$ к корню z, а дальнейшие приближения будем вычислять по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Последовательность x_n стремится к z, например, когда отображение $y = \varphi(x)$ является сжимающим, т.е. при некотором $0 < q < 1$ выполнено условие $\rho\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) \le q\,\rho\left(x_1, x_2\right)$ при всех x_1, x_2. Здесь $\rho\left(x_1, x_2\right)$ — расстояние между x_1 и x_2.

Метод секущих. Пусть x_{n-1} и x_n — два последовательных приближения к корню. Заменим кривую $y = f(x)$ прямой, проходящей через точки $\left(x_{n-1}, f(x_{n-1})\right)$ и $\left(x_n, f(x_n)\right)$. В качестве следующего приближения к корню возьмем точку пересечения этой прямой с осью абсцисс. Расчетная формула принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n).$$

Метод хорд. Пусть $f(a)f(b) < 0$. Идея метода (его еще называют методом *ложного положения*) состоит в замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через концы отрезков, в которых $f(x)$ имеет противоположные знаки. Метод хорд требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца x_0 выбирают тот конец отрезка, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком второй производной $f''(x)$. Расчетная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}\,(x_n - x_0).$$

Метод парабол. Пусть x_{n-1}, x_{n-1} и x_n — три последовательных приближения к корню. Заменим кривую $y = f(x)$ параболой, проходящей через точки $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и $(x_n, f(x_n))$. В качестве следующего приближения к корню возьмем ближайшую к x_n точку пересечения этой параболы с осью абсцисс. Этот подход исключительно эффективен для нахождения корней многочлена как с действительными, так и с комплексными коэффициентами.

18.1. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень z и для его вычисления используется метод простой итерации. Показать, что если $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, b]$ и $|\varphi'(x)| \le q < 1$ на этом отрезке, то для любого начального приближения $x_0 \in [a, b]$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню z.

18.2. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет корень на отрезке $[a, b]$, причем $f(x)$ дифференцируема, а $f'(x)$ знакопостоянна на этом отрезке. Требуется построить равносильное уравнение вида $x = \varphi(x)$, для которого на $[a, b]$ выполнено достаточное условие сходимости метода простой итерации $|\varphi'(x)| \le q < 1$.

18.3. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом простой итерации.

18.4. Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{20}$$

сходится.

18.5. Оценить скорость сходимости метода хорд.

18.6. Пусть z — простой корень уравнения $f(x) = 0$. Оценить скорость сходимости метода секущих.

18.7. Доказать, что все корни уравнения

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

расположены в кольце

$$\frac{|a_n|}{b + |a_n|} \le |z| \le 1 + \frac{c}{|a_0|},$$

где $b = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, $c = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}$.

18.8. Доказать, что если при $x = a$ имеют место неравенства

$$f(a) > 0\,, f'(a) > 0\,, \ldots, f^{(n)}(a) > 0\,,$$

то уравнение

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

не имеет корней, больших a.

18.9. Найти границы действительных корней уравнения

$$x^4 - 35\,x^3 + 380\,x^2 - 1350\,x + 1000 = 0\,.$$

18.10. Пусть $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ для любого $x_0 \geq 2$.

18.11. Доказать, что итерационный процесс $x_{n+1} = \cos x_n$ сходится для любого начального приближения $x_0 \in \mathbf{R}^1$.

18.12. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ в зависимости от выбора начального приближения x_0.

18.13. Уравнение $x = 2^x$, имеющее два корня $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$, решается методом простой итерации. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0.

18.14. Доказать, что метод простой итерации для решения уравнения $x = \varphi(x)$ сходится при любом начальном приближении:

$$1)\varphi(x) = \alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 + \gamma\,, \quad \text{где} \quad |\alpha - \beta| < 1\,;$$

$$2)\varphi(x) = a\,e^{-b\,x^2} + c\,, \quad \text{где} \quad b \geq 0\,,\ 2a^2b < e\,.$$

18.15. Уравнение $x + \ln x = 0$, имеющее корень $z \approx 0.6$, предлагается решать одим из методов простой итерации:

$$1)x_{n+1} = -\ln x_n\,; \quad 2)x_{n+1} = e^{-x_n}\,;$$

$$3)x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}\,; \quad 4)x_{n+1} = \frac{3x_n + 5e^{-x_n}}{8}\,.$$

Исследовать эти методы и сделать выводы о целесообразности использования каждого из них.

18.16. Пусть $\varphi(x) \in C^{(1)}[z - \delta, z + \delta]$, где z — единственная неподвижная точка для $\varphi(x)$. Может ли метод простой итерации сходиться к z, если $|\varphi'(z)| = 1$? Может ли он расходиться в этом случае?

18.17. Выяснить, существует ли для всякого a единственное решение z_ε уравнения $x + \varepsilon\,\sin x + a = 0$ при $|\varepsilon| \leq 1$.

18.18. Найти область сходимости метода простой итерации для следующих уравнений:

$$1)x = e^{2x} - 1\,; \quad 2)x + \ln x = \frac{1}{2}\,; \quad 3)x = \operatorname{tg} x\,.$$

18.19. Выписать расчетные формулы метода парабол.

18.20. Методом парабол найти корни уравнения $2x + \lg x = -0.5$ с точностью 10^{-2}.

18.21. Оценить скорость сходимости метода парабол.

18.22. Оценить скорость сходимости метода секущих в случае m-кратного корня.

18.23. Пусть отображение $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ имеет единственную неподвижную точку $\mathbf{z} = \varphi(\mathbf{z})$ и непрерывно дифференцируемо в некоторой ее окрестности.

1) Доказать, что если все собственные значения его якобиана $\varphi'(\mathbf{x})$ в точке z по модулю больше 1, то метод простой итерации расходится.

2) Известно, что хотя бы одно собственное значение якобиана $\varphi'(\mathbf{z})$ по модулю больше 1. Может ли метод простой итерации сходиться для всех приближений $\mathbf{x}_0$, достаточно близких к $\mathbf{z}$?

§ 19. Метод Ньютона. Итерации высшего порядка

Метод Ньютона. В случае одного уравнения формула метода Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Метод состоит в замене дуги кривой $y = f(x)$ на касательную к ней в процессе каждой итерации. Это видно из уравнения касательной, проведенной в точке $\big(x_n, f(x_n)\big)$:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

из которого формула итерационного процесса следует, если положить $y = 0$ и $x = x_{n+1}$.

Рассмотрим более общий случай — системы m нелинейных уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0\,,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T$, $\quad \mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_m)^T$. Будем предполагать отображение $\mathbf{F} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ непрерывно дифференцируемым в некоторой окрестности решения $\mathbf{z}$, так что

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right].$$

В предположении обратимости этого оператора метод Ньютона можно записать в виде

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \left(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)\right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_n).$$

Обозначим $\Omega_a = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < a\}$. Пусть при некоторых a, a_1, a_2 : $0 < a$, $0 \le a_1, a_2 < \infty$, выполнены условия:

$$1) \quad \|(\mathbf{F}'(\mathbf{x}))^{-1}\| \le a_1 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in \Omega_a;$$

$$2) \ \|\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\| \le a_2\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 \quad \text{при } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \Omega_a.$$

Обозначим также $c = a_1 a_2$, $b = \min\left(a, c^{-1}\right)$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbf{R}^m$.

Теорема *(о сходимости метода Ньютона). При условиях* 1), 2) *и* $\mathbf{x}_0 \in \Omega_b$ *итерационный процесс Ньютона сходится с оценкой погрешности*

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}\| \le c^{-1}\left(c\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}\|\right)^{2^n}.$$

Метод Чебышева построения итераций высшего порядка. Пусть z — корень уравнения $f(x) = 0$ и $F(y)$ — обратная к $f(x)$ функция. Тогда $x \equiv F(f(x))$ и $z = F(0)$. Разложим $F(0)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой произвольной точки y :

$$z = F(0) = F(y) + \sum_{k=1}^{m} F^{(k)}(y)\frac{(-y)^k}{k!} + \ldots.$$

Положим

$$z = \varphi_m(x) = x + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k F^{(k)}(f(x))\frac{(f(x))^k}{k!}.$$

Итерационный процесс $x_{j+1} = \varphi_m(x_j)$ имеет порядок сходимости $m+1$.

19.1. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления $\sqrt[p]{a}$, $a > 0$, где p — вещественное число.

19.2. Пусть уравнение $f(x)$ имеет на отрезке $[a,\ b]$ простой корень, причем $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Показать, что при этих условиях метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

19.3. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень z кратности p, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Показать, что при этих условиях метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $(p-1)/p$.

19.4. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень z кратности p, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

19.5. Построить метод Ньютона для вычисления числа $\dfrac{1}{a}$ так, чтобы расчетные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a > 0$.

19.6. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень z неизвестной кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона с квадратичной скоростью сходимости и предложить способ численной оценки величины кратности корня.

19.7. Пусть для решения уравнения $x^3 - x = 0$ применяется метод Ньютона. При каком начальном приближении он сходится и к какому корню?

19.8. Доказать, что если на $[a, b]$ $f'(x)$ не обращается в нуль, $f''(x)$ не меняет знака и выполнены условия:

$$f(a)f(b) < 0\,, \quad \max\left[\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right] \le b - a\,,$$

то метод Ньютона решения уравнения $f(x) = 0$ сходится при любом $x_0 \in [a, b]$.

19.9. Определить область сходимости метода решения уравнения $x = 1/a$, не содержащего операций деления:

$$x_{n+1} = (1 + C)\,x_n - a\,C\,x_n^2\,,$$

где $C \ne 0$ — параметр.

19.10. Рассматривается метод Ньютона вычисления $\sqrt{a}$ при $1 \le a \le 4$, x_0 полагается равным значению многочлена наилучшего равномерного приближения для $\sqrt{a}$ на $[1, 4]$: $x_0 = p_1(a) = \dfrac{17}{24} + \dfrac{a}{3}$. Доказать справедливость оценки $|x_4 - \sqrt{a}| \le 0.5 \cdot 10^{-25}$.

19.11. Для нахождения $a^{1/3}$ используется итерационный процесс

$$x_{n+1} = A\,x_n + B\,\frac{a}{x_n^2} + C\,\frac{a^2}{x_n^5}\,.$$

Найти значения параметров A, B, C, обеспечивающие максимальный порядок сходимости.

19.12. Построить методом Чебышева итерационный процесс третьего порядка.

19.13. Показать, что метод вычисления $a^{1/m}$:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ \varphi(x) = x\,\frac{(m-1)x^m + (m+1)a}{(m+1)x^m + (m-1)a}$$

имеет третий порядок.

19.14. Определить порядок сходимости метода

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)(f(x_n))^2}{2(f'(x_n))^3}.$$

19.15. Определить порядок сходимости модифицированного метода Ньютона $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$.

19.16. Определить порядок сходимости метода

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)\right)}{f'(x_n)}.$$

19.17. Для нахождения простого нуля z функции $f(x) \in C^{(4)}$ используется итерационный процесс

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_{n+1} + v_{n+1}\right)\,,$$

где

$$y_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad v_{n+1} = x_n + \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}\,,\ g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Доказать, что если метод сходится, то скорость — кубичная.

19.18. Для нахождения нуля z функции $f(x)$ используется итерационный процесс

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \quad g(x) = x - \frac{f^2(x)}{f(x + f(x)) - f(x)}\,.$$

Исследовать поведение функции $g(x)$ в окрестности точки z.

19.19. Написать формулу метода Ньютона для систем:

$$1)\ \begin{cases} \sin(x+y) - 1.3x &= 0.1, \\ x^2 + y^2 &= 1; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x^{10} + y^{10} &= 1024, \\ e^x - e^y &= 1. \end{cases}$$

19.20. Указать начальное приближение и оценить число итераций в методе Ньютона, требующихся для достижения точности 10^{-3} для системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - y^2 &= 1, \\ xy^3 - y &= 4. \end{cases}$$

19.21. Проверить, что $\mathbf{z} = (1,1,1)^T$ — одно из решений системы уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, где $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1x_2^3 + x_2x_3 - x_1^4 - 1 \\ x_2 + x_2^2 + x_3 - 3 \\ x_2x_3 - 1 \end{bmatrix}.$$

Будет ли метод Ньютона сходится к $\mathbf{z}$ при достаточно близких начальных приближениях?

19.22. Для решения нелинейной краевой задачи

$$y'' = f(x,y) \quad \text{при} \quad x \in (0,X),$$
$$y(0) = a, \quad y(X) = b,$$

рассматривается система нелинейных алгебраических уравнений с параметром $h = X/N$:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f(x_k, y_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$y_0 = a, \quad y_N = b.$$

Здесь y_k — приближения к значениям $y(kh)$. Выписать расчетные формулы метода Ньютона для решения приведенной системы. Указать способ их реализации:

1)$f(x,y) = x^2 + y^3$; 2)$f(x,y) = y^2\exp(x)$; 3)$f(x,y) = \sin(y)\cos(x)$.

Глава VI
Разностные уравнения

Пусть неизвестная функция y и заданная функция f являются функциями одного целочисленного аргумента. Тогда линейное уравнение

$$a_0 y(k) + a_1 y(k+1) + \cdots + a_n y(k+n) = f(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — постоянные коэффициенты и $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, называется *линейным разностным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*. Если в этом уравнении положить $y(k+i) = y_{k+i}$ и $f(k) = f_k$, то оно принимает вид

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + \cdots + a_n y_{k+n} = f_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Для однозначного определения решения требуется задать n условий, например,

$$y_i = b_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Отметим аналогию между разностными уравнениями и обыкновенными дифференциальными уравнениями. Так, например, рассматриваемому уравнению соответствует линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = f(x).$$

§ 20. Однородные разностные уравнения

Если в разностном уравнении правая часть f_k равна нулю, то уравнение называется *однородным*. Напомним, как ищется общее решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Положим $y(x) = \exp(\lambda x)$. После подстановки этого выражения в дифференциальное уравнение и сокращения на $\exp(\lambda x)$ получим характеристическое уравнение

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0.$$

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные корни этого уравнения кратности $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ соответственно, то общее решение можно записать в виде

$$y(x) = c_{11}e^{\lambda_1 x} + c_{12}xe^{\lambda_1 x} + \cdots + c_{1\sigma_1}x^{\sigma_1 - 1}e^{\lambda_1 x} + \cdots$$

$$\cdots + c_{r1}e^{\lambda_r x} + c_{r2}xe^{\lambda_r x} + \cdots + c_{r\sigma_r}x^{\sigma_r - 1}e^{\lambda_r x},$$

где c_{ij} — произвольные постоянные.

Аналогично ищется решение разностного уравнения. Положим $y_k = \mu^k$. После подстановки этого выражения в разностное уравнение и сокращения на μ^k получим характеристическое уравнение

$$p(\mu) = \sum_{j=0}^{n} a_j \mu^j = 0.$$

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — его различные корни, а $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — их кратности. Тогда общее решение однородного разностного уравнения представляется в виде

$$y_k = c_{11}\,\mu_1^k + c_{12}\,k\,\mu_1^k + \cdots + c_{1\sigma_1}\,k^{\sigma_1 - 1}\,\mu_1^k + \cdots$$

$$\cdots + c_{r1}\,\mu_r^k + c_{r2}\,k\,\mu_r^k + \cdots + c_{r\sigma_r}\,k^{\sigma_r - 1}\,\mu_r^k,$$

где c_{ij} — произвольные постоянные. Таким образом, каждому корню μ кратности σ соответствует набор частных решений вида

$$\mu^k, k\mu^k, \ldots, k^{\sigma - 1}\mu^k.$$

20.1. Найти общее решение уравнения

$$by_{k+1} - cy_k + ay_{k-1} = 0.$$

20.2. Найти общее действительное решение уравнения

$$y_{k+1} - y_k + 2y_{k-1} = 0.$$

20.3. Верно ли, что любое решение разностного уравнения

$$y_{k+1} - 5y_k + 6y_{k-1} = 0$$

удовлетворяет уравнению

$$y_{k+1} - 9y_k + 27y_{k-1} - 23y_{k-2} - 24y_{k-3} + 36y_{k-4} = 0?$$

20.4. Пусть φ_k и z_k — два частных решения уравнения

$$a_1 y_{k+1} + a_0 y_k + a_{-1} y_{k-1} = 0, \quad a_1, a_{-1} \neq 0.$$

Доказать, что определитель матрицы

$$A_k = \begin{pmatrix} \varphi_k & \varphi_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{pmatrix}$$

либо равен нулю, либо отличен от нуля для всех k одновременно.

20.5. Показать, что если $-1 < \lambda < 1$, то любое решение разностного уравнения

$$y_{k+1} - 2\lambda y_k + y_{k-1} = 0$$

ограничено при $k \to \infty$. Если же λ — любое комплексное число, не принадлежащее интервалу действительной оси $-1 < \lambda < 1$, то среди решений этого разностного уравнения есть неограниченные при $k \to \infty$.

20.6. Найти решение задачи

$$y_{k+4} + 2y_{k+3} + 3y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k = 0, \quad y_0 = y_1 = y_3 = 0, \; y_2 = -1.$$

20.7. Показать, что для чисел Фибоначчи f_k:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1}, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1,$$

справедливо

$$f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

20.8. Вычислить определитель:

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} b & c & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a & b \end{pmatrix}.$$

20.9. Используя разностное уравнение, выписать формулу для вычисления интеграла

$$I_k(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\cos(kx) - \cos(k\alpha)}{\cos x - \cos\alpha}\, dx,$$

где α — параметр.

20.10. Для целых положительных чисел $a_0 > a_1$ находится наибольший общий делитель последовательным делением: a_0 на a_1, a_1 на первый остаток и т.д. Требуется указать оценку сверху для числа делений (длину алгоритма Евклида).

20.11. Пусть задана последовательность интегралов

$$I_k = \int\limits_0^\infty x^k e^{-x} \sin x \, dx, \quad k \geq 0 .$$

Показать, что для целых неотрицательных n справедливо равенство

$$I_{4n+3} = 0 .$$

20.12. Найти общее действительное решение уравнения

$$20y_{k-1} - 8y_k + y_{k+1} = 0 .$$

20.13. Найти общее действительное решение уравнения

$$2y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = 0 .$$

20.14. Найти общее действительное решение уравнения

$$26y_{k-1} + 10y_k + y_{k+1} = 0 .$$

20.15. Найти общее действительное решение уравнения

$$13y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1} = 0 .$$

20.16. Найти решение разностной задачи

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0, \quad y_0 = 1, \, y_1 = 4 .$$

K **20.17.** Найти решение разностной задачи

$$y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = 0, \quad y_0 = 2, \, y_1 = 1 .$$

K **20.18.** Найти решение разностной задачи

$$y_{k+2} + y_k = 0, \quad y_0 = 2, \, y_1 = 1 .$$

20.19. Найти решение разностной задачи

$$y_{k+1} - 4y_k + y_{k-1} + 6y_{k-2} = 0, \quad y_0 = 6, \, y_1 = 12, \, y_4 = 276 .$$

20.20. Доказать, что любое решение разностного уравнения

$$y_{k+1} - 12\,y_{k-1} + 2\,y_{k-2} + 27\,y_{k-3} - 18\,y_{k-4} = 0$$

однозначно представимо в виде суммы решений уравнений

$$y_{k+1} - 3\,y_{k-1} + 2\,y_{k-2} = 0 \quad \text{и} \quad y_{k+1} - 9\,y_{k-1} = 0\,.$$

§ 21. Неоднородные разностные уравнения

Пусть y_k^0 — общее решение однородного, а y_k^1 — частное решение неоднородного уравнения. Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами можно представить в виде их суммы

$$y_k = y_k^0 + y_k^1\,.$$

Как и в случае дифференциальных уравнений, частное решение для правой части специального вида может быть найдено методом неопределенных коэффициентов. Пусть

$$f_k = \alpha^k\,\big(P_m(k)\,\cos\beta k + Q_n(k)\,\sin\beta k\big),$$

где $P_m(k)$, $Q_n(k)$ — многочлены степени m и n соответственно. Тогда частное решение ищется в виде

$$y_k^1 = k^s\,\alpha^k\,\big(R_l(k)\,\cos\beta k + T_l(k)\,\sin\beta k\big), \tag{$*$}$$

где $s = 0$, если α и β не являются одновременно модулем и аргументом корня характеристического уравнения, и s равно кратности этого корня в противном случае; $l = \max(m, n)$ — степень многочленов $R(k)$ и $T(k)$.

Чтобы найти коэффициенты этих многочленов, надо подставить выражение $(*)$ в неоднородное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах. Напомним этот алгоритм в простейшем непрерывном случае:

$$y'' - y = e^x,$$

$$y^0(x) = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x}, \quad y^1(x) = e^x\,(Ax + B)\,,$$

$$y'' - y = 2A\,e^x = e^x \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad y(x) = \left(C_1 + \frac{1}{2}\,x\right)e^x + C_2\,e^{-x}.$$

21.1. Найти частное решение уравнения

$$2y_k - y_{k+1} = 1 + 2k - k^2\,.$$

21.2. Найти частное решение уравнения

$$2y_k - y_{k+1} = k\,2^k\,.$$

21.3. Найти частное решение уравнения

$$2y_k - y_{k+1} = \sin k.$$

21.4. Найти решение задачи

$$y_{k+1} - b\,y_k = a^k, \quad y_0 = 1 \quad (a, b \neq 0)\,.$$

21.5. Найти решение уравнения с переменными коэффициентами

$$y_{k+1} - k y_k = 2^k\,k!\,, \quad k \geq 0\,.$$

21.6. Решить нелинейную задачу

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + y_k}, \quad y_0 = 1\,.$$

21.7. Найти решение нелинейного уравнения

$$y_{k+1} = \frac{1}{2 - y_k}\,.$$

21.8. Найти решение задачи

$$y_{k+1} - y_{k-1} = \frac{1}{k^2 - 1}, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0\,.$$

21.9. Решить нелинейное уравнение

$$y_{k+1} = 2 - \frac{1}{y_k}, \quad y_0 = 2\,.$$

21.10. Найти частное решение уравнения

$$\frac{1}{8}y_{k-1} - \frac{3}{4}y_k + y_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k\,.$$

21.11. Найти частное решение уравнения

$$-12y_{k-1} - y_k + y_{k+1} = 4^k\,.$$

21.12. Найти частное решение уравнения

$$-6y_{k-1} + 17y_k + 3y_{k+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^k .$$

21.13. Найти частное решение уравнения

$$6y_{k-1} - 5y_k + y_{k+1} = 2^k .$$

21.14. Найти общее решение уравнения

$$y_{k-1} - \frac{5}{2}y_k + y_{k+1} = \cos k .$$

21.15. Найти общее решение уравнения

$$4y_{k-1} - 3y_k - 2y_{k+1} + y_{k+2} = k .$$

21.16. Найти общее решение уравнения

$$y_{k+1} + y_k - 5y_{k-1} + 3y_{k-2} = 1 .$$

21.17. Найти общее решение уравнения

$$y_{k+1} - 2y_k - 8y_{k-1} = \sin k .$$

§ 22. Фундаментальное решение и задачи на собственные значения

Фундаментальным решением G_k называется решение разностного уравнения

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + \cdots + a_n y_{k+n} = f_k$$

с правой частью $f_k = \delta_0^k$, где

$$\delta_n^k = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n, \\ 1 & \text{при } k = n. \end{cases}$$

22.1. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$a\, y_k + b\, y_{k+1} = \delta_0^k .$$

22.2. Пусть $|a/b| \neq 1$, $|f_k| \leq F$, а G_k — ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$a\, y_k + b\, y_{k+1} = f_k .$$

Показать, что частным решением этого уравнения является сходящийся ряд

$$y_k^1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{k-n} f_n .$$

22.3. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$y_{k-1} - 2\,y_k + y_{k+1} = \delta_0^k .$$

22.4. Найти фундаментальное решение уравнения

$$y_{k-1} - y_k + y_{k+1} = \delta_0^k .$$

22.5. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$y_{k-1} - \frac{5}{2}\,y_k + y_{k+1} = \delta_0^k .$$

22.6. Найти все λ, для которых разностная задача

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = -\lambda\, y_k, \quad y_0 = y_N = 0, \quad h = 1/N ,$$

имеет нетривиальные решения.

22.7. Найти все λ, для которых разностная задача

$$\frac{y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda\, y_k, \quad y_0 = y_N = 0, \quad h = 1/N ,$$

имеет нетривиальные решения.

22.8. Доказать, что решение задачи

$$y_{k-1} - 2\,y_k + y_{k+1} = f_k, \quad y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta ,$$

удовлетворяет неравенству

$$\max_k |y_k| \le \max(|\alpha|, |\beta|) + \max_{1 \le k \le N-1} |f_k| \cdot \frac{N^2}{8} .$$

22.9. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$y_{k+1} - 5y_k + 6y_{k-1} = \delta_0^k .$$

22.10. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$3y_{k-1} - \frac{13}{2} y_k + y_{k+1} = \delta_0^k .$$

22.11. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$\frac{1}{8}y_{k-1} - \frac{3}{4}y_k + y_{k+1} = \delta_0^k .$$

22.12. Найти ограниченное фундаментальное решение уравнения

$$y_{k+1} - y_k - 12y_{k-1} = \delta_0^k .$$

22.13. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda\, y_k, \quad y_0 = y_1,\; y_N = y_{N-1},\; h = 1/N .$$

22.14. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda\, y_k, \quad y_0 = y_1,\; y_N = 0,\; h = 1/N .$$

22.15. Найти все решения задачи на собственные значения

$$\frac{y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1}}{h^2} = -\lambda\, y_k, \quad y_0 = 0,\; y_N = y_{N-1},\; h = 1/N .$$

Глава VII
Решение дифференциальных уравнений

Постановки задач. Пусть в области D с границей Γ задана дифференциальная задача

$$Lu = f \quad \text{в} \quad D \tag{1}$$

с граничным условием

$$lu = \varphi \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2}$$

Здесь L и l — дифференциальные операторы; f и φ — заданные, а u — искомый элементы некоторых линейных нормированных пространств F, Φ и U соответственно.

Если одной из переменных является время t, то рассматривают области вида

$$D(t, \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}) \times [t_0, T],$$

где t — время и $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ — совокупность пространственных координат. Это означает, что решение ищется в пространственной области $d(\mathbf{x})$ на отрезке времени $[t_0, T]$. В этом случае условия, заданные при $t = t_0$, называют *начальными*, а условия, заданные на границе $\Gamma(\mathbf{x})$ области $d(\mathbf{x})$, — *граничными*, или *краевыми*.

Задачу, у которой заданы только начальные условия, называют *задачей Коши*. Задачу с начальными и граничными условиями называют *смешанной краевой задачей*. Если сформулирована задача, не зависящая от времени, и заданы граничные условия, то ее называют *краевой*.

Для решения сформулированных задач наиболее часто используется *разностный метод*.

§ 23. Методы построения разностных схем

Разностный метод. Для применения разностного метода определяют некоторую *сетку* — конечное множество точек (узлов) $\overline{D}_h = D_h \bigcup \Gamma_h$, принадлежащее области $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$. Как правило, $\Gamma_h \subset \Gamma$. Будем рассматривать только сетки, узлами которых являются все точки пересечения заданных наборов параллельных прямых (плоскостей), причем по каждой переменной выбирается свой постоянный шаг. Сеточный параметр h является, в общем случае, вектором, компоненты которого состоят из шагов сетки по каждой переменной. Для изучения свойств разностных схем вводится понятие величины шага сетки, в качестве которого принимается какая-либо *сеточная норма* вектора h, например,

$$||h||_\infty = \max_{1\le i\le n} h_i \quad \text{или} \quad ||h||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2\right)^{1/2},$$

где n — число переменных в дифференциальной задаче. Чтобы избежать новых и ненужных для существа дела обозначений, в приводимых ниже оценках под h понимается величина шага сетки.

Если $X \subset Y$ и функция v определена на множестве Y, то ее *следом* на множестве X называют функцию, определенную на X и совпадающую там с v. Если функция v определена на некотором множестве Y, содержащем Y_h, то ее след на Y_h будем обозначать $(v)_h$. Часто пространства F_h, Φ_h и U_h определяют как пространства следов функций из F, Φ и U на D_h, Γ_h и $\overline{D}_h$ соответственно. При этом используются *согласованные* нормы пространств, т.е. для достаточно гладких функций $v \in Y$ выполняется соотношение

$$\lim_{h\to 0} \| (v)_h \|_{Y_h} = \| v \|_Y .$$

Все производные, входящие в уравнение и краевые условия, заменяются *разностными аппроксимациями.* При записи этих аппроксимаций в некотором внутреннем узле сетки берется одно и то же количество соседних узлов, образующих строго определенную конфигурацию, называемую *шаблоном.* В результате дифференциальные операторы L и l заменяются разностными L_h и l_h .

Для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) определим *разностную схему* — семейство разностных задач, зависящих от параметра h:

$$L_h u_h = f_h \quad \text{в} \quad D_h; \tag{3}$$

$$l_h u_h = \varphi_h \quad \text{на} \quad \Gamma_h. \tag{4}$$

Решение разностной схемы u_h, называемое *разностным*, принимается в качестве приближенного решения дифференциальной задачи.

Аппроксимация. Говорят, что разностная схема (3), (4) *аппроксимирует* с порядком аппроксимации $p = \min(p_1, p_2)$ дифференциальную задачу (1), (2), если при любых гладких функциях u, f, φ существуют такие постоянные h_0, c_1, p_1, c_2 и p_2, что для всех $h \le h_0$ выполняются неравенства

$$\|L_h(u)_h - (f)_h\|_{F_h} + \|(f)_h - f_h\|_{F_h} \le c_1 h^{p_1},$$

$$\|l_h(u)_h - (\varphi)_h\|_{\Phi_h} + \|(\varphi)_h - \varphi_h\|_{\Phi_h} \le c_2 h^{p_2},$$

где c_1, p_1, c_2 и p_2 не зависят от h.

Выражения, стоящие под знаком норм, называют *погрешностями аппроксимации*.

Оператор L_h из (3) *локально аппроксимирует* в точке x_i дифференциальный оператор L из (1), если для достаточно гладкой функции $u \in U$ существуют такие положительные постоянные h_0, c и p, не зависящие от h, что при всех $h \le h_0$ справедливо неравенство

$$\left| (L_h(u)_h - (Lu)_h)\big|_{x=x_i} \right| \le c h^p .$$

Число p при этом называется *порядком* аппроксимации. Аналогично определяется порядок локальной аппроксимации оператора l_h.

Широко используется также понятие аппроксимации на решении. Говорят, что разностная схема (3), (4) *аппроксимирует на решении* u с порядком аппроксимации $p = \min(p_1, p_2)$ дифференциальную задачу (1), (2), если существуют такие постоянные h_0, c_1, p_1, c_2 и p_2, что для всех $h \le h_0$ выполняются неравенства

$$\|L_h(u)_h - f_h\|_{F_h} \le c_1 h^{p_1}, \quad \|l_h(u)_h - \varphi_h\|_{\Phi_h} \le c_2 h^{p_2},$$

где c_1, p_1, c_2 и p_2 не зависят от h.

Порядки аппроксимаций обычно оценивают при помощи разложения в ряды Тейлора. Порядок аппроксимации разностной схемы может быть разный по разным переменным. Если погрешность аппроксимации стремится к нулю при любом законе стремления шагов по различным переменным к нулю, то такая аппроксимация называется *безусловной*. Если же погрешность аппроксимации стремится к нулю при одних законах убывания шагов и не стремится к нулю при других, то аппроксимацию называют *условной*.

Устойчивость. Разностная схема (3), (4) устойчива, если решение системы разностных уравнений существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных f_h, φ_h, причем эта зависимость равномерна относительно величины шага сетки. Это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся h_0 и $\delta(\varepsilon)$, не зависящие от h, такие, что $\left\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\right\|_{U_h} \le \varepsilon$, если $h \le h_0$, $\left\|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\right\|_{F_h} \le \delta$ и $\left\|\varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)}\right\|_{\Phi_h} \le \delta$.

Для линейных схем определение устойчивости имеет вид

$$\left\|u_h^{(1)} - u_h^{(2)}\right\|_{U_h} \le c_1 \left\|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\right\|_{F_h} + c_2 \left\|\varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)}\right\|_{\Phi_h},$$

где c_1 и c_2 — постоянные, не зависящие от h.

Устойчивость называется *безусловной*, если эти неравенства выполняются при произвольном соотношении шагов по различным переменным. Если же для выполнения неравенств шаги должны удовлетворять дополнительным соотношениям, то устойчивость называется *условной*.

Непрерывную зависимость по f_h называют устойчивостью *по правой части*, а непрерывную зависимость по φ_h называют устойчивостью *по граничным условиям*. Если рассматривается смешанная краевая задача, то устойчивость по граничному условию при $t = t_0$ называют устойчивостью *по начальным данным*.

Сходимость. Решение u_h разностной схемы (3), (4) *сходится* к решению u дифференциальной задачи (1), (2), если существуют такие постоянные h_0, c и p, что для всех $h \le h_0$ выполнено неравенство

$$\|(u)_h - u_h\|_{U_h} \le c\, h^p,$$

где c, и p не зависят от h. Число p называют *порядком* сходимости разностной схемы, при этом говорят, что разностное решение u_h имеет порядок точности p.

Теорема (о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости). *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *операторы* L, l *и* L^h, l^h *— линейные,*

2) *решение* u *дифференциальной задачи* (1), (2) *существует и единственно,*

3) *разностная схема* (3), (4) *аппроксимирует дифференциальную задачу* (1), (2) *с порядком* p,

4) *разностная схема* (3), (4) *устойчива.*

Тогда решение разностной схемы u_h *сходится к решению* u *дифференциальной задачи с порядком не ниже* p.

Поскольку для многомерных задач порядок аппроксимации по разным переменным может быть неодинаковым, порядок сходимости по разным переменным также может быть различным. Если аппроксимация и (или) устойчивость разностной схемы условные, то сходимость имеет место только при тех соотношениях между шагами сетки по разным переменным, при которых выполнены условия аппроксимации и (или) устойчивости. Требование устойчивости является необходимым условием сходимости.

Рассмотрим наиболее распространенные методы построения разностных схем.

1. **Метод неопределенных коэффициентов.** Пусть имеется трехточечный шаблон (три расположенных подряд узла сетки x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) и требуется найти разностный оператор L_h, локально аппроксимирующий дифференциальный оператор L на функции u в узле x_k. Для нахождения неопределенных коэффициентов a_{-1}, a_0, a_1 с помощью формулы Тейлора вначале находятся коэффициенты при $u(x), u'(x), u''(x), \ldots$ в выражении

$$
\begin{aligned}
&(L_h(u)_h - (Lu)_h)\big|_{x=x_k} = \\
&= (a_{-1}u(x_{k-1}) + a_0u(x_k) + a_1u(x_{k+1}) - (Lu)_h)\big|_{x=x_k}.
\end{aligned}
$$

Затем приравнивая к нулю коэффициенты последовательно при u_k, u'_k, u''_k и т.д., приходим к системе линейных алгебраических уравнений, решая которую находим a_{-1}, a_0, a_1. Порядок аппроксимации определяется после подстановки их найденных значений в первый ненулевой коэффициент при производных в точке x_k.

2. **Интегро — интерполяционный метод.** Рассмотрим его на том же шаблоне для уравнения

$$u' + u = f(x).$$

Проинтегрируем уравнение от x_{k-1} до x_{k+1}:

$$\frac{1}{2h}(u_{k+1} - u_{k-1}) + \frac{1}{2h}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} u\,dx = \frac{1}{2h}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Заменяя интегралы, например, по квадратурой формуле Симпсона, получаем разностное уравнение

$$\frac{1}{2h}(u_{k+1} - u_{k-1}) + \frac{1}{6}(u_{k+1} + 4u_k + u_{k-1}) = \frac{1}{6}(f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}).$$

3. **Интегральное тождество Марчука.** Для задачи

$$
\begin{aligned}
&-(a(x)\,u')' + b(x)\,u = f(x), \quad 0 < x < 1, \\
&u(0) = u(1) = 0, \quad 0 < a_0 \le a(x) \le a_1, \quad 0 \le b(x) \le b_1,
\end{aligned}
$$

где $a(x), b(x), f(x)$ имеют конечное число разрывов первого рода, построение разностной схемы основывается на интегральном тождестве, которому удовлетворяет решение исходной задачи

$$-\frac{u_{k+1}-u_k}{\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{a}}+\frac{u_k-u_{k-1}}{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{dx}{a}}+\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}(b\,u-f)dx=$$

$$=-\frac{1}{\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{a}}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{dx}{a}\int\limits_{x_{k+\frac12}}^{x}(bu-f)dy+\frac{1}{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{dx}{a}}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{dx}{a}\int\limits_{x_{k-\frac12}}^{x}(bu-f)dy\,.$$

Здесь в целях экономии места у каждого слагаемого отброшен множитель вида $2/(x_{k+1}-x_{k-1})$.

4. **Метод Ритца**. Если оператор L — самосопряженный и положительно определенный, то равносильны две задачи:

а) нахождение решения задачи $Lu = f$ в гильбертовом пространстве U со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$;

б) нахождение $\overline{u}\in U$, минимизирующего функционал

$$J(u)=(Lu,u)-2\,(u,f)\,.$$

Для нахождения $\overline{u}$ строится последовательность $\{U_h\}$ конечномерных подпространств пространства U с известным базисом $\{\varphi_i^h\}$. В каждом $\{U_h\}$ находится элемент $\overline{u}_h$, минимизирующий $J(u)$ в $\{U_h\}$. Для этого достаточно найти коэффициенты α_i разложения $\overline{u}_h$ по $\{\varphi_i^h\}$:

$$\overline{u}_h=\sum_i\alpha_i\varphi_i^h$$

из системы линейных алгебраических уравнений $A\alpha = b$, где

$$a_{ij}=\left(L\varphi_i^h,\varphi_j^h\right),\quad b_i=\left(f,\varphi_i^h\right),\quad i,j=\overline{1,N_h}\,,$$

N_h — размерность $\{U_h\}$. Если последовательность $\{U_h\}$ полна в $\{U\}$, то

$$\lim_{h\to0}\overline{u}_h=\overline{u}\,.$$

В качестве базисных функций φ_i^h в простейшем случае используются кусочно – линейные. Для произвольной сетки $a = x_0 < x_1 <$ $< \ldots < x_n = b$ они имеют вид

$$\varphi_0^h(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{x_1-x_0} & \text{при } 0\le x\le x_1\,,\\ 0 & \text{при } x_1\le x\le x_n\,;\end{cases}$$

$$\varphi_n^h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_0 \le x \le x_{n-1}\,, \\ \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & \text{при } x_{n-1} \le x \le x_n\,; \end{cases}$$

$$\varphi_i^h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{при } x_{i-1} \le x \le x_i\,, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{при } x_i \le x \le x_{i+1}\,, \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$$

для $i = 1, \ldots, n-1$.

5. **Метод Галеркина**. В отличие от метода Ритца, метод Галеркина не требует самосопряженности и положительной определенности оператора L из задачи $Lu = f$.

Для нахождения решения $\overline{u}$ в каждом из конечномерных подпространств U_h отыскивается элемент $\overline{u}_h$ такой, что для любого $v_h \in U_h$ справедливо $(L\overline{u}_h - f, v_h) = 0$. Соответствующие коэффициенты a_i разложения $\overline{u}_h$ по базису подпространства U_h определяются из системы уравнений, имеющих тот же вид, что и в методе Ритца. Отличие состоит в том, что $a_{ij} = \left(L\varphi_j^h, \varphi_i^h\right)$.

6. **Метод аппроксимации функционала**. В этом методе минимизируемый функционал $J(u)$ заменяется приближенным функционалом $J_h(\varphi)$. Пусть на отрезке $[a, b]$ введена сетка $x_k, k = \overline{0, n}$. Тогда производные в функционале заменяются конечными разностями, а интегралы — квадратурами. Например,

$$\int\limits_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \quad \text{заменяется на} \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h}\right)^2 h\,,$$

и мы, таким образом, приходим к задаче минимизации приближенного функционала $J_h(\varphi)$. разностная схема получается приравниванием к нулю величин $\partial J_h / \partial \varphi_k$, $k = \overline{0, n}$.

7. **Метод сумматорного тождества**. Аналогично методу аппроксимации функционала интегральное тождество $(Lu - f, v) = 0$ заменяется сумматорным тождеством $(L_h\varphi_h - f_h, v_h) = 0$ для любого v_h. Так как в конечномерном пространстве векторы e_k, $k = \overline{0, n}$ образуют базис (k-я компонента вектора e_k равна 1, остальные — нулю), то разностная схема получается из системы уравнений

$$(L_h\varphi_h - f_h, e_k) = 0,\ k = \overline{0, n}\,.$$

23.1. Привести пример последовательности сеточных функций $\{\varphi^h\}$ из семейства пространств $\{\Phi_h\}$, которая сходилась бы к некоторой функции $u \in \Phi$, если в качестве нормы Φ_h взять $\left(h \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\varphi_i^h\right)^2\right)^{1/2}$, и расходилась, если в качестве нормы Φ_h принять $\max\limits_i |\varphi_i^h|$.

23.2. Сходится ли последовательность сеточных функций $\{\varphi^h\}$ к функции u и с каким порядком, если

$$\varphi_i^h = \frac{1}{2}\left(u\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + u\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\right),$$

$$\varphi_0^h = u(0),\ \varphi_n^h = u(1), \quad i = \overline{1, n-1},\ h = 1/n,$$

а u принадлежит одному из пространств $C, C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(100)}$? В качестве $\|\cdot\|_{\Phi_h}$ взять $\|\cdot\|_\infty$. Существуют ли функции $u(x)$, к которым $\{\varphi^h\}$ сходится с бесконечным порядком?

23.3. Справедливы ли равенства:

$$1) \quad \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x+2h)+u(x)}{2} - 2u(x) + \dfrac{u(x)+u(x-2h)}{2}}{h^2};$$

$$2) \quad \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x+2h)+u(x)}{2} - \dfrac{u(x)+u(x-2h)}{2}}{2h},$$

если $u(x) \in C^{(4)}$?

23.4. С каким порядком дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx} + 2u\cos x = \cos x + \sin(2x), \quad x \in [0,1],\ u(0) = 0,$$

аппроксимируется разностной схемой

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} + a_i \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2} = f_i, \quad \varphi_0 = 0,\ i = \overline{0, n-1}, h = 1/n,$$

если в качестве области определения f_h используется

$$D_h = \{x_{i+1/2},\ i = \overline{0, n-1}\}, \quad x_i = ih,\ x_{i+1/2} = x_i + h/2,$$

а величины a_i и f_i определены как:

$$1) a_i = \cos x_i + \cos x_{i+1},\ f_i = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sin(2x_i) + \sin(2x_{i+1}))\ ;$$
$$2) a_i = 2\cos x_i,\ f_i = \cos x_{i+1} + \sin(2x_{i+1})\ ;$$
$$3) a_i = 2\cos x_{i+1},\ f_i = \cos x_{i+1} + \sin(2x_{i+1})\ ?$$

23.5. С каким порядком дифференциальная задача

$$\frac{du}{dx} + 2u\cos x = \cos x + \sin(2x), \quad x \in [0,1],\ u(0) = 0,$$

аппроксимируется разностной схемой

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} + a_i\frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2} = f_i, \quad \varphi_0 = 0,\ i = \overline{0, n-1}, h = 1/n,$$

если в качестве области определения f_h используется

$$D_h = \{x_i,\ i = \overline{0, n-1}\}, \quad x_i = ih,$$

а величины a_i и f_i определены как:

$$1) a_i = \cos x_i + \cos x_{i+1},\ f_i = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\sin(2x_i) + \sin(2x_{i+1}))\ ;$$
$$2) a_i = 2\cos x_i,\ f_i = \cos x_i + \sin(2x_i)\ ?$$

23.6. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + a\,u = \cos x, \quad x \in [0,\pi],\ a > 0,$$
$$u(0) = 0, u(\pi) = 1,$$

на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить схему десятого порядка аппроксимации.

23.7. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad x \in [0,1],$$

$$u(0) = a, u(1) = b, u \in C^{(4)},$$

на трехточечном шаблоне с переменными шагами сетки построить разностные схемы первого и второго порядка аппроксимации.

23.8. Для дифференциальной задачи

$$\frac{du}{dx} + cu = f(x), \quad c = \text{const}, \quad u(0) = a,$$

интегро — интерполяционным методом на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить схему четвертого порядка аппроксимации.

23.9. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+cu=f(x)\,,\quad x\in[0,1],\ c\geq 0\,,$$
$$u(0)=a\,,u(1)=b\,,$$

интегро — интерполяционным методом на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить схему четвертого порядка аппроксимации.

23.10. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right)=1\,,\quad x\in[0,1]\,,$$

$$u(0)=u(1)=0\,,\quad a(x)=\begin{cases}1/2, & 0\leq x<\pi/4,\\ 1, & \pi/4\leq x\leq 1,\end{cases}$$

построить разностную схему с помощью интегрального тождества Марчука.

23.11. Дана дифференциальная задача

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+cu=f(x)\,,\quad x\in[0,1]\,,$$
$$u(0)=u(1)=0\,.$$

При каких c для решения этой задачи применим метод Ритца?

23.12. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right)=1\,,\quad x\in[0,1]\,,$$

$$u(0)=u(1)=0\,,\quad a(x)=\begin{cases}3/2, & 0\leq x<\pi/4,\\ 2, & \pi/4\leq x\leq 1,\end{cases}$$

построить разностную схему методом Ритца, взяв кусочно – линейные функции в качестве базисных.

23.13. Указать такую разностную схему, аппроксимирующую дифференциальную задачу

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)\,,\quad x\in[0,1]\,,$$

$$u(0)=u(1)=0\,,$$

со вторым порядком, которая при каждом h представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с положительно определенной матрицей.

23.14. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right)+b(x)\,u=f(x)\,,\quad x\in[0,1]\,,$$

$$u(0)=u(1)=0\,,\quad a(x)>0\,,\quad b(x)>0\,,$$

на равномерной сетке построить разностную схему методом аппроксимации функционала.

23.15. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right)=1\,,\quad x\in[0,1]\,,$$

$$u(0)=u(1)=0\,,\quad a(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\pi/5,\\ 1/3, & \pi/5\le x\le 1,\end{cases}$$

построить разностную схему методом Галеркина, взяв кусочно — линейные функции в качестве базисных.

23.16. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+a\,\frac{du}{dx}+c\,u=1\,,\quad x\in[0,1]\,,c\ge 0\,,$$

$$u(0)=u(1)=1\,,$$

построить разностную схему методом Галеркина, взяв кусочно – линейные функции в качестве базисных.

23.17. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right)+b(x)\,\frac{du}{dx}+c(x)\,u=f(x)\,,\quad x\in[0,1]\,,$$

$$u(0)=u(1)=0\,,\quad a(x)>0\,,\quad c(x)>0\,,$$

на равномерной сетке построить разностную схему методом сумматорного тождества.

23.18. Для уравнения $y'=f(x,y)$ построить схему вида

$$\frac{y_{m+1}+a\,y_m+b\,y_{m-1}}{2h}=\frac{1}{6}\,f_{m-1}+d\,f_m+c\,f_{m+1}$$

наиболее высокого порядка аппроксимации.

23.19. Для уравнения $y' = f(x,y)$ построить схему вида

$$\frac{a\,y_{m+1} + b\,y_{m-1}}{h} = c\,f_{m-1} + d\,f_m + e\,f_{m+1}$$

наиболее высокого порядка аппроксимации.

23.20. Для уравнения $y' = f(x,y)$ построить схему вида

$$\frac{b\,y_{m+1} + a\,y_m - y_{m-1}}{2h} = c\,f_{m-1} + \frac{2}{3}\,f_m + d\,f_{m+1}$$

наиболее высокого порядка аппроксимации.

23.21. Для уравнения $y' = f(x,y)$ построить схему вида

$$\frac{y_{m+1} + a\,y_m + b\,y_{m-1}}{2h} = c\,f_{m-1} + d\,f_m + \frac{1}{6}\,f_{m+1}$$

наиболее высокого порядка аппроксимации.

§ 24. Задача Коши

В случае задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y)\,; \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

общие термины теории разностных схем можно конкретизировать. Пусть, для простоты, рассматривается равномерная сетка $x_k = x_0 + kh$, $k \geq 0$. В качестве аппроксимации рассмотрим систему разностных уравнений

$$\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{p} a_{-k}y_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} b_{-k}f_{n-k}\,, \quad n = 1,2,\ldots\,. \tag{3}$$

с известными начальными условиями $y_0 = y(x_0)$, $y_1, \ldots, y_{p-1}$, где a_{-k}, b_{-k} не зависят от h, $a_0 \neq 0$ и $f_{n-k} = f(x_{n-k}, y_{n-k})$.

В общем случае, это нелинейная система, поэтому аппроксимация левой и правой частей уравнения (1) рассматривается отдельно. При оценке порядка аппроксимации разностной схемы следует также учитывать порядок, с которым начальные условия аппроксимируют значения точного решения задачи (1), (2) в соответствующих узлах сетки. Там, где рассматривается только уравнение (1) без начального условия (2), под разностной схемой понимается система (3) и ее начальные условия во внимание не принимаются.

Рассмотрим характеристическое уравнение для левой части разностной схемы (для уравнения $y' = 0$):

$$F(\mu) = \sum_{k=0}^{p} a_{-k}\mu^{p-k} = 0\,.$$

Схема называется *α-устойчивой*, если выполнено условие: все корни характеристического уравнения принадлежат единичному кругу и на границе круга нет кратных корней.

Данное условие является необходимым. Если не приводится конкретный вид правой части, то имеется в виду устойчивость только в этом смысле.

24.1. Показать, что необходимым и достаточным условием аппроксимации уравнения (1) разностными уравнениями (3) является выполнение равенств

$$\sum_{k=0}^{p} a_{-k} = 0, \quad -\sum_{k=0}^{p} k a_{-k} = 1, \quad \sum_{k=0}^{p} b_{-k} = 1\,.$$

24.2. Аппроксимируют ли разностные схемы уравнение (1):

$$1)\quad \frac{1}{3h}(y_k - y_{k-3}) = f_{k-1}\,;$$

$$2)\quad \frac{1}{8h}(y_k - 3y_{k-2} + 2y_{k-3}) = \frac{1}{2}(f_{k-1} + f_{k-2})\,;$$

$$3)\quad \frac{1}{2h}(3y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}) = f_k\,?$$

24.3. Для задачи $u' + u = x + 1$, $u(0) = 0$, с точным решением $u = x$ рассматривается схема

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + y_k = kh + 1, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0\,.$$

Каков порядок аппроксимации данной схемы? Можно ли его улучшить?

24.4. Для задачи

$$u' + a(x)u = f(x), \quad u(0) = c$$

рассматривается схема

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \left(\alpha_1 a(x_k) + \alpha_2 a(x_{k+1})\right)\left(\beta_1 y_k + \beta_2 y_{k+1}\right) = \\ \gamma_1 f(x_k) + \gamma_2 f(x_{k+1})\,, \quad y_0 = c\,.$$

Как выбрать α_k, β_k и γ_k, чтобы получить *второй* порядок аппроксимации?

24.5. Для уравнения (1) построить разностную схему с наивысшим порядком аппроксимации

$$\frac{y_k - y_{k-2}}{2h} = a_1 f_k + a_0 f_{k-1} + a_{-1} f_{k-2}.$$

24.6. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\theta \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + (1-\theta) \frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f_k \quad \text{при} \quad \theta \in [0,1].$$

24.7. При каких a, b и c схема

$$\frac{1}{h}(y_k + a y_{k-1} - a y_{k-3} - y_{k-4}) = b f_{k-1} + c f_{k-2} + b f_{k-3}$$

имеет максимальный порядок аппроксимации? Выполнено ли условие α-устойчивости?

24.8. Исследовать сходимость решения разностной схемы

$$\frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{h} + l\psi_{k-1} = 0, \quad \varphi_0 = a, \quad h = \frac{1}{n},$$
$$\frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{h} - l\varphi_{k-1} = 0, \quad \psi_0 = b, \quad k = 1, \ldots, n,$$

к решению дифференциальной задачи

$$u' + lv = 0, \quad u(0) = a,$$
$$v' - lv = 0, \quad v(0) = b,$$

на отрезке

$$x \in [0,1] \quad \text{при} \quad l = \text{const} \neq 0,$$

используя решения обеих задач.

24.9. Для задачи $y' = y$, $y_0 = 1$ рассмотрим схему

$$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = y_k, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = e^h.$$

В разложении ошибки $y(x_k) - y_k = c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$ найти постоянную c_1 для $x_k = 1$.

24.10. Для задачи $y' = y$, $y_0 = 1$ рассмотрим схему

$$4\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - 3\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = y_k.$$

В разложении ошибки $y(x_k) - y_k = c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$ найти постоянные c_1 и c_2 для $x_k = 1$.

24.11. Для задачи $u' + u = \cos 2x$, $u(0) = 0$, построить трехточечную разностную схему второго порядка сходимости.

24.12. Для задачи $u' + 5u = \sin 2x$, $u(0) = 2$, построить двухточечную разностную схему второго порядка сходимости.

24.13. Для задачи $u' - u = \exp 2x$, $u(0) = 1$, построить трехточечную разностную схему второго порядка сходимости.

24.14. Для задачи $u' - 2u = \exp x$, $u(0) = 1$, построить двухточечную разностную схему второго порядка сходимости.

24.15. Привести пример неустойчивой разностной схемы, аппроксимирующей уравнение $y' = f(x, y)$ строго: 1) с первым порядком; 2) со вторым порядком; 3) с третьим порядком.

§ 25. Линейная краевая задача

Простейшая содержательная постановка краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$-\left(k(x)\,u'\right)' + p(x)\,u = f(x), \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям

$$0 < k_0 \le k(x) \le k_1, \quad 0 \le p(x) \le p_1.$$

Отметим, что на любом из концов отрезка краевое условие может быть задано в виде линейной комбинации функции и производной

$$a\,u + b\,u' = c.$$

В этом случае обратить внимание на порядок его аппроксимации.

Если это не оговаривается специально, то в приводимых ниже задачах сетка выбирается равномерной: $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, $Nh = 1$.

25.1. При каких α, β и γ разностная схема

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + (\alpha y_{i+1} + \beta y_i + \gamma y_{i-1}) = f_i + \frac{h^2}{12} f''(x_i), \; y_0 = y_N = 0,$$

аппроксимирует задачу

$$-u'' + u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

с четвертым порядком?

25.2. Используя значения функции u в двух точках x_0 и x_1, построить аппроксимацию второго порядка граничного условия $a\,u(0) + b\,u'(0) = c$ для уравнения

$$-u'' + p(x)\,u = f(x)\,.$$

25.3. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad y_0 = y_N = 0\,,$$

и показать, что при $h \to 0$ число обусловленности матрицы алгебраической системы для нахождения y_i имеет порядок $O\big(1/h^2\big)$.

25.4. Получить на основе принципа максимума при $f \in C^{(2)}(0,1)$ оценку скорости сходимости

$$\max_{0 \le i \le N} \big|u(x_i) - y_i\big| \le \frac{h^2}{96} \max_{[0,1]} \big|f''(x)\big|$$

решения разностной задачи

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad y_0 = y_N = 0\,,$$

к решению дифференциальной задачи

$$-u'' = f, \quad u(0) = u(1) = 0\,.$$

Энергетический метод исследования устойчивости. Рассмотрим энергетический метод исследования устойчивости на примере дифференциальной задачи

$$-u'' + p(x)\,u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad p(x) \ge 0\,.$$

Возьмем интеграл по отрезку $[0,1]$ от обеих частей уравнения, предварительно умножив уравнение на u:

$$\int_0^1 (-u'')u\,dx + \int_0^1 pu^2 dx = \int_0^1 f u\,dx\,.$$

После интегрирования по частям получим интегральное тождество

$$\int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 pu^2 dx = \int_0^1 f u\,dx\,.$$

Далее нам потребуется неравенство, связывающее интегралы от квадратов функции и ее производной. Из равенства

$$u(x_0) = \int\limits_0^{x_0} u'(x)\,dx$$

следует, что

$$|u(x_0)|^2 \le \left(\int\limits_0^{x_0} 1^2 dx\right)\left(\int\limits_0^{x_0} (u')^2 dx\right) \le \int\limits_0^{x_0} (u')^2 dx \le \int\limits_0^{1} (u')^2 dx\,.$$

После интегрирования по x_0 обеих частей получим искомое неравенство

$$\int\limits_0^1 |u(x_0)|^2 dx_0 \le \int\limits_0^1 (u')^2 dx \int\limits_0^1 dx_0 \quad \text{или} \quad \int\limits_0^1 u^2 dx \le \int\limits_0^1 (u')^2 dx\,.$$

Окончательно имеем

$$\int\limits_0^1 u^2 dx \le \int\limits_0^1 (u')^2 dx + \int\limits_0^1 pu^2 dx = \int\limits_0^1 fu\,dx \le \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 f^2 dx + \int\limits_0^1 u^2 dx\right),$$

откуда

$$\|u\|_{L_2} \le \|f\|_{L_2}, \quad \text{где} \quad \|u\|^2_{L_2} = \int\limits_0^1 u^2 dx\,.$$

Это — априорная оценка для решения, означающая устойчивость задачи по правой части.

25.5. Рассмотрим разностные аналоги интегрирования по частям. Введем обозначения:

$$(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{N-1} \varphi_i\psi_i, \quad (\varphi,\psi] = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i\psi_i, \quad [\varphi,\psi) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i\psi_i\,,$$
$$(\Delta\varphi)_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad (\nabla\varphi)_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}\,.$$

Доказать справедливость следующих соотношений:

$$(\varphi,\Delta\nabla\psi) = -(\nabla\varphi,\nabla\psi) + \varphi_{n-1}(\nabla\psi)_n - \varphi_0(\nabla\psi)_1\,,$$
$$(\varphi,\Delta\nabla\psi) - (\Delta\nabla\varphi,\psi) = \varphi_{n-1}\psi_n - \varphi_n\psi_{n-1} + \varphi_1\psi_0 - \varphi_0\psi_1\,,$$
$$(\varphi,\Delta\psi) = -(\nabla\varphi,\psi] + \varphi_n\psi_n - \varphi_0\psi_1\,.$$

25.6. Провести исследование устойчивости энергетическим методом простейшей разностной схемы

$$-\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\,y_i=f_i, \quad y_0=y_N=0.$$

25.7. Доказать тождество Лагранжа

$$\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2-\left(\sum_i x_iy_i\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(x_iy_j-x_jy_i)^2\,.$$

25.8. Доказать неравенство для положительных сеточных функций

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}+\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n}\le\left(\prod_{i=1}^n (x_i+y_i)\right)^{1/n}.$$

25.9. Доказать неравенство Гельдера для положительных функций при $0<\theta<1$

$$\sum_i x_iy_i\le\left(\sum_i x_i^{1/\theta}\right)^{\theta}\left(\sum_i y_i^{1/(1-\theta)}\right)^{1-\theta}.$$

25.10. Доказать неравенство Минковского для неотрицательных функций при $0<\theta<1$

$$\left(\sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n x_{ij}\right)^{1/\theta}\right)^{\theta}\le\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m x_{ij}^{1/\theta}\right)^{\theta}.$$

25.11. Доказать теорему Адамара для квадратных матриц A

$$\det{}^2(A)\le\prod_{j=1}^n\sum_{i=1}^n|a_{ij}|^2\,.$$

Введем обозначения:

$$\|y\|=\sqrt{h}\,[y,y]^{1/2}\,,\|y\|_C=\max_{0\le i\le n}|y_i|\,,$$

$$(y_{\bar{x}})_i=(\nabla y)_i/h=(y_i-y_{i-1})\,/h\,,\ \ \|y_{\bar{x}}\|=\sqrt{h}\,\left(y_{\bar{x}},y_{\bar{x}}\right]^{1/2}\,,$$

где h — постоянный шаг сетки.

25.12. Пусть $y_0 = y_n = 0$ и $n\,h = 1$. Доказать неравенство

$$\|y\|_C \le \frac{1}{2}\|y_{\bar{x}}]| \, .$$

25.13. Пусть $y_0 = y_n = 0$ и $n\,h = l$. Доказать неравенство

$$\|y\|_C \le \frac{\sqrt{l}}{2}\|y_{\bar{x}}]| \, .$$

25.14. Пусть $y_0 = 0$ и $n\,h = l$. Доказать неравенство

$$\|y\|_C \le \sqrt{l}\,\|y_{\bar{x}}]| \, .$$

25.15. Пусть $y_0 = y_n = 0$ и $n\,h = l$. Доказать неравенство

$$\|y\| \le \sqrt{l}\,\|y\|_C \, .$$

25.16. Пусть $y_0 = y_n = 0$ и $n\,h = l$. Доказать неравенство

$$\frac{h}{2}\|y_{\bar{x}}]| \le \|y\| \le \frac{l}{2\sqrt{2}}\|y_{\bar{x}}]| \, .$$

25.17. Построить аппроксимацию второго порядка по двум точкам правого краевого условия $u' - 3u = 1$, заданного при $x = 1$, для уравнения $u'' = \cos x + 1$.

25.18. Построить аппроксимацию второго порядка по двум точкам левого краевого условия $u' + 4u = 1$, заданного при $x = 0$, для уравнения $u'' - x^2\,u = 1$.

25.19. Построить аппроксимацию второго порядка по двум точкам правого краевого условия $u' = 0$, заданного при $x = 1$, для уравнения $u'' - 3u = \exp x$.

25.20. Построить аппроксимацию второго порядка по двум точкам левого краевого условия $u' - u = 0$, заданного при $x = 0$, для уравнения $u'' - 2u = \sin x - 1$.

25.21. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$-\frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{h^2} + y_m = f_m, \quad y_0 = y_1, \quad y_{N-1} = y_N, \quad N\,h = 1\,.$$

25.22. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$-\frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{h^2} = f_m, \quad y_0 = 0, \quad y_{N-1} = y_N, \quad N\,h = 1\,.$$

25.23. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$-\frac{y_{m+1}-2y_m+y_{m-1}}{h^2}=f_m,\quad y_0=y_1,\quad y_N=0,\quad N\,h=1\,.$$

25.24. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$-\frac{y_{m+1}-2y_m+y_{m-1}}{h^2}-(2+\cos(2\pi x_m))y_m=f_m,\ y_0=y_N=0,\ Nh=1\,.$$

§ 26. Гиперболические уравнения

Построение и исследование разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа традиционно проводится в открытой полуплоскости

$$D=\{(x,t)\,:\infty>x>-\infty,\,t>0\}$$

на примере уравнения для оператора переноса

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}+a(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t)$$

с начальным условием

$$u(x,0)=u_0(x)\quad \text{при}\quad t=0\,.$$

Если это не оговаривается специально, то в приводимых ниже задачах сетка выбирается равномерной по обеим переменным

$$x_m=m\,h,\ \ m=0,\pm1,\,\ldots\,;\quad t_n=n\,\tau,\ \ n=0,1,\,\ldots\,,$$

а для сеточной функции u в точке (x_m,t_n) используется обозначение u_m^n.

26.1. Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\frac{u_m^{n+1}-\dfrac{u_{m+1}^n+u_{m-1}^n}{2}}{\tau}+a_m^n\,\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}=0\,.$$

26.2. Для однородного уравнения с оператором переноса при $a(x,t)=\text{const}$ построить схемы первого и второго порядков аппроксимации (если это возможно) на шаблоне из точек (x_m,t_n), (x_m,t_{n+1}), (x_{m+1},t_n) при условии $\tau=rh$ $(r=\text{const})$.

26.3. Для однородного уравнения с оператором переноса при $a(x,t)=1$ построить схему с порядком аппроксимации $O\big(\tau^2,h^4\big)$ на шаблоне из десяти точек: $(x_{m\pm2},t_k)$, $(x_{m\pm1},t_k)$, (x_m,t_k), $k=n,n+1$.

Спектральный признак устойчивости. Разностные схемы для однородного уравнения переноса с постоянным коэффициентом a можно записать в виде

$$L_h u_m^n = \sum_{k,l} b_{lk}\, u_{m+l}^{n+k} = 0 .$$

Ищем частные решения схемы в виде

$$u_m^n = [\lambda(\varphi)]^n e^{i m \varphi} .$$

Спектральный признак устойчивости разностной схемы формулируется следующим образом: если при заданном законе стремления τ и h к нулю существует постоянная $c < \infty$ такая, что для всех φ справедливо неравенство

$$|\lambda(\varphi)| \le e^{c\tau} ,$$

то схема устойчива и может быть применена для численного решения соответствующей задачи Коши для уравнения $L u = f$.

26.4. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы при постоянном коэффициенте a

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\,\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0.$$

26.5. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы при постоянном коэффициенте a

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0 .$$

26.6. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы при постоянном коэффициенте a

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{h^2}{2\tau}\,\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0.$$

26.7. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы при постоянном коэффициенте a

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\,\frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = 0 .$$

26.8. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы при постоянном коэффициенте a

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0\,.$$

26.9. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы при постоянном коэффициенте a

$$\frac{u_m^{n+1} - \dfrac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0\,.$$

26.10. При каких $\theta \in [0,1]$ устойчива схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \theta\,\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + (1-\theta)\,\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0\,?$$

26.11. Для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t)$$

построить двухслойную схему порядка аппроксимации:

$$1)\, O(\tau^2, h)\,; \quad 2)\, O(\tau, h^2)\,; \quad 3)\, O(\tau^2, h^2)\,; \quad 4)\, O(\tau, h)\,.$$

§ 27. Параболические уравнения

Построение и исследование разностных схем для уравнений в частных производных параболического типа традиционно проводится в открытой полуполосе

$$D = \{(x,t)\ : 1 > x > 0,\, t > 0\}$$

на примере простейшего уравнения теплопроводности

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$

и краевыми условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0\,.$$

Предполагается, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет краевым условиям.

Отметим, что в общем случае на любом из концов отрезка краевое условие может быть задано в виде линейной комбинации функции и производной

$$au + bu' = c.$$

Тогда необходимо обратить внимание на способ его аппроксимации.

Характерная особенность параболической задачи — смешанный тип данных: краевые условия по x и начальные по t. Поэтому исследование аппроксимации такое же как и в гиперболических уравнениях, а исследование устойчивости — принципиально другое.

27.1. При каком соотношении τ и h схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

имеет порядок аппроксимации $O\left(\tau^2, h^4\right)$?

27.2. При каких θ разностная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \theta\,\frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta)\,\frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$$

имеет порядок аппроксимации $O\left(\tau^2, h^4\right)$?

27.3. Определить порядок аппроксимации схемы

$$\frac{1}{12}\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + \frac{5}{6}\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{1}{12}\frac{u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n}{\tau} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}\right).$$

Анализ устойчивости схем в равномерной метрике. Определим норму сеточной функции u_m^n на n-м временном слое следующим образом:

$$\|u^n\| = \max_{0\le m\le M} |u_m^n|.$$

Будем называть схему *устойчивой в равномерной метрике*, если имеет место неравенство

$$\|u^n\| \le c\left(\|u^0\| + \max_{0\le n\le N}\|f^n\|\right),$$

где c не зависит от шагов сетки τ и h, но может линейно зависеть от величины t.

Если это особо не оговаривается, то сетка считается равномерной по обеим переменным

$$x_m = m\,h,\quad m = 0, 1, \ldots, M,\quad M\,h = 1;\quad t_n = n\tau,\quad n = 0, 1, \ldots,$$

а для сеточной функции u в точке (x_m, t_n) используется обозначение u_m^n.

При исследовании устойчивости схем с краевыми условиями первого рода важную роль играют сеточные функции

$$y_m^q = \sin(\pi\, m\, h\, q),\quad m = 1, \ldots, M-1,\quad q = 1, \ldots, M-1,$$

являющиеся решениями задачи на собственные значения

$$\frac{y_{m+1} - 2\,y_m + y_{m-1}}{h^2} = -\lambda\, y_m,\quad y_0 = y_M = 0,\quad h = 1/M.$$

С их помощью можно построить частные решения вида

$$u_m^n = \lambda_q^n\, y_m^q = \lambda_q^n \sin(\pi\, m\, h\, q),\quad m = 1, \ldots, M-1,\quad q = 1, \ldots, M-1,$$

удовлетворяющие однородным краевым условиям.

27.4. Исследовать устойчивость явной схемы

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n.$$

27.5. Исследовать устойчивость неявной схемы

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + f_m^{n+1}.$$

27.6. Первая краевая задача для однородного уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ аппроксимируется явной двухслойной схемой

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2},$$
$$u_m^0 = u_0(mh),\quad u_0^n = u_M^n = 0\ \ \forall n \geq 0.$$

Определить порядок сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи при различных $\rho = \dfrac{\tau}{h^2}$.

27.7. Доказать, что явная схема

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=\frac{u_{m-1}^n-2u_m^n+u_{m+1}^n}{h^2},$$

$$u_m^0=u_0(mh),\quad u_0^n=u_M^n=0\ \ \forall n\geq 0,$$

неустойчива, если $\overline{\lim\limits_{\tau,h\to 0}}\ \dfrac{\tau/h^2-1/2}{\tau}=\infty$.

27.8. Исследовать устойчивость схемы

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^{n-1}}{2\tau}=\frac{u_{m-1}^n-2u_m^n+u_{m+1}^n}{h^2}.$$

27.9. При каких $\theta\in[0,1]$ схема

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=(1-\theta)\,\frac{u_{m-1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m+1}^{n+1}}{h^2}+\theta\,\frac{u_{m-1}^n-2u_m^n+u_{m+1}^n}{h^2}$$

будет устойчивой?

27.10. Уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ аппроксимируется схемой Дюфорта — Франкела (схема "ромб")

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^{n-1}}{2\tau}=\frac{u_{m+1}^n-u_m^{n-1}-u_m^{n+1}+u_{m-1}^n}{h^2}.$$

Выяснить условия ее устойчивости и показать, что если $h\to 0$, $\tau\to 0$ так, что $\dfrac{\tau}{h}=c\neq 0$, то эта схема аппроксимирует гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

27.11. Для параболического уравнения построить схему наивысшего порядка аппроксимации на шаблоне из точек

$$(x_{m\pm1},t^k),\quad (x_m,t^k),\quad k=n,n+1.$$

27.12. Для параболического уравнения построить схему наивысшего порядка аппроксимации на шаблоне из точек

$$(x_{m\pm1},t^n),\quad (x_m,t^k),\quad k=n-1,n,n+1.$$

27.13. Для параболического уравнения построить схему наивысшего порядка аппроксимации на шаблоне из точек

$$(x_{m-1},t^{n-1}),\quad (x_{m+1},t^{n+1}),\quad (x_m,t^k),\quad k=n-1,n,n+1.$$

27.14. Для параболического уравнения построить схему наивысшего порядка аппроксимации на шаблоне из точек

$$(x_{m-1}, t^{n+1}), \quad (x_{m+1}, t^{n-1}), \quad (x_m, t^k), \quad k = n-1, n, n+1\,.$$

27.15. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{u_m^{j+1} - u_m^{j-1}}{2\tau} = \frac{u_{m-1}^j - 2u_m^j + u_{m+1}^j}{h^2}$$

при краевом условии $u_0^j = u_M^j = 0,\ j = 0, 1, \ldots$.

27.16. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{u_m^{j+1} - u_m^{j-1}}{2\tau} = \frac{u_{m-1}^{j+1} - 2u_m^{j+1} + u_{m+1}^{j+1}}{h^2}$$

при краевом условии $u_0^j = u_M^j = 0,\ j = 0, 1, \ldots$.

27.17. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{u_m^{j+1} - u_m^{j-1}}{2\tau} = \frac{u_{m-1}^j - u_m^{j+1} - u_m^{j-1} + u_{m+1}^j}{h^2}$$

при краевом условии $u_0^j = u_M^j = 0,\ j = 0, 1, \ldots$.

27.18. Исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{u_m^{j+1} - u_m^{j-1}}{2\tau} = \frac{u_{m-1}^j - 2u_m^{j+1} + u_{m+1}^j}{h^2}$$

при краевом условии $u_0^j = u_M^j = 0,\ j = 0, 1, \ldots$.

§ 28. Эллиптические уравнения

Построение и исследование разностных схем для уравнений в частных производных эллиптического типа в простейшем случае проводится в области прямоугольной формы

$$D = \{(x, y) : X > x > 0, Y > y > 0\}$$

на примере уравнения с переменными коэффициентами

$$-Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y)$$

с однородными краевыми условиями первого рода

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(X, y) = 0 \quad &\text{при} \quad Y \ge y \ge 0\,, \\ u(x, 0) = u(x, Y) = 0 \quad &\text{при} \quad X \ge x \ge 0\,. \end{aligned}$$

Наиболее употребительным при этом является случай уравнения Пуассона:

$$-\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)\,.$$

Отметим, что в общем случае на любой стороне прямоугольника краевое условие может быть задано в виде линейной комбинации функции и производной

$$a u + b u' = c\,.$$

Тогда необходимо обратить внимание на способ его аппроксимации.

Типичным примером эллиптического оператора четвертого порядка является бигармонический оператор:

$$\Delta^2 \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\,.$$

Для него краевое условие может содержать линейную комбинацию производных неизвестной функции до третьего порядка включительно.

Особенность постановки эллиптических задач — наличие только краевых условий. Поэтому исследование аппроксимации производится как для гиперболических и параболических уравнений, а исследование устойчивости аналогично случаю разностных схем для линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

28.1. Используя значения функции u в центре A_0 и в вершинах A_k правильного n-угольника со стороной h, получить аппроксимацию оператора Лапласа $\Delta^h u$ в центре многоугольника. Оценить ее порядок для различных n.

28.2. Описать все девятиточечные разностные аппроксимации оператора Лапласа $\Delta^h u(x_1, x_2)$, имеющие вид

$$\frac{1}{h^2}[a_{00}u(x_1,x_2) + a_{10}u(x_1+h,x_2) + a_{-10}u(x_1-h,x_2)+$$

$$a_{01}u(x_1,x_2+h) + a_{0-1}u(x_1,x_2-h) + a_{11}u(x_1+h,x_2+h) + a_{1-1}\cdot$$

$$\cdot u(x_1+1,x_2-h) + a_{-11}u(x_1-h,x_2+h) + a_{-1-1}u(x_1-h,x_2-h)]\,,$$

где a_{kj} не зависят от h, и обладающие вторым порядком аппроксимации, т.е.

$$\Delta^h u(x_1,x_2) - \Delta u(x_1,x_2) = O\left(h^2\right) \quad \text{при} \quad u \in C^{(4)}\,.$$

28.3. При каких значениях параметра c оператор Δ^h из предыдущей задачи будет отрицательно определенным ?

28.4. Построить тринадцатиточечную разностную аппроксимацию бигармонического оператора Δ^2, использующую узлы (x_1, x_2), $(x_1 \pm h, x_2), (x_1, x_2 \pm h), (x_1 \pm 2h, x_2), (x_1, x_2 \pm 2h), (x_1 \pm h, x_2 \pm h)$, $(x_1 \pm h, x_2 \mp h)$, и оценить погрешность аппроксимации на функциях $u \in C^{(6)}$.

28.5. Если u — гармоническая в ограниченной области D функция и Γ — ее граница, то $\int\limits_\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$, где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к границе Γ. Сформулировать и доказать аналог этого равенства для решений разностного уравнения

$$\Delta^h y_{i,j} \equiv \overline{\partial}_1 \partial_1 y_{i,j} + \overline{\partial}_2 \partial_2 y_{i,j} = 0\,, \quad 1 \le i \le N_1,\ \ 1 \le j \le N_2\,,$$

в прямоугольной области, покрытой равномерной сеткой с шагом h.

28.6. Написать разностную схему для уравнения $\Delta u = f$ с аппроксимацией $O\left(h^4\right)$.

28.7. Для уравнения $\Delta u = f$ построить аппроксимацию с порядком $O\left(h^2\right)$ граничного условия $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha u = 0$ на прямой $x_1 = 0$, используя минимальное количество узлов.

28.8. Для уравнения $\Delta u = f$ построить аппроксимацию с порядком $O\left(h^4\right)$ граничного условия $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha u = 0$ на прямой $x_1 = 0$, используя минимальное количество узлов.

28.9. Пусть в прямоугольной области, покрытой равномерной сеткой с шагом h, следующим образом определен разностный аналог оператора Лапласа

$$\Delta^h y_{i,j} \equiv \overline{\partial}_1 \partial_1 y_{i,j} + \overline{\partial}_2 \partial_2 y_{i,j}\,, \quad 1 \le i \le N_1,\ \ 1 \le j \le N_2\,.$$

Показать, что если

$$\Delta^h y_{i,j} \le 0 \quad \text{при всех} \quad 1 \le i \le N_1,\ \ 1 \le j \le N_2\,,$$

то в этом случае наменьшее значение достигается функцией $y_{i,j}$ хотя бы в одной точке границы, т.е. при $i = 0$ или $i = N_1 + 1$, либо при $j = 0$ или $j = N_2 + 1$.

28.10. Доказать, что если в терминах предыдущей задачи справедливо неравенство

$$\Delta^h y_{i,j} \ge 0 \quad \text{при всех} \quad 1 \le i \le N_1,\ \ 1 \le j \le N_2\,,$$

то наибольшее значение достигается функцией $y_{i,j}$ хотя бы в одной точке границы.

28.11. Пусть в прямоугольной области, покрытой равномерной сеткой с шагом h, разностный аналог оператора Лапласа

$$\Delta^h y_{i,j} \equiv \bar{\partial}_1 \partial_1 y_{i,j} + \bar{\partial}_2 \partial_2 y_{i,j}\,, \quad 1 \le i \le N_1,\ 1 \le j \le N_2\,,$$

определен на сеточных функциях $y_{i,j} \equiv y_h$, обращающихся в нуль на границе, т.е. при $i = 0, N_1 + 1$ и при $j = 0, N_2 + 1$. Доказать, что оператор $-\Delta^h$ является симметричным, положительно определенным в обычной евклидовой метрике, и для него справедлива оценка

$$c_1\,(y_h, y_h) \le \left(-\Delta^h y_h, y_h\right) \le c_2\,(y_h, y_h)\,,$$

где постоянная $c_1 > 0$ и не зависит от сеточного параметра h, а постоянная c_2 может быть положена равной $8/h^2$.

28.12. Показать, что для решения методом Гаусса дискретного уравнения Пуассона $\Delta^h y_h = f_h$ с однородными условиями Дирихле на границе (см. предыдущую задачу) при естественной нумерации неизвестных требуется выполнить количество арифметических действий, равное по порядку $O\left(h^{-4}\right)$.

28.13. Упорядочить неизвестные в предыдущей задаче так, чтобы количество арифметических действий для решения методом Гаусса дискретного уравнения Пуассона стало равным по порядку $O\left(h^{-3}\right)$.

28.14. Считая систему базисных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ заданной, выписать систему уравнений метода Ритца для задачи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y) \quad \text{в} \quad D\,,$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\,.$$

28.15. Пусть в единичном квадрате D задана регулярная ("северо — восточная") триангуляция с шагом h и в качестве базисных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ используются кусочно – линейные над треугольниками функции. Выписать систему уравнений метода Ритца для задачи

$$\Delta u = f(x,y) \quad \text{в} \quad D\,,$$
$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\,.$$

Ответы, указания, решения

$\boxed{\S\, 3}$

3.1. 1) $L_3(x) = 2\,x^2 + x + 2$; 2) $L_3(x) = x + 2$.

3.2. x^p при $p = 0, \ldots, n-1$, $\quad x^n - \omega_n(x)$ при $p = n$.

3.3. Пусть $n = 3$. В явной формуле

$$\omega_3(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

сделаем стандартную замену переменных

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y, \quad \text{где} \quad y \in [-1, 1].$$

В результате получим

$$\omega_3(y) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 (y^3 - y).$$

Точки экстремума кубического многочлена $y^3 - y$ на $[-1, 1]$ равны соответственно $y_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно,

$$\|\omega_3(x)\| = |\omega_3(y_{1,2})| = \frac{(b-a)^3}{12\sqrt{3}}.$$

Рассуждая аналогично для $n = 2$ и $n = 4$, получаем

$$\|\omega_2(x)\| = \frac{(b-a)^2}{4}, \quad \|\omega_4(x)\| = \frac{(b-a)^4}{81}.$$

3.4. 1) $p = 3$; 2) $p = 2$.

3.5. Использовать выпуклость функции $\ln x$ и представление погрешности (но не оценку погрешности !).

3.6. Поскольку $f^{(4)}(x) = \dfrac{4!}{(A^2 - x)^5}$ и $\|\omega_4(x)\| = 1$, для оценки погрешности имеем

$$\varepsilon_4 \le \left\| \frac{1}{(A^2 - x)^5} \right\| = \frac{1}{(A^2 + 1)^5}.$$

Следовательно, $|A| \ge 3$.

3.7. Покажем сначала справедливость следующего представления:

$$\Phi_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}.$$

Действительно, поскольку

$$\omega_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j),$$

и при $x = x_i$, $k \neq i$ каждое из произведений под знаком суммирования обращается в нуль,

$$\omega_n'(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j).$$

Без ограничения общности можно считать $c = 0$, т.е. $x_i = -x_{n+1-i}$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим теперь пару слагаемых из общей формулы многочлена Лагранжа, соответствующих равным значениям функции f_k и f_{n+1-k} для некоторого k. После вынесения одинакового числового множителя за скобку получим

$$f_k \left[\frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} + \frac{\omega_n(x)}{(x - x_{n+1-k})\omega_n'(x_{n+1-k})} \right] = \\ = f_k \left[\frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} + \frac{\omega_n(x)}{(x + x_k)\omega_n'(-x_k)} \right].$$

Для четного n функция $\omega_n(x)$ — четная, а ее производная $\omega_n'(x)$, соответственно, — нечетная. Поэтому выражение в квадратных скобках принимает вид

$$\frac{\omega_n(x)}{x^2 - x_k^2} \, \frac{2x_k}{\omega_n'(x_k)},$$

являясь, очевидно, четной функцией.

Аналогично для нечетного n функция $\omega_n(x)$ — нечетная, а ее производная $\omega_n'(x)$, соответственно, — четная, и выражение в квадратных скобках принимает вид

$$\frac{\omega_n(x)}{x^2 - x_k^2} \, \frac{2x}{\omega_n'(x_k)},$$

что также является четной функцией. Отметим, что в данном случае $x = 0$ является узлом интерполяции с номером $k = (n+1)/2$, и у этого слагаемого нет пары. Но оно само — четно, и это замечание завершает доказательство.

3.8. По определению вспомогательные многочлены $(n-1)$-й степени $\Phi_i(y)$, $i = 1, \ldots, n$ обладают свойством $\Phi_i(y_k) = \delta_i^k$. Положим в формуле для $\Phi_i(x)$, обладающей теми же свойствами, $x = x(y)$. Линейное преобразование не меняет степени многочлена. Кроме того, $\Phi_i(x_k) =$

$= \Phi_i(x(y_k)) = \Phi_i(y_k) = \delta_i^k$, т.е. два многочлена $(n-1)$-й степени совпадают в n точках. Отсюда следует их тождественное совпадение, и, следовательно, равенство констант Лебега $\lambda_n^{[a,b]}$ и $\lambda_n^{[-1,1]}$.

Таким образом, величина λ_n не зависит от длины и расположения отрезка интерполяции $[a,b]$, а определяется только взаимным расположением узлов.

3.9. По определению λ_n на отрезке $[1,n]$ имеем

$$\lambda_n = \max_{x\in[1,n]} \sum_{i=1}^{n} \left| \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-j}{i-j} \right|.$$

Отметим справедливость соотношений

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |i-j| = (i-1)!\,(n-i)!\,, \qquad \prod_{j=1}^{n}(j-1/2) \geq \frac{n!}{2\sqrt{n}},\ \ n\geq 1\,,$$

первое из которых очевидно, а второе показывается по индукции. Теперь с их помощью проведем оценку снизу для λ_n:

$$\lambda_n = \max_{x\in[1,n]} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!\,(n-i)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x-j| \ \geq \ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!\,(n-i)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{3}{2}-j\right|$$

(использовано неравенство $\max\limits_{x\in[1,n]} |f(x)| \geq |f(3/2)|$).

Для оценки произведения в правой части проделаем преобразования:

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{3}{2}-j\right| = \frac{1}{|i-\frac{3}{2}|} \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{3}{2}-j\right| = \frac{1}{2|i-\frac{3}{2}|} \prod_{j=1}^{n-1} \left|\frac{1}{2}-j\right| \geq \frac{(n-1)!}{4(n-\frac{3}{2})\sqrt{n-1}}.$$

И наконец, получим искомое неравенство $\left(K = \dfrac{1}{8}\right)$:

$$\lambda_n \geq \frac{1}{4(n-\frac{3}{2})\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!} \geq \frac{1}{4n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} = \frac{1}{8}\,\frac{2^n}{n^{3/2}}.$$

3.10. Пусть справедливо неравенство

$$\max_{x\in[1,n]} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x-j| \ \leq \ (n-1)!\,.$$

Тогда из решения предыдущей задачи имеем

$$\lambda_n = \max_{x\in[1,n]} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i-1)!\,(n-i)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |x-j| \leq \sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1} = K\,2^n,\ K = \frac{1}{2}\,.$$

Докажем вспомогательное неравенство с помощью специальной параметризации аргумента x. Пусть $x = k+t$, где k — целое. При $2 \le k \le n-1$ будем предполагать, что $|t| \le 1/2$; при $k = 1$ параметр t принимает значение из отрезка $[0, 1/2]$, а при $k = n$ — из $[-1/2, 0]$. Отметим равенство

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |x - j| \;=\; \left|\frac{t}{k-i+t}\right| (t+1)\dots(t+k-1)(1-t)\dots(n-k-t).$$

При $t > 0$ справедливы неравенства:

$$(t+1)\dots(t+k-1) < k!, \quad (1-t)\dots(n-k-t) < (n-k)!,$$

а при $t < 0$ — соответственно:

$$(t+1)\dots(t+k-1) < (k-1)!, \quad (1-t)\dots(n-k-t) < (n-k+1)!.$$

В обоих случаях использование соотношений

$$\left|\frac{t}{k-i+t}\right| \le 1, \quad k!(n-k)! \le (n-1)!, \;\; 1 \le k < n$$

приводит к искомому неравенству. Оценка доказана.

3.11. $x_1 = -\xi$, $x_2 = 0$, $x_3 = \xi$, где ξ — произвольное число из отрезка $[\sqrt{8}/3, 1]$; $\lambda_3 = 5/4$.

$\boxed{\S\, 4}$

4.1. 1) Следствием тригонометрического тождества

$$\cos\big((n+m)\eta\big) + \cos\big((n-m)\eta\big) = 2\cos(n\eta)\cos(m\eta)$$

является полиномиальное —

$$2T_n(x)T_m(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x), \;\; n \ge m \ge 0,$$

из которого при $n = m$ следует искомое.

2) Положим $x = \cos\eta$, тогда $dx = -\sin\eta d\eta$ и

$$I_{mn} = \int_0^{\pi} \cos(n\eta)\cos(m\eta)d\eta = \frac{\pi}{2}(\delta^0_{n-m} + \delta^0_{n+m}).$$

3) Поскольку $\dfrac{T'_n}{n} = \dfrac{-\sin(n\arccos x)}{-\sqrt{1-x^2}}$, полагая $x = \cos\eta$, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x)\right) = \frac{\sin((n+1)\eta) - \sin((n-1)\eta)}{2\sin\eta} =$$
$$= \frac{2\cos(n\eta)\sin\eta}{2\sin\eta} = T_n(x);$$

теперь искомое равенство справедливо с точностью до постоянной, которую легко определить, так как $T_n(-1) = (-1)^n$.

4) Непосредственно дифференцированием вычисляется $T_n''(x)$; напомним, что $(\arccos x)' = -(1-x^2)^{-1/2}$.

4.2. $x_m = \cos\dfrac{\pi(2m-1)}{2n}$, где $m = 1,\dots,n$ (все нули лежат внутри отрезка $[-1,1]$, их ровно n).

4.3. $x_m = \cos\dfrac{\pi m}{n}$, $m = 0,\dots,n$ (на $[-1,1]$ имеется $n+1$ экстремум и $T_n(x_m) = (-1)^m$).

4.4. Пусть $\|P_n(x)\| < 2^{1-n}$. Тогда в точках экстремума многочлена Чебышева знак разности $\overline{T}_n(x) - P_n(x)$ определяется знаком $\overline{T}_n(x)$

$$\operatorname{sign}\left(\overline{T}_n(x_m) - P_n(x_m)\right) = \operatorname{sign}\left((-1)^m 2^{1-n} - P_n(x_m)\right) = (-1)^m .$$

При этом указанная разность является отличным от нуля многочленом степени $n-1$, но имеет n нулей, поскольку $n+1$ раз меняет знак в точках экстремума. Полученное противоречие и дает искомый результат.

4.5. Сделаем линейную замену переменных $x' = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}x$ для отображения отрезка $[-1,1]$ в заданный отрезок $[a,b]$. Многочлен $\overline{T}_n(x)$ при этом преобразуется в многочлен $\overline{T}_n\left(\dfrac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$ со старшим коэффициентом $(2/(b-a))^n$. После перенормировки и использования схемы доказательства из предыдущей задачи имеем

$$\overline{T}_n^{[a,b]}(x) = (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right).$$

4.6. Использовать решение предыдущей задачи.

4.7.

$$P_n^*(x) = c\left(\frac{b-a}{2}\right)^k \frac{T_n\left(\dfrac{2x-(a+b)}{b-a}\right)}{T_n^{(k)}\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)}.$$

4.8.

$$P_n^*(x) = 2^{1-n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^{-n} T_n\left(x\cos\frac{\pi}{2n}\right).$$

4.9. Предположив противное, т.е. допустив существование такого ξ, $|\xi| \geq 1$, что $\left|P_n(\xi)\right| > M\left|T_n(\xi)\right|$, получить противоречие, доказав, что у полинома $Q_n(x) = \dfrac{P_n(\xi)}{T_n(\xi)}T_n(x) - P_n(x)$ как минимум $n+1$ нуль.

4.10. Рассмотрим функцию $\Lambda_n(x)$ такую, что

$$\lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \Lambda_n(x).$$

Она, по определению λ_n, имеет вид

$$\Lambda_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)} \right| .$$

С учетом выбора узлов интерполяции, получим

$$\Lambda_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\cos(n\arccos x)| \sin\frac{2i-1}{2n}\pi}{n|x-\cos\frac{2i-1}{2n}\pi|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\cos(\pi n\varphi)|\sin\frac{2i-1}{2n}\pi}{n|\cos(\pi\varphi)-\cos\frac{2i-1}{2n}\pi|},$$

где сделана замена $x=\cos(\pi\varphi)$, а φ меняется на отрезке $[0,1]$. Обозначим эту сумму через $\theta(\varphi)$ и заметим, что в силу симметрии узлов $\Lambda_n(x)$ — четная функция, поэтому при оценке сверху для $\theta(\varphi)$ достаточно рассматривать только отрезок $[0,1/2]$.

Так как имеют место неравенства

$$\sin|\alpha| \le |\alpha|; \qquad \sin|\beta| \ge \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}|\beta|, \ \ |\beta| \le \frac{3}{4}\pi, \qquad \sin|\beta| \ge \frac{2}{\pi}|\beta|, \ \ |\beta| \le \frac{\pi}{2},$$

то при $0<\beta\le\pi/2, \ \ 0<\alpha\le\pi$, имеем

$$\frac{|\sin\alpha|}{|\cos\beta-\cos\alpha|} = \frac{|\sin\alpha|}{2\sin\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|\sin\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|} \le \frac{3\pi^2}{2\sqrt{2}}\frac{\alpha}{|\alpha+\beta|\,|\alpha-\beta|},$$

откуда, если положить

$$\alpha = \frac{2i-1}{2n}\pi, \quad \beta=\pi\varphi=\frac{\pi}{2}\frac{2m-1-2t}{n}, \ 1\le m\le\frac{n+2}{2}, \ 0\le t\le\frac{1}{2},$$

следует, что

$$\frac{\sin\frac{2i-1}{2n}\pi}{|\cos\pi\varphi-\cos\frac{2i-1}{2n}\pi|} \le \frac{3\pi n}{4\sqrt{2}}\frac{2i-1}{|m+i-1-t||m-i-t|}.$$

Выражение $\varphi=\frac{2m-1-2t}{2n}$, $1\le m\le 1+\frac{n}{2}$, корректно, так как, полагая m в указанных пределах и изменяя t на $[0,1/2]$, можно получить любое значение φ из отрезка $[0,1/2]$. Далее имеем

$$|\cos\pi n\varphi| = \left|\cos\frac{\pi}{2}(2i-1-2t)\right| = \sin\pi t \le \pi t.$$

Используя два последние неравенства, оценим $\theta(\varphi)$:

$$\theta(\varphi) \le C\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{|m+i-1-t||m-i-t|}, \quad C=\frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что при $m=1$

$$\theta(\varphi) \le C\left[\frac{1}{1-t} + t\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i-1+t}+\frac{1}{i-1}\right)\right] \le$$
$$\le C\left(2+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right) \le C\left(3+\int_1^n\frac{dt}{t}\right) = C\,(3+\ln n).$$

При $2 \le m \le 1 + \frac{n}{2}$ получаем

$$\theta(\varphi) \le C \left[\frac{2m-1}{2m-1-t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{m-i-t} - \frac{1}{m+i-1-t} \right) + \right.$$
$$\left. \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{1}{m+i-1-t} + \frac{1}{i-m+t} \right) \right] \le C \left(4 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \right) \le C\,(4 + \ln n)\,.$$

Окончательно имеем

$$\lambda_n = \max_{\varphi \in [0,1]} \theta(\varphi) \le C\,(4 + \ln n) \le K \ln n\,.$$

4.11. $\lambda_3 = 5/3$.

4.12. Воспользоваться третьим свойством из задачи 4.1 в виде

$$\frac{T_n'}{n} = 2T_{n-1} + \frac{T_{n-2}'}{n-2}, \quad n > 2\,.$$

4.13.

$$1) T_{3k}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k, \quad T_{3k\pm 1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1)^k\,;$$
$$2) T_{3k}\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \quad T_{3k\pm 1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,.$$

4.14. $1) T_n'(1) = n^2\,;\quad 2) T_n'(-1) = (-1)^{n+1} n^2\,.$

4.15. $p = 2$.

4.16. $p = 3$.

4.17. $P(x) = 4\,\dfrac{T_3(x-4)}{T_3^{(2)}(-4)} = -\dfrac{x^3}{6} + 2x^2 - \dfrac{189x}{24} + \dfrac{61}{6}\,.$

4.18. $P(x) = \dfrac{5}{32}\,T_3(2x-3) = \dfrac{5}{32}(32x^3 - 144x^2 + 210x - 99)\,.$

4.19. $P(x) = 4\,\dfrac{T_3(x-2)}{T_3(-2)} = -\left(\dfrac{8x^3}{13} - \dfrac{48x^2}{13} + \dfrac{90x}{13} - 4\right).$

4.20. $P(x) = 3\,\dfrac{T_3(x-3)}{T_3'(-3)} = \dfrac{4x^3}{35} - \dfrac{36x^2}{35} + 3x - \dfrac{99}{35}\,.$

§ 5

5.1. Использовать явное представление погрешности производной многочлена Лагранжа.

5.2. Использовать разложение в ряд Тейлора.

5.3.

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}\,,$$
$$f'''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2\,f(x+h) + 2\,f(x-h) - f(x-2h)}{2\,h^3}\,,$$
$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x+2h) - 4\,f(x+h) + 6\,f(x) - 4\,f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}\,.$$

5.4. 1) $K_2 = \dfrac{h^2}{12}$; 2) $K_3 = \dfrac{h^2}{4}$; 3) $K_4 = \dfrac{h^2}{6}$.

5.5. Решение данной задачи выполнить по аналогии со следующим примером для разности вперед.

Полная погрешность для разности вперед $\partial f(x)$ имеет вид

$$R_1(h,\varepsilon) = \left| \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h} - f'(x) \right|,$$

где $f^*(x+h)$ и $f^*(x)$ — приближенные значения функции $f(x)$ в соответствующих точках. Добавим в числитель дроби $\pm f(x+h)$ и $\pm f(x)$ и после перегруппировки слагаемых получим

$$\left| \frac{f^*(x+h) - f(x+h)}{h} - \frac{f^*(x) - f(x)}{h} + \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) \right| .$$

Оценка неустранимой погрешности для каждого из двух первых слагаемых имеет вид ε/h, а погрешность метода в предположении ограниченности второй производной $\left|f''(\xi)\right| \le M_2$ равна $h\,M_2/2$. Окончательно получим

$$R_1(h,\varepsilon) \le \frac{2\,\varepsilon}{h} + \frac{h\,M_2}{2} .$$

Для нахождения значения h_0, при котором минимизируется полная погрешность, необходимо полученное выражение в правой части продифференцировать по h и приравнять к нулю. После решения полученного уравнения имеем

$$h_0 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{M_2}} \quad \Longrightarrow \quad R_1(h_0,\varepsilon) = 2\sqrt{\varepsilon\, M_2} .$$

$$h_0 = 2\left(\frac{3\varepsilon}{M_4}\right)^{1/4} \quad \text{для} \ R_2(h,\varepsilon); \quad h_0 = 2\left(\frac{3\varepsilon}{M_6}\right)^{1/6} \quad \text{для} \ R_4(h,\varepsilon) .$$

5.6. 1) $a = -\dfrac{1}{6}$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{2}{3}$; 2) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 2$, $d = -\dfrac{1}{2}$.

5.7. Разбить интеграл на два и интегрировать по частям.

5.8.

$$1) a = -\frac{3}{2},\ b = 2,\ c = -\frac{1}{2}\ ; \quad h_{opt} = \left(\frac{2\varepsilon}{A_3}\right)^{1/3} ;$$

$$2) a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{2}{3},\ c = \frac{1}{6}\ ; \quad h_{opt} = \left(\frac{2\varepsilon}{A_3}\right)^{1/3} ;$$

$$3) a = \frac{3}{2},\ b = -2,\ c = \frac{1}{2}\ ; \quad h_{opt} = \left(\frac{2\varepsilon}{A_3}\right)^{1/3} ;$$

$$4) a = -\frac{5}{6},\ b = \frac{3}{2},\ c = -\frac{2}{3}\ ; \quad h_{opt} = \left(\frac{7\varepsilon}{12A_3}\right)^{1/3} .$$

§ 6

6.1. $Q_{50}(x) = 0$.

6.2. Напомним, что выпуклая функция удовлетворяет неравенству $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Обозначим через $\{\xi_i\}$ множество точек альтернанса, $g(x) = f(x) - Q_1^0(x)$, $\theta = \inf\limits_i\{\xi_i : f(\xi_i) - Q_1^0(\xi_i) = M\}$. Отметим, что в силу непрерывности $f(x)$ имеем $g(\theta) = M$. Доказательство проведем от противного. Пусть, например, $a \notin \{\xi_i\}$, т.е. $\theta \ne a$. Тогда в силу выпуклости $f(x)$ (добавление к ней линейной функции $Q_1^0(x)$ этого свойства не меняет) справедлива цепочка неравенств для достаточно малого ε

$$M = g(\theta) \le \frac{g(\theta+\varepsilon)+g(\theta-\varepsilon)}{2} < \frac{M+M}{2} = M.$$

Полученное противоречие означает, что $a \in \{\xi_i\}$. Аналогично доказывается принадлежность множеству точек альтернанса другого конца отрезка.

6.3. Введем обозначение $L = \|f(x) - Q_1(x)\|$ и, воспользовавшись выпуклостью $f(x)$, выпишем соотношения из теоремы Чебышева:

$$\begin{aligned} f(a) - (a_0 + a_1\,a) &= \alpha L, \\ f(d) - (a_0 + a_1\,d) &= -\alpha L, \\ f(b) - (a_0 + a_1\,b) &= \alpha L. \end{aligned}$$

Кроме того, поскольку d — внутренняя точка альтернанса и $f(x)$ — дифференцируема, отсюда получаем недостающее уравнение:

$$\left(f(x) - (a_0 + a_1\,x)\right)'\Big|_{x=d} = 0.$$

$Q_1(x) = 7x - 3 - \dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

6.4. $Q_1(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{6}$.

6.5. По определению многочлена наилучшего равномерного приближения, величина $L = \|f(x) - Q_n(x)\|$ не может превосходить оценки погрешности приближения $f(x)$ интерполяционным многочленом по узлам, являющимся нулями многочлена Чебышева, т.е.

$$L \le \max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|\,\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}.$$

С другой стороны, разность $f(x) - Q_n(x)$ вследствие теоремы Чебышева обращается в нуль в $(n+1)$-ой точке, которые можно рассматривать как узлы интерполяции $y_1, \ldots, y_{n+1}$. Поэтому верно представление погрешности следующего вида:

$$f(x) - Q_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!},$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x-y_1)\cdots(x-y_{n+1})$ и $\xi = \xi(x) \in [a,b]$. Пусть точка x_0 такова, что $\left|\omega_{n+1}(x_0)\right| = \|\omega_{n+1}(x)\|$. Тогда

$$L \geq \left|f(x_0) - Q_n(x_0)\right| = \left|f^{(n+1)}(\xi(x_0))\right| \frac{\left|\omega_{n+1}(x_0)\right|}{(n+1)!}.$$

Поскольку $\|\omega_{n+1}(x)\| \geq (b-a)^{n+1}/2^{2n+1}$, окончательно имеем

$$L \geq \min_{[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}.$$

Таким образом, если $f^{(n+1)}(x)$ сохраняет знак и меняется не очень сильно, то разница между погрешностями приближения функции $f(x)$ многочленом наилучшего равномерного приближения и интерполяционным многочленом по нулям многочленов Чебышева несущественна.

6.6. Пусть $Q_n(x)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения $f(x)$ на $[-1,1]$. Тогда $\left|f(x) - Q_n(x)\right| \leq L = \|f(x) - Q_n(x)\|$. После замены x на $-x$ и умножения выражения под знаком модуля на -1 получим

$$\left|-f(-x) - (-Q_n(-x))\right| \leq L \quad \text{или} \quad \left|f(x) - (-Q_n(-x))\right| \leq L.$$

Следовательно, $-Q_n(-x)$ также является многочленом наилучшего равномерного приближения $f(x)$ на $[-1,1]$. По теореме единственности имеем $Q_n(x) = -Q_n(-x)$, что и требовалось показать.

Аналогично рассматривается случай четной $f(x)$.

6.7. $\|\sin x - Q_{2n-1}(x)\| = \|\sin x - Q_{2n}(x)\|$;

$C_{2n-1} = C_{2n} = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!}$.

6.8. $f(x) = \operatorname{sign} x$ на $[-1,1]$, $Q_1(x) = \alpha x$, $\alpha \in [0,2]$.

6.9. 1) $Q_1(x) = \frac{3}{4}x$;

2) $Q_3(x) = (e-1)x^2 + \frac{e}{2} - \frac{1}{2}(e-1)\ln(e-1)$;

3) $Q_3(x) = -x^2 + 7x - \frac{17}{2}$.

6.10. $Q_1(x) = x + \frac{9}{8}$.

6.11. $Q_3(x) = \frac{1}{2}$.

6.12. $Q_1(x) = \frac{1}{3}(x+2)$.

6.13. $Q_1(x) = \frac{3}{4}x$.

§ 7

7.7. $f_{-1} = 2f_0 - f_1$, $\quad f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1}$.

7.8. $f_{-2} = 10f_0 - 20f_1 + 15f_2 - 4f_3$, $\quad f_{-1} = 4f_0 - 6f_1 + 4f_2 - f_3$,

$$f_{n+1} = 4f_n - 6f_{n-1} + 4f_{n-2} - f_{n-3},$$
$$f_{n+2} = 10f_n - 20f_{n-1} + 15f_{n-2} - 4f_{n-3}.$$

§ 8

8.1. При вычислении интегралов удобно использовать замену переменной

$$x = x(t) = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\,t\,.$$

В частности, это дает

$$\int\limits_a^b \left|\omega_n(x)\right| dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \int\limits_{-1}^{1} \left|\omega_n^0(t)\right| dt\,,$$

где $\omega_n^0(t) = \prod\limits_{i=1}^{n}(t-d_i)$, а d_i являются образами узлов x_i на отрезке $[-1, 1]$.

$n = 1$ — формула прямоугольников

$$S_1(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad R_1 = \left\|f'(x)\right\| \frac{(b-a)^2}{4}\,;$$

$n = 2$ — формула трапеций

$$S_2(f) = \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big), \quad R_2 = \left\|f''(x)\right\| \frac{(b-a)^3}{12}\,;$$

$n = 3$ — формула парабол (Симпсона)

$$S_3(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right), \quad R_3 = \left\|f^{(3)}(x)\right\| \frac{(b-a)^4}{192}\,.$$

8.2. Поскольку сравнение точности можно проводить только для функций из одного класса, необходимо получить для формулы прямоугольников несколько другую оценку погрешности. Для этого воспользуемся в качестве приближения к функции $f(x)$ отрезком ряда Тейлора в точке $(a+b)/2$:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Тогда для квадратурной формулы $\widetilde{S}_1(f)$, полученной с помощью интегрирования двух первых слагаемых, справедливо равенство

$$\widetilde{S}_1(f) = \int\limits_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right] dx = S_1(f)\,,$$

при этом оценка погрешности принимает вид

$$\widetilde{R}_1 = \frac{\left\|f''(x)\right\|}{2} \int\limits_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \left\|f''(x)\right\| \frac{(b-a)^3}{24}\,.$$

Следовательно, на классе функций с непрерывной второй производной формула прямоугольников в два раза точнее формулы трапеций.

Отметим, что этот прием для получения других оценок погрешностей формул Ньютона — Котеса может применяться только при нечетных n. В частности, это приводит к известной оценке для формулы Симпсона

$$\tilde{R}_3 = \left\|f^{(4)}(x)\right\| \frac{(b-a)^5}{2880}.$$

8.3. Использовать четность функции

$$\Phi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

при симметричном расположении узлов.

8.4. Проинтегрировать правую часть равенства по частям два раза.

8.5. 1) $N = 13$; 2) $N = 16$ (для второго случая полезно воспользоваться решением предыдущей задачи).

8.6. Воспользоваться решением задачи 8.4. Для второго случая дополнительно ввести функцию

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} (x_k - x)(x_{k+1} - x) & \text{на} \quad [x_k, x_{k+1}], \\ 0 & \text{вне} \quad [x_k, x_{k+1}]. \end{cases}$$

Тогда имеют место соотношения

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_k - \xi)(x_{k+1} - \xi) f''(\xi)\, d\xi =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_a^b \varphi_k(\xi) f''(\xi)\, d\xi = \int_a^b f''(\xi) \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k(\xi)\, d\xi,$$

к последнему из которых достаточно применить неравенство Коши — Буняковского.

8.7. $\|f^{(4)}(x)\|_C \dfrac{1}{2880 \cdot 5^4}$.

8.8. $\dfrac{1}{600}$.

8.9. $N \geq \left[\sqrt{\frac{\theta}{12}} \cdot 10^2\right] + 1 \approx 41, \quad \theta = \max(2, 4\sin 1 - 2\cos 1) \approx 2.29$.

8.10. $N \geq \left[\sqrt{\frac{e}{2}} \cdot 10^2\right] + 1$.

$\boxed{\S\, 9}$

9.1. $S_3(f) = \dfrac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$.

9.2. $c_1 = -c_2 = \dfrac{1}{100\pi}$.

9.3. 1) $S(f) = \dfrac{11}{15} f(0) + \dfrac{49}{15} f\left(\dfrac{10}{7}\right)$;

2) $S(f) = \frac{1}{48} f(0) + \frac{5}{16} f\left(-\frac{4}{5}\right)$;

3) $S(f) = \frac{2}{3} f(0)$.

9.4. Представим производную $P_n(x)$ в виде

$$P_n'(x) = P_n(x) \frac{d}{dx} \ln P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_n(x)}{x - x_k},$$

где

$$\frac{P_n(x)}{x - x_k} = x^{n-1} + (a_1 + x_k)x^{n-2} + (a_2 + a_1 x_k + x_k^2)x^{n-3} + \cdots$$
$$\cdots + (a_{n-1} + a_{n-2}x_k + \cdots + a_1 x_k^{n-2} + x_k^{n-1}).$$

Положим $a_0 = 1$. Тогда соотношение для производной можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k x^{n-k-1} = nx^{n-1} + (na_1 + B_1)\, x^{n-2} +$$

$$+ (na_2 + a_1 B_1 + B_2)\, x^{n-3} + \cdots + + (na_{n-1} + a_{n-2}B_1 + \cdots + a_1 B_{n-2} + B_{n-1}).$$

Из равенства коэффициентов при одинаковых степенях x и следуют соотношения для $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Последнее (для a_n) получается из сложения равенств

$$P_n(x_k) = \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^{n-j}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$a_{n-1}B_1 + a_{n-2}B_2 + \cdots + a_1 B_{n-1} + B_n = -a_n n.$$

9.5. Имеем следующие соотношения для $f(x) = x^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$I(x^j) = B(x^j) \quad \text{или} \quad \frac{1 - (-1)^{j+1}}{j+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^j = \frac{2}{n} B_j.$$

Решение этих систем дает

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad P_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x, \quad P_4(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45}.$$

9.6. Представим произвольный многочлен P_{2n-1} степени $2n-1$ в виде суммы многочленов Чебышева $P_{2n-1} = \sum\limits_{m=0}^{2n-1} a_m T_m(x)$, для которых $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$, и будем осуществлять проверку утверждения.

При $m = 0$ имеем

$$I(T_0) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi, \quad S_n(T_0) = \pi.$$

При $m > 0$ для интегралов выполняется свойство ортогональности $I(T_m T_0) = 0$. Для квадратурной формулы проведем преобразования

$$S_m(T_m) = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos(m\arccos x_j) = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos m\frac{(2j-1)\pi}{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\sum_{j=1-n}^{n}\exp\left(\frac{m(2j-1)\pi i}{2n}\right).$$

Далее используем формулу суммы членов геометрической прогрессии

$$\sum_{j=1}^{n} aq^{j-1} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}, \quad q = \exp\left(\frac{m\pi i}{n}\right),$$

и окончательно для $m = 1, \ldots, 2n-1$ получим

$$S_n(T_m) = \frac{\pi}{2n}\,\frac{\exp\left(\dfrac{m(2n+1)\pi i}{2n}\right) - \exp\left(\dfrac{m(1-2n)\pi i}{2n}\right)}{\exp\left(\dfrac{m\pi i}{n}\right) - 1} = 0.$$

9.7. Рассмотреть величины $I(f)$ и $S_n(f)$ на функциях вида

$$f(x) = \exp\left(2\pi m i\,\frac{x}{\omega}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

При этом для интегралов имеем

$$I(f) = \begin{cases} \omega, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

Применение квадратурной формулы дает

$$S_n(f) = \frac{\omega}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\exp\left(2\pi m i\,\frac{j}{n}\right) = \begin{cases} \dfrac{\omega}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} 1 = \omega, & \dfrac{m}{n} \text{ — целое,} \\ \dfrac{\exp(2\pi m i) - 1}{\exp(2\pi m i/n) - 1} = 0, & \dfrac{m}{n} \text{ — не целое.} \end{cases}$$

Приведенное выражение означает, что квадратурная формула точна для всех $\sin\dfrac{2\pi m x}{\omega}$ и $\cos\dfrac{2\pi m x}{\omega}$, если $m = 0$ или $\dfrac{m}{n}$ не целое, т.е. точна для всех тригонометрических многочленов степени не выше $n-1$. Из явного выражения для $S_n(f)$ следует, что эта формула будет также точна для функций $\sin\dfrac{2\pi n x}{\omega}$.

9.8. Линейным невырожденным преобразованием, якобиан которого постоянный и неравный нулю, произвольный треугольник переводится в равнобедренный прямоугольный, и проверка утверждения становится простой.

9.9. Линейным невырожденным преобразованием, якобиан которого постоянный и неравный нулю, произвольный прямоугольник переводится в квадрат, симметричный относительно нуля.

9.10. 1) $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$, $\quad x_1 = 1$, $\quad x_{2,3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad c = \frac{2}{3}$;

2) $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{1}{16}$, $\quad x_1 = \frac{1}{2}$, $\quad x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\quad c = \frac{1}{3}$;

3) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $\quad x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\quad c = \frac{1}{3}$;

4) $x_1 = -1$, $\quad x_{2,3} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad c = \frac{2}{3}$.

9.11. 1) $S_2(f) = \frac{1}{6}f(0) + \frac{5}{2}f\left(-\frac{8}{5}\right)$;

2) $S_2(f) = \frac{1}{18}f(0) + \frac{4}{9}f\left(\frac{3}{4}\right)$;

3) $S_2(f) = \frac{4(\pi - 3)}{\pi^2 - 8}f(0) + \frac{(\pi - 2)^2}{\pi^2 - 8}f\left(\frac{\pi^2 - 8}{2(\pi - 2)}\right)$;

4) $S_2(f) = \frac{26}{21}f(0) + \frac{100}{21}f\left(\frac{7}{5}\right)$.

§ 10

10.1. $\psi_0 = 1$, $\quad \psi_1 = x$, $\quad \psi_2 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\quad \psi_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$, $\ldots$.

10.2. Если $\psi_n(x)$ имеет на $[a, b]$ только $r < n$ нулей нечетной кратности, то многочлен

$$Q_{n+r}(x) = \psi_n(x) \prod_{l=1}^{r} (x - x_l)$$

не меняет знака на этом отрезке, что противоречит свойству ортогональности всем многочленам низшей степени.

10.3. Пусть $P_n(x)$ — произвольный многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Тогда $P_n(x) = \psi_n(x) + r_{n-1}(x)$, и из ортогональности $\psi_n(x)$ любому многочлену низшей степени следует

$$\left\|P_n(x)\right\|^2 = \left\|\psi_n(x)\right\|^2 + \left\|r_{n-1}(x)\right\|^2.$$

10.4. Представим многочлен $x\psi_{n-1}$ в виде $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \psi_k$, где коэффициенты α_j определяются из условий ортогональности

$$(x\psi_{n-1}, \psi_j) = \alpha_j (\psi_j, \psi_j).$$

При $j < n - 2$ имеем

$$(x\psi_{n-1}, \psi_j) = (\psi_{n-1}, x\psi_j) = \left(\psi_{n-1}, Q_{j+1}(x)\right) = 0,$$

т.е. все $\alpha_j = 0$ при $j < n-2$ (здесь $Q_{j+1}(x)$ обозначает некоторый многочлен степени $j+1$). Таким образом,

$$x\psi_{n-1} = \alpha_n\psi_n + \alpha_{n-1}\psi_{n-1} + \alpha_{n-2}\psi_{n-2}\,,$$

при этом $\alpha_n = 1$ в силу равенства коэффициентов при старшей степени x. Отсюда следует, что

$$\psi_n(x) = (x - \alpha_{n-1})\psi_{n-1} - \alpha_{n-2}\psi_{n-2}, \quad b_n = -\alpha_{n-1}\,.$$

Поскольку $(x\psi_{n-1}, \psi_{n-2}) = (\psi_{n-1}, \psi_{n-1})$,

$$c_n = \alpha_{n-2} = \frac{(\psi_{n-1}, \psi_{n-1})}{(\psi_{n-2}, \psi_{n-2})} > 0\,.$$

10.5. $\psi_0(x) = 1$, $\psi_1(x) = x$. Продолжить решение по индукции с использованием рекуррентного соотношения.

10.6. Все корни x_k многочлена $\psi_n(x)$ положительны, а его коэффициенты выражаются через величины $B_j = \sum_{k=1}^{n} x_k^j$ (см. задачу 9.4).

10.7. Подставим $x = x_i^{(n)}$ в рекуррентное соотношение (см. задачу 10.4)

$$\psi_{n+1} = (x - \alpha_n)\psi_n - \alpha_{n-1}\psi_{n-1}\,.$$

Напомним, что здесь $\alpha_{n-1} > 0$. Тогда будем иметь

$$\psi_{n+1}\left(x_i^{(n)}\right) + \alpha_{n-1}\psi_{n-1}\left(x_i^{(n)}\right) = 0\,.$$

Пусть утверждение задачи верно для некоторого n. Отсюда и из

$$\operatorname{sign}\psi_{n-1}(b) = 1, \quad \operatorname{sign}\psi_{n-1}(a) = (-1)^{n-1}$$

следует, что

$$\psi_{n-1}\left(x_i^{(n)}\right) = (-1)^{n-i},$$

а знаки $\operatorname{sign}\psi_{n+1}\left(x_i^{(n)}\right) = -\operatorname{sign}\psi_{n-1}\left(x_i^{(n)}\right)$ противоположны. Поскольку

$$\operatorname{sign}\psi_{n+1}(b) = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{sign}\psi_{n+1}(a) = (-1)^{n+1},$$

имеем перемены знака $\psi_{n+1}(x)$ в последовательно расположенных точках $a, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}, b$, что и завершает доказательство.

10.8. 1) $\frac{1}{2} f\left(\frac{2}{3}\right)$; 2) $(e-1) f\left(\frac{1}{e-1}\right)$.

10.9. 1) $\frac{1}{3}\left(f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + f\left(\sqrt{-\frac{3}{5}}\right)\right)$;

2) $f\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right)$.

10.10. $\frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

10.11. Рассмотрим многочлен степени $k = 2n-2$ вида $P_k(x) = \left(\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} (x - x_i)\right)^2$. Для интеграла от этого многочлена формула Гаусса дает точный результат:

$$\int_a^b p(x)P_k(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} c_j P_k(x_j) = \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} c_j P_k(x_j) + c_k P_k(x_k).$$

Поскольку справедливо

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} c_j P_k(x_j) = 0,$$

имеет место равенство

$$c_k = \frac{\int_a^b p(x)P_k(x)\,dx}{P_k(x_k)} > 0.$$

10.12. Симметрия узлов квадратуры следует из задачи 10.5, а симметрия коэффициентов есть следствие симметрии узлов. (см. задачу 8.3).

10.13. $\Psi_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$.

10.14. $\Psi_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$.

10.15. $\Psi_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$.

10.16. $\Psi_1(x) = x-1$, $\quad \Psi_2(x) = x^2-4x+2$, $\quad \Psi_3(x) = x^3-9x^2+18x-6$.

10.17. $S_2(f) = f\left(\frac{\pi + \sqrt{\pi^2-8}}{2}\right) + f\left(\frac{\pi - \sqrt{\pi^2-8}}{2}\right)$.

10.18. $S_2(f) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$.

10.19. $S_2(f) = \frac{1}{24}\left[f\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}}\right) + f\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}}\right)\right]$.

§ 11

11.1. Пусть $[x_i, x_{i+1}]$ — один из подотрезков длины h, на которые разбит отрезок $[a,b]$, и пусть $\bar{x} = (x_i + x_{i+1})/2$. Используя тейлоровское разложение подынтегральной функции в точке $\bar{x}$, получить следующие представления:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = hf(\bar{x}) + \frac{h^3}{24} f''(\bar{x}) + \frac{h^5}{1920} f^{(4)}(\bar{x}) + \ldots,$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h - \frac{h^3}{12} f''(\bar{x}) - \frac{h^5}{480} f^{(4)}(\bar{x}) - \ldots .$$

11.5. $S_{h,h/2} = S_{h/2} + \dfrac{S_{h/2} - S_h}{2^m - 1}$.

11.7. Порядок главного члена погрешности увеличится на 2.

11.8. Действительно, если $S_{h/2} > S_h$, то $S_{h,h/2} > S_{h/2} > S_h$. Если $S_{h/2} < S_h$, то $S_{h,h/2} < S_{h/2} < S_h$.

11.9. Можно предложить следующий способ (*процесс Эйткена*), являющийся обобщением правила Рунге. Пусть I — точное значение интеграла. Выберем три равномерные сетки с шагами h, $h/2$ и $h/4$. Если учитывать только главный член погрешности, то получаем систему трех уравнений:

$$I = S_h + ch^p,$$
$$I = S_{h/2} + \frac{1}{2^p} ch^p,$$
$$I = S_{h/4} + \frac{1}{4^p} ch^p,$$

в которой значения I, c и p не известны. Из первого и второго уравнений имеем:

$$ch^p \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) = S_{h/2} - S_h.$$

Из второго и третьего уравнений получим

$$\frac{1}{2^p} ch^p \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) = S_{h/4} - S_{h/2}.$$

Из последних двух равенств получаем уравнение для определения p:

$$2^p = \frac{S_{h/2} - S_h}{S_{h/4} - S_{h/2}}.$$

Оценка для главного члена погрешности имеет вид

$$ch^p = \frac{\left(S_{h/2} - S_h\right)^2}{2S_{h/2} - S_h - S_{h/4}}.$$

§ 13

13.1. Нет, поскольку неравенство треугольника не выполнено.

13.2. Да.

13.3. Из неравенств $\max\limits_{1\le i\le n}|x_i| \le \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i| \le n \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$ следует

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1 \le n\,\|\mathbf{x}\|_\infty .$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2$, то $\|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1$. Из неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}1\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2} = n^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$n^{-1/2}\|\mathbf{x}\|_1 \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 .$$

Из неравенств $\max\limits_{1\le i\le n} x_i^2 \le \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \le n \max\limits_{1\le i\le n} x_i^2$ следует

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le n^{1/2}\,\|\mathbf{x}\|_\infty .$$

13.4. Пусть $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ — ортонормированная система собственных векторов матрицы C (т.е. $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=\delta_{ij}$), а $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — соответствующие собственные значения. Любой вектор $\mathbf{x}$ представим в виде $\mathbf{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\mathbf{e}_i$. Поэтому

$$(C\mathbf{x},\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i \mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i^2.$$

Отсюда для произвольного вектора $\mathbf{x}$ получаем

$$\min_i \lambda_i\,(\mathbf{x},\mathbf{x}) \le (C\mathbf{x},\mathbf{x}) \le \max_i \lambda_i\,(\mathbf{x},\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_i c_i^2.$$

Поскольку все $\lambda_i(C)>0$, полученное неравенство означает эквивалентность евклидовой норме $\|\mathbf{x}\|_2$ с постоянными

$$\tilde{c}_1 = \sqrt{\min_i \lambda_i}, \quad \tilde{c}_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i}.$$

13.5. Получим оценку сверху для величины $\|A\mathbf{x}\|_\infty$:

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_i\left|\sum_j a_{ij}x_j\right| \le \max_i\left(\sum_j |a_{ij}|\max_j|x_j|\right) \le$$
$$\le \max_i\left(\sum_j|a_{ij}|\right)\|\mathbf{x}\|_\infty$$

Покажем, что эта оценка достигается. Пусть максимум по i имеет место при $i = l$; тогда возьмем $\mathbf{x} = \left(\operatorname{sign}(a_{l1}), \operatorname{sign}(a_{l2}), \ldots, \operatorname{sign}(a_{ln})\right)$. Имеем $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ и точные равенства во всей цепочке выше. Таким образом,

$$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right).$$

По определению матричной нормы, подчиненной евклидовой векторной норме, имеем

$$\|A\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \sqrt{\frac{(A\mathbf{x}, A\mathbf{x})}{(\mathbf{x},\mathbf{x})}} = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} \sqrt{\frac{(A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x},\mathbf{x})}}.$$

Отметим, что $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, т.е. матрица $B = A^T A$ — симметричная, и $(A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \geq 0$; следовательно, все $\lambda(B) \geq 0$. Рассуждая далее, как и в задаче 13.4, получим

$$\sup_{x\neq 0} \frac{(B\mathbf{x}, \mathbf{x})}{(\mathbf{x},\mathbf{x})} = \max_i \lambda_i(B),$$

а равенство достигается на соответствующем собственном векторе. Поэтому

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda(A^T A)}.$$

Следует отметить важный частный случай симметричной матрицы: $A = A^T$. Здесь

$$\|A\|_2 = \max_i |\lambda(A)|.$$

13.6. $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \to \quad \|A\|\,\|\mathbf{x}\| \geq |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|$.

13.7. Для доказательства первого свойства спектральной нормы надо показать, что существуют такие векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ единичной длины, на которых максимум достигается. В силу неравенства Коши — Буняковского и учитывая, что спектральная норма подчинена евклидовой векторной норме, получим неравенство

$$\left|\mathbf{y}^T A\mathbf{x}\right| = (\mathbf{y}, A\mathbf{x}) \leq \|\mathbf{y}\|_2\,\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{y}\|_2\,\|\mathbf{x}\|_2\,\|A\|_2 = \|A\|_2.$$

Пусть вектор $\mathbf{x}$ такой, что $\|A\mathbf{x}\|_2 = \|A\|_2$, т.е. на нем достигается максимум в определении подчиненной нормы, и возьмем $\mathbf{y} = A\mathbf{x}/\|A\mathbf{x}\|_2$. Тогда $\|\mathbf{y}\|_2 = 1$ и

$$\left|\mathbf{y}^T A\mathbf{x}\right| = \frac{(A\mathbf{x})^T}{\|A\mathbf{x}\|_2} A\mathbf{x} = \frac{(A\mathbf{x}, A\mathbf{x})}{\|A\mathbf{x}\|_2} = \|A\mathbf{x}\|_2 = \|A\|_2.$$

Следовательно, искомые векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ построены и первое свойство спектральной нормы доказано.

Из первого свойства спектральной нормы и из равенства

$$\|A^T\|_2 = \max_{\substack{\|\mathbf{x}\|_2=1\\ \|\mathbf{y}\|_2=1}} \left|\mathbf{y}^T A^T \mathbf{x}\right| = \max_{\substack{\|\mathbf{x}\|_2=1\\ \|\mathbf{y}\|_2=1}} \left(\mathbf{y}, A^T\mathbf{x}\right) =$$

$$= \max_{\substack{\|\mathbf{x}\|_2=1\\ \|\mathbf{y}\|_2=1}} \left(A\mathbf{y}, \mathbf{x}\right) = \max_{\substack{\|\mathbf{y}\|_2=1\\ \|\mathbf{x}\|_2=1}} \left|\mathbf{x}^T A\mathbf{y}\right| = \|A\|_2$$

следует ее второе свойство. Заметим, что поскольку здесь мы применяем первое свойство к матрице A^T, в обозначениях, принятых в этом равенстве, вектор $\mathbf{y}$ имеет размерность m, а вектор $\mathbf{x}$ — размерность n.

Покажем теперь справедливость третьего свойства спектральной нормы. Из второго свойства следует неравенство

$$\|A^T A\|_2 \le \|A^T\|_2 \|A\|_2 = \|A\|_2^2.$$

Возьмем такой вектор $\mathbf{x}$, что $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ и $\|A\mathbf{x}\|_2 = \|A\|_2$, и применим первое свойство к матрице $A^T A$, положив $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Тогда получим неравенство

$$\|A^T A\|_2 \ge \left|\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}\right| = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|_2^2 = \|A\|_2^2.$$

Из этих двух неравенств следует $\|A^T A\|_2 = \|A\|_2^2$. Аналогично показывается, что $\|AA^T\|_2 = \|A\|_2^2$. Таким образом, третье свойство спектральной нормы доказано.

13.8. Из третьего свойства спектральной нормы следует

$$\|QA\|_2^2 = \|(QA)^T QA\|_2 = \|A^T Q^T QA\|_2 = \|A^T A\|_2 = \|A\|_2^2.$$

Из второго свойства спектральной нормы и полученного равенства следует

$$\|AQ\|_2 = \|(AQ)^T\|_2 = \|Q^T A^T\|_2 = \|A^T\|_2 = \|A\|_2.$$

В частности, из

$$\|Q\mathbf{x}\|_2^2 = (Q\mathbf{x}, Q\mathbf{x}) = (Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T Q^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2$$

следует, что умножение вектора $\mathbf{x}$ на ортогональную матрицу сохраняет его длину.

13.9. Поскольку модуль любого собственного значения матрицы не больше любой ее нормы, из задачи 13.6 имеем

$$\|A\|_2^2 = \max \lambda(A^T A) \le \|A^T A\|_1 \le \|A\|_1 \|A^T\|_1 = \|A\|_1 \|A\|_\infty.$$

13.10. Для любой матричной нормы справедливо неравенство $\|AB\| \le$ $\le \|A\|\,\|B\|$. Рассмотрим матрицы

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

для которых имеют место соотношения $\eta(AB) = n$, $\eta(A) = \eta(B) = 1$, противоречащие указанному выше неравенству.

13.11. Заметим, что требует проверки только четвертое свойство матричной нормы: $M(AB) \le M(A)M(B)$.

$$M(AB) = n\max_{i,j}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \le n\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}b_{kj}| \le$$
$$\le n\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}\eta(A)\,\eta(B) \le n\eta(A)\,n\eta(B) = M(A)M(B).$$

13.12. Заметим, что $||\mathbf{x}||_h = ||\mathbf{y}||_\infty$, где

$$\mathbf{y} = S\mathbf{x}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/h & 1/h \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$||A||_h = \sup_{\mathbf{x}\ne 0}\frac{||A\mathbf{x}||_h}{||\mathbf{x}||_h} = \sup_{\mathbf{x}\ne 0}\frac{||SA\mathbf{x}||_\infty}{||S\mathbf{x}||_\infty} = \sup_{\mathbf{y}\ne 0}\frac{||SAS^{-1}\mathbf{y}||_\infty}{||\mathbf{y}||_\infty} =$$
$$= ||SAS^{-1}||_\infty = \left\|\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12}h \\ \dfrac{a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12}}{h} & a_{22}-a_{12} \end{pmatrix}\right\|_\infty =$$
$$= \max\left(|a_{11}+a_{12}| + h\,|a_{12}|, |a_{22}-a_{12}| + \frac{1}{h}\,|a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12}|\right).$$

13.13. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}N(A) \le ||A||_1 \le \sqrt{n}\,N(A)$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{n}}N(A) \le ||A||_2 \le N(A)$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}N(A) \le ||A||_\infty \le \sqrt{n}\,N(A).$$

§ 14

14.1. Из равенства $A^{-1}\mathbf{r} = A^{-1}\mathbf{b} - A^{-1}A\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ следует, что

$$||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|| \le ||A^{-1}||\,||\mathbf{r}||. \qquad (*)$$

Из $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ следует, что $||\mathbf{b}|| = ||A\mathbf{x}|| \le ||A||\,||\mathbf{x}||$, т.е.

$$||\mathbf{x}|| \ge \frac{||\mathbf{b}||}{||A||}. \qquad (**)$$

Поделим неравенство $(*)$ на неравенство $(**)$. Тогда получим

$$\frac{||\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}||}{||\mathbf{x}||} \le ||A||\,||A^{-1}||\,\frac{||\mathbf{r}||}{||\mathbf{b}||} = \mathrm{cond}(A)\,\frac{||\mathbf{r}||}{||\mathbf{b}||} = \mathrm{cond}(A)\,\frac{||\mathbf{b}-A\tilde{\mathbf{x}}||}{||\mathbf{b}||}.$$

Отсюда видно, что если матрица A плохо обусловлена, то даже очень маленькая невязка *не может* гарантировать малость относительной ошибки в $\tilde{\mathbf{x}}$. Хуже того, может оказаться так, что достаточно точное решение будет иметь большую невязку. Действительно, рассмотрим пример

$$A = \begin{pmatrix} 1.000 & 1.001 \\ 1.000 & 1.000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.001 \\ 2.000 \end{pmatrix}.$$

Точное решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ есть $\mathbf{x} = (1,1)^T$. Однако вектор $\tilde{\mathbf{x}} = (2,0)^T$, который никак нельзя назвать близким к $\mathbf{x}$, дает маленькую невязку $\mathbf{r} = (10^{-3}, 0)^T$.

Возьмем теперь $\mathbf{b} = (1,0)^T$. Тогда вектор $\mathbf{x} = (-1000, 1000)^T$ является точным решением системы. Вектор $\tilde{\mathbf{x}} = (-1001, 1000)^T$ достаточно близок к $\mathbf{x}$ в смысле относительной погрешности, однако $\tilde{\mathbf{x}}$ дает большую невязку $\mathbf{r} = (0, -1)^T$, которая имеет порядок правой части.

14.2. Так как $E = AA^{-1}$, то

$$1 = \|E\| = \|A\,A^{-1}\| \le \|A\|\,\|A^{-1}\| = \operatorname{cond}(A).$$

Далее, так как умножение матрицы на ортогональную не меняет ее спектральную норму, то

$$\|Q\|_2 = \|QE\|_2 = \|E\|_2 = 1 \quad \text{и} \quad \|Q^T\|_2 = \|Q^T E\|_2 = \|E\|_2 = 1.$$

Тогда

$$\operatorname{cond}_2(Q) = \|Q\|_2\,\|Q^{-1}\|_2 = \|Q\|_2\,\|Q^T\|_2 = 1.$$

14.3. Пусть дана диагональная матрица $D = \varepsilon E$, где $\varepsilon > 0$ — малое число и E — единичная матрица. Определитель $\det(D) = \varepsilon^n$ весьма мал, тогда как матрица D хорошо обусловлена, поскольку

$$\operatorname{cond}(D) = \|D\|\,\|D^{-1}\|_2 = \varepsilon\|E\|\,\varepsilon^{-1}\|E^{-1}\| = 1.$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

у которой определитель равен 1, и вычислим ее число обусловленности.

Для этого возьмем произвольный вектор $\mathbf{b} \ne 0$ и, решая систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ при помощи обратной подстановки, построим элементы обратной матрицы A^{-1}:

$$\begin{array}{lcl} x_n & = & b_n, \\ x_{n-1} & = & b_{n-1} + b_n, \\ x_{n-2} & = & b_{n-2} + b_{n-1} + 2b_n, \\ x_{n-3} & = & b_{n-3} + b_{n-2} + 2b_{n-1} + 2^2 b_n, \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 & = & b_1 + b_2 + 2b_3 + \dots + 2^{n-3} b_{n-1} + 2^{n-2} b_n. \end{array}$$

Выпишем полученную обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-3} & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-4} & 2^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} = 2^{n-1}.$$

Так как $\|A\|_\infty = n$, то $\mathrm{cond}_\infty(A) = n\,2^{n-1}$, т.е. матрица A плохо обусловлена, хотя $\det(A) = 1$.

Эти два примера показывают, что обусловленность матрицы не зависит от величины определителя.

14.4. Как и в задаче 14.3, методом обратной подстановки получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & \dots & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-1} \\ 0 & 1 & -a & \dots & (-a)^{n-3} & (-a)^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\|A\|_\infty = 1 + |a|,$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 1 + |a| + a^2 + \ldots + |a|^{n-1} = \frac{|a|^n - 1}{|a| - 1},$$

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \frac{(|a| + 1)\,(|a|^n - 1)}{|a| - 1}.$$

Отсюда видно, что матрица A плохо обусловлена при $|a| > 1$ и хорошо обусловлена при $|a| < 1$. Например, при $n = 20$ и $a = 5$ будем иметь $\mathrm{cond}_\infty(A) \approx 10^{14}$.

Пусть компонента b_n задана с ошибкой ε. Тогда вычисленное значение $\bar{x}_1$ компоненты x_1 имеет вид

$$\bar{x}_1 = b_1 - ab_2 + \dots + (-a)^{n-2} b_{n-1} + (-a)^{n-1}(b_n + \varepsilon) = x_1 + (-a)^{n-1}\varepsilon.$$

Следовательно, при $|a| > 1$ возмущение в b_n увеличивается в компоненте x_1 в $|a|^{n-1}$ раз, а при $|a| < 1$ во столько же раз уменьшается.

14.5. Так как

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1-\varepsilon}{4\varepsilon} & \dfrac{1+\varepsilon}{4\varepsilon} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1+\varepsilon}{4\varepsilon} & \dfrac{1-\varepsilon}{4\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (A')^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1-\varepsilon}{4} & \dfrac{1+\varepsilon}{4} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1+\varepsilon}{4} & \dfrac{1-\varepsilon}{4} \end{pmatrix},$$

то $\operatorname{cond}(A) \sim \varepsilon^{-1}$ и $\operatorname{cond}(A') \sim 1$.

14.6. $\operatorname{cond}_2(A+\alpha E) = \dfrac{M+\alpha}{m+\alpha} = 1 + \dfrac{M-m}{m+\alpha}$.

14.7. Приведем пример такой матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-3} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^3 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = B = \begin{pmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}, \quad B^T B = \begin{pmatrix} 10^{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 16 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-12} \end{pmatrix},$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{pmatrix},$$

$$\lambda(A^T A) \in \left\{10^6, 10^{-6}, 4.5 \pm \sqrt{4.25}\right\},$$

$$\operatorname{cond}(A^2) = \|B\| \cdot \|B^{-1}\| = 10^{12}; \quad \operatorname{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 10^6.$$

14.8. Воспользуемся неравенством для векторных норм:

$$\|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2$$

и получим

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{n}\,\|A\|_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\operatorname{cond}_2(A) \le \operatorname{cond}_1(A) \le n \operatorname{cond}_2(A)$$

при условии, что левое выражение в последнем неравенстве не меньше 1.

14.9. Введем обозначения для элементов матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

и найдем $\operatorname{cond}_2(A)$ в явном виде:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda(A^T A)}, \quad \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\max \lambda((A^{-1})^T A^{-1})} =$$
$$= \sqrt{\max \lambda((A^T A)^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{\min \lambda(A^T A)}}.$$

Это дает

$$\operatorname{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\max \lambda(A^T A)}{\min \lambda(A^T A)}}.$$

Введем вспомогательную матрицу $B = A^T A$ с элементами

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

и выпишем ее характеристический многочлен

$$\xi_B(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} B + \det B.$$

Его корни равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} B \pm \sqrt{\operatorname{tr}^2 B - 4 \det B}}{2}.$$

Так как $\operatorname{tr} B > 0$, то

$$\operatorname{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\operatorname{tr} B + \sqrt{\operatorname{tr}^2 B - 4 \det B}}{\operatorname{tr} B - \sqrt{\operatorname{tr}^2 B - 4 \det B}}} = \frac{\operatorname{tr} B + \sqrt{\operatorname{tr}^2 B - 4 \det B}}{\sqrt{4 \det B}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tr} B}{2\sqrt{\det B}} + \sqrt{\frac{\operatorname{tr}^2 B}{4 \det B} - 1}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{cond}_2(A) \to \max, \quad \text{если} \quad \frac{\operatorname{tr}^2\left(A^T A\right)}{\det\left(A^T A\right)} \to \max,$$

$$\operatorname{tr}^2 B = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2,$$

$$\begin{aligned} \det B &= \left(a^2 + c^2\right)\left(b^2 + d^2\right) - (ab + cd)^2 = a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd = \\ &= (ad - bc)^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|} \to \max. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \to \max.$$

В данном случае можно воспользоваться любой из матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} n+2 & n+1 \\ n+1 & n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 \\ n & n+1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ n+2 & n+1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} n & n+1 \\ n+1 & n+2 \end{pmatrix}.$$

14.10. Отметим сразу оценки

$$\max_i |a_{ii}| \le \|A\|_\infty \le (1 + \alpha) \max_i |a_{ii}|.$$

Введем обозначение $C = A^{-1}$ и заметим, что для $\forall i, j$ справедливо $|c_{ij}| \le$ $\le \|C\|_\infty$. При каждом i имеем ($AC = E$)

$$\sum_k a_{ik} c_{ki} = 1, \quad 1 \le \sum_k |a_{ik}||c_{ki}| \le |a_{ii}|\,(1 + \alpha)\,\|C\|_\infty.$$

Отсюда получается оценка снизу для нормы матрицы A^{-1}:

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|C\|_\infty \geq \frac{1}{(1+\alpha)\min\limits_i |a_{ii}|},$$

и следовательно,

$$\mathrm{cond}_\infty A = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \geq \frac{1}{(1+\alpha)} \frac{\max\limits_i |a_{ii}|}{\min\limits_i |a_{ii}|}.$$

Обратим внимание, что правая часть неравенства может не превышать единицу. В этом случае полученная оценка малосодержательна.

В силу невырожденности матрицы A все диагональные элементы a_{ii} отличны от нуля, поэтому можно построить матрицы

$$J = \mathrm{diag}\,(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1}), \quad B = JA - E.$$

Отметим, что $\|B\|_\infty \leq \alpha < 1$ в силу цепочки неравенств

$$\max_i |b_{i1}x_1 + \cdots + b_{in}x_n| \leq \max_i \sum_k |b_{ik}x_k| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \max_i \sum_k |b_{ik}| \leq \alpha \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Отсюда следует справедливость представления

$$A^{-1} = (E+B)^{-1}J = \left(E - B + B^2 - B^3 + \cdots\right) J,$$

так как ряд является сходящимся.

Далее для произвольного вектора $\mathbf{x}$ получим оценку

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\mathbf{x}\|_\infty = \left\|\left(E - B + B^2 - B^3 + \cdots\right) J\mathbf{x}\right\|_\infty \leq \|J\mathbf{x}\|_\infty + \alpha \|J\mathbf{x}\|_\infty + \\ +\alpha^2\|J\mathbf{x}\|_\infty + \cdots = \\ = \frac{1}{1-\alpha}\|J\mathbf{x}\|_\infty \leq \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\min\limits_i |a_{ii}|} \|\mathbf{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A\|_\infty^{-1} \leq \frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)} \frac{\max\limits_i |a_{ii}|}{\min\limits_i |a_{ii}|};$$

$$\frac{1}{1+\alpha} \frac{\max |a_{ii}|}{\min |a_{ii}|} \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{\max |a_{ii}|}{\min |a_{ii}|}.$$

14.11. Рассмотрим вспомогательные матрицы A_k размера $(k+1)\times$ $\times(k+1)$ с элементами $|a_{ij}| \leq 1$ следующей структуры:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_{22} & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & a_{33} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix}.$$

Для определителя A_k из разложения по первому столбцу следует оценка

$$|\det(A_k)| \le |a_{11}| \left|\det\left(A_{k-1}^{(1)}\right)\right| + \left|\det\left(A_{k-1}^{(2)}\right)\right| \le 2|\det(A_{k-1})| \le$$
$$\le 4|\det(A_{k-2})| \le \ldots \le 2^k,$$

поскольку

$$|\det(A_1)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix} \le 2, \quad |\det(A_0)| = |a_{11}| \le 1.$$

Выше было использовано обозначение $A_{k-1}^{(l)}$ $(l = 1, 2)$ для подматриц k-го порядка, получающихся из исходной матрицы A_k вычеркиванием первого столбца и l-й строки.

Рассмотрим теперь обратную к R матрицу R^{-1} с элементами

$$r_{ij}^{(-1)} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i > j, \\ Q_{ij} & \text{при } i < j. \end{cases}$$

Так как $\det(R) = 1$, то Q_{ij} имеет смысл алгебраического дополнения элемента r_{ji} в определителе матрицы R. При этом его значение равно (с точностью до знака) определителю почти верхней треугольной матрицы, у которой диагональные элементы не превышают единицу, на нижней побочной диагонали имеется ровно $k = j - i - 1$ единиц, а остальные элементы равны нулю. Отсюда имеем

$$|Q_{ij}| \le |\det(A_{j-i-1})| \le 2^{j-i-1}.$$

Рассмотрим предельный, с точки зрения максимальных значений Q_{ij}, случай

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \ldots & 2^{n-3} & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 2^{n-4} & 2^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом исходная матрица R однозначно определяется как

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$\|R^{-1}\|_\infty = 1 + 1 + 2 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1}, \quad \|R\|_\infty = n,$$

т.е. мы построили матрицу, на которой одновременно достигаются максимально возможные значения как $\|R\|_\infty$, так и $\|R^{-1}\|_\infty$ среди всех матриц из заданного класса.

$$\max_R \operatorname{cond}_\infty(R) = n\,2^{n-1}.$$

14.12. Из неравенства для чисел обусловленности в матричных нормах $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_2$ и равенства $\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(AA^T)$ следует, что

$$\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \le \operatorname{cond}_\infty(A) \le n\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

14.13. $\operatorname{cond}_2(A) \approx \dfrac{4n^2}{\pi^2}$.

14.14. Характеристическое уравнение для возмущенной матрицы Уилкинсона имеет вид:

$$\det(A - \lambda E) = (20-\lambda)(19-\lambda)\cdots(1-\lambda) - 20^{19}\cdot\varepsilon = 0.$$

Свободный член в этом уравнении равен 0 и, следовательно, наименьшее собственное значение также равно 0.

14.15. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \ne 0$. Так как $1 - \|\delta E\| > 0$ и $\|\mathbf{x}\| = \|(\mathbf{x} - \delta E\mathbf{x}) + \delta E\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{x} - \delta E\mathbf{x}\| + \|\delta E\mathbf{x}\|$, то

$$\begin{gathered}\|(E - \delta E)\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \delta E\mathbf{x}\| \ge \|\mathbf{x}\| - \|\delta E\mathbf{x}\| \ge \\ \ge \|\mathbf{x}\| - \|\delta E\|\,\|\mathbf{x}\| = (1 - \|\delta E\|)\,\|\mathbf{x}\| > 0.\end{gathered}$$

Следовательно, если $\mathbf{x} \ne 0$, то $(E - \delta E)\mathbf{x} \ne 0$, т.е. матрица $E - \delta E$ не вырождена.

Из тождества $(E - \delta E)(E - \delta E)^{-1} = E$ получим $(E - \delta E)^{-1} = E + \delta E\,(E - \delta E)^{-1}$. Отсюда

$$\|(E - \delta E)^{-1}\| \le \|E\| + \|\delta E\|\,\|(E - \delta E)^{-1}\| = 1 + \|(E - \delta E)^{-1}\|\,\|\delta E\|.$$

Из этого неравенства следует решение задачи (ее называют *задачей о возмущении единичной матрицы*).

14.16. Из $(E - \delta E)^{-1} = E + \delta E(E - \delta E)^{-1}$ (см. предыдущую задачу) получим $E - (E - \delta E)^{-1} = -\delta E(E - \delta E)^{-1}$. Отсюда

$$\|E - (E - \delta E)^{-1}\| \le \|\delta E\|\,\|(E - \delta E)^{-1}\| \le \frac{\|\delta E\|}{1 - \|\delta E\|}$$

в силу неравенства из задачи 14.15.

14.17. Имеем $A + \delta A = A(E + A^{-1}\delta A)$. Поскольку $\|A^{-1}\delta A\| < 1$, из задачи 14.15 следует, что матрица $E + A^{-1}\delta A$ невырожденная. Это означает, что и матрица $A + \delta A$ также не вырождена.

Из равенства $(A + \delta A)^{-1} = (E + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}$ следует, что

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \le \|(E + A^{-1}\delta A)^{-1}\|\,\|A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}$$

в силу неравенства из задачи 14.15.

14.18. Из равенства $(A+\delta A)^{-1} = (E + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}$ следует, что $A^{-1} - (A+\delta A)^{-1} = \big(E - (E + A^{-1}\delta A)^{-1}\big)A^{-1}$. Тогда

$$\|A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}\| \le \|E - (E + A^{-1}\delta A)^{-1}\|\,\|A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}\,\|A^{-1}\|$$

в силу неравенства из задачи 14.16.

Относительная ошибка в матрице $(A+\delta A)^{-1}$ оценивается неравенством

$$\frac{\|A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} = \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

§ 15

15.1. $\|B\|_1 = \|B\|_\infty < 1$.

15.2. $\det(B - \lambda E) = (\alpha - \lambda)(\alpha - \lambda - \sqrt{2}\beta)(\alpha - \lambda + \sqrt{2}\beta) = 0$, $|\alpha| < 1$, $|\alpha \pm \sqrt{2}\beta| < 1$.

15.3.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\lambda(B) = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}; \quad \mathbf{x}_{\lambda=\frac{1}{2}} = (1,-1)^T; \quad \mathbf{x}^0 - \mathbf{x} = t\,\mathbf{x}_{\lambda=\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad t \ne 0.$$

15.4. $N \approx \dfrac{1}{1-\alpha}$.

15.5. Собственные значения оператора перехода $B = E - \tau A$ имеют вид $\lambda(B) = 1 - \|A\|^{-1}\lambda(A)$. Так как $0 < \lambda(A) \le \|A\|$, $0 \le \lambda(B) < 1$.

15.6. $1.6 \le \lambda_1 \le 2.4$, $3.5 \le \lambda_2 \le 4.5$, $4.8 \le \lambda_3 \le 5.2$, поскольку характеристические многочлены матриц A и A^T совпадают.

15.7. Пусть $\mathbf{e}^k$ — вектор ошибки на k-й итерации. В силу линейности исходной задачи имеем

$$\mathbf{e}^{k+1} = (E - \tau A)\,\mathbf{e}^k = \big(Q^{-1}Q - \tau Q^{-1} D Q\big)\,\mathbf{e}^k.$$

Умножим полученное выражение слева на Q и сделаем замену $Q\,\mathbf{e}^k = \tilde{\mathbf{e}}^k$. Тогда

$$\tilde{\mathbf{e}}^{k+1} = (E - \tau D)\,\tilde{\mathbf{e}}^k.$$

Здесь матрица $B = E - \tau D$ имеет диагональный вид, а ее собственные значения равны $\lambda(B) = 1 - \tau\,\lambda(A)$. Поэтому необходимым и достаточным условием сходимости метода является выполнение неравенства

$$|1 - \tau\,\lambda(A)| < 1 \qquad \forall \lambda(A) \in [m, M],$$

откуда и следует искомый результат.

15.8. Воспользоваться решениями задач 15.6 и 15.7.

15.9. $\tau_k^{-1} = \dfrac{M+m}{2} + \dfrac{M-m}{2}\cos\dfrac{\pi(2k-1)}{2N}$, $k = 1,\ldots,N$, т.е. величины, обратные нулям многочлена Чебышева степени N на отрезке $[m, M]$.

15.10. $\tau_k = \dfrac{1}{\lambda_k}$.

15.11. Использовать решения задач 15.9 и 15.10.

15.12. $\mathbf{x}^{k+1} = \big(\alpha E + (1-\alpha)B\big)\mathbf{x}^k + (1-\alpha)\mathbf{c}$,

$$\min_\alpha \varphi(\alpha) = \min_\alpha \max_\lambda \big|\alpha + (1-\alpha)\lambda\big|,$$

$$\alpha = \frac{m+M}{m+M-2}.$$

15.13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 16

16.1. Оператор перехода B в методе Якоби имеет вид $B = -D^{-1}(L+$ $+R)$. Рассмотрим задачу на собственные значения $B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Имеем

$$-D^{-1}(L+R)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (L+\lambda D+R)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \det(L+\lambda D+R) = 0.$$

Непосредственные вычисления дают

$$\det\begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta & 0 \\ \beta & \alpha\lambda & \beta \\ 0 & \beta & \alpha\lambda \end{pmatrix} = \alpha\lambda(\alpha^2\lambda^2 - 2\beta^2) = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_{2,3}^2 = 2\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Оператор перехода B в методе Зейделя имеет вид $B = -(D+L)^{-1}R$. Рассмотрим задачу на собственные значения $B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Имеем

$$-(D+L)^{-1}R\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (\lambda L+\lambda D+R)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \det(\lambda L+\lambda D+R) = 0.$$

Непосредственные вычисления дают

$$\det\begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta & 0 \\ \beta\lambda & \alpha\lambda & \beta \\ 0 & \beta\lambda & \alpha\lambda \end{pmatrix} = \alpha\lambda^2(\alpha^2\lambda - 2\beta^2) = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_{1,2} = 0,\ \ \lambda_3 = 2\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В данном случае области сходимости методов совпадают.

16.2. Искомый результат следует из явного представления операторов перехода

$$B_Я = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda^{Я}_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}},$$

$$B_З = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda^З_1 = 0,\ \lambda^З_2 = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}.$$

16.3. Обозначим вектор ошибки через $\mathbf{e}^k$. Для этого вектора имеет место соотношение (уравнение ошибки) $(D + L)\,\mathbf{e}^{k+1} + R\,\mathbf{e}^k = 0$. Пусть $\|\mathbf{e}^{k+1}\|_\infty = |e_l^{k+1}|$. Выпишем l-е уравнение

$$\sum_{j=1}^{l-1} a_{lj}\, e_j^{k+1} + a_{ll}\, e_l^{k+1} + \sum_{j=l+1}^{n} a_{lj}\, e_j^k = 0$$

и разрешим его относительно e_l^{k+1}:

$$e_l^{k+1} = -\sum_{j=1}^{l-1} \frac{a_{lj}}{a_{ll}}\, e_j^{k+1} - \sum_{j=l+1}^{n} \frac{a_{lj}}{a_{ll}}\, e_j^k\,.$$

Отсюда получим $\|\mathbf{e}^{k+1}\|_\infty = |e_l^{k+1}| \le \alpha\,\|\mathbf{e}^{k+1}\|_\infty + \beta\,\|\mathbf{e}^k\|_\infty$, где

$$\alpha = \sum_{j=1}^{l-1} \left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|, \quad \beta = \sum_{j=l+1}^{n} \left|\frac{a_{lj}}{a_{ll}}\right|.$$

Найденное соотношение можно переписать в виде

$$\|\mathbf{e}^{k+1}\|_\infty \le \frac{\beta}{1-\alpha}\|\mathbf{e}^k\|_\infty.$$

По условию $\alpha + \beta \le q < 1$, следовательно,

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \le \frac{q-\alpha}{1-\alpha} = q - \frac{\alpha(1-q)}{1-\alpha} \le q\,,$$

откуда и следует искомая оценка.

16.4. Сходится в обоих случаях.

16.5. Если формулу метода релаксации

$$(D + \tau L)\,\mathbf{x}^{k+1} + [\tau R + (\tau - 1)\,D]\,\mathbf{x}^k = \mathbf{b}$$

умножить слева на матрицу D^{-1}, то оператор перехода можно записать в следующем виде:

$$B = (E + \tau M)^{-1}\left((1-\tau)E + \tau N\right),$$

Здесь E — единичная, а M и N — строго нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно. Рассмотрим его характеристический многочлен $d(\lambda) = \det(B - \lambda E)$. По теореме Виета имеет место равенство

$$(-1)^n\, d(0) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(B).$$

Так как у треугольных матриц M и N на главной диагонали расположены нули, то

$$d(0) = \det(B) = (1-\tau)^n.$$

Отсюда для спектрального радиуса оператора перехода получим оценку

$$\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)| \ge \left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(B)\right|^{1/n} = |\det(B)|^{1/n} = |1-\tau|,$$

которая и приводит к искомому ответу.

16.6. **Используя форму записи метода**

$$\left(E + \frac{\tau}{2}A\right)\mathbf{x}^{k+1} = \left(E - \frac{\tau}{2}A\right)\mathbf{x}^{k} + \tau\mathbf{b}$$

и общность системы собственных векторов матриц слева и справа, выразим собственные значения оператора перехода B через собственные значения исходной матрицы

$$\lambda(B) = \frac{1 - \tau\,\lambda(A)/2}{1 + \tau\,\lambda(A)/2}.$$

Теперь сходимость метода при $\tau > 0$ очевидна, а для определения τ_{opt} рассмотрим следующую минимаксную задачу:

$$\min_{\tau>0}\ \max_{\lambda\in[m/2,M/2]} \frac{|1-\tau\lambda|}{1+\tau\lambda}.$$

Функция $f(\lambda) = (1-\tau\lambda)/(1+\tau\lambda)$ при $\lambda > 0$ и фиксированном $\tau > 0$ является убывающей, поэтому максимальное значение функция $|f(\lambda)|$ достигает на границе отрезка: при $\lambda = m/2$ и/или при $\lambda = M/2$. Можно убедиться, что минимум по τ имеет место при равенстве

$$\left|f\left(\frac{m}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{M}{2}\right)\right| \;\Rightarrow\; \frac{1-\tau_{\text{opt}}\,m/2}{1+\tau_{\text{opt}}\,m/2} = -\frac{1-\tau_{\text{opt}}\,M/2}{1+\tau_{\text{opt}}\,M/2} \;\Rightarrow\; \tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\sqrt{mM}}.$$

16.7. **Используя идею предыдущей задачи, запишем условие сходимости метода**

$$\left|\frac{1-\tau(1-\alpha)\lambda}{1+\tau\alpha\lambda}\right| < 1 \quad \forall\lambda > 0.$$

Сделав замену $t = \tau\lambda > 0$, получим неравенство

$$\left|1 - t(1-\alpha)\right| < 1 + t\alpha.$$

Отметим, что неотрицательность выражения под модулем приводит к тривиальному, в силу условия задачи, неравенству $-(1-\alpha) < \alpha$. Поэтому содержательным является другой случай: $t(1-\alpha) - 1 < 1 + t\alpha$. Из этого неравенства имеем

$$-\frac{2}{t} < 2\alpha - 1,$$

что в силу $t > 0$ приводит к ответу $\alpha \geq 1/2$.

§ 18

18.1. Так как $z = \varphi(z)$, то

$$x_{n+1} - z = \varphi(x_n) - \varphi(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

По теореме Лагранжа для каждого n существует такое ξ_n, $\xi_n \in [x_n, z]$, что

$$x_{n+1} - z = (x_n - z)\,\varphi'(\xi_n).$$

Последовательно применяя указанную теорему, получаем

$$x_{n+1} - z = (x_n - z)\,\varphi'(\xi_n) = (x_{n-1} - z)\,\varphi'(\xi_n)\varphi'(\xi_{n-1}) = \ldots =$$

$$= (x_0 - z)\,\varphi'(\xi_n)\varphi'(\xi_{n-1})\ldots\varphi'(\xi_0),$$

где $\xi_{n-1} \in [x_{n-1}, z], \ldots, \xi_0 \in [x_0, z]$.

Так как $\left|\varphi'(\xi_i)\right| \leq q$, $i = 0, 1, 2, \ldots n$, то

$$|x_{n+1} - z| \leq |x_0 - z|\,q^{n+1}.$$

При $q < 1$ правая часть этого неравенства стремится к нулю, т.е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню x.

18.2. Для определенности будем считать, что $f'(x) > 0$. Пусть

$$0 < m \leq f'(x) \leq M.$$

Заменим исходное уравнение равносильным:

$$x = \varphi(x) \equiv x - \lambda f(x), \quad \lambda > 0.$$

Подберем параметр λ так, чтобы на $[a, b]$ выполнялось неравенство

$$0 \leq \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq q < 1.$$

При $\lambda = \dfrac{1}{M}$ получаем $q = 1 - \dfrac{m}{M} < 1$.

18.3. Табличным способом отделения корней выделим отрезки, на концах которых функция $f(x)$ имеет разные знаки:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\operatorname{sign} f(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$

Таким образом, корни исходного уравнения лежат на отрезках $[-3, -2]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, для каждого из которых построим свой итерационный процесс.

Так как на $[-3, -2]$ имеем $x^2 \neq 0$, то исходное уравнение можно разделить на x^2. В результате получим равносильное уравнение

$$x = \varphi(x) \equiv \frac{1}{x^2} - 3.$$

Итерационный процесс для нахождения первого корня:

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} - 3.$$

Сходимость имеет место для всех начальных приближений x_0 из этого отрезка, так как для $x \in [-3, -2]$ имеет место оценка

$$|\varphi'(x)| = \left|-\frac{2}{x^3}\right| \leq \frac{1}{4} < 1.$$

Для двух других отрезков исходное уравнение представим в виде $x^2(x+3) - 1 = 0$. Так как для рассматриваемых отрезков $x + 3 \neq 0$, то получаем два итерационных процесса:

$$x_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{x_n + 3}}, \quad x_{n+1} = +\frac{1}{\sqrt{x_n + 3}}.$$

Сходимость для этих отрезков следует из оценки:

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right|^3 < 1.$$

18.4. Заметим, что решается уравнение $x^3 - 20x + 1$, имеющее три различных вещественных корня: $z_1 < z_2 < z_3$. Перепишем формулу итерационного процесса в виде

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^3 - 20x_n + 1}{20},$$

откуда сразу следует, что: при $x_0 < z_1$ или $x_0 > z_3$ метод расходится (разность в левой части монотонна); точки $x_0 = z_1$ и $x_0 = z_3$ являются неподвижными; при $z_1 < x_0 < z_3$ метод сходится к z_2.

18.5. Представим метод хорд как частный случай метода простой итерации:

$$x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0)}(x - x_0).$$

Вблизи корня z уравнения $f(x) = 0$ имеем

$$x_{n+1} - z = (x_n - z)\varphi'(z) + \frac{1}{2}(x_n - z)^2 \varphi''(\xi), \quad \xi \in [x_n, z],$$

где

$$\varphi'(z) = 1 + \frac{f'(z)}{f(x_0)}(z - x_0) =$$

$$= \frac{f(z) - f'(z)(z - x_0) + \frac{f''(\eta)}{2}(z - x_0)^2 + f'(z)(z - x_0)}{f(x_0)} =$$

$$= \frac{(z - x_0)^2}{2}\frac{f''(\eta)}{f(x_0)}, \quad \eta \in [x_0, z].$$

Если второе начальное приближение взять в такой окрестности корня, где $\left|\varphi'(z)\right| \le q < 1$, то метод хорд будет иметь линейную скорость сходимости.

18.6. Преобразуем расчетную формулу метода секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

к виду

$$x_{n+1} - z = x_n - z - \frac{\big((x_n - z) - (x_{n-1} - z)\big) f\big(z + (x_n - z)\big)}{f\big(z + (x_n - z)\big) - f\big(z + (x_{n-1} - z)\big)}.$$

Разложим $f\big(z + (x_n - z)\big)$ и $f\big(z + (x_{n-1} - z)\big)$ в ряды Тейлора в точке z и подставим в последнюю формулу, учитывая, что $f(z) = 0$:

$$x_{n+1} - z = x_n - z - \frac{(x_n - z)f'(z) + 0.5(x_n - z)^2 f''(z) + \cdots}{f'(z) + 0.5\big((x_n - z) + (x_{n-1} - z)\big) f''(z) + \cdots} =$$

$$= (x_n - z)\left(1 - \frac{1 + 0.5(x_n - z)^2 \frac{f''(z)}{f'(z)} + \cdots}{1 + 0.5(x_n - z)\frac{f''(z)}{f'(z)} + 0.5(x_{n-1} - z)\frac{f''(z)}{f'(z)} + \cdots}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_n - z)(x_{n-1} - z)\frac{f''(z)}{f'(z)} + O\big((x_n - z)^2\big).$$

Опустив члены более высокого порядка малости, для ошибки получим уравнение

$$x_{n+1} - z = C(x_n - z)(x_{n-1} - z), \quad C = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Предположим, что скорость сходимости определяется соотношением

$$x_{n+1} - z = A(x_n - z)^m,$$

в котором значения A и m пока неизвестны. Тогда

$$x_n - z = A(x_{n-1} - z)^m,$$

откуда

$$x_{n-1} - z = A^{-1/m}(x_n - z)^{1/m}.$$

Подставим эти соотношения в уравнение для ошибки:

$$A(x_{n-1}-z)^m = C\,(x_n - z)\,A^{-1/m}\,(x_n - z)^{1/m},$$

$$(x_{n-1}-z)^m = C\,A^{-1-1/m}\,(x_n - z)^{1+1/m}.$$

Приравнивая эти два полинома, получаем два уравнения с двумя неизвестными

$$m = 1 + \frac{1}{m},$$
$$1 = C\,A^{-(1+1/m)}.$$

Из первого уравнения находим показатель скорости сходимости метода секущих

$$m = 0.5\,(1+\sqrt{5}) \approx 1.618.$$

Константа асимптотической ошибки равна

$$A = \left(\frac{1}{2}\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

§ 19

19.1. Значение $\sqrt[p]{a}$ является корнем уравнения

$$f(x) \equiv x^p - a = 0.$$

Для этого уравнения метод Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}}.$$

Для $p = 2$ получаем

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

19.2. Метод Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Обозначим через z искомый корень. Тогда z будет и корнем уравнения

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Следовательно, можно рассматривать метод Ньютона как частный случай метода простой итерации, для которого

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \quad \text{и, следовательно,} \quad \varphi'(z) = 0.$$

Оценим теперь скорость сходимости метода Ньютона, используя разложение в ряд Тейлора в окрестности точки z:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - z &= \varphi(x_n) - \varphi(z) = \varphi\big(z + (x_n - z)\big) - \varphi(z) = \\ &= \varphi(z) + (x_n - z)\varphi'(z) + \frac{1}{2}(x_n - z)^2 \varphi''(\xi) - \varphi(z) = \\ &= \frac{1}{2}(x_n - z)^2 \varphi''(\xi), \quad \text{где} \;\; \xi \in [x_n, z]. \end{aligned}$$

Следовательно, вблизи корня метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

19.3. Поступая так же, как и в случае простого корня, получим

$$x_{n+1} - z = (x_n - z)\varphi'(z) + \frac{1}{2}(x_n - z)^2 \varphi''(\xi), \quad \text{где} \;\; \xi \in [x_n, z].$$

Однако в случае $p > 1$ в выражении

$$\varphi'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2}$$

содержится неопределенность “ноль на ноль”, так как z является также корнем уравнения $f'(x) = 0$. Оценим $\varphi'(x)$.

Функция $f(x)$ в окрестности корня z кратности p ведет себя приблизительно как $a(x-z)^p$, где a — константа. Тогда в малой окрестности корня

$$\varphi'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \approx \frac{a(x-z)^p \, ap(p-1)(x-z)^{p-2}}{a^2 p^2 (x-z)^{2p-2}} = \frac{p-1}{p} < 1.$$

Отсюда видно, что чем выше кратность корня, тем медленнее сходимость.

19.4. Требуемую модификацию будем искать в виде

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

и подберем параметр α так, чтобы имела место квадратичная сходимость. Рассмотрим данную модификацию как специальный случай метода простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x)$, для которого выполнено $z = \varphi(z)$, причем вблизи корня

$$\varphi'(x) = 1 - \alpha + \alpha \frac{f(x) f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \approx 1 - \alpha + \alpha \frac{p-1}{p} = \frac{p-\alpha}{p}.$$

Для обеспечения квадратичной сходимости параметр α надо подобрать таким, чтобы $\varphi'(z) = 0$, что и выполняется при $\alpha = p$.

19.5. Искомое число является корнем уравнения

$$\frac{1}{ax} - 1 = 0.$$

Для этого уравнения метод Ньютона имеет вид:

$$x_{n+1} = 2\,x_n - a\,x_n^2.$$

Если $x_0 = 0$ или $x_0 = \dfrac{2}{a}$, то сходимости к корню не будет, так как все x_n равны 0. Если $x_0 < 0$, то сходимости также не будет, поскольку все x_n останутся отрицательными. Если взять $x_0 > \dfrac{2}{a}$, то все $x_n < 0$.

Таким образом, сходимость имеет место, если начальное приближение берется из интервала $(0, 2/a)$.

19.6. Для уравнения

$$g(x) \equiv \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

корень z будет простым. Тогда для уравнения $g(x) = 0$ метод Ньютона принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{\big(f'(x_n)\big)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

и будет иметь квадратичный порядок сходимости.

В окрестности z функция $f(x) \approx a\,(x-z)^p$. Тогда

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \approx \frac{a\,(x-z)^p}{ap\,(x-z)^{p-1}} = \frac{1}{p}\,(x-z).$$

Для двух последовательных приближений x_1 и x_2 имеем систему приближенных уравнений

$$\begin{cases} g(x_1) \approx \dfrac{1}{p}\,(x_1 - z), \\ g(x_2) \approx \dfrac{1}{p}\,(x_2 - z). \end{cases}$$

Отсюда получим оценку для кратности p корня z:

$$p \approx \frac{x_2 - x_1}{g(x_2) - g(x_1)}.$$

Такой способ оценивания p можно применять на каждой итерации.

19.7. Обозначим области сходимости метода Ньютона

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \equiv \frac{2x^3}{3x^2 - 1}$$

к корням $z = -1, 0, +1$ через X_-, X_0, X_+ соответственно. Кроме того, определим последовательности точек $\{x_n^{\pm}\}$ для $n \geq 0$ следующими условиями:

$$\varphi(x_{n+1}^{\pm}) = x_n^{\pm}, \quad x_0^{\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

для элементов которых справедливы неравенства

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = x_0^- < x_1^+ < x_2^- < \ldots < -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0 <$$
$$< \frac{1}{\sqrt{5}} < \ldots < x_2^+ < x_1^- < x_0^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k}^- = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}^+ = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k}^+ = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}^- = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда

$$X_- = \left(-\infty, x_0^-\right) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\left(x_{2k-1}^+, x_{2k}^-\right) \cup \left(x_{2k-1}^-, x_{2(k-1)}^+\right)\right],$$

$$X_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

$$X_+ = \left(x_0^+, \infty\right) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\left(x_{2(k-1)}^-, x_{2k-1}^+\right) \cup \left(x_{2k}^+, x_{2k-1}^-\right)\right].$$

Кроме того, если $x_0 = x_n^\pm$, $n \geq 0$, то метод не определен, а при $x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ — зацикливается.

Таким образом, области сходимости к корням $z = \pm 1$ являются объединениями перемежающихся открытых интервалов, разделенных точками зацикливания метода.

§ 20

20.1. Найдем корни характеристического уравнения

$$b\mu^2 - c\mu + a = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{D}}{2b}, \quad D = c^2 - 4ab.$$

1) $D > 0$, $\mu_1 \neq \mu_2$ — вещественные:

$$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k;$$

2) $D < 0$, $\mu_{1,2} = \rho e^{\pm i\varphi}$, $\rho = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{|D|}}{c}$ — комплексно – сопряженные:

$$y_k = \rho^k(C_1\cos k\varphi + C_2\sin k\varphi).$$

Это форма записи действительного решения, для комплексного — можно использовать предыдущий вид.

3) $D = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ — кратные:

$$y_k = C_1\mu^k + C_2k\mu^k.$$

В предыдущих формулах C_1, C_2 — произвольные постоянные.

20.2. $y_k = (\sqrt{2})^k (C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{7}$.

20.3. Да, так как характеристический многочлен второго уравнения делится на характеристический многочлен первого без остатка.

20.4. $I_k = \dfrac{a_{-1}}{a_1} I_{k-1}, \quad I_k = \det A_k$.

20.5. Если z — корень характеристического уравнения $z^2 - 2\lambda z + 1 = 0$, то $1/z$ — другой корень. Ограниченность решений разностного уравнения равносильна следующему условию: оба корня характеристического уравнения лежат в замкнутом единичном круге и на границе круга нет кратных корней.

20.6. Характеристическое уравнение имеет вид $(\mu^2 + \mu + 1)^2 = 0$. Следовательно,

$$y_k = \frac{2(k-1)}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi k}{3}.$$

20.7. $f_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$.

20.8. Запишем разностную задачу

$$\Delta_k = b\Delta_{k-1} - ac\Delta_{k-2}, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = b.$$

Тогда

$$\mu_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $D = \sqrt{b^2 - 4ac} \neq 0$. Тогда

$$\Delta_k = C_1 \left(\frac{b-D}{2} \right)^k + C_2 \left(\frac{b+D}{2} \right)^k.$$

Из начальных условий получим линейную систему

$$C_1 + C_2 = 1, \quad \frac{C_1}{2}(b-D) + \frac{C_2}{2}(b+D) = b.$$

Решение линейной системы дает

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{D}\right), \quad C_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{D}\right).$$

Ответ для случая ненулевого дискриминанта:

$$\Delta_k = \frac{\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)^{k+1} - \left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

2) Пусть $D = \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$. Тогда

$$\Delta_k = C_1 \left(\frac{b}{2} \right)^k + C_2 k \left(\frac{b}{2} \right)^k.$$

Из начальных условий получим линейную систему

$$C_1 = 1, \quad C_1 \frac{b}{2} + C_2 \frac{b}{2} = b.$$

Решение линейной системы дает

$$C_1 = C_2 = 1.$$

Ответ для случая нулевого дискриминанта:

$$\Delta_k = \left(\frac{b}{2}\right)^k (1+k).$$

20.9. Из соотношений

$$2I_k \cos\alpha = I_{k-1} + I_{k+1}, \quad I_0 = 0, \quad I_1 = 1$$

следует

$$I_k(\alpha) = \frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}.$$

20.10. Обозначим частное от деления a_i на a_{i+1} через d_i и запишем систему равенств

$$\begin{cases} a_0 = a_1 d_1 + a_2, \\ a_1 = a_2 d_2 + a_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m-2} = a_{m-1} d_{m-1} + a_m, \\ a_{m-1} = a_m d_m. \end{cases}$$

Наибольшее количество операций деления m будет в том случае, когда все $d_1, d_2, \dots, d_m$ равны единице. Поэтому введем числа $y_0, y_1, \dots, y_m$ при условиях

$$y_0 = 0,\ y_1 = 1,\ \dots,\ y_{i+1} = y_{i-1} + y_i,$$

для которых справедливы неравенства

$$a_{m+1} = y_0,\ a_m \ge y_1,\ \dots,\ a_2 \ge y_{m-1},\ a_1 \ge y_m.$$

Последнее из них может служить для определения числа m, если известно выражение $y_m = f(m)$. Но y_m — числа Фибоначчи, поэтому

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right],$$

т.е. при всех m справедливо неравенство

$$y_m > \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - 1$$

или

$$a_1 + 1 > \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m .$$

Отсюда после логарифмирования имеем

$$m < \frac{\lg(1+a_1) + \lg\sqrt{5}}{\lg \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} .$$

Обозначим через p число цифр в a_1. Тогда $p \approx \lg\left((1+a_1)\sqrt{5}\right)$. Поскольку $\lg\left((1+\sqrt{5})/2\right) < 1/5$, получаем ответ: $m < 5p$.

20.11. Обозначим через K_k выражение

$$K_k = \int_0^\infty x^k e^{-x} \cos x \, dx, \quad k \geq 0 .$$

Интегрирование по частям дает систему разностных уравнений

$$\begin{cases} I_k = \dfrac{k}{2}\left(I_{k-1} + K_{k-1}\right), \\ K_k = \dfrac{k}{2}\left(-I_{k-1} + K_{k-1}\right) \end{cases}$$

с начальными условиями $I_0 = K_0 = 1/2$. Если положить

$$I_k = \frac{k!}{2^k} j_k, \quad K_k = \frac{k!}{2^k} l_k ,$$

то исходная система с переменными коэффициентами перейдет в систему с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} j_k &= j_{k-1} + l_{k-1}, \quad j_0 = 1/2 , \\ l_k &= -j_{k-1} + l_{k-1}, \quad l_0 = 1/2 . \end{aligned}$$

После исключения l_k получим разностное уравнение второго порядка относительно j_k:

$$j_{k+1} - 2j_k + 2j_{k-1} = 0, \quad j_0 = 1/2, \quad j_1 = 1.$$

Его решение имеет вид $(i = \sqrt{-1})$:

$$j_k = \frac{1}{2}\left[(1+i)^{k-1} + (1-i)^{k+1}\right] \Rightarrow I_k = \frac{k!}{2^{k+1}}\left[(1+i)^{k-1} + (1-i)^{k-1}\right].$$

Далее заметим, что

$$(1+i)^4 = -4 = (1-i)^4.$$

Следовательно,

$$j(4n+3) = (-4)^n j(3) = \frac{(-4)^n}{2}\left[(1+2i+i^2) + (1-2i+i^2)\right] = 0 ,$$

откуда $I(4n+3) = I_{4n+3} = 0$.

20.12. $y_k = \left(\sqrt{20}\right)^k (C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi)$, $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}$.

20.13. $y_k = \left(\sqrt{2}\right)^k \left(C_1 \sin \dfrac{k\pi}{4} + C_2 \cos \dfrac{k\pi}{4}\right)$.

20.14. $y_k = \left(\sqrt{26}\right)^k (C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi)$, $\varphi = -\operatorname{arctg} \dfrac{1}{5}$.

20.15. $y_k = \left(\sqrt{13}\right)^k (C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi)$, $\varphi = -\operatorname{arctg} \dfrac{3}{2}$.

20.16. $y_k = (-2)^k(1-3k)$.

20.17. $y_k = (-1)^k(5 - 3\cdot 2^k)$.

20.18. $y_k = 2\cos \dfrac{\pi k}{2} + \sin \dfrac{\pi k}{2}$.

20.19. $y_k = (-1)^k + 2^{k+1} + 3^{k+1}$.

§ 21

21.1. Корень характеристического уравнения равен

$$\mu = 2 \quad \Rightarrow \quad y_k^1 = bk^2 + ck + d,$$

$$2bk^2 + 2ck + 2d - [b(k+1)^2 + c(k+1) + d] = 1 + 2k - k^2 \quad \forall\, k.$$

Множители при линейно – независимых функциях порождают уравнения:

$2b - b = -1$ при k^2, что дает $b = -1$,

$2c - (2b + c) = 2$ при k^1, что дает $c = 0$,

$2d - (b + c + d) = 1$ при $k^0 = 1$, что дает $d = 0$.

Следовательно, $y_k^1 = -k^2$.

21.2. Имеем:

$$\mu = 2 \quad \Rightarrow \quad y_k^1 = 2^k\left(bk^2 + ck + d\right),$$

$$2^{k+1}\left(bk^2 + ck + d\right) - 2^{k+1}\left(b(k+1)^2 + c(k+1) + d\right) = k\,2^k \quad \forall\, k.$$

Множители при линейно – независимых функциях порождают уравнения:

$2b - 2b = 0$ при $2^k k^2$,

$2c - (4b + 2c) = 1$ при $2^k k^1$, что дает $b = -1/4$,

$2d - (2b + 2c + 2d) = 0$ при $2^k k^0$, что дает $c = 1/4$.

Следовательно, $y_k^1 = 2^{k-2}(k - k^2)$.

21.3. Имеем:

$$\mu = 2 \quad \Rightarrow \quad y_k^1 = c\ \sin k + d\ \cos k,$$

$$2(c\ \sin k + d\ \cos k) - \left(c\ \sin(k+1) + d\ \cos(k+1)\right) = \sin k \quad \forall\, k.$$

Поскольку $\sin(k+1) = \sin k \cos 1 + \cos k \sin 1$ и $\cos(k+1) = \cos k \cos 1 - \sin k \sin 1$, то множители при линейно – независимых функциях порождают уравнения:

$(2 - \cos 1)\, c + d \sin 1 = 1$ при $\sin k$,

$(2 - \cos 1)\, d - c \sin 1 = 0$ при $\cos k$.

Следовательно,

$$c = \frac{2-\cos\ 1}{5-4\cos\ 1}, \quad d = \frac{\sin\ 1}{5-4\cos\ 1}$$

и

$$y_k^1 = \frac{2-\cos\ 1}{5-4\ \cos\ 1}\sin\ k + \frac{\sin\ 1}{5-4\ \cos\ 1}\cos\ k\,.$$

21.4. $\mu = b$ и возможны два случая:

$$b \neq a \quad \Rightarrow \quad y_k = \frac{a-b-1}{a-b}\,b^k + \frac{1}{a-b}\,a^k\,,$$

$$b = a \quad \Rightarrow \quad y_k = a^{k-1}(a+k)\,.$$

21.5. При $k=0$ из уравнения получим $y_1 = 1$. Замена $y_k = z_k\,(k-1)!$ дает задачу для z_k:

$$z_{k+1} - z_k = 2^k, \quad z_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad z_k = 2^k - 1\,.$$

Следовательно, $y_k = (k-1)!\,(2^k-1)$.

21.6. Использовать замену $y_k = \dfrac{1}{z_k}$ и получить $y_k = \dfrac{1}{k+1}$.

21.7. Замена $y_k = \dfrac{z_k - 1}{z_k}$ дает задачу для z_k: $z_{k+1} - z_k = 1$. Отсюда

$$y_k = \frac{y_0 + k(1-y_0)}{1+k(1-y_0)}\,.$$

21.8. $y_k = \dfrac{1}{8}\left(3-(-1)^k\right) - \dfrac{1}{2k}$.

21.9. Использовать замену $y_k = \dfrac{z_{k+1}}{z_k}$ и получить $y_k = \dfrac{k+2}{k+1}$.

21.10. $y_k = 4\,k\,2^{-k}$.

21.11. $y_k = \dfrac{k}{7}\,4^k$.

21.12. $y_k = \dfrac{k}{19}\,3^{-k}$.

21.13. $y_k = -k\,2^k$.

21.14. $y_k = C_1\,2^k + C_2\,2^{-k} + \dfrac{\cos k}{2\cos 1 - 5/2}$.

21.15. $y_k = C_1 + C_2\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^k + C_3\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)^k - \dfrac{3}{16}k - \dfrac{1}{8}k^2$.

21.16. $y_k = C_1 + C_2\,k + C_3\,(-3)^k + \dfrac{1}{8}k^2$.

21.17. $y_k = C_1\,(-2)^k + C_2\,4^k - \dfrac{7\cos 1 + 2}{D}\sin k - \dfrac{9\sin 1}{D}\cos k$, где $D = (2+7\cos 1)^2 + (9\sin 1)^2$.

§ 22

22.1. Обозначим искомое фундаментальное решение через G_k. Для определения G_k имеем три группы уравнений:

$$\begin{cases} a\,G_k + b\,G_{k+1} = 0 & \text{при } k \le -1, \\ a\,G_0 + b\,G_1 = 1 & \text{при } k = 0, \\ a\,G_k + b\,G_{k+1} = 0 & \text{при } k \ge 1. \end{cases}$$

Для $k \le 0$ возьмем $G_k = 0$. Тогда все уравнения первой группы выполнены, из второго уравнения следует, что $G_1 = 1/b$, а общее решение третьей группы уравнений имеет вид $G_k = C\,\mu^k$, где $\mu = -a/b$. После определения константы C из G_1 получаем частное решение неоднородного уравнения

$$G_k^1 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \le 0, \\ -\dfrac{1}{a}\left(-\dfrac{a}{b}\right)^k & \text{при } k \ge 1. \end{cases}$$

После прибавления к нему общего решения однородного уравнения получаем выражение для фундаментального решения:

$$G_k = \begin{cases} A\left(-\dfrac{a}{b}\right)^k & \text{при } k \le 0, \\ \left(A - \dfrac{1}{a}\right)\left(-\dfrac{a}{b}\right)^k & \text{при } k \ge 1. \end{cases}$$

Его ограниченность выражается в виде зависимости постоянной A от величины $|a/b|$:

$$\begin{cases} A = 0 & \text{при } |a/b| < 1, \\ \forall\, A & \text{при } |a/b| = 1, \\ A = \dfrac{1}{a} & \text{при } |a/b| > 1. \end{cases}$$

22.2. Рассмотрим случай $|a/b| > 1$. Из задачи 22.1 следует, что

$$G_{k-n} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\left(-\dfrac{a}{b}\right)^{k-n} & \text{при } k \le n, \\ 0 & \text{при } k \ge n+1. \end{cases}$$

Поскольку каждый член ряда может быть оценен сверху членом сходящейся геометрической прогрессии

$$\left|-\frac{1}{a}\left(-\frac{a}{b}\right)^{k-n} f_n\right| < \frac{F}{|a|}\left|\frac{b}{a}\right|^{n-k},$$

ряд сходится. Кроме того, ряд является частным решением заданного уравнения:

$$a\,y_k + b\,y_{k+1} = a\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{k-n} f_n + b\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{k+1-n} f_n =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a\,G_{k-n} + b\,G_{k+1-n}\right) f_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n^k f_n = f_k.$$

Для этого решения верна оценка

$$\left|y_k^1\right| \le \frac{F}{|a|} \sum_{n=k}^{\infty} \left|\frac{b}{a}\right|^{n-k} = \frac{F}{|a| - |b|},$$

т.е. полученное частное решение ограниченное.

Случай $|a/b| < 1$ рассматривается аналогично.

22.3. Для определения G_k имеем три группы уравнений:

$$\begin{cases} G_{k-1} - 2\,G_k + G_{k+1} = 0 & \text{при } k \le -1, \\ G_{-1} - 2\,G_0 + G_1 = 1 & \text{при } k = 0, \\ G_{k-1} - 2\,G_k + G_{k+1} = 0 & \text{при } k \ge 1. \end{cases}$$

Общие решения первой и третьей групп имеют одинаковый вид, отличающийся только постоянными

$$\begin{cases} C_1^- + C_2^- k & \text{при } k \le -1, \\ C_1^+ + C_2^+ k & \text{при } k \ge 1. \end{cases}$$

Поскольку G_0 входит во все три группы уравнений, из полученных соотношений имеем

$$G_0 = C_1^- = C_1^+ = A\,.$$

Теперь воспользуемся уравнением при $k = 0$ для установления связи между C_2^- и C_2^+:

$$(A - C_2^-) - 2\,A + (A + C_2^+) = 1.$$

Отсюда

$$C_2^- = B, \quad C_2^+ = 1 + B.$$

Следовательно, окончательное выражение для фундаментального решения имеет вид:

$$G_k = \begin{cases} A + B\,k & \text{при } k \le 0, \\ A + (B+1)\,k & \text{при } k \ge 0. \end{cases}$$

Ограниченное решение не существует, поскольку B не может одновременно быть равным 0 и -1.

22.4. $$G_k = \begin{cases} A\cos\dfrac{k\pi}{3} + \left[B + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}(1-2A)\right]\sin\dfrac{k\pi}{3} & \text{при } k \ge 0, \\ A\cos\dfrac{k\pi}{3} + B\sin\dfrac{k\pi}{3} & \text{при } k \le 0. \end{cases}$$

22.5. $$G_k = \begin{cases} A\,2^{-k} & \text{при } k \ge 0, \\ A\,2^{k} & \text{при } k \le 0, \end{cases} \quad \text{где } A = -\frac{2}{3}.$$

22.6. Перепишем разностное уравнение следующим образом:

$$y_{k+1} + 2h\lambda\, y_k - y_{k-1} = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\mu^2 + 2h\lambda\,\mu - 1 = 0.$$

Его корни: $\mu_1 = -h\lambda + \sqrt{1+h^2\lambda^2}$ и $\mu_2 = -h\lambda - \sqrt{1+h^2\lambda^2}$. Общее решение разностного уравнения имеет вид

$$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k.$$

Константы C_1 и C_2 определяются из системы

$$C_1 + C_2 = 0,$$
$$C_1\mu_1^N + C_2\mu_2^N = 0,$$

из которой получаем, что $C_2 = -C_1$ и $C_1(\mu_1^N - \mu_2^N) = 0$, т.е. нетривиальное решение разностной задачи существует тогда и только тогда, когда $\mu_1^N = \mu_2^N$. Следовательно,

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n = 1, \ldots, N-1.$$

Так как $\mu_1\mu_2 = -1$, то $\mu_1^2 = -\exp\left(i\frac{2\pi n}{N}\right)$, откуда

$$\mu_1 = i\exp\left(i\frac{\pi n}{N}\right), \quad \mu_2 = i\exp\left(-i\frac{\pi n}{N}\right).$$

Поскольку

$$\mu_1 + \mu_2 = -2h\lambda = i\left(\exp\left(i\frac{\pi n}{N}\right) + \exp\left(-i\frac{\pi n}{N}\right)\right) = 2i\cos\frac{\pi n}{N},$$

имеем

$$\lambda^{(n)} = -\frac{i}{h}\cos\frac{\pi n}{N}, \quad n = 1, \ldots, N-1.$$

Нетривиальные решения исходной задачи имеют вид

$$y_k^{(n)} = C_1\left(\mu_1^k - \mu_2^k\right) = C_1 i^k\left(\exp\left(i\frac{\pi kn}{N}\right) - \exp\left(-i\frac{\pi kn}{N}\right)\right) =$$
$$= C_1 i^k 2i\sin\frac{\pi kn}{N} = C\, i^{k+1}\sin\frac{\pi kn}{N}.$$

22.7. Характеристическое уравнение разностной задачи имеет вид

$$q^2 - \left(2 - h^2\lambda\right)q + 1 = 0.$$

Если корни характеристического уравнения вещественны, то разностная задача имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть $q_1 \neq q_2$ — вещественные корни. Тогда общее решение имеет вид

$$y_k = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k,$$

а для определения C_1 и C_2 из краевых условий имеем систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 q_1^N + C_2 q_2^N = 0, \end{cases}$$

из которой следует $C_1 q_1^N - C_1 q_2^N = 0$. Так как $q_1 \neq q_2$, то $C_1 = C_2 = 0$, т.е. общее решение является нулевым. Аналогично рассматривается случай равных вещественных корней.

Поэтому надо рассмотреть случай $q_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$. Тогда общее решение разностной задачи представляется в виде $y_k = C_1 \cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi$. Из краевых условий получим $C_1 = 0$ и $\sin N\varphi = 0$. Отсюда

$$\varphi = \frac{\pi n}{N}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Так как $q_1 + q_2 = 2 - h^2\lambda$, то $\cos\varphi = 1 - h^2\lambda/2$. Следовательно,

$$\lambda^{(n)} = \frac{2}{h^2}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{N}\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi n}{2N}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Отметим, что количество различных ненулевых собственных значений равно $N - 1$.

Из представления общего решения разностной задачи следует, что собственные функции имеют вид

$$y_k^{(n)} = C_2 \sin\frac{\pi k n}{N}, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Замечание. Провести аналогию с дифференциальной задачей:

$$y'' = -\lambda y,\ y(0) = y(1) = 0, \quad y_{(n)} = C\sin(\pi n x),\ \lambda_{(n)} = (\pi n)^2,\ n = 1, \ldots .$$

22.8. Функция Грина (фундаментальное решение, удовлетворяющее однородным краевым условиям $y_0 = y_N = 0$) имеет вид

$$G_k^j = \begin{cases} \dfrac{j}{N}(k - N) & \text{при } k \geq j, \\ \dfrac{k}{N}(j - N) & \text{при } k \leq j, \end{cases} \quad \text{где} \quad j = 1, \ldots, N-1, \quad k = 0, \ldots, N.$$

22.9.

$$y_k = \begin{cases} 2^k - 3^k & \text{при } k \leq 0, \\ 0 & \text{при } k \geq 0. \end{cases}$$

22.10.

$$y_k = \begin{cases} C\,6^k & \text{при } k \leq 0, \\ C\,2^{-k} & \text{при } k \geq 0, \end{cases} \qquad C = -\frac{2}{11}.$$

22.11.

$$y_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k \leq 0, \\ 4\left(2^{-k} - 4^{-k}\right) & \text{при } k \geq 0. \end{cases}$$

22.12.

$$y_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k \geq 0, \\ C\left((-3)^k - 4^k\right) & \text{при } k \leq 0, \end{cases} \qquad C = \frac{1}{7}.$$

22.13.

$$y_k^{(n)} = C\cos\frac{\pi(n-1)(2k-1)}{2(N-1)},\ \lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi(n-1)}{2(N-1)},\ n = 1 \div N-1.$$

22.14.

$$y_k^{(n)} = C\sin\frac{\pi(2n-1)(N-k)}{2N-1},\ \lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi(2n-1)}{2(2N-1)},\ n = 1 \div N-1.$$

22.15.

$$y_k^{(n)} = C\sin\frac{\pi(2n-1)k}{2N-1},\ \lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi(2n-1)}{2(2N-1)},\ n = 1 \div N-1.$$

§ 23

23.1.

$$u(x) = 1, \quad \varphi_i^h = \begin{cases} 1, & k \neq 0, \\ 1 + h^{-1/4}, & k = 0. \end{cases}$$

23.2. Сходится с первым порядком при $u \in C^{(1)}$, со вторым порядком при $u \in C^{(k)}$, $k \geq 2$.

23.3. Нет, да.

23.4. 1)$O(h^2)$; 2)$O(h)$; 3)$O(h^2)$.

23.5. 1)$O(h^2)$; 2)$O(h)$.

23.11. $c \leq \pi^2 - \delta$, $\quad \delta > 0$.

23.18. $a = 0$, $\quad b = -1$, $\quad c = \frac{1}{6}$, $\quad d = \frac{2}{3}$, $\quad p = 3$.

23.19. $a = \frac{1}{2}$, $\quad b = -\frac{1}{2}$, $\quad c = e = \frac{1}{6}$, $\quad d = \frac{2}{3}$, $\quad p = 3$.

23.20. $a = 0$, $\quad b = 1$, $\quad c = d = \frac{1}{6}$, $\quad p = 3$.

23.21. $a = 0$, $\quad b = -1$, $\quad c = \frac{1}{6}$, $\quad d = \frac{2}{3}$, $\quad p = 3$.

§ 24

24.1. Пусть $y(x)$ — произвольная гладкая функция. Тогда условие аппроксимации для левой и правой частей уравнения (1) означает справедливость соотношений в произвольном узле x_n $(n > 0)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{p} a_{-k}y_{n-k} = y'(x_n),\ \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{p} b_{-k}f\big(x_{n-k}, y(x_{n-k})\big) = f\big(x_n, y(x_n)\big).$$

Согласно формуле Тейлора имеем

$$y(x-kh) = y(x) - khy'(x) + O\big(h^2\big),$$

$$f\big(x-kh, y(x-kh)\big) = f\big(x, y(x)\big) + O(h).$$

Подстановка этих выражений в условия аппроксимации дает:

$$\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{p} a_{-k}y(x_n)\right) - \sum_{k=0}^{p} a_{-k}k\,y'(x_n) + O(h)\right] = y'(x_n)\,,$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\left(\sum_{k=0}^{p} b_{-k}\right) f\big(x_n, y(x_n)\big) + O(h)\right] = f\big(x_n, y(x_n)\big)\,,$$

откуда (в силу произвольности функции $y(x)$) и следует необходимость и достаточность указанных в условии задачи равенств.

24.2. Да, нет, да. Использовать условия, сформулированные в предыдущей задаче.

24.3. Первый. Можно, если положить $y_1 = h$. Тогда порядок аппроксимации будет равен двум.

24.4. Все коэффициенты равны 1/2.

24.5. 1/6, 2/3, 1/6. Использовать метод неопределенных коэффициентов построения разностных схем, заменив f на y' и сдвинув для симметрии индексы.

24.6. Схема устойчива при $\theta \ge 1/2\,, \theta = 0$.

24.7. Без учета решения задачи 24.1 получим: $a = 28, b = 12, c = 36$. Условие α–устойчивости не выполнено.

Правильное решение:

$$2a + 4 = 1, \quad 2b + c = 1, \quad 8 + a = b\,.$$

Характеристическое уравнение при этом имеет вид

$$(\mu^2 - 1)\left(\mu^2 - \frac{3}{2}\mu + 1\right) = 0\,,$$

т.е. условие α–устойчивости выполнено.

24.8. Запишем дифференциальную задачу в виде

$$\frac{dy}{dx} = -Ay, \quad y(0) = d\,,$$

где

$$y = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & l \\ -l & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$y = \exp(-Ax)\,d\,.$$

Так как

$$\lambda_{1,2}(A) = \pm l\,i\,,$$

то, обозначив через X матрицу, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A, получаем

$$y = X\begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 x} \end{bmatrix} X^{-1} d\,.$$

Для нахождения решения разностной задачи представим ее в виде

$$y_k^h = A_h y_{k-1}^h, \quad k = 1, \ldots, n,$$
$$y_0^h = d,$$

где

$$y_k^h = \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{bmatrix}, \quad A_h = E - hA = \begin{bmatrix} 1 & -hl \\ hl & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$y_k^h = A_h^k y_0^h,$$

то

$$y_k^h = X \begin{bmatrix} (1 - ilh)^k & 0 \\ 0 & (1 + ilh)^k \end{bmatrix} X^{-1} d.$$

При нахождении A_h^k было использовано совпадение собственных векторов матриц A_h и A и связь между их собственными числами

$$\lambda(A_h) = 1 - h\lambda(A).$$

Можно показать, что $\exp(\pm ilx_k) - (1 \pm ilh)^k = O(h)$. Следовательно, $\|y(x_k) - y_k^h\|_\infty = O(h)$. Вводя в пространстве Y_h норму

$$\|y_h\|_{Y_h} = \max_{0 \le k \le n} \left(\|y_k^h\|_\infty\right),$$

приходим к следующей оценке сходимости решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи:

$$\|(y)_h - y_h\|_{Y_h} = O(h).$$

Таким образом, схема имеет первый порядок сходимости.

24.9.

$$y_k = y_0 \left[\frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\mu_1^k - \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\mu_2^k\right] + y_1 \left[-\frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\mu_1^k + \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}\mu_2^k\right],$$

где $\mu_{1,2}$ – корни уравнения $\mu^2 + 2h\mu - 1 = 0$:

$$\mu_1 = -h + \sqrt{1 + h^2} = 1 - h + \frac{h^2}{2} + O(h^4), \quad \mu_2 = (-1)\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) + O(h^4);$$

$$c_1 = 0$$

24.10. Эта схема неустойчива, нет сходимости.

24.11.

$$\frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} + u_m = \cos(hm), \quad u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{5}{3}h.$$

24.12.

$$\frac{u_{m+1}-u_m}{h}+5\frac{u_{m+1}+u_m}{2}=\frac{\sin(h(m+1))+\sin(hm)}{2},\quad u_0=2\,.$$

24.13.

$$\frac{u_{m+1}-u_{m-1}}{2h}-u_m=\exp(2hm),\quad u_0=1,\quad u_1=\exp(2h)\,.$$

24.14.

$$\frac{u_{m+1}-u_m}{h}-(u_{m+1}+u_m)=\frac{\exp(h(m+1))+\exp(hm)}{2},\quad u_0=1\,.$$

24.15. Взять заведомо α – неустойчивую схему, например

$$4\frac{y_{m+1}-y_{m-1}}{2h}-3\frac{y_{m+1}-y_m}{h}=c\,f_{m-1}+d\,f_m+e\,f_{m+1}\,,$$

и методом неопределенных коэффициентов получить заданный порядок аппроксимации.

$\boxed{\S\ 25}$

25.1. $\alpha=\gamma=1/12,\ \beta=5/6.$

25.2. Из формулы Тейлора имеем

$$u(h)=u(0)+h\,u'(0)+\frac{h^2}{2}\,u''(0)+O\big(h^3\big)\,,$$

откуда

$$u'(0)=\frac{u(h)-u(0)}{h}-\frac{h}{2}\,u''(0)+O\big(h^2\big)\,.$$

Из исходного уравнения следует, что

$$-u''(0)=f(0)-p(0)\,u_0\,.$$

Таким образом,

$$a\,u(0)+b\,\left(\frac{u(h)-u(0)}{h}+\frac{h}{2}\big(f(0)-p(0)\,u(0)\big)\right)=c+O\big(h^2\big)\,.$$

Искомая аппроксимация имеет вид

$$\left(a-\frac{h}{2}\,p_0\right)u_0+b\,\frac{u_1-u_0}{h}=c-\frac{h}{2}\,f_0\,.$$

25.3. Собственные значения разностной задачи

$$\frac{y_{i+1}-2\,y_i+y_{i-1}}{h^2}=-\lambda\,y_i,\quad y_0=y_N=0,\quad h=1/N$$

имеют вид (см. задачу 22.7)

$$\lambda_n=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi n h}{2},\quad n=1,\,\dots\,,N-1\,.$$

Легко видеть, что

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2} \geq 4, \quad \lambda_{\max} = \lambda_{N-1} \leq \frac{4}{h^2}.$$

Отсюда следует устойчивость и порядок обусловленности системы. Выше было использовано неравенство

$$\sin|\beta| \geq \frac{2}{\pi}|\beta| \quad \text{при} \quad |\beta| \leq \frac{\pi}{2}.$$

25.4. Введем обозначение

$$l(y_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

и покажем, что если $l(y_i) \leq 0$ при $i = 1, \ldots, N-1$ и $y_0 = y_N = 0$, то $y_i \geq 0$ при всех i.

Пусть $d = \min\limits_i y_i < 0$ и q — такое наименьшее целое, что $y_q = d$. Тогда $y_{q-1} > d$, $y_{q+1} \geq d$ и

$$l(y_q) = \frac{(y_{q+1} - d) + (y_{q-1} - d)}{h^2} > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $y_i \geq 0$ при всех i.

Следующий шаг — доказательство неравенства

$$\max_{0 \leq i \leq N} |y_i| \leq \frac{1}{8}Y, \quad \text{где } Y = \max_{0<i<N} \left|l(y_i)\right|.$$

Введем для этого функцию

$$w_i = \frac{ih(1-ih)}{2}Y, \quad i = 0, \ldots, N,$$

удовлетворяющую условиям $w_i \geq 0$ и $l(w_i) = -Y$. Теперь для функций $w_i \pm y_i$ справедливо:

$$l(w_i \pm y_i) = -Y \pm l(y_i) \leq 0, \quad w_0 \pm y_0 = w_N \pm y_N = 0.$$

Поэтому использование доказанного выше свойства дает $w_i \pm y_i \geq 0$, откуда и следует искомая оценка

$$|y_i| \leq w_i \leq \max_{0<i<N} w_i \leq \frac{1}{8}Y.$$

Последний этап — определение величины Y в уравнении для погрешности $u(x_i) - y_i$. Для этого запишем уравнение для погрешности, используя формулу Тейлора

$$l\big(u(x_i) - y_i\big) = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i) = -\frac{h^2}{12}f''(\xi_i).$$

Отсюда $Y = \dfrac{h^2}{12}\max\limits_{[0,1]}\left|f''(x)\right|$, что и приводит к искомой оценке.

25.5. Воспользоваться формулой Абеля

$$\sum_{i=0}^{N-1}(a_{i+1}-a_i)\,b_i = -\sum_{i=0}^{N-1}(b_{i+1}-b_i)\,a_{i+1} + a_N b_N - a_0 b_0 \,.$$

25.6. Использовать интегральное тождество

$$\frac{1}{h^2}\,(\nabla y, \nabla y) + (py, y) = (f, y)$$

и сеточный аналог неравенства для функции и ее производной

$$y_i = \sum_{k=1}^{i}(\nabla y)_k \quad \rightarrow \quad y_i^2 \le \sum_{k=1}^{i} 1^2 \sum_{k=1}^{i}(\nabla y)_k^2 \le N\,(\nabla y, \nabla y)\,,$$

$$(y, y) = \sum_{k=1}^{N-1} y_i^2 \le N^2\,(\nabla y, \nabla y) \le \frac{1}{h^2}\,(\nabla y, \nabla y)\,.$$

Априорная оценка для решения имеет вид

$$(y, y) \le (f, y) \quad \rightarrow \quad \|y\| \le \|f\|, \quad \text{где} \quad \|y\|^2 = \frac{1}{N}\,(y, y)\,.$$

25.17. $\dfrac{u_N - u_{N-1}}{h} + \dfrac{h}{2}(\cos(1) + 1) - 3\,u_N = 1\,.$

25.18. $\dfrac{u_1 - u_0}{h} - \dfrac{h}{2} + 4\,u_0 = 1\,.$

25.19. $\dfrac{u_N - u_{N-1}}{h} + \dfrac{h}{2}(3\,u_N + \exp(1)) = 0\,.$

25.20. $\dfrac{u_1 - u_0}{h} - \dfrac{h}{2}(2\,u_0 - 1) - u_0 = 0\,.$

25.21. Схема устойчива, так как

$$\lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi(n-1)}{2(N-1)} + 1, \quad n = 1 \div N-1, \quad \lambda_{\min} = 1\,.$$

25.22. Схема устойчива, так как

$$\lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi(2n-1)}{2(2N-1)}, \quad n = 1 \div N-1, \quad \lambda_{\min} \ge 1\,.$$

25.23. Схема устойчива, так как

$$\lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi(2n-1)}{2(2N-1)}, \quad n = 1 \div N-1, \quad \lambda_{\min} \ge 1\,.$$

25.24. Схема устойчива, так как

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi n}{2N}, \quad n = 1 \div N-1, \quad \lambda_{\min} \ge 4 - 3 = 1$$

§ 26

26.1. $O\left(\tau, h^2, \dfrac{h^2}{2\tau}\right)$.

26.2. При $a<0$ и $\tau=\dfrac{h}{|a|}$ существует схема с аппроксимацией $O(h^2)$.

26.3. Воспользоваться идеей построения схемы Кранка — Николсона с порядком аппроксимации $O\left(\tau^2, h^2\right)$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{1}{2}\left[\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}}{2h}+\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}\right]=0,$$

применив разложение в ряд Тейлора в точке $\left(x_m, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$, и аппроксимировать производную по переменной x с четвертым порядком на шаблоне из точек x_m, $x_{m\pm1}$, $x_{m\pm2}$.

26.4. Схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau, h)$. Подставим в нее общий вид частного решения $u_m^n=\lambda^n e^{i m\varphi}$. В результате будем иметь

$$\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi}-\lambda^n e^{im\varphi}}{\tau}+a\,\frac{\lambda^n e^{im\varphi}-\lambda^n e^{i(m-1)\varphi}}{h}=0.$$

Сокращая на $\lambda^n e^{im\varphi}$, получаем

$$\frac{\lambda-1}{\tau}+a\,\frac{1-e^{-i\varphi}}{h}=0,$$

откуда следует

$$\lambda(\varphi)=1-\frac{a\tau}{h}+\frac{a\tau}{h}\,e(-i\varphi).$$

Пусть $a>0$. Тогда при $0<\dfrac{a\tau}{h}\le 1$ имеем $\left|\lambda(\varphi)\right|\le 1-\dfrac{a\tau}{h}+\dfrac{a\tau}{h}=1$, т.е. схема устойчива при выполнении указанных выше условий. При $\dfrac{a\tau}{h}=\gamma>1$ получим $\lambda(\pi)=1-2\gamma<-1$, т.е. в этом случае схема неустойчива.

Таким образом, разностная схема условно устойчива.

Отметим, что аналогичные рассуждения справедливы при $a<0$ для схемы

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\,\frac{u_{m+1}^n-u_m^n}{h}=0.$$

26.5. Схема имеет порядок аппроксимации $O\left(\tau, h^2\right)$. Как и в предыдущей задаче, получим

$$\lambda(\varphi)=1-\frac{a\tau}{2h}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)=1-i\frac{a\tau}{h}\sin\varphi,$$

откуда следует, что

$$\max\left|\lambda(\varphi)\right|=\left|\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=\sqrt{1+\frac{a^2\tau^2}{h^2}}.$$

Пусть $\tau = Ah^2$. Тогда

$$\left|\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \le \sqrt{1+a^2A\tau} = 1 + a^2A\,\frac{\tau}{2} + O(\tau^2) \le e^{c\tau},$$

где $c = \dfrac{a^2A}{2}$ — постоянная в правой части неравенства из спектрального признака устойчивости.

Обратим внимание, что исследование устойчивости с помощью спектрального признака фактически позволяет находить искомые законы стремления τ и h к нулю.

26.6. $\lambda(\varphi) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a\tau}{h}\right)e^{i\varphi} + \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{a\tau}{h}\right)e^{-i\varphi}$.

Схема устойчива $\left(\left|\lambda(\varphi)\right| = 1\right)$ при выполнении условия $\dfrac{|a|\tau}{h} \le 1$.

26.7. $\lambda(\varphi) = \left(1 + \dfrac{a\tau}{h} - \dfrac{a\tau}{h}\,e^{-i\varphi}\right)^{-1}$.

Введем обозначения: $\delta = \sup\limits_{0\le\varphi\le2\pi}\left|\lambda(\varphi)\right|$ и $a\tau/h = \gamma$. Тогда:

при $a > 0$ или при $\gamma \le -1$ выполнено $\delta \le 1$, т.е. схема устойчива;

при $-1 < \gamma < 0$ выполнено $\delta = \dfrac{1}{|2\gamma+1|} > 1$, т.е. схема неустойчива.

26.8. $\lambda(\varphi) = \left(1 - \dfrac{a\tau}{h}\,i\sin\varphi\right)^{-1}$.

Поскольку $\left|\lambda(\varphi)\right| \le 1$, схема устойчива при любых τ и h.

26.9. $\lambda(\varphi) = \cos\varphi - \dfrac{a\tau}{h}i\sin\varphi$. Схема устойчива $(|\lambda(\varphi)| \le 1)$ при выполнении условия $\dfrac{|a|\tau}{h} \le 1$.

26.10. При $0 \le \theta \le \dfrac{1}{2}$.

§ 27

27.1. При $\dfrac{\tau}{h^2} = \dfrac{1}{6}$.

27.2. При $\theta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h^2}{12\tau}$.

27.3. $O\left(\tau^2, h^4\right)$.

27.4. Схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau, h^2)$. Введем обозначение $\rho = \tau/h^2$ и перепишем схему в удобном для анализа виде

$$u^n_{m+1} = (1-2\rho)\,u^n_m + \rho\,(u^n_{m+1} + u^n_{m-1}) + \tau f^n_m\,.$$

Поскольку максимальные значения обеих частей равенства по m совпадают, при $\rho \le \dfrac{1}{2}$ имеем

$$\|u^{n+1}\| \le (1-2\rho)\|u^n\| + 2\rho\|u^n\| + \tau\|f^n\| = \|u^n\| + \tau\|f^n\| \le\le \|u^{n-1}\| +$$

$$+\tau\left(\|f^n\| + \|f^{n-1}\|\right) \le \ldots \le \|u^0\| + \sum_{k=0}^{n}\tau\|f^k\| \le \|u^0\| + (n+1)\,\tau\max_n\|f^n\|\,.$$

Следовательно, схема удовлетворяет условию устойчивости с постоянной $c = (n+1)\tau = t$ при условии $\dfrac{\tau}{h^2} \le \dfrac{1}{2}$.

27.5. Схема имеет порядок аппроксимации $O\left(\tau, h^2\right)$. В данном случае удобная для анализа форма записи имеет вид

$$u_m^{n+1} + \rho\left(-u_{m-1}^{n+1} + 2u_m^{n+1} - u_{m+1}^{n+1}\right) = u_m^n + \tau f_m^{n+1}.$$

Теперь из всех значений u_m^{n+1}, по модулю равных $\left\|u^{n+1}\right\|$, выберем такое, у которого индекс m принимает наименьшее значение. В этом случае

$$\left|u_m^{n+1}\right| > \left|u_{m-1}^{n+1}\right| \qquad \text{и} \qquad \left|u_m^{n+1}\right| \ge \left|u_{m+1}^{n+1}\right|.$$

Отсюда $\left|2u_m^{n+1}\right| > \left(\left|u_{m-1}^{n+1}\right| + \left|u_{m+1}^{n+1}\right|\right)$, и знак выражения

$$2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1}$$

совпадает со знаком u_m^{n+1}, т.е.

$$\left\|u^{n+1}\right\| = \left|u_m^{n+1}\right| \le \left|u_m^{n+1} + \rho\left(2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1} - u_{m+1}^{n+1}\right)\right| = \left|u_m^n + \tau f_m^{n+1}\right|.$$

Таким образом, при любых шагах сетки τ и h справедливо $\left\|u^{n+1}\right\| \le \le \left\|u^n\right\| + \tau\left\|f^{n+1}\right\|$. Дальнейший вывод оценки устойчивости выполняется по аналогии с предыдущей задачей.

27.6. Сходимость имеет место при выполнении условия устойчивости: $\rho \le 1/2$, при этом имеем порядок сходимости $O\left(\tau, h^2\right)$ для $\rho \ne 1/6$ и $O(\tau^2, h^4)$ для $\rho = 1/6$.

27.7. При выполнении этого условия среди частных решений вида $u_m^n = \mu_q^n\, y_m^q$ найдется q такое, что $|\mu_q| \ge \gamma > 1$, где $y_m^q = \sin(\pi m h q)$.

27.8. С помощью частных решений вида $u_m^n = \mu_q^n\, y_m^q$ показать, что схема неустойчива для всех τ и h.

27.9. Если $0 \le \theta \le 1/2$, то схема устойчива для всех τ и h; если $1/2 < \theta \le 1$, то условие устойчивости имеет вид $\dfrac{\tau}{h^2} \le \dfrac{1}{4\theta - 2}$.

27.10. Схема может быть преобразована к виду

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + \frac{\tau^2}{h^2}\,\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}.$$

Она устойчива для всех τ и h.

§ 28

28.1.

$$\Delta^h u(A_0) = \frac{16}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{n}\left[-u(A_0) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u(A_k)\right].$$

28.2.

$$a_{00} = 4c - 4, \quad a_{11} = a_{1-1} = a_{-11} = a_{-1-1} = c,$$
$$a_{10} = a_{-10} = a_{01} = a_{0-1} = 1 - 2c,$$

или, что то же самое,

$$\Delta^h = \overline{\partial}_1\partial_1 + \overline{\partial}_2\partial_2 + c\,h^2\overline{\partial}_1\partial_1\overline{\partial}_2\partial_2\,,$$

где c — произвольная постоянная.

28.3. $c < \dfrac{1}{2}$.

28.4.

$$\left(\Delta^h\right)^2 u = \overline{\partial}_1^2\partial_1^2 u + 2\,\overline{\partial}_1\partial_1\overline{\partial}_2\partial_2 u + \overline{\partial}_2^2\partial_2^2 u = \left(\overline{\partial}_1\partial_1 + \overline{\partial}_2\partial_2\right)^2 u$$

с погрешностью аппроксимации $\left(\Delta^h\right)^2 u - \Delta^2 u = O\left(h^2\right)$.

28.5.

$$h\sum_{j=1}^{N_2}\left(\overline{\partial}_1 y_{N_1+1,j} - \partial_1 y_{0,j}\right) + h\sum_{i=1}^{N_1}\left(\overline{\partial}_2 y_{i,N_2+1} - \partial_2 y_{i,0}\right) = 0\,.$$

Литература

1. *Арушанян И.О., Чижонков Е.В.* Материалы семинарских занятий по курсу "Методы вычислений" /под ред.О.Б.Арушаняна — М.: Изд-во ЦПИ при механико - математическом факультете МГУ, 1999.

2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. — М.: Наука, 1975.

3. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987.

4. *Бахвалов Н.С., Кобельков Г.М., Поспелов В.В.* Задачи по курсу "Методы вычислений". — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

5. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.

6. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.

7. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. — М.: Наука, 1977.

8. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.

9. *Дробышевич В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С.* Задачи по вычислительной математике. — М.: Наука, 1980.

10. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980.

11. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.

12. Сборник задач по численным методам / Сост. Стрелков Н.А. Ярославль: Изд-во Яросл. ун-та, 1988.

13. *Тыртышников Е.Е.* Краткий курс численного анализа. — М.: ВИНИТИ, 1994.

14. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970.

15. *Хемминг Р.В.* Численные методы. — М.: Наука, 1968.

16. Численные методы решения задач алгебры и дифференциальных уравнений / Сост. Стрелков Н.А. Ярославль: Изд-во Яросл. ун-та, 1989.

Содержание

Учебное издание

Бахвалов Николай Сергеевич
Лапин Александр Васильевич
Чижонков Евгений Владимирович

Численные методы в задачах и упражнениях

Редактор *Ж.И. Яковлева*
Художественный редактор *Ю. Э. Иванова*
Технический редактор *Л. А. Овчинникова*
Корректор *Г. Н. Петрова*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-207. Подп. в печать 20.01.2000
Формат 60x90$^1/_{16}$. Бум. газетная. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная
Объем: 12,0 усл. печ. л., 12,37 усл. кр.-отт., 9,31 уч.-изд. л.
Тираж 7000 экз. Заказ № 301

ГУП издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4,
Неглинная ул., д. 29/14

Отпечатано в ГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432601, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14