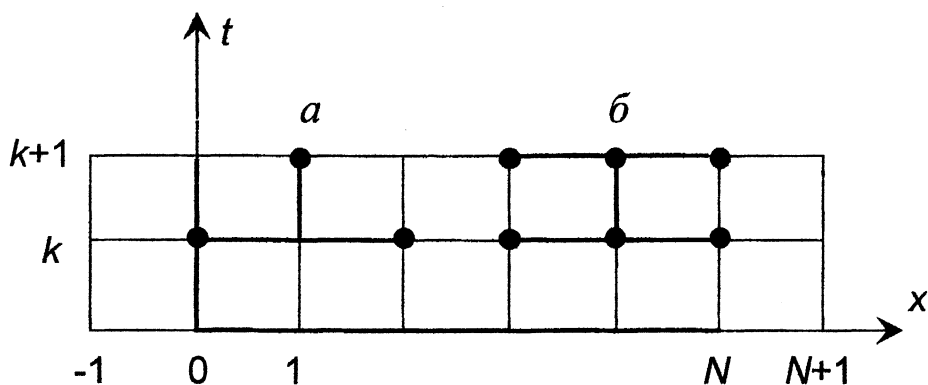


А. П. Михайлов

**УЧЕБНЫЕ ЗАДАНИЯ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРАКТИКИ
В КОМПЬЮТЕРНОМ КЛАССЕ**



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

А.П. Михайлов

**УЧЕБНЫЕ ЗАДАНИЯ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРАКТИКИ
В КОМПЬЮТЕРНОМ КЛАССЕ**

Задачи численного анализа,
дифференциальных и интегральных уравнений

Учебное пособие

Новосибирск
2003

ББК В193 я 73-1
УДК 519.6 (075)
М 690

Михайлов А. П. *Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: Учеб. пособие/* Новосиб. ун-т. Новосибирск, 2003. 86 с.

Пособие содержит постановки, анализ методов решения и построение тестовых примеров для ряда задач, представляющих интерес с точки зрения изучения численных методов анализа, дифференциальных и интегральных уравнений.

Предназначено для студентов математических и физических специальностей вузов, а также для преподавателей, проводящих практические занятия в компьютерных классах.

Рецензент

доктор технических наук, профессор А. Д. Рычков

Рекомендовано редакционно-издательским советом НГУ для специальностей 0647, 2013.

©Новосибирский государственный
университет, 2003

Предисловие

При выполнении лабораторных компьютерных заданий по методам вычислений студент вынужден преодолеть нелегкую дистанцию от абстрактных постановок и положений теории до конкретных алгоритмов с некоторыми полутеоретическими – полупэмпирическими приемами и особенностями реализации и т. д. Поэтому бывает трудно обойтись без пособия, ориентированного на практическую реализацию задания.

Во всех представленных здесь задачах предусмотрено тестовое решение. И хотя удовлетворительное совпадение численного решения с тестовым является неременным условием, главная цель заданий в другом — в выполнении методических численных исследований, проводимых студентом с помощью самостоятельно составленной и отлаженной программы. Поэтому в каждое задание пособия включен пункт рекомендаций для проведения этих исследований.

Все задания, кроме некоторых простейших, усложнены необходимостью получения расчетных формул, различных для каждого варианта, указан лишь способ получения их. Формулы же общие для всех вариантов, как правило, приведены в готовом виде.

Предполагается также использование пособия (как справочника) при работе за компьютером, поэтому каждая глава в нем автономна, не содержит ссылок на другие главы. Некоторые общие формулы (прогонка, формулы трапеций и др.) при необходимости повторяются. Библиографический список (весьма ограниченный) также приведен в каждой главе. Все это удобно при необходимости скопировать отдельную главу.

Несколько избыточная нумерация формул предназначена для облегчения преподавателю обсуждения материала со студентами в аудитории.

Все задачи пособия в различных вариантах прошли многократную проверку на практических занятиях.

Глава 1. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

В данной работе предлагается освоить технику построения интерполяционного кубического сплайна при различных дополнительных (граничных) условиях, а также продемонстрировать свойства и возможности его на гладких и разрывных тестовых функциях.

1. Постановка задачи

Пусть на отрезке $0 \leq x \leq 1$ в равномерной сетке $x_k = kh$, $h = 1/N$, ($k = 0, \dots, N$) известны (заданы) значения функции $f_k = f(x_k)$. На каждом k -м отрезке $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ построим полином вида

$$S_k(x) = a_{0,k} + a_{1,k}(x_k - x) + a_{2,k}(x_k - x)^2 + a_{3,k}(x_k - x)^3 \quad (1)$$

и его производные

$$S'_k(x) = -(a_{1,k} + 2a_{2,k}(x_k - x) + 3a_{3,k}(x_k - x)^2); \quad (2)$$

$$S''_k(x) = 2a_{2,k} + 6a_{3,k}(x_k - x); \quad (3)$$

$$S'''_k(x) = -6a_{3,k}. \quad (4)$$

Выполним во всех внутренних точках x_k ($k = 1, \dots, N-1$) условия сопряжения двух соседних полиномов

$$S_k(x_k) = S_{k+1}(x_k), \quad S'_k(x_k) = S'_{k+1}(x_k), \quad S''_k(x_k) = S''_{k+1}(x_k) \quad (5)$$

и условие интерполирования во всех точках ($k = 0, \dots, N$)

$$S_k(x_k) = f_k. \quad (6)$$

Эти условия порождают $4N - 2$ линейных уравнения относительно $4N$ введенных в полиноме (1) коэффициентов. Следовательно, необходимо задать еще два дополнительных условия.

Эти условия не определяются постановкой задачи сплайна, а вытекают из условий приближения функции $f(x)$.

После некоторых преобразований (исключений $a_{3,k}, a_{1,k}, a_{0,k}$) из условий (5), (6) получаем для $a_{2,k}$ ($k = 1, \dots, N-1$) разностное уравнение:

$$a_{2,k-1} + 4a_{2,k} + a_{2,k+1} = G_k \equiv 3(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1})/h^2, \quad (7)$$

которое эффективно решается с помощью метода прогонки:

$$a_{2,k} = P_k a_{2,k+1} + Q_k, \quad (k = 0, \dots, N-1), \quad (8)$$

где P_k, Q_k находятся рекуррентно по формулам

$$P_k = -1/(P_{k-1} + 4), \quad Q_k = (Q_{k-1} - G_k)P_k, \quad (k = 1, \dots, N-1). \quad (9)$$

Необходимые для работы формул (8), (9) значения P_0, Q_0 находятся с помощью дополнительных (граничных) условий, выраженных через $a_{2,0}$ и, возможно, через $a_{2,1}$ и $a_{2,2}$.

Коэффициент $a_{2,N}$ определяется либо непосредственно граничными условиями, либо граничными условиями с привлечением при $k = N-1$ формулы (8) и, возможно, уравнения (7).

Остальные коэффициенты будут выражены (из условий (5), (6)) через $a_{2,k}$:

$$a_{0,k} = f_k; \quad (10)$$

$$a_{1,k} = -\frac{h}{3}(a_{2,k-1} + 2a_{2,k}) - \frac{f_k - f_{k-1}}{h}; \quad (11)$$

$$a_{3,k} = \frac{a_{2,k-1} - a_{2,k}}{3h}. \quad (12)$$

2. Общее решение разностного уравнения

Решение уравнения (7) можно представить в виде

$$a_{2,k} = C_1 a_{01,k} + C_2 a_{10,k} + A_k, \quad (13)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $a_{01,k}$ — решение однородного, т. е. при $G_k = 0$, уравнения (7) при условиях $a_{01,0} = 0$, $a_{01,N} = 1$, $a_{10,k}$ — решение однородного уравнения (7) при условиях $a_{10,0} = 1$, $a_{10,N} = 0$. A_k — решение неоднородного уравнения (7) при нулевых граничных условиях, т. е. при $A_0 = A_N = 0$.

Любые два дополнительных (граничных) условия, выраженные через $a_{2,k}$, и с учетом выражения (13) приводятся к системе вида

$$\left. \begin{aligned} q_{11}C_1 + q_{12}C_2 &= w_1, \\ q_{21}C_1 + q_{22}C_2 &= w_2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

решение которой дает C_1, C_2 , а следовательно, $a_{2,k}$ и все остальные коэффициенты полинома (1).

3. Варианты дополнительных (граничных) условий

а) На концах отрезка заданы вторые производные, т. е. $S''(0) = f''(0)$, $S''(1) = f''(1)$.

Тогда имеем

$$a_{2,0} = f''(0)/2, \quad a_{2,N} = f''(1)/2 \quad (15)$$

и можем непосредственно получить P_0, Q_0 и воспользоваться формулами (8), (9).

б) На концах отрезка заданы первые производные, т. е. $S'(0) = f'(0)$, $S'(1) = f'(1)$.

Тогда из выражений (2), (10)–(12) имеем

$$a_{2,0} = -\frac{1}{2}a_{2,1} + \frac{3}{2}\left(\frac{f_1 - f_0}{h} - f'(0)\right)/h; \quad (16)$$

$$a_{2,N} = -\frac{1}{2}a_{2,N-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{f_N - f_{N-1}}{h} - f'(1)\right)/h. \quad (17)$$

Из формул (16) и (8) при $k = 0$ находим P_0, Q_0 , а из формул (17) и (8) при $k = N - 1$ получим $a_{2,N}$.

в) Возможна комбинация условий "а" и "б" например

$$S''(0) = f''(0), \quad S'(1) = f'(1) \quad \text{или} \quad S'(0) = f'(0), \quad S''(1) = f''(1).$$

Соответственно описанному выше находятся P_0, Q_0 и $a_{2,N}$.

г) Пусть в двух произвольных, но близких к концам отрезка, "приграничных" точках x_m и x_l ($m \neq l$) разрыв третьей производной от сплайна равен нулю

$$[S''']_k = S'''_{k+1}(x_k) - S'''_k(x_k) = 0, \quad (k = m, l).$$

Это даст с учетом формулы (12)

$$a_{2,k-1} - 2a_{2,k} + a_{2,k+1} = 0, \quad (k = m, l), \quad (18)$$

или, если использовать выражения (7) и (13),

$$\left. \begin{aligned} a_{01,m}C_1 + a_{10,m}C_2 &= G_m/6 - A_m, \\ a_{01,l}C_1 + a_{10,l}C_2 &= G_l/6 - A_l. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Найденные C_1, C_2 позволяют по формулам (10)–(13) сосчитать все коэффициенты сплайна.

Если разрывы третьей производной сплайна заданы в приграничных точках x_1, x_{N-1} , то условия (18) имеют вид

$$a_{2,0} - 2a_{2,1} + a_{2,2} = 0, \quad a_{2,N-2} - 2a_{2,N-1} + a_{2,N} = 0. \quad (20)$$

Эти условия вместе с уравнением (7) при $k = 1, N - 1$ дают

$$a_{2,1} = G_1/6, \quad a_{2,N-1} = G_{N-1}/6. \quad (21)$$

Тогда формулы прогонки (8), (9) позволяют получить все $a_{2,k}$ ($k = 1, \dots, N - 1$). Значения $a_{2,0}, a_{2,N}$ можно найти из условий (20).

д) Пусть среднеквадратичный разрыв третьей производной сплайна по всем внутренним точкам минимален:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{N-1} [S''']_k^2 = \frac{144}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} (a_{2,k} - G_k/6)^2 \rightarrow \min. \quad (22)$$

Необходимо выполнить условия, используя $a_{2,k}$ из решения (13):

$$\partial\Psi/\partial C_1 = 0, \quad \partial\Psi/\partial C_2 = 0. \quad (23)$$

Это дает алгоритм для вычисления коэффициентов и правых частей системы (14). Далее вычисляются C_1, C_2 и все коэффициенты сплайна.

4. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

После выбора функции $f(x)$ и варианта граничных условий проделать следующее:

— Задать число интервалов N (5 – 80) с точками $x_k = kh$, ($k = 0, \dots, N$) и число демонстрационных интервалов N_1 (≈ 320) с точками $x_j = jh_1$, $h_1 = 1/N_1$, ($j = 0, \dots, N_1$).

— Сосчитать коэффициенты сплайна, а также в точках x_j значения f_j, S_j ; f'_j, S'_j ; f''_j, S''_j . При этом для каждого x_j нужно определить его k -й отрезок. Выдать на печать таблицы и построить графики парами f_j, S_j ; f'_j, S'_j ; f''_j, S''_j . Учесть, что у каждой пары свой масштаб.

— Установить сходимость (удваивая N). При непрерывности производных от $f(x)$ вплоть до четвертой (достаточное условие)

$S \rightarrow f$, $S' \rightarrow f'$, $S'' \rightarrow f''$, с 4-м, 3-м и 2-м порядком соответственно. При разрыве $f''(x)$ в какой-либо точке x порядок сходимости будет 2-й, 1-й и 0-й (т. е. никакой) соответственно.

Библиографический список

1. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

Глава 2. ПОСТРОЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО ЛОКАЛЬНОГО СПЛАЙНА

Локальный сплайн, в отличие от интерполяционного, в случае изменения значения аппроксимируемой функции в одном узле требует лишь локального пересчета в окрестности этого узла. То, что локальный сплайн не совпадает точно с функцией в узлах, не является принципиальным, если эта функция задана приближенно с какой-либо случайной погрешностью, например в результате эксперимента.

В данной работе предлагается построить так называемый локальный "В-сплайн" для функций с непрерывной и разрывной вторыми производными и показать сходимость его (и производных) к этим функциям (и их производным).

Кроме того, предлагается вариант нелокального сглаживающего сплайна, получаемого с помощью метода наименьших квадратов.

1. Постановка задачи

Отрезок $0 \leq x \leq 1$ разобьем равномерно на N частей с узлами $x_l = lh$, $h = 1/N$, $l = 0, \dots, N$. В этих узлах заданы значения функции $f(x_l) = f_l$.

Построим для l -го узла функцию (локальный базис)

$$B_l(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - t^2 + \frac{1}{2}|t|^3 & \text{при } |t| \leq 1, \\ \frac{1}{6}(2 - |t|)^3 & \text{при } 1 \leq |t| \leq 2, \\ 0 & \text{при } |t| \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $t = (x - x_l)/h$.

Очевидно, что $B_l(x)$ отлична от нуля только на отрезке $x_{l-2} \leq x \leq x_{l+2}$, причем $B_l(x)$, $B'_l(x)$, $B''_l(x)$ непрерывны (рис. 1).

Построим сплайн в виде

$$S(x) = \sum_{l=-1}^{N+1} z_l B_l(x), \quad (2)$$

где коэффициенты z_l подлежат определению.

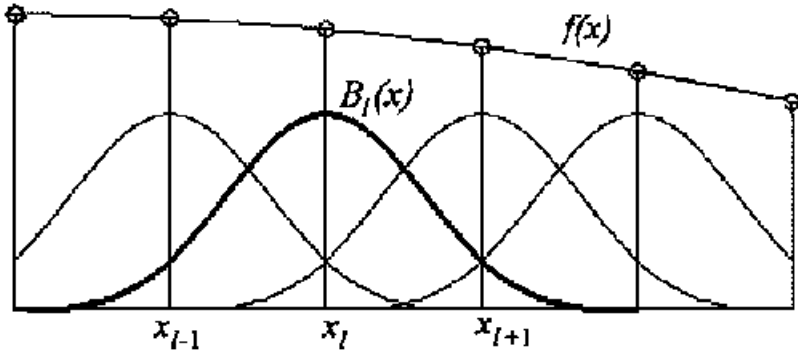


Рис. 1

Для значений x на l -ом отрезке $[x_l, x_{l+1}]$ имеем

$$S(x) = S_l(x) = z_{l-1}B_{l-1}(x) + z_l B_l(x) + z_{l+1}B_{l+1}(x) + z_{l+2}B_{l+2}(x). \quad (3)$$

Пусть $t_l = t = (x - x_l)/h$. Тогда

$$t_{l-1} = (x - x_{l-1})/h = t + 1, \quad t_{l+1} = (x - x_{l+1})/h = t - 1,$$

$$t_{l+2} = (x - x_{l+2})/h = t - 2.$$

Подставляя эти величины (с учетом (1)) в формулу (3), получаем для сплайна $S_l(x)$ и его производных выражения

$$S_l(x) = (V_3 t^3 + 3V_2 t^2 + 3V_1 t + V_0)/6; \quad (4)$$

$$S'_l(x) = (V_3 t^2 + 2V_2 t + V_1)/(2h); \quad (5)$$

$$S''_l(x) = (V_3 t + V_2)/h^2; \quad (6)$$

$$S'''_l = V_3/h^3, \quad (7)$$

где введены обозначения

$$V_0 = z_{l+1} + 4z_l + z_{l-1}; \quad (8)$$

$$V_1 = z_{l+1} - z_{l-1}; \quad (9)$$

$$V_2 = z_{l+1} - 2z_l + z_{l-1}; \quad (10)$$

$$V_3 = z_{l+2} - 3z_{l+1} + 3z_l - z_{l-1}. \quad (11)$$

2. Определение коэффициентов сплайна

Рассмотрим здесь некоторые варианты.

2.1. Большое сглаживание, малая точность

Зададим коэффициенты сплайна в виде:

$$z_l = f_l. \quad (12)$$

При этом для $x = x_l \quad t = 0$ и из формулы (4) следует

$$S_l(x_l) = V_0/6 = (f_{l+1} + 4f_l + f_{l-1})/6. \quad (13)$$

Разлагая в выражении (13) f_{l-1}, f_{l+1} в ряд Тэйлора в окрестности x_l , получаем

$$S_l(x) = f_l + (f_{l+1} - 2f_l + f_{l-1})/6 = f_l + \frac{h^2}{6} f_l'' + O(h^4). \quad (14)$$

Из формулы (13) следует, что для получения $S_0(x_0)$ и $S_N(x_N)$ потребуется доопределение f_{-1} и f_{N+1} такое, чтобы выражения $f_1 - 2f_0 + f_{-1}$ и $f_{N+1} - 2f_N + f_{N-1}$ в формуле (14) были либо нулевыми, либо малыми второго порядка, т. е. $O(h^2)$.

Так, если известны (заданы) значения f_0'', f_N'' , то

$$f_{-1} = 2f_0 - f_1 + h^2 f_0'', \quad f_{N+1} = 2f_N - f_{N-1} + h^2 f_N''. \quad (15)$$

Если известны (заданы) значения f_0', f_N' , то

$$f_{-1} = f_1 - 2hf_0', \quad f_{N+1} = f_{N-1} + 2hf_N'. \quad (16)$$

Подставляя $z_l = f_l$ в выражения (8)–(11), разлагая f_{l-1}, f_{l+1} в ряд Тэйлора и используя далее формулы (4)–(6), несложно показать, что для $x_l \leq x \leq x_{l+1}$ и $l = 0, \dots, N$

$$S_l(x) = f(x) + O(h^2), \quad S'_l = f'(x) + O(h^2),$$

$$S''_l = f'' + \begin{cases} O(h^2) & \text{в варианте (15),} \\ O(h) & \text{в варианте (16).} \end{cases}$$

2.2. Малое сглаживание, большая точность

В этом случае положим

$$z_l = (-f_{l+1} + 8f_l - f_{l-1})/6. \quad (17)$$

При этом для $x = x_l$ ($t = 0$) из выражения (4) следует

$$\begin{aligned} S_l(x_l) &= V_0/6 = \\ &= f_l - (f_{l-2} - 4f_{l-1} + 6f_l - 4f_{l+1} + f_{l+2})/36 = \\ &= f_l - \frac{h^4}{36} f''''_l + O(h^6). \end{aligned} \quad (18)$$

Из выражения (18) видно, что для получения $S_0(x_0)$ и $S_N(x_N)$ придется доопределять f_{-2} , f_{-1} , f_{N+1} , f_{N+2} . Это проще всего сделать, полагая

$$f_{-1} - 4f_0 + 6f_1 - 4f_2 + f_3 = 0, \quad f_{-2} - 4f_{-1} + 6f_0 - 4f_1 + f_2 = 0; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_{N-3} - 4f_{N-2} + 6f_{N-1} - 4f_N + f_{N+1} &= 0, \\ f_{N-2} - 4f_{N-1} + 6f_N - 4f_{N+1} + f_{N+2} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

При этом $S(x_0) = f_0$, $S(x_N) = f_N$ точно. Также несложно разложением в ряд Тэйлора значений f_{l-1}, f_{l+1} в формуле (17) и использованием формул (8)–(11) и затем (4)–(6) показать, что

$$S(x) = f(x) + O(h^4), \quad S'(x) = f'(x) + O(h^3), \quad S''(x) = f''(x) + O(h^2).$$

Условия (19) и (20) означают, что на отрезке $[x_{-1}, x_0]$ и $[x_0, x_1]$ $f(x)$ является одним и тем же полиномом третьей степени. Аналогично — на отрезках $[x_{N-1}, x_N]$, $[x_N, x_{N+1}]$.

2.3. Нелокальный сглаживающий сплайн. Метод наименьших квадратов

Введем еще одну равномерную сетку с узлами

$$x_j = jh_1; \quad j = 0, \dots, N_1; \quad h_1 = 1/N_1; \quad N_1 > N; \quad N_1 \text{ кратно } N.$$

Будем минимизировать функционал

$$Y = \sum_{j=0}^{N_1} \left[\sum_{l=-1}^{N+1} z_l B_l(x_j) - f(x_j) \right]^2. \quad (21)$$

Условия минимума (по z) этого функционала $\partial Y / \partial z_k = 0$ при $k = -1, \dots, N+1$ представляют систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=-1}^{N+1} a_{k,l} z_l = b_k, \quad (22)$$

где

$$a_{k,l} = \sum_{j=0}^{N_1} B_k(x_j) B_l(x_j), \quad b_k = \sum_{j=0}^{N_1} B_k(x_j) f(x_j). \quad (23)$$

Ее решение (по Гауссу) позволяет найти коэффициенты z_l , а, следовательно, построить сплайн $S(x)$ и его производные по формулам (4)–(11) при $l = -1, \dots, N-1$.

Замечание к пп 2.1. и 2.3. Значение z_{N+2} здесь не находится. Если нужно найти $S'''(x_N)$, требующее его в выражениях (7) и (11), то можно посчитать на отрезке $[x_{N-1}, x_N]$ по формуле

$$S'''(x_N) = S'''_{N-1}(x_N),$$

т. е. на отрезке $[x_{N-1}, x_N]$ при $t = 1$. Впрочем, таким же образом можно посчитать $S(x_N)$, $S'(x_N)$, $S''(x_N)$, если это удобнее при программировании.

3. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

Для выбранного варианта функции $f(x)$, условий построения и вида сплайна проделать следующее:

— Задать сетки узлов x_l , ($l = -2, \dots, N+2$); x_j , ($j = 0, \dots, N_1$).
— Получить z_l , f_l . Затем найти $S_j = S(x_j)$, f_j ; S'_j, f'_j ; S''_j, f''_j ,
а также погрешности $\max_j |f_j^{(p)} - S_j^{(p)}|$, $p = 0, 1, 2$.

— Построить графики парами f_j, S_j ; f'_j, S'_j ; f''_j, S''_j . Учесть, что у каждой пары свой масштаб.

— Удваивая N при фиксированном максимальном N_1 , продемонстрировать порядок сходимости $S^{(p)} \rightarrow f^{(p)}$ $p = 0, 1, 2$. Например, ($N = 10, 20, 40, 80$; $N_1 = 160$). При этом, если $f''''(x)$ ограничена (достаточное условие), то (пп 2.2 и 2.3.) порядок сходимости должен быть 4-й, 3-й и 2-й соответственно. Если же $f''(x)$ разрывна, то 2-й, 1-й и 0-й (никакой !).

-
1. Бахвалов Н. С. и др. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987.

Глава 3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, в случае системы линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей удастся легко построить сходящийся итерационный процесс.

Поставленная здесь задача дает именно такую систему, при этом каждая итерация может быть наглядно (графически) представлена.

1. Постановка задачи об аппроксимации "экспериментальной" функции по методу наименьших квадратов

Пусть в точках $x_j = jh$, $j = 0, \dots, N$; $h = 1/N$; $0 \leq x_j \leq 1$ заданы значения

$$f_j = g(x_j) + \varepsilon_j, \quad (1)$$

где $g(x)$ — некая известная (заданная) "экспериментальная" функция, а ε_j — случайные погрешности "эксперимента" причем $|\varepsilon| \leq \varepsilon$.

По выбранной (известной) системе базисных функций $\phi_l(x)$ построим функцию

$$Y(x) = \sum_{l=0}^M z_l \phi_l(x), \quad (2)$$

z_l подбирается минимизацией функционала

$$Q = \sum_{j=0}^N (Y(x_j) - f_j)^2, \quad (3)$$

т. е. из условий $\partial Q / \partial z_l = 0$, ($k = 0, \dots, M$), приводящим к системе

линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=0}^M a_{kl} z_l = b_k, \quad (4)$$

$$a_{kl} = \sum_{j=0}^N \phi_k(x_j) \phi_l(x_j), \quad b_k = \sum_{j=0}^N f_j \phi_k(x_j) \quad (5)$$

с симметричной положительно определенной матрицей A .

2. Итерационные методы

Для решения системы (4) здесь предлагается испытать три итерационных метода. Хотя эти итерации имеют одинаковую по порядку скорость сходимости, в каждом конкретном случае их фактическая эффективность не одинакова.

Далее ниже $z_k^{(0)}$ — заданный как-то вектор начального приближения, например $z_k^{(0)} = 0$; $i = 0, \dots, i_T$; i_T — заданное (достаточное) число итераций.

2.1. Оптимальный итерационный процесс (Якоби) со скалярным параметром

Рассмотрим итерацию вида

$$z_k^{(i+1)} = z_k^{(i)} - \alpha \left(\sum_{l=0}^M a_{kl} z_l^{(i)} - b_k \right), \quad (k = 0, \dots, M); \quad (6)$$

$$\alpha = 2/(\lambda_{\min} + \lambda_{\max}) \approx 2\sigma/\|A\|, \quad \sigma \approx 1. \quad (7)$$

Здесь $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ — наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы системы, $\|A\|$ — любая норма матрицы A .

2.2. Наискорейший градиентный спуск

В выражении (6) α возьмем в виде

$$\alpha = \frac{\sum_{k=0}^M (R_k^{(i)})^2}{\sum_{k=0}^M (\sum_{l=0}^M a_{kl} R_l^{(i)}) R_k^{(i)}}, \quad R_k^{(i)} = \sum_{l=0}^M a_{kl} z_l^{(i)} - b_k. \quad (8)$$

Эта итерация, в отличие от предыдущей, не требует знания собственных чисел матрицы A .

2.3. Итерация Зейделя

Эта итерация является своеобразной модификацией итерации (6).

$$z_k^{(i+1)} = z_k^{(i)} - \alpha \left(\sum_{l=0}^M a_{kl} z_l^{(i+\nu)} - b_k \right), \quad k = 0, \dots, M; \quad (9)$$

$$\alpha = \sigma / a_{kl}, \quad \sigma = 1, \quad \nu = \begin{cases} 1, & \text{если } l < k, \\ 0, & \text{если } l \geq k. \end{cases} \quad (10)$$

При $1 < \sigma \leq 2$ этот процесс называется итерацией верхней релаксации.

3. Некоторые варианты базисных функций $\phi_l(x)$

1. Кусочно-кубические функции

$$\phi_l(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - t^2 + \frac{1}{2}|t|^3, & \text{если } |t| \leq 1, \\ \frac{1}{6}(2 - |t|)^3, & \text{если } 1 \leq |t| \leq 2, \\ 0, & \text{если } |t| \geq 2. \end{cases}$$

Здесь $t = (x - x_l)/h_l$, $h_l = 1/M$, $x_l = lh_l$. В этом варианте при суммировании рядов и при перечислении индексов следует взять $k, l = -1, \dots, M + 1$.

2. Кусочно-линейные функции

$$\phi_l(x) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{если } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Здесь $t = (x - x_l)/h_l$, $h_l = 1/M$, $x_l = lh_l$.

3. Полиномиальная аппроксимация

$$\phi_l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } l = 0, \text{ даже при } x = 0, \\ x^l, & \text{если } l > 0. \end{cases}$$

Этот вариант при $M > 4$ приводит к очень медленно сходящимся итерациям.

4. Полиномы Чебышева

$$\phi_l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } l = 0, \\ t, & \text{если } l = 1, \\ 2t\phi_{l-1}(x) - \phi_{l-2}(x), & \text{если } l > 1. \end{cases}$$

Здесь $t = 2x - 1$.

4. Рекомендации по проведению расчетов и методических исследований

После выбора системы функций $\phi_l(x)$ и "экспериментальной" аппроксимируемой функции $g(x)$ следует проделать:

1. Задать $M = 2 - 10$, $N = 10 - 50$, $\varepsilon = 0 - 0,005$.

2. Получить матрицу $A = [a_{kl}]$, вектор b_k и норму $\|A\|$. Выдать на печать (таблицу). Симметрия матрицы является частичным подтверждением правильности расчетов.

3. Задать итерационные параметры $\sigma \approx 1$, $i_T = 10 - 50$, α в соответствии с выбранной итерацией. Задать начальное приближение $z^{(0)}$.

4. Прodelать контрольное (заданное) число итераций и выдать на печать таблицу $i, z_k^{(i)}$ $i = 0, \dots, i_T$. Кроме того, на каждой итерации получить

$$Y^{(i)} = \sum_{l=0}^M z_l^{(i)} \phi_l(x_j), \quad S^{(i)} = \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N (Y^{(i)}(x_j) - f_j)^2}. \quad (11)$$

Выдать $S^{(i)}$ вместе с $z_k^{(i)}$.

5. Для итераций (6) и (9), анализируя таблицу, подобрать σ в окрестности единицы, при котором сходимость наилучшая. Экспериментально найти σ , при которых итерационный процесс расходуется.

6. Сосчитать и выдать графики f_j и (со стиранием значений на предыдущей итерации) $Y^{(i)}$. На этом же графике выдать все заданные параметры.

Библиографический список

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
2. Бахвалов Н. С. и др. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989.

Глава 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

При счете задачи Коши получаемые численные значения решения из-за погрешности метода и расчета смещаются на каждом шаге с выбранной начальными данными интегральной кривой на близкую "соседнюю". Если веер интегральных кривых в области решения "расходящийся" то погрешность решения на конечном интервале может быть значительной, особенно для методов невысокого порядка (например Эйлера).

Однако, последовательно уменьшая шаг интегрирования, можно убедиться в сходимости даже грубых методов.

Данная работа на примере линейного уравнения дает возможность наглядно продемонстрировать преимущество методов Рунге—Кутты высоких порядков, а также сходимость любого из этих методов на конечном интервале, причем с теоретически предписанной точностью.

Кроме того, интересно сопоставить методы Рунге—Кутта и Адамса одного и того же порядка.

1. Постановка задачи. Тестовое решение

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y) \equiv g'(x) + p(y - g(x)), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad p > 0, \quad (1)$$

$g(x)$ — заданная функция типа $\sin(\pi x)$, $\cos(\frac{\pi}{2}x)$, $\exp(-x^2)$ и др.

Пусть при $x = 0$ выполняется условие

$$y(0) = y_0 = g(0). \quad (2)$$

Тогда из общего решения уравнения (1)

$$y(x) = C \exp(px) + g(x), \quad C = \text{const}$$

выделяется частное $y = g(x)$, которое будет здесь как тестовое.

2. Различные расчетные формулы

Получим численное решение задачи Коши (1), (2) в узлах $x_j = jh$, $h = 1/N$, $j = 0, \dots, N$, где N — заданный параметр.

Здесь для справки приводятся хорошо известные формулы Рунге—Кутты (и в частности Эйлера) с различной погрешностью на всем интервале $R = Ch^q$. Погрешность на каждом шаге будет $C_1 h^{q+1}$ ($C, C_1 = \text{const}$).

$$\text{a) } y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) \quad (\text{формула Эйлера}), \quad R = Ch;$$

$$\text{b) } k_1 = hf(x_j, y_j), \quad k_2 = hf(x_j + h/2, y_j + k_1/2), \\ y_{j+1} = y_j + k_2, \quad R = Ch^2;$$

$$\text{c) } k_1 = hf(x_j, y_j), \quad k_2 = hf(x_j + h, y_j + k_1), \\ y_{j+1} = y_j + (k_1 + k_2)/2, \quad R = Ch^2;$$

$$\text{d) } k_1 = hf(x_j, y_j), \quad k_2 = hf(x_j + h/2, y_j + k_1/2), \\ k_3 = hf(x_j + h, y_j - k_1 + 2k_2), \\ y_{j+1} = y_j + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6, \quad R = Ch^3;$$

$$\text{e) } k_1 = hf(x_j, y_j), \quad k_2 = hf(x_j + h/3, y_j + k_1/3), \\ k_3 = hf(x_j + \frac{2}{3}h, y_j + \frac{2}{3}k_2), \\ y_{j+1} = y_j + (k_1 + 3k_3)/4, \quad R = Ch^3;$$

$$\text{f) } k_1 = hf(x_j, y_j), \quad k_2 = hf(x_j + h/2, y_j + k_1/2), \\ k_3 = hf(x_j + h/2, y_j + k_2/2), \\ k_4 = hf(x_j + h, y_j + k_3), \\ y_{j+1} = y_j + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \quad R = Ch^4;$$

$$\text{g) } k_1 = hf(x_j, y_j), \quad k_2 = hf(x_j + h/4, y_j + k_1/4), \\ k_3 = hf(x_j + h/2, y_j + k_2/2), \\ k_4 = hf(x_j + h, y_j + k_1 - 2k_2 + 2k_3), \\ y_{j+1} = y_j + (k_1 + 4k_3 + k_4)/6, \quad R = Ch^4.$$

Для сравнения добавим к этим формулам две формулы Адамса (явную и неявную):

$$\text{h) } y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}(55y'_j - 59y'_{j-1} + 37y'_{j-2} - 9y'_{j-3}), \quad R = Ch^4;$$

$$\text{i) } y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}(9y'_{j+1} + 19y'_j - 5y'_{j-1} + y'_{j-2}), \quad R = Ch^4.$$

Здесь y'_j находятся по формуле (1). Необходимые "стартовые" значения y_j можно получить по формулам Рунге—Кутты "f" или "g". В неявной формуле Адамса "i" значение y_{j+1} может быть либо сначала предварительно вычислено по явной формуле "h" а затем уточнено по формуле "i" либо, используя линейность задачи, непосредственно из "i" как линейного уравнения.

3. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

Для выбранного решения $g(x)$ и заданного набора методов различного порядка (трех-четырех, например "a" "c" "f" и "i") выполнить следующее:

1. Задать $N = 10$, $p \approx 6$ и получить численное решение задачи (1), (2) по этим формулам, а также тестовое решение $g(x)$ в узлах сетки x_j , ($j = 0, \dots, N$). Решение выдать в виде графика и таблицы. Выдать также вместе с решениями норму погрешности $Norm_C = \max_j |y_j - g(x_j)|$.

2. Убедиться, что более точный (по порядку) метод дает лучшее приближение к тестовому решению (рис. 2, где Y_1, Y_2, Y_3 и G — решения типа "a" "b" "d" и тестовое соответственно). Проверить этот вывод при различных p .

3. Последовательно уменьшая шаг h вдвое ($N = 20, 40, 80, \dots$), убедиться в сходимости всех этих численных решений к точному (тестовому), причем фактическая максимальная абсолютная погрешность любого из этих методов должна иметь предписанный теорией порядок. При этом 1-й порядок метода Эйлера (формула "a") четко проявится только при больших N ($\approx 160, 320, \dots$).

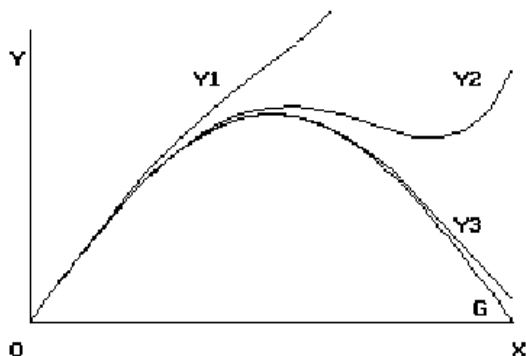


Рис. 2

4. Сравнить точность расчетов и специфику алгоритмов методов Рунге—Кутты и Адамса.

Библиографический список

1. Бахвалов Н. С. и др. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989.
4. Ахмеров Р. Р. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1994.

Глава 5. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ

Задача Коши для системы по методу Рунге—Кутта решается по формулам, аналогичным по виду формулам для случая решения одного уравнения

$$dw/dt = f(t, w), \quad w(t_0) = W_0.$$

Однако здесь мы имеем дело с векторами $w = (u, v)$, $W_0 = (U_0, V_0)$ и вектор - функцией $f = (f_1, f_2)$. Для каждой функции u и v необходимо вычислить свои последовательности приращений $k_1, k_2, \dots$ и $q_1, q_2, \dots$.

В данной работе на примере задачи о движении частицы в постоянном магнитном поле предлагается показать (в сравнении) работу методов Рунге—Кутта различного порядка, а также сходимость численных решений к точному с предписанными теорией порядками погрешностей.

1. Постановка задачи. Тестовое решение

Пусть B — магнитное поле, m, e, c — масса, заряд частицы и скорость света соответственно, $R = Be/(mc)$.

Система дифференциальных уравнений движения частицы имеет вид

$$\left. \begin{aligned} du/dt &= f_1(v) = Rv, \\ dv/dt &= f_2(u) = -Ru. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{При } t = 0 \quad u = U_0, \quad v = V_0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Здесь u, v — скорости частицы, t — время. Положим для удобства расчетов и оценок $R = 2\pi$, $T = 1$. Кроме того, для координат частицы x, y имеем

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= u, \\ dy/dt &= v. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{При } t = 0 \quad x = x_0, \quad y = y_0. \quad (4)$$

По формулам различного порядка (см. ниже) решается задача (1), (2) в узлах

$$t_j = j\tau, \quad \tau = 1/N, \quad N = 10, 20, 40, 80, \dots$$

В результате находятся значения u_j, v_j для $j = 1, \dots, N$, а u_0, v_0 уже были заданы по формулам (2).

Из систем (1) и (3) следует

$$\frac{d}{dt}(x + v/R) = 0, \quad \text{т. е. } x + v/R = x_0 + V_0/R = \text{const} = x_c; \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}(y - u/R) = 0, \quad \text{т. е. } y - u/R = y_0 - U_0/R = \text{const} = y_c. \quad (6)$$

Следовательно, с учетом начальных значений (2) и (4)

$$x_j = x_c - v_j/R, \quad y_j = y_c + u_j/R. \quad (7)$$

Тестовое решение (здесь, точное) непосредственно получается из системы (1) и уравнений (5) и (6)

$$u_T(t_j) = U_0 \cos Rt_j + V_0 \sin Rt_j; \quad (8)$$

$$v_T(t_j) = V_0 \cos Rt_j - U_0 \sin Rt_j; \quad (9)$$

$$x_T(t_j) = x_c - v_T(t_j)/R, \quad y_T(t_j) = y_c + u_T(t_j)/R, \quad (10)$$

причем x_T и y_T образуют окружность с центром x_c, y_c и радиусом R_c :

$$(x_T(t_j) - x_c)^2 + (y_T(t_j) - y_c)^2 = R_c^2, \quad R_c = \frac{1}{R} \sqrt{U_0^2 + V_0^2}. \quad (11)$$

2. Формулы Рунге—Кутта различного порядка

Приведем для справки ряд формул различного порядка точности с погрешностью на отрезке $0 \leq t \leq 1$. Приращения k_1, q_1 по виду (но не по значениям !) одинаковы для всех вариантов.

$$k_1 = \tau f_1(v_j), \quad q_1 = \tau f_2(u_j).$$

- a) $u_{j+1} = u_j + k_1, \quad v_{j+1} = v_j + q_1$ (формула Эйлера) $O(h);$
- b) $k_2 = \tau f_1(v_j + q_1/2), \quad q_2 = \tau f_2(u_j + k_1/2),$
 $u_{j+1} = u_j + k_2, \quad v_{j+1} = v_j + q_2, \quad O(h^2);$
- c) $k_2 = \tau f_1(v_j + q_1), \quad q_2 = \tau f_2(u_j + k_1),$
 $u_{j+1} = u_j + (k_1 + k_2)/2, \quad v_{j+1} = v_j + (q_1 + q_2)/2, \quad O(h^2);$
- d) $k_2 = \tau f_1(v_j + q_1/2), \quad q_2 = \tau f_2(u_j + k_1/2),$
 $k_3 = \tau f_1(v_j - q_1 + 2q_2), \quad q_3 = \tau f_2(u_j - k_1 + 2k_2),$
 $u_{j+1} = u_j + (k_1 + 4k_2 + k_3)/6,$
 $v_{j+1} = v_j + (q_1 + 4q_2 + q_3)/6, \quad O(h^3);$
- e) $k_2 = \tau f_1(v_j + q_1/3), \quad q_2 = \tau f_2(u_j + k_1/3),$
 $k_3 = \tau f_1(v_j + 2q_2/3), \quad q_3 = \tau f_2(u_j + 2k_2/3),$
 $u_{j+1} = u_j + (k_1 + 3k_3)/4, \quad v_{j+1} = v_j + (q_1 + 3q_3)/4, \quad O(h^3);$
- f) $k_2 = \tau f_1(v_j + q_1/2), \quad q_2 = \tau f_2(u_j + k_1/2),$
 $k_3 = \tau f_1(v_j + q_2/2), \quad q_3 = \tau f_2(u_j + k_2/2),$
 $k_4 = \tau f_1(v_j + q_3), \quad q_4 = \tau f_2(u_j + k_3),$
 $u_{j+1} = u_j + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6,$
 $v_{j+1} = v_j + (q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)/6, \quad O(h^4);$
- g) $k_2 = \tau f_1(v_j + q_1/4), \quad q_2 = \tau f_2(u_j + k_1/4),$
 $k_3 = \tau f_1(v_j + q_2/2), \quad q_3 = \tau f_2(u_j + k_2/2),$
 $k_4 = \tau f_1(v_j + q_1 - 2q_2 + 2q_3),$
 $q_4 = \tau f_2(u_j + k_1 - 2k_2 + 2k_3),$
 $u_{j+1} = u_j + (k_1 + 4k_3 + k_4)/6,$
 $v_{j+1} = v_j + (q_1 + 4q_3 + q_4)/6, \quad O(h^4).$

3. Погрешности расчетов

Для произвольного варианта вышеперечисленных формул погрешности расчетов (в пространстве C) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ имеют вид

$$Norm_C u = \max_j |u_j - u_T(t_j)| = C_1 h^s; \quad (12)$$

$$Norm_C v = \max_j |v_j - v_T(t_j)| = C_2 h^s, \quad (13)$$

где C_1, C_2 произвольные константы, $s = 1, 2, 3$ или 4.

Однако поскольку точки $(x_T(t_j), y_T(t_j))$ описывают окружность, а точки (x_j, y_j) "спираль" то удобнее следить на графиках и оценивать погрешность "расстояния" ρ :

$$\begin{aligned} \rho_j &= \sqrt{(x_j - x_T(t_j))^2 + (y_j - y_T(t_j))^2} = \\ &= \sqrt{((v_j - v_T(t_j))^2 + (u_j - u_T(t_j))^2)/R^2}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$Norm_C \rho = \max_j |\rho_j| = \frac{h^s}{R} \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad (15)$$

т. е. нормы (12), (13) и (15) имеют одинаковый порядок.

4. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

В данной работе рекомендуется следующее:

— Для двух-трех заданных методов ("a" – "g") и для различных $j = 10, 20, 40, 80, \dots$ посчитать значения

$$u_j, v_j, x_j, y_j, u_T(t_j), v_T(t_j), x_T(t_j), y_T(t_j), x_c, y_c, R_c,$$

а также погрешность $Norm_C \rho$.

— Построить окружность по значениям $(x_T(t_j), y_T(t_j))$, а также "спираль" по (x_j, y_j) . Убедиться, что погрешность (15) стремится к нулю (при $\tau \rightarrow 0$) в соответствии с предписанной теорией порядком.

— Предусмотреть (для отладки программы) возможность выдачи в текстовом режиме таблиц значений скоростей и координат частицы.

Библиографический список

1. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. Бахвалов Н. С. и др. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989.

Глава 6. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ "ЖЕСТКИХ СИСТЕМ". ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Как известно, при численном решении "жестких систем" дифференциальных уравнений по методу Рунге—Кутты явные формулы требуют чрезмерного уменьшения шага по времени. От этого недостатка свободны неявные формулы. Однако в общем случае при этом возникает проблема их разрешения (посредством итераций) на каждом шаге.

В данной работе на примере системы двух линейных уравнений можно обойтись без итераций и проследить работу неявных формул Эйлера и их преимущества перед явными.

1. Постановка задачи. Тестовое решение

В области $0 = a \leq x \leq b = 1$ рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) \equiv r_{11}y_1 + r_{12}y_2 + v_1(x), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2) \equiv r_{21}y_1 + r_{22}y_2 + v_2(x); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$y_1(0) = y_{1,a}, \quad y_2(0) = y_{2,a}. \quad (2)$$

Здесь $r_{11}, \dots, r_{22}$ — заданные коэффициенты; $v_1(x), v_2(x)$ — заданные функции; $y_{1,a}, y_{2,a}$ — заданные начальные данные Коши (см. ниже).

Возьмем две функции (тестовые решения) $g_1(x), g_2(x)$ и два параметра p_1, p_2 , отрицательные и такие, что отношение $|p_2/p_1|$ велико. Например, $p_1 = -1$, $p_2 = -500$. Кроме того, возьмем четыре произвольных параметра $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ таких, что

$$\det = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0.$$

Пусть

$$r_{11} = (c_{11}c_{22}p_1 - c_{12}c_{21}p_2)/\det,$$

$$r_{12} = c_{11}c_{12}(p_2 - p_1)/\det,$$

$$r_{21} = -c_{21}c_{22}(p_2 - p_1)/det,$$

$$r_{22} = (c_{11}c_{22}p_2 - c_{21}c_{12}p_1)/det.$$

Пусть также

$$v_1(x) = g'_1(x) - r_{11}g_1(x) - r_{12}g_2(x),$$

$$v_2(x) = g'_2(x) - r_{21}g_1(x) - r_{22}g_2(x).$$

Тогда общим решением системы (1) будет

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} e^{p_1 x} + C_2 \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} e^{p_2 x} + \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Если выбрать начальные данные Коши (2) в виде

$$y_1(0) = y_{1,a} = g_1(0), \quad y_2(0) = y_{2,a} = g_2(0),$$

тогда $C_1 = C_2 = 0$, и получаем требуемое тестовое решение

$$y_1(x) = g_1(x), \quad y_2(x) = g_2(x). \quad (4)$$

Замечание. В решении (3) два произвольных параметра лишние, их можно зафиксировать, например $c_{11} = c_{22} = 1$. Тогда c_{12}, c_{21} подбираются из условия $det = 1 - c_{12}c_{21} \neq 0$.

2. Формулы Эйлера

В области $0 \leq x \leq 1$ введем равномерную сетку $x_j = jh$, $h = 1/N$, $j = 0, \dots, N$, где N — заданный параметр.

Рассмотрим два вида формул второго (на шаге) порядка.

Явная формула Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} y_{1,j+1} &= y_{1,j} + hf_1(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}), \\ y_{2,j+1} &= y_{2,j} + hf_2(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Неявная формула Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} y_{1,j+1} &= y_{1,j} + h(r_{11}y_{1,j+1} + r_{12}y_{2,j+1} + v_1(x_{j+1})), \\ y_{2,j+1} &= y_{2,j} + h(r_{21}y_{1,j+1} + r_{22}y_{2,j+1} + v_2(x_{j+1})). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В силу линейности выражений в (6) относительно $y_{1,j+1}, y_{2,j+1}$ можно (без итераций) найти

$$\left. \begin{aligned} y_{1,j+1} &= ((1 - hr_{22})w_1 + hr_{12}w_2)/\Delta, \\ y_{2,j+1} &= (hr_{21}w_1 + (1 - hr_{11})w_2)/\Delta, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $\Delta = (1 - hr_{11})(1 - hr_{22}) - h^2r_{12}r_{21}$, $w_1 = y_{1,j} + hv_1(x_{j+1})$, $w_2 = y_{2,j} + hv_2(x_{j+1})$.

3. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

1. Выбрать тестовое решение, например:

$$g_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad g_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

начальные данные задать по формулам (4).

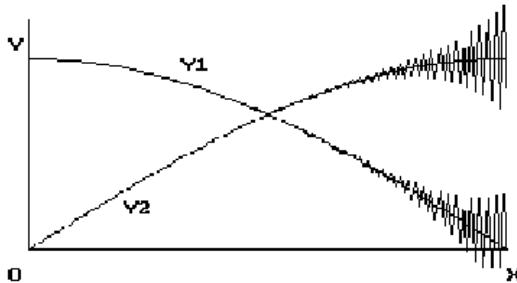


Рис. 3

2. Задать p_1, p_2 , обеспечивающие системе "жесткость", например, $p_1 = -1$, $p_2 = -500$.

3. Убедиться, что только при $N \geq |p_2|/2$ счет по явной схеме устойчив, как и предписывает теория, а при меньших N наступает разболтка (рис. 3).

4. Убедиться также, что неявная схема устойчиво считает при любых N .

5. Результаты выдать в таблицах и на графиках в сопоставлении с тестовым решением. Кроме того, выдать вместе с расчетами все задаваемые параметры.

6. Счет по явной и по неявной схемам организовать как независимые варианты.

Библиографический список

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989.
2. Ахмеров Р. Р. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск : НГУ, 1994.

Глава 7. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

Формальная замена производных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка сводит дифференциальную задачу к разностной со вторым порядком аппроксимации.

В граничных условиях смешанного типа, предлагаемых здесь, аппроксимация производных должна иметь порядок также не ниже второго, иначе пострадает точность расчетов.

Эффективным методом решения полученной разностной задачи является прогонка. Однако в реализации смешанного типа граничных условий (со вторым порядком) возникают технические сложности, которые исполнителю предстоит самостоятельно преодолеть на алгоритмическом и программном уровнях.

Предлагается убедиться в преимуществе условий, полученных со вторым порядком в сравнительном счете, а также проследить за сходимостью со вторым (или первым) порядком.

1. Постановка задачи

Пусть в области $0 = a \leq x \leq b = 1$ дано уравнение

$$u'' - p(x)u = f(x) \quad (1)$$

с граничными условиями смешанного типа

$$l_a(u, u') = 0 \quad (\text{при } x = a = 0); \quad (2)$$

$$l_b(u, u') = 0 \quad (\text{при } x = b = 1). \quad (3)$$

Условия (2), (3) — линейные выражения, связывающие u, u' , например:

$$l_a(u, u') \equiv u' - 2(u - U_a) = 0, \quad l_b(u, u') \equiv u' + 4(u - U_b) = 0,$$

где U_a, U_b — заданные параметры.

В уравнении (1) $p(x)$ и $f(x)$ — заданные функции, например: $p(x) = x^2$, или $p(x) = e^{-x}$, или другие.

$$f(x) = V''(x) - p(x)V(x), \quad (4)$$

где $V(x)$ — известное (заданное) тестовое решение (см. п. 4).

2. Конечно-разностное уравнение. Прогонка

Введем в области $0 \leq x \leq 1$ равномерную сетку с узлами $x_j = jh$, $h = 1/N$, $j = 0, 1, \dots, N$, где N — заданный параметр. В одном из вариантов ("г см. п. 3) удобнее будет сетка со смещенными узлами $x_j = (j - 1/2)h$, $j = 0, \dots, N_1$, при этом концам единичного интервала будут соответствовать узлы $x_{1/2}$, $x_{N+1/2}$. Здесь и далее $N_1 = N + 1$ в варианте "г" и $N_1 = N$ в остальных вариантах.

Аппроксимируем вторую производную с порядком $O(h^2)$:

$$u''(x_j) \approx (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})/h^2, \quad (5)$$

где введены сеточные функции u_j , $u_{j\pm 1}$, причем

$$u(x_j) \approx u_j, \quad u(x_j \pm h) \approx u_{j\pm 1}.$$

Тогда уравнению (1) будет соответствовать разностное уравнение вида

$$Au_{j-1} + B_j u_j + Cu_{j+1} = G_j. \quad (6)$$

Здесь A, B_j, C, G_j элементарно находятся после подстановки выражения (5) в уравнение (1).

Разностное уравнение (6) эффективно решается с помощью метода прогонки:

$$u_j = P_j u_{j+1} + Q_j, \quad (j = 0, \dots, N_1 - 1), \quad (7)$$

где P_j, Q_j выражаются через P_{j-1}, Q_{j-1} по формулам

$$P_j = -C/(AP_{j-1} + B_j), \quad Q_j = (G_j - AQ_{j-1})/(AP_{j-1} + B_j), \quad (8)$$

Чтобы воспользоваться формулой (8), нужно получить P_0 , Q_0 , для чего привлекается граничное условие (2). Для счета u_j по формуле (7) необходимо, кроме сосчитанных P_j , Q_j , иметь значение u_{N_1} , которое, если не задано непосредственно, находится с помощью граничного условия (3).

3. Реализация граничных условий

Рассмотрим несколько вариантов аппроксимации первой производной в граничных условиях при реализации последних.

При $x = 0$:

а) $u'(0) \approx (u_1 - u_0)/h$ — грубое приближение первого порядка, снижающее точность расчетов ;

б) $u'(0) \approx (u_1 - u_{-1})/(2h)$ — аппроксимация второго порядка, использующая значения u_{-1} за пределами единичного интервала;

в) $u'(0) \approx (-3u_0 + 4u_1 - u_2)/(2h)$ — аппроксимация второго порядка, не требующая выхода за пределы единичного интервала;

г) $u'(0) \approx (u_1 - u_0)/h$ — аппроксимация второго порядка на сдвинутой сетке $x_j = (j - 1/2)h$.

Использование выражений "а" "б" "в" или "г" в граничных условиях (2) дает разностное условие $l_a^{(h)}(.) = 0$, связывающее значения u_j в окрестности левой границы, например:

$$l_a^{(h)}(u_{-1}, u_0, u_1) = (u_1 - u_{-1})/(2h) - 2(u_0 - U_a) = 0.$$

Наша цель здесь — исключить, при необходимости привлекая уравнение (6) при $j = 0$ (или $j = 1$), "лишнее" значение u_{-1} (или u_2) и получить соотношение вида $u_0 = \alpha u_1 + \beta$, после чего сравнение с формулой (7) (при $j = 0$) дает необходимые начальные значения P_0 , Q_0 .

Тогда для рассмотренных вариантов имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } l_a^{(h)}(u_0, u_1) = 0; \\ \text{б) } \left. \begin{array}{l} l_a^{(h)}(u_{-1}, u_0, u_1) = 0, \\ Au_{-1} + B_0u_0 + Cu_1 = G_0; \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\text{в) } \left. \begin{aligned} l_a^{(h)}(u_0, u_1, u_2) &= 0, \\ Au_0 + B_1u_1 + Cu_2 &= G_1; \end{aligned} \right\}$$

$$\text{г) } l_a^{(h)}(u_0, u_1) = 0.$$

При $x = 1$:

Чтобы получить u_{N_1} , необходимое для расчета по формуле (7), рассмотрим варианты аппроксимации правого граничного условия. Производная u' может быть приближенно представлена:

а) $u'(1) \approx (u_N - u_{N-1})/h$ — приближение первого порядка;

б) $u'(1) \approx (u_{N+1} - u_{N-1})/(2h)$ — приближение второго порядка, выводящее за границу единичного интервала;

в) $u'(1) \approx (u_{N-2} - 4u_{N-1} + 3u_N)/(2h)$ — приближение второго порядка;

г) $u'(1) \approx (u_{N+1} - u_N)/h$ — приближение второго порядка на сдвинутой сетке. Значению $x = 1$ соответствует индекс $j = N + 1/2$.

Подставим эти аппроксимации в граничное условие (3), которое примет вид разностного условия $l_b^{(h)}(.) = 0$, связывающего два или три значения u_j в окрестности правой границы, например:

$$l_b^{(h)}(u_{N-1}, u_N, u_{N+1}) = (u_{N+1} - u_{N-1})/(2h) + 4(u_N - U_b) = 0.$$

Добавим к этому одно или, если нужно, два прогоночных соотношения (7) и уравнение (6), считая, что все P_j , Q_j уже найдены по формулам (8). Получим системы уравнений для нахождения u_{N_1} :

$$\text{а) } \left. \begin{aligned} l_b^{(h)}(u_{N-1}, u_N) &= 0, \\ u_{N-1} &= P_{N-1}u_N + Q_{N-1}; \end{aligned} \right\}$$

$$\text{б) } \left. \begin{aligned} l_b^{(h)}(u_{N-1}, u_N, u_{N+1}) &= 0, \\ Au_{N-1} + B_Nu_N + Cu_{N+1} &= G_N, \\ u_{N-1} &= P_{N-1}u_N + Q_{N-1}; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{в)} \quad \left. \begin{array}{l} l_b^{(h)}(u_{N-2}, u_{N-1}, u_N) = 0, \\ u_{N-2} = P_{N-2}u_{N-1} + Q_{N-2}, \\ u_{N-1} = P_{N-1}u_N + Q_{N-1}; \end{array} \right\} \\ \\ \text{г)} \quad \left. \begin{array}{l} l_b^{(h)}(u_N, u_{N+1}) = 0, \\ u_N = P_N u_{N+1} + Q_N. \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Решить эти системы и получить P_0, Q_0 и u_{N_1} исполнителю предлагается самостоятельно.

4. Тестовое решение

Возьмем две гладкие функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ (лучше всего $\exp(x)$ и $\exp(-x)$) и сконструируем тестовое решение в виде

$$V(x) = d_0(0.5 - x) \sin^2(2\pi x) + d_1 g_1(x) + d_2 g_2(x), \quad (9)$$

где d_0 зададим как параметр, а d_1, d_2 найдем из граничных условий (2) и (3), которые дадут систему (решить самостоятельно):

$$l_a(V, V') = 0, \quad l_b(V, V') = 0. \quad (10)$$

Очевидно, первое слагаемое из формулы (9) дает нулевой вклад в систему (10) и не влияет на расчет d_1, d_2 , его предназначение — увеличить в демонстрационных целях искривление тестового решения.

Необходимо проследить, чтобы система (10) была невырожденной (при выборе $\exp(x)$, $\exp(-x)$ это практически всегда так); в крайнем случае следует изменить выбор $g_1(x)$, $g_2(x)$.

5. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

В данной работе необходимо провести сравнительные расчеты вариантов "а" и какого-либо другого — "б" "в" или "г". При этом

надо убедиться (сравнением $\|\cdot\|_C$ для погрешности при последовательном сгущении сетки), что вариант "а" дает сходимость первого порядка, а варианты "б" в "г" — второго.

Рекомендуется выполнить следующее:

1. Задать параметры в диапазонах
 $d_0 = 0 - 4$, $N = 10 - 640$, $U_a, U_b = 0 - 2$.
2. Получить и выдать на график (и в таблицу) значения u_j, V_j для $j = 0, \dots, N$. Для варианта "г" на выдачу получить $(u_j + u_{j+1})/2$, $(V_j + V_{j+1})/2$. Впрочем, тест можно сразу считать в узлах $x_{j+1/2}$.
3. Получить и выдать на график (и в таблицу) вместе с результатами погрешность расчетов $Norm_C = \max_j |u_j - V_j|$, а также заданные параметры задачи.

Библиографический список

1. Бахвалов Н. С. и др. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1977.

Глава 8. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. МЕТОДЫ БУБНОВА—ГАЛЕРКИНА И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Рассматриваемые здесь методы по сути своей универсальны и применяются для решения широкого круга задач. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений теоретически обеспечена сходимость. Однако практический успех зависит здесь от удачного выбора системы базисных функций. Для краевых условий смешанного типа этот выбор сделать непросто.

В данной работе предлагается освоить один из таких нетривиальных приемов, основанный на решении так называемой "сходной" задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $0 = a \leq x \leq b = 1$ линейную краевую задачу с условиями смешанного типа:

$$L(u) \equiv u'' - p(x)u = f(x); \quad (1)$$

$$l_a(u, u', U_a) = 0 \quad (\text{при } x = 0); \quad (2)$$

$$l_b(u, u', U_b) = 0 \quad (\text{при } x = 1). \quad (3)$$

Здесь l_a, l_b линейные выражения с заданными коэффициентами, например:

$$l_a(u, u', U_a) \equiv u'(0) - 2(u(0) - U_a) = 0,$$

$$l_b(u, u', U_b) \equiv u'(1) + 4(u(1) - U_b) = 0,$$

где U_a, U_b — заданные параметры; $p(x)$ — известная заданная функция (например $p(x) = x^2$, или $p(x) = \exp(-x)$, или др.);

$f(x) = L(U)$, где $U(x)$ — тестовое решение (см. п. 4).

2. Метод решения

Приближенное решение задачи (1)–(3) будем искать в виде ряда

$$u_M(x) = v(x) + \sum_{l=1}^M c_l \varphi_l(x), \quad (4)$$

где $v(x)$ — линейная функция, коэффициенты которой определяются из граничных условий (2), (3), т. е.

$$l_a(v, v', U_a) = 0, \quad l_b(v, v', U_b) = 0,$$

Если матрица этой системы окажется вырожденной, то можно положить $v(x) = 0$;

Здесь c_l — неопределенные коэффициенты, $\varphi_l(x)$ — полная система независимых функций (базис), удовлетворяющая однородным краевым условиям (2), (3), т. е.

$$l_a(\varphi, \varphi', 0) = 0, \quad l_b(\varphi, \varphi', 0) = 0; \quad (5)$$

M — "достаточно большое" целое число-параметр, имитирующее бесконечность.

Таким образом, u_M , определенное формулой (4), удовлетворяет неоднородным граничным условиям (2), (3) при *любых* c_l .

2.1. Метод Бубнова—Галеркина

Данный метод предполагает ортогонализацию невязки уравнения (1) на решении (4) ко всем функциям базиса, т. е.

$$\int_0^1 (L(u_M) - f(x)) \cdot \varphi_k(x) dx = 0, \quad (k = 1, \dots, M).$$

Это дает систему

$$\sum_{l=1}^M R_{k,l} c_l = b_k,$$

где

$$R_{k,l} = \int_0^1 L(\varphi_l(x)) \varphi_k(x) dx; \quad (6)$$

$$b_k = \int_0^1 (f(x) - L(v(x))) \varphi_k(x) dx. \quad (7)$$

2.2. Метод наименьших квадратов

Данный метод предполагает минимизацию функционала

$$\phi = \int_0^1 (L(u_M(x)) - f(x))^2 dx$$

за счет подбора неопределенных коэффициентов c_l в $u_M(x)$, что достигается решением системы

$$\partial\phi/\partial c_k = 0, \quad \text{или} \quad \sum_{l=1}^M R_{k,l} c_l = b_k, \quad (k = 1, \dots, M).$$

$$R_{k,l} = \int_0^1 L(\varphi_l(x)) L(\varphi_k(x)) dx; \quad (8)$$

$$b_k = \int_0^1 (f(x) - L(v(x))) L(\varphi_k(x)) dx. \quad (9)$$

При том или ином методе интегралы в формулах (6), (7) или (8), (9) придется вычислять приближенно. Здесь предлагается формула Симпсона на сетке

$$x_j = jh, \quad h = 1/N, \quad j = 0, \dots, N \quad (N - \text{четное !})$$

Пусть $G(x)$ — гладкая функция, тогда с точностью до $O(h^4)$

$$\int_0^1 G(x)dx = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^N s_j G(x_j), \quad (10)$$

где $s_0 = s_N = 1$, а для $j = 1, \dots, N-1$ $s_j = 4$, если j нечетное и $s_j = 2$, если j четное.

Системы уравнений в пп. 2.1. и 2.2. решаются по методу Гаусса (лучше по стандартной программе).

3. Выбор системы базисных функций

В качестве $\varphi_l(x)$ рассмотрим систему собственных функций "сходного" с (1) уравнения

$$\varphi''(x) = -z^2 \varphi(x) \quad (11)$$

с граничными условиями (5). Уравнение (11) имеет решение

$$\varphi(z) = C_1 \cos(zx) + \frac{C_2}{z} \sin(zx),$$

а условия (5) порождают систему вида

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (12)$$

Равенство нулю определителя матрицы этой системы (необходимое условие нетривиальности решения) приводит к трансцендентному уравнению

$$F(z) \equiv f_1(z) - f_2(z) \equiv ctg(z) - (a_1 z - a_2/z)/a_3 = 0, \quad (13)$$

где a_1, a_2, a_3 , как и элементы матрицы из системы (12), зависят от коэффициентов граничных условий.

Графический анализ кривых $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в уравнении (13) позволяет локализовать на каждом интервале $(l-1)\pi \leq z \leq l\pi$, $(l = 1, \dots, M, \dots)$ единственный корень z_l (рис. 4).

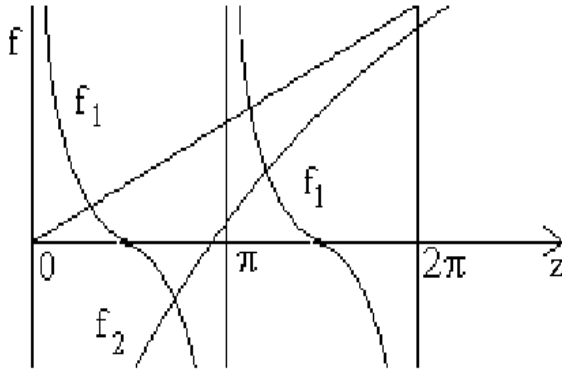


Рис. 4

Возможны случаи, когда значение z_l очевидно:

- 1) $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, тогда $z_l = (l-1)\pi$ — нули синуса;
- 2) $a_3 = 0$, $a_2 \neq 0$, тогда $z_l = l\pi$ — нули синуса;
- 3) $a_3 \neq 0$, $a_2 = a_1 = 0$, тогда $z_l = (l-1/2)\pi$ — нули косинуса.

В случае, когда $a_3 \neq 0$, $(a_2 \neq 0) \vee (a_1 \neq 0)$, требуется итерационный процесс для решения уравнения (13). Надежнее и проще применить здесь метод деления отрезка пополам:

$$z_l^{(i)} = z_l^{(i-1)} + \text{sign}(F(z_l^{(i-1)}))h_{i-1}; \quad h_i = h_{i-1}/2. \quad (14)$$

$h_0 = \pi/4$, $z_l^{(0)} = (l-1/2)\pi$; $i = 1, \dots, i_T$ — заведомо достаточное заданное число итераций.

Можно положить $C_1 = cr_{12}$, $C_2 = -cr_{11}$, $c \neq 0$ — любой нормировочный множитель (лучше взять $c = 1$).

Заметим, что в 1-м случае $z_1 = 0$, при этом оказывается, что и $r_{11} = 0$. Тогда $C_2 = 0$ и можно положить $C_1 = 1$. В итоге имеем формулу

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} C_1 \cos(z_l x) + \frac{C_2}{z_l} \sin(z_l x), & \text{если } z_l \neq 0, \\ 1, & \text{если } z_l = 0. \end{cases} \quad (15)$$

С учетом уравнения (11) и линейности $v(x)$ можно получить

$$L(\varphi_l(x)) = -(z_l^2 + p(x))\varphi_l(x), \quad L(v(x)) = -p(x)v(x)$$

и, следовательно, упростить выражения под интегралами в формулах (6)–(9).

4. Тестовое решение

Возьмем две гладкие функции $g_1(x)$, $g_2(x)$ (лучше всего взять $\exp(x)$ и $\exp(-x)$) и сконструируем тестовое решение в виде

$$U(x) = d_0(0.5 - x) \sin^2(2\pi x) + d_1 g_1(x) + d_2 g_2(x), \quad (16)$$

где d_0 зададим как параметр, а d_1, d_2 найдем (самостоятельно) из граничных условий (2), (3), которые дадут систему

$$l_a(U, U', U_a) = 0, \quad l_b(U, U', U_b) = 0. \quad (17)$$

За невырожденностью этой системы необходимо проследить, в крайнем случае придется изменить выбор $g_1(x)$, $g_2(x)$.

Первое слагаемое в выражении (16) дает нулевой вклад в систему (17) и не влияет на расчет d_1, d_2 , его предназначение — увеличить в демонстрационных целях искривление тестового решения.

После получения тестового решения правая часть уравнения (1) подгоняется по формуле

$$f(x) = L(U) = U''(x) - p(x)U(x).$$

Очевидно, что при этом $U(x)$ — решение краевой задачи (1)–(3).

5. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

Рекомендуется выполнить следующее:

1. Задать параметры в диапазонах $d_0 = 0 - 4$, $M = 2 - 20$, $N = 50 - 100$, $U_a, U_b = 0 - 2$, $i_T = 20 - 30$.

2. Предусмотреть возможность выдачи на печать (в целях контроля) значений z_l , матрицы $(R_{k,l})$ и правой части b_k системы, а также коэффициентов d_1, d_2 . Матрица $(R_{k,l})$ должна быть симметричной. Для метода наименьших квадратов эта симметрия достигается автоматически, а для метода Бубнова—Галеркина — только при достаточно точном интегрировании по Симпсону, т. е. при достаточно больших N . ($N \gg M$).

3. Получить и выдать на график (и в таблицу) значения $u_M(x_j)$, $U(x_j)$ и нормы погрешности

$$Norm_C = \max_j |u_M(x_j) - U(x_j)|,$$

$$Norm_L = \sqrt{\sum_{j=0}^N (u_M(x_j) - U(x_j))^2 / (N + 1)}$$

на сетке x_j ($j = 0, \dots, N$) при различных возрастающих значениях M , например $M = 2, 4, 6, 8, 10, 12$. Убедиться в сходимости приближенного решения u_M к тестовому U .

Библиографический список

1. Бахвалов Н. С. и др. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.

Глава 9. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ

При расчете задачи по схемам первого порядка точности получаются гладкие монотонные, но грубые решения. Схемы второго порядка более точны, но в решениях проявляется немонотонность. Мерой точности и качества решения может служить величина дисбаланса в законах сохранения, так как предложенные здесь схемы неконсервативны и, следовательно, автоматически не выполняют эти законы.

В данной работе предлагается численно исследовать работу схем различного порядка при расчете акустических волн для двух физически наглядных постановок задачи.

1. Постановка задачи

В области $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ рассмотрим систему

$$L_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$L_2 \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Здесь $u(x, t), p(x, t)$ — скорость и давление, ρ_0, c_0 — плотность и скорость звука в среде, заданные постоянные параметры.

Из уравнений (1) и (2) следует

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_1) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x}(L_2) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_2) - \rho_0 c_0^2 \frac{\partial}{\partial x}(L_1) \equiv \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

Введем энергию и работу сил давления на интервале $t_k \leq t \leq t_{k+1}$,

обозначив $w = 1/(\rho_0 c_0)$,

$$E(t) = \frac{\rho_0}{2} \int_0^1 (u^2 + w^2 p^2) dx; \quad A(x) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} u p dt. \quad (5)$$

Из системы (1), (2) следует

$$\int_0^1 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\rho_0 u L_1 + \frac{p}{\rho_0 c_0^2} L_2) dx dt = 0,$$

что дает интеграл энергии

$$E(t_{k+1}) - E(t_k) + A(1) - A(0) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, решение системы (1), (2) удовлетворяет волновым уравнениям (3), (4) и интегралу (6).

Введем обозначения (Римановы инварианты):

$$Y = u + wp, \quad Z = u - wp, \quad (7)$$

тогда из уравнений (1), (2) получим

$$L_1 + w L_2 \equiv \frac{\partial Y}{\partial t} + c_0 \frac{\partial Y}{\partial x} = 0; \quad (8)$$

$$L_1 - w L_2 \equiv \frac{\partial Z}{\partial t} - c_0 \frac{\partial Z}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Из уравнений (8), (9) следует

$$Y(x, t) = const \text{ на линии } dx/dt = c_0; \quad (10)$$

$$Z(x, t) = const \text{ на линии } dx/dt = -c_0. \quad (11)$$

Для схем 2-го порядка (см. ниже п. 2) необходима гладкость начальных условий $p(x, 0) = \bar{p}$ вплоть до 2-х производных. Для этого введем в h_1 -окрестности точки "разлома" x_1 сглаживающий

полином $Q(z) = 1 - 10z^3 + 15z^4 - 6z^5$, где $z = (x - x_1)/h_1$, а x_1, h_1 — заданные параметры. Рассмотрим здесь два варианта постановки задачи.

1.1. Распад начального сглаженного всплеска давления между непротекаемыми стенками

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0; \quad (12)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \bar{p}(x) = \begin{cases} PQ(|z|), & \text{если } |z| < 1, \\ 0, & \text{если } |z| \geq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь P — амплитуда всплеска, заданный параметр.

1.2. Распад начальной сглаженной ступеньки давления при заданном давлении на стенках

$$p(0, t) = p_a, \quad p(1, t) = p_b, \quad u(x, 0) = 0; \quad (14)$$

$$\bar{p}(x) = \begin{cases} p_a, & \text{если } z \leq -1, \\ \min(p_a, p_b) + |p_a - p_b|Q(\bar{z}), & \text{если } |z| < 1, \\ p_b, & \text{если } z \geq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь $\bar{z} = (1 + \text{sign}(p_a - p_b)z)/2$, p_a, p_b — заданные параметры.

2. Постановка конечно-разностной задачи

Введем сеточные области с узлами $x_j = jh$, ($j = 0, \dots, N$), либо $x_j = (j - 1/2)h$, ($j = 0, \dots, N + 1$), $t_k = k\tau$, ($k = 0, \dots, k_T$), h, τ — шаги по осям x и t , при этом $c_0\tau/h = R$.

Здесь N, k_T, R — заданные параметры.

Поставим в соответствие решению дифференциальной задачи сеточные функции $u(x_j, t_k) \approx u_j^k = u_j$, $p(x_j, t_k) \approx p_j^k = p_j$, $u_j^{k+1} = \hat{u}_j$, $p_j^{k+1} = \hat{p}_j$. Для значений вспомогательных решений (на промежуточных временных слоях) введем $u_{j+1/2}^{k+1/2}$, $p_{j+1/2}^{k+1/2}$.

Приведем здесь нужные в дальнейшем формулы численного интегрирования. Пусть $G(x)$ гладкая функция, тогда с точностью

до $O(h^2)$ формулы трапеций и прямоугольников соответственно будут

$$\int_0^1 G(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^N s_j G(x_j), \quad \int_0^1 G(x)dx = h \sum_{j=0}^{N-1} G(x_j + h/2),$$

где $s_0 = s_N = 1$, а для $j = 1, \dots, N-1$ $s_j = 2$.

Рассмотрим различные варианты разностных схем

2.1. Двухшаговая схема Лакса–Вендроффа

Процесс, описываемый уравнениями (1), (2), предполагается продолженным за границы единичного интервала и в соответствии с граничными условиями (рис. 5).

Разностная схема имеет вид

$$\frac{u_{j+1/2}^{k+1/2} - (u_{j+1} + u_j)/2}{\tau/2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{p_{j+1} - p_j}{h} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{p_{j+1/2}^{k+1/2} - (p_{j+1} + p_j)/2}{\tau/2} + \rho_0 c_0^2 \frac{u_{j+1} - u_j}{h} = 0; \quad (17)$$

$$(j = 0, \dots, N).$$

$$\frac{\hat{u}_j - u_j}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \frac{p_{j+1/2}^{k+1/2} - p_{j-1/2}^{k+1/2}}{h} = 0; \quad (18)$$

$$\frac{\hat{p}_j - p_j}{\tau} + \rho_0 c_0^2 \frac{u_{j+1/2}^{k+1/2} - u_{j-1/2}^{k+1/2}}{h} = 0; \quad (19)$$

$$(j = 1, \dots, N).$$

Заметим, что эта схема аппроксимирует уравнения (1), (2) со вторым порядком. Величины $E(t)$, $A(0)$, $A(1)$ здесь удобно считать по формуле прямоугольников.

где $j = 0, \dots, N$.

При $\sigma = 1$ порядок схемы $O(\tau + h)$, при $\sigma = R = \frac{c_0\tau}{h}$ — $O(\tau^2 + h^2)$. $E(t)$, $A(1)$, $A(0)$ считаются по формуле трапеций.

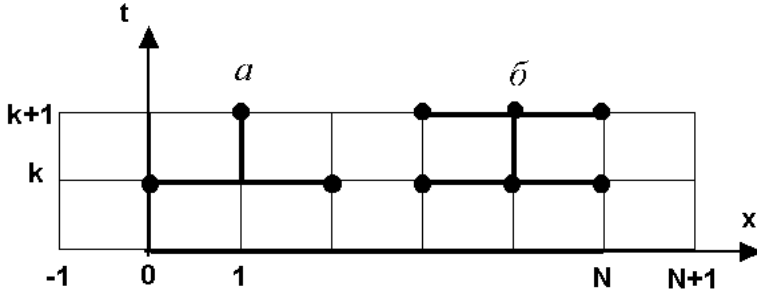


Рис. 6

Так же, как и в пп. **2.1.**, здесь в варианте 1.1. условия $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ (при всех t) приводят к условиям $\partial u / \partial t = 0$, $\partial^2 u / \partial t^2 = 0$. Тогда из уравнений (1) и (3) следует $(\frac{\partial p}{\partial x})_0 \approx \frac{p_1 - p_{-1}}{2h} = 0$, т. е. $p_{-1} = p_1$; $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_0 \approx \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{h^2} = 0$, т. е. $u_{-1} = -u_1$. Аналогично рассуждая, получим $p_{N+1} = p_{N-1}$, $u_{N+1} = -u_{N-1}$.

В варианте 1.2. заданы $p(0, t) = p_a$, $p(1, t) = p_b$ (при всех t), откуда следует $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$. Тогда из уравнений (2), (4) находим $(\frac{\partial u}{\partial x})_0 \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = 0$, т. е. $u_{-1} = u_1$; $(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2})_0 \approx \frac{p_1 - 2p_a + p_{-1}}{h^2} = 0$, т. е. $p_{-1} = 2p_a - p_1$. Аналогично рассуждая, получим $u_{N+1} = u_{N-1}$, $p_{N+1} = 2p_b - p_{N-1}$. В результате можем считать по формулам (20), (21) при $j = 0, \dots, N$.

2.3. Схема в инвариантах Римана

Рассмотрим разностную схему для уравнений (8), (9)

$$\frac{Y_j^{k+1} - Y_j^k}{\tau} + c_0 \frac{Y_j^k - Y_{j-1}^k}{h} = 0, \quad (j = 1, \dots, N); \quad (22)$$

$$\frac{Z_j^{k+1} - Z_j^k}{\tau} - c_0 \frac{Z_{j+1}^k - Z_j^k}{h} = 0, \quad (j = 0, \dots, N-1). \quad (23)$$

На левой границе имеем из (23) $Z_0^{k+1} = u_0^{k+1} - wp_0^{k+1}$ с уже со- считанным значением Z_0^{k+1} . Используя одно известное граничное значение u_0^{k+1} или p_0^{k+1} , получаем другое: p_0^{k+1} или u_0^{k+1} .

На правой границе имеем из уравнения (22) $Y_N^{k+1} = u_N^{k+1} + wp_N^{k+1}$. Используя известное u_N^{k+1} , получим p_N^{k+1} .

Величины $E(t_k), A(0), A(1)$ здесь удобно считать по формуле трапеций.

2.4. Двуслойная неявная схема с весовыми коэффициентами

Рассмотрим вариант неявной схемы:

$$\frac{\hat{u}_j - u_j}{\tau} + c_0 w (\sigma_1 \frac{\hat{p}_{j+1} - \hat{p}_j}{h} + (1 - \sigma_1) \frac{p_{j+1} - p_j}{h}) = 0; \quad (24)$$

$$\frac{\hat{p}_j - p_j}{\tau} + \frac{c_0}{w} (\sigma_2 \frac{\hat{u}_j - \hat{u}_{j-1}}{h} + (1 - \sigma_2) \frac{u_j - u_{j-1}}{h}) = 0, \quad (25)$$

где $w = 1/(\rho_0 c_0)$, $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 1$ — весовые коэффициенты схемы. Шаблон этой схемы на рис. 6, б.

Если одновременно $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, то схема (24), (25) будет неявной. В этом случае следует исключить в уравнении (24) $\hat{p}_j$, $\hat{p}_{j+1}$ с помощью уравнения (25) в варианте 1.1. или в уравнении (25) $\hat{u}_j$, $\hat{u}_{j-1}$ с помощью уравнения (24) в варианте 1.2. В любом случае получим уравнение вида

$$Av_{j-1} + Bv_j + Cv_{j+1} = G_j, \quad (26)$$

где v_j есть либо $\hat{u}_j$ в варианте 1.1., либо $\hat{p}_j$ в варианте 1.2.

Уравнение (26) эффективно решается методом прогонки. Формулы метода приведены здесь для справки:

$$v_j = P_j v_{j+1} + Q_j; \quad (27)$$

$$P_j = -C/D; \quad Q_j = (G_j - AQ_{j-1})/D; \quad D = AP_{j-1} + B, \quad (28)$$

$$(j = 1, \dots, N-1).$$

P_0, Q_0 без труда определяются граничными условиями. Если по формулам (27), (28) найдено $\hat{u}_j$, то $\hat{p}_j$ находится из уравнения (25), причем $\hat{u}_{-1} = -\hat{u}_1$ (см. пп **2.1.**) Если же найдено $\hat{p}_j$, то $\hat{u}_j$ находится из (24), причем $\hat{p}_{N+1} = 2p_b - \hat{p}_{N-1}$ (см. пп **2.2.**)

Величины $E(t_k), A(0), A(1)$ удобно считать по формуле трапеций.

3. Тестовое решение

В качестве тестового построим точное решение для рассмотренных здесь двух вариантов постановки задачи.

Учитывая равенства (10) и (11), имеем

$$Y(x_j, t_k) = Y(x_j - c_0 t_k, 0), \quad Z(x_j, t_k) = Z(x_j + c_0 t_k, 0).$$

Так как $u(x, 0) = 0$, то эти соотношения дают

$$u(x_j, t_k) = \frac{w}{2}(p(x_j - c_0 t_k, 0) - p(x_j + c_0 t_k, 0)); \quad (29)$$

$$p(x_j, t_k) = \frac{1}{2}(p(x_j - c_0 t_k, 0) + p(x_j + c_0 t_k, 0)). \quad (30)$$

Очевидно, что значения $x = x_j \pm c_0 t_k$ могут выходить за границы единичного отрезка, поэтому для счета тестового решения по формулам (29), (30) нужно продолжить начальные условия для давления так, чтобы выполнялись граничные условия.

3.1. Случай непротекаемых стенок на границах

На границах $x = 0, 1$ заданы $u(x, t) = 0$, тогда $\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Для обеспечения этих условий достаточно продолжить начальное распределение $\bar{p}(x)$ через границы $x = m, \quad (m = \pm 1, 2, \dots)$

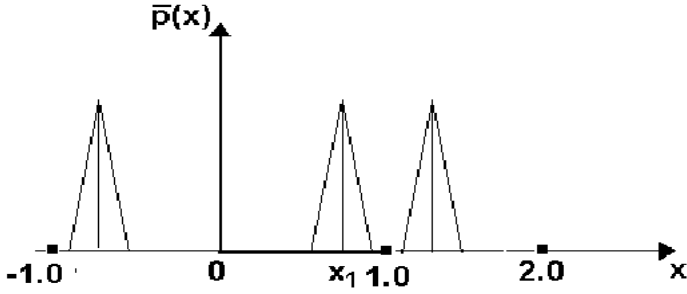


Рис. 7

симметрично (рис. 7). Пусть $x = x_j \pm c_0 t_k$, $l = \text{trunc}(|x|)$, т. е. целая часть $|x|$. Введем величину

$$x_p = \begin{cases} 1 - (|x| - l), & \text{если } l \text{ нечетное,} \\ |x| - l, & \text{если } l \text{ четное,} \end{cases}$$

$$p(x, 0) = \bar{p}(x_p). \quad (31)$$

Давление $\bar{p}(x_p)$ считается по формуле (13).

3.2. Случай заданного давления на границах

Пусть при $x = 0, 1$ заданы p_a, p_b , тогда $\partial u / \partial x = 0$, $\partial^2 p / \partial x^2 = 0$. Для обеспечения этих условий достаточно распространить зависимость $\bar{p}(x)$ за границы $x = m$, ($m = \pm 1, \dots$) антисимметрично (рис. 8).

Введем $L(x) = p_a(1-x) + p_b x$ — полином Лагранжа. Обозначим $t_x = \text{trunc}(|x|)$,

$$l = \begin{cases} t_x, & \text{если } x \geq 0, \\ 1 + t_x, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad x_p = \begin{cases} 1 - (|x| - l), & \text{если } l \text{ нечетное,} \\ |x| - l, & \text{если } l \text{ четное.} \end{cases}$$

Тогда имеем

$$p(x, 0) = L(x) + (-1)^l (\bar{p}(x_p) - L(x_p)). \quad (32)$$

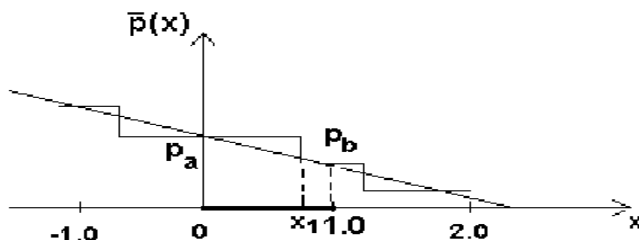


Рис. 8

Давление $\bar{p}(x_p)$ считается по формуле (15).

В пп. 3.1, 3.2 тестовое решение считается по формулам (29), (30). На рис. 7, 8 графики даны условно, без сглаживания.

4. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

Задать все параметры задачи и проделать следующее:

1. Сосчитать и организовать "подвижные" графики давления и скорости (расчетных разностных и тестовых).
2. Убедиться в условной устойчивости явной схемы (только при $R \leq 1$) и безусловной устойчивости неявной.
3. Убедиться в сходимости разностного решения к точному, последовательно удваивая N и пропорционально k_T .
4. Отметить "физичность" картины волн давления и скорости.

Библиографический список

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
2. Годунов С. К., и др. Численное решение многомерных газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976.

Глава 10. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. ДВУСЛОЙНЫЕ И ТРЕХСЛОЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

В данной работе предоставляется возможность изучить поведение разностных решений, полученных по двуслойной схеме с весами, а также по трехслойным явным схемам Дюфорта—Франкела и Ричардсона, хотя последняя заведомо непригодна. При этом устойчивость (или неустойчивость), порядок сходимости, монотонность полученных решений должны быть в соответствии с предписаниями теории. Важный момент — необходимость соответствия порядка аппроксимации граничных условий порядку разностной схемы.

Качество и точность работы схемы проверяется здесь соответствием численного решения физическому смыслу (распространению тепла), а также сравнением с тестовым решением.

Исполнителю предлагается в каждом конкретном варианте получить самостоятельно некоторые выражения для тестового решения, а также для реализации граничных условий разностной задачи.

Наряду с обычными обозначениями для производных по времени и координате, здесь используются сокращенные — точечные и штриховые.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о распространении тепла в стержне, теплоизолированном по "поверхности на концах которого выполняются различные условия теплообмена:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

Граничные и начальные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad l_a(u, u', u_a) = 0; \quad (2)$$

$$\text{при } x = 1 \quad l_b(u, u', u_b) = 0, \quad (3)$$

например, $u'(0, t) - 2(u(0, t) - u_a) = 0$, $u'(1, t) + 3(u(1, t) - u_b) = 0$,

$$\text{при } t = 0 \quad u(x, 0) = \psi(x). \quad (4)$$

Здесь $f(x, t)$ — заданная (в вариантах) правая часть, l_a , l_b — линейные дифференциальные выражения, u_a, u_b — заданные параметры либо заданные асимптотически постоянные функции времени t (температура окружающей среды), $\psi(x)$ — заданная функция (начальное распределение температуры в стержне).

2. Тестовое решение

Если $f(x, t) = 0$ и $t \rightarrow \infty$, то $u(x, t) \rightarrow v_a(x)$, т. е. к "асимптотическому" решению уравнения (1). Очевидно, оно линейно и его можно записать в виде

$$v_a(x) = w_a(1 - x) + w_b x, \quad (5)$$

где w_a, w_b находятся из условия удовлетворения $v_a(x)$ граничным условиям (2), (3).

Сначала рассмотрим вспомогательную однородную задачу

$$\dot{U} = U''; \quad (6)$$

$$l_a(U, U', 0) = 0, \quad l_b(U, U', 0) = 0; \quad (7)$$

$$U(x, 0) = \Psi(x), \quad (8)$$

где функция $\Psi(x)$ позже (в вариантах) будет конкретизирована.

Решение этой задачи ищем в виде ряда

$$U(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) X_l(x); \quad (9)$$

$$X_l(x) = C_1 \cos(z_l x) + \frac{C_2}{z_l} \sin(z_l x); \quad (10)$$

$$T_l(t) = C_{0,l} \exp(-z_l^2 t). \quad (11)$$

$X_l(x)$ удовлетворяет уравнению $X'' = -z^2 X$ и граничным условиям (7). Эти условия порождают систему для нахождения C_1, C_2 , имеющую вид

$$\sum_{l=1}^2 r_{i,l} C_l = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

Равенство нулю определителя в системе (12) приводит к уравнению

$$(a_1 z - a_2/z) \sin z - a_3 \cos z = 0,$$

или в другом виде

$$F(z) \equiv f_1(z) - f_2(z) \equiv \cos z / \sin z - (a_1 z - a_2/z)/a_3 = 0. \quad (13)$$

$r_{i,l}$, a_1, a_2, a_3 в (12) и (13) выражаются через заданные коэффициенты граничных условий (2), (3).

На каждом интервале $[(l-1)\pi, l\pi]$, $l = 1, 2, \dots$ имеется единственный корень z_l уравнения (13) (рис. 9)

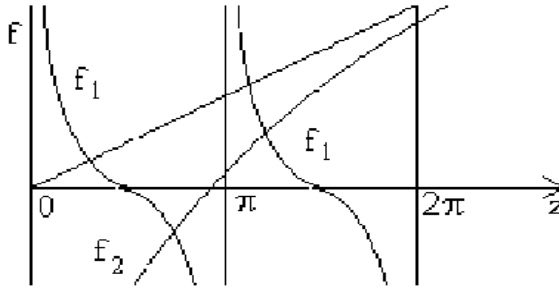


Рис. 9

При этом возможны случаи:

- 1) $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, тогда $z_l = (l-1)\pi$;

- 2) $a_3 = 0$, $a_2 \neq 0$, тогда $z_l = l\pi$;
 3) $a_3 \neq 0$, $a_2 = a_1 = 0$, тогда $z_l = (l - 0,5)\pi$;
 4) $a_3 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ или $a_1 \neq 0$, тогда z_l ищется итерацией (метод проб):

$$z_l^{(i+1)} = z_l^{(i)} + \text{sign}(F(z_l^{(i)}))h_i; \quad h_{i+1} = h_i/2, \quad (14)$$

$$z_l^{(0)} = (l - 0,5)\pi, \quad h_0 = \pi/4, \quad i = 0, 1, \dots, i_T, \quad l = 1, \dots, l_k.$$

Здесь i_T — достаточное (~ 30) количество итераций, l_k — достаточное (~ 50 – 150) количество корней уравнения (13) — эмпирически подобранные и задаваемые параметры.

Из системы (12) имеем $C_1 = cr_{1,2}$, $C_2 = -cr_{1,1}$, c — произвольный ненулевой множитель (лучше взять $c = 1$).

В первом случае $z_1 = 0$, $r_{1,1} = 0$, следовательно, можно положить $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Таким образом,

$$X_l(x) = \begin{cases} C_1 \cos(z_l x) + \frac{C_2}{z_l} \sin(z_l x), & \text{если } z_l \neq 0, \\ 1, & \text{если } z_l = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Можно непосредственно показать, что $\int_0^1 X_l(x)X_m(x)dx \neq 0$ только при $l = m$. Обозначим $A_l = \int_0^1 X_l^2(x)dx$.

С учетом соотношения $X_l'' = -z_l^2 X_l$ для A_l находится выражение

$$A_l = \begin{cases} \frac{1}{2}(C_1^2 + (\frac{C_2}{z_l})^2) - \frac{1}{2z_l^2}[X_l(x)X_l'(x)] \Big|_0^1, & \text{если } z_l \neq 0, \\ 1, & \text{если } z_l = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Разложим $v_a(x)$ и $\psi(x)$ в ряд по базису $X_l(x)$:

$$v_a(x) = \sum_{l=1}^{\infty} v_l X_l(x), \quad v_l = \frac{1}{A_l} \int_0^1 v_a(x) X_l(x) dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \psi_l X_l(x), \quad \psi_l = \frac{1}{A_l} \int_0^1 \psi(x) X_l(x) dx;$$

v_l и ψ_l легко находятся:

$$v_l = \frac{1}{A_l} \begin{cases} -\frac{1}{z_l^2} [v_a(x)X_l'(x) - (w_b - w_a)X_l(x)] & \text{если } z_l \neq 0, \\ (w_b + w_a)/2, & \text{если } z_l = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Приведем некоторые варианты задания $\psi(x)$ и соответственно ψ_l :

0) $\psi(x) = 0$, $\psi_l = 0$ (при всех l).

1) $\psi(x) = U_0 \begin{cases} 1 - s, & \text{если } s \leq 1, \\ 0, & \text{если } s > 1. \end{cases}$

Здесь $s = |x - x_0|/h_0$, ($h_0 \leq x_0 \leq 1 - h_0$), $\psi(x)$ — финитная функция в виде равнобедренного треугольника с высотой U_0 , вершиной в точке x_0 и шириной полуоснования h_0 .

$$\psi_l = \frac{U_0 h_0}{A_l} \begin{cases} -\frac{X_l(x_0 + h_0) - 2X_l(x_0) + X_l(x_0 - h_0)}{z_l^2 h_0^2}, & \text{если } z_l \neq 0, \\ 1, & \text{если } z_l = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотрим варианты постановок задачи (1)–(4) и соответственно, тестовых решений.

2.1. Граничные условия стационарны, правой части нет

Пусть $u_a = U_a$, $u_b = U_b$, $f(x, t) \equiv 0$. U_a, U_b — заданные постоянные параметры. Введем функцию $U(x, t)$ соотношением

$$u(x, t) = v_a(x) + U(x, t).$$

$U(x, t)$ будет решением задачи (6)–(8), где в начальных условиях следует положить $\Psi(x) = \psi(x) - v_a(x)$. В выражении (11) неопределенные $C_{0,l}$ получим из этих условий.

Теперь тестовое решение задачи (1)–(4) может быть представлено в виде

$$U_T(x, t) = v_a(x) + \sum_{l=1}^{l_k} (\psi_l - v_l) \exp(-z_l^2 t) X_l(x). \quad (19)$$

2.2. Граничные условия нестационарны, правой части нет

Пусть $u_a(t) = U_a(1 - e^{-w_0 t})$, $u_b(t) = U_b(1 - e^{-w_0 t})$, $f(x, t) \equiv 0$. U_a, U_b, w_0 — заданные параметры. $w_0 \neq z_l^2$ (при всех l).

Рассмотрим функцию $V(x, t)$ и ее производную по времени:

$$V(x, t) = v_a(x)(1 - e^{-w_0 t}); \quad (20)$$

$$\dot{V}(x, t) = w_0 v_a(x) e^{-w_0 t}. \quad (21)$$

Введем функцию $U(x, t)$ соотношением $u(x, t) = V(x, t) + U(x, t)$. $U(x, t)$ будет решением задачи

$$\dot{U} = U'' - \dot{V}(x, t), \quad (22)$$

$$l_a(U, U', 0) = 0, \quad l_b(U, U', 0) = 0,$$

$$U(x, 0) = \Psi(x) = 0.$$

Решение этой задачи с однородным уравнением (22), т. е. при $\dot{V}(x, t) = 0$, дается рассмотренными выше формулами (9)–(11). Вариация произвольных постоянных $C_{0,l}$ с учетом правой части уравнения (22) дает в итоге тестовое решение

$$U_T(x, t) = v_a(x) - [v_a(x) - w_0 S_1(x)] e^{-w_0 t} + S_2(x, t); \quad (23)$$

$$S_1(x) = \sum_{l=1}^{l_k} \frac{v_l}{w_0 - z_l^2} X_l(x); \quad (24)$$

$$S_2(x, t) = \sum_{l=1}^{l_k} (\psi_l - \frac{w_0 v_l}{w_0 - z_l^2}) e^{-z_l^2 t} X_l(x). \quad (25)$$

Ряд (24) сходится медленно, поэтому следует взять l_k большим (~ 100 – 150) и просуммировать его (ряд) вне временного цикла.

2.3. Граничные условия стационарны, правая часть есть

$u_a = U_a$, $u_b = U_b$, $\psi(x) \equiv 0$. U_a, U_b — заданные параметры. В качестве правой части возьмем конечную сумму ряда Фурье

$$f(x, t) = f(x) = \sum_{l=1}^{l_k} F_l X_l(x)$$

разложения функции — локального всплеска в точке x_1 в виде равнобедренного треугольника

$$F(x) = f_1 \begin{cases} 1 - s, & \text{если } s < 1, \\ 0, & \text{если } s \geq 1, \end{cases} \quad (26)$$

где $s = |x - x_1|$, $(h_1 \leq x_1 \leq 1 - h_1)$, f_1 — высота, h_1 — половина ширины основания.

$$F_l = \frac{1}{A_l} \int_0^1 F(x) X_l(x) dx,$$

$$F_l = \frac{f_1 h_1}{A_l} \begin{cases} -\frac{X_l(x_1+h_1)-2X_l(x_1)+X_l(x_1-h_1)}{z_l^2 h_1^2}, & \text{если } z_l \neq 0 \\ 1, & \text{если } z_l = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Введем функцию $U(x, t)$ соотношением $u(x, t) = v_a(x) + U(x, t)$, тогда для $U(x, t)$ имеем задачу

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U'' + f(x), \\ l_a(U, U', 0) &= 0, \quad l_b(U, U', 0) = 0, \\ U(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Решение этой задачи с однородным уравнением (28), т. е. при $f(x) = 0$, дается формулами (9)–(11). Проварьируем произвольные постоянные $C_{0,l}$ в (11) с учетом неоднородности уравнения (28). Получим в итоге, если $z_1 \neq 0$,

$$U_T(x, t) = v_a(x) + W_1(x) - W_2(x, t); \quad (29)$$

$$W_1(x) = \sum_{l=1}^{l_k} \frac{F_l}{z_l^2} X_l(x); \quad (30)$$

$$W_2(x, t) = \sum_{l=1}^{l_k} \left(v_l + \frac{F_l}{z_l^2} \right) e^{-z_l^2 t} X_l(x). \quad (31)$$

Если $z_1 = 0$, то после раскрытия неопределенностей в суммах (29) получим

$$U_T(x, t) = (F_1 t - v_1) X_1(x) + v_a(x) + \sum_{l=2}^{l_k} \frac{F_l}{z_l^2} X_l(x) - \sum_{l=2}^{l_k} \left(v_l + \frac{F_l}{z_l^2} \right) X_l(x) e^{-z_l^2 t}. \quad (32)$$

Замечание 1. В формулах (19) и (31) ряд при $t = 0$ не сходится равномерно, поэтому в начальный момент $U_T(x, 0) \neq \psi(x)$, хотя их разность мала и стремится к нулю при $l_k \rightarrow \infty$ (но производные не стремятся!). Поэтому начальные условия $\psi(x)$ для разностных расчетов и для тестового решения, хотя и незначительно, но различаются. При использовании схем не выше второго порядка это различие несущественно, но для расчетов повышенного порядка точности $O(\tau^2 + h^4)$ начальные условия следует взять в виде $u(x, 0) = U_T(x, 0)$ при ограниченном $l_k \sim 30 - 40$.

Замечание 2. При $t > 0$ ряды, содержащие выражение $e^{-z_l^2 t}$ в формулах (19), (23), (29) и (32), сходятся быстро. В целях экономии времени счета разумно оборвать суммирование, как только экспонента станет меньше малой ($\sim 10^{-9} - 10^{-12}$) заданной пороговой величины.

3. Разностное уравнение, разностные граничные условия

Введем в области решения задачи (1)–(4) равномерную сетку $x_j = jh$ ($j = 0, \dots, N_1 = N$), $t_k = k\tau$ ($k = 0, 1, \dots$), где $h = 1/N$,

$\tau = Rh^2$, R — фиксированный параметр разностной задачи. В варианте "г" (см. ниже) понадобится "сдвинутая" сетка по оси x :

$$x_j = (j - 0.5)h, \quad h = 1/N, \quad (j = 0, \dots, N_1 = N + 1).$$

Разностные решения (и другие величины задачи) на сетке обозначим

$$u_j^{k+1} \sim \hat{u}_j, \quad u_j^{j-1} \sim \check{u}_j, \quad u_a^{k+1} \sim \hat{u}_a, \quad u_a^k \sim u_a \text{ и др.}$$

Производную u' в граничных условиях можно аппроксимировать разностными выражениями с различным порядком. Рассмотрим некоторые варианты:

$$\text{а) } u'_0 \approx (u_1 - u_0)/h, \quad u'_N \approx (u_N - u_{N-1})/h \quad (33)$$

— это грубое приближение (первого порядка) предлагается здесь для "контраста" последующим вариантам;

$$\text{б) } u'_0 \approx (u_1 - u_{-1})/(2h), \quad u'_N \approx (u_{N+1} - u_{N-1})/(2h) \quad (34)$$

— это приближение второго порядка, использующее расширение области действия уравнения (1) и его решения;

$$\text{в) } u'_0 \approx \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h}, \quad u'_N \approx \frac{u_{N-2} - 4u_{N-1} + 3u_N}{2h} \quad (35)$$

— это приближение второго порядка, не выводящее за пределы области;

$$\text{г) } u'_{1/2} \approx (u_1 - u_0)/h, \quad u'_{N+1/2} \approx (u_{N+1} - u_N)/h \quad (36)$$

— это приближение второго порядка в смещенной сетке узлов $x_j = (j - 0.5)h$ (рис. 10, б);

$$\text{д) } u'_0 \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} - h^2 u''_0/6, \quad u'_N \approx \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} - h^2 u''_N/6 \quad (37)$$

— это приближение четвертого порядка, использующее расширение области, как и в варианте "б". Выражение u'''_0 находится в

виде $u_0''' = q_a(u_0'' + f_0) - f_0' - q_a \dot{u}_a$ из очевидных дифференциальных следствий уравнения (1) и условия (2)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\dot{u}_0 - u_0'' - f_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}[l_a(u, u', u_a)] = 0.$$

Аналогично, $u_N''' = -q_b(u_N'' + f_N) - f_N' + q_b \dot{u}_b$ следует из уравнения (1) и условия (3)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\dot{u}_N - u_N'' - f_N) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}[l_b(u, u', u_b)] = 0.$$

q_a, q_b — коэффициенты в конкретных вариантах граничных условий.

Граничные условия (2), (3) аппроксимируем разностными выражениями, полученными с использованием формул (33), (34), (35), (36) или (37). Разностные граничные условия обозначим

$$l_a^{(h)}(\hat{u}_0, \hat{u}_0', \hat{u}_a) = 0, \quad l_b^{(h)}(\hat{u}_N, \hat{u}_N', \hat{u}_b) = 0, \quad (38)$$

или $l_a^{(h)}(\hat{u}_{1/2}, \hat{u}_{1/2}', \hat{u}_a) = 0$, $l_b^{(h)}(\hat{u}_{N+1/2}, \hat{u}_{N+1/2}', \hat{u}_b) = 0$ (для варианта "Г").

Например, в варианте "Б"

$$(\hat{u}_1 - \hat{u}_{-1})/(2h) - 2(\hat{u}_0 - \hat{u}_a) = 0, \quad (\hat{u}_{N+1} - \hat{u}_{N-1})/(2h) + 3(\hat{u}_N - \hat{u}_b) = 0.$$

3.1. Двуслойная разностная схема

Уравнению (1) поставим в соответствие разностное уравнение

$$\frac{\hat{u}_j - u_j}{\tau} = \sigma \Lambda \hat{u}_j + (1 - \sigma) \Lambda u_j + \bar{f}_j, \quad (39)$$

$\Lambda u_j = (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})/h^2$; σ — весовой параметр схемы (39), $0 \leq \sigma \leq 1$. При $\sigma = 0$ схема явная, при $\sigma \neq 0$ — неявная. $\bar{f}_j = f(x_j, \bar{t})$, где $\bar{t} = t_k + \sigma\tau$, но при $\sigma = \sigma^*$ (см. ниже п. 3) $\bar{t} = t_k + 0,5\tau$.

Разностное уравнение (схема (39)) связывает значения u_j^k в узлах на шаблоне, показанном на рис. 10, а, б. Известно, что это разностное уравнение аппроксимирует уравнение (1) с порядком $O(\tau + h^2)$ при $\sigma=0$ или 1, с порядком $O(\tau^2 + h^2)$ при $\sigma = 1/2$ и с порядком $O(\tau^2 + h^4)$ при $\sigma = \sigma^* = 0,5 - 1/(12R)$. При этом все неявные схемы устойчивы при $\sigma \geq 0,5 - 1/(4R)$.

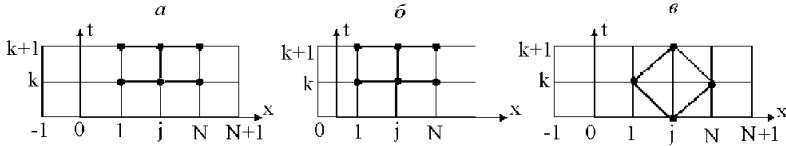


Рис. 10

Преобразуем разностное уравнение (39) к виду

$$L(\hat{u}_j) \equiv A\hat{u}_{j-1} + B\hat{u}_j + C\hat{u}_{j+1} = G_j, \quad (j = 1, \dots, N_1 - 1), \quad (40)$$

где в G_j собраны все выражения на k -м слое, а также правая часть $\bar{f}_j$.

Уравнение (40) удобно решать по методу прогонки:

$$\hat{u}_j = P_j \hat{u}_{j+1} + Q_j, \quad (j = 0, \dots, N_1 - 1); \quad (41)$$

$$P_j = -C/D_j, \quad Q_j = (G_j - A Q_{j-1})/D_j, \quad (j = 1, \dots, N_1 - 1), \quad (42)$$

где $D_j = AP_{j-1} + B$.

Если известны P_0, Q_0 , то по формулам (42) все P_j, Q_j находятся рекуррентно, затем, если известно $\hat{u}_{N_1}$, то все $\hat{u}_j$ находятся по формуле (41) для $j = N_1 - 1, \dots, 0$.

Для нахождения $P_0, Q_0, \hat{u}_{N_1}$ следует привлечь в каждом конкретном варианте ("а"-"д") разностные граничные условия вида (38), а также, если нужно, разностное уравнение и (или) формулы прогонки.

При $x = 0$ имеем:

$$\text{а) } l_a^{(h)}(\hat{u}_0, \hat{u}'_0, \hat{u}_a) = 0;$$

$$\begin{aligned}
\text{б, д)} \quad & \begin{cases} l_a^{(h)}(\hat{u}_0, \hat{u}'_0, \hat{u}_a) = 0, \\ A\hat{u}_{-1} + B\hat{u}_0 + C\hat{u}_1 = G_0(u_{-1}, u_0, u_1), \\ (\text{исключить } \hat{u}_{-1}, u_{-1}); \end{cases} \\
\text{в)} \quad & \begin{cases} l_a^{(h)}(\hat{u}_0, \hat{u}'_0, \hat{u}_a) = 0, \\ A\hat{u}_0 + B\hat{u}_1 + C\hat{u}_2 = G_1(u_0, u_1, u_2), \\ (\text{исключить } \hat{u}_2); \end{cases} \\
\text{г)} \quad & l_a^{(h)}(\hat{u}_{1/2}, \hat{u}'_{1/2}, \hat{u}_a) = 0, \quad \hat{u}_{1/2} = (\hat{u}_0 + \hat{u}_1)/2.
\end{aligned}$$

В вариантах "б" "в" "д" после исключений, а в "а" и "г" без исключений получим выражение вида $\hat{u}_0 = \alpha \hat{u}_1 + \beta$. Сравнивая его с выражением (41) при $j = 0$, получим $P_0 = \alpha$, $Q_0 = \beta$.

Если производная u' в граничном условии отсутствует, то во всех случаях, кроме "г" очевидно сразу следует $P_0 = 0$, $Q_0 = \hat{u}_a$.

В варианте "в" нужно особо предусмотреть случай явной схемы ($\sigma = 0$).

Величину u_{-1} , необходимую для исключения в вариантах "б" и "д" можно получить из разностных граничных условий на k -м временном слое $l_a^{(h)}(u_0, u'_0, u_a) = 0$ в этих вариантах.

При $x = 1$ имеем (после нахождения всех P_j, Q_j):

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad & \begin{cases} l_b^{(h)}(\hat{u}_N, \hat{u}'_N, \hat{u}_b) = 0, \\ \hat{u}_{N-1} = P_{N-1}\hat{u}_N + Q_{N-1}; \end{cases} & \text{б, д)} \quad \begin{cases} l_b^{(h)}(\hat{u}_N, \hat{u}'_N, \hat{u}_b) = 0, \\ L(\hat{u}) = G_N, \\ \hat{u}_{N-1} = P_{N-1}\hat{u}_N + Q_{N-1}; \end{cases} \\
\text{в)} \quad & \begin{cases} l_b^{(h)}(\hat{u}_N, \hat{u}'_N, \hat{u}_b) = 0, \\ \hat{u}_{N-1} = P_{N-1}\hat{u}_N + Q_{N-1}, \\ \hat{u}_{N-2} = P_{N-2}\hat{u}_{N-1} + Q_{N-2}; \end{cases} & \text{г)} \quad \begin{cases} l_b^{(h)}(\hat{u}_{N+1/2}, \hat{u}'_{N+1/2}, \hat{u}_b) = 0, \\ \hat{u}_N = P_N\hat{u}_{N+1} + Q_N. \end{cases}
\end{aligned}$$

Из этих систем получим в любом варианте $\hat{u}_{N_1}$. В варианте "г" подразумевается $\hat{u}_{N+1/2} = (\hat{u}_{N+1} + \hat{u}_N)/2$.

Замечание: Если производная u' в граничном условии отсутствует, то во всех случаях, кроме "г" очевидно, сразу следует $\hat{u}_N = \hat{u}_b$.

В вариантах "б" и "д" нужно исключить в выражении G_N величину u_{N+1} , которую можно получить из разностных граничных

условий этих вариантов.

В варианте "г" для выдачи результатов надо получить полу-сумму $(\hat{u}_j + \hat{u}_{j+1})/2$.

3.2. Трехслойные разностные схемы

Рассмотрим две внешне похожие явные схемы (рис. 10, в):

1) Разностная схема **Дюфорта—Франкела**.

Для уравнения (1) эта схема имеет вид

$$\frac{\hat{u}_j - \check{u}_j}{2\tau} = \frac{u_{j+1} - (\hat{u}_j + \check{u}_j) + u_{j-1}}{h^2} + f_j. \quad (43)$$

Она аппроксимирует уравнение (1) с погрешностью $O(\tau + h^2)$ и устойчива при любых $R = \tau/h^2$. Но при больших R разностное решение может быть "немонотонным" т. е. иметь ограниченные, хотя и немалые, осцилляции.

2) Разностная схема **Ричардсона**.

$$\frac{\hat{u}_j - \check{u}_j}{2\tau} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + f_j \quad (44)$$

имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$, но неустойчива при любых τ и h , в чем нетрудно убедиться в расчете.

Необходимый для начала расчета по этим схемам второй "начальный" слой можно получить с помощью ряда Тэйлора. В результате имеем

$$u_j^0 = \psi(x_j), \quad (j = 0, \dots, N_1); \quad (45)$$

$$u_j^1 = u_j^0 + \tau \dot{u}_j^0 + O(\tau^2), \quad (j = 1, \dots, N_1 - 1). \quad (46)$$

Таким образом, для схемы Дюфорта—Франкела имеем (с учетом уравнения (1))

$$\hat{u}_j = \begin{cases} u_j^0 + R(u_{j-1}^0 - 2u_j^0 + u_{j+1}^0) + \tau f_j^0, & \text{если } k = 0, \\ ((1 - 2R)\check{u}_j + 2R(u_{j+1} + u_{j-1}) + 2\tau f_j)/(1 + 2R), & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (47)$$

$$j = 1, \dots, N_1 - 1,$$

$\hat{u}_0$, $\hat{u}_{N_1}$ можно получить, используя разностные выражения граничных условий (38). Эти условия в вариантах "а" "в" и "г" позволяют непосредственно получить $\hat{u}_0$, $\hat{u}_{N_1}$ через значения $\hat{u}_j$ во внутренних узлах. В варианте "б" сначала находятся u_{-1} , u_{N+1} из условий (38) на k -м слое, а затем $\hat{u}_0, \hat{u}_N$ по формулам (47).

В варианте "г" как и в случае двуслойной схемы, результаты следует выдавать не в расчетных узлах x_j , а в смещенных ("физических") $x_{j+1/2}$ т.е. $u_{j+1/2} = (u_j + u_{j+1})/2$, ($j = 0, \dots, N$). Вариант "д" здесь естественно не используется.

4. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

В данной работе *необходимо* показать следующее:

— Изменение решений "во времени" т. е. в движении, и установление соответствия решений физическому смыслу задачи для явной и неявной схемы.

— Для варианта двухслойной схемы: условную устойчивость явной схемы (т. е. только при $R \leq 1/2$) и безусловную устойчивость неявной.

Для варианта трехслойных схем: безусловную устойчивость схемы Дюфорта—Франкела с ухудшением точности и качества решения при увеличении R , неустойчивость, т. е. полную непригодность, схемы Рундсона.

— Работу и преимущество неявных схем при больших $R \sim 2-10$ при стремлении численного решения к "асимптотическому".

— Сходимость решений, полученных по устойчивым схемам на "сопоставимых сетках" при $\tau, h \rightarrow 0$ и R фиксированном.

— Оценку величины и порядка малости нормы погрешности решения ($\max_j |u_j - UT(x_j, t_k)|$) для схем различного порядка и с различными шагами, например $N = 20, 40, 80, 160$ и, соответственно, $k_T = 20, 80, 320, 1280$. Значение $t = \tau k_T$ при этом должно быть постоянным для каждой пары N и k_T .

В данной работе *настоятельно* рекомендуется

— Не заводить в программе матричных массивов для величин типа u_j^k , т. к. количество временных слоев может оказаться слишком большим.

— Не пренебрегать мерами по экономии времени счета (Замечание 2, п. 2, тщательная чистка циклов и т. д.).

— Заготовить вариант текстового (табличного) вида выдач вспомогательных величин $z_l, A_l, v_l, \psi_l, P_j, Q_j$ и т. д., а также результатов $u_j^k, U_T(x_j, t_k), v_a(x_j)$ для облегчения отладки программы.

— На экран, помимо графиков результатов, выдать "нулевую" линию, а также основные заданные параметры (R, σ, N, k_T — заданное количество шагов по времени, l_k, k — счетчик числа шагов, время t , погрешность на k -м шаге).

— Предусмотреть остановку счета в начальный, конечный и (желательно) в произвольный моменты времени после выдачи на график результатов и параметров (для контроля).

— Программные блоки рисования и стирания, необходимые для обеспечения подвижности графиков кривых, разделять естественной временной паузой, т. е. расчетом решений для следующего момента времени, а не искусственной задержкой счета.

Библиографический список

1. Кошляков И. С. и др. Дифференциальные уравнения математической физики / И. С. Кошляков, Э. В. Глинер, М. И. Смирнов. М.: Физ.-мат. лит., 1962.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. Бахвалов Н. С. и др. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989.

Глава 11. РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ. ДВУСЛОЙНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Предлагается численно исследовать колебания упругого стержня, представленные моделью Кармана.

Двуслойная разностная схема с весами позволяет сравнить работу явных и неявных схем, соблюдение (или несоблюдение) закона сохранения энергии на разностном уровне. Используется алгоритм матричной прогонки с граничными условиями, содержащими разностные аппроксимации второго порядка для производных.

Расчетные формулы для реализации граничных условий в прогонке (в зависимости от конкретного варианта) предлагается исполнителю вывести самостоятельно, необходимые компоненты тестового решения здесь выдаются готовыми к использованию.

1. Постановка задачи

Уравнения колебаний (параболического типа !) имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + d^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad (0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T_1 < \infty). \quad (1)$$

Здесь w — отклонение стержня от положения равновесия, d — коэффициент изгибной жесткости.

Рассмотрим варианты граничных условий.

При $x = 0$:

- а) $w(0, t) = 0, \quad w'(0, t) = 0$ — жесткое защемление;
- б) $w(0, t) = 0, \quad w''(0, t) = 0$ — шарнирное закрепление;
- в) $w''(0, t) = 0, \quad w'''(0, t) = 0$ — свободный конец.

При $x = 1$ аналогично:

- а) $w(1, t) = 0, \quad w'(1, t) = 0$ — жесткое защемление;

- b) $w(1, t) = 0, w''(1, t) = 0$ — шарнирное закрепление;
 c) $w''(1, t) = 0, w'''(1, t) = 0$ — свободный конец.
 Начальные условия при $t = 0$ (φ, ψ — заданы)

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{(x, 0)} = \psi(x).$$

Введем переменные — скорость v и изгибную жесткость u :

$$v = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad u = d \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Тогда из уравнения (1) получим систему

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (4)$$

а граничные условия "a" "b" "c" примут вид

$$a) \quad v(0, t) = 0, \quad v'(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad v'(1, t) = 0; \quad (5)$$

$$b) \quad v(0, t) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad u(1, t) = 0; \quad (6)$$

$$c) \quad u(0, t) = 0, \quad u'(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u'(1, t) = 0. \quad (7)$$

Начальные условия: $v(x, 0) = \psi(x), \quad u(x, 0) = d \cdot \varphi''(x)$.

Умножая уравнения (3), (4) на v и на u , складывая и интегрируя, получаем с учетом условий (5), (6), (7) выражения для энергии

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 (v^2 + u^2) dx, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, энергия E должна быть постоянной. Однако расчетная энергия (в силу приближенности разностного метода) постоянной уже не будет. "Малость" этого непостоянства может служить качественным контролем расчетов.

2. Разностная схема

Введем равномерную сетку $x_j = jh$, $h = 1/N$, ($j = 0, \dots, N$), $t_k = k\tau$, $\tau = rh^2/d$, ($k = 0, \dots, K$). Здесь $r = d\tau/h^2$ — заданный фиксированный параметр. Введем также сеточные величины

$$v_j = v_j^k \approx v(x_j, t_k), \quad \hat{v}_j = v_j^{k+1} \approx v(x_j, t_{k+1}),$$

$$u_j = u_j^k \approx u(x_j, t_k), \quad \hat{u}_j = u_j^{k+1} \approx u(x_j, t_{k+1}).$$

Обозначим $Y_j = [v_j, u_j]^T$.

Системе (6), (7) будет соответствовать система разностных уравнений с заданными весовыми параметрами α_1 , α_2

$$L_1(\hat{Y}_j) \equiv (\hat{v}_j - v_j)/\tau + d[\alpha_1 \Lambda \hat{u}_j + (1 - \alpha_1) \Lambda u_j]/h^2 = 0, \quad (9)$$

$$L_2(\hat{Y}_j) \equiv (\hat{u}_j - u_j)/\tau + d[\alpha_2 \Lambda \hat{v}_j + (1 - \alpha_2) \Lambda v_j]/h^2 = 0. \quad (10)$$

Здесь $\Lambda u_j = u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}$; $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$; $j = 1, \dots, N-1$;

Разностную систему (9), (10), аппроксимирующую систему (3), (4) с порядком $O(\tau + h^2)$ или $O(\tau^2 + h^2)$ в зависимости от подбора α_1, α_2 , можно записать компактно

$$A\hat{Y}_{j-1} + B\hat{Y}_j + C\hat{Y}_{j+1} = G_j, \quad (11)$$

где введены обозначения

$$A = C = \begin{pmatrix} 0 & r\alpha_1 \\ -r\alpha_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2r\alpha_1 \\ 2r\alpha_2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_j = \begin{bmatrix} v_j - r(1 - \alpha_1)\Lambda u_j \\ u_j - r(1 - \alpha_2)\Lambda v_j \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Таким образом, уравнение (11) формально выглядит как скалярное.

3. Формулы прогонки

Решение системы (11) ищется в виде

$$\hat{Y}_j = P_j \hat{Y}_{j+1} + Q_j, \quad (13)$$

или (покомпонентно)

$$\hat{v}_j = p_{11,j} \hat{v}_{j+1} + p_{12,j} \hat{u}_{j+1} + q_{1,j}; \quad (14)$$

$$\hat{u}_j = p_{21,j} \hat{v}_{j+1} + p_{22,j} \hat{u}_{j+1} + q_{2,j}, \quad (15)$$

$$\text{Здесь } P_j = \begin{pmatrix} p_{11,j} & p_{12,j} \\ p_{21,j} & p_{22,j} \end{pmatrix}, \quad Q_j = \begin{bmatrix} q_{1,j} \\ q_{2,j} \end{bmatrix}$$

матрично-векторные коэффициенты прогонки.

По аналогии со скалярной прогонкой здесь имеем

$$P_j = -(AP_{j-1} + B)^{-1}C, \quad Q_j = (AP_{j-1} + B)^{-1}R_j, \quad (16)$$

где $R_j = G_j - AQ_{j-1}$. Если известны (с учетом граничных условий) значения P_0, Q_0 , то по формулам (16) находятся все P_j, Q_j для $j = 1, \dots, N-1$. Если известен вектор $\hat{Y}_N$, то по формулам (13) находятся все $\hat{Y}_j$, ($j = N-1, \dots, 0$). При этом выражения в формулах (16) лучше всего расписать покомпонентно.

Обозначим компоненты обратной матрицы из формул (16)

$$(A + P_{j-1}B)^{-1} = M_{j-1} = \begin{pmatrix} m_{11,j-1} & m_{12,j-1} \\ m_{21,j-1} & m_{22,j-1} \end{pmatrix}.$$

Несложно показать, что компоненты матрицы M_{j-1} выразятся через компоненты матриц A, P_{j-1}, B так:

$$m_{11,j-1} = \frac{1 - r\alpha_2 p_{12,j-1}}{\Delta}; \quad m_{12,j-1} = \frac{r\alpha_1(2 - p_{22,j-1})}{\Delta}; \quad (17)$$

$$m_{21,j-1} = -\frac{r\alpha_2(2 - p_{11,j-1})}{\Delta}; \quad m_{22,j-1} = \frac{1 + r\alpha_1 p_{21,j-1}}{\Delta}; \quad (18)$$

$$\Delta = (1+r\alpha_1 p_{21,j-1})(1-r\alpha_2 p_{12,j-1}) + r^2 \alpha_1 \alpha_2 (2-p_{11,j-1})(2-p_{22,j-1}).$$

Элементы матрицы P_j из формул (16) представятся в виде

$$p_{11,j} = m_{12,j-1} r \alpha_2; \quad p_{12,j} = -m_{11,j-1} r \alpha_1; \quad p_{21,j} = m_{22,j-1} r \alpha_2; \quad (19)$$

$$p_{22,j} = -m_{21,j-1} r \alpha_1; \quad (j = 1, \dots, N-1).$$

Заметим, что элементы матриц M_{j-1} , P_j не зависят от переменной t_k , если от нее не зависят элементы матрицы P_0 .

Компоненты $r_{1,j}, r_{2,j}$ вектора R_j из формул (16) имеют вид

$$r_{1,j} = v_j - r(1 - \alpha_1)(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) - r\alpha_1 q_{2,j-1},$$

$$r_{2,j} = u_j + r(1 - \alpha_2)(v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}) + r\alpha_2 q_{1,j-1}.$$

По найденным (см. п. 4.) значениям $q_{1,0}, q_{2,0}$, а стало быть, и $r_{1,0}, r_{2,0}$ (зависящим от t_k !) рекуррентно найдутся $q_{1,j}, q_{2,j}$ по формулам

$$q_{1,j} = m_{11,j-1} r_{1,j} + m_{12,j-1} r_{2,j}; \quad (20)$$

$$q_{2,j} = m_{21,j-1} r_{1,j} + m_{22,j-1} r_{2,j}. \quad (21)$$

Для расчета P_0 , Q_0 необходимо привлечь граничные условия.

4. Реализация граничных условий

Производные v', u' в граничных условиях (5) или (7) необходимо (для сохранения второго порядка точности расчетов) аппроксимировать разностными выражениями второго порядка. Для этого продолжим условно решение задачи и область действия уравнения (1) за пределы отрезка $0 \leq x \leq 1$ и введем дополнительные узлы сетки x_{-1}, x_{N+1} .

Теперь можно рассмотреть разностные уравнения (9) и (10) на левой и правой границах.

4.1. Левый конец ($x = 0$)

Используя выражение

$$\hat{v}'_0 = (\hat{v}_1 - \hat{v}_{-1})/(2h) \text{ или } \hat{u}'_0 = (\hat{u}_1 - \hat{u}_{-1})/(2h),$$

разностные уравнения (9) или (10) при $j = 0$, получим в любом варианте "a" "b" или "c" выражения вида

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_0 &= \beta_{11}\hat{v}_1 + \beta_{12}\hat{u}_1 + \gamma_1, \\ \hat{u}_0 &= \beta_{21}\hat{v}_1 + \beta_{22}\hat{u}_1 + \gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

откуда из сравнения с формулами (14) и (15) при $j = 0$ следует

$$p_{11,0} = \beta_{11}, \dots, p_{22,0} = \beta_{22}, \quad q_{1,0} = \gamma_1, q_{2,0} = \gamma_2.$$

Рассмотрим наши варианты:

$$a) \quad \left. \begin{aligned} \hat{v}_0 &= 0 \cdot \hat{v}_1 + 0 \cdot \hat{u}_1 + 0 = 0, \\ \hat{v}'_0 &= (\hat{v}_1 - \hat{v}_{-1})/(2h) = 0, \\ L_2(\hat{Y}_0) &= 0, \quad v'_0 = (v_1 - v_{-1})/(2h) = 0; \end{aligned} \right\}$$

Здесь $L_2(\hat{Y}_0)$ взято из уравнения (10).

$$b) \quad \left. \begin{aligned} \hat{v}_0 &= 0 \cdot \hat{v}_1 + 0 \cdot \hat{u}_1 + 0 = 0, \\ \hat{u}_0 &= 0 \cdot \hat{v}_1 + 0 \cdot \hat{u}_1 + 0 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Эта система уже имеет вид (22);

$$c) \quad \left. \begin{aligned} \hat{u}'_0 &= (\hat{u}_1 - \hat{u}_{-1})/(2h) = 0, \\ L_1(\hat{Y}_0) &= 0, \quad u'_0 = (u_1 - u_{-1})/(2h) = 0, \\ \hat{u}_0 &= 0 \cdot \hat{v}_1 + 0 \cdot \hat{u}_1 + 0 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь $L_1(\hat{Y}_0)$ взято из уравнения (9).

4.2. Правый конец ($x = 1$)

Предполагаются уже посчитанными значения $p_{11,j}, \dots, q_{1,j}, q_{2,j}$ для $j = 1, \dots, N - 1$. Тогда значения $\hat{v}_N, \hat{u}_N$ найдутся решением одной из систем:

$$a) \left. \begin{aligned} \hat{v}_N &= 0, \\ \hat{v}'_N &= (\hat{v}_{N+1} - \hat{v}_{N-1})/(2h) = 0, \\ L_2(\hat{Y}_N) &= 0, \quad v'_N = (v_{N+1} - v_{N-1})/(2h) = 0, \\ \hat{v}_{N-1} &= p_{11,N-1}\hat{v}_N + p_{12,N-1}\hat{u}_N + q_{1,N-1}; \end{aligned} \right\}$$

Здесь $L_2(\hat{Y}_N)$, $\hat{v}_{N-1}$ взяты из уравнений (10) и (14);

b) $\hat{v}_N = \hat{u}_N = 0$ — следует непосредственно из условий (6).

$$c) \left. \begin{aligned} \hat{u}_N &= 0, \\ \hat{u}'_N &= (\hat{u}_{N+1} - \hat{u}_{N-1})/(2h) = 0, \\ L_1(\hat{Y}_N) &= 0, \quad u'_N = (u_{N+1} - u_{N-1})/(2h) = 0, \\ \hat{u}_{N-1} &= p_{21,N-1}\hat{v}_N + p_{22,N-1}\hat{u}_N + q_{2,N-1}. \end{aligned} \right\}$$

Здесь $L_1(\hat{Y}_N)$, $\hat{u}_{N-1}$ взяты из уравнения (9) и (15).

5. Расчет $\hat{w}_j$, $\hat{E}$ и погрешности решения

Выражению для v из уравнения (2) поставим в соответствие разностное $(\hat{w}_j - w_j)/\tau = (\hat{v}_j + v_j)/2$ с порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$. Из этого выражения имеем

$$\hat{w}_j = w_j + \tau(\hat{v}_j + v_j)/2. \quad (23)$$

Для энергии E из формулы (8) имеем (по формуле трапеций)

$$\hat{E} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N c_j (\hat{v}_j^2 + \hat{u}_j^2), \quad (24)$$

где c_j — коэффициенты формулы трапеций.

Норма погрешности решения

$$\|\hat{w} - \hat{W}\|_C = \max_j |\hat{w}_j - \hat{W}_j|, \quad (25)$$

где $\hat{W}_j = W(x_j, t_{k+1})$ — тестовое решение (см. п. 6).

6. Тестовое решение $W(x, t)$

В качестве тестового возьмем решение нашей задачи, полученное методом разделения переменных:

$$W(x, t) = T(t)X(x); \quad (26)$$

$$T(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad \omega = z^2 d; \quad (27)$$

$$X(x) = d_1 \exp(zx) + d_2 \exp(-zx) + d_3 \cos(zx) + d_4 \sin(zx). \quad (28)$$

Здесь коэффициенты $d_1, \dots, d_4$, а также z находятся из условия удовлетворения решения (26) однородным граничным условиям "a" "b" или "c". В данной работе эти величины предлагаются к использованию уже сосчитанными для любых комбинаций граничных условий слева и справа, например ("a"–"b") или ("c"–"a") и др.

6.1. Компоненты тестового решения $W(x, t)$

Здесь приводятся сосчитанные величины z_1 , $\bar{d} = [d_1, d_2, d_3, d_4]$, значения d_i нормированы по отношению к $\max_i |d_i|$:

- 1) ("a"–"a") : $z_1 = 4,7300407$,
[0,0087489, 0,9912511, -1, 0,9825022];
- 2) ("a"–"b") : $z_1 = 3,9266023$,
[-0,0003884, 0,9996116, -0,9992233, 1];
- 3) ("a"–"c") : $z_1 = 1,8751041$,
[0,1329522, 0,8670478, -1, 0,7340955];
- 4) ("b"–"a") : $z_1 = 3,9266023$,
[-0,0139374, 0,0139374, 0, -1];
- 5) ("b"–"b") : $z_1 = \pi = 3,1415927$,
[0, 0, 0, 1];

- 6) ("b"–"c") : $z_1 = 3,9266023,$
 $[0,0139374, -0,0139374, 0, -1];$
- 7) ("c"–"a") : $z_1 = 1,8751041,$
 $[0,1329522, 0,8670478, 1, -0,7340955];$
- 8) ("c"–"b") : $z_1 = 3,9266023,$
 $[-0,0003884, 0,9996116, 0,9992233, -1];$
- 9) ("c"–"c") : $z_1 = 4,7300407,$
 $[0,0087489, 0,9912511, 1, -0,9825022].$

C_1 и C_2 задаются произвольно, например $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ или $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Тестовыми решениями для v и u будут

$$V(x, t) = \dot{T}(t)X(x), \quad U(x, t) = d \cdot T(t)X''(x), \quad (29)$$

а начальные условия для v и u тогда следует подобрать под эти тестовые решения (26), (29), т. е.

$$\psi(x) = \dot{T}(0)X(x), \quad \varphi(x) = T(0)X(x); \quad (30)$$

$$v(x, 0) = \psi(x), \quad u(x) = d \cdot \varphi''(x), \quad w(x, 0) = d \cdot \varphi(x), \quad (31)$$

где выражения $T(t), \dot{T}(t), X(x)$ получены с помощью формул (27), (28).

7. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

Проделать следующее:

1. Задать параметры задачи в диапазонах

$$d \sim 1, \quad N = 10-160, \quad K = 20-500,$$

$$0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad r = d\tau/h^2 = 0,4-10.$$

2. Показать, что в соответствии с теоретическими критериями и оценками явная схема ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$) условно устойчива, т. е. только при $r \leq 1/2$, а неявная ($\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$) устойчива безусловно, т. е. при любых r .

3. Показать сходимость численного решения к точному (для устойчивой схемы), т. е., что $\|w - W\|_C \rightarrow 0$ при $\tau, h \rightarrow 0$.

4. Показать, что численное решение при устойчивом счете соответствует физическому смыслу упругих колебаний. Проследить за изменением энергии во время счета при произвольных α_1, α_2 (и за ее постоянством при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$).

5. Предусмотреть в программе возможность остановки счета (для анализа результатов в данный момент) с последующим продолжением или выходом из расчета варианта.

6. Выдать на график величины $v_j, u_j, w_j, V_j, U_j, W_j$ со стиранием предыдущих (по времени) графиков, т. е. "в движении". Предусмотреть возможность блокировки выдач отдельных величин из этого набора с целью упрощения слишком сложной подвижной картины колебаний.

7. Выдавать на экран (с подвижными графиками) параметры постановки задачи и разностной схемы, а также временной счетчик k , норму погрешности $\|w - W\|_C$ и энергию E .

8. Следует иметь в виду, что в силу линейности и однородности уравнения (1) и краевых условий задачи максимум решения w будет линейно, а энергии — квадратично зависеть от максимума начальных данных.

1. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: "Мир" 1972.

Глава 12. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Известно, что интегральное уравнение Фредгольма первого рода является некорректной задачей. Как угодно малые возмущения входных данных (*здесь* правой части уравнения), представляющие погрешности результата обработки эксперимента или компьютерные погрешности при вычислении, приводят к конечным и большим погрешностям решения.

В данной работе перед непосредственным решением интегрального уравнения предлагается провести симметризацию ядра и регуляризацию по Тихонову.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\int_a^b G(x, s)u(s)ds = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (1)$$

Здесь $G(x, s)$ — заданное ядро, $f(x)$ — заданная или специально подобранная функция. Если известно также тестовое решение $U(s)$ уравнения (1), то

$$f(x) = \int_a^b G(x, s)U(s)ds. \quad (2)$$

Задача (1) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$\Phi(u) = \int_c^d \left[\int_a^b G(x, s)u(s)ds - f(x) \right]^2 dx. \quad (3)$$

Решению этой некорректной задачи должна предшествовать процедура регуляризации (*здесь* по Тихонову). Для этого построим регуляризованный функционал

$$\Phi_1(u) = \alpha \left[\int_a^b p_0 u^2 ds + \int_a^b p_1 u'^2 ds \right] + \Phi(u), \quad (4)$$

где p_0, p_1, α — заданные положительные параметры, (α мало).

2. Метод решения

Введем для областей изменения x, s равномерные сетки и коэффициенты формулы трапеций $c_{s,l}, c_{x,j}$:

$$x_j = c + jh_1, \quad h_1 = (d - c)/N, \quad j = 0, \dots, N;$$

$$s_l = a + lh, \quad h = (b - a)/M, \quad l = 0, \dots, M;$$

$$c_{x,j} = \begin{cases} h_1/2, & \text{если } j = 0, N, \\ h_1, & \text{если } 0 < j < N, \end{cases} \quad c_{s,l} = \begin{cases} h/2, & \text{если } l = 0, M, \\ h, & \text{если } 0 < l < M. \end{cases}$$

Здесь N, M — заданные целые параметры.

Заменим в функционале (4) второй интеграл приближенным по формуле прямоугольников, остальные — по формуле трапеций. Получим

$$\Phi_1^{(h)} = \alpha \left(p_0 \sum_{l=0}^M c_{s,l} u_l^2 + p_1 h \sum_{l=1}^M \left(\frac{u_l - u_{l-1}}{h} \right)^2 \right) + \Phi^{(h)}, \quad (5)$$

$$\text{где } \Phi^{(h)} = \sum_{j=0}^N c_{x,j} \left(\sum_{l=0}^M c_{s,l} G(x_j, s_l) u_l - f_j^1 \right)^2,$$

$f_j^1 = f(x_j) + \varepsilon_j$, $|\varepsilon_j| \leq \varepsilon$. ε_j — случайные малые погрешности, не превосходящие заданной величины ε . Условия минимума функционала (5) $\partial \Phi_1^{(h)} / \partial u_k = 0$ дают систему линейных алгебраических

уравнений

$$\sum_{l=0}^M (\alpha T_{k,l} + R_{k,l}) u_l = F_k, \quad (k = 0, \dots, M), \quad (6)$$

где

$$R_{k,l} = c_{s,k} c_{s,l} \sum_{j=0}^N c_{x,j} G(x_j, s_k) G(x_j, s_l), \quad (7)$$

$$F_k = c_{s,k} \sum_{j=0}^N c_{x,j} G(x_j, s_k) f_j^1; \quad (8)$$

$$T_{k,l} = \begin{cases} p_0 c_{s,k} + z p_1 / h, & \text{если } |k - l| = 0, \\ -p_1 / h, & \text{если } |k - l| = 1, \\ 0, & \text{если } |k - l| > 1. \end{cases} \quad z = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, M, \\ 2, & \text{если } k \neq 0, M. \end{cases} \quad (9)$$

Систему (6) можно решать по Гауссу (желательно по стандартной программе). Подбором α можно добиться вполне удовлетворительного совпадения регуляризированного решения этой системы с тестовым решением $U(s)$.

3. Некоторые варианты заданий

Здесь предлагаются функции $G(x, s), U(s), f(x)$:

$$\begin{aligned} 1. \quad & G(x, s) = \sqrt{1/\pi} \exp(-(x-s)^2), \quad b = -a, \quad d = -c, \quad |a| \geq 1; \\ U(s) = & \begin{cases} (1-s^2)^2, & \text{если } |s| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |s| > 1, \end{cases} \\ f(x) = & \int_a^b G(x, s) U(s) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & G(x, s) = \cos(\pi s x / a), \quad b = -a, \quad d = -c, \quad a \neq 0; \\ U(s) = & 1 - (s/a)^2; \\ f(x) = & |a| \begin{cases} \frac{4}{3}(1-t^2/10), & \text{если } |t| \leq \epsilon_1, \\ -\frac{4}{t^2}(\cos(t) - \frac{\sin(t)}{t}), & \text{если } |t| > \epsilon_1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$t = \pi x, \quad \epsilon_1 \approx 10^{-4}.$$

$$3. \quad G(x, s) = \cos(\pi s x / a), \quad b = -a, \quad d = -c, \quad a \neq 0;$$

$$U(s) = \cos^2\left(\frac{\pi s}{2a}\right);$$

$$f(x) = |a| \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\pi(x+1))}{\pi(x+1)} + \frac{\sin(\pi(x-1))}{\pi(x-1)} \right) \right].$$

$$\text{Учесть, что при малых } |z| \quad \frac{\sin(z)}{z} \approx 1 - z^2/6.$$

$$4. \quad G(x, s) = 1/((x-s)^2 + 1), \quad a, b, c, d - \text{любые};$$

$$U(s) = \sin^2(\pi Y), \quad \text{где } Y = (s-a)/(b-a);$$

$$f(x) = \int_a^b G(x, s) U(s) ds.$$

$$5. \quad G(x, s) = 1/(x+s+1) \quad a, b, c, d \geq 0;$$

$$U(s) = (b-a)^2 Y(1-Y), \quad Y = (s-a)/(b-a);$$

$$f(x) = [\beta^2/2 + p_1\beta - p_1(p_1 + \beta) \ln(1 + \beta/p_1)],$$

$$\text{где } \beta = b-a, \quad p_1 = a+x+1.$$

Все эти варианты — примеры реальных задач.

4. Рекомендации к проведению расчетов и методических исследований

1. Целесообразно задавать параметры задачи в диапазонах $M=10-20$, $N=20-50$, $\varepsilon=0-0,001$, $p_0, p_1 \approx 1$, $\alpha = 10^{-1}-10^{-19}$.

2. Матрицу $(R_{k,l})$ и вектор $[F_k]$ в системе (6) следует "заготовить/выдать (часть) и убедиться в том, что матрица симметрична. Только после этого задавать параметры p_0, p_1, α . Матрицу $(T_{k,l})$ специально получать не имеет смысла, так как она легко учитывается как "поправка" к заготовленной матрице $(R_{k,l})$.

3. Кроме подбора оптимального $\alpha = \alpha^*$, обеспечивающего максимальное совпадение решения с тестом, выделенным кружками, (рис. 11, в), убедиться, что при $\alpha \gg \alpha^*$ (рис. 11, а) регуляризованное решение будет гладким, сильно размазанным и далеко не совпадающим с тестовым, а при $\alpha \ll \alpha^*$ (рис. 11, б) регуляризация

практически отключается, и решение "разбалтывается".

4. Если для заданного тестового решения нет аналитически заданной правой части, то ее можно получить из соотношения (2) с использованием формулы трапеций

$$f(x_j) = \int_a^b G(x_j, s)U(s)ds \approx \sum_{l=0}^M c_{s,l}G(x_j, s_l)U(s_l). \quad (10)$$

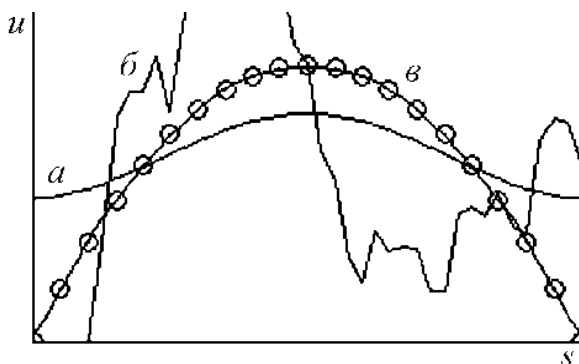


Рис. 11

5. Техника минимизации функционала $\Phi_1^{(h)}$ в формуле (5) на-вязывает условие $u'(a) = u'(b) = 0$ в решении $u(s)$. Это необходи-мо учитывать при анализе результатов, особенно, когда у тесто-вого решения $U'(a) \neq 0$, $U'(b) \neq 0$.

Библиографический список

1. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некоррек-ных задач. М.: Наука, 1986.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА	4
Глава 2. ПОСТРОЕНИЕ СГЛАЖИВАЮЩЕГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА	9
Глава 3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	15
Глава 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ	20
Глава 5. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ	24
Глава 6. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ "ЖЕСТКИХ СИСТЕМ". ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА	29
Глава 7. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ	33
Глава 8. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. МЕТОДЫ БУБНОВА—ГАЛЕРКИНА И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	39
Глава 9. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО—КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ	46
Глава 10. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. ДВУСЛОЙНЫЕ И ТРЕХСЛОЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ	56
Глава 11. РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ. ДВУСЛОЙНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА	71
Глава 12. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА	81

