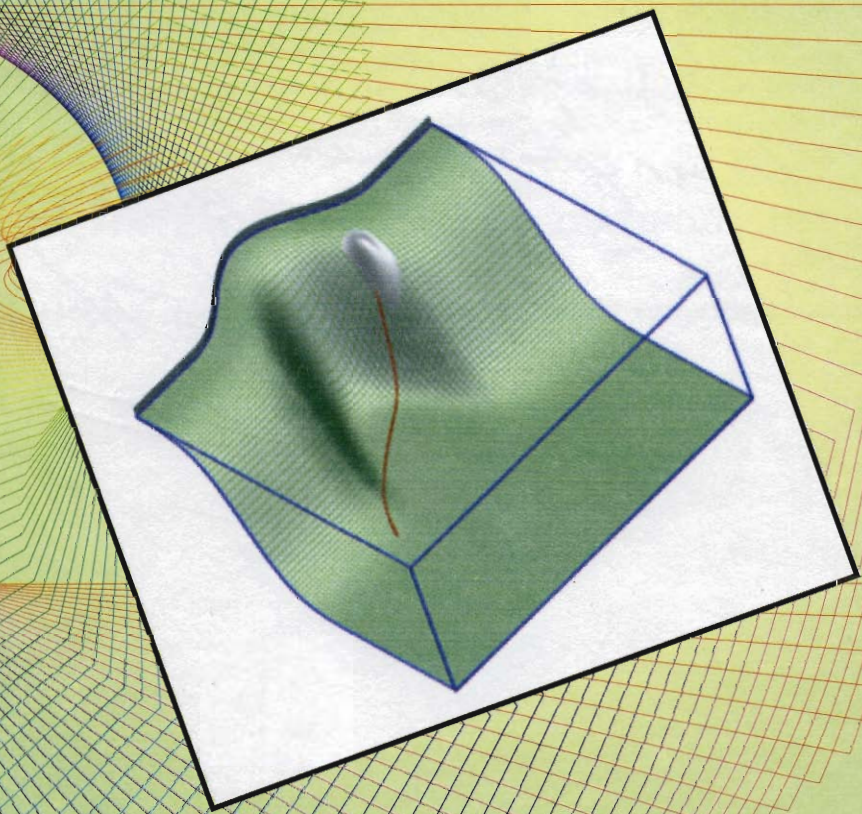


Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров,
П. В. Воронина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



Часть 1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, П. В. Воронина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Часть 1
Общие принципы математического моделирования

Учебное пособие

Новосибирск
2010

ББК В185.121
УДК 519.85+519.688+521
Х 162

Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б., Воронина П. В. Математическое моделирование: В 2 ч.: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. Ч. 1: Общие принципы математического моделирования. 148 с.

ISBN 978-5-94365-872-5

Учебное пособие соответствует программе курса лекций «Математическое моделирование», который читается на втором курсе механико-математического факультета НГУ. В его первой части излагаются универсальные методологические подходы, позволяющие безотносительно к конкретным областям приложений строить математические модели изучаемых объектов на основе использования фундаментальных законов природы, вариационных принципов, иерархических цепочек, метода аналогий. Представлены примеры построения и анализа математических моделей в биологии, экономике, в задачах поддержки принятия решений. Отдельная глава посвящена построению математической модели механики сплошных сред на основе аксиоматического подхода.

Пособие предназначено для студентов и преподавателей математических специальностей высших учебных заведений.

Рецензент
доктор физ.-мат. наук С. Г. Черный

Издание подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ—НГУ.

ISBN 978-5-94365-872-5

© Новосибирский государственный университет, 2010
© Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б., Воронина П. В., 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	8
§ 1. Построение математической модели	8
§ 2. Общие требования к вычислительным алгоритмам	21
§ 3. Некоторые принципы разработки программ	30
Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ, ЭКОЛОГИИ, ЭКОНОМИКЕ, В ЗАДАЧАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ	37
§ 1. Модели динамики численности изолированных популяций .	37
§ 2. Модели межвидового соперничества популяций	42
§ 3. Обобщенные модели взаимодействия популяций	55
§ 4. Простейшие математические модели экономических процессов	74
§ 5. Математическое моделирование в задачах поддержки принятия решений	84
Глава 3. АКСИОМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ	102
§ 1. Аксиоматика сплошной среды	102
§ 2. Движение сплошной среды	105
§ 3. Силовые и энергетические характеристики сплошной среды	111
§ 4. Замыкающие соотношения и интегральные законы сохранения	113
Ответы, указания, решения	117
Персоналии	138
Библиографический список	145

Введение

Сущность методологии математического моделирования состоит в замене исходного объекта его образом — математической моделью и дальнейшем изучении модели, например, с помощью реализуемых на компьютерах вычислительных алгоритмов. Этот метод познания сочетает в себе многие достоинства теории и эксперимента [25]. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время эксперименты с моделями объектов позволяют при поддержке современной вычислительной техники и численных алгоритмов подробно изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущество эксперимента). Методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы — от разработки технических систем до анализа сложнейших социальных и экономических процессов.

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, второе их развитие пришлось на конец 40-х — начало 50-х годов XX века и было обусловлено по крайней мере двумя причинами. Первая из них — появление ЭВМ, расширившее возможности исследований. Вторая — национальные программы СССР и США по созданию новых видов вооружений, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Математическое моделирование блестяще справилось с этой задачей: ядерные взрывы, полеты ракет и спутников были предварительно «осуществлены» с помощью математических моделей на ЭВМ.

Сейчас начинается третий этап развития математического моделирования с привлечением новых возможностей информационного общества. Без владения информационными ресурсами нельзя думать о решении важных проблем, стоящих перед мировым сообществом. Однако исходная, «сырая» информация зачастую мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки такого информационного «сырья»

в готовый «продукт», т. е. в точное знание. Математическое моделирование может и должно стать интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества.

Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: разработка модели, выбор алгоритма, создание программы. На первом этапе выбирается (или строится) эквивалент объекта, отражающий в математической форме его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.

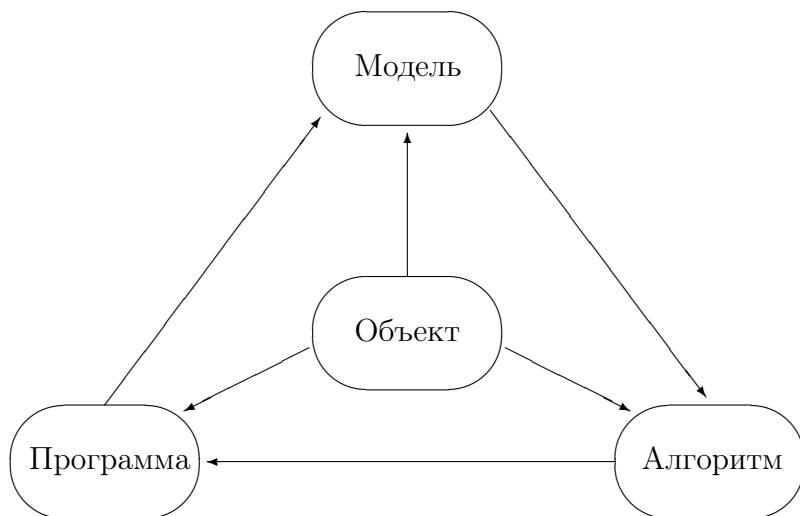


Рис. 1. Элементы математического моделирования

Второй этап — выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не исказить основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности.

Создав триаду «модель—алгоритм—программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех компонентов триады.

Основным препятствием для широкого использования математического моделирования в науке, технике, управлении является недостаток квалифицированных специалистов. Требования, предъявляемые к специалисту в области математического моделирования, весьма высоки и вместе с тем противоречивы. С одной стороны, он должен быть профессионалом, глубоко понимающим достаточно узкую конкретную область исследований. С другой стороны, ему часто приходится выступать как ученому, который видит проблему в целом и способен уточнить, а иногда и радикально изменить постановку задачи, предложенную физиками, химиками или биологами. Работа в области математического моделирования предполагает своеобразный стиль мышления, в котором глубина и конкретность сочетаются с широтой и пониманием общих идей. Поэтому изучение методологии математического моделирования должно занимать важное место в современном университетском образовании.

В основу настоящего пособия, состоящего из двух частей, положен материал лекций полугодового основного курса «Математическое моделирование», сопровождаемого семинарами, который в течение ряда лет читается на механико-математическом факультете НГУ в четвертом семестре. У студентов-второкурсников математических специальностей университетов за плечами имеются лишь немногие пройденные курсы (математического анализа, алгебры, вычислительных методов линейной алгебры, другие вводные курсы), поэтому мы постарались изложить материал в форме, максимально доступной для этой категории студентов и одновременно побуждающей их к необходимости усвоения последующих основных и специальных курсов, поскольку верная стратегия математического моделирования различных объектов может быть

намечена только при хорошем представлении об имеющемся инструментарии и основных достижениях в каждой из компонент упомянутой выше триады.

В первой части пособия излагаются основные принципы построения математических моделей, вычислительных алгоритмов и реализующих их программ, приводятся примеры элементов математического моделирования в биологии, экономике, управлении, выписывается общая математическая модель движения сплошных сред. Эта модель весьма подробно рассмотрена во второй части пособия, в которой, в частности, обсуждаются вопросы получения из общей модели механики сплошной среды специальных моделей, описывающих движения жидкостей, газов, деформируемых тел. Для лучшего усвоения лекционного материала большинство параграфов завершается формулировкой задач, которые необходимо решить на семинарских занятиях. Многие задачи снабжены указаниями и подробными решениями. Список литературы не претендует на полноту. В нем обращается внимание на наиболее простые и доступные источники.

Каждая глава пособия имеет самостоятельную сквозную нумерацию параграфов. Внутри параграфов для формул использована двухиндексная нумерация. Ссылки на формулы из других глав даются добавлением спереди к номеру формулы номера главы. Доказательство утверждений завершается значком «■».

В заключение этого краткого введения хочется выразить сердечную благодарность всем нашим коллегам, общение с которыми на семинарах академика Николая Николаевича Яненко в 60—80 годах XX века постепенно привело к выстраиванию методологии метода математического моделирования. Концепция математического моделирования получила дальнейшее развитие в научной школе академика Юрия Ивановича Шокина, которая включена в Президентскую программу поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-6068.2010.9) и оказала существенное влияние на подбор материала настоящего пособия.

Особую признательность авторы выражают безвременно ушедшему из жизни Рустяму Рафаэловичу Ахмерову, блестяще читавшему курс «Математическое моделирование» в 90-х годах прошлого века на механико-математическом факультете НГУ. Предложенный им стиль изложения материала, связанного с построением моделей сплошной среды, использован нами в соответствующих главах настоящего пособия, изданного в рамках реализации Программы развития НГУ.

Глава 1

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

§ 1. Построение математической модели

1.1. Качественное описание явления. Одно из оснований материалистического мировоззрения составляет тезис о неисчерпаемости мира и каждой его части [36], о том, что любое явление природы неисчерпаемо в своей сложности. Это значит, что в одном конкретном исследовании учесть специфику всех сторон явления (объекта) невозможно, поэтому при построении математической модели следует вначале дать качественное описание явления, стремясь определить и выделить факторы, наиболее существенные с точки зрения поставленной исследовательской задачи, пренебрегая факторами второстепенными, т. е. описание, фиксирующее одно и игнорирующее многое другое, описание, оставляющее от нашего «настоящего», слишком сложного и запутанного, совсем немного.

Такое разделение на главные и второстепенные факторы выполняется на основе имеющихся знаний о реальном явлении. Однако надо иметь в виду, что из-за неполноты этих знаний после проведения всей цепочки математического моделирования, возможно, потребуется пересмотр математической модели, иногда даже кардинальный: может оказаться, что факторы процесса, считавшиеся второстепенными, на самом деле равнозначны главным, выявятся новые факторы, доминирующие лишь в ограниченном диапазоне определяющих параметров и т. д.

1.2. Математическая модель. Далее в соответствии с выбранным качественным описанием объекта формируется его математическая модель — задача, в которой в математической форме отражаются основные свойства объекта. На этом этапе моделирования качественное описание объекта переходит в количественное: выбираются переменные, описывающие движение, системы отсчета и единиц измерения, выписываются системы уравнений (алгебраических, дифференциальных или интегро-дифференциальных), устанавливающих связи между этими переменными. Здесь термин «движение» употребляется в широком смысле — изменение вообще, а сами объекты могут быть совершенно различными по своей природе и назначению: физические, биологические

или социальные явления, технологические процессы, механизмы или конструкции.

Надо иметь в виду, что само явление не зависит от выбора системы отсчета, но его описание зависит от такого выбора. Например, в механике чаще всего используются инерциальные системы отсчета, в любой из которых материальная точка, не испытывающая каких-либо внешних воздействий, движется равномерно и прямолинейно. Однако при исследовании сложных явлений бывает удобнее описывать их в неинерциальных системах отсчета, например, в системе координат, жестко связанной с вращающимся телом.

Системы единиц измерения можно выбирать по-разному, причем связи между величинами, характеризующими объект (получаемые из законов природы или иных соображений), не должны изменяться при изменении единиц измерения. Например, второй закон Ньютона

$$F = ma, \quad (1.1)$$

где F — сила, a — ускорение, m — масса, в системе СИ записывается точно так же, как и в системе СГС. Важным моментом на этом этапе является применение процедуры обезразмеривания (масштабирования) величин, переход от размерных к безразмерным величинам [26], поскольку в результате масштабирования может выясниться, что поведение объекта определяется меньшим числом параметров, чем предполагалось при его качественном описании.

На уровне неживой материи одними из главных методов получения уравнений модели являются методы, основанные на использовании законов сохранения или вариационных принципов [12, 16, 18, 19, 26]. Эти законы и принципы не выделяют единственного движения, поэтому нужны дополнительные принципы отбора для выделения реального движения из множества мысленно допустимых. Например, необходима постановка граничных условий, а для нестационарных задач — еще и начальных данных. Кроме того, в результате различного рода допущений при описании объекта уравнения модели могут содержать произвольные параметры или функции. Эти подлежащие определению функции входят в так называемые замыкающие соотношения модели. Например, при получении моделей, описывающих течения газа, кроме законов сохранения вещества, импульса, момента импульса, энергии необходимы еще зависимости давления, коэффициентов вязкости и теплопроводности от плотности и температуры, а также другие замыкающие соотношения. Они фиксируются с большей или меньшей точностью с помощью

физических измерений. В качестве примера можно привести уравнение Клапейрона

$$p = \rho RT,$$

которое используется в качестве замыкающего соотношения в модели идеального газа. Здесь p — давление, ρ — плотность, T — температура, R — газовая постоянная, определяемая химическим составом газа.

На уровне живой материи все принципы отбора движений, справедливые для неживой материи, сохраняют свою силу. Поэтому и здесь процесс моделирования начинается с записи законов сохранения или вариационных принципов. Однако почти все взаимодействия в живой материи имеют особенность, которую называют «обратной связью»: некоторые эффекты процесса возвращаются к своему источнику или к предыдущей стадии, в результате чего усиливаются или ослабляются. Поэтому при описании биологических систем следует основываться на указанных принципах отбора и системе обратных связей [3, 22].

На общественном уровне организации материи возникает совершенно новое явление — трудовая деятельность. Поэтому при получении моделей в этой трудноформализуемой области сложнейших процессов, зависящих от сознательного вмешательства самих людей, следует пользоваться терминами трудовой деятельности, экономическими, финансовыми и другими принципами отбора реальных «движений» [8, 14, 29], методом аналогий [25].

1.3. Законы сохранения. Законы сохранения массы, импульса, энергии многократно подтверждены опытами, их обоснованность не вызывает сомнений, поэтому они используются в качестве основных принципов построения моделей механики твердых или деформируемых тел. Заметим, что смысл закона сохранения не сводится целиком к запрету на изменение массы, импульса, энергии и т. п., поскольку закон сохранения представляет собой некоторое утверждение, раскрывающее возможность вполне определенного изменения количественных характеристик исследуемых свойств. Так например, для изолированной системы материальных точек закон сохранения импульса гласит, что импульс такой системы не изменяется со временем, а для неизолированной (при наличии внешних сил, воздействий) — скорость изменения импульса равна сумме всех действующих на систему внешних сил [4], т. е. импульс может меняться со временем.

Законы сохранения нашли применение при выводе математических моделей не только в механике, но и во многих других предметных обла-

стях. Общая математическая формулировка закона сохранения выглядит следующим образом [3]:

$$\frac{d\Phi}{dt} = F. \quad (1.2)$$

Здесь t — время,

$$\Phi = \sum_k \varphi^k, \quad \varphi^k = \varphi^k(\varphi_1^k, \dots, \varphi_s^k),$$

$\varphi_s^k = \varphi_s^k(t, x_1, \dots, x_n)$ — количественная характеристика некоторого свойства k -го элемента системы (например, масса, кинетическая энергия, внутренняя энергия и т. п.), x_i ($i = 1, \dots, n$) — заданные признаки индивидуальности элемента системы (например, его координаты). Причина изменения F называется воздействием.

Если число элементов системы настолько велико, что признаки индивидуальности, свойства элементов системы, воздействия принимают все значения из допустимых интервалов, а все искомые функции являются непрерывными, то искомая характеристика системы представляется в виде

$$\Phi = \int_{\omega} \varphi d\omega, \quad (1.3)$$

где ω — произвольный выделенный объем пространства переменных x_i , (состоящий при всех t из одних и тех же признаков x_i), φ — плотность распределения величины Φ . Воздействие F складывается из объемного воздействия

$$G = \int_{\omega} g d\omega$$

на каждый элемент системы и поверхностного воздействия

$$\Sigma = \int_S \sigma_n dS,$$

которое передается всей системе через границу S объема ω . Здесь g — плотность объемного воздействия, σ_n — плотность распределения поверхностного воздействия.

Следовательно, для *непрерывных систем* закон сохранения (1.2) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \varphi d\omega = \int_{\omega} g d\omega + \int_S \sigma_n dS, \quad (1.4)$$

при этом конкретный вид законов сохранения получается после определения величин φ , σ_n и g для конкретной исследуемой проблемы.

В приложениях возникает необходимость изучения классов движений, более широких по сравнению с классом непрерывных движений. Если в области определения движения существует некоторая гиперповерхность, на которой допускается скачкообразное изменение решения и вне которой решение непрерывно, то соответствующее движение называется движением с сильным разрывом. Величины разрывов не могут быть произвольными, они удовлетворяют некоторым соотношениям, которые называются уравнениями сильного разрыва. Эти соотношения выводятся из законов сохранения.

1.4. Вариационные принципы. Еще один метод построения математических моделей связан с вариационными принципами. Вариационный принцип гласит, что из всех возможных движений изучаемого объекта в действительности реализуется только то, на котором некоторая связанная с объектом величина достигает своего экстремального значения.

Поясним вкратце суть вариационного принципа, рассмотрев движение некоторой механической системы. При использовании вариационного принципа движение описывается при помощи так называемого конфигурационного пространства, построенного из обобщенных координат q , обобщенных скоростей $\dot{q}$ и времени t . Основными понятиями этой теории, в которой движение во все моменты времени полностью определяется набором величин $q(t)$ и $\dot{q}(t)$, являются понятия функции Лагранжа $\mathcal{L}$ и действия по Гамильтону S .

Функция Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ равна разности кинетической и потенциальной энергий, действие S определяется как функционал

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt,$$

который каждой функции $q(t)$, определенной на отрезке $[t_1, t_2]$ ставит в соответствие некоторое действительное число. Согласно принципу Гамильтона на реальном движении действие должно быть минимально (вообще — экстремально), что выражается равенством

$$\delta S = 0. \quad (1.5)$$

Здесь символом δ обозначена математическая операция варьирования. Более подробно равенство (1.5) может быть записано следующим образом:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(q + \varepsilon\varphi, \frac{d(q + \varepsilon\varphi)}{dt} \right) dt \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (1.6)$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, обращающаяся в нуль при $t = t_1$ и $t = t_2$, $\varepsilon\varphi(t)$ — вариация величины $q(t)$. Уравнение (1.6) и дает искомую модель.

Приведем пример получения простейшей математической модели с помощью вариационного принципа. В настоящее время одним из перспективных направлений развития энергетики является создание волновых энергетических станций, использующих механическую энергию поверхностных волн. В этом направлении ведутся интенсивные лабораторные исследования и предлагаются разнообразные аналитические методы расчета отдельных элементов станций [27]. Считается несомненным, что вычислительный эксперимент на основе адекватных математических моделей позволит детально воспроизвести картину воздействия волн на рабочие элементы станций.

Здесь мы рассмотрим простейшую модельную установку, в которой набегающие волны воздействуют на подвижную стенку, при перемещении которой энергия волн преобразуется в механическую энергию устройства, вырабатывающего электроэнергию. Для описания взаимодействия волн со стенкой можно перейти к задаче о волновом движении жидкости в области с подвижной вертикальной стенкой, которая прикреплена пружинами к неподвижному блоку (см. рис. 2) и перемещение которой определяется волновыми нагрузками, восстанавливающей силой пружин, силами трения, сопротивления воды и другими силами.

Отметим, что аналогичная модельная задача возникает при изучении поведения упругих стенок больших конструкций, подверженных воздействию поверхностных волн. Здесь также необходимо решать связанную задачу гидроупругости, поскольку деформации стенок зависят от волнового давления, которое, в свою очередь, зависит от упругих свойств стенок, при этом следует учитывать нестационарность и нелинейность происходящих процессов. Подобного рода задачи возникают и при конструировании подвижных волнозащитных стенок для нефтедобывающих морских платформ и плавучих аэродромов.

Пусть положение стенки определяется горизонтальной координатой $s(t)$, при этом координата $s = 0$ соответствует положению стенки

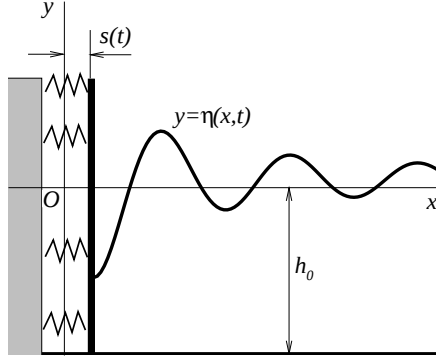


Рис. 2. Схема взаимодействия поверхностных волн с упруго закрепленной вертикальной стенкой

при ненагруженном состоянии пружин (см. рис. 2). Согласно закону Ньютона (1.1) уравнение горизонтального перемещения стенки имеет вид

$$m\ddot{s} = -ks + F, \quad (1.7)$$

где m — масса стенки, k — коэффициент жесткости пружин, восстанавливающая сила пружин $-ks$ выделена отдельно, а суммарное действие всех остальных сил обозначено как F .

При получении математической модели вариационным методом рассмотрим простейшую ситуацию, когда на стенку действует единственная сила — сила упругости пружин ($F \equiv 0$). Тогда функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергий, примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - \frac{k}{2}s^2,$$

действие —

$$S(s) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}\dot{s}^2 - \frac{k}{2}s^2 \right) dt,$$

а действие на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ величины $s(t)$ запишется как

$$S(s + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt}(s + \varepsilon\varphi) \right)^2 - \frac{k}{2}(s + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt.$$

Следовательно, в нашем примере уравнение (1.6) можно записать в таком виде

$$\begin{aligned}
 0 &= \left. \frac{dS(s + \varepsilon\varphi)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - k(s\varphi + \varepsilon\varphi^2) \right] dt \Big|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - ks\varphi \right] dt.
 \end{aligned}$$

Поскольку пробная функция φ равна нулю в моменты t_1 и t_2 , то с учетом формулы интегрирования по частям

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} \frac{d\varphi}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2s}{dt^2} \varphi dt$$

приходим к следующей окончательной форме уравнения (1.6) для рассматриваемого примера:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d^2s}{dt^2} + ks \right] \varphi dt = 0.$$

Вследствие произвольности функции φ получаем, что равенство нулю возможно только в том случае, когда выражение в квадратных скобках равно нулю во все моменты времени $t \in (t_1, t_2)$:

$$m\ddot{s} = -ks, \tag{1.8}$$

т. е. когда движение стенки описывается уравнением, совпадающим с уравнением (1.7) (при $F \equiv 0$), полученным на основе закона Ньютона.

Решение уравнения (1.8)

$$s(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \tag{1.9}$$

описывает гармонические колебания стенки с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$, при этом значения множителей α и β определяются из начальных данных: положения $s(0)$ стенки в начальный момент времени и ее скорости $\dot{s}(0)$.

Ниже, в задаче 1.1 предлагается получить другие, более интересные чем (1.8), модели исследуемого объекта.

Отметим, что сформулированные применительно к какому-либо классу явлений вариационные принципы позволяют единообразно строить математические модели не только механических, но и физических, химических, биологических и иных процессов.

1.5. Метод аналогий. Математическое моделирование — это наиболее универсальная, высшая форма метода моделирования, успешно применяемого в науке. Физическое моделирование как средство познания явлений природы и как средство конструирования было известно уже давно. Самой простой формой физического моделирования можно считать механическое моделирование, когда изучение интересующего объекта заменяется изучением его модели меньшего или большего масштаба в лабораторных установках. Например, при соблюдении геометрических и динамических критериев подобия [26] обтекание уменьшенной модели самолета в аэродинамической трубе воспроизводит с достаточной точностью картину полета самолета в атмосфере. Более сложный вид физического моделирования — аналоговое моделирование, когда устанавливается аналогия между двумя различными физическими процессами (например, аналогия между процессами теплопроводности и электропроводности) и процессы одной природы моделируются процессами совершенно другой физической природы.

Такая аналогия имеет место и при математическом моделировании, что выражается в том, что небольшое число сравнительно простых математических моделей дает ключ к пониманию и исследованию огромного количества различных явлений. Так например, потенциал электрического поля, создаваемого зарядами на проводящей поверхности, и температурное поле в теле, поверхность которого имеет заданную температуру, описываются одним и тем же дифференциальным уравнением. То обстоятельство, что многообразные физические процессы могут быть охвачены сравнительно малым количеством математических моделей, говорит об универсальности последних, следующей из универсальности исходных предположений об этих процессах, и является одной из причин успеха математического моделирования.

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать законы сохранения или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существова-

нии подобных законов, допускающих математическую формулировку. К таким объектам относятся, например, системы с заметным вмешательством людей, в частности экономические системы.

Одним из плодотворных подходов к построению моделей такого рода объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями: методы и результаты, разработанные и накопленные при математическом моделировании одних явлений, переносятся «по аналогии» на широкие классы совсем других процессов. Например, известны механико-экономические аналогии (использование идеи «насыщения»: скорость роста со временем какой-либо величины пропорциональна произведению текущего значения этой величины на разность между ее предельным и текущим значениями, использование законов сохранения, переходов с микро- на макроуровень), термодинамико-экономические аналогии (представления о стационарных процессах, равновесных состояниях, переход от дискретной к непрерывной модели) и др. Применение подобных аналогий позволяет глубже понять принципиальные свойства трудноформализуемых объектов.

1.6. Иерархия моделей. Развитие науки XX века показало необходимость построения множества различных моделей для описания одного явления или объекта, создания альтернативных картин реальности. Оптимально выбираемый уровень моделирования существенно зависит от его целей: не обязательно использовать модель высокого уровня, существенно более затратную по компьютерным ресурсам, если в этом нет практической необходимости. Но и в противном случае построение математических моделей сразу во «всей полноте», с учетом всех факторов, существенных для его поведения, не бывает оправданным.

Более результативным оказывается подход, реализующий принцип «от простого к сложному», когда после достаточно подробного изучения не очень сложной модели делается следующий шаг — отказ от одного или нескольких упрощающих предположений, идеализирующих изучаемый объект. При этом возникает цепочка (иерархия) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая. Путь «от простого к сложному» дает возможность поэтапно изучать все более реалистичные модели и сравнивать их свойства.

Иерархия математических моделей часто строится и по противоположному принципу «от сложного к простому», «от общего к частному». В этом случае реализуется путь «сверху вниз» — из достаточно

общей и сложной модели при соответствующих упрощающих предположениях и конкретизациях рассматриваемого объекта, определяемых протекающими в нем процессами, его геометрией и т. д., получается последовательность все более простых (но имеющих уменьшающуюся область применимости) моделей. Такой подход позволяет сразу установить некоторые общие свойства объекта, конкретизируя и дополняя их в частных ситуациях. Длина образующейся при этом цепочки может быть весьма значительной.

Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей нелинейны. Тем не менее, линейные модели, получающиеся из нелинейных при особых упрощающих предположениях (линеаризации) и справедливые лишь для описания малых изменений характеристик объекта, также должны быть включены в иерархию математических моделей, поскольку они просты для исследования и могут служить первым приближением к реальности. Например, предполагая, что толщина струны много меньше ее длины, что она имеет постоянную линейную плотность, амплитуда колебаний значительно меньше длины струны и что можно пренебречь продольными смещениями и скоростями участков струны, мы приходим к линейной модели, приближенно описывающей малые поперечные движения точек струны. Разумеется, линеаризованная модель не дает исчерпывающей картины процесса, но из нее можно извлечь ряд сведений, полезных для более полного исследования.

Таким образом, иерархические цепочки могут содержать линейные и нелинейные модели, стационарные и нестационарные модели, модели, отличающиеся типом используемых в них дифференциальных уравнений (уравнения гиперболического, параболического, эллиптического типов, а также смешанного типа), модели многомерные и одномерные и т. д. Дополнительные вариации построенных моделей связаны с различными вариантами краевых условий и других входных данных. При построении и анализе любой модели всегда полезно знать ее место в общей иерархии моделей изучаемого объекта [25]. Это дает возможность правильно оценивать область применимости и четко осознавать связи с моделями других уровней, т. е. способствует более глубокому пониманию исследуемых явлений.

1.7. Исследование модели. Одним из важных моментов является исследование получившейся модели. Поскольку получающиеся модели, как правило, представляют собой сложные системы уравнений,

допускающие интегрирование (получение решения в конечном виде) только в исключительных случаях, жизненно важно развитие методов их исследования. Здесь можно выделить так называемые качественные методы, составляющие огромную часть современной математики — совокупность методов, позволяющих делать те или иные заключения о решениях, не зная точного их выражения. Сюда включаются методы исследования существования и единственности решения, его устойчивости, асимптотического поведения, анализа размерностей, группового анализа моделей и т. п. Такой теоретический анализ позволяет на следующем этапе моделирования — конструировании вычислительных алгоритмов — разрабатывать качественные численные методы и заранее прогнозировать особенности численного решения.

Вместе с тем, необходимо развивать и совершенствовать аналитическую технику, искать специальные классы решений. Знание точных решений, хотя бы в некоторых частных случаях, позволяет выполнить предварительную проверку качества вычислительного алгоритма, ибо без такой проверки нельзя понять, что отражают результаты вычислительного эксперимента — реальные свойства объекта или же некоторые побочные эффекты самой вычислительной процедуры. Использование компьютеров при поиске аналитических выражений для решения и, вообще, при проведении аналитических вычислений существенно расширяет возможности исследования математических моделей. К настоящему времени созданы десятки специальных программных систем (Reduce, Maple, Mathematica и др.) для выполнения всевозможных аналитических преобразований.

Отметим, что многие явления описываются такими математическими моделями, разработка теории которых находится пока в начальной стадии и о решении которых мало что известно. Тем не менее, запросы практики заставляют решать и такие задачи.

З А Д А Ч И

1.1. Для уравнения (1.8) рассмотрим задачу Коши со следующими начальными данными при $t = 0$:

$$s(0) = a > 0, \quad \dot{s}(0) = 0. \quad (1.10)$$

При этих условиях решение (1.9) уравнения (1.8) запишется в виде

$$s(t) = a \cos \omega t, \quad (1.11)$$

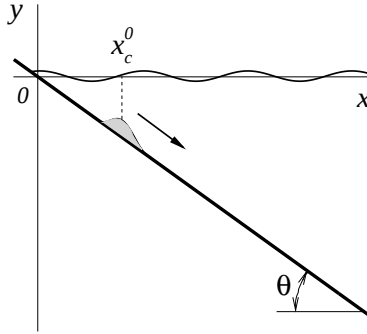


Рис. 3. Схема движения подводного оползня по плоскому откосу

где $\omega = \sqrt{k/m}$. Используя закон Ньютона (1.7), построить новую математическую модель, описывающую движение вертикальной стенки (см. рис. 2) не только под воздействием упругой силы пружин (как в модели (1.8)), но и дополнительной внешней силы, равной $-F_0 \cos \omega_1 t$ и обусловленной давлением на стенку периодических поверхностных волн. Здесь ω_1 — частота волновой силы.

Исследовать решение полученной модели при тех же начальных данных (1.10). Предложить дальнейшие обобщения модели, дающие более реалистическую картину процесса.

1.2. Используя закон Ньютона (1.1) и принцип «от простого к сложному», построить иерархию математических моделей, описывающих движение подводного оползня по плоскому откосу (см. рис. 3). Считать, что оползень представляет собой твердое тело известной формы и движется под действием сил тяжести и Архимеда, сил сопротивления воды и трения о дно. Выписать и исследовать аналитические решения моделей. Придумать возможные обобщения рассмотренных моделей, приводящие ко все более полному описанию явления.

§ 2. Общие требования к вычислительным алгоритмам

На основании построенных математических моделей реального объекта выполняется следующий этап математического моделирования — создание вычислительного алгоритма, включающий в себя его разработку и анализ свойств, что составляет содержание огромного раздела современной математики — вычислительной математики [23]. Рассмотрим некоторые общие принципы конструирования и обоснования вычислительных алгоритмов, предназначенных для использования на современных ЭВМ.

2.1. Переход к дискретной модели. Поскольку компьютер оперирует только с дискретным представлением информации, то общим для всех численных методов является сведение математической задачи к конечномерной. Это чаще всего достигается дискретизацией (аппроксимацией) исходной задачи, т. е. переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента, переходом от непрерывного представления математической задачи (аналитическое, дифференциальное, интегро-дифференциальное представление) к ее дискретному аналогу. Например, если в исходной задаче фигурировала функция $u(x, y)$, определенная в области непрерывного изменения аргументов x и y , то в дискретной задаче будет использоваться функция $u(x_j, y_j)$, определенная на конечном множестве точек (узлов) (x_j, y_j) ($j = 1, \dots, N$), которое называется расчетной сеткой. Очевидно, что сеточную функцию $u_j = u(x_j, y_j)$ можно рассматривать как вектор $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ конечномерного пространства размерности N .

Расчетная сетка является дискретным представлением области решения. Методам построения сеток для двумерных и трехмерных областей посвящено огромное количество научных статей, число которых стремительно растет и в настоящее время, поскольку нерешенных проблем здесь еще очень много [9, 10, 35, 37]. Широко применяются структурированные (регулярные) сетки с четырехугольными ячейками на плоскости (см. рис. 4, а) и шестигранными в пространстве. Регулярная сетка представляет собой упорядоченный по «сеточным направлениям» набор узлов. Широкое распространение на практике получили и неструктурированные (нерегулярные) сетки, особенностью которых является произвольное расположение узлов сетки в области решения (см. рис. 4, б), произвольное в том смысле, что отсутствуют выраженные

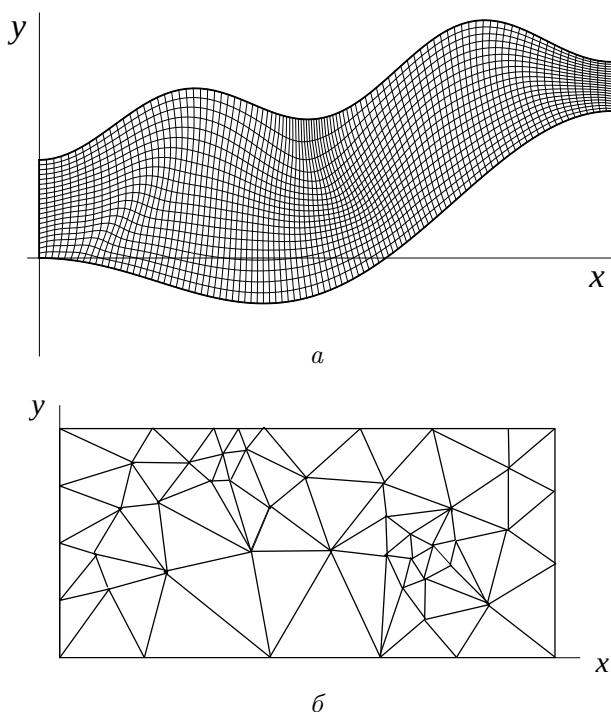


Рис. 4. Расчетные сетки: *a* — регулярная (структурированная);
б — неструктурированная

сеточные направления и число ячеек, содержащих каждый конкретный узел, может меняться от узла к узлу. Используются также гибридные сетки, объединяющие регулярные сетки в одних подобластях области решения с нерегулярными в других. «Хорошая» сетка должна учитывать особенности решения, сгущаясь в окрестности этих особенностей, а при решении нестационарных задач являться еще и подвижной, адаптирующейся к подвижным особенностям решения [33, 34].

Отметим, что в последнее время появились оригинальные вычислительные алгоритмы, для выполнения которых сетка не требуется. Они получили название бессеточных методов.

Существует множество методов перехода от непрерывного представления математической модели к ее дискретному представлению: метод

конечных разностей, метод конечных объемов, метод конечных элементов, спектральные методы и др. [11, 17, 23, 24, 30, 31, 32].

Метод конечных разностей основан на замене производных, входящих в исходные уравнения, их дискретными (разностными) аналогами на структурированных сетках. Например, при дискретизации уравнения (1.8) методом конечных разностей на равномерной по времени сетке $t_j = j\tau$ ($j = 0, \dots, N$) с количеством узлов $(N + 1)$ и шагом $\tau = T/N$ получается разностное уравнение

$$m \frac{s_{j+1} - 2s_j + s_{j-1}}{\tau^2} = -ks_j, \quad j = 1, \dots, N - 1 \quad (2.1)$$

относительно сеточной функции s_j , являющейся на временном промежутке $[0, T]$ приближением для решения $s(t)$ уравнения (1.8).

В методе конечных объемов используется интегральная формулировка законов сохранения (1.4), которая записывается для совокупности контрольных объемов (обычно для ячеек как структурированных, так и неструктурированных сеток). Дискретный аналог законов сохранения получают путем вычисления всех входящих в формулировку интегралов по каким-либо квадратурным формулам.

В методе конечных элементов искомое приближенное решение раскладывается по конечной системе финитных кусочно-полиномиальных базисных функций и требуется, чтобы невязка решения была ортогональна всем базисным функциям. Таким образом, решение исходной задачи сводится к системе алгебраических уравнений (САУ), линейных (СЛАУ) или нелинейных (СНАУ), относительно коэффициентов разложения. Построение базисных функций тесно связано с выбранной расчетной сеткой, вернее с ее ячейками, которые в этом методе называются конечными элементами. В качестве конечных элементов выступают отрезки в одномерной области, треугольники или четырехугольники в двумерной, тетраэдры или призмы в трехмерной. Метод конечных элементов получил широкое распространение при выводе дискретных моделей в механике деформируемого твердого тела.

Спектральные методы предполагают использование взаимно ортогональных базисных функций, не являющихся финитными. Искомое решение раскладывается в ряд по этим функциям, и конечный отрезок этого ряда подставляется в исходные уравнения. В результате происходит полная алгебраизация исходной задачи, ее отображение в САУ для определения коэффициентов разложения. Для областей простой формы спектральный метод дает высокую точность даже при сравнительно небольшом числе базисных функций.

Заменив математическую модель дискретной, мы должны быть уверены в том, что при увеличении числа узлов (числа базисных функций) решение дискретной задачи приближается в некотором смысле к решению исходной задачи. Близость этих решений во многом (но не полностью) определяется способом аппроксимации, «близостью» математической модели и аппроксимирующей ее дискретной модели. Строгие доказательства аппроксимируемости непрерывной задачи ее дискретным представлением существуют лишь для ограниченного числа задач, линейных или квазилинейных. Для большинства нелинейных задач таких теорем нет, и нет даже надежды, что они будут получены в обозримом будущем. Вследствие этого необходим очень тщательный и строгий контроль свойств разрабатываемого алгоритма всеми доступными способами.

Заметим, что некоторые задачи изначально формулируются в дискретной форме, например, в виде САУ относительно неизвестных величин (см. § 5 главы 2). Для таких задач этап перехода к дискретной модели не нужен, поэтому после формулировки математической модели и ее исследования сразу приступают к разработке вычислительного алгоритма.

2.2. Точность алгоритма. После дискретизации исходной задачи надо построить вычислительный алгоритм, т. е. указать последовательность арифметических и логических действий, выполняемых на ЭВМ и дающих за конечное число операций (шагов) решение дискретной задачи. Полученное решение принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

Как правило, для одной и той же дискретной модели можно предложить множество вычислительных алгоритмов. И это обстоятельство не может не настораживать, ибо довольно очевидно, что среди большого разнообразия алгоритмов не все одинаковы по своим качествам. Есть алгоритмы «хорошие» и «плохие», и нужно уметь отличать одни от других, причем делать это, не тратя времени и труда на программирование и расчеты, а заранее, априори. А для этого нужно сформулировать критерии для оценки качества вычислительных алгоритмов.

Основное требование, предъявляемое к вычислительному алгоритму, это требование точности. Оно означает, что вычислительный алгоритм должен давать приближенное решение построенной или выбранной математической модели с заданной точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число действий $Q(\varepsilon)$. Алгоритм должен быть реализуемым, т. е. давать

решение дискретной задачи за допустимое машинное время. Для почти всех алгоритмов время решения задачи возрастает при повышении точности, т. е. при уменьшении ε .

Решение дискретной задачи не совпадает с решением исходной, оно является приближенным решением, решением с погрешностью. Можно выделить две основные причины возникновения погрешности численного решения. Во-первых, при замене исходной задачи дискретной возникает погрешность дискретизации (аппроксимации). Например, заменяя в уравнении (1.8) производную $\dot{s}$ разностной производной, фигурирующей в левой части разностного уравнения (2.1), мы допускаем погрешность дискретизации, имеющую при $\tau \rightarrow 0$ порядок τ^2 . Второй вид погрешности — ошибки округления — связан с конечной разрядностью чисел, представляемых в ЭВМ. Ошибки округления могут существенно повлиять на точность приближенного решения и даже на саму возможность его вычисления на ЭВМ.

2.3. Устойчивость алгоритма. При каждом вычислении на ЭВМ появляются ошибки округления. В зависимости от алгоритма эти ошибки могут в процессе вычислений неограниченно нарастать, либо не накапливаться. В первом случае алгоритм называют неустойчивым, во втором — устойчивым. Например, если в некотором алгоритме вычисляются члены геометрической прогрессии $b_{n+1} = b_n q$ ($n = 1, 2, \dots$) со знаменателем $q > 1$ и при вычислении первого члена была допущена ошибка δ , т. е. вместо b_1 было получено значение $\bar{b}_1 = b_1 + \delta$, то эта ошибка скажется и при вычислении b_{n+1} : вместо истинного значения мы получим значение $\bar{b}_{n+1} = \bar{b}_1 q^n = b_{n+1} + \delta \cdot q^n$, отличающееся от b_{n+1} накопленной погрешностью $\delta \cdot q^n$, которая быстро возрастает при $n \rightarrow \infty$.

Другой пример. С точки зрения теоретической математики конструктивность теоремы о существовании и единственности решения СЛАУ, основанной на правиле Крамера, неоспорима. Однако алгоритм, основанный на формулах Крамера, не обладает устойчивостью при его использовании для вычислений на ЭВМ. Кроме того, для него не выполняется требование получения решения за разумное количество операций (для вычисления определителей требуется порядка $N!$ действий, где N — число неизвестных). Поэтому для поиска решения СЛАУ на ЭВМ применяются другие — устойчивые алгоритмы, основанные на методах исключения и итерационных методах. Известны и иные алгоритмы, эффективные с теоретической точки зрения, но неприемлемые с точки зрения машинной арифметики.

2.4. Экономичность алгоритма. Естественно добиваться, чтобы число действий $Q(\varepsilon)$ (и тем самым машинное время решения задачи) было минимально. Для любой задачи можно предложить много алгоритмов. При их использовании одинаковая точность ε может достигаться за разное число действий. Предположим, что решение дискретной задачи является вектором $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ конечномерного пространства размерности N . Если число арифметических действий для нахождения одной компоненты решения «слабо» зависит или вообще не зависит от общего числа неизвестных, то алгоритм называется экономичным. Таким образом, экономичный алгоритм требует выполнения числа действий, пропорционального размерности N конечномерного пространства, которому принадлежит решение дискретной задачи. Следовательно, алгоритм Крамера не относится к классу экономичных (требуется порядка $N!$ действий), как и метод исключения Гаусса в общем случае ($\approx N^3$ действий), а вот знакомый вам метод прогонки является экономичным (число действий пропорционально N).

2.5. Параллелизуемость алгоритма. Желательно, чтобы вычислительный алгоритм наряду с упомянутыми характеристиками, такими, как точность, устойчивость, экономичность, обладал и свойством параллелизуемости, т. е. позволял распараллеливать себя. Возможность сегментации сложного вычислительного процесса на значительное число простых и относительно независимых процессов, время от времени обменивающихся между собой входными и выходными данными, открывает путь к конструированию компьютерных программ параллельного счета [5]. Разумеется, при этом возникают дополнительные проблемы, связанные с большими потоками информации между процессами.

Если сложный алгоритм удастся представить в виде ряда хорошо изученных и надежных алгоритмов решения простых задач, то такие элементарные алгоритмы называются вычислительными модулями, а сама процедура выделения модулей — модульным анализом алгоритма [15]. Проведя модульный анализ алгоритма, мы получаем возможность рассматривать сложный алгоритм как последовательное выполнение относительно простых вычислительных модулей. Кроме того, модульная декомпозиция алгоритма существенно облегчает его распараллеливание, а «последовательная» программа, созданная на основе алгоритма, имеющего модульную структуру, может быть легко адаптирована для ЭВМ с параллельными процессорами в виде «параллельной».

2.6. Связь алгоритма с архитектурой ЭВМ. При разработке алгоритма необходимо «заглядывать вперед»: отчетливо представлять себе тип компьютерных систем, на которых предполагается базировать создаваемый вычислительный комплекс. С одной стороны, вычислительные модули должны конструироваться таким образом, чтобы они были «инвариантны» относительно изменений системного программного обеспечения ЭВМ и ее конфигурации (вычислительной платформы). С другой, необходимо учитывать ограниченность различных уровней памяти ЭВМ, ограничения на слишком большие и малые числа (разрядность) и даже такие нюансы, как аппаратная реализация машинных команд и используемые на конкретной машине методы округления. Такой учет может существенно повысить эффективность алгоритма, но одновременно усложнить перенос готового программного продукта на другие вычислительные системы.

Вычислительные программы надо создавать так, чтобы они умели самостоятельно анализировать особенности конкретной вычислительной среды (платформы) и с учетом результатов такого анализа оптимизировать свою структуру. Попытка реализации такой технологии была предпринята в системе OLYMPUS и впоследствии развита в отечественном продукте САФРА [6].

2.7. Исследование алгоритма. Так же, как и в случае математической модели, в отношении ее дискретного аналога и вычислительного алгоритма имеется возможность выбора, поскольку одной и той же математической модели могут быть поставлены в соответствие различные дискретные модели, а одной и той же дискретной модели — различные алгоритмы для поиска ее решения. Поэтому важную роль играет исследование свойств алгоритмов, в результате которого может быть сделан выбор.

Исследование начинается с изучения вопроса о корректности дискретной задачи: существует ли решение, является ли оно единственным и как оно зависит от входных данных. Для некоторых не очень сложных задач корректность удастся установить с помощью методов функционального анализа.

Одним из главных вопросов является вопрос о сходимости приближенного решения к точному. Иногда решение этого вопроса удастся свести к исследованию аппроксимации исходной модели дискретной и устойчивости алгоритма.

Весьма важной проблемой рассматриваемого этапа математического моделирования является проблема постановки начальных условий в дискретной модели, соответствующих начальным условиям исходной нестационарной задачи: неудачная постановка этих условий может замедлить скорость сходимости приближенного решения к точному при измельчении сетки (см. задачи 2.1 и 2.2). Такой же вывод справедлив в отношении аппроксимации краевых условий. При использовании итерационных методов удачный выбор стартовых значений может существенно снизить затраты компьютерного времени, неудачный — значительно их увеличить или даже вообще не обеспечить получение искомого решения.

Важным требованием, предъявляемым к дискретной модели, является то, что ее решение должно обладать как можно большим числом свойств, присущих решению математической модели. Если для последней выполняются законы сохранения, то необходимо исследование по проверке выполнения аналогичных законов сохранения и для дискретной модели. Если в исходной модели решение положительно (температура, плотность), то необходимо исследовать на положительность и приближенное решение. Если из каких-то соображений известно, что решение математической модели является монотонно возрастающей функцией, то необходимо добиваться, чтобы и приближенное решение обладало этим же свойством и т. п.

В настоящее время известен обширный арсенал средств для исследования дискретных моделей и вычислительных алгоритмов. Эти средства основаны на достижениях теории численных методов и «чистой» математики, а эффективное их использование требует высоких интеллектуальных усилий и больших знаний в широком диапазоне научных дисциплин. В теории численных методов многое сделано, но еще больше предстоит сделать. Пока теория отстает от потребностей практики, которая зачастую за неимением достаточно развитой теории вынуждена обращаться к эмпирике, предшествующему опыту, к «здравому смыслу» и интуиции.

ЗАДАЧИ

2.1. Уравнение (1.8) аппроксимируем разностным уравнением (2.1), а начальные условия (1.10) — разностными начальными условиями

$$s_0 = a, \quad \frac{s_1 - s_0}{\tau} = 0. \quad (2.2)$$

С помощью непосредственной проверки показать, что при малых шагах τ сеточная функция

$$s_j = \alpha \sin j\varphi + \beta \cos j\varphi, \quad j = 0, \dots, N, \quad (2.3)$$

где $\varphi = \arccos(1 - \tau^2\omega^2/2)$, $\tau = T/N$, $0 < T < \infty$, α и β — произвольные действительные числа, является общим решением уравнения (2.1). Найти решение s_j дискретной задачи (2.1), (2.2) и показать, что при малых значениях τ для погрешности решения выполняется оценка

$$\max_{j=0, \dots, N} |s_j - s(t_j)| \leq C\tau \quad (2.4)$$

с постоянной C , не зависящей от τ . Здесь $s(t)$ — решение (1.11) задачи (1.8), (1.10).

2.2. Немного подправим начальные условия (2.2) дискретной задачи:

$$s_0 = a, \quad \frac{s_1 - s_0}{\tau} = -\tau \frac{a\omega^2}{2}. \quad (2.5)$$

Найти решение s_j новой дискретной задачи (2.1), (2.5) и показать, что при малых значениях τ погрешность решения удовлетворяет оценке

$$\max_{j=0, \dots, N} |s_j - s(t_j)| \leq C_1\tau^2 \quad (2.6)$$

с постоянной C_1 , не зависящей от τ . Таким образом, небольшое изменение разностных начальных условий повлекло за собой существенный рост скорости сходимости приближенного решения к точному: вместо сходимости с первым порядком по τ получили второй порядок сходимости.

§ 3. Некоторые принципы разработки программ

Вычислительный алгоритм отображает дискретную модель на множество действий, которые должны быть выполнены на ЭВМ. Запись этих действий на языке, понятном машине, выполняется на следующем этапе математического моделирования — этапе разработки программы (кодировании). Этот этап является «материализацией» проведенных ранее стадий интеллектуальных разработок и связан не только с написанием текста программы: здесь происходит проектирование, написание, отладка и тестирование программ, проведение расчетов и анализ результатов, принятие решения о дальнейшей доработке программ или их сдаче в эксплуатацию.

3.1. Проектирование программы. Если программа пишется одним автором для иллюстрации, например, эффективности разработанного им нового алгоритма, то никаких жестких требований к программе здесь не возникает, поскольку такая программа является одnorазовым продуктом, причем недолговечным и используется она лишь самим автором. Другое дело — большие программы для решения крупных научных проблем. Такие программы создаются коллективами высококвалифицированных программистов, требуют больших временных затрат, предполагается, что они будут долго эксплуатироваться «сторонними пользователями», поэтому подобного рода программы обязательно должны пройти стадию проектного обоснования. Далее пойдет речь именно о таких программах.

Современные большие программы представляют собой пакеты прикладных программ (ППП), позволяющие решать не одну, а целый класс задач из определенной предметной области и предназначенные для исследования объекта на основе различных математических и дискретных моделей с помощью различных вычислительных алгоритмов.

При проектировании программы разрабатываются схемы счета, которые устанавливают последовательность выполнения отдельных модулей в конкретных задачах, и схемы обмена данными между модулями. На этом этапе разрабатываются также структуры входных и выходных данных.

Управляющие и информационные связи, зафиксированные в схемах счета, реализуются в специальной программе, конструирование и разработка которой ориентированы на два принципиальных момента. Пер-

вый — это создание комфортных условий для пользователя, цель которого — изучение явления, а не работа с программными кодами. Пользователю должны быть созданы условия для формирования своей задачи: ввода определяющих параметров и, если это необходимо, создания своей конфигурации схемы счета. Второй задачей является построение по параметрам, введенным пользователем, исполняемого задания и запуск расчета.

При проектировании схем обмена данными между модулями принимается во внимание, что в каждом модуле описываются данные, которые могут быть трех категорий: входные, выходные и внутренние (локальные). Первые две категории имеют смысл вне модуля и потому могут быть названы глобальными данными.

При проектировании программы следует иметь в виду, что на организацию вычислительного процесса, на эффективность процессов обмена данными самое непосредственное влияние оказывает аппаратура. Особую роль играет проектирование использования памяти ЭВМ, которая может иметь весьма сложную многоуровневую структуру. Так, многопроцессорные вычислительные системы делятся на системы с распределенной и с общей памятью. Одна из конфигураций суперкомпьютера — кластер, представляющий собой сеть из многих процессоров, у каждого из которых есть своя оперативная память. Эта распределенная память доступна всем процессорам, но только через относительно медленную соединительную шину, вследствие чего растут коммуникационные потери и увеличивается время решения задачи. Альтернативная архитектура ЭВМ предусматривает множество процессоров с одной общей оперативной памятью. Такой компьютер имеет меньшие коммуникационные потери при вычислениях, но его создание резко усложняется и дорожает при увеличении числа процессоров. Отдельный процессор может содержать несколько арифметических устройств (ядер) со сверхбыстрыми регистрами памяти, на которых размещаются числа, участвующие в арифметических операциях, а также очень быструю память ограниченного объема (кэш). Конечно же, компьютер обязательно содержит и дисковую (внешнюю) память, очень большую, но слишком медленную, которая используется в процессе решения задачи только при исключительном дефиците оперативной памяти, поскольку это катастрофически снижает производительность расчетов.

Обмен данными должен быть оптимизирован и сведен до минимума в силу того, что он требует больших дополнительных расходов процессорного времени, каналов пересылки данных и т. п.

3.2. Программирование модулей. Модульность является основным принципом построения программных систем. Упомянутые выше вычислительные модули определялись как функционально законченные фрагменты вычислительного алгоритма. Программный модуль — это отдельная функционально законченная программная единица, некоторым образом идентифицируемая и используемая в программе, как правило, неоднократно. Модульный анализ позволяет выполнять раздельное программирование выделенных частей проекта программы и раздельную отладку программных модулей.

Очень ответственным моментом следует считать выбор языка программирования. Этот выбор делается между проблемно-ориентированными языками высокого уровня и языками низкого уровня, типа автокода (assembler). Первые учитывают специфику задачи и процесса программирования. Они удобны для разработчика, сокращают сроки создания программ, уменьшают количество ошибок, делают программу наглядной. Автокоды позволяют обеспечить высокое качество объектной программы, т. е. программы, полученной после трансляции. Это свойство автокодов связано с тем, что они отражают специфику конкретной вычислительной машины и позволяют наиболее полно использовать ее аппаратные возможности. Иногда применяют двухстадийное программирование: сначала программа пишется на языке высокого уровня, а затем, после получения работающего варианта она (или отдельные ее фрагменты) переписывается на автокоде.

Процесс программирования должен строиться по итерационному принципу, когда сначала кодируются наиболее содержательные, жизненно необходимые части алгоритма, а дополнение деталями и сервисными возможностями происходит постепенно.

При программировании не следует забывать, что программные модули должны удовлетворять некоторым принципиальным требованиям, например, таким, как расширяемость, адаптивность и переносимость. Свойство расширяемости предполагает гибкость создаваемых конструкций: дополнение программного комплекса новыми модулями не должно приводить к переработке уже имеющихся. Принцип максимальной автономии всех модулей должен быть заложен в первоначальном проекте и в дальнейшем соблюдаться неукоснительно.

Адаптивность программного модуля подразумевает его способность оптимально настраиваться на существующие аппаратные ресурсы и максимально полно их использовать. В особенности свойство адаптивности важно при создании компьютерного инструментария, ориентированно-

го на параллельные вычисления на суперкомпьютерах. Существующее сегодня множество суперкомпьютеров весьма неоднородно как по своей архитектуре, так и по числу процессорных элементов. В идеале свойство адаптивности должно гарантировать производительность программного комплекса, близкую к пиковой на любой вычислительной платформе, что, конечно же, недостижимо на практике, но должно являться направлением развития программного обеспечения.

Переносимость — способность модуля к функционированию в программной и аппаратной среде с вариацией ее свойств. Крайне желательно, чтобы модуль функционировал в разных программно-аппаратных средах не только устойчиво, но и абсолютно одинаково, вплоть до совпадения знаков в последних порядках мантисс получаемых цифровых данных. При этом опасны не глобальные отказы, причины которых практически всегда легко обнаруживаются и устраняются, а малозаметные отклонения данных от контрольных значений. Зачастую такие отклонения вычислители с недостаточным опытом считают несущественными, но на самом деле это грозный признак того, что результаты математического моделирования неверны.

3.3. Отладка и тестирование программы. Особое внимание при разработке программ для больших задач следует уделить отладке. Различают три вида отладочных работ: синтаксическую отладку, арифметическую и методическую.

Синтаксические ошибки возникают при неправильном употреблении конструкций используемого языка программирования и легко устраняются в ходе соответствующей отладки. Используемые в настоящее время языки программирования с хорошей диагностикой значительно упростили этот вид отладки.

Арифметическая отладка должна убедить программиста в полном соответствии вычислительного алгоритма и составленной программы. На этом пути могут встретиться очень большие трудности, возникающие при отладке древовидного алгоритма, так как число возможных путей выполнения программы может оказаться очень большим и проверить все пути окажется невозможным. Тогда проверяют только отдельные наиболее вероятные ветви.

Основной метод арифметической отладки — это встроенные отладочные выдачи, позволяющие проследить путь работы программы, а также соответствие результатов тестовому варианту. К настоящему времени разработаны специальные вспомогательные программы — раз-

нообразные диалоговые отладчики, прерывающие работу программы в нужных местах и обеспечивающие вывод интересующей информации.

Методическая отладка в корне отличается от предыдущих; она предназначена для совместной отладки алгоритма и дискретной модели. Здесь используются разнообразные приемы. Помимо отладочных вставок и выдач, помимо диалоговых отладчиков предусматривается проведение заранее спланированных экспериментов, проверка заранее подобранных утверждений, проверка на тестах.

В качестве тестов могут быть использованы модельные задачи, имеющие аналитическое решение, задачи меньшей размерности, для которых уже есть работающие программы. При решении уравнений иногда задают готовое решение, подставляют его в уравнение, получают правую часть, а затем с этой правой частью находят численно известное решение. Есть тесты, основанные на другой математической модели. Можно проверять одну дискретную модель с помощью другой и т. д. При этом осуществляется так называемый внешний контроль алгоритма.

Внутренний контроль — это вид отладки, основанный на проверке известных утверждений о свойствах алгоритма и модели. Некоторые тесты связаны с проверкой законов сохранения, формулировки которых для различных отраслей знаний достаточно разнообразны. Результаты численного эксперимента не должны противоречить этим формулировкам. Контроль за точностью выполнения законов сохранения определяет степень пригодности выбранных математических моделей описания явления. Абсолютно бессмысленно совершенствовать численный алгоритм и компьютерную программу, когда законы сохранения выполняются с недостаточной точностью. В то же время следует особо подчеркнуть, что этот вид контроля является необходимым, но не достаточным. Широко распространенной ошибкой является «переоценка» законов сохранения, когда их контроль становится единственным способом верификации программы. Иногда алгоритмы (и программы) выдают неверные результаты, несмотря на хорошую точность выполнения законов сохранения.

К внутреннему контролю также относится верификация программ по главным алгоритмическим параметрам. Например, для конечно-разностных схем ими являются шаги сетки. Сильная зависимость численного решения от числа узлов сетки при их небольшом количестве является естественной и не вызывает опасения и неприятия, если эта зависимость исчезает при измельчении сетки. Если же при большом

числе узлов эта зависимость не исчезает и решение продолжает меняться при все большем измельчении сетки, то это тревожный симптом низкого качества созданного алгоритма.

3.4. Проведение расчетов и анализ результатов. Завершающая стадия математического моделирования — проведение расчетов на ЭВМ — имеет сходство с экспериментом натурным. Только если в лаборатории экспериментатор с помощью специально построенной установки задает вопросы природе, то специалисты по вычислительному эксперименту с помощью ЭВМ ставят эти вопросы математической модели. Причем в современных физических экспериментах со сложными объектами или процессами, протекающими в экспериментальных условиях, каждое измерение температуры, плотности, скорости и т. д. дается с большим трудом. Зачастую нужную информацию приходится извлекать из косвенных данных. Точность полученных результатов порой невелика.

Иное дело — вычислительный эксперимент. ЭВМ в процессе расчета может выдавать любую информацию, представляющую интерес для исследователя. Конечно, точность этой информации определяется достоверностью самой модели. Именно по этой причине в серьезных прикладных исследованиях никогда не начинают вести производственные расчеты сразу же, по только что написанной программе. Им всегда предшествуют периоды отладки программы, о которых говорилось выше. Только после проведения этой длительной кропотливой работы в вычислительном эксперименте наступает фаза прогноза — с помощью математического моделирования предсказывается поведение исследуемого объекта в условиях, где эксперименты пока не проводились или где они вообще невозможны.

Если результатом моделирования какого-либо процесса являются всего несколько чисел, то их обработка не вызывает затруднений. Если же результат представляется миллионами чисел, то возникает проблема его осмысления (интерпретации) и хранения (архивирования и каталогизации). Частичное решение проблемы состоит в организации цифровых таблиц в специальной форме, максимально облегчающей анализ полученных данных. Эти таблицы могут быть размещены в базах данных долгосрочного хранения, системы управления которыми могут существенно оптимизировать процесс анализа результатов.

Но даже при использовании хорошо организованных баз данных гигантский объем чисел, получаемых при компьютерном моделировании,

приводит к затруднениям при анализе результатов. В связи с этим используются графические системы, обеспечивающие визуализацию полученной цифровой информации, что в особенности важно на первых этапах анализа, при общем (качественном) исследовании решения задачи. Табличная же информация служит для поддержки графической и позволяет провести уточнение анализа в отношении количественных (численных) значений результатов расчета.

3.5. Принятие решения. Анализ результатов расчетов приводит к одному из выводов: или становится ясна необходимость уточнения моделей и алгоритмов, или результаты, пройдя проверку на разумность и надежность, передаются заказчику и «идут в дело». Однако чаще всего выясняются какие-либо необычные формы протекания изучаемого процесса, неожиданные режимы работы проектируемой установки, в результате чего появляется желание уточнить те или иные детали процесса. Тогда математическая модель модифицируется, как правило, усложняется, и начинается новый цикл вычислительного эксперимента.

* * *

В этой главе мы увидели, что математическое моделирование реализуется в виде некоторой технологической цепочки отображений, в начале которой находится изучаемый объект, а в конце — расчет на ЭВМ и анализ полученных результатов. Эффективная реализация этой цепочки в условиях многообразия изучаемых объектов, коллективов исполнителей, многообразия программ и конфигураций ЭВМ составляет предмет математической технологии в терминологии, предложенной академиком Н. Н. Яненко, или вычислительного эксперимента (по академику А. А. Самарскому).

Ответы, указания, решения

Глава 1

1.1. Р е ш е н и е. На основе закона Ньютона (1.7) получаем, что учет волнового давления приводит к замене уравнения (1.8) следующим уравнением

$$m\ddot{s} = -ks - F_0 \cos \omega_1 t. \quad (1)$$

Решение этого уравнения находится как сумма общего решения (1.9) уравнения (1.8) и частного решения уравнения (1) вида $s_1(t) = \gamma \cos \omega_1 t$, т. е.

$$s(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t + \gamma \cos \omega_1 t.$$

Подставляя это выражение в (1), находим

$$\gamma = \frac{F_0}{m(\omega_1^2 - \omega^2)}.$$

Следовательно, решение задачи (1), (1.10) дается формулой

$$s(t) = \left(a - \frac{F_0}{m(\omega_1^2 - \omega^2)} \right) \cos \omega t + \frac{F_0}{m(\omega_1^2 - \omega^2)} \cos \omega_1 t. \quad (2)$$

Из формулы для решения (2) следует, что если частоты ω и ω_1 соизмеримы (отношение ω/ω_1 является рациональным числом), то функция $s(t)$ является периодической, иначе — непериодической. Кроме того, при приближении частоты внешней силы ω_1 к частоте упругих колебаний ω амплитуда колебаний стенки неограниченно растет — возникает явление резонанса.

Используя принцип «от простого к сложному», можно построить иерархию все более полных математических моделей, описывающих движение вертикальной стенки, прикрепленной пружинами к неподвижному блоку и подверженной воздействию новых внешних сил, не учтенных ранее. Например, можно дополнительно учесть силу трения стенки о дно $F_{\text{тр}} = k_{\text{тр}} mg \operatorname{sgn} \dot{s}$, где $k_{\text{тр}}$ — коэффициент трения, $\operatorname{sgn} \dot{s}$ — знак скорости. Еще более полная модель получится, если принять во внимание сопротивление воды движению стенки. Можно учесть присоединенную массу воды — движущаяся стенка вовлекает в движение некоторую часть прилегающей к ней воды, поэтому в уравнении (1) массу этой воды необходимо добавить к массе стенки m . Модель будет более точной, если учитывать, что коэффициент жесткости зависит от

величины деформации ($k = k(s) \neq \text{const}$). Еще более сложные модели получаются при учете обратного воздействия движущейся стенки на волновой режим прилегающей акватории, который описывается своей иерархией гидродинамических моделей течения жидкости со свободной границей [16, 26]. Выбор той или иной модели определяется целями исследования, требуемой детальностью описания процесса.

1.2. Р е ш е н и е. Плоский откос, изображенный на рис. 3, описывается линейной функцией

$$y = h_{\text{bt}}(x) = -x \operatorname{tg} \theta, \quad (3)$$

где $\theta > 0$ — угол наклона откоса. По откосу движется оползень, который, согласно условию задачи, представляет собой твердое тело заданной формы. Предположим, что это тело имеет конечную протяженность, известный объем V и известную плотность ρ_{sl} материала, из которого оно сложено.

При моделировании оползня твердым телом закон его прямолинейного движения по откосу (3) задается законом движения любой из его точек, например, законом движения точки $\mathbf{x}_c(t)$, имеющей абсциссу $x_c(t)$ и ординату $y_c(t) = h_{\text{bt}}(x_c(t))$, т. е. точки, скользящей вдоль откоса. Обозначим через x_c^0 начальную абсциссу выделенной точки: $x_c(0) = x_c^0$.

Пусть s — параметр, равный расстоянию, отсчитываемому от начала координат вдоль плоского откоса. Тогда абсцисса x точки, лежащей на откосе, и параметр s для этой точки связаны равенством

$$s = \frac{x}{\cos \theta}. \quad (4)$$

Предположим, что в начальный момент времени точка $\mathbf{x}_c(0)$ соответствует параметру $s = S_0$, а движущаяся точка $\mathbf{x}_c(t)$ — параметру $s = S(t)$. Тогда закон движения $s = S(t)$ первоначально покоящейся материальной точки $\mathbf{x}_c(t)$ вдоль откоса (3) определяется как решение следующей задачи Коши для уравнения движения [4]:

$$m\ddot{S}(t) = F_\tau(t), \quad (5)$$

$$S(0) = S_0, \quad \dot{S}(0) = 0, \quad (6)$$

где $\ddot{S} = d^2S/dt^2$, $\dot{S} = dS/dt$, m — величина, имеющая размерность массы, $F_\tau(t)$ — сила, направленная вдоль откоса и действующая в момент времени t на движущуюся точку $\mathbf{x}_c(t)$.

Перейдем теперь к рассмотрению иерархии математических моделей исследуемого явления.

Модель М1. Учитывается масса оползня M и сила тяжести. Таким образом,

$$m = M = \rho_{sl}V; \quad F_\tau = Mg \sin \theta$$

и задача (5), (6) принимает вид

$$M\ddot{S}(t) = Mg \sin \theta, \quad S(0) = S_0, \quad \dot{S}(0) = 0, \quad (7)$$

где g — ускорение свободного падения. Решение задачи (7) описывается формулой

$$S(t) = S_0 + \frac{gt^2}{2} \sin \theta,$$

из которой следует, что скорость движения оползня

$$v(t) = \dot{S}(t) = gt \sin \theta$$

неограниченно растет со временем, что противоречит реальности, в которой рано или поздно оползень должен остановиться.

Модель М2. Учтем теперь присоединенную массу воды. Движущийся оползень вовлекает в движение некоторую часть прилегающей к нему воды, поэтому в уравнении (5) в качестве величины m будем брать суммарную массу оползня и присоединенную массу воды $C_w \rho_w V$, т. е.

$$m = M + C_w \rho_w V = (\rho_{sl} + C_w \rho_w) V,$$

где ρ_w — плотность воды, C_w — коэффициент присоединенной массы. Величина этого коэффициента зависит от формы движущегося в жидкости тела [16, 26]. В частности, если в жидкости движется шар, то $C_w = 0,5$, для цилиндра — $C_w = 1$.

С учетом сделанных предположений, задача (5), (6) примет вид

$$(\rho_{sl} + C_w \rho_w) V \ddot{S}(t) = \rho_{sl} V g \sin \theta, \quad S(0) = S_0, \quad \dot{S}(0) = 0. \quad (8)$$

Решение этой задачи задается формулой

$$S(t) = S_0 + \frac{\gamma}{\gamma + C_w} \cdot \frac{gt^2}{2} \sin \theta,$$

где через $\gamma = \rho_{sl}/\rho_w$ обозначено отношение плотности материала оползня к плотности воды, $\gamma > 1$. Поскольку $\gamma/(\gamma + C_w) < 1$, то скорость движения оползня

$$v(t) = \frac{\gamma}{\gamma + C_w} gt \sin \theta$$

в модели М2 стала меньше, чем в модели М1, однако и она не соответствует действительности из-за неограниченного роста при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, упрощающие предположения, положенные в основу модели М2, оказались недостаточными и необходимо учесть какие-то дополнительные факторы, влияющие на движение оползня.

Модель М3. Дополнительно учтем силу плавучести (силу Архимеда, равную весу вытесненной телом жидкости). Эта сила, как и сила тяжести, действует в вертикальном, но противоположном направлении, а ее составляющая, касательная к плоскому откосу, равна $-\rho_w V g \sin \theta$. Поэтому уравнение движения (5) запишется как

$$(\rho_{sl} + C_w \rho_w) V \ddot{S} = (\rho_{sl} - \rho_w) V g \sin \theta. \quad (9)$$

Решение задачи (9), (6) дается теперь формулой

$$S(t) = S_0 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + C_w} \cdot \frac{gt^2}{2} \sin \theta,$$

а для скорости получаем выражение

$$v(t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + C_w} gt \sin \theta.$$

Видим, что учет силы Архимеда опять приводит к уменьшению значений скорости (по сравнению с моделью М2), однако и в этой модели скорость оползня неограниченно растет с ростом времени. Следовательно и эта модель не является приемлемой и требует дальнейшей модификации.

Модель М4. Примем теперь во внимание свойство жидких и газообразных сред оказывать сопротивление движущимся в них телам. Сила сопротивления является пассивной, т. е. она проявляется только при движении тела: при отсутствии движения эта сила равна нулю, а для движущегося тела с ростом его скорости возрастает и сопротивление среды. Сила сопротивления направлена против направления движения и при малых ускорениях она пропорциональна скорости движения тела, т. е. равна $-\mu \dot{S}$, при этом коэффициент μ зависит от размеров тела, плотности среды (воды в данном случае), ее вязкости и т. д.

Итак, при учете силы сопротивления уравнение движения будет отличаться от уравнения (9) наличием дополнительного члена, отвечающего за эту силу:

$$(\rho_{sl} + C_w \rho_w) V \ddot{S} = (\rho_{sl} - \rho_w) V g \sin \theta - \mu \dot{S}. \quad (10)$$

Из вида этого уравнения следует, что движение оползня не является равноускоренным ($\ddot{S} \neq \text{const}$), как было в рассмотренных ранее моделях. Считая, что при $t = 0$ уравнение (10) выполняется, и учитывая начальное условие $\dot{S}(0) = 0$, получаем следующее выражение для начального ускорения

$$a_0 = \ddot{S}(0) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + C_w} g \sin \theta > 0, \quad (11)$$

т. е. ускорение при $t = 0$ такое же, как в модели МЗ. Но если в модели МЗ ускорение остается равным a_0 при всех $t > 0$, то в модели М4 оно с ростом времени убывает.

Продолжая анализ уравнения (10), можно сделать следующее утверждение. Если в некоторый момент времени ускорение станет равным нулю, то скорость в этот момент примет значение

$$v_\infty = \frac{\rho_w}{\mu} (\gamma - 1) V g \sin \theta > 0. \quad (12)$$

Пусть τ — время, за которое достигалась бы скорость v_∞ , если бы оползень двигался из состояния покоя равноускоренно с постоянным ускорением a_0 , т. е.

$$\tau = \frac{v_\infty}{a_0} = \frac{\rho_w}{\mu} V (\gamma + C_w) > 0. \quad (13)$$

Используя введенные обозначения, перепишем уравнение (10) в более компактной форме

$$\ddot{S} = a_0 - \frac{\dot{S}}{\tau} \quad (14)$$

и будем искать решение этого линейного уравнения в виде суммы общего решения $S_1(t) = \alpha + \beta e^{-t/\tau}$ однородного уравнения и частного решения $S_2(t) = v_\infty t$ неоднородного, т. е.

$$S(t) = \alpha + \beta e^{-t/\tau} + v_\infty t.$$

С учетом начальных условий (6) получаем, что

$$S(t) = S_0 + v_\infty t - \tau v_\infty (1 - e^{-t/\tau}) \quad (15)$$

и

$$v(t) = \dot{S}(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau}). \quad (16)$$

Итак, в предыдущих моделях движение оползня было равноускоренным, из-за чего скорость неограниченно росла при $t \rightarrow \infty$. Теперь же движение является ускоренным, но с монотонно убывающим при $t \rightarrow \infty$ ускорением

$$\ddot{S}(t) = a_0 e^{-t/\tau} \rightarrow 0, \quad (17)$$

вследствие чего величина скорости (16), приближаясь к значению v_∞ , остается ограниченной при $t \rightarrow \infty$.

Модель М5. Еще одной силой, тормозящей движение оползня, является сила трения о дно

$$F_{\text{тр}} = -k_{\text{тр}} (\rho_{sl} - \rho_w) V g \cos \theta,$$

которая направлена вдоль откоса в сторону, обратную направлению движения оползня. Здесь $k_{\text{тр}}$ — коэффициент трения. Как и сила сопротивления, сила трения является пассивной, поскольку ее влияние на положение оползня будет проявляться только при его движении (при $\dot{S} \neq 0$).

Итак, в модели М5 уравнение движения будет иметь следующий вид:

$$(\rho_{sl} + C_w \rho_w) V \ddot{S} = (\rho_{sl} - \rho_w) V g (\sin \theta - k_{\text{тр}} \cos \theta) - \mu \dot{S}. \quad (18)$$

Аналогами величин (11)–(13) будут теперь начальное ускорение a_0 , предельная скорость v_∞ и характерное время τ , определяемые соответственно выражениями

$$a_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + C_w} g (\sin \theta - k_{\text{тр}} \cos \theta), \quad (19)$$

$$v_\infty = \frac{\rho_w}{\mu} (\gamma - 1) V g (\sin \theta - k_{\text{тр}} \cos \theta), \quad (20)$$

$$\tau = \frac{v_\infty}{a_0} = \frac{\rho_w}{\mu} V (\gamma + C_w). \quad (21)$$

Неравенство $a_0 > 0$ является условием начала движения первоначально покоящегося оползня, условием его сдвига из начального положения. В предыдущих моделях это условие выполнялось всегда и оползень начинал движение при любом угле наклона подводного откоса, даже на очень пологом откосе, что не соответствует действительности. В этом смысле модель М5 более реалистическая, поскольку для нее оползень начинает движение только при выполнении условия

$$k_{\text{тр}} < \tan \theta.$$

Если это условие выполнено, то оползень начнет движение с начальным ускорением a_0 , меньшим начального ускорения (11) модели М4. Соответственно и предельная скорость v_∞ в модели М5 получается меньшей, чем в модели М4, в которой сила трения не учитывается. Характерное же время τ в этих моделях одинаково. Одинаковыми являются и формулы для решения (15), скорости (16) и ускорения (17).

Модели М6, М7, Принимая во внимание другие факторы, влияющие на движение оползня, можно продолжить иерархическую цепочку, присоединяя к ней все более полные математические модели. Например, использованная нами формула Стокса $F = -\mu\dot{S}$ для вычисления силы сопротивления справедлива только для движений с постоянной скоростью или движений с небольшими ускорениями. В общем случае для вычисления силы сопротивления следует пользоваться уточненной формулой Стокса $F = -\mu\dot{S}^\alpha$, где α — положительная постоянная, зависящая от свойств среды. Заметим, что при $\alpha \neq 1$ уравнение движения становится нелинейным, что значительно осложняет поиск его решения.

В реальной ситуации склон, по которому движется оползень, не бывает плоским, поэтому необходимо учесть неровность дна, а также пространственный характер изменения его формы, т. е. изменчивость дна не только в плоскости Oxy (см. рис. 3), но и в направлении, перпендикулярном этой плоскости.

Мы рассмотрели модели, в которых оползень представлялся в виде материальной точки и использовалась единственная его геометрическая характеристика — объем. Следующий шаг к получению более точных результатов моделирования состоит в учете пространственной формы оползня, а также в отказе от представления оползня в виде твердого тела, т. е. в учете свойства деформируемости оползня. Например, можно моделировать движение оползневой массы течением жидкости, отличающейся от воды по плотности, вязкости и т. п., либо движением некоторой упругопластической среды [12, 13, 19]. Наиболее сложные модели получаются при решении «связанных» задач, в которых учитывается как влияние движения оползня на течение воды с образованием поверхностных волн, так и обратное влияние.

2.1. Р е ш е н и е. Подставив выражение (2.3) в начальные условия (2.2), найдем постоянные α и β :

$$\alpha = \frac{a}{2} \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 - \tau^2\omega^2/4}}; \quad \beta = a.$$

Следовательно, для разности между приближенным (2.3) и точным (1.11) решениями имеем равенство

$$s_j - s(t_j) = \frac{a}{2} \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 - \tau^2\omega^2/4}} \sin j\varphi + a \left(\cos j\varphi - \cos \omega t_j \right). \quad (22)$$

Выберем шаг τ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{4}} > \frac{1}{2}.$$

Тогда будет верна оценка

$$|s_j - s(t_j)| \leq a\omega \cdot \tau + a |\cos j\varphi - \cos j\omega\tau|. \quad (23)$$

Применяя теорему о среднем, получаем, что

$$\cos j\varphi - \cos j\omega\tau = -\sin(\theta) [j(\varphi - \omega\tau)],$$

где точка θ лежит на вещественной оси между точками $j\varphi$ и $j\omega\tau$. Следовательно,

$$|\cos j\varphi - \cos j\omega\tau| \leq j |\varphi - \omega\tau|. \quad (24)$$

Используя известные из курса математического анализа неравенства

$$0 < \sin \varphi < \varphi < \operatorname{tg} \varphi, \quad (25)$$

где $\varphi \in (0, \pi/2)$, приходим к оценке

$$|\varphi - \omega\tau| \leq \max \left\{ |\sin \varphi - \omega\tau|; |\operatorname{tg} \varphi - \omega\tau| \right\}. \quad (26)$$

С учетом равенств

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\tau^2\omega^2}{2}; \quad \sin \varphi = \tau\omega \sqrt{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{4}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau\omega \sqrt{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{4}}}{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{2}}$$

оценку (26) можно переписать следующим образом:

$$|\varphi - \omega\tau| \leq \tau\omega \cdot \max \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{4}}; \frac{\sqrt{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{4}}}{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{2}} - 1 \right\} =$$

$$= \tau\omega \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{4}}}{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{2}} - 1 \right).$$

Последнее равенство выполняется при малых значениях шага τ . Кроме того, при малых значениях τ верна оценка

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{4}}}{1 - \frac{\tau^2\omega^2}{2}} - 1 < \frac{\tau^2\omega^2}{2}.$$

Подставляя полученные оценки в неравенство (24), получаем, что

$$|\cos j\varphi - \cos j\omega\tau| \leq j \frac{\tau^3\omega^3}{2} \leq \frac{T\omega^3}{2} \tau^2, \quad (27)$$

где T — конечный момент времени ($T = N\tau$). Следовательно, оценка (23) может быть записана в следующем виде:

$$|s_j - s(t_j)| \leq a\omega \cdot \tau + \frac{aT\omega^3}{2} \tau^2.$$

Учитывая, что $\tau^2 \ll \tau$, отсюда сразу получаем требуемое неравенство (2.4), которое означает сходимость приближенного решения к точному при $N \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow 0$), причем сходимость с первым порядком по τ .

В курсе «Методы вычислений» будут рассмотрены иные приемы исследования сходимости приближенного решения к точному, позволяющие выполнить такое исследование гораздо проще приведенного выше доказательства.

2.2. У к а з а н и е. Используя общее решение (2.3) уравнения (2.1), покажите, что решением дискретной задачи (2.1), (2.5) является сеточная функция

$$s_j = a \cos j\varphi.$$

Следовательно,

$$s_j - s(t_j) = a \left(\cos j\varphi - \cos \omega t_j \right).$$

Далее воспользуйтесь доказанной оценкой (27).

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В БИОЛОГИИ, ЭКОЛОГИИ, ЭКОНОМИКЕ, В ЗАДАЧАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

§ 1. Модели динамики численности изолированных популяций

Если математическая модель построена, то попытайтесь найти решение задачи в аналитической форме. Возможно, оно поможет ответить на вопрос о пригодности построенной модели для описания реального объекта.

1.1. Динамика численности популяции, т. е. изменение со временем t общего количества $N(t)$ живых особей в популяции в связи с рождаемостью, смертностью, борьбой за существование — один из важнейших вопросов развития популяций. Простейшей «физической» (биологической в данном случае) моделью численности отдельной популяции является модель, в основе которой лежат следующие предположения: популяция является изолированной, ресурсы питания для нее неограничены, а прирост поголовья пропорционален количеству существующих в данный момент времени особей. Таким образом, если $N(t)$ и $N(t + \Delta t)$ — численности популяции в близкие моменты времени t и $t + \Delta t$, соответственно, то $N(t + \Delta t) - N(t) = \varepsilon N(t) \Delta t$, где $\varepsilon = \alpha - \beta$, $\alpha > 0$ — коэффициент рождаемости, $\beta > 0$ — коэффициент смертности. При принятом допущении о том, что для развития популяции ничто не мешает, рождаемость будет не ниже смертности, поэтому можно считать, что $\varepsilon \geq 0$, вследствие чего величина ε называется *врожденной скоростью естественного роста популяции*. На этапе построения физической модели необходимо также указать соглашения о виде коэффициентов α и β . Например, можно предположить, что $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Завершается этот этап постановкой задачи: требуется рассчитать численность популяции в произвольный момент времени $t > 0$, если в начальный момент времени $t = 0$ ее численность известна.

Далее строится математическая модель, соответствующая выбранной физической модели. Разумеется, что численность популяции $N(t)$ является целочисленной разрывной функцией времени. Однако если

предположить, что популяция является достаточно многочисленной, то вместо разрывной функции $N(t)$ можно использовать непрерывную функцию $x(t)$, у которой целая часть $[x(t)]$ значения в каждый момент времени совпадает со значением $N(t)$ численности популяции в тот же момент времени. Тогда мы можем написать равенство

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \varepsilon x(t),$$

которое при дополнительном предположении о том, что функция $x(t)$ является не только непрерывной, но и дифференцируемой, переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x, \quad t > 0. \quad (1.1)$$

В результате получается математическая модель Мальтуса¹, соответствующая построенной выше простейшей физической модели: требуется найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

где x_0 — начальная численность популяции.

Решение задачи Коши (1.1), (1.2) имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{\varepsilon t}. \quad (1.3)$$

Из этой формулы видно, что при $\alpha = \beta$ численность популяции остается постоянной: $x(t) \equiv x_0$ для всех $t \geq 0$. Однако даже при небольшом положительном значении коэффициента ε с течением времени происходит все большее и большее отклонение функции $x(t)$ от начального значения x_0 и численность популяции неограниченно растет по экспоненте при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 5). Это обстоятельство и послужило основанием для опасений Мальтуса о грядущем перенаселении Земли со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Очевидно, что рассмотренная математическая модель не соответствует реальности, поскольку во всех существующих популяциях неограниченного роста их численности не наблюдается. Поэтому необходимо вновь вернуться к физической модели и заняться ее модификацией.

¹Thomas Robert Malthus (1766–1834) — английский священник и ученый, демограф и экономист, автор теории, согласно которой неконтролируемый рост народонаселения должен привести к голоду на Земле.

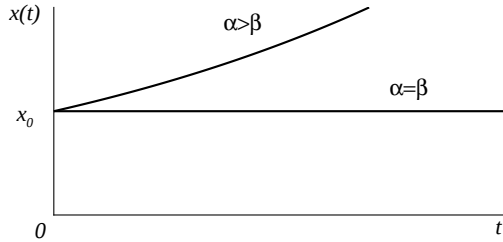


Рис. 5. Изменение численности изолированной популяции в модели Мальтуса

1.2. Более близкое к реальности описание развития популяции дает модель Ферхюльста¹—Пирла², в которой учитывается уменьшение скорости роста изолированной популяции вследствие внутривидовой конкурентной борьбы за место, пищу и т. п. Таким образом, можно модифицировать исходную физическую модель, учтя в ней конкурентную борьбу. Как это отразится на математической модели? Внутривидовая борьба тем выше, чем больше количество встреч между особями, а количество встреч пропорционально произведению x , т. е. x^2 . Поэтому скорость εx прироста численности уменьшается на величину, пропорциональную x^2 , и уравнение динамики численности популяции запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \gamma x^2. \quad (1.4)$$

Здесь $\varepsilon = \text{const} > 0$ — врожденная скорость роста численности популяции, а величина $\gamma = \text{const} > 0$ называется *коэффициентом внутривидовой конкуренции*.

Хотя уравнение (1.4) является нелинейным, решение задачи Коши (1.4), (1.2) выписывается в аналитической форме

$$x(t) = \frac{x_0 x_* e^{\varepsilon t}}{x_* + x_0 (e^{\varepsilon t} - 1)}, \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

¹Pierre Francois Verhulst (1804–1849) — бельгийский математик, известен работами в области моделирования численности населения.

²Pearl Raymond (1879–1940) — американский биолог, демограф и статистик. Изучая зависимость темпа роста численности биологической популяции плодовых мушек от ее плотности, установил, что сначала прирост увеличивается, а достигнув определенного уровня, приостанавливается. Пренебрегая социальной природой человека, перенес этот закон на рост населения отдельных стран.

где $x_* = \varepsilon/\gamma$. Из формулы (1.5) следует, что при $x_0 = x_*$ численность популяции не меняется: $x(t) \equiv x_0$. Если же $x_0 < x_*$, то численность популяции возрастает, приближаясь при $t \rightarrow \infty$ к значению x_* , но никогда не достигая его, т. е. численность популяции не возрастает беспредельно как в модели Мальтуса, а ограничена сверху. Поэтому величина x_* называется *максимальной численностью популяции, возможной в данных условиях существования*. В случае $x_0 > x_*$ численность популяции уменьшается, монотонно приближаясь к значению x_* (см. рис. 6).

1.3. Модель Ферхюльста—Пирла допускает различные обобщения. Например, можно учесть, что некоторое количество $f > 0$ особей поступает в популяцию из соседнего ареала, а часть $g > 0$ истребляется охотниками. Тогда популяцию уже нельзя считать изолированной, но уравнение, описывающее динамику ее численности, будет аналогично уравнению (1.4), отличаясь от последнего лишь наличием новых слагаемых f и g :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x - \gamma x^2 + f - g. \quad (1.6)$$

Величина g может задаваться постоянной или зависящей от общей численности популяции: $g(t) = \delta x(t)$. Представляет практический интерес и модель, описывающая сезонный характер охоты. В этом случае множитель δ будет зависеть от времени и должен быть задан в виде некоторой периодической по переменной t функции. Возможны и другие механизмы, влияющие на численность. Учтем, например, сезонный характер размножения популяции. Тогда коэффициент рождаемости α будет функцией от переменной t . Коэффициент смертности β также может быть переменным. Можно также учесть возрастную структуру

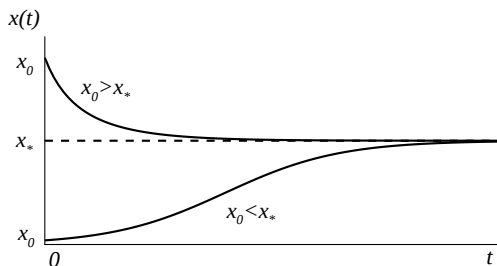


Рис. 6. Изменение численности изолированной популяции в модели Ферхюльста—Пирла

популяции, случайные возмущения и многие другие факторы, влияющие на численность исследуемой популяции.

Таким образом, учитывая на этапе физической постановки задачи все большее и большее количество процессов, влияющих на численность популяции, мы приходим к иерархии математических моделей, для которых получить решение в аналитической форме, как правило, не удается. Но некоторые характеристики решения можно изучить путем качественного исследования их свойств, например, таких, как гладкость, зависимость решения от начальных данных, поведение при $t \rightarrow \infty$ и в окрестности некоторых особых точек и т. п. Для получения же количественных характеристик нам неминуемо придется перейти к следующим этапам математического моделирования — построению и исследованию дискретных моделей, разработке и исследованию численных алгоритмов, созданию и тестированию программ, проведению расчетов и анализу их результатов.

З А Д А Ч И

1.1. Для изолированной популяции рыб исследовать динамику ее численности на основе математической модели

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon x - \gamma x^2 - g, \quad t > 0, \\ x(0) &= x_0 > \varepsilon/\gamma, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $g = \text{const} > 0$ — заданная квота отлова, не зависящая от численности популяции. Не приведет ли такая стратегия вылова к исчезновению популяции?

1.2. Исследовать поведение при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (1.7), если установлена относительная квота отлова, зависящая от численности популяции, т. е. $g(t) = \delta x(t)$, где $\delta = \text{const} > 0$.

§ 2. Модели межвидового соперничества популяций

Предположим, что математическая модель построена, но получить решение в аналитической форме не удается. Не стоит сразу переходить к численному решению задачи. Попробуйте выполнить качественный анализ решения: существует ли оно, каков характер зависимости от начальных данных и параметров, как оно ведет себя в окрестности особых точек и т. д. Свойства решения, обнаруженные при этом исследовании, окажутся полезными и востребованными на всех последующих этапах математического моделирования.

2.1. Рассмотрим некоторый ограниченный ареал, в котором обитают популяции двух видов с численностями $x(t)$ и $y(t)$. Будем считать, что в условиях неограниченного питания и отсутствия хищников каждый вид развивался бы по экспоненте, т. е. согласно уравнениям модели Мальтуса

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varepsilon_1 x, & \varepsilon_1 &= \text{const} > 0, \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon_2 y, & \varepsilon_2 &= \text{const} > 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где ε_i ($i = 1, 2$) — врожденные скорости роста популяций. Однако в реальности запасы пищи ограничены, ее выедание приводит к голоданию и, как следствие, к уменьшению скоростей роста популяций.

Далее будем предполагать, что рассматриваемые здесь два вида конкурируют друг с другом за одну и ту же пищу и количество пищи, потребляемой за единицу времени представителями обоих видов, выражается некоторой неотрицательной функцией $g(x, y)$ такой, что $g(0, 0) = 0$ и $g \rightarrow \infty$ при неограниченном росте хотя бы одного из аргументов. Ясно, что с увеличением g скорость роста популяций должна уменьшаться, поэтому вместо уравнений Мальтуса (2.1) следует использовать следующую систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 g) x, \quad \frac{dy}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2 g) y, \quad t > 0, \tag{2.2}$$

где γ_i ($i = 1, 2$) — положительные постоянные, которые называются *коэффициентами чувствительности к недостатку корма*. Предполагается, что в начальный момент времени известны численности обеих

популяций:

$$x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 > 0. \quad (2.3)$$

Видим, что полученная система уравнений (2.2) является нелинейной. Поэтому поиск аналитического решения этой системы с произвольной функцией $g(x, y)$ затруднителен или вообще невозможен. В таком случае мы должны постараться выполнить, как указывалось в гл. 1, качественное исследование свойств решения, не используя его аналитического представления.

Ради простоты далее будем рассматривать случай линейной функции g :

$$g(x, y) = m_1 x + m_2 y, \quad (2.4)$$

где m_i ($i = 1, 2$) — положительные постоянные. Тогда решение $x(t), y(t)$ задачи Коши (2.2), (2.3), (2.4) существует и единственно [20]. Покажем, что функции $x(t)$ и $y(t)$ принимают строго положительные значения. Предположим, что это не так, и одна из компонент решения становится равной нулю в некоторой точке $t_0 > 0$, например, $y(t_0) = 0$. При этом вторая компонента принимает в этот момент времени некоторое значение $\tilde{x}_0$. Тогда мы можем считать, что функции $x(t), y(t)$ являются решением задачи Коши для системы (2.2) с начальными данными

$$x(t_0) = \tilde{x}_0, \quad y(t_0) = 0. \quad (2.5)$$

Легко проверить, что этим же начальным данным (2.5) удовлетворяет еще одно решение системы (2.2):

$$\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{x}_0 x_* e^{\varepsilon_1(t-t_0)}}{x_* + \tilde{x}_0(e^{\varepsilon_1(t-t_0)} - 1)}, \quad \tilde{y}(t) \equiv 0,$$

где $x_* = \varepsilon_1/(\gamma_1 m_1)$. Тем самым мы получили противоречие с теоремой о единственности решения. Следовательно, если заданы положительные начальные данные (2.3), то функции $x(t)$ и $y(t)$ могут принимать только положительные значения.

Покажем теперь, что численность обеих популяций ограничена при всех $t > 0$. Предположим противное и пусть, например, функция $y(t)$ может принимать какие угодно большие значения. Тогда найдется промежуток времени, на котором функция $y(t)$ возрастает и принимает значения большие, чем $y_* = \varepsilon_2/(\gamma_2 m_2)$. Однако из уравнения для функции y мы получаем, что

$$\frac{dy}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2(m_1 x + m_2 y))y < (\varepsilon_2 - \gamma_2 m_2 y)y = \gamma_2 m_2 (y_* - y)y < 0,$$

т. е. функция $y(t)$ убывает на этом промежутке. Полученное противоречие доказывает, что компоненты $x(t)$, $y(t)$ решения рассматриваемой задачи Коши (2.2), (2.3) являются ограниченными функциями времени.

Качественное исследование решений поставленной задачи позволяет обнаружить и другие, более интересные, их свойства [7]. Рассмотрим один частный случай, когда

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}. \quad (2.6)$$

Неравенство (2.6) выполняется, например, когда в первой популяции коэффициент естественного роста ε_1 больше, чем во второй, а коэффициенты чувствительности к недостатку корма у них одинаковые. Неравенство (2.6) может выполняться и в том случае, когда первая популяция растет медленнее, но и чувствительность к недостатку корма у нее значительно меньшая, чем у второй популяции.

Не выписывая аналитического решения задачи (2.2), (2.4), (2.3), покажем, что при условии (2.6) численность второй популяции будет стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. С этой целью перепишем уравнения (2.2)

$$\frac{\gamma_2}{x} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 g, \quad \frac{\gamma_1}{y} \frac{dy}{dt} = \varepsilon_2 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2 g,$$

из первого вычтем второе

$$\frac{\gamma_2}{x} \frac{dx}{dt} - \frac{\gamma_1}{y} \frac{dy}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1$$

и проинтегрируем последнее уравнение с учетом начальных условий (2.3):

$$\frac{x^{\gamma_2}}{y^{\gamma_1}} = \frac{x_0^{\gamma_2}}{y_0^{\gamma_1}} e^{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1)t}.$$

При условии (2.6) правая часть этого равенства неограниченно возрастает с ростом времени. Следовательно, таким же свойством обладает и левая его часть. Но функция x^{γ_2} ограничена сверху некоторой постоянной, поэтому неограниченный рост левой части последнего равенства возможен только, если $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда следует вывод о том, что вторая популяция с течением времени исчезает.

А как ведет себя численность первой популяции при условии (2.6)? Пока мы знаем только, что она ограничена некоторой постоянной. Рассмотрим для определенности случай, когда в начальный момент времени численность первой популяции подчиняется неравенству

$$x_0 < x_* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 m_1}. \quad (2.7)$$

Тогда и во все последующие моменты времени функция $x(t)$ будет ограничена сверху числом x_* . В самом деле, если это не так, то найдется некоторый момент времени $t_0 > 0$ такой, что функция $x(t)$, возрастая, впервые примет значение x_* , т. е.

$$\frac{dx}{dt}(t_0) \geq 0, \quad x(t_0) = x_*.$$

В таком случае из первого уравнения системы (2.2), учитывая положительность значения $y(t_0)$, получаем, что

$$0 \leq \frac{dx}{dt}(t_0) = [\varepsilon_1 - \gamma_1 (m_1 x(t_0) + m_2 y(t_0))] x(t_0) < [\varepsilon_1 - \gamma_1 m_1 x_*] x_* = 0,$$

т. е. $0 \leq dx/dt(t_0) < 0$. Это противоречие и доказывает, что при условии (2.7) неравенство $x(t) < x_*$ выполняется для всех $t \geq 0$.

Теперь покажем, что численность первой популяции не только ограничена сверху постоянной x_* , но и неограниченно приближается к этой постоянной при $t \rightarrow \infty$. Предположим противное: существует положительное число $\bar{x} < x_*$ такое, что $x(t) < \bar{x}$ при всех t . Возьмем произвольное малое число δ , удовлетворяющее неравенству

$$0 < \delta < \frac{m_1}{m_2}(x_* - \bar{x}). \quad (2.8)$$

Тогда найдется момент времени t_0 такой, что для всех $t \geq t_0$ будет верна оценка $y(t) < \delta$. Пусть $x(t_0) = \tilde{x}_0$. Из первого уравнения системы (2.2), учитывая неравенства $x(t) < \bar{x}$, $y(t) < \delta$, получаем, что

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t \geq t_0} = [\varepsilon_1 - \gamma_1 (m_1 x + m_2 y)] x > [\varepsilon_1 - \gamma_1 m_1 \bar{x} - \gamma_1 m_2 \delta] x = Cx,$$

где

$$C = \gamma_1 m_1 \left(x_* - \bar{x} - \frac{m_2}{m_1} \delta \right) > 0.$$

Умножив обе части полученного неравенства на функцию $e^{-C(t-t_0)}$, приходим к дифференциальному неравенству

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t \geq t_0} > 0,$$

где

$$u(t) = x(t)e^{-C(t-t_0)}.$$

Таким образом, функция $u(t)$ монотонно возрастает при $t > t_0$. Поэтому

$$u(t) > u(t_0) = \tilde{x}_0, \quad t > t_0,$$

или

$$x(t) > \tilde{x}_0 e^{C(t-t_0)}, \quad t > t_0,$$

т. е. функция $x(t)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$. Это противоречит доказанному выше факту об ограниченности решения $x(t)$. Значит, действительно численность первой популяции будет стремиться при $t \rightarrow \infty$ снизу к предельному значению x_* .

Итак, на основе качественного анализа решений задачи Коши (2.2)–(2.4) нам удалось установить, что при выполнении условий (2.6), (2.7) численность первой популяции стабилизируется на некотором уровне, а вторая популяция исчезает. Отметим еще раз, что эти важные выводы мы сделали без привлечения формул, описывающих точное решение задачи.

Из установленных свойств следует очень интересный вывод. Если в некоторой многочисленной популяции случайно появляется совсем небольшое количество мутантов с такой же врожденной скоростью роста, как у остальных особей ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), но легче переносящих голод ($\gamma_1 < \gamma_2$), то со временем мутанты полностью вытеснят домутантный вид.

2.2. Рассмотрим математическую модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа «хищник–жертва». Предположим, что единственным фактором, ограничивающим размножение жертв, является давление на них со стороны хищников, а размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (количеством жертв). Тогда в отсутствии хищников численность жертв $x(t)$ должна расти экспоненциально с относительной скоростью α , а численность хищников $y(t)$ в отсутствии жертв — экспоненциально убывать с относительной скоростью β , т. е. величины $x(t)$, $y(t)$ будут описываться в этом случае уравнениями Мальтуса

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta y. \quad (2.9)$$

Здесь $\alpha = \text{const} > 0$ и $\beta = \text{const} > 0$ — коэффициенты рождаемости жертв и смертности хищников, соответственно.

«Соперничество» жертвы с хищником выражается в изменении численности жертв, которая, в свою очередь, сказывается на численности

хищников. Пусть $V(x)$ — количество (или биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k -я часть полученной с этой биомассой энергии расходуется на воспроизводство, а остальная тратится на поддержание основного обмена. Таким образом, скорость прироста жертв будет уменьшена на величину $V(x)y$, а прирост хищников будет определяться величиной $kV(x)y$. Следовательно, уравнения системы хищник—жертва можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - V(x)y, \quad \frac{dy}{dt} = y(kV(x) - \beta). \quad (2.10)$$

Функцию $V(x)$ называют *трофической функцией хищника* и именно ее определяют в экспериментальных работах. Характер этой функции таков, что она асимптотически приближается к некоторому конечному положительному значению при большой численности жертв, отражая тем самым факт насыщения хищников при $x \rightarrow \infty$. При малых значениях x , когда почти все жертвы становятся добычей хищников, которые всегда голодны и насыщения у которых не наступает (ситуация довольно обычная в природе), трофическую функцию можно считать линейной функцией численности жертв, т. е. $V(x) = mx$. В настоящем параграфе мы рассмотрим именно этот случай. Кроме того, предположим, что $k = \text{const}$. Тогда система уравнений (2.10) запишется в форме уравнений Лотки¹—Вольтерра²

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - mxy, \quad \frac{dy}{dt} = kmxy - \beta y, \quad (2.11)$$

из которых по начальным данным (2.3) определяются численности популяций в любой момент времени $t > 0$.

Поскольку правые части уравнений (2.11) имеют ограниченные частные производные по x и y в любом прямоугольнике плоскости Oxy , то задача Коши (2.11), (2.3) имеет единственное решение, причем бесконечно дифференцируемое. Однако выписать это решение в аналитической форме весьма затруднительно ввиду нелинейности системы уравнений (2.11). Поэтому можно опять обратиться к качественному исследованию свойств решения.

¹Alfred James Lotka (1880–1949) — американский математик, физикохимик, статистик. Получил известность за свою работу в области динамики популяций и энергетике.

²Vito Volterra (1860–1940) — итальянский математик, физик, известен работами в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа.

Мы продемонстрируем сейчас приемы качественного анализа, отличные от тех, которые использовались в задаче о межвидовом соперничестве популяций при оспаривании одной и той же пищи (см. п. 2.1). Первый прием связан с переходом к записи задачи в безразмерных величинах. Система уравнений (2.11) зависит от четырех параметров: α , β , k , m . Каждый из них влияет на вид решения, осложняя его исследование. Попытаемся перейти к безразмерным величинам с тем, чтобы количество определяющих параметров уменьшилось. Как было указано в гл. 1 (при обсуждении общих принципов построения и исследования математических моделей), переход к безразмерным величинам позволяет исследовать не одно решение, а целый класс подобных решений.

Итак, пусть

$$\xi = \frac{km}{\beta} x, \quad \eta = \frac{m}{\alpha} y, \quad \tau = \alpha t, \quad p = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.12)$$

Тогда уравнения Лотки—Вольтерра (2.11) запишутся в виде системы уравнений

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \xi(1 - \eta), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = p \eta(\xi - 1) \quad (2.13)$$

с единственным параметром $p > 0$. Если нам удастся выяснить свойства решения $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ при некотором одном значении параметра p , то основываясь на заданном преобразовании растяжения (2.12), мы сможем предсказать поведение решения $x(t)$, $y(t)$ системы (2.11) сразу для всех допустимых значений параметров k и m и любых α и β , удовлетворяющих равенству $\beta/\alpha = p$. Таким образом, переход к безразмерным величинам действительно целесообразен при изучении качественного поведения решений.

Другой прием связан с исследованием равновесных состояний. Система уравнений (2.13) имеет одно положение равновесия с положительными значениями ξ и η — стационарное, не зависящее от времени τ решение

$$\xi(\tau) \equiv \xi_* = 1, \quad \eta(\tau) \equiv \eta_* = 1. \quad (2.14)$$

Таким образом, если в начальный момент времени $\tau = 0$ искомые переменные ξ , η принимают значения ξ_* , η_* , то и во все последующие моменты времени будут выполняться равенства (2.14). Это означает, что особая точка (ξ_*, η_*) отвечает равновесной численности жертв и хищников: прирост жертв за счет рождаемости полностью уравновешивается деятельностью хищников, а прирост хищников — их естественной смертностью.

Выписать формулы для нестационарных решений не удастся. Однако можно проанализировать поведение решений в фазовой плоскости. Напомним, что решение задачи Коши для уравнений (2.13) с начальными данными

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \eta(0) = \eta_0 \quad (2.15)$$

можно интерпретировать геометрически как кривую в трехмерном пространстве $O\xi\eta\tau$, проходящую через точку $(\xi_0, \eta_0, 0)$ и составленную из точек $(\xi(\tau), \eta(\tau), \tau)$ («график решения»). При другой геометрической интерпретации рассматривается кривая на плоскости $O\xi\eta$, составленная из точек с координатами $(\xi(\tau), \eta(\tau))$, при этом время τ является параметром. Эта кривая является проекцией графика решения на плоскость $O\xi\eta$ и называется *фазовой траекторией*, а плоскость $O\xi\eta$ называется *фазовой плоскостью*.

Чтобы понять временную динамику функций $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, исследуем поведение решения нелинейной системы (2.13) в плоскости переменных ξ , η , т. е. исследуем поведение фазовых траекторий. Для этого второе уравнение поделим на первое

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{p \eta (\xi - 1)}{\xi (1 - \eta)} \quad (2.16)$$

и преобразуем полученное уравнение к виду

$$\frac{1 - \eta}{\eta} d\eta = p \frac{\xi - 1}{\xi} d\xi.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом положительности значений ξ и η , получаем соотношение

$$\ln \eta - \eta = p (\xi - \ln \xi) + C,$$

или

$$\ln \eta - \ln e^\eta = p (\ln e^\xi - \ln \xi) + C,$$

в котором постоянная C из правой части определяется по начальным значениям (2.15). Таким образом, уравнение (2.16), или, что то же самое, система (2.13) имеет первый интеграл вида

$$\Psi(\xi, \eta) = C_1 > 0, \quad (2.17)$$

где

$$\Psi(\xi, \eta) = \left(\frac{\xi}{e^\xi} \right)^p \frac{\eta}{e^\eta}. \quad (2.18)$$

Для каждого фиксированного значения

$$C_1 = \left(\frac{\xi_0}{e^{\xi_0}} \right)^p \frac{\eta_0}{e^{\eta_0}}$$

интегралу (2.17) соответствует вполне определенная фазовая траектория системы (2.13), которая совпадает с линией уровня C_1 функции Ψ и проходит через точку (ξ_0, η_0) . На рис. 7, *а* изображен график функции

$$\zeta = \Psi(\xi, \eta) \quad (2.19)$$

с несколькими линиями уровня. Соответствующие им фазовые траектории изображены на рис. 7, *б*. Поскольку в области $\xi > 0, \eta > 0$ функция Ψ принимает максимальное значение лишь в одной точке ($\Psi_{\max} = 1/e^{p+1}$ в точке покоя $\xi_* = 1, \eta_* = 1$), то линии уровня функции Ψ являются замкнутыми кривыми. Следовательно, и фазовые траектории будут замкнутыми кривыми, охватывающими точку покоя. Отсюда следует вывод о том, что функции $\xi(\tau), \eta(\tau)$ будут периодическими функциями от переменной τ , поскольку фазовая траектория, проходящая через точку (ξ_0, η_0) , вновь пройдет через эту же точку через некоторое время. Отметим также, что для разных начальных данных (2.15) периоды колебаний численностей будут разными [1].

Определим теперь направление движения точки (ξ, η) по фазовой траектории при возрастании времени. Пусть $\eta < 1$. Тогда из первого

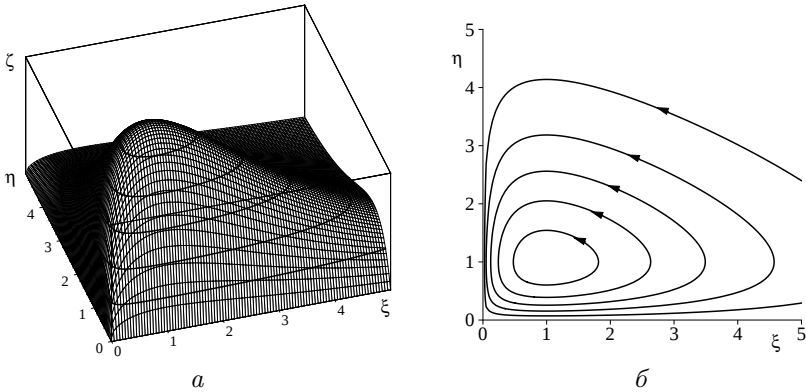


Рис. 7. Решение системы уравнений (2.13): *а* — график функции (2.19);
б — фазовые траектории. $p = 0,5$

уравнения системы (2.13) следует, что $d\xi/d\tau > 0$, т. е. функция $\xi(\tau)$ возрастает со временем при движении по нижней части фазовой траектории (на рис. 7, б — это часть траектории, состоящая из точек, у которых вторая координата $\eta < 1$). Из того же уравнения получаем, что при $\eta > 1$ функция $\xi(\tau)$ будет убывать ($d\xi/d\tau < 0$). Аналогично определяется знак производной $d\eta/d\tau$. Тем самым получаем, что с течением времени точка (ξ, η) движется по фазовой траектории в направлении против часовой стрелки (на рис. 7, б направление движения по фазовым траекториям изображено стрелками).

Биологическое содержание задачи подтверждает выявленное свойство решений математической модели. В самом деле, возьмем некоторые начальные данные (2.15), соответствующую им фазовую траекторию и начнем рассмотрение с момента времени, когда численность хищников наименьшая. На траектории (см. рис. 7, б) этому моменту времени будет соответствовать самая низшая ее точка с координатами $\xi = 1, \eta = \eta_{\min} < 1$. В этот момент для развития жертв создались самые благоприятные условия (хищников очень мало), поэтому численность жертв растет, но вместе с этим начинается и рост численности хищников (в математической модели этот процесс описывается движением по нижней части фазовой траектории вправо). В некоторый момент времени хищников становится столько ($\eta = 1$), что они выедают ровно весь прирост жертв, т. е. в этот момент времени численность жертв достигает своего максимума $\xi_{\max}$, и далее она начинает уменьшаться (начинается движение по верхней части траектории влево), а численность хищников продолжает расти. Наконец, хищников становится так много ($\eta = \eta_{\max} > 1$), а жертв так мало ($\xi = 1$), что вместе с уменьшением количества жертв начинает уменьшаться и численность хищников. Такое продолжается вплоть до момента времени, когда численность жертв достигает своего минимума $\xi_{\min}$ и малое количество хищников ($\eta = 1$) позволяет жертвам начать увеличение своей численности (начинается движение по нижней части фазовой траектории вправо).

Таким образом, рассматриваемая модель описывает сколь угодно долгое сосуществование обеих популяций с периодическим колебанием их численностей. Амплитуды этих колебаний

$$a_1 = \xi_{\max} - \xi_{\min}, \quad a_2 = \eta_{\max} - \eta_{\min} \quad (2.20)$$

зависят как от начальных численностей популяций, так и от определяющих параметров модели (см. задачу 2.2). В некоторых случаях амплитуда a_1 колебаний численности жертв может быть больше амплитуды a_2

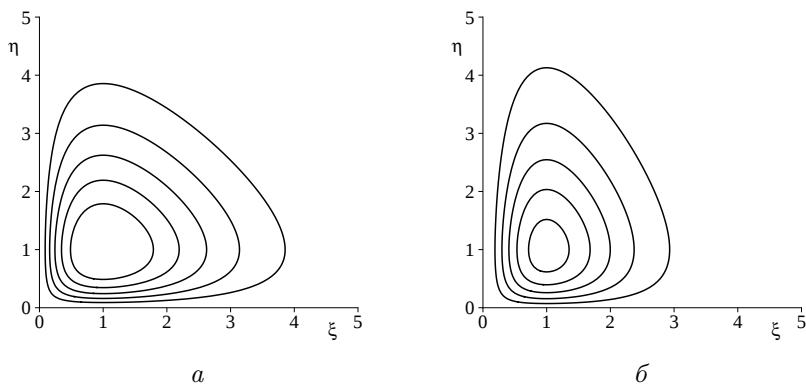


Рис. 8. Фазовые траектории решений системы уравнений (2.13):
 $a - p = 1$; $б - p = 2$

колебаний численности хищников, в других — наоборот (ср. рис. 7, б и 8). При этом всегда колебания численностей совершаются не в фазе: экстремальному значению функции $\xi(\tau)$ соответствует среднее по периоду значение функции $\eta(\tau)$ и наоборот, а средние по периоду значения этих функций совпадают с равновесными значениями (2.14) (см. задачу 2.3).

Заметим, что мы выполнили качественный анализ решений системы уравнений (2.13) относительно безразмерных величин. Используя формулы преобразования (2.12), можно восстановить картину взаимодействия популяций в исходных переменных. Например, истинная (в размерных величинах) амплитуда колебаний численности жертв будет вычисляться по формуле

$$x_{\max} - x_{\min} = \frac{\beta}{km} a_1,$$

в которой используется безразмерная амплитуда a_1 , определенная формулой (2.20).

2.3. Рассмотренная модель Лотки—Вольтерра (2.11) допускает многочисленные обобщения. Например, можно учесть внутривидовую конкуренцию жертв за общую пищу, подобно тому как это делалось в п. 2.1. Тогда математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\alpha - my - \gamma x) x, & \frac{dy}{dt} &= (kmx - \beta) y, \\ x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0,\end{aligned}\tag{2.21}$$

где

$$\gamma = \text{const} > 0, \quad \alpha > \frac{\gamma\beta}{km}.\tag{2.22}$$

В квадранте $x > 0, y > 0$ эта система имеет единственную точку покоя

$$x_* = \frac{\beta}{km}, \quad y_* = \frac{\alpha km - \gamma\beta}{km^2}.\tag{2.23}$$

Если учесть, что конкурентная борьба может быть и между хищниками, то модель (2.21) модифицируется в следующую:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\alpha - my - \gamma_1 x) x, & \frac{dy}{dt} &= (kmx - \beta - \gamma_2 y) y, \\ x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0,\end{aligned}\tag{2.24}$$

где

$$\gamma_1 = \text{const} > 0, \quad \gamma_2 = \text{const} > 0, \quad \alpha > \frac{\gamma_1\beta}{km}.\tag{2.25}$$

Эта система также имеет одну точку покоя

$$x_* = \frac{\alpha\gamma_2 + m\beta}{\gamma_1\gamma_2 + km^2}, \quad y_* = \frac{\alpha km - \gamma_1\beta}{\gamma_1\gamma_2 + km^2}\tag{2.26}$$

в положительном квадранте $x > 0, y > 0$. Отметим, что фазовые траектории решений этих двух моделей уже могут и не быть замкнутыми кривыми.

Более точные математические описания двухвидовых взаимодействий учитывают сложные картины взаимодействия как по времени, так и в пространстве: неравномерность распределения численности популяций на занимаемых территориях, временное запаздывание между рождением особей и их зрелостью, внешние воздействия и т. п. Для поиска решений таких сложных задач приходится использовать численные методы, но, как показали разобранные выше примеры, предварительный качественный анализ свойств решений надо выполнить обязательно, поскольку он может дать ценную информацию о характерных особенностях решений. Эту информацию можно использовать, например, при тестировании численных алгоритмов.

З А Д А Ч И

2.1. Показать, что уравнения (2.2), (2.4), зависящие от шести параметров ε_i , γ_i , m_i ($i = 1, 2$), можно записать в виде системы уравнений

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon \left(1 - \xi - \frac{\eta}{p} \right) \xi, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = (1 - p \xi - \eta) \eta \quad (2.27)$$

с двумя параметрами

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad p = \varepsilon \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad (2.28)$$

если ввести безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{x_*}, \quad \eta = \frac{y}{y_*}, \quad \tau = \varepsilon_2 t, \quad (2.29)$$

где

$$x_* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 m_1}, \quad y_* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 m_2}.$$

Для значений параметров

$$\varepsilon = 1, \quad p > 1 \quad (2.30)$$

выполнить качественный анализ решений задачи Коши для уравнений (2.27) с начальными данными

$$0 < \xi(0) = \xi_0 < 1, \quad \eta(0) = \eta_0 > 0. \quad (2.31)$$

2.2. Используя первый интеграл (2.17) системы уравнений (2.13), определить амплитуды колебаний (2.20) решений $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ и характер зависимости величин a_1 , a_2 от значений параметра p и начальных данных (2.15).

2.3. Доказать, что для решений системы уравнений (2.13) средние по периоду значения численностей $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ не зависят от начальных данных (2.15) и равны равновесным значениям $\xi_* = 1$, $\eta_* = 1$.

2.4. Записать систему уравнений (2.21), зависящую от пяти параметров, в новых переменных

$$\xi = \frac{x}{x_*}, \quad \eta = \frac{y}{y_*}, \quad \tau = \alpha t \quad (2.32)$$

с использованием лишь двух новых безразмерных параметров

$$p = \frac{\beta}{\alpha} > 0, \quad 0 < q = \frac{\gamma\beta}{km\alpha} < 1.$$

Величины x_* , y_* определены в формуле (2.23).

§ 3. Обобщенные модели взаимодействия популяций

Предположим, что построенная математическая модель оказалась нелинейной и столь сложной, что выполнить удовлетворительный качественный анализ ее решений не удастся. В таком случае попытайтесь исследовать линейный аналог Вашей модели. Во многих случаях результат такого исследования может дать подсказку о поведении решения исходной нелинейной модели.

3.1. В структуре сообществ многих видов выделяются трофические (пищевые) уровни — группы видов, между которыми невозможны прямые пищевые связи. Уровней может быть несколько. Виды, принадлежащие одному уровню, находятся обычно либо в состоянии конкуренции в борьбе за жизненные ресурсы, либо — в коалиции в использовании ресурсов. Основные трофические уровни наземных сообществ — это, как правило, продуценты (растения, аккумулирующие энергию света и вещества субстрата), первичные консументы (травоядные) и вторичные консументы (хищники, питающиеся травоядными). В некоторых случаях возможна более длинная цепь.

Теоретический анализ динамики сообщества n видов, находящихся на одном трофическом уровне, опирается на систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $x_i(t)$, аппроксимирующих численности видов:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

где функции f_i определяются структурой видовых взаимоотношений и их количественными показателями. Имеющие биологический смысл решения системы (3.1) принадлежат положительному октанту n -мерного евклидова пространства ($x_i \geq 0$).

Если в уравнениях (3.1) скорости роста численностей видов описываются линейными, а самолимитирование и взаимовлияние видов — квадратичными членами, не зависящими явным образом от t , то получаются так называемые *вольтерровские модели динамики сообщества n видов*:

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} x_j \right) x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

где ε_i — врожденная скорость роста n -го вида в отсутствие всех остальных видов, коэффициенты γ_{ij} ($i \neq j$) отражают характер и интенсивность влияния j -го вида на i -й, γ_{ii} — показатель внутривидового взаимодействия для i -го вида. Матрицу $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$, отражающую структуру связей сообщества, называют *матрицей сообщества*.

Система уравнений вида (3.2) уже рассматривалась нами при изучении вопроса об изменении численностей двух видов в процессе конкурентной борьбы между ними за одну и ту же пищу. Это была система уравнений (2.2), для которой удалось исследовать свойства решений, выполнив качественный анализ системы. Ясно, что таким путем нам будет трудно исследовать решение в случае системы (3.2) из n уравнений. В общем случае не поможет и анализ решений в фазовом пространстве, ведь теперь оно n -мерное.

Между тем, в экологии весьма актуальна проблема изучения устойчивости, стабильности экосистем в окрестности их равновесных состояний. С проблемой устойчивости связаны вопросы эксплуатации природных популяций и сообществ, оценки пределов загрязнения среды, прогноз последствий осуществления тех или иных природо-хозяйственных мероприятий. Устойчивость к случайным воздействиям, в результате которых система скачком переходит из одного состояния в другое и развивается в дальнейшем из этого нового состояния, можно интерпретировать на уровне математической модели как устойчивость решения к изменениям начальных данных. Особенно важным является понимание поведения популяций вблизи особых точек или особых решений. И здесь подсказку во многих случаях может дать изучение решений линейных аналогов систем (3.1), поскольку для исследования линейных моделей имеются хорошо развитые математические методы. Об этом уже говорилось в гл. 1: линеаризация и исследование решений линейных моделей является одним из необходимых элементов анализа нелинейных математических моделей. Ниже будет рассмотрен соответствующий пример, а также будет указан контрпример, показывающий, что иногда линейная модель неправильно предсказывает поведение решения нелинейной модели.

3.2. Итак, нас будет интересовать вопрос об устойчивости решения системы (3.1) на бесконечном интервале по времени к возмущениям начальных данных. Запишем уравнения (3.1) в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad t \in (0, \infty) \quad (3.3)$$

и рассмотрим для них задачу Коши

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$. Далее мы предполагаем, что решение этой задачи существует при всех $t > 0$ и для всех $\mathbf{x}_0$ из некоторой области пространства R^n .

Если бы мы решали задачу на конечном временном промежутке, то при малом изменении начальных данных (3.4) решение $\mathbf{x}(t)$ также изменилось бы на этом промежутке незначительно. Это следует из известной теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных [21]. Но по-другому обстоит дело, если мы ищем решение на бесконечном временном интервале. Для некоторых систем их решения ведут себя так, что малым отклонениям начальных данных соответствуют решения, которые могут оказаться как угодно далекими друг от друга при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $\mathbf{x}_*(t)$ — решение уравнения (3.3), соответствующееначальному условию

$$\mathbf{x}_*(0) = \mathbf{x}_{*,0}, \quad (3.5)$$

а $\mathbf{x}(t)$ — другое решение с начальным условием (3.4).

Определение. Решение $\mathbf{x}_*(t)$ называется устойчивым по Ляпунову¹, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства для начальных данных

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{*,0}\| < \delta \quad (3.6)$$

следует справедливое при всех $t \geq 0$ неравенство для решений

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)\| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

В противном случае решение $\mathbf{x}(t)$ называется неустойчивым.

¹Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918) — русский математик и механик, создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем. До работ Ляпунова А. М. вопросы об устойчивости решались по первому приближению, т. е. путем отбрасывания всех нелинейных членов уравнений, причем не выяснялась законность такой линеаризации уравнений движения. Выдающаяся заслуга Ляпунова А. М. — построение общего метода для решения задач об устойчивости. Он подробно исследовал случаи, когда первое приближение не дает ответа на вопрос об устойчивости.

Здесь

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i(t) - x_{*,i}(t)|,$$

$x_{*,i}$ — i -я компонента вектор-функции $\mathbf{x}_*$.

Определение. Если решение $\mathbf{x}_*(t)$ не только устойчиво, но и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*(t)\| = 0 \quad (3.8)$$

при $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{*,0}\| < \delta_1$, где δ_1 — некоторое положительное число, то решение $\mathbf{x}_*(t)$ называется асимптотически устойчивым.

Во многих задачах математической экологии правая часть системы уравнений не зависит от времени, т. е. уравнение (3.3) выглядит как

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Такие системы называются *автономными*. Например, автономной является система уравнений (3.2), а также все системы уравнений, рассмотренные в § 2. Для автономных систем представляет интерес изучение устойчивости постоянных решений $\mathbf{x}_*(t) \equiv \mathbf{x}_* = \text{const}$. Поскольку для постоянного решения выполняется равенство $d\mathbf{x}_*/dt = 0$, то оно называется *точкой покоя*, а состояние биологической системы, соответствующее точке покоя, называется *состоянием равновесия*. Для поиска точек покоя необходимо решить уравнение

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = 0. \quad (3.10)$$

В качестве примера рассмотрим автономную систему уравнений Лотки—Вольтерра в безразмерном виде (2.13). Переобозначив зависимые переменные, перепишем эти уравнения в виде (3.9) с использованием вектор-функций

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} x(1-y) \\ p(x-1)y \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.10) имеет в данном случае несколько решений и для одного из решений — точки покоя (2.14) — мы установили, что фазовые траектории в ее окрестности являются замкнутыми кривыми, соответствующими начальным данным (3.4) при $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_*$. Из рис. 7, б видно,

что если точка $\mathbf{x}_0$, через которую проходит фазовая траектория, не сильно отклоняется от точки покоя $\mathbf{x}_* = (1, 1)$, то и вся фазовая траектория не сильно удаляется от нее. Этот факт можно доказать и с помощью строгих математических выкладок, которые свидетельствуют о том, что рассматриваемое постоянное решение $\mathbf{x}_*$ будет устойчивым по Ляпунову (но не асимптотически устойчивым). Такого рода точка покоя называется *центром*, а замкнутые фазовые траектории, окружающие центр, называются *циклами*.

Линеаризуем теперь уравнения Лотки—Вольтерра, введя отклонения

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x_*, \quad \tilde{y}(t) = y(t) - y_* \quad (3.12)$$

компонент решения $\mathbf{x}(t)$ от компонент $x_* = 1, y_* = 1$ точки покоя $\mathbf{x}_*$ и считая эти отклонения столь малыми, что можно пренебречь величинами $\tilde{x}^2, \tilde{x}\tilde{y}$ и $\tilde{y}^2$. Тогда вместо нелинейной системы уравнений (3.9), (3.11) получаем следующую систему из двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \quad (3.13)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы $\mathcal{A}$ являются чисто мнимыми числами

$$\lambda_1 = -i\sqrt{p}, \quad \lambda_2 = i\sqrt{p}, \quad (3.14)$$

то решение линейных уравнений (3.13), соответствующее начальным данным

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (3.15)$$

запишется следующим образом [20]:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_* + (x_0 - x_*) \cos(\sqrt{p} t) - \frac{y_0 - y_*}{\sqrt{p}} \sin(\sqrt{p} t), \\ y(t) &= y_* + (y_0 - y_*) \cos(\sqrt{p} t) + (x_0 - x_*) \sqrt{p} \sin(\sqrt{p} t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Видим, что решение является периодическим с периодом $T = 2\pi/\sqrt{p}$. Кроме того, колебания численностей совершаются не в фазе (см. рис. 9):

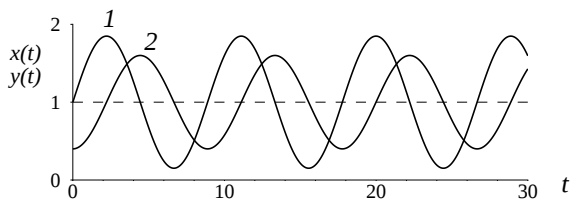


Рис. 9. Интегральные кривые (3.16): 1 — $x(t)$; 2 — $y(t)$. $x_* = 1$; $y_* = 1$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0,4$; $p = 0,5$. Положение равновесия изображено штриховой линией

экстремальным значениям функции $x(t)$ соответствует равновесное значение $y_* = 1$ функции $y(t)$ и наоборот. Таким образом, указанные свойства одинаковы как для решения нелинейных уравнений Лотки—Вольтерра, так и для решения их линейного аналога (3.13).

Кроме того, точка покоя x_* , как решение линейных уравнений (3.13), устойчива по Ляпунову (но не асимптотически), поскольку малые отклонения начальных данных (3.15) от точки покоя дают и малые отклонения от нее решения, что следует непосредственно из формул (3.16). Таким образом, и по свойству устойчивости рассматриваемые нелинейные уравнения и их линеаризации (3.13) идентичны.

Для линейных уравнений (3.13) очень просто получить уравнение фазовых траекторий. Это можно сделать разными способами, например, исключением времени из формул решения (3.16). В самом деле, разрешая эти уравнения относительно $\sin(\sqrt{p} t)$ и $\cos(\sqrt{p} t)$ и используя основное тригонометрическое тождество, получаем уравнение

$$(x - x_*)^2 + \frac{(y - y_*)^2}{p} = C, \quad (3.17)$$

где

$$C = (x_0 - x_*)^2 + \frac{(y_0 - y_*)^2}{p}.$$

Таким образом, фазовые траектории решений линейной задачи (3.13), (3.15) являются эллипсами (см. рис. 10). И хотя они не совпадают с фазовыми траекториями нелинейной задачи (ср. рис. 7, б и рис. 10, а, а также рис. 8, б и рис. 10, б), эти траектории гомеоморфны, т. е. одни переходят в другие при подходящем взаимно-однозначном непрерывном отображении. Поэтому можно считать, что и по форме фазовых траекторий сравниваемые системы эквивалентны.

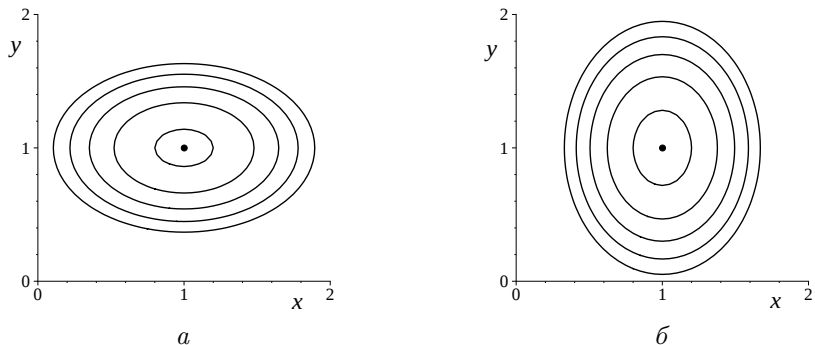


Рис. 10. Фазовые траектории решений линейной системы уравнений:

$$a - p = 0,5; \quad б - p = 2$$

И наконец, для обеих рассматриваемых систем точка покоя имеет один и тот же тип — является центром, а фазовые траектории в обоих случаях являются циклами.

Таким образом, если бы мы ничего не знали об устойчивости точки покоя и ее типе для нелинейной системы (3.9), (3.11), тем не менее, мы дали бы правильный ответ, исследуя устойчивость точки x_* для линейных уравнений (3.13), поскольку оказалось, что эти системы *качественно эквивалентны*: при некотором взаимно-однозначном отображении «фазовый портрет» первой системы переходит в «фазовый портрет» второй и наоборот.

3.3. В настоящее время существует большое число моделей типа «хищник–жертва» более общих [22], чем математическая модель Лотки–Вольтерра (2.11). Одной из них является модель Колмогорова¹

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x)x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y, \end{aligned} \tag{3.18}$$

¹Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) — величайший русский математик XX столетия, создатель современной теории вероятностей, автор классических результатов в теории функций, в математической логике, топологии, теории дифференциальных уравнений, функциональном анализе, в теории турбулентности, теории гамильтоновых систем. Созданные им школы в теории вероятностей, теории функций, функциональном анализе и теории гамильтоновых систем определили развитие этих направлений математики в XX столетии.

которую можно записать в виде автономной системы (3.9), если ввести вектор-функции

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} a(x)x - V(x)y \\ K(x)y \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

В рассматриваемой модели коэффициент $a(x)$ связан с приростом жертв, $K(x)$ — хищников, $V(x)$ — трофическая функция. Напомним, что в модели Лотки—Вольтерра (2.11) трофическая функция и функция $K(x)$ зависели от x линейно. Теперь же вид функций $a(x)$, $V(x)$ и $K(x)$ не конкретизируется, однако при выводе уравнений для придания решениям биологического смысла делаются некоторые качественные предположения о характере зависимости этих функций от переменной x :

— функции $a(x)$, $V(x)$, $K(x)$ определены при всех $x \geq 0$ и непрерывно дифференцируемы;

— в отсутствие хищников коэффициент $a(x)$ естественного прироста жертв монотонно убывает с возрастанием их численности, переходя от положительных значений к отрицательным:

$$a'(x) < 0, \quad a(0) > 0 > a(\infty); \quad (3.20)$$

это условие отражает наличие в популяции жертв внутривидовой борьбы за ограниченные ресурсы (пищевой и другие);

— с ростом численности жертв коэффициент естественного прироста хищников монотонно возрастает, переходя от отрицательных значений (при недостатке пищи) к положительным:

$$K'(x) > 0, \quad K(0) < 0 < K(\infty); \quad (3.21)$$

— число жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, положительно, а в отсутствии жертв это число равно нулю:

$$V(x) > 0 \text{ при } x > 0, \quad V(0) = 0. \quad (3.22)$$

Система уравнений (3.18) имеет несколько точек покоя. Все они находятся путем решения уравнения (3.10). Исследуем на устойчивость одну из точек покоя, а именно точку $\mathbf{x}_* = (x_*, y_*)$, первая координата x_* которой является корнем уравнения $K(x) = 0$ (в силу предположения (3.21) корень существует, причем единственный), т. е.

$$x_* = K^{-1}(0) > 0, \quad (K(x_*) = 0), \quad (3.23)$$

а вторая задается формулой

$$y_* = \frac{a(x_*)x_*}{V(x_*)}. \quad (3.24)$$

Из формул (3.23), (3.24) следует, что точка $\mathbf{x}_*$ будет лежать в положительном квадранте ($x > 0, y > 0$) только если

$$a(x_*) > 0. \quad (3.25)$$

Это условие будем считать выполненным.

В силу общности системы (3.18) трудно сказать что-либо определенное относительно устойчивости положения равновесия, поэтому в предположении малости отклонений (3.12) заменим нелинейную систему (3.9), (3.19) линейной

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*),$$

которая в силу равенства $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = 0$ примет вид уравнения (3.13)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \quad (3.26)$$

с матрицей Якоби

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_*) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & -V(x_*) \\ K'(x_*)y_* & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma = a'(x_*)x_* + a(x_*) - V'(x_*)y_*. \quad (3.27)$$

Линейная модель (3.26) получена с использованием формулы Тейлора для представления вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в окрестности точки $\mathbf{x}_*$, при этом в разложении оставлены слагаемые (3.12) лишь первого порядка малости. Поэтому модель (3.26) называется моделью *первого порядка аппроксимации* или *первого приближения* по отношению к нелинейной модели (3.9). При изучении тонких свойств решений нелинейных уравнений иногда оказывается целесообразным использование приближений второго и более высокого порядков аппроксимации.

Исследуем устойчивость указанной точки покоя для системы линейных уравнений (3.26), выписав в конечном виде решение, соответствующее начальным данным (3.4). Вид решения существенно зависит от собственных значений $\lambda_{1,2}$ матрицы $\mathcal{A}$, которые являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \mu = 0, \quad (3.28)$$

где $\mu = V(x_*)K'(x_*)y_*$. Отметим, что в силу условий (3.21), (3.22), (3.25) будет справедливо неравенство

$$\mu > 0. \quad (3.29)$$

Обозначим через $d = \sigma^2 - 4\mu$ дискриминант квадратного уравнения (3.28) и рассмотрим случай, когда он положителен, т. е. пусть

$$\sigma < -2\sqrt{\mu} \quad \text{или} \quad \sigma > 2\sqrt{\mu}. \quad (3.30)$$

В этом случае корни уравнения (3.28)

$$\lambda_1 = \frac{\sigma - \sqrt{d}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sigma + \sqrt{d}}{2} \quad (3.31)$$

будут вещественными и различными, поэтому общее решение системы (3.26) задается формулой [20]

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{r}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{r}_2, \quad (3.32)$$

где $\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2$) — правые собственные векторы матрицы $\mathcal{A}$, соответствующие собственным значениям λ_i , например

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} V(x_*) \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} V(x_*) \\ \lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Поскольку собственные векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ линейно независимы, то постоянные C_1, C_2 однозначно определяются через начальные данные (3.4) посредством решения системы линейных алгебраических уравнений

$$C_1 \mathbf{r}_1 + C_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*. \quad (3.34)$$

Из условия (3.29) следует, что собственные значения λ_1 и λ_2 одного знака, а в силу равенства $\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma$ — их знак совпадает со знаком

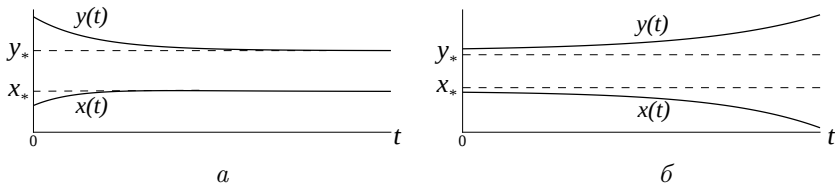


Рис. 11. Интегральные кривые (3.32): $a - \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$; $b - \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

числа σ . Учитывая неравенства (3.30), получаем, что при $\sigma < -2\sqrt{\mu}$ оба собственных значения отрицательны, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\| = 0,$$

т. е. точка покоя будет в этом случае асимптотически устойчивой. Если же $\sigma > 2\sqrt{\mu}$, то приходим к выводу о том, что решение (3.32) неограниченно удаляется от точки покоя при $t \rightarrow \infty$, вследствие чего точка $\mathbf{x}_*$ является неустойчивой.

На рис. 11 показаны графики решения (3.32) для некоторой начальной точки $\mathbf{x}_0$, а на рис. 12 изображены фазовые траектории для различных начальных точек $\mathbf{x}_0$. Видно, что в случае отрицательных собственных значений λ_i ($i = 1, 2$) все траектории собираются при $t \rightarrow \infty$ в точке покоя $\mathbf{x}_*$ и она называется в этом случае *устойчивым узлом*. Для по-

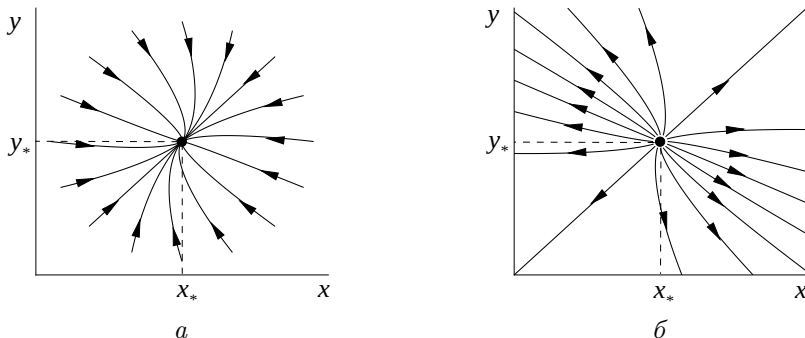


Рис. 12. Фазовые траектории, соответствующие решениям (3.32) линейной системы уравнений (3.26) в случае различных действительных собственных значений (3.31): $a - \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$; $b - \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

ложительных собственных значений — наоборот: точки $\mathbf{x}(t)$ движутся по фазовым траекториям, удаляясь от положения равновесия, поэтому оно называется *неустойчивым узлом*.

Пусть теперь $d = 0$, т. е.

$$\sigma = \pm 2\sqrt{\mu}. \quad (3.35)$$

Тогда характеристическое уравнение имеет кратный корень

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} \neq 0 \quad (3.36)$$

и решение задачи (3.26), (3.4) запишется как [20]

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + \left(\mathcal{I} + t(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) \right) e^{\lambda t} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*), \quad (3.37)$$

где $\mathcal{I}$ — единичная матрица. Из этой формулы видно, что при $\sigma = -2\sqrt{\mu}$ рассматриваемая точка покоя асимптотически устойчива, а при $\sigma = 2\sqrt{\mu}$ — неустойчива. Графики компонент решения (3.37) показаны на рис. 13, а фазовые траектории — на рис. 14. В случае кратного корня фазовые траектории также, как и для простого корня, приближаются или удаляются от точки покоя в зависимости от того, $\lambda < 0$ или $\lambda > 0$. Соответственно, точка покоя называется устойчивым или неустойчивым *вырожденным узлом*.

Наконец, рассмотрим последний случай $d < 0$, который имеет место при выполнении условий

$$-2\sqrt{\mu} < \sigma < 2\sqrt{\mu}. \quad (3.38)$$

В этом случае корни характеристического уравнения являются комплексно сопряженными числами

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}, \quad \lambda_2 = \lambda \equiv \frac{\sigma + i\sqrt{|d|}}{2}, \quad (3.39)$$

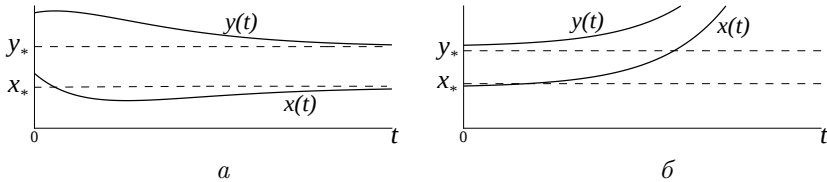


Рис. 13. Интегральные кривые (3.37): а — $\lambda < 0$; б — $\lambda > 0$

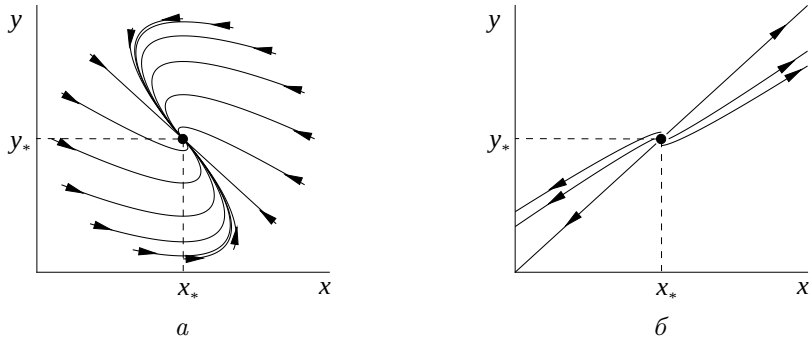


Рис. 14. Фазовые траектории, соответствующие решениям (3.37) линейной системы уравнений (3.26) в случае кратного собственного значения (3.36): $a - \lambda < 0$; $b - \lambda > 0$

им соответствуют линейно независимые собственные векторы

$$\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} V(x_*) \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

при этом

$$\mathcal{A}\mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}, \quad \mathcal{A}\bar{\mathbf{r}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{r}}$$

и общее решение системы (3.26) имеет вид [20]

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + C_1 \operatorname{Re}(e^{\lambda t} \mathbf{r}) + C_2 \operatorname{Im}(e^{\lambda t} \mathbf{r}). \quad (3.41)$$

Поскольку

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{|d|} t}{2} + i \sin \frac{\sqrt{|d|} t}{2} \right), \quad (3.42)$$

то из формулы (3.41) следует, что при $-2\sqrt{\mu} < \sigma < 0$ точка покоя $\mathbf{x}_*$ будет асимптотически устойчивым решением, при $0 < \sigma < 2\sqrt{\mu}$ — неустойчивым, а при $\sigma = 0$ — устойчивым, но не асимптотически.

На рис. 15 показаны графики компонент решения (3.41) для некоторой фиксированной начальной точки $\mathbf{x}_0$ в случае $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$. Видно, что функции $x(t)$, $y(t)$ являются колеблющимися функциями, при этом амплитуда колебаний уменьшается, если $\operatorname{Re} \lambda < 0$, и увеличивается, если вещественная часть комплексного корня λ положительна.

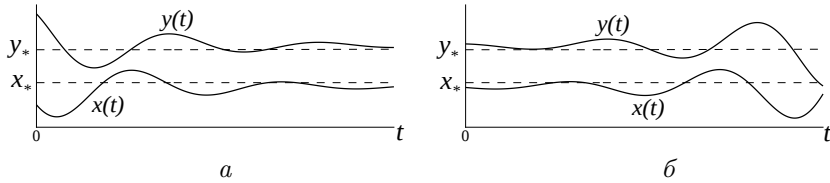


Рис. 15. Интегральные кривые (3.41): а — $\operatorname{Re} \lambda < 0$; б — $\operatorname{Re} \lambda > 0$

На рис. 16 изображены фазовые траектории в случае $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$. Они имеют вид спиралей, закрученных против часовой стрелки, при этом траектории приближаются к точке покоя или удаляются от нее в зависимости от знака действительной части числа λ . Соответственно, точка покоя называется *устойчивым фокусом*, если $\operatorname{Re} \lambda < 0$, и *неустойчивым фокусом*, если $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Наконец, если $\operatorname{Re} \lambda = 0$ (т. е. $\sigma = 0$), то с учетом формул (3.40), (3.42) получаем следующие выражения для компонент решения (3.41):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_* + (x_0 - x_*) \cos pt - (y_0 - y_*) \frac{V(x_*)}{p} \sin pt, \\ y(t) &= y_* + (y_0 - y_*) \cos pt + (x_0 - x_*) \frac{p}{V(x_*)} \sin pt, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $p = \sqrt{|d|}/2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ — начальная точка интегральной кривой.

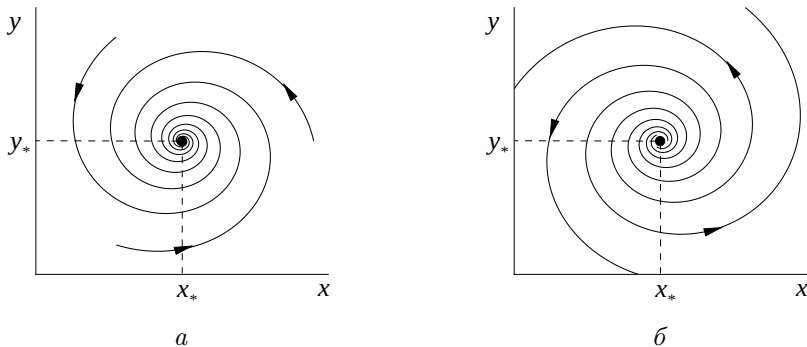


Рис. 16. Фазовые траектории, соответствующие решениям (3.41) линейной системы уравнений (3.26) в случае комплексных собственных значений (3.39): а — $\operatorname{Re} \lambda < 0$; б — $\operatorname{Re} \lambda > 0$

Таким образом, компоненты решения (3.43) являются периодическими функциями, соответствующие им фазовые траектории — эллипсами, описываемыми уравнениями

$$\frac{(x - x_*)^2}{CV(x_*)/p} + \frac{(y - y_*)^2}{Cp/V(x_*)} = 1,$$

где

$$C = \frac{(x_0 - x_*)^2}{V(x_*)/p} + \frac{(y_0 - y_*)^2}{p/V(x_*)},$$

а точка покоя — *центром*. Такой тип точки покоя нам уже встречался при исследовании линеаризованных уравнений Лотки—Вольтерра (см. п. 3.2).

Суммируя результаты исследований всех возможных случаев (3.30), (3.35), (3.38), можно сказать, что точка покоя x_* асимптотически устойчива при $\sigma < 0$, неустойчива при $\sigma > 0$, устойчива, но не асимптотически при $\sigma = 0$. Для рассматриваемой задачи этот результат можно переформулировать и так: если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, 2$), то имеем асимптотически устойчивую точку покоя, если $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ — неустойчивую, при $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ устойчивую, но не асимптотически.

Итак, мы выполнили полное исследование поведения решения модели первого приближения (3.26) в окрестности рассмотренной точки покоя x_* . Можно ли утверждать, что решение нелинейной модели (3.18) ведет себя аналогично решению линейной модели? Оказывается, что в некоторых случаях такое утверждение будет верным. Оно основывается на теоремах Ляпунова, формулировку одной из которых мы здесь приведем.

Теорема 3.1. *Если корни характеристического уравнения системы первого приближения (3.26) имеют отрицательные вещественные части, то точка покоя x_* нелинейной системы (3.9) асимптотически устойчива. Если хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть, то точка покоя неустойчива.*

Таким образом, основываясь на этой теореме, можно утверждать, что при любых значениях параметра (3.27), кроме $\sigma = 0$, поведение решения нелинейной модели Колмогорова (3.18) в окрестности точки покоя будет такое же, как в линейной модели (3.26): оба решения будут одновременно либо асимптотически устойчивыми, либо неустойчивыми, точка покоя будет либо узлом, либо фокусом для обеих моделей.

Что же касается случая $\sigma = 0$, то приведенная теорема не дает ответа на вопрос о соответствии свойств решений линейной и нелинейной моделей в окрестности точки покоя.

3.4. Мы установили, что изучение свойств решений линейной модели может дать в некоторых случаях ясное представление о качественном поведении решения нелинейной модели. Для модели Колмогорова (3.18) остались невыясненными лишь свойства решения при значении параметра $\sigma = 0$, т. е. когда корни характеристического уравнения (3.28) линейной системы (3.26) являются чисто мнимыми числами. Нельзя ли сказать, что и для нелинейных уравнений точка покоя будет, как и в линейной модели, центром, а фазовые траектории — циклами? Вспомним, что для нелинейной модели Лотки—Вольтерра (3.9), (3.11) мы получили соответствие по типу точки покоя и форме фазовых траекторий с системой линейных уравнений (3.13), причем корни характеристического уравнения последней системы были чисто мнимыми числами (3.14). Но оказывается, что в общем случае при наличии чисто мнимых корней характеристического уравнения такого соответствия уже может и не быть. Приведем соответствующий пример.

Автономная система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -py - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= px - y(x^2 + y^2)\end{aligned}\tag{3.44}$$

с параметром $p = \text{const} > 0$ имеет единственную неподвижную точку $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ и может быть проинтегрирована аналитически для любых начальных данных

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0).\tag{3.45}$$

В самом деле, введем полярные координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi\tag{3.46}$$

и перейдем в системе (3.44) к новым зависимым переменным $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} \cos \varphi - \frac{d\varphi}{dt} r \sin \varphi &= -pr \sin \varphi - r^3 \cos \varphi, \\ \frac{dr}{dt} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{dt} r \cos \varphi &= pr \cos \varphi - r^3 \sin \varphi.\end{aligned}$$

Разрешив эту систему относительно производных, получим простые уравнения

$$\frac{dr}{dt} = -r^3, \quad \frac{d\varphi}{dt} = p,$$

которые имеют решение

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{2t + 1/r_0^2}}, \quad \varphi(t) = pt + \varphi_0, \quad (3.47)$$

где числа r_0 и φ_0 однозначно определяются заданными начальными данными (3.45):

$$x_0 = r_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = r_0 \sin \varphi_0.$$

Подставляя найденные функции (3.47) в формулы (3.46), приходим к следующему виду решения нелинейной задачи (3.44), (3.45):

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{2t + 1/r_0^2}} \cos(pt + \varphi_0), \quad y(t) = \sqrt{\frac{1}{2t + 1/r_0^2}} \sin(pt + \varphi_0).$$

На рис. 17, *a* изображены фазовые траектории этих решений при значении параметра $p = 1$. Видим, что для нелинейной системы уравнений (3.44) точка покоя является устойчивым фокусом, при этом фазовые траектории стремятся к точке покоя медленнее, чем траектории решений вида (3.41) с экспоненциальными множителями.

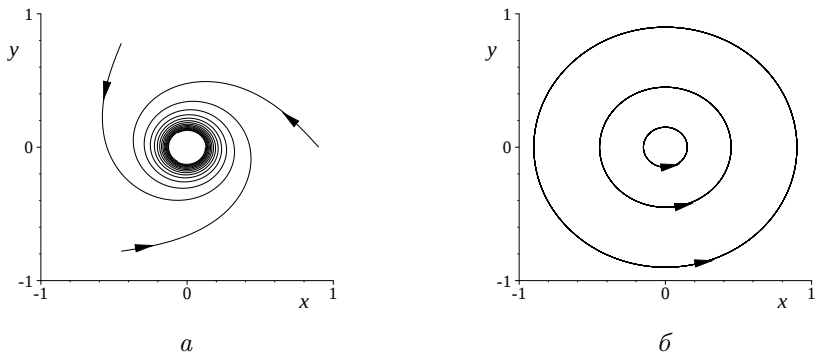


Рис. 17. Фазовые траектории: *a* — соответствующие решениям нелинейной системы уравнений (3.44); *б* — линейного приближения (3.48)

Теперь в окрестности точки покоя рассмотрим первое приближение системы (3.44):

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}x, \quad (3.48)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathcal{A}$ имеет чисто мнимые комплексно сопряженные собственные значения

$$\lambda_1 = -ip, \quad \lambda_2 = ip,$$

поэтому, согласно формуле (3.41), для компонент решения задачи (3.48), (3.45) получаем выражения вида (3.43):

$$x(t) = x_0 \cos pt - y_0 \sin pt, \quad y(t) = y_0 \cos pt + x_0 \sin pt. \quad (3.49)$$

Отсюда следует, что фазовые траектории, соответствующие решениям (3.49) линейной системы, являются концентрическими окружностями (см. рис. 17, б)

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

с центром в точке покоя и не имеют ничего общего с фазовыми траекториями исходной нелинейной задачи. Таким образом, в данном случае нелинейная модель и ее линейный аналог не являются качественно эквивалентными, и по свойствам решения линейного приближения оказалось невозможным правильно предсказать поведение решения исходной нелинейной задачи. Отметим, что это можно сделать, используя приближения более высокого порядка [2].

На простых примерах мы убедились, что линейные аналоги исходных нелинейных математических моделей могут дать полезную, хотя и не всегда полную, информацию об изучаемых реальных явлениях. Иногда (это зависит от цели исследования) применение лишь линейных моделей может привести к положительному результату, но надо всегда помнить, что они имеют ограниченную область применимости, границы которой определяются путем сравнения с результатами, полученными по более полным моделям. При всех недостатках линейные модели обязательно должны быть включены в иерархическую цепочку математических моделей, предназначенных для исследования реальных объектов.

З А Д А Ч И

3.1. В п. 3.2 мы установили, что точка покоя $\mathbf{x}_* = (1, 1)$ является устойчивым решением типа *центр* системы уравнений Лотки—Вольтерра (3.9), (3.11) с положительным параметром $p > 0$. Используя первое приближение этой системы, исследовать на устойчивость другие точки покоя.

3.2. В п. 3.3 мы установили, что при $\sigma \neq 0$ точка покоя $\mathbf{x}_*$, координаты x_* , y_* которой определены в формулах (3.23), (3.24), является узлом или фокусом, устойчивым или неустойчивым решением модели Колмогорова (3.18). Используя линейное приближение этой модели, исследовать на устойчивость другие точки покоя.

3.3. Запишем систему уравнений (2.21) в безразмерных переменных (2.32) и переобозначим новые переменные ξ , η и τ вновь как x , y и t . В результате получим автономную систему (см. ответ задачи 2.4)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (1 - qx)x - (1 - q)xy, \\ \frac{dy}{dt} &= p(x - 1)y,\end{aligned}\tag{3.50}$$

где

$$p = \text{const} > 0, \quad 0 < q = \text{const} < 1.\tag{3.51}$$

Используя первое приближение этой системы, исследовать на устойчивость все точки покоя и нарисовать эскизы фазовых траекторий.

3.4. Перепишем систему (2.27) в привычных обозначениях

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \left(1 - x - \frac{y}{p} \right) x, \quad \frac{dy}{dt} = (1 - p x - y)y.\tag{3.52}$$

Здесь ε и p — параметры, удовлетворяющие условиям

$$\varepsilon = \text{const} > 0, \quad p = \text{const} > 0, \quad p \neq 1.\tag{3.53}$$

Используя первое приближение, исследовать на устойчивость все точки покоя нелинейной системы уравнений (3.52) и нарисовать эскизы фазовых траекторий.

§ 4. Простейшие математические модели экономических процессов

Очень часто одинаковыми или «похожими» уравнениями описываются процессы и явления из самых разных сфер окружающего мира. Поэтому методы, разработанные для математического моделирования одних явлений, относительно легко, «по аналогии», могут быть перенесены на широкие классы совсем других процессов.

4.1. В среднем по времени реальный доход страны, как правило, растет. Бывают периоды, когда он падает (периоды рецессий), но в долгосрочном аспекте происходит рост. Экономический рост — актуальнейшая проблема макроэкономики — раздела экономической теории, в котором изучаются проблемы экономики в целом: экономический рост, кризисы, инфляция, безработица и т. д.

Рассмотрим динамику отдельной экономики в долгосрочном периоде, считая, что ее состояние в любой момент времени t описывается совокупностью следующих величин: $D(t)$ — объем конечного продукта (доход), $C(t)$ — фонд непродуцированного потребления, $S(t)$ — фонд накопления, $y(t)$ — объем трудовых ресурсов (здесь — число работающих), $X(t)$ — объем капитальных ресурсов (все имеющиеся средства производства, используемые в производстве товаров и услуг).

Предполагается, что конечный продукт полностью используется на потребление и накопление, т. е.

$$D = C + S, \quad (4.1)$$

при этом фонд накопления S составляет заданную часть s от конечного продукта, поэтому

$$S = sD, \quad C = (1 - s)D, \quad (4.2)$$

где $s = \text{const}$, $0 < s < 1$.

Будем считать, что износ капитальных ресурсов пропорционален их объему, и фонд накопления полностью расходуется на инвестиции, покрывающие износившийся капитал, и инвестиции, идущие на прирост капитала:

$$S = \delta \cdot X + \frac{dX}{dt}, \quad (4.3)$$

где $\delta = \text{const}$, $0 < \delta < 1$.

Предполагается, что численность рабочих, капитал и объем конечного продукта связаны между собой с помощью *производственной функции* $f(x)$:

$$D = yf(x), \quad (4.4)$$

где $x = X/y$ — *капиталовооруженность рабочей силы*, $x \geq 0$, $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$. Тогда с учетом формул (4.2) и (4.4) уравнение (4.3) запишется как

$$syf(x) = \delta \cdot X + \frac{dX}{dt},$$

или

$$\frac{1}{y} \frac{dX}{dt} = sf(x) - \delta x. \quad (4.5)$$

В силу равенства

$$X = xy \quad (4.6)$$

получаем, что

$$\frac{dX}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt},$$

поэтому уравнение (4.5) можно переписать как

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dy}{dt} + sf(x) - \delta x. \quad (4.7)$$

Кроме того, предположим, что численность рабочих экспоненциально возрастает с относительной скоростью $\varepsilon = \text{const} > 0$:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon y. \quad (4.8)$$

Тогда уравнение (4.7) можно переписать в следующем окончательном виде:

$$\frac{dx}{dt} = sf(x) - (\delta + \varepsilon)x. \quad (4.9)$$

Задав начальные данные

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (4.10)$$

и найдя решение $x(t)$, $y(t) = y_0 e^{\varepsilon t}$ задачи Коши (4.8)–(4.10), по формуле (4.6) определяем объем капитальных ресурсов, по формуле (4.4) — доход, по формулам (4.2) — фонды потребления и накопления.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда производственная функция является линейной:

$$f(x) = mx, \quad m = \text{const} > 0. \quad (4.11)$$

Тогда уравнение для капиталовооруженности (4.9) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = (sm - \delta - \varepsilon)x, \quad (4.12)$$

т. е. оно совпадает с уравнением (1.1) модели Мальтуса. Поэтому приведенная экономическая модель будет обладать теми же недостатками, что и биологическая модель Мальтуса.

В теории экономического роста наиболее часто используется другая производственная функция — функция Кобба—Дугласа [29]:

$$f(x) = mx^\alpha, \quad m = \text{const} > 0, \quad 0 < \alpha = \text{const} < 1. \quad (4.13)$$

Для такой функции уравнение (4.9) запишется как уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{dt} = smx^\alpha - (\delta + \varepsilon)x. \quad (4.14)$$

Точка равновесия

$$x_* = \left(\frac{sm}{\varepsilon + \delta} \right)^{1/(1-\alpha)} > 0 \quad (4.15)$$

является устойчивой и $x(t) \rightarrow x_*$ при $t \rightarrow \infty$. В последнем свойстве можно убедиться и непосредственно, найдя предел при $t \rightarrow \infty$ точного решения задачи (4.14), (4.10):

$$x(t) = \left[x_*^{1-\alpha} + (x_0^{1-\alpha} - x_*^{1-\alpha}) e^{-(\delta+\varepsilon)(1-\alpha)t} \right]^{1/(1-\alpha)}. \quad (4.16)$$

Поскольку численность работающих $y(t)$ со временем возрастает, то из формулы (4.4) следует, что в состоянии равновесия капиталовооруженности $x = x_*$ выпуск конечного продукта растет, фонды потребления и накопления увеличиваются (см. формулы (4.2)), объем капитальных ресурсов (4.6) также растет, т. е. имеет место рост экономики, хотя производительность труда D/y при $x = x_*$ не меняется.

Из формулы (4.15) видно, что устойчивый уровень капиталовооруженности x_* прямо пропорционален принятой норме сбережения s и величине коэффициента m в производственной функции, но обратно пропорционален темпу роста работающих и норме амортизационных отчислений δ . Считая параметры m , α , ε и δ неизменными, выясним,

при какой норме накопления будет поддерживаться максимально возможное среднедушевое потребление $c = C/y$ в состоянии устойчивого равновесия $x = x_*$ растущей экономики. Используя формулы (4.2), (4.4), (4.13), получаем, что

$$c(s) = \frac{C}{y} = \frac{(1-s)D}{y} = \frac{(1-s)yf(x_*)}{y} = (1-s)mx_*^\alpha,$$

поэтому

$$\frac{\partial c}{\partial s} = -mx_*^\alpha + (1-s)m\alpha x_*^{\alpha-1} \frac{\partial x_*}{\partial s}.$$

Учитывая выражение (4.15), приходим к выводу о том, что $\partial c/\partial s = 0$ при $s = \alpha$. Таким образом, наиболее высокий уровень благосостояния работающих достигается при норме накопления $s = \alpha$. Устойчивый уровень капиталовооруженности x_* , при котором достигается максимально возможное потребление, называется *уровнем, соответствующим Золотому правилу накопления*.

Ясно, что рассмотренная модель экономического роста не способна объяснить многие наблюдаемые в экономике явления, поэтому она нуждается в усовершенствовании подобно тому, как использовавшиеся на первых этапах простейшие математические модели Мальтуса и Ферхюльста—Пирла, описывающие развитие биологических популяций, получили дальнейшее уточнение в более поздних моделях Лотки—Вольтерра, Колмогорова и др. Несовершенство экономической модели (4.14) привело к созданию целой иерархии моделей экономического роста [29], на которых базируется управление современной экономикой.

4.2. Рассмотрим теперь динамику экономики в застойный период, в состоянии, близком к макроэкономическому равновесию. Равновесие означает, что в экономике сложились количественные пропорции, обеспечивающие устойчивое сочетание товарных и денежных потоков, стабильность цен, равенство спроса и предложения для всех ресурсов. Разумеется, что такого абсолютного равновесия никогда не бывает, поэтому макроэкономическое равновесие нужно рассматривать как некоторый абстрактный модельный идеал, полезный при исследовании проблемы поведения экономической системы в окрестности точки равновесия. Для изучения этой проблемы воспользуемся более сложной, чем в п. 4.1, математической моделью.

Будем считать, что износ капитала пропорционален не только его объему, но и числу работающих, т. е. вместо уравнения (4.3) будем ис-

пользовать следующее:

$$S = \delta \cdot Xy + \frac{dX}{dt}. \quad (4.17)$$

Тогда аналог уравнения (4.7) запишется как

$$\frac{dx}{dt} = -x \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} + sf(x) - \delta xy. \quad (4.18)$$

В состоянии застоя для численности рабочих уже не будет экспоненциального роста, она либо постоянна, либо меняется в некоторых пределах в большую или меньшую сторону. Будем считать, что в отсутствие фонда потребления ($C = 0$) рабочие уходят с производства и их численность экспоненциально убывает с относительной скоростью $\beta = \text{const} > 0$:

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y.$$

Если же величина C положительна, то k -я часть этого фонда ($k = \text{const}$, $0 < k < 1$) расходуется на воспроизводство рабочей силы и поддержание численности работающих. Таким образом, можно предположить, что численность работающих подчиняется уравнению

$$\frac{dy}{dt} = kC - \beta y$$

или

$$\frac{dy}{dt} = k(1 - s)D - \beta y,$$

которое с учетом равенства (4.4) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = \left[k(1 - s)f(x) - \beta \right] y. \quad (4.19)$$

Тогда уравнение (4.18) запишется как

$$\frac{dx}{dt} = -x \left[k(1 - s)f(x) - \beta \right] + sf(x) - \delta xy. \quad (4.20)$$

Сначала рассмотрим линейную производственную функцию (4.11). В этом случае систему уравнений (4.19), (4.20) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x)x - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$K(x) = k(1-s)mx - \beta, \quad a(x) = sm - K(x), \quad V(x) = \delta x. \quad (4.22)$$

Видим, что полученная система полностью совпала с системой уравнений модели Колмогорова (3.18), при этом условия (3.20)–(3.22) очевидно выполняются. Основываясь на результатах исследования модели Колмогорова (см. п. 3.3), можно сделать некоторые выводы о поведении рассматриваемой экономической системы.

В положительном квадранте система (4.21) имеет единственную точку покоя, при этом ее координаты вычисляются по формулам (3.23) и (3.24):

$$x_* = \frac{\beta}{k(1-s)m}, \quad y_* = \frac{sm}{\delta}. \quad (4.23)$$

Выражения для коэффициентов характеристического уравнения (3.28)

$$\sigma = -\beta, \quad \mu = s\beta m \quad (4.24)$$

свидетельствуют о том, что его корни имеют отрицательные вещественные части при любых допустимых значениях параметров, поэтому точка покоя будет устойчивым узлом, вырожденным устойчивым узлом или устойчивым фокусом, а фазовые траектории будут подобны траекториям, изображенным соответственно на рис. 12, а, 14, а или 16, а. Следовательно, экономическая система будет при $t \rightarrow \infty$ всегда приближаться к своему равновесному состоянию, причем либо без колебаний (как на рис. 11, а или 13, а), либо с затухающими колебаниями (см. рис. 15, а).

Теперь возьмем более близкую к реальности производственную функцию Кобба—Дугласа (4.13). Тогда система уравнений (4.19), (4.20) примет такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -xK(x) + smx^\alpha - V(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= K(x)y, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где

$$K(x) = k(1-s)mx^\alpha - \beta, \quad V(x) = \delta x. \quad (4.26)$$

Точка покоя этой системы имеет координаты

$$x_* = \left(\frac{\beta}{k(1-s)m} \right)^{1/\alpha}, \quad y_* = \frac{sm}{\delta} x_*^{\alpha-1}. \quad (4.27)$$

Нетрудно показать, что и для производственной функции (4.13) точка покоя всегда устойчива и является либо узлом, либо фокусом (см. задачу 4.2).

Рассмотрим теперь влияние параметров k и s на показатели x_* и y_* , считая остальные параметры заданными и неизменными. Из рис. 18 видно, что если параметр k зафиксировать, то при возрастании параметра s капиталовооруженность рабочей силы будет возрастать, а численность работающих будет сначала увеличиваться, а затем, начиная с некоторого значения s , уменьшаться. Если зафиксировать параметр s , то при возрастании параметра k капиталовооруженность падает, а численность работающих растет (см. рис. 19), т. е. показатели x_* и y_* являются противоречивыми: увеличение первого из них ведет к уменьшению второго и наоборот.

Предположим, что мы хотим добиться высокого уровня капиталовооруженности и занятости одновременно. Зададимся вопросом, нельзя ли подобрать параметры k и s так, чтобы для них и капиталовооруженность x_* и численность работающих y_* принимали максимальные значения? Пусть точки (k, s) принадлежат прямоугольнику, изображенному на рис. 20, а. Тогда точки (x_*, y_*) заполняют область, изображенную серым цветом на рис. 20, б. Видно, что одновременно максимальное значение обоих показателей x_* , y_* не достигается ни в одной точке (k, s) . Таким образом, в задаче оптимизации показателей x_* , y_* нужны неко-

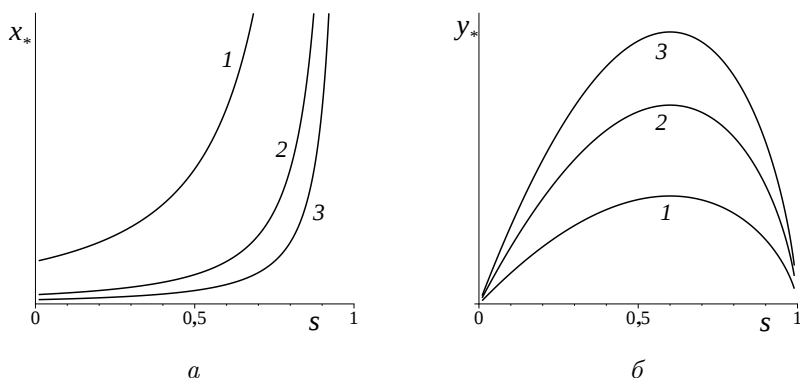


Рис. 18. Графики зависимости от параметра s : а — капиталовооруженности x_* ; б — численности работающих y_* при значении параметра k , равном 0,2 (1); 0,5 (2); 0,8 (3). $\alpha = 0,6$

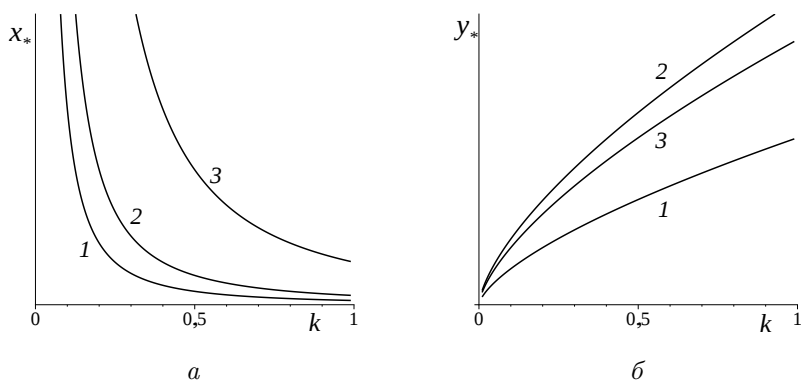


Рис. 19. Графики зависимости от параметра k : a — капиталовооруженности x_* ; b — численности работающих y_* при значении параметра s , равном 0,2 (1); 0,5 (2); 0,8 (3). $\alpha = 0,6$

торые дополнительные критерии или экспертные оценки. Некоторые подходы к решению подобного рода задач обсуждаются в следующем параграфе.

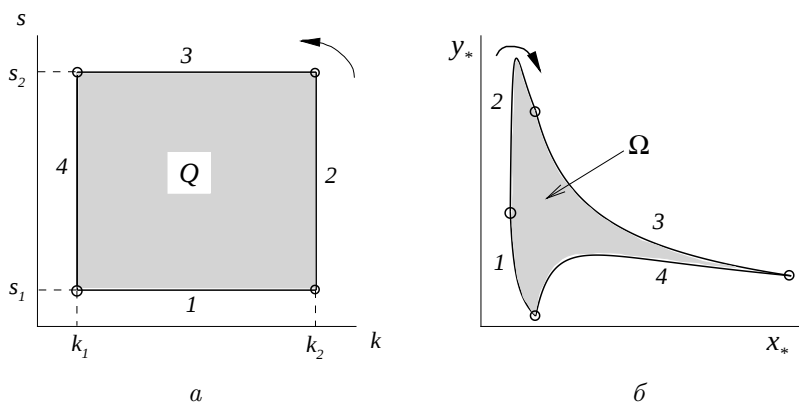


Рис. 20. Области изменения: a — параметров k и s ; b — капиталовооруженности $x_*(k, s)$ и численности работающих $y_*(k, s)$. $\alpha = 0,6$

4.3. Среди всех экономических ресурсов, используемых в производстве товаров и услуг, наиболее важным является труд, который, в отличие от обычных товаров, покупается не для удовлетворения потребителя, а для того, чтобы производить конкретную продукцию. Спрос на рабочую силу в общем виде отражает потребность экономики в определенном количестве работников на каждый данный момент времени. На стороне спроса выступают работодатели, а предложение представлено действующими и потенциальными работниками, чье решение о поступлении на работу зависит от предлагаемой зарплаты.

Пусть $x(t)$ — зарплата и $y(t)$ — число занятых работников в момент времени t . Будем считать, что при отсутствии работников зарплата растет экспоненциально с относительной скоростью α , а при отсутствии зарплаты численность работников экспоненциально убывает с относительной скоростью β , т. е. величины $x(t)$, $y(t)$ описываются в этих экстремальных случаях уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta y. \quad (4.28)$$

Здесь $\alpha = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$.

Далее будем предполагать, что при наличии y работников темп α роста зарплаты уменьшается на величину my , пропорциональную текущей численности работников, где $m = \text{const} > 0$, а при наличии зарплаты x темп β изменения численности работающих возрастает на величину γx ($\gamma = \text{const} > 0$), пропорциональную величине зарплаты. При этих предположениях система уравнений (4.28) модифицируется в следующую:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - my)x, \quad \frac{dy}{dt} = (\gamma x - \beta)y. \quad (4.29)$$

Видим, что полученная система уравнений полностью идентична системе уравнений Лотки—Вольтерра (2.11). Основываясь на выполненном в п. 2.2 анализе, можно сделать некоторые выводы относительно динамики зарплаты и численности работающих. Например, в положительном квадранте существует единственная точка равновесия

$$x_* = \frac{\beta}{\gamma}, \quad y_* = \frac{\alpha}{m}. \quad (4.30)$$

Эта точка имеет тип *центр*, фазовые траектории являются циклами наподобие изображенных на рис. 7, б и 8. Если в начальный момент времени зарплата и численность работающих не совпадают с равновесными значениями (4.30), то функции $x(t)$, $y(t)$ являются периодическими,

при этом их средние по периоду значения совпадают с равновесными (см. задачу 2.3). Интересной особенностью является и то, что в некоторые моменты времени зарплата может быть максимальной, а число работающих меньше максимально возможного и наоборот, зарплата может быть средней, но за нее в этот момент времени работают все потенциально возможные работники.

Таким образом, хотя сущность рассмотренных биологических и экономических явлений различна, построенные модели оказались идентичными. Это свидетельствует о важнейшем свойстве математических моделей — их универсальности, которая является следствием универсальности принципов описания окружающего мира и широко используется при изучении объектов самой разнообразной природы.

ЗАДАЧИ

4.1. Считая параметры m , β , k и δ неизменными, выяснить влияние нормы накопления s на характер приближения экономической системы, описываемой в рамках модели (4.21), (4.22), к своему состоянию равновесия (4.23).

4.2. Показать, что при любых допустимых значениях параметров α , β , k , s , m , δ точка покоя (4.27) является либо устойчивым узлом, либо устойчивым фокусом системы уравнений (4.25).

4.3. Считая параметры α , β , m , δ состояния равновесия (4.27) фиксированными, исследовать характер зависимости от параметров k и s капитала X , конечного продукта D и среднедушевого потребления $c = (1 - k)C/y_*$.

4.4. Если параметры α , β , m , δ считать фиксированными, а точку (k, s) принадлежащей прямоугольнику Q (см. рис. 20, а), то уравнения (4.27) будут описывать отображение

$$x_* = x_*(k, s), \quad y_* = y_*(k, s) \quad (4.31)$$

области Q на область Ω переменных x_* , y_* , показанную на рис. 20, б. Доказать невырожденность этого отображения. Объяснить, почему при отображении (4.31) обход границы области Q против часовой стрелки соответствует обходу границы области Ω по часовой (на рис. 20 соответствующие направления обходов указаны стрелками).

§ 5. Математическое моделирование в задачах поддержки принятия решений

Для многих сложных проблем математические модели формулируются сразу в дискретной форме, например, в виде систем алгебраических уравнений и неравенств для большого числа неизвестных величин. При разработке эффективных алгоритмов численного решения таких задач возникает множество специфичных вопросов, требующих глубокого изучения с привлечением знаний из широкого спектра математических дисциплин.

5.1. Практическая потребность общества в научных основах принятия решений возникла уже давно. В последние годы в связи со значительным усложнением функций управления во всех областях человеческой деятельности задачи о принятии оптимальных решений стали особенно актуальными. В этих сложных задачах имеется как правило несколько противоречивых целей и критериев, поэтому выбор наиболее рационального решения из множества допустимых альтернатив решений становится весьма сложной проблемой [14]¹. Основные методы теории принятия решений излагаются в курсе «Исследование операций» (см., напр., [8]), а здесь на нескольких примерах будут рассмотрены математические модели некоторых простейших ситуаций и обозначены подходы к решению возникающих задач.

Пример 5.1. Перевозчики должны доставить продукцию (товар) со складов I и II с запасами $a_1 = 70$, $a_2 = 50$ потребителям A и B с потребностями $b_1 = 80$ и $b_2 = 60$. За единицу перевезенной продукции со склада I потребителю A перевозчики получают вознаграждение, равное 6, с того же склада, но потребителю B — 8 и т. д. как указано на схеме (см. рис. 21, а). Необходимо определить оптимальный (с точки зрения перевозчиков) *план перевозок* (x_1, x_2, x_3, x_4) , при котором транспортная компания получит наибольшее вознаграждение за свою работу,

¹В книге известных американских авторов R. Keeney и H. Raiffa развивается методология принятия решений, основывающаяся на использовании функций полезности. Рассматривается большое количество приложений описываемых методов к задачам принятия решений, связанных с выбором мест расположения аэропорта и электростанции, деловой деятельностью, медицинской диагностикой и т. п.

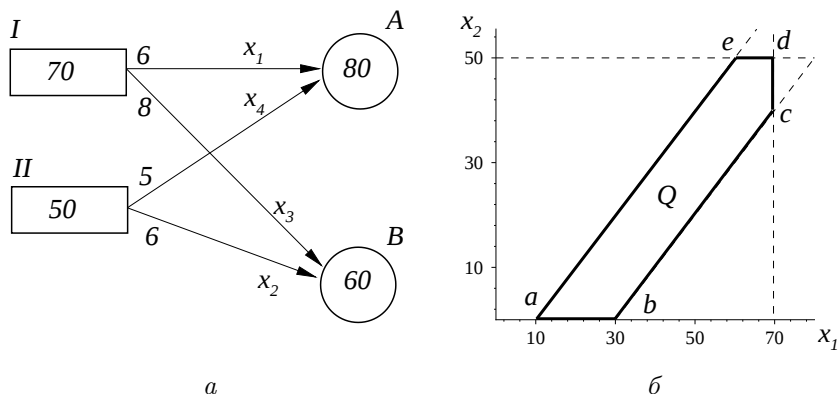


Рис. 21. Задача определения оптимального плана перевозок: *a* — схема перевозок грузов; *б* — область допустимых значений переменных x_1, x_2

т. е. такой план, при котором *целевая* функция

$$f = 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 \quad (5.1)$$

будет принимать наибольшее значение с учетом ограничений

$$x_1 + x_4 \leq 80, \quad x_2 + x_3 \leq 60, \quad (5.2)$$

$$x_1 + x_3 \leq 70, \quad x_2 + x_4 \leq 50, \quad (5.3)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5.4)$$

В приведенных формулах через x_1 обозначено количество единиц товара, перевезенного со склада *I* потребителю *A*, x_2 — со склада *II* потребителю *B* и т. д., как изображено на рис. 21, *a*. Эти переменные должны принимать неотрицательные значения, что отражено в неравенствах (5.4). Неравенства (5.2) означают, что в пункты назначения будет доставлено продукции не больше их потребностей, а неравенства (5.3) — количество вывозимой с каждого склада продукции не превышает ее запаса.

Видим, что полученная задача существенно отличается от рассмотренных ранее: здесь нет дифференциальных уравнений и начальных условий, но появились ограничения на искомые величины в виде систем линейных неравенств. Поэтому алгоритмы решения здесь будут совершенно иными, нежели алгоритмы решения начально-краевых задач для

дифференциальных уравнений. Поставленная задача рассматривается в рамках *линейного программирования* — математической дисциплины, изучающей методы нахождения наибольшего (или наименьшего) значения линейной функции нескольких переменных, которые удовлетворяют конечному числу линейных уравнений и неравенств. Ясно, что метод прямого перебора всех возможных вариантов здесь неприемлем: уж слишком много может быть таких вариантов в реальных ситуациях, когда число поставщиков и потребителей измеряется сотнями.

Для нашего примера мы можем довести решение до конца, не прибегая к использованию общих методов. В самом деле, очевидно, что функция (5.1) может принимать максимальное значение только при условии полного вывоза запасов, поэтому неравенства (5.3) можно сразу заметить на равенства

$$x_1 + x_3 = 70, \quad x_2 + x_4 = 50,$$

из которых следует, что

$$x_3 = 70 - x_1, \quad x_4 = 50 - x_2. \quad (5.5)$$

Поэтому задача (5.1)–(5.4) может быть переписана как

$$f(x_1, x_2) = 810 - 2x_1 + x_2, \quad (5.6)$$

$$0 \leq x_1 \leq 70, \quad 0 \leq x_2 \leq 50, \quad 10 \leq x_1 - x_2 \leq 30. \quad (5.7)$$

Область допустимых значений переменных x_1, x_2 , т. е. всех решений системы неравенств (5.7), показана на рис. 21, б. Поскольку эта область является многоугольником, то линейная функция (5.6) может достигать своего максимального значения только в его вершинах a, b, c, d или e . Непосредственными вычислениями убеждаемся, что это будет вершина a . Таким образом, максимальное вознаграждение $f = 790$ получается при плане перевозок

$$x_1 = 10; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 60, \quad x_4 = 50. \quad (5.8)$$

Ясно, что использованный здесь прием определения наибольшего значения целевой функции путем сравнения ее значений во всех предварительно определенных вершинах многоугольной области Q допустимых значений трудно реализовать для задач со многими складами

и многими потребителями, поскольку в общем случае Q является многогранником, его граница представляет собой довольно сложный объект в многомерном пространстве, координаты вершин которого определить не просто. На следующем примере попытаемся пояснить как можно обобщить предложенный метод решения задачи.

Пример 5.2. Со складов I и II с запасами $a_1 = 70, a_2 = 50$ потребителям A и B с потребностями $b_1 = 80$ и $b_2 = 60$ доставляется некоторая продукция, при этом единица привезенной со склада I продукции продается в пункте A за 8 у. е., а в пункте B — за 5 у. е. Продукция со склада II продается в пункте A за 6 у. е., а в пункте B — за 4 у. е. (см. рис. 22, a). Необходимо определить оптимальный (с точки зрения продавцов) план перевозок (x_1, x_2, x_3, x_4) , при котором будет достигнута максимальная выгода от продаж:

$$f = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \max. \quad (5.9)$$

Область допустимых значений переменных x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) задается в этой задаче следующей системой ограничений:

$$x_1 + x_4 \leq 80, \quad x_2 + x_3 \leq 60, \quad (\text{неполное удовлетворение потребителей}) \quad (5.10)$$

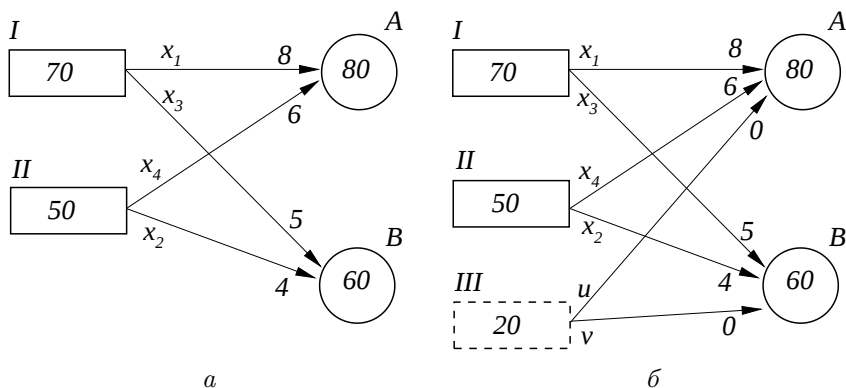


Рис. 22. Схемы постановки задач: a — о получении максимальной выгоды от продаж; b — задачи с фиктивным складом

$$x_1 + x_3 = 70, \quad x_2 + x_4 = 50, \quad (\text{полный вывоз запасов}) \quad (5.11)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{неотрицательность объемов продаж}) \quad (5.12)$$

Решение этой задачи можно получить также, как и в предыдущем примере, переходом с помощью равенств (5.5) к целевой функции

$$f(x_1, x_2) = 650 + 3x_1 - 2x_2, \quad (5.13)$$

которую требуется максимизировать на пятиугольнике, изображенном на рис. 21, б. Вычисляя значения функции (5.13) в вершинах этого многоугольника, убеждаемся, что максимальное значение $f = 780$ достигается в вершине с, что соответствует оптимальному решению

$$x_1 = 70; \quad x_2 = 40; \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 10. \quad (5.14)$$

Приведем теперь алгоритм, которым можно воспользоваться для решения задачи в общем случае большого числа поставщиков и потребителей. Рассмотренные в примерах 5.1, 5.2 задачи называются *открытыми* по той причине, что в них не соблюдается баланс запасов и потребностей: наблюдается дефицит, нехватка запасов. В общем алгоритме вначале происходит переход к *закрытой* задаче, в которой этот баланс соблюдается. В нашей задаче для этого достаточно ввести *фиктивный склад III* с запасом продукции $a_3 = 20$, равным дефициту (на рис. 22, б фиктивный склад изображен прямоугольником с штриховым контуром), и фиктивные объемы u и v вывоза продукции с этого склада. Считается, что продукция с этого склада «продается» в пунктах потребления по цене 0 у. е., поскольку этого товара фактически не существует. Тогда целевая функция будет иметь тот же вид (5.9), а система четырех ограничений (5.10), (5.11) трансформируется в систему пяти уравнений относительно шести неизвестных (см. обозначения рис. 22, б):

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_4 + u = 80, & (\text{полное удовлетворение} \\ x_2 + x_3 + v = 60, & \text{потребителей}) \\ x_1 + x_3 = 70, & (\text{полный} \\ x_2 + x_4 = 50, & \text{вывоз} \\ u + v = 20. & \text{запасов}) \end{array} \quad (5.15)$$

Требуется среди неотрицательных решений системы уравнений (5.15) найти то, которое доставляет максимальное значение линейной функции (5.9).

Если бы у нас была закрытая задача с m складами и n потребителями, то система типа (5.15) содержала бы $(m + n)$ уравнений относительно (mn) неизвестных. Оказывается, что такая система может быть приведена к виду, в котором $(m + n - 1)$ неизвестных выражаются через остальные, причем свободные члены этих выражений неотрицательны. В нашем случае мы можем на основе системы (5.15) написать, например, следующие выражения:

$$\begin{aligned}x_1 &= 10 + x_2 + v, \\x_3 &= 60 - x_2 - v, \\x_4 &= 50 - x_2, \\u &= 20 - v.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Неизвестные x_1, x_3, x_4, u , находящиеся в левой части системы (5.16), называются *базисными*, остальные — x_2 и v — *свободными*. С учетом выражений (5.16) целевую функцию (5.9) также можно представить через свободные переменные:

$$f = 680 + x_2 + 3v.\tag{5.17}$$

Полагая теперь все свободные переменные равными нулю

$$x_2 = 0, \quad v = 0,\tag{5.18}$$

получаем значения базисных переменных

$$x_1 = 10, \quad x_3 = 60, \quad x_4 = 50, \quad u = 20\tag{5.19}$$

и значение $f = 680$. Полученное допустимое решение (5.18), (5.19) служит начальным приближением при поиске оптимального решения с помощью итерационного *симплекс-метода* [28].

Первое итерационное приближение ищется путем перехода к другим базисным переменным с таким расчетом, чтобы значение функции f увеличилось. Из выражения (5.17) следует, что значение f можно увеличить, если увеличить значения свободных переменных x_2 и v . В простейшем варианте симплекс-метода увеличивают значение одной из свободных переменных, а остальные не меняют. Оставим $v = 0$, а значение x_2 увеличим, но так, чтобы значения базисных переменных не стали отрицательными числами. Из выражений (5.16) следует, что значение x_2 может быть увеличено до 50 (но не более, иначе x_4 станет

отрицательным). Итак, возьмем $x_2 = 50$. Тогда получим новое допустимое решение

$$x_1 = 60, \quad x_2 = 50, \quad x_3 = 10, \quad u = 20, \quad x_4 = 0, \quad v = 0. \quad (5.20)$$

Этому решению соответствуют базисные переменные x_1, x_2, x_3, u (положительные компоненты решения (5.20)) и свободные переменные x_4, v (нулевые компоненты решения (5.20)), при этом $f = 730$, т. е. значение целевой функции на решении (5.20) действительно стало больше, чем на начальном приближении (5.18), (5.19).

Для поиска следующего итерационного приближения нужно на основе системы (5.15) выписать выражения новых базисных переменных через новые свободные:

$$\begin{aligned} x_1 &= 60 - x_4 + v, \\ x_2 &= 50 - x_4, \\ x_3 &= 10 + x_4 - v, \\ u &= 20 - v \end{aligned} \quad (5.21)$$

и новое выражение для целевой функции (5.9):

$$f = 730 - x_4 + 3v. \quad (5.22)$$

Из последнего выражения следует, что увеличить значение функции f мы можем за счет увеличения только свободной переменной v . Поэтому, оставив $x_4 = 0$, из системы (5.21) получаем, что максимальным значением v может быть $v = 10$ (не более, иначе x_3 станет отрицательным). В результате получаем новое итерационное приближение

$$x_1 = 70, \quad x_2 = 50, \quad u = 10, \quad v = 10, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0 \quad (5.23)$$

и соответствующее ему значение $f = 760$.

Для новых базисных переменных x_1, x_2, u, v и целевой функции получаем выражения

$$\begin{aligned} x_1 &= 70 - x_3, \\ x_2 &= 50 - x_4, \\ u &= 10 - x_4 + x_3, \\ v &= 10 + x_4 - x_3, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$f = 760 - 3x_3 + 2x_4. \quad (5.25)$$

Видно, что значение целевой функции можно увеличить до $f = 780$, заменив в решении (5.23) $x_4 = 0$ на положительное значение $x_4 = 10$

(больше нельзя, так как при $x_4 > 10$ формулы (5.24) дают отрицательное значение для переменной u). Соответствующее допустимое решение имеет вид

$$x_1 = 70, \quad x_2 = 40, \quad x_4 = 10, \quad v = 20, \quad x_3 = 0, \quad u = 0. \quad (5.26)$$

Перейдем к следующему шагу итерационного процесса. Для новых базисных переменных x_1, x_2, x_4, v имеем выражения

$$\begin{aligned} x_1 &= 70 - x_3, \\ x_2 &= 40 + u - x_3, \\ x_4 &= 10 - u + x_3, \\ v &= 20 - u, \end{aligned} \quad (5.27)$$

а целевая функция запишется через свободные переменные как

$$f = 780 - x_3 - 2u. \quad (5.28)$$

Отличие от предыдущих итерационных шагов заключается в том, что теперь увеличение значений свободных переменных x_3 и u ведет не к увеличению, а к уменьшению значений целевой функции, т. е. максимальное значение f может достигаться только при $x_3 = 0, u = 0$. Тем самым, решение (5.26) окончательное, и на этом шаге итерационный процесс завершается. Значение $v = 20$ фиктивной переменной v означает, что в пункте B будет наблюдаться недопоставка соответствующего объема.

Заметим, что полученное на последнем шаге решение (5.26) совпало с решением (5.14), полученным (благодаря простоте рассматриваемой задачи) непосредственно, в «лоб». Будет ли и в общем случае симплекс-метод сходиться к оптимальному решению, и получим ли мы оптимальное решение за конечное число шагов или это бесконечный итерационный процесс? При решении нашей задачи мы взяли в качестве начального приближения допустимое решение (5.18), (5.19). А если взять другое, придем ли мы опять к тому же оптимальному решению или выйдем на другое? Получим ли результат за разумное время и не произойдет ли «зацикливания» алгоритма с периодическим повторением промежуточных решений без выхода на окончательное, оптимальное решение? А как влияют на сходимость ошибки округления при вычислениях на компьютере? Хватит ли оперативной памяти для размещения всех данных большой задачи? Таким образом, на рассмотренном примере мы видим, что при разработке алгоритмов численного решения

сложных задач возникает множество специфичных вопросов и проблем, требующих глубокого изучения. Эти и подобные проблемы рассматриваются в обязательных курсах «Вычислительные методы линейной алгебры», «Методы вычислений», «Исследование операций» и др.

5.2. В рассмотренных задачах имелась одна целевая функция, которую требовалось максимизировать на допустимом множестве решений. На практике очень часто возникают *многокритериальные задачи*: имеется вектор-функция целей (критериев, показателей) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ и требуется выбрать наиболее выгодный вариант решения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_l)$ из области Q допустимых решений, на котором все критерии достигают своего максимального значения. В большинстве случаев невозможно указать решение, приводящее к оптимальным значениям всех критериев одновременно, так как они зачастую соответствуют достижению противоречивых целей. Поэтому приходится принимать некоторое компромиссное решение и первое, что нужно для этого сделать, — попытаться сократить множество исходных вариантов, исключив из анализа заведомо плохие варианты решений. Рассмотрим один из подходов к решению этой проблемы, основанный на *принципе Парето*¹.

Предположим, что сделан некоторый выбор $\mathbf{x}^* \in Q$ и существует другой выбор $\hat{\mathbf{x}} \in Q$ такой, что для всех критериев f_i имеют место неравенства

$$f_i(\hat{\mathbf{x}}) \geq f_i(\mathbf{x}^*), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.29)$$

В этом случае говорят, что решение $\hat{\mathbf{x}}$ безусловно лучше, чем решение $\mathbf{x}^*$, а решение $\mathbf{x}^*$ безусловно (или заведомо) хуже, чем решение $\hat{\mathbf{x}}$. Все безусловно плохие решения следует сразу исключить из рассмотрения. В результате этой *безусловной оптимизации* останутся только те векторы $\mathbf{x}^*$, для которых не существует такого $\hat{\mathbf{x}}$, что для всех критериев удовлетворяются неравенства (5.29). Таким образом, какие бы два из оставшихся векторов мы не сравнили, любой из них будет лучше другого хотя бы по одному критерию.

Множество P_Q всех оставшихся векторов называется *множеством Парето* и в качестве компромиссного решения следует брать какой-либо

¹Vilfredo Pareto (1848–1923) — итальянский экономист и социолог, представитель математической школы в экономике. Согласно принципу Парето, чтобы сделать процесс работы более эффективным, необходимо выделять области по их значимости или важности, устраняя те причины, которые вызывают наибольшее количество проблем (несоответствий).

вектор $\mathbf{x}$ из множества P_Q . Это правило и называется принципом Парето. Отметим, что принцип Парето не выделяет единственного решения, он только сужает множество альтернатив. Окончательный выбор остается за лицом, принимающим решение.

Пример 5.3. Перевозчики должны доставить продукцию со складов I и II с запасами $a_1 = 70$, $a_2 = 50$ потребителям A и B с потребностями $b_1 = 80$ и $b_2 = 60$, а продавцы должны продать всю привезенную продукцию. За единицу перевезенной продукции перевозчики получают вознаграждение, указанное на рис. 21, a , а продавцы — доход, указанный на рис. 22, a . Цель перевозчиков — максимизировать функцию (5.1), продавцов — (5.9). Предположим, что лицо, принимающее решение, должно сделать такой выбор объемов перевозок, чтобы по возможности максимально удовлетворить цели перевозчиков и продавцов.

Рассматриваемая задача является двухкритериальной. Обозначим критерии (5.1) и (5.9) через f_1 и f_2 , соответственно. С учетом равенств (5.6), (5.13) мы можем написать, что

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 810 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 650 + 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (5.30)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in Q$, Q — область допустимых решений, определяемая системой ограничений (5.7) и изображенная на рис. 21, b .

Уравнения (5.30) определяют отображение области допустимых решений на *множество достижимости* Ω в плоскости критериев (см. рис. 23): каждому решению $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in Q$ соответствует своя точка $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \Omega$. В частности, вершины многоугольника Q переходят при этом отображении в вершины многоугольника Ω (см. табл. 1).

Таблица 1

Соответствие вершин многоугольников Q и Ω при отображении (5.30)

Вершины области Q	x_1	x_2	Вершины множества Ω	f_1	f_2
a	10	0	a'	790	680
b	30	0	b'	750	740
c	70	40	c'	710	780
d	70	50	d'	720	760
e	60	50	e'	740	730

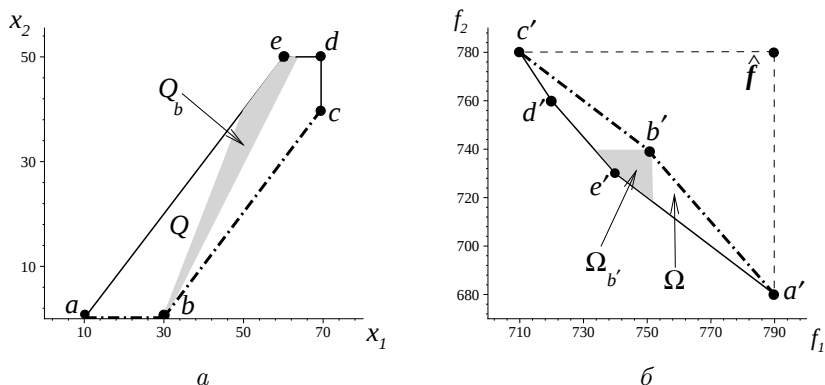


Рис. 23. Многокритериальная задача о перевозках: a — множество Парето (линия abc) в области Q допустимых решений; b — его образ (линия $a'b'c'$) при отображении (5.30) в множестве достижимости Ω

Из этой таблицы видно, что если лицо, принимающее решение, выбирает вариант a , то перевозчики получают наибольшую выгоду, а продавцы — наименьшую, а при выборе варианта c — наоборот. Таким образом, имеет место противоречивость целей (5.30), вследствие чего лицо, принимающее решение, оказывается перед необходимостью искать компромисс, и одним из путей, облегчающих поиск наиболее приемлемого для всех участников решения, является построение множества Парето.

Возьмем, например, решение $b \in Q$ и определим все заведомо худшие, чем b , решения $x \in Q$. Для этого через точку $b' = (750, 740) \in \Omega$ проведем прямые $f_1 = 750$ и $f_2 = 740$, которые выделяют некоторое подмножество $\Omega_{b'}$ (изображено серым цветом на рис. 23, б) в множестве достижимости. Согласно уравнениям (5.30) прообразами этих прямых в плоскости $x_1 O x_2$ будут прямые, заданные уравнениями

$$-2x_1 + x_2 + 60 = 0, \quad 3x_1 - 2x_2 - 90 = 0.$$

Эти прямые пересекают в области Q подмножество решений Q_b (оно отмечено серым цветом на рис. 23, а), при этом образом множества Q_b при отображении (5.30) будет множество $\Omega_{b'}$. Поскольку решения $x \in Q_b$ отображаются в точки $f \in \Omega_{b'}$, имеющие координаты $f_1 \leq 750$ и $f_2 \leq 740$, то все эти решения являются безусловно не лучшими, по сравнению с решением b , и их можно исключить из дальнейшего рассмотрения, т. е. от множества Q_b оставить для дальнейшего анализа

единственную точку b . Отметим, что точка e , попавшая в Q_b , тоже относится к плохим решениям, в чем можно было убедиться и непосредственно, проанализировав данные табл. 1.

Выполнив подобный анализ для всех других решений из области Q , можно убедиться, что множество Парето для данной задачи представляет собой часть abc границы области допустимых решений Q (штрих-пунктирная линия на рис. 23, a), т. е.

$$P_Q = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in [10, 70], \quad x_2 = \begin{cases} 0, & x_1 \in [10, 30], \\ x_1 - 30, & x_1 \in [30, 70] \end{cases} \right\}. \quad (5.31)$$

При отображении (5.30) множество Парето преобразуется в часть $a'b'c'$ (штрих-пунктирная линия на рис. 23, b) границы области достижимости. Видно, что если при переборе решений из множества Парето один из показателей растет, то другой непременно уменьшается.

Пример 5.4. В предыдущем параграфе была рассмотрена приближенная экономическая модель (4.25), описывающая динамику капиталовооруженности и численности работающих. Если параметры α , β , m , δ этой модели зафиксировать, то в состоянии равновесия капиталовооруженность x_* и численность работающих y_* будут определяться двумя свободными параметрами k и s в соответствии с формулами (4.27):

$$\begin{aligned} x_* &= x_*(k, s) = \left(\frac{\beta}{k(1-s)m} \right)^{1/\alpha}, \\ y_* &= y_*(k, s) = \frac{sm}{\delta} \left(\frac{\beta}{k(1-s)m} \right)^{(\alpha-1)/\alpha}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Предположим, что лицо, принимающее решение, заинтересовано в максимальной капиталовооруженности производства и наибольшей занятости, а областью Q его допустимых решений является множество параметров (k, s) таких, что $0 < k_1 \leq k \leq k_2 < 1$, $0 < s_1 \leq s \leq s_2 < 1$, т. е. прямоугольник Q , изображенный на рис. 20, a . Таким образом, получается проблема с двумя целями

$$x_*(k, s) \rightarrow \max, \quad y_*(k, s) \rightarrow \max, \quad (5.33)$$

при этом каждому решению $(k, s) \in Q$ будет соответствовать своя точка (x_*, y_*) из области достижимости Ω , изображенной на рис. 20, b и являющейся образом области допустимых решений Q при отображении (5.32).

Как видно из рис. 24, критерий x_* принимает максимальное значение при выборе решения $d = (k_1, s_2)$, но численность работающих при этом будет очень мала. С другой стороны, наибольшая занятость будет при выборе решения e , соответствующего параметрам $k = k_2, s = \alpha$ (см. задачу 5.2), однако при таком выборе оказывается крайне низкой капиталовооруженность производства. Таким образом, цели (5.33) являются противоречивыми и лицо, принимающее решение, должно пойти на некоторое компромиссное решение — наиболее приемлемое с точки зрения достижения целей (5.33).

Из рис. 24 видно также, что многие варианты из области допустимых решений Q являются заведомо плохими, поэтому их можно сразу отбросить и компромиссное решение искать в множестве Парето. Выясним, как оно выглядит. Выберем, например, решение $c = (k_2, s_2)$. В области достижимости ему соответствует граничная точка c' . Проведем через точку c' прямые, параллельные координатным осям. Тогда в области достижимости получится подмножество $\Omega_{c'}$ (отмеченное серым цветом на рис. 24, б), состоящее из точек, у которых обе координаты не превосходят соответствующих координат точки c' . Согласно формулам (5.32), проведенные прямые являются образами кривых

$$k(1-s) - k_2(1-s_2) = 0, \quad k(1-s) - k_2(1-s_2) \left(\frac{s}{s_2} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} = 0, \quad (5.34)$$

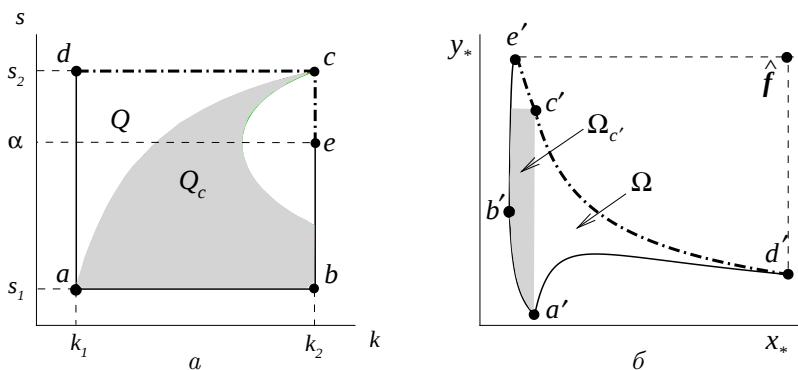


Рис. 24. Многокритериальная задача (4.25), (5.33): a — множество Парето (линия dce) в области Q допустимых решений; b — его образ (линия $d'e'$) при отображении (5.30) в множестве достижимости Ω ;
 $\alpha = 0,6$; $k_1 = s_1 = 0,2$; $k_2 = s_2 = 0,8$

которые ограничивают подмножество $Q_c \subset Q$ (изображено серым цветом на рис. 24, а). Поскольку при отображении (5.32) образ каждой точки из Q_c лежит в $\Omega_{c'}$, то все эти точки являются безусловно не лучшими, чем решение c , поэтому их можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Легко понять, что в результате такого отбора останутся только те решения из Q , которые отображаются на дугу $d'c'e'$ границы области достижимости. Оставшиеся решения и составят множество Парето — часть dce границы области допустимых решений (штрих-пунктирная линия на рис. 24, а).

5.3. После нахождения множества Парето встает вопрос о выборе единственного решения из этого множества, наиболее приемлемого для многоцелевой задачи

$$f_i(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.35)$$

Поскольку в множестве Парето не существует безусловно лучших решений, то найти вектор $\mathbf{x}$, на котором все критерии принимают максимальные значения, не удастся. Поэтому при исследовании многокритериальных задач указывают некоторые условия согласования критериев. В частности, довольно часто используется *метод скаляризации* — сведение многокритериальной задачи с вектор-функцией целей $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ к задаче с одним, единым скалярным критерием $F(\mathbf{x})$.

Укажем некоторые подходы к скаляризации критериев. *Линейная свертка* критериев определяется формулой

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \quad (5.36)$$

где C_i — некоторые положительные числа, тем или иным способом нормированные, например,

$$\sum_{i=1}^n C_i = 1. \quad (5.37)$$

Коэффициенты C_i отражают ранжирование целей и предлагаются экспертами.

Если функции f_i и ограничения, наложенные на выбор компонент вектора $\mathbf{x}$, линейны:

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^l d_{si} x_s, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.38)$$

$$\sum_{s=1}^l \alpha_{sj} x_s \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.39)$$

то одноцелевая задача с критерием (5.36) сводится к задаче линейного программирования: определить максимум линейной формы

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^l C_i d_{si} x_s \quad (5.40)$$

при линейных ограничениях (5.39). Для решения полученной задачи можно использовать, например, рассмотренный выше симплекс-метод.

Очень часто в задачах планирования и проектирования задается некоторая система нормативов $f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*$, определяемая в результате экспертного опроса. Например, параметры $\mathbf{x}$ будущей конструкции должны быть такими, чтобы функции $f_i(\mathbf{x})$ принимали максимальные значения и удовлетворяли дополнительным условиям

$$f_i(\mathbf{x}) \geq f_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.41)$$

В этих случаях единую целевую функцию удобно представить в виде

$$F(\mathbf{x}) = \min_i \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_i^*} \rightarrow \max \quad (5.42)$$

и искать вектор $\mathbf{x}$, который обеспечивает максимальное значение $F(\mathbf{x})$. Согласно формуле (5.42) при данном значении вектора $\mathbf{x}$ величина $F(\mathbf{x})$ дает значение наихудшего из показателей $f_i(\mathbf{x})$. Значит, поиск максимального значения целевой функции F означает выбор такой системы конструктивных параметров $\mathbf{x}$, которая максимизирует отношение i -го реально достигнутого значения критерия к его контрольному значению.

При условиях (5.38), (5.39) задача (5.42) также сводится к задаче линейного программирования. В самом деле, если ввести новую переменную

$$V = \min_i \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_i^*}$$

и к ограничениям (5.39) добавить дополнительные

$$\sum_{s=1}^l d_{si} x_s \geq V f_i^*, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.43)$$

то получается следующая задача линейного программирования: определить максимум по $\mathbf{x}$ скаляра V , удовлетворяющего ограничениям (5.39), (5.43).

В заключение рассмотрим одноцелевую задачу, которая получается из многоцелевой (5.35) с помощью некоторой метрики ρ в n -мерном пространстве целевых функций, например, евклидовой метрики. Предположим, что в каждой i -й однокритериальной задаче (5.35) найден вектор $\mathbf{x}_i$, доставляющий максимальное значение i -му критерию:

$$f_i(\mathbf{x}_i) = \hat{f}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.44)$$

Совокупность скалярных величин $\hat{f}_i$ определяет в пространстве критериев точку $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n)$, которую назовем точкой «абсолютного максимума». Если векторы $\mathbf{x}_i$ различны, то точка $\hat{\mathbf{f}}$ является недостижимой в пространстве критериев, т. е. не принадлежит множеству достижимости (см. рис. 23, б и 24, б, где $\hat{\mathbf{f}} \notin \Omega$). Скалярная величина

$$\rho(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n (f_i(\mathbf{x}) - \hat{f}_i)^2 \right)^{1/2} \quad (5.45)$$

определяет в пространстве критериев евклидово расстояние от точки $\mathbf{f}$, соответствующей данному вектору $\mathbf{x}$, до точки «абсолютного максимума» $\hat{\mathbf{f}}$. Введение метрики в пространстве целевых критериев позволяет в качестве нового скалярного критерия $F(\mathbf{x})$ принять функцию $\rho(\mathbf{x})$, определенную соотношением (5.45). Ее минимизация дает полезную информацию о возможности достижения «абсолютного максимума».

Пример 5.5. Рассмотрим применение метода скаляризации к задаче из примера 5.3. На множестве Парето (5.31) целевые функции (5.30) принимают следующий вид:

$$f_1 \Big|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} 810 - 2x_1, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ 780 - x_1, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \max, \quad (5.46)$$

$$f_2 \Big|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} 650 + 3x_1, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ 710 + x_1, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \max. \quad (5.47)$$

Следовательно, линейная свертка (5.36), (5.37) определяется формулой

$$F \Big|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} 650 + 160C + (3 - 5C)x_1, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ 710 + 70C + (1 - 2C)x_1, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \max \quad (5.48)$$

и выбор оптимального решения будет зависеть от заданного экспертами значения весового параметра C , $0 < C < 1$. Отметим, что в некоторых случаях решение не является единственным (см. задачу 5.3).

При задании контрольных показателей f_1^* , f_2^* получаем единую целевую функцию вида (5.42):

$$F|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \min \left\{ \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_1^*}, \frac{f_2(\mathbf{x})}{f_2^*} \right\} \rightarrow \max$$

или

$$F|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{810 - 2x_1}{f_1^*}, \frac{650 + 3x_1}{f_2^*} \right\}, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ \min \left\{ \frac{780 - x_1}{f_1^*}, \frac{710 + x_1}{f_2^*} \right\}, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \max. \quad (5.49)$$

В этой однокритериальной задаче решений, удовлетворяющих условиям (5.41), может и не быть (завышенные контрольные показатели) (см. задачу 5.4).

Критерий, основанный на минимизации евклидова расстояния (5.45) до недостижимой точки «абсолютного максимума» $\hat{\mathbf{f}} = (790, 780)$ (см. рис. 23, б), записывается в нашем случае следующим образом:

$$F|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \sqrt{(f_1(\mathbf{x}) - 790)^2 + (f_2(\mathbf{x}) - 780)^2} \rightarrow \min$$

или

$$F|_{\mathbf{x} \in P_Q} = \begin{cases} \sqrt{(20 - 2x_1)^2 + (3x_1 - 130)^2}, & 10 \leq x_1 \leq 30, \\ \sqrt{(10 + x_1)^2 + (x_1 - 70)^2}, & 30 \leq x_1 \leq 70 \end{cases} \rightarrow \min. \quad (5.50)$$

Этот критерий устанавливает в рассматриваемой задаче единственное оптимальное решение (см. задачу 5.5).

В этом параграфе мы коснулись лишь одного алгоритма решения задач с большими объемами перерабатываемой информации и указали некоторые трудности, возникающие при конструировании алгоритмов в любой предметной области. Детальное исследование проблем построения эффективных алгоритмов будет выполнено позднее в соответствующих университетских курсах. Очевидно, что этот этап моделирования

является не менее важным и требует не меньших усилий и знаний, чем этап построения математических моделей, поскольку используемые алгоритмы решения сложных задач еще далеки от совершенства. Научные изыскания по ним продолжаются в настоящее время с неослабевающей интенсивностью.

З А Д А Ч И

5.1. Найти ранг матрицы системы уравнений (5.15), с помощью теоремы Кронекера—Капелли показать совместность этой системы и найти ее решение методом Гаусса.

5.2. Показать, что в примере 5.4 наибольшая численность работающих получается при выборе решения (k_2, α) (точка e на рис. 24, a), где α — параметр производственной функции Кобба—Дугласа (4.13), при этом предполагается, что $s_1 < \alpha < s_2$.

5.3. Найти оптимальное решение двухцелевой задачи (5.46), (5.47) при переходе к единому критерию (5.48) для следующих значений параметра C :

- | | |
|------------------|-----------------|
| а) $C = 0, 4$; | г) $C = 0, 6$; |
| б) $C = 0, 5$; | д) $C = 0, 7$. |
| в) $C = 0, 55$; | |

5.4. Найти оптимальное решение двухцелевой задачи (5.46), (5.47) при переходе к единому критерию (5.49) для следующих значений контрольных показателей f_1^*, f_2^* :

- а) $f_1^* = 740, f_2^* = 740$;
 б) $f_1^* = 745, f_2^* = 745$;
 в) $f_1^* = 750, f_2^* = 750$.

5.5. Найти оптимальное решение двухцелевой задачи (5.46), (5.47) при переходе к единому критерию (5.50).

Глава 2

1.1. У к а з а н и е. Показать, что при

$$g = \frac{\varepsilon^2}{4\gamma}$$

решение задачи (1.7) задается формулой

$$x(t) = \frac{1}{\gamma t + \frac{1}{x_0 - x_*}} + x_*, \quad x_* = \frac{\varepsilon}{2\gamma},$$

поэтому численность популяции будет монотонно уменьшаться, приближаясь к уровню $x = x_*$.

Если

$$g < \frac{\varepsilon^2}{4\gamma},$$

то решение описывается формулой

$$x(t) = \frac{x_1(x_0 - x_2) - x_2(x_0 - x_1)e^{\gamma(x_2 - x_1)t}}{x_0 - x_2 - (x_0 - x_1)e^{\gamma(x_2 - x_1)t}},$$

где

$$x_1 = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4\gamma g}}{2\gamma}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\gamma g}}{2\gamma}.$$

Следовательно, популяция также сохранится, причем она будет стабилизироваться на более высоком уровне $x = x_2 > x_*$, чем в первом случае.

И наконец, рассмотрим случай

$$g > \frac{\varepsilon^2}{4\gamma}$$

и показать, что теперь задача имеет решение

$$x(t) = \frac{1}{2\gamma} \left[\varepsilon + p \operatorname{tg} \left(-\frac{p}{2} t + C \right) \right],$$

где

$$p = \sqrt{4\gamma g - \varepsilon^2}, \quad C = \operatorname{arctg} \left(\frac{2x_0\gamma - \varepsilon}{p} \right).$$

Видно, что в этом случае вся популяция будет уничтожена к некоторому моменту времени. Найти этот момент времени.

1.2. У к а з а н и е. Показать, что при $g = \delta x$ решение задачи (1.7) задается формулой

$$x(t) = \begin{cases} \frac{x_0}{1 + \gamma x_0 t} & \text{при } \delta = \varepsilon, \\ \frac{x_0 x_* e^{(\varepsilon - \delta)t}}{x_* + x_0 (e^{(\varepsilon - \delta)t} - 1)} & \text{при } \delta \neq \varepsilon, \end{cases}$$

где $x_* = (\varepsilon - \delta)/\gamma$. Следовательно, при $\delta \geq \varepsilon$ численность популяции с ростом времени стремится к нулю, а при $\delta < \varepsilon$ стабилизируется на более низком уровне x_* , чем при отсутствии вылова.

2.1. У к а з а н и е. Качественный анализ решений системы уравнений (2.27) проводится аналогично анализу, выполненному в п. 2.1 для решений системы (2.2). Вначале показываем, что функции $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ положительны и ограничены. Затем, используя первый интеграл системы (2.27)

$$\frac{\xi^p}{\eta} e^{-(p-1)\tau} = C,$$

получаем, что $\eta(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. После этого доказываем, что $\xi(\tau)$ неограниченно приближается снизу к единице при $\tau \rightarrow \infty$.

2.2. У к а з а н и е. Исследуем амплитуду колебаний численности жертв. В начальных данных (2.15) возьмем значение $\xi_0 = 1$ и произвольное положительное значение $\eta_0 < 1$. Согласно формуле (2.17), фазовая траектория, отвечающая этим начальным данным, будет определяться уравнением

$$\left(\frac{\xi}{e^\xi} \right)^p \frac{\eta}{e^\eta} = \frac{1}{e^p} \frac{\eta_0}{e^{\eta_0}}.$$

Амплитуда колебаний a_1 функции $\xi(\tau)$ определяется формулой (2.20) и будет равна разности значений функции $\xi(\tau)$ в самой правой и самой левой точках траектории (см. гл. 2, рис. 7, б), ордината η которых равна единице. Таким образом, величины $\xi_{\max}$ и $\xi_{\min}$ — корни уравнения

$$\left(\frac{\xi}{e^\xi} \right)^p \frac{1}{e} = \frac{1}{e^p} \frac{\eta_0}{e^{\eta_0}},$$

или

$$f(\xi) = h(\eta_0, p), \quad (28)$$

где

$$f(\xi) = \frac{\xi}{e^\xi}, \quad h = \left(\frac{\eta_0}{e^{\eta_0+p-1}} \right)^{1/p}.$$

График функции f изображен на рис. 28.

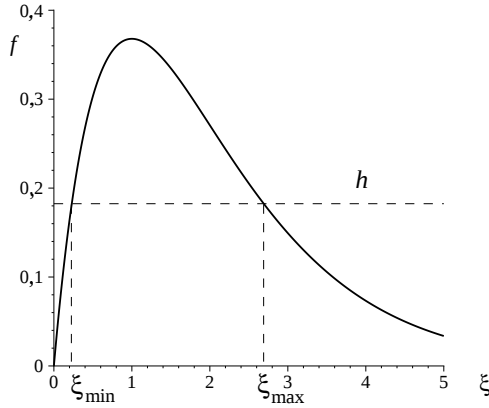


Рис. 28. График функции $f(\xi)$

Далее доказать следующие утверждения:

— для любых $p > 0$ и $0 < \eta_0 < 1$ выполняется неравенство $h(\eta_0, p) < 1/e$, поэтому уравнение (28) всегда имеет два решения $\xi_{\min}$, $\xi_{\max}$, при этом $0 < \xi_{\min} < 1 < \xi_{\max}$;

— для каждого фиксированного $p > 0$ выполняется неравенство $\partial h / \partial \eta_0 > 0$, поэтому с ростом начальной координаты η_0 величина h растет, а амплитуда колебаний $a_1 = \xi_{\max} - \xi_{\min}$ уменьшается (см. гл. 2, рисунки 7, б и 8);

— для каждого фиксированного η_0 ($0 < \eta_0 < 1$) выполняется неравенство $\partial h / \partial p > 0$, поэтому с ростом параметра p величина h растет, а амплитуда колебаний a_1 уменьшается (ср. рисунки 7, б и 8 из гл. 2).

Аналогичным образом проведите анализ амплитуд колебаний численности хищников.

2.3. Р е ш е н и е. Пусть T — период решения системы уравнений (2.13) с некоторыми начальными данными (2.15). Записав уравнения (2.13) в виде

$$\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\tau} = 1 - \eta, \quad \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{d\tau} = p(\xi - 1)$$

и проинтегрировав последние уравнения по отрезку $[0, T]$, получаем равенства

$$\ln \xi(T) - \ln \xi_0 = \int_0^T (1 - \eta(\tau)) d\tau = T - \int_0^T \eta(\tau) d\tau,$$

$$\ln \eta(T) - \ln \eta_0 = p \int_0^T (\xi(\tau) - 1) d\tau = p \int_0^T \xi(\tau) d\tau - pT.$$

В силу периодичности решения получаем, что $\xi(T) = \xi_0$ и $\eta(T) = \eta_0$. Поэтому

$$\frac{1}{T} \int_0^T \eta(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(\tau) d\tau = 1 = \xi_* = \eta_*,$$

т. е. действительно, для любых решений, независимо от начальных данных осредненные по периоду значения численностей популяций равны значениям численностей в состоянии равновесия.

$$\begin{aligned} \mathbf{2.4.} \quad \frac{d\xi}{d\tau} &= [1 - q\xi - (1 - q)\eta]\xi, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= p(\xi - 1)\eta. \end{aligned} \tag{29}$$

3.1. Р е ш е н и е. Система уравнений (3.9), (3.11) имеет две точки покоя: $\mathbf{x}_* = (1, 1)$ и $\mathbf{x}_* = (0, 0)$. Первая точка была исследована на устойчивость в п. 3.2. Поэтому остается рассмотреть только вторую точку.

Линеаризуя уравнения (3.9) в окрестности точки покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$, получаем систему линейных уравнений вида (3.48) с матрицей Якоби

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_*) = \left(\begin{array}{cc} 1 - y & -x \\ py & p(x - 1) \end{array} \right) \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -p \end{array} \right).$$

Собственные значения этой матрицы вещественны и различны

$$\lambda_1 = -p < 0, \quad \lambda_2 = 1 > 0,$$

им соответствуют линейно независимые собственные векторы

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

общее решение линейной задачи описывается формулой (3.32), из которой следуют следующие выражения для компонент решения, удовлетворяющего начальным данным (3.45):

$$x(t) = x_0 e^t, \quad y(t) = y_0 e^{-pt}, \quad (30)$$

при этом биологическое содержание имеют решения, соответствующие неотрицательным значениям $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$.

Поскольку одно из собственных значений положительно, то точка покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ будет неустойчивым решением линейной системы: если $x_0 > 0$, то $x(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. решение с ростом времени удаляется от точки покоя. Согласно теореме 3.1, эта точка покоя будет и неустойчивым решением нелинейной системы (3.9), (3.11).

Если из уравнений (30) исключить время, то получим первый интеграл линейной системы

$$\Psi(x, y) = C = \text{const.}$$

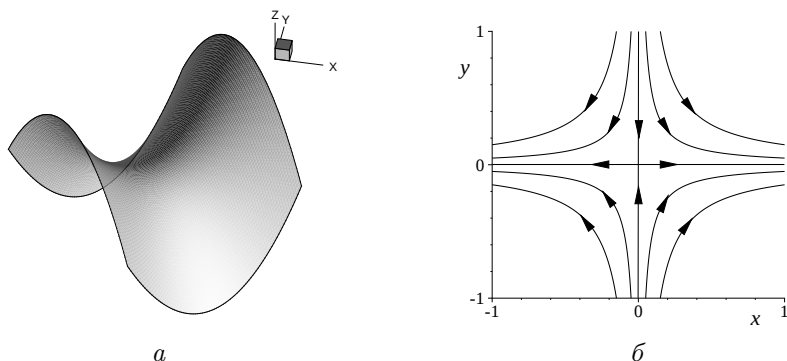


Рис. 29. Точка покоя типа «седло»: a — график поверхности (31); b — фазовые траектории, соответствующие решениям (30) при $p = 1$

Например, при $p = 1$ получаем, что

$$\Psi(x, y) = xy. \quad (31)$$

Поскольку поверхность $z = \Psi(x, y)$ (см. рис. 29, а) является седлообразной, то рассматриваемая точка покоя называется *седлом*. Линии уровня этой поверхности, являющиеся при $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ гиперболами (см. рис. 29, б), совпадают с фазовыми траекториями, соответствующими решениям (30).

3.2. У к а з а н и е. Показать, что система уравнений (3.18) кроме точки покоя (3.23), (3.24) имеет еще две: $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ и $\mathbf{x}_* = (x_*, 0)$, где

$$x_* = a^{-1}(0) > 0, \quad \left(a(x_*) = 0 \right).$$

В окрестности точки покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ первое приближение системы (3.18) имеет вид уравнения (3.48) с матрицей Якоби

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a(0) & 0 \\ 0 & K(0) \end{pmatrix}.$$

Убедитесь в том, что собственные значения этой матрицы имеют противоположные знаки и точка покоя есть седло как для системы линейных уравнений (3.48), так и для нелинейных (3.18).

Матрица Якоби первого приближения в точке покоя $\mathbf{x}_* = (x_*, 0)$ запишется как

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a'(x_*)x_* & -V(x_*) \\ 0 & K(x_*) \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения

$$\lambda_1 = a'(x_*)x_* < 0, \quad \lambda_2 = K(x_*)$$

могут быть одного знака или иметь противоположные знаки. Если $K(x_*) < 0$, то точка покоя является для нелинейной системы (3.18) асимптотически устойчивым узлом, при $K(x_*) > 0$ — седлом, при $K(x_*) = 0$ линейное приближение не дает ответа на вопрос о типе этой точки покоя.

3.3. У к а з а н и е. Показать, что система уравнений (3.50) имеет три точки покоя: $\mathbf{x}_* = (0, 0)$, $\mathbf{x}_* = (1/q, 0)$ и $\mathbf{x}_* = (1, 1)$.

Покажите, что первые две точки имеют тип седло, а третья является асимптотически устойчивым узлом при условии

$$p \leq \frac{q^2}{4(1-q)},$$

а при нарушении этого условия — устойчивым фокусом.

З а м е ч а н и е. Система уравнений (3.50) является частным случаем модели Колмогорова (3.18), если в последней взять следующие коэффициенты:

$$a(x) = 1 - qx, \quad V(x) = (1 - q)x, \quad K(x) = p(x - 1).$$

При этом, очевидно, требования (3.20)–(3.22) удовлетворяются.

3.4. У к а з а н и е. Показать, что система уравнений (3.52) имеет три точки покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$, $\mathbf{x}_* = (1, 0)$ и $\mathbf{x}_* = (0, 1)$. Показать, что точка покоя $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ является неустойчивым узлом, точка $\mathbf{x}_* = (1, 0)$ — асимптотически устойчивым узлом при $p > 1$ и имеет тип седло, если $0 < p < 1$, точка $\mathbf{x}_* = (0, 1)$ — наоборот: при $0 < p < 1$ — асимптотически устойчивый узел, при $p > 1$ — седло.

4.1. У к а з а н и е. Показать, что согласно выражениям (4.24) дискриминант d характеристического уравнения (3.28) первого приближения системы (4.21) вычисляется по формуле

$$d = \beta(\beta - 4sm).$$

Используя эту формулу, показать, что при $\beta \geq 4m$ точка покоя (4.23) будет устойчивым узлом при любой норме накопления $0 < s < 1$, а при $\beta < 4m$ точка покоя будет устойчивым узлом для $s \leq \beta/(4m)$ и устойчивым фокусом при $s > \beta/(4m)$. Таким образом, при условии $\beta < 4m$ принятие достаточно большой нормы накопления приводит к колебательному характеру установления стационарного состояния экономики.

4.2. У к а з а н и е. Показать, что в окрестности точки покоя (4.27) матрица $\mathcal{A}$ первого приближения (3.26) системы уравнений (4.25) имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sigma & -\delta x_* \\ \frac{ks(1-s)m^2\alpha}{\delta} x_*^{2\alpha-2} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sigma = -\alpha\beta + sm(\alpha - 1)x_*^{\alpha-1}$, и характеристическое уравнение записывается как

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \alpha\beta\delta y_* = 0.$$

Далее показать, что $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, 2$). Тогда из теоремы 3.1 будет следовать, что при $t \rightarrow \infty$ решение нелинейной системы уравнений (4.25) неограниченно приближается к точке покоя.

4.3. У к а з а н и е. Показать, что исследуемые показатели вычисляются по формулам:

$$X = \frac{\beta}{\delta} \frac{s}{k(1-s)}; \quad D = \frac{sm^2}{\delta} \left(\frac{\beta}{k(1-s)m} \right)^{2-1/\alpha}; \quad c = \beta \left(\frac{1}{k} - 1 \right).$$

4.4. У к а з а н и е. Показать, что для отображения (4.31) справедливости равенства:

$$\frac{\partial x_*(k, s)}{\partial s} = \frac{\beta}{\alpha km(1-s)^2} x_*^{1-\alpha}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial y_*(k, s)}{\partial s} = \frac{m}{\delta} x_*^{\alpha-1} + \frac{ms}{\delta} (\alpha - 1) x_*^{\alpha-2} \frac{\partial x_*(k, s)}{\partial s}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial x_*(k, s)}{\partial k} = -\frac{\beta}{\alpha k^2 m(1-s)} x_*^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial y_*(k, s)}{\partial k} = \frac{ms}{\delta} (\alpha - 1) x_*^{\alpha-2} \frac{\partial x_*(k, s)}{\partial k}.$$

Далее доказать, что якобиан отображения (4.31) отрицателен.

5.1. У к а з а н и е. Показать, что ранг матрицы системы уравнений (5.15) равен четырем и совпадает с рангом расширенной матрицы этой системы. Показать, что при использовании метода Гаусса получается решение (5.21).

5.2. У к а з а н и е. Используя формулы (32), (33), (5.32), показать, что

$$\frac{\partial y_*(k, s)}{\partial s} = \frac{\beta}{\delta k(1-s)x_*} \left[1 + \frac{s(\alpha - 1)}{\alpha(1-s)} \right].$$

5.3. а) $x_1 = 70$, $x_2 = 40$; в) $x_1 = 30$, $x_2 = 0$; д) $x_1 = 10$, $x_2 = 0$; б), г) — бесконечное множество решений.

5.4. а), б) — $x_1 = 35$, $x_2 = 5$; в) — не существует решения, удовлетворяющего условиям (5.41).

5.5. $x_1 = 30$, $x_2 = 0$.

Глава 3

АКСИОМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 1. Аксиоматика сплошной среды

Приступим теперь к процессу построения важного класса математических моделей — моделей механики сплошной среды (или, как их еще иногда называют, моделей сплошной деформируемой среды). Описываемым физическим объектом являются тела (массы), заполняющие некоторый объем физического пространства и способные деформироваться. При этом рассматривается такой класс движений этих тел, в котором можно отвлечься от их молекулярной и атомной структуры и предполагать, что они заполняют пространство непрерывным (сплошным) образом. Другими словами, мы будем описывать макро-, а не микромир.

Построение модели сплошной среды сводится к нахождению (выделению) числовых параметров, ее описывающих, и нахождению соотношений (уравнений) между этими параметрами. В основе механики сплошной среды лежит ряд экспериментальных фактов, которые мы сформулируем в виде аксиом. Именно эти аксиомы позволят нам ввести числовые параметры, описывающие сплошную среду, и вывести количественные соотношения, которые и будут являться одной из ее математических моделей.

1.1. Аксиома пространства–времени. *Аффинное пространство* — это множество (точек) X , на котором определено понятие *векторов* $\overrightarrow{xu}$ с началом $x \in X$ и концом в $y \in X$, т. е. задано отображение $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xu}$ из $X \times X$ в линейное пространство E (называемое *присоединенным*), обладающее следующими свойствами:

- для любой фиксированной точки $x \in X$ отображение $y \mapsto \overrightarrow{xu}$ есть *биекция* (взаимно однозначное отображение) X на E ;
- $\overrightarrow{xu} + \overrightarrow{yz} + \overrightarrow{zx} = 0$ для любых $x, y, z \in X$.

Таким образом, в аффинном пространстве нулем (началом отсчета) может быть объявлена любая точка. Если присоединенное пространство *евклидово*, т. е. в нем задано скалярное произведение, то пространство X называется *евклидовым аффинным*. Размерность X , по определению, есть размерность E .

Используя введенные понятия, сформулируем аксиому пространства-времени:

Пространство — трехмерное евклидово аффинное пространство, время — одномерное евклидово аффинное пространство. Время абсолютно.

Сцена, на которой разыгрывается наше действие, есть трехмерное евклидово пространство $\mathbf{R}^3$, аффинная структура в котором задается отображением $(x, y) \mapsto y - x$. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$ индуцирует в нем норму: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$. Норма же и скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$ позволяют определить длину вектора и скалярное произведение векторов: $|\vec{xy}| = \|y - x\|$, $\vec{xy} \cdot \vec{uv} = (y - x) \cdot (v - u)$.

Поясним утверждение «время абсолютно». Окружающий мир в пространственно-временном смысле представляется точками пространства $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, называемыми *мировыми точками*, или *событиями*. *Время* есть линейное отображение $t : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ мира на «ось времени». Промежуток времени между событиями $A, B \in \mathbf{R}^4$ есть число $t(B - A)$. Если это число равно нулю, то события A и B называются одновременными. Линейность отображения t гарантирует изоморфизм пространства одновременных событий (ядра отображения t) пространству $\mathbf{R}^3$. Наличие этого изоморфизма позволяет говорить об *абсолютно одновременных событиях* (в отличие от различных релятивистских теорий).

1.2. Аксиома материального континуума. Реальная физическая среда имеет атомарно-молекулярное строение [26]. Мы же будем рассматривать ее как среду, заполняющую некоторый объем сплошным образом. Сформулируем эту идеализацию в виде аксиомы материального континуума:

Сплошная среда в каждый момент времени есть материальный континуум.

Эта аксиома предполагает, что определены понятия массы и внутренней энергии каждого объема сплошной среды. *Объемом* в $\mathbf{R}^3$ называется любая область (связное множество) с кусочно-гладкой границей. Предполагается, что определена *масса* любого объема ω , т. е. задана функция множества $M : \omega \mapsto M(\omega)$ и эта функция есть мера, т. е.

неотрицательная счетно-аддитивная функция:

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M(\omega_i), \quad \text{если } \omega_i \cap \omega_j = \emptyset \text{ при всех } i \neq j.$$

Более того, предполагается, что функция M непрерывна в следующем смысле: $M(\omega) \rightarrow 0$ при $\text{mes } \omega \rightarrow 0$, где $\text{mes } \omega$ — *мера Лебега* множества ω (строгое определение меры Лебега вводится в курсе математического анализа; не сильно искажая суть этого понятия, можно считать, что $\text{mes } \omega$ — объем области ω в смысле, описываемом в школьной геометрии). В курсе функционального анализа будет доказано, что в этом случае существует неотрицательная функция $\rho : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что для любого объема Ω выполняется равенство

$$M(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x) d\omega. \quad (1.1)$$

Здесь ω — элементарный объем. Эта функция называется *плотностью* (*удельной массой*) сплошной среды. Можно показать, что

$$\rho(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M[B_{\varepsilon}(x)]}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3},$$

где $B_{\varepsilon}(x)$ — шар в $\mathbf{R}^3$ радиуса ε с центром в точке x (а $4\pi\varepsilon^3/3$, разумеется, объем этого шара). Последнее полностью согласуется с определением плотности в школьной физике.

Подчеркнем, что переход от массы к плотности в математическом смысле означает переход от весьма сложного математического объекта — функций множества (т. е. функций, заданных на множестве подмножеств пространства $\mathbf{R}^3$) к существенно более простым математическим объектам — функциям точки. Последние изучены гораздо лучше. К ним можно применять развитый аппарат математического анализа.

Точно так же аксиома материального континуума предполагает наличие у каждого объема *внутренней энергии*, т. е. существование непрерывной меры E_i . По аналогии с представлением (1.1) можно ввести понятие *удельной объемной энергии* e_i :

$$E_i(\Omega) = \iiint_{\Omega} e_i(x) d\omega.$$

Обычно удобнее пользоваться *удельной внутренней энергией* $U(x) \equiv e_i(x)/\rho(x)$ (т. е. энергией, отнесенной к единице массы) так, что

$$E_i(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x)U(x) d\omega = \iiint_{\Omega} \rho U d\omega. \quad (1.2)$$

§ 2. Движение сплошной среды

2.1. Аксиома движения. Прежде, чем сформулировать следующую аксиому, введем некоторые понятия и обозначения. Пусть Ω_s задает конфигурацию сплошной среды в момент времени s (т. е. множество точек в $\mathbf{R}^3$, которые среда заполняет в момент времени s). Тот факт, что в процессе эволюции сплошная среда состоит из одних и тех же материальных частиц математически описывается введением семейства взаимно-однозначных отображений (см. рис. 25):

$$\gamma_{s,t} : \Omega_s \rightarrow \Omega_t.$$

Каждое такое отображение определяет *движение сплошной среды*. Отображения $\gamma_{s,t}$ показывают перемещения частиц за промежуток времени от s до t .

Из физического опыта ясно, что за нулевое время частицы не должны сдвинуться: $\gamma_{s,s} = I$ (здесь I — тождественное отображение в Ω_s) и, кроме того, суммарный результат сдвига за время от s до t , а затем от t до p (см. рис. 25), есть результат сдвига за время $(p-s)$ — от s до p :

$$\gamma_{t,p} \circ \gamma_{s,t} = \gamma_{s,p}.$$

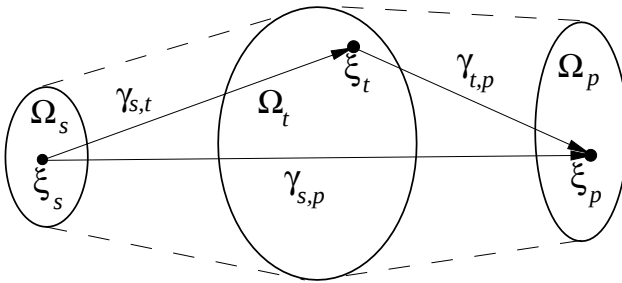


Рис. 25. Движение сплошной среды

В дальнейшем в качестве начального момента изучаемых движений мы будем рассматривать «нулевой» момент $s = 0$, что позволяет перейти от обозначений $\gamma_{0,t}(\xi)$ к $\gamma_t(\xi)$, где $\xi \in \Omega_0$.

Теперь мы можем сформулировать аксиому движения:

Отображения γ_t определены для любого $t \in \mathbf{R}$ и являются гомеоморфизмами Ω_0 на Ω_t , а отображение $t \mapsto \gamma_t$ есть изоморфизм аддитивной группы вещественных чисел в мультипликативную группу отображений в $\mathbf{R}^3$. При каждом $\xi \in \Omega_0$ отображение $t \mapsto \gamma_t(\xi)$ непрерывно и кусочно-непрерывно дифференцируемо.

Тот факт, что $\{\gamma_t\}$ — мультипликативная группа означает, что:

$$\gamma_0 = I; \quad (2.1)$$

$$\gamma_p \circ \gamma_t = \gamma_{t+p}. \quad (2.2)$$

Сформулированная аксиома позволяет говорить о движении *материальной точки* (или *частицы*) ξ сплошной среды; в частности, кривая $\{\gamma_t(\xi) : t \in \mathbf{R}\}$ называется *траекторией* точки $\xi \in \Omega_0$. Далее мы будем обозначать отображение $\gamma_t(\xi)$ через $\gamma(\xi, t)$ и называть отображение

$$x = \gamma(\xi, t) \quad (2.3)$$

законом движения сплошной среды. Если в формуле (2.3) точка ξ фиксирована, а время t меняется, то закон движения задает траекторию выделенной частицы. Если, наоборот, t фиксировано, а точки ξ занимают некоторый объем ω_0 , то закон движения задает состояние движущегося объема ω_t в момент времени t :

$$\omega_t = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = \gamma(\xi, t), \xi \in \omega_0 \subset \Omega_0\}. \quad (2.4)$$

Кусочная гладкость траекторий, гарантируемая аксиомой движения, позволяет говорить о скорости частицы ξ в момент времени t :

$$v(\xi, t) = \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t}.$$

Отметим еще некоторые следствия, вытекающие из аксиомы движения. Формула (2.1) постулирует, что для закона движения должно выполняться равенство:

$$\xi = \gamma(\xi, 0). \quad (2.5)$$

Кроме того, отображение (2.3) является взаимно-однозначным и невырожденным:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.6)$$

где J — якобиан отображения (2.3), $x = (x^1, x^2, x^3)$, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $x^i = \gamma^i(\xi, t)$ ($i = 1, 2, 3$). С помощью обратного отображения

$$\xi = \gamma^{-1}(x, t) \quad (2.7)$$

можно определить объем ω_0 , который занимала среда при $t = 0$, если известно, что в момент времени $t > 0$ она занимает объем ω_t .

2.2. Лагранжево и эйлерово описания сплошной среды. Как мы уже договорились, описать сплошную среду — это задать ее количественные характеристики. Это можно сделать, по крайней мере, двумя способами:

- привязывать характеристику к частице в данный момент времени;
- привязывать характеристику к точке пространства, в которой в данный момент находится частица.

Эти два способа называются, соответственно, *лагранжевым* и *эйлеровым описаниями* сплошной среды. Таким образом, в лагранжевом подходе все характеристики задаются в переменных $(\xi, t) \in \Omega_0 \times \mathbf{R}$, а в эйлеровом — в переменных $(x, t) \in \{\Omega_t \times \{t\} : t \in \mathbf{R}\}$. Соответственно, координаты (ξ, t) называются *лагранжевыми координатами* (или *переменными*), а (x, t) — *эйлеровыми*. Каждое из этих описаний имеет свои преимущества и недостатки.

Лагранжево и эйлерово описания сплошной среды, разумеется, эквивалентны. Если известна некоторая характеристика в лагранжевом описании, то можно найти ее представление в эйлеровом, и наоборот. Например, если $v^L(\xi, t)$ и $v^E(x, t)$ — лагранжево и эйлерово представления скорости, то, очевидно,

$$v^L(\xi, t) = v^E(\gamma(\xi, t), t), \quad (2.8)$$

и, наоборот,

$$v^E(x, t) = v^L(\gamma^{-1}(x, t), t), \quad (2.9)$$

где γ^{-1} — обратное отображение (2.7) и по определению

$$v^L(\xi, t) = \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Чтобы найти закон движения сплошной среды (2.3) в случае, когда известно поле скоростей в лагранжевом описании, достаточно найти интеграл от скорости (2.10):

$$\gamma(\xi, t) = \xi + \int_0^t v^L(\xi, s) ds. \quad (2.11)$$

Если же поле скоростей задано в эйлеровом описании, то приходится решать задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t} = v^E(\gamma(\xi, t), t), \quad \gamma(\xi, 0) = \xi, \quad (2.12)$$

которое получается с учетом равенств (2.10) и (2.8). Поскольку в уравнении (2.12) величина ξ фиксирована, то на эту задачу можно смотреть как на задачу Коши для системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = v^{E,i}(x^1, x^2, x^3, t), \quad x^i(0) = \xi^i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.13)$$

З А Д А Ч И

2.1. Вновь рассмотрим задачу 1.2 из гл. 1 о движении оползня по плоскому откосу, заданному функцией

$$x^3 = h_{bt}(x^1, x^2) = -x^1 \operatorname{tg} \theta. \quad (2.14)$$

Напомним, что в упомянутой задаче мы рассмотрели несколько математических моделей движения оползня как твердого тела, моделей, в которых геометрия оползня не учитывалась, а его движение описывалось движением определенной материальной точки.

Теперь же примем во внимание форму оползня и возможность его деформации. Предположим, что в начальный момент времени оползневая масса лежит на откосе и занимает объем Ω_0 , представляющий

собой прямую треугольную призму высоты W с основанием в виде прямоугольного треугольника ABC , катет BC которого параллелен вертикальной оси и равен T (см. рис. 26), а катет AC параллелен оси абсцисс Ox^1 . Лагранжевы координаты частиц, заполняющих этот объем, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} x_0 - T \operatorname{ctg} \theta &\leq \xi^1 \leq x_0, \\ y_0 - W/2 &\leq \xi^2 \leq y_0 + W/2, \\ -\xi^1 \operatorname{tg} \theta &\leq \xi^3 \leq -x_0 \operatorname{tg} \theta + T, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где x_0 — абсцисса частиц, лежащих на катете BC , $y_0 \in R$.

Пусть закон движения (2.3) оползневой массы задан отображением

$$\begin{aligned} x^1(\xi, t) &= x_0 + \frac{at^2}{2} - T \operatorname{ctg} \theta + (T \operatorname{ctg} \theta + \xi^1 - x_0) e^{\beta t}, \\ x^2(\xi, t) &= \xi^2, \\ x^3(\xi, t) &= -\left(x_0 + \frac{at^2}{2}\right) \operatorname{tg} \theta + T - \left[T + (\xi^1 - x_0) \operatorname{tg} \theta\right] e^{\beta t} + \\ &\quad + (\xi^3 + \xi^1 \operatorname{tg} \theta) e^{-\beta t}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

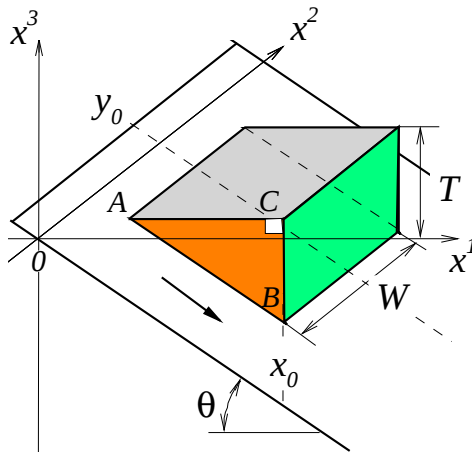


Рис. 26. Обозначения и начальное положение оползневой массы

где $\beta = \text{const} \geq 0$, $a = \text{const} > 0$. Вычислить якобиан отображения (2.16) и доказать, что объем оползня не меняется при его движении:

$$\text{mes } \Omega_t = \iiint_{\Omega_t} dx = \text{const}. \quad (2.17)$$

2.2. Используя закон движения оползня (2.16), найти траектории вершин A, B, C основания призмы (см. рис. 26), имеющих одинаковую ординату $\xi^2 = y_0 - W/2$. Нарисовать эскиз формы оползня при $t > 0$.

2.3. Для заданного закона движения оползня (2.16) определить скорость его частиц в лагранжевом представлении (2.10). Доказать, что при $\beta = 0$ оползень движется по откосу как абсолютно твердое тело.

2.4. Для заданного закона движения (2.16) найти обратное отображение (2.7) и определить скорость частиц оползневой массы в эйлеровом представлении (2.9).

2.5. Известно поле скоростей $v^L(\xi, t)$ частиц оползня в лагранжевом описании:

$$\begin{aligned} v^{L,1}(\xi, t) &= at + \beta (T \text{ctg } \theta + \xi^1 - x_0) e^{\beta t}, \\ v^{L,2}(\xi, t) &= 0, \\ v^{L,3}(\xi, t) &= -at \cdot \text{tg } \theta - \beta \left[T + (\xi^1 - x_0) \text{tg } \theta \right] e^{\beta t} - \\ &\quad - \beta (\xi^3 + \xi^1 \text{tg } \theta) e^{-\beta t}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Найти закон движения оползня.

2.6. Известно поле скоростей $v^E(x, t)$ частиц оползня в эйлеровом описании:

$$\begin{aligned} v^{E,1}(x, t) &= at + \beta \left[x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} + T \text{ctg } \theta \right], \\ v^{E,2}(x, t) &= 0, \\ v^{E,3}(x, t) &= -at \cdot \text{tg } \theta - \beta \left[x^3 + \left(2x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} \right) \text{tg } \theta + T \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Найти закон движения оползня.

§ 3. Силловые и энергетические характеристики сплошной среды

Фундаментальную роль при описании сплошной среды, наряду с введенными ранее массой и внутренней энергией, играют также следующие количественные характеристики произвольного объема ω сплошной среды:

импульс (количество движения)

$$K(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x)v(x)d\omega = \iiint_{\omega} \rho v d\omega, \quad (3.1)$$

момент импульса (момент количества движения)

$$H(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x)(x \times v(x)) d\omega = \iiint_{\omega} \rho(x \times v) d\omega \quad (3.2)$$

(здесь $x \times v$ — векторное произведение x на v в $\mathbf{R}^3$),
кинетическая энергия

$$E_k(\omega) = \iiint_{\omega} \frac{1}{2} \rho(x) |v(x)|^2 d\omega \quad (3.3)$$

и полная энергия

$$E(\omega) = E_k(\omega) + E_i(\omega). \quad (3.4)$$

Введенные характеристики являются прямыми обобщениями на сплошную среду известных из теоретической механики [4] понятий *импульса системы n материальных точек*

$$K = \sum_{i=1}^n m_i v_i$$

(v_i — скорость i -й точки массы m_i),
момента импульса

$$H = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \times v_i)$$

(x_i — радиус-вектор i -й точки),

кинетической

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |v_i|^2$$

и *полной энергии* как суммы кинетической и потенциальной (внутренней).

Если зафиксировать объем сплошной среды $\omega_0 \subset \Omega_0$ и рассматривать характеристики (3.1)–(3.4) на движущемся объеме $\omega_t = \gamma_t(\omega_0)$, то они будут функциями только времени t . Поведение этих характеристик постулируется аксиомами баланса:

Для любого движущегося объема ω_t масса объема неизменна:

$$\frac{d}{dt} M(\omega_t) = 0, \quad (3.5)$$

скорость изменения импульса равна главному вектору приложенных к объему сил:

$$\frac{d}{dt} K(\omega_t) = F(\omega_t), \quad (3.6)$$

скорость изменения момента импульса равна главному моменту сил:

$$\frac{d}{dt} H(\omega_t) = G(\omega_t), \quad (3.7)$$

скорость изменения полной энергии равна вносимой мощности:

$$\frac{d}{dt} E(\omega_t) = N(\omega_t). \quad (3.8)$$

Эти аксиомы иногда называют *принципом отвердевания*, поскольку уравнения (3.5)–(3.8) аналогичны уравнениям движения твердого тела. Смысл правых частей равенств (3.5)–(3.8) объясняется в следующих разделах курса.

§ 4. Замыкающие соотношения и интегральные законы сохранения

4.1. Замыкающие соотношения для сил. Будем рассматривать два класса сил, действующих на сплошную среду — *внешние массовые* и *внутренние поверхностные силы*.

Первая из этих сил $F_e(\omega)$ пропорциональна массе объема (типичным представителем таких сил является сила тяжести). Если потребовать, чтобы внешняя сила была непрерывной мерой, то у нее будет существовать *объемная плотность* f_e :

$$F_e(\omega) = \iiint_{\omega} f_e(x) d\omega.$$

Как и выше, удобно пользоваться *массовой плотностью* $f(x) = f_e(x)/\rho(x)$. Тогда

$$F_e(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x)f(x) d\omega = \iiint_{\omega} \rho f d\omega,$$

а *момент внешней силы* определяется равенством

$$G_e(\omega) = \iiint_{\omega} \rho(x \times f) d\omega.$$

Эксперименты показывают, что кроме сил, действующих на объем (массу), имеются силы, действующие на поверхность $\partial\omega$ (например, силы давления, внутреннего трения и т. п.). Разумеется, понятие поверхностных сил условно, поскольку в рамках ньютоновской механики силы могут действовать только на массу. Здесь имеется в виду, что рассматриваемые силы приложены к частицам среды, расположенным в слоях пренебрежимой толщины. Для того, чтобы определить эти силы, рассмотрим сечение σ области Ω на области Ω_1 и Ω_2 плоскостью Σ . Пусть n — нормаль к Σ , направленная, скажем, в сторону Ω_2 (см. рис. 27).

Формулируемая ниже аксиома внутренних поверхностных сил вводит вектор силы $F_s(\sigma)$, действующей на часть объема Ω_1 со стороны части объема Ω_2 через плоскую область σ . Если предполагать, что $F_s(\sigma)$ — непрерывная плоская мера, то имеет место интегральное представление

$$F_s(\sigma) = \iint_{\sigma} p_n(x) d\sigma. \quad (4.1)$$

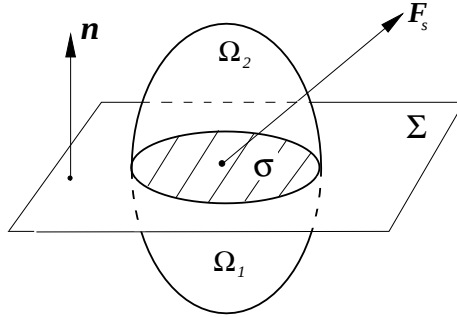


Рис. 27. Внутренняя поверхностная сила $F_s(\sigma)$

Величина $p_n(x)$ называется *вектором напряжений внутренних поверхностных сил*. Она позволяет говорить о векторе внутренних поверхностных сил, действующих на данный объем через площадку поверхности в точке x с нормалью n .

Аксиома внутренних поверхностных сил гласит:

Внутренняя поверхностная сила $F_s(\sigma)$ определена для любого сечения σ области Ω и является непрерывной плоской мерой.

Эта аксиома гарантирует существование вектора $p_n(x)$ напряжений поверхностных сил, с помощью которого *главный вектор внутренних поверхностных сил*, действующих на объем ω через его поверхность, определяется формулой

$$F_i(\omega) = \iint_{\partial\omega} p_{n(x)}(x) d\sigma = \iint_{\partial\omega} p_n d\sigma,$$

где $n(x)$ — орт нормали к поверхности $\partial\omega$ объема ω в точке x .

Наличие вектора p_n позволяет также определить *момент внутренних поверхностных сил*, действующих на ω через $\partial\omega$:

$$G_i(\omega) = \iint_{\partial\omega} (x \times p_{n(x)}(x)) d\sigma = \iint_{\partial\omega} (x \times p_n) d\sigma.$$

Следующая аксиома (аксиома сил и моментов) постулирует тот факт, что существование других сил и моментов, кроме рассмотренных выше,

в данной модели не предполагается:

Правые части уравнений баланса импульса (3.6) и момента импульса (3.7) определяются, соответственно, выражениями

$$F(\omega) = F_e(\omega) + F_i(\omega) = \iiint_{\omega} \rho f \, d\omega + \iint_{\partial\omega} p_n \, d\sigma$$

и

$$G(\omega) = G_e(\omega) + G_i(\omega) = \iiint_{\omega} \rho (x \times f) \, d\omega + \iint_{\partial\omega} (x \times p_n) \, d\sigma.$$

4.2. Замыкающие энергетические соотношения. По аналогии с классической механикой можно ввести понятия *мощностей, развиваемых внешними массовыми и внутренними поверхностными силами*

$$N_e(\omega) = \iiint_{\omega} \rho v \cdot f \, d\omega, \quad N_i(\omega) = \iint_{\partial\omega} v \cdot p_n \, d\sigma.$$

Кроме того, постулируется существование *тепловых потоков*. Они вводятся аксиомами полностью аналогично, с математической точки зрения, внутренним поверхностным силам. Аксиома потока тепла гласит, что

Поток тепла $Q(\sigma)$ определен для любого сечения σ области Ω и является непрерывной плоской мерой.

Если выполнена эта аксиома, то определена *поверхностная плотность q_n потока тепла*:

$$Q(\sigma) = \iint_{\sigma} q_n \, d\sigma,$$

а она, в свою очередь, позволяет говорить о *потоке тепла в объем ω из области $\Omega \setminus \omega$ через границу $\partial\omega$* :

$$Q(\omega) = \iint_{\partial\omega} q_{n(x)}(x) \, d\sigma = \iint_{\partial\omega} q_n \, d\sigma.$$

Последняя аксиома (аксиома передачи энергии) завершает описание механизмов передачи энергии в данной модели:

Правая часть уравнения баланса энергии (3.8) определяется выражением

$$N(\omega) = N_e(\omega) + N_i(\omega) + Q(\omega) = \iiint_{\omega} \rho v \cdot f \, d\omega + \iint_{\partial\omega} v \cdot p_n \, d\sigma + \iint_{\partial\omega} q_n \, d\sigma.$$

4.3. Интегральные законы сохранения. Теперь в уравнениях (3.5)–(3.8) определены все величины, и эти уравнения с описанными выше правыми частями составляют рассматриваемую нами *математическую модель сплошной среды*: для любого движущегося объема ω_t в любой момент времени t выполняются следующие интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho \, d\omega &= 0, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho v \, d\omega &= \iiint_{\omega_t} \rho f \, d\omega + \iint_{\partial\omega_t} p_n \, d\sigma, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho(x \times v) \, d\omega &= \iiint_{\omega_t} \rho(x \times f) \, d\omega + \iint_{\partial\omega_t} (x \times p_n) \, d\sigma, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\omega_t} \rho \left(\frac{1}{2} |v|^2 + U \right) \, d\omega &= \iiint_{\omega_t} \rho v \cdot f \, d\omega + \iint_{\partial\omega_t} v \cdot p_n \, d\sigma + \iint_{\partial\omega_t} q_n \, d\sigma. \end{aligned} \tag{IM}$$

Эти уравнения называют (*интегральными*) *законами сохранения* соответственно *массы*, *импульса* (*количества движения*), *момента импульса* (*момента количества движения*) и *энергии*.

Полученная математическая модель (IM) весьма сложна для исследования (в частности, в силу ее большой общности). Наша следующая задача — попытаться упростить модель (возможно, за счет сужения рамок ее применимости). Далее мы покажем, что если величины, характеризующие сплошную среду, достаточно гладкие, то модель (IM) эквивалентна некоторой системе дифференциальных уравнений в частных производных, которая допускает исследование более развитыми математическими средствами. Для того, чтобы привести нашу модель к системе дифференциальных уравнений, нам потребуются некоторые новые математические понятия и факты, описанию которых и посвящена специальная глава следующей части пособия.

Глава 3

2.1. $J = 1$.

У к а з а н и е. Для доказательства сохранения объема оползня при его движении воспользуйтесь формулой замены переменной в интеграле

$$\iiint_{\Omega_t} f(x) dx = \iiint_{\Omega_0} f(x(\xi)) J(\xi) d\xi. \quad (34)$$

2.2. У к а з а н и е. В начальный момент времени вершины A , B , C основания призмы имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} \xi_A^1 &= x_0 - T \operatorname{ctg} \theta, & \xi_A^2 &= y_0 - W/2, & \xi_A^3 &= -x_0 \operatorname{tg} \theta + T; \\ \xi_B^1 &= x_0, & \xi_B^2 &= y_0 - W/2, & \xi_B^3 &= -x_0 \operatorname{tg} \theta; \\ \xi_C^1 &= x_0, & \xi_C^2 &= y_0 - W/2, & \xi_C^3 &= -x_0 \operatorname{tg} \theta + T. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя лагранжевы координаты (35) в закон движения (2.16), получаем траектории точек A , B и C :

$$x_A = \gamma(\xi_A, t) = \begin{pmatrix} x_A^1 \\ x_A^2 \\ x_A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{at^2}{2} - T \operatorname{ctg} \theta \\ y_0 - \frac{W}{2} \\ -\left(x_0 + \frac{at^2}{2}\right) \operatorname{tg} \theta + T \end{pmatrix}; \quad (36)$$

$$x_B = \gamma(\xi_B, t) = \begin{pmatrix} x_B^1 \\ x_B^2 \\ x_B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{at^2}{2} - T \operatorname{ctg} \theta (1 - e^{\beta t}) \\ y_0 - \frac{W}{2} \\ -\left(x_0 + \frac{at^2}{2}\right) \operatorname{tg} \theta + T (1 - e^{\beta t}) \end{pmatrix}; \quad (37)$$

$$x_C = \gamma(\xi_C, t) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_C^1 \\ x_C^2 \\ x_C^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{at^2}{2} - T \operatorname{ctg} \theta (1 - e^{\beta t}) \\ y_0 - \frac{W}{2} \\ -\left(x_0 + \frac{at^2}{2}\right) \operatorname{tg} \theta + T (1 - e^{\beta t}) + T e^{-\beta t} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Для движущихся точек A и B выполняются равенства $x_A^3 = -x_A^1 \operatorname{tg} \theta$ и $x_B^3 = -x_B^1 \operatorname{tg} \theta$. Это означает, что траектории этих точек лежат на прямой (2.14), т. е. точки A и B движутся по откосу.

Из формул (37) и (38) следует, что при движении отрезок $[BC]$ всегда остается вертикальным (в любой момент времени движущиеся точки B и C имеют одинаковые абсциссу и ординату). При этом высота оползня уменьшается:

$$|BC|(t) = |x_C^3 - x_B^3| = Te^{-\beta t} \leq T,$$

а его протяженность (вдоль откоса) — увеличивается:

$$|AB|(t) = \frac{Te^{\beta t}}{\sin \theta} \geq \frac{T}{\sin \theta},$$

где T и $T/\sin \theta$ — соответственно высота и протяженность оползня при $t = 0$ (см. формулы (35)).

Показать, что при $t > 0$ оползневая масса сохраняет форму прямой треугольной призмы (см. рис. 30) с вертикальной гранью, проходящей через сторону BC треугольника в основании. Сам же треугольник ABC уже не является при $t > 0$ прямоугольным ($\angle ACB > 90^\circ$). Таким образом, оползень в процессе движения деформируется.

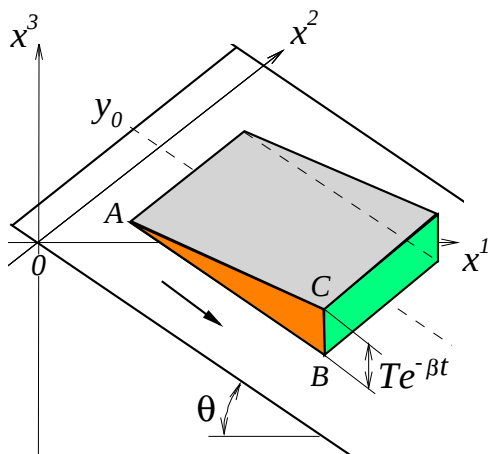


Рис. 30. Форма оползневой массы при $t > 0$

2.3. У к а з а н и е. Для вычисления компонент скорости в лагранжевом представлении воспользуйтесь определением (2.10). Используя полученные выражения

$$\begin{aligned} v^{L,1}(\xi, t) &= at + \beta (T \operatorname{ctg} \theta + \xi^1 - x_0) e^{\beta t}, \\ v^{L,2}(\xi, t) &= 0, \\ v^{L,3}(\xi, t) &= -at \cdot \operatorname{tg} \theta - \beta \left[T + (\xi^1 - x_0) \operatorname{tg} \theta \right] e^{\beta t} - \\ &\quad - \beta (\xi^3 + \xi^1 \operatorname{tg} \theta) e^{-\beta t}, \end{aligned} \tag{39}$$

показать, что при $\beta = 0$ все частицы оползня движутся с одной и той же скоростью (v^L не зависит от ξ) параллельно откосу в плоскостях, параллельных плоскости ABC .

2.4. У к а з а н и е. Согласно формуле (2.9), для определения скорости в эйлеровом представлении необходимо вначале найти обратное отображение (2.7) для закона движения (2.16), а затем подставить найденные выражения для ξ^i ($i = 1, 2, 3$) в формулы (39) для компонент скорости в лагранжевом представлении.

Показать, что из закона движения (2.16) следуют равенства

$$\begin{aligned} \xi^1 - x_0 &= \left[x^1 - \left(x_0 + \frac{at^2}{2} - T \operatorname{ctg} \theta \right) \right] e^{-\beta t} - T \operatorname{ctg} \theta; \\ \xi^3 + \xi^1 \operatorname{tg} \theta &= \left\{ x^3 + \left(x_0 + \frac{at^2}{2} \right) \operatorname{tg} \theta - T + \left[T + (\xi^1 - x_0) \operatorname{tg} \theta \right] e^{\beta t} \right\} e^{\beta t}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулы (39), убедитесь в справедливости следующего эйлерова представления компонент скорости:

$$\begin{aligned} v^{E,1}(x, t) &= at + \beta \left[x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} + T \operatorname{ctg} \theta \right], \\ v^{E,2}(x, t) &= 0, \\ v^{E,3}(x, t) &= -at \cdot \operatorname{tg} \theta - \beta \left[x^3 + \left(2x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} \right) \operatorname{tg} \theta + T \right]. \end{aligned} \tag{40}$$

2.5. У к а з а н и е. Воспользовавшись формулой (2.11), убедитесь в том, что закон движения описывается формулами (2.16).

2.6. У к а з а н и е. Закон движения находится путем решения задачи Коши (2.13), которая для заданных компонент скорости (2.19) записывается как следующая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= at + \beta \left[x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} + T \operatorname{ctg} \theta \right], \\ \frac{dx^2}{dt} &= 0, \\ \frac{dx^3}{dt} &= -at \cdot \operatorname{tg} \theta - \beta \left[x^3 + \left(2x^1 - x_0 - \frac{at^2}{2} \right) \operatorname{tg} \theta + T \right], \\ x^1(0) &= \xi^1, \quad x^2(0) = \xi^2, \quad x^3(0) = \xi^3.\end{aligned}\tag{41}$$

Используя метод вариации постоянной [20, 21], показать, что из первого уравнения получается следующее выражение:

$$x^1(\xi, t) = \left\{ \xi^1 + \int_0^t \left[as + \beta \left(-x_0 - \frac{as^2}{2} + T \operatorname{ctg} \theta \right) \right] e^{-\beta s} ds \right\} e^{\beta t}.\tag{42}$$

Применяя формулы интегрирования по частям

$$\begin{aligned}\int_0^t s e^{-\beta s} ds &= -\frac{1}{\beta} \left[t e^{-\beta t} + \frac{e^{-\beta t} - 1}{\beta} \right], \\ \int_0^t s^2 e^{-\beta s} ds &= -\frac{1}{\beta} \left[t^2 e^{-\beta t} + \frac{2}{\beta} \left(t e^{-\beta t} + \frac{e^{-\beta t} - 1}{\beta} \right) \right],\end{aligned}$$

убедитесь в том, что уравнение (42) преобразуется в первое уравнение закона движения (2.16).

Проделав аналогичные выкладки для третьего уравнения системы (41), окончательно убедитесь в том, что полю скоростей (2.19) соответствует закон движения (2.16).

Персоналии



Самарский Александр Андреевич (1919–2008) — советский ученый с мировым именем, академик, Герой Социалистического труда, лауреат Ленинской и Государственных премий СССР, ветеран Великой Отечественной войны. А. А. Самарским были заложены основы нового научного направления — математического моделирования, разработана методология вычислительного эксперимента, создана фундаментальная общая теория разностных схем. Научная школа академика А. А. Самарского известна в мире своими выдающимися

работами в области математического моделирования задач термоядерного синтеза, физики плазмы, магнитной и радиационной газодинамики, атомной энергетики, аэродинамики.



Яненко Николай Николаевич (1921–1984) — выдающийся советский математик и механик, академик, Герой Социалистического труда, трижды лауреат Государственной премии СССР, ветеран Великой Отечественной войны. Мировое признание получил созданный им «метод дробных шагов». Н. Н. Яненко основал новую научную дисциплину — математическую технологию, разработал принципы модульного анализа математических моделей, вычислительных алгоритмов и программ, принципы распарал-

леливания алгоритмов и конструирования пакетов прикладных программ. Им были сформированы творческие коллективы, способные решать сложнейшие задачи и заслуженно называемые теперь школой академика Яненко. В 1964 г. Н. Н. Яненко основал в НГУ кафедру «Вычислительные методы механики сплошной среды», которая в 1997 г. стала называться кафедрой «Математическое моделирование».



Шокин Юрий Иванович (1943) — известный специалист в области прикладной математики и информатики, академик. Ю. И. Шокин обосновал и развил новое научное направление в вычислительной математике — метод дифференциального приближения для анализа, классификации и построения разностных схем с заданными свойствами. Первым в стране им начаты исследования по интервальной математике. Научная школа академика Ю. И. Шокина известна работами по численному моделированию волн

цунами и цунамирайонированию Дальневосточного побережья РФ, по расчету машиностроительных конструкций, использованию математического моделирования для анализа причин и последствий аварийных ситуаций, по созданию «Сети передачи данных СО РАН». Возглавляемый Ю. И. Шокиным Институт вычислительных технологий СО РАН является базовым для кафедры «Математическое моделирование» механико-математического факультета НГУ.



Ахмеров Рустям Рафаэлович (1951–2009) — известный специалист по нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных и нелинейному функциональному анализу. Работал в Воронежском государственном университете, Институте теоретической и прикладной механики СО АН СССР, Институте вычислительных технологий СО РАН. Первым из преподавателей кафедры «Математическое моделирование» начал читать для студентов механико-математического факультета НГУ лекции по обязательному курсу «Математическое моделирование», в которых удивительным образом сочетались

математическая строгость и легкость восприятия, лаконичность и широта охвата предмета.



Бернулли Якоб (Bernoulli, Jakob; 1654–1705) — швейцарский математик, профессор математики Базельского университета. Якоб Бернулли внес огромный вклад в развитие аналитической геометрии и зарождение вариационного исчисления. Его именем названа лемниската Бернулли. Он исследовал также циклоиду, цепную линию, логарифмическую спираль. Якобу Бернулли принадлежат значительные достижения в теории рядов, дифференциальном исчислении, теории вероятностей и теории чисел, где его именем названы «числа Бернулли». Якоб Бернулли издал

также работы по различным вопросам арифметики, алгебры, геометрии и физики.



Вольтерра Вито (Volterra, Vito; 1860–1940) — итальянский математик, профессор Пизанского, Туринского, Римского университетов. Работы Вольтерра посвящены дифференциальным уравнениям в частных производных, теории упругости, интегральным и интегродифференциальным уравнениям, функциональному анализу и теории множеств. В частности, Вольтерра построил примеры непрерывных функций, производные которых существуют, но не удовлетворяют

критерию интегрируемости ни на каком интервале.



с именами М. В. Ломоносова и Д. И. Менделеева — ученых, всей своей жизнью прославивших Россию.

Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) — величайший советский математик XX столетия, академик. А. Н. Колмогоров является создателем современной теории вероятностей, автором фундаментальных трудов и ряда мировых открытий в теории функций, дифференциальных уравнений, гамильтоновых систем, в математической логике, топологии, функциональном анализе, информатике, теории турбулентности. Созданные им научные школы определили развитие многих из этих направлений в XX столетии. В истории российской науки имя А. Н. Колмогорова стоит рядом



большинства курсов позднейшего времени. Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещенный в Эйфелевой башне.

Коши Огюстен Луи (Cauchy, Augustin Louis; 1789–1857) — великий французский математик, член Парижской академии наук. Коши разработал фундамент математического анализа и внес огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда. Курсы анализа Коши, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для



Лотка Альфред Джеймс (Lotka, Alfred James; 1880–1949) — американский математик, физикохимик, статистик. Получил известность за свою работу в области динамики популяций. Лотка показал, что население, растущее неизменным темпом и сохраняющее неизменный порядок вымирания, стремится к определенному возрастному составу и к постоянным значениям коэффициентов рождаемости и смертности. Лотка изучал также процесс смены поколений, дал современное аналитическое выражение длины поколения, анализировал процесс демографического развития семьи.

Ввел интегральное уравнение воспроизводства населения. Исследовал экономические и демографические аспекты здравоохранения и эволюции продолжительности жизни, заложив основы экономической демографии.



Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918) — русский математик и механик, академик Петербургской АН. Работал в Петербургском, Харьковском, Одесском университетах. Основные работы посвящены теории устойчивости равновесия и движения механических систем, теории фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости и математической физике. Важнейшим достижением А. М. Ляпунова является создание современной теории устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров.



Мальтус Томас Роберт (Malthus, Thomas Robert; 1766–1834) — английский священник и ученый, демограф и экономист. В 1798 г. опубликовал свою книгу «Essay on the Principle of Population» («Опыт о законе народонаселения»). Три основных тезиса «Опыта»:

- из-за биологической способности человека к продолжению рода его физические способности используются для увеличения своих продовольственных ресурсов;
- народонаселение строго ограничено средствами существования;
- рост народонаселения может быть

остановлен лишь встречными причинами, которые сводятся к нравственному воздержанию, или несчастьями (войны, эпидемии, голод).

Мальтус приходит к выводу, что народонаселение растет в геометрической прогрессии, а средства существования — в арифметической.



Парето Вильфредо (Pareto, Vilfredo; 1848–1923) — итальянский экономист и социолог, представитель математической школы в экономике. Парето известен так называемым «законом Парето», описывающим процесс распределения доходов. В объяснении человеческих действий он выдвинул теорию «остатков» и «производных», а также теорию элиты. В основе его социологии лежит идея о том, что значительная часть социальных действий не имеет ничего общего с логикой, а поступки индивидов нередко продиктованы стремлением придать нерациональным действиям некую видимость логичности. Человек движим как инстинктив-

ными «остатками», так и логизированными «производными» остатков.



Перл Раймонд (Pearl, Raymond; 1879–1940) — американский биолог, демограф и статистик, известный как один из основателей биогеронтологии. Большую часть своей профессиональной жизни провел в университете Джона Гопкинса (Johns Hopkins University) в Балтиморе, США. Основные труды по биометрии и биологии человека. Изучая зависимость темпа роста численности биологической популяции плодовых мушек от ее плотности, установил, что эта зависимость выражается в виде так называемой логистической кривой, т. е. сначала прирост увеличивается, а достигнув определенного уровня,

приостанавливается. Пренебрегая социальной природой человека, перенес этот закон на рост населения отдельных стран.



Ферхюльст Пьер Франсуа (Verhulst, Pierre Francois; 1804–1849) — бельгийский математик, член Бельгийской академии наук, известен работами в области моделирования численности населения. Наиболее известным его результатом является формулирование логистического уравнения для численности населения, также называемое уравнением Ферхюльста. Введенный им в уравнение Мальтуса дополнительный отрицательный член, пропорциональный квадрату численности населения, отражает уменьшение скорости роста численности за счет ограниченности ареала обитания или же количества ресурсов.

Библиографический список

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
2. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
3. Белолипецкий В. М., Шокин Ю. И. Математическое моделирование в задачах охраны окружающей среды. Новосибирск: Инфолио-пресс, 1997.
4. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1972.
5. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
6. Гайфулин С. А., Карпов В. Я., Мищенко Т. В. САФРА. Функциональное наполнение. Система OLYMUS. М.: 1980 (Препринт / АН СССР. ИПМатем.; № 27).
7. Гильдерман Ю. И. Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск: Наука, 1974.
8. Гимади Э. Х., Глебов Н. И. Математические модели и методы принятия решений. Новосибирск: НГУ, 2008.
9. Глассер А. Г., Лисейкин В. Д., Шокин Ю. И., Васева И. А., Лиханова Ю. В. Построение разностных сеток с помощью уравнений Бельтрами и диффузии. Новосибирск: Наука, 2006.
10. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
11. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
12. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. М.: Высшая школа, 1983.
13. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: МГУ, 1990.
14. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
15. Коновалов А. Н., Яненко Н. Н. Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения

задач механики сплошной среды. В кн.: Комплексы программ математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. С. 48—54.

16. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: Физматгиз, 1963.

17. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

18. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974.

19. *Овсянников Л. В.* Введение в механику сплошных сред. Часть 1. Новосибирск: НГУ, 1976.

20. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964.

21. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

22. *Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б.* Математические модели биологических продукционных процессов. М.: МГУ, 1993.

23. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.

24. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

25. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2002.

26. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: В 2 т. М.: Наука, 1973.

27. *Сичкарев В. И., Акуличев В. А.* Волновые энергетические станции в океане. М.: Наука. 1989.

28. *Солодовников А. С.* Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М.: Просвещение, 1966.

29. *Туманова Е. А., Шагас Н. Л.* Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода. М.: ИНФРА-М, 2004.

30. *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1: Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

31. *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2: Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

32. *Хакимзянов Г. С., Черный С. Г.* Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2008. Ч. 3: Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов.

33. *Хакимзянов Г. С., Шокин Ю. И.* Разностные схемы на адаптивных сетках: В 3 ч. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 1: Задачи для уравнений в частных производных с одной пространственной переменной.

34. *Хакимзянов Г. С., Шокин Ю. И.* Разностные схемы на адаптивных сетках: В 3 ч. Новосибирск: НГУ, 2009. Ч. 2: Задачи для уравнений в частных производных с двумя пространственными переменными.

35. *Шокин Ю. И., Лисейкин В. Д., Лебедев А. С., Данаев Н. Т., Китаева И. А.* Методы римановой геометрии в задачах построения разностных сеток. Новосибирск: Наука, 2005.

36. *Яненко Н. Н., Преображенский Н. Г., Разумовский О. С.* Методологические проблемы математической физики. Новосибирск: Наука, 1986.

37. *Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W.* Numerical grid generation, foundations and applications. New York: Elsevier Science Publisher, 1985.

Учебное издание

Хакимзянов Гаяз Салимович,
Чубаров Леонид Борисович,
Воронина Полина Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Часть 1. Общие принципы математического моделирования

Учебное пособие

Редактор *Е. В. Дубовцева*

Подписано в печать 2.04.2010 г.

Формат 60 x 84 1/16. Уч.-изд. л. 9,25. Усл. печ. л. 8,6.

Тираж 120 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.