П.В. Воронина
А.С. Лебедев

$$\sum \langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle c_j = \sum A_i f(x_i)$$

$$f(x) - L_n(x) =$$

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\int f(x)\,dx \approx$$

$$\langle \varphi_i(x), f(x) \rangle$$

$$x_{n+1} =$$

$$\frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h}$$

$$f_x \approx$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \prod (x - x_i)$$

Численные методы в задачах

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Кафедра математического моделирования

П. В. Воронина, А. С. Лебедев

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Издание второе, исправленное и дополненное

Новосибирск
2020

УДК 519.85+519.688+521
ББК В185.121
В 752

Рецензент.
д-р физ.-мат. наук *С. Г. Черный*

Воронина, П. В.
В 752 Численные методы в задачах : учеб. пособие / П. В. Воронина, А. С. Лебедев ; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2020. — 152 с.

ISBN 978-5-4437-1005-1

В пособие включены задачи по полиномиальному интерполированию, квадратичному приближению функций, численному дифференцированию, численному интегрированию и решению нелинейных уравнений. Эти темы входят в курс вычислительных методов анализа, который читается на механико-математическом факультете НГУ в 3-м семестре.

Необходимые для решения задач понятия и теория кратко даются с помощью нескольких вводных задач по каждой теме, поэтому начинать решение рекомендуется с них. Многие задачи снабжены ответами и указаниями. Список литературы, использованной при составлении задач, приводится в конце пособия.

Пособие будет полезно студентам, изучающим вычислительные методы самостоятельно или под руководством преподавателей, а также преподавателям, проводящим семинарские и практические занятия.

Пособие рекомендовано к изданию ученым советом Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий.

ББК В185.121
УДК 519.85+519.688+521

ISBN 978-5-4437-1005-1

Оглавление

Глава 1. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ **4**
Полином Лагранжа. Погрешность интерполяции 4
Полином Ньютона. Разделенные разности 17
Полином Эрмита. Интерполирование с кратными узлами . . . 29
Полином Чебышева. Оптимальное расположение узлов 32

Глава 2. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ **40**

Глава 3. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ **58**

Глава 4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ **68**
Квадратурные формулы интерполяционного типа 68
Квадратурные формулы Гаусса 88

Глава 5. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ **98**

Ответы и указания **115**

Библиографический список **150**

Глава 1.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Полином Лагранжа. Погрешность интерполяции

1.1. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных точек (узлов) из отрезка $[a, b]$, в которых определена функция $f(x)$.

(а) Показать, что для полинома $l_i(x) = \prod\limits_{k=0,\, k\neq i}^{n} \dfrac{x - x_k}{x_i - x_k}$ степени n выполняются равенства

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = i; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq i. \end{cases}$$

Полиномы $l_i(x)$ называются базисными полиномами Лагранжа.

(б) Показать, что для полинома степени n, заданного как

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x),$$

выполняются равенства

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Полином $P_n(x)$ называется интерполяционным полиномом в форме Лагранжа.

(в) Доказать, что

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$$

(г) Доказать, что для любой монотонной положительной функции $f(x)$ полином

$$P_n(x) = \sum_{i=0, i\neq k}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

имеет по крайней мере один действительный корень при $0 \leq k \leq n$.

1.2. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов из отрезка $[a, b]$, в которых определена достаточно гладкая функция $f(x)$, и пусть для полинома $P_n(x)$ степени n выполняются равенства

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

(а) Для заданного $x \in [a, b]$, $x \neq x_i$ найти константу K такую, что функция $F(t)$, заданная как

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - K(t - x_0) \ldots (t - x_n),$$

обращается в нуль при $t = x$.

(б) Показать, что существует $\theta \in [a, b]$ такое, что имеет место равенство $F^{(n+1)}(\theta) = 0$.

(в) Используя пункты (а) и (б), получить выражение для погрешности интерполяции в точке x, т. е. вывести формулу

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0) \ldots (x - x_n).$$

1.3. Обозначим $\psi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, где $x_i = a + \dfrac{b-a}{n}i$, $i = 0, \ldots, n$. Вычислить $\|\psi_n(x)\| = \max_{x\in[a,b]} |\psi_n(x)|$ при $n = 1,\ 2,\ 3$.

1.4. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов из отрезка $[a, b]$. Функция Лебега $\lambda_n(x)$ для этих узлов определяется как

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|,$$

где $l_i(x)$ — базисные полиномы Лагранжа.

(а) Показать, что для интерполяционных полиномов $L_n(x)$ и $L_n^*(x)$ степени n, построенных так, что

$$L_n(x_i) = f_i, \qquad L_n^*(x_i) = f_i^*, \qquad |f_i - f_i^*| \le \varepsilon, \qquad i = 0, \ldots, n,$$

выполняется неравенство

$$|L_n(x) - L_n^*(x)| \le \varepsilon\lambda_n(x).$$

(б) Показать, что при квадратичной интерполяции по трем равноотстоящим узлам для функции Лебега верно неравенство $\lambda_2(x) \le \dfrac{5}{4}$ для любого x между узлами.

1.5. Пусть $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ — набор различных узлов, в которых определена функция $f(x)$, и пусть $f(x_{n-i}) = f(x_i)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$. Верно ли, что интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по этим узлам, является четной функцией?

1.6. Пусть $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ — набор различных узлов, в которых определена функция $f(x)$, и пусть $x_{n-i} = -x_i$, $f(x_{n-i}) = f(x_i)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$. Верно ли, что интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по этим узлам, является четной функцией?

1.7. Пусть x_0, x_1, $\ldots$, x_n — набор различных узлов, в которых определена функция $f(x)$, и пусть $x_{n-i} = -x_i$, $f(x_{n-i}) = -f(x_i)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$. Верно ли, что интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по этим узлам, является нечетной функцией?

1.8. Пусть x_0, x_1, $\ldots$, x_n — набор различных узлов, в которых определена функция $f(x)$, и пусть $x_{n-i} \neq -x_i$, $f(x_{n-i}) \neq f(x_i)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$. Верно ли, что интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по этим узлам, не является четной функцией?

1.9. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов, в которых определена функция $f(x)$. Верно ли, что интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по этим узлам, является полиномом степени n?

1.10. Построить интерполяционный полином для функции $f(x) = |x|$ по узлам -1, 0, 1.

1.11. Построить интерполяционный полином для функции $f(x) = x^2$ по узлам 0, 1, 2, 3.

1.12. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, удовлетворяющий условиям

$$P_3(-1) = 0, \quad P_3(1) = 1, \quad P_3(2) = 2, \quad a_3 = 1.$$

1.13. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, удовлетворяющий условиям

$$P_3(-1) = 0, \quad P_3(1) = 1, \quad P_3(2) = 2, \quad a_1 = 1.$$

1.14. Построить многочлен $P_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{i=0}^{4} a_i = 0, \quad P_4(0) = 0, \quad P_4(-1) = 1, \quad P_4(2) = 2, \quad P_4(3) = 3.$$

1.15. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, удовлетворяющий условиям

$$P_3(0) = P_3(1) = P_3(2) = 0, \quad a_2 = 1.$$

1.16. Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, удовлетворяющий условиям

$$P_3(0) = P_3(1) = P_3(-2) = 5, \quad a_1 = 2.$$

1.17. Построить многочлен $P_3(x)$ третьей степени, удовлетворяющий условиям

$$P_3(k-2) = 3k^3 + 2k^2 + k + 1, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

1.18. Функция $f(x)$ задана таблицей. В предположении, что значение функции в произвольной точке x восстанавливается по табличным значениям линейной интерполяцией, найти x в каждом случае

(а)

x	10	15	17	20
$f(x)$	3	7	11	17

, $f(x) = 10.$

(б)

x	1	2	2,5	3
$f(x)$	−6	−1	5,25	16

, $f(x) = 0.$

(в)

x	4	6	8	10
$f(x)$	11	27	50	83

, $f(x) = 20.$

1.19. Функция $f(x) = x^3$ задана таблицей

$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$
$f(x_0) = 0$	$f(x_1) = 1$	$f(x_2) = 27$	$f(x_3) = 64$

.

Найти $f(2)$ как значение интерполяционного полинома, заданного различными способами.

(а) Полином $P_1(x)$ построить по двум ближайшим узлам.

(б) Полином $L_2(x)$ построить по узлам $x_0,\ x_1,\ x_2$.

(в) Полином $R_2(x)$ построить по узлам $x_1,\ x_2,\ x_3$.

(г) Полином $P_3(x)$ построить по всем четырем узлам как

$$P_3(x) = \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} L_2(x) + \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} R_2(x).$$

1.20. Значения полинома $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ в нескольких узлах показаны в таблице

x	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	31	5	1	1	11	61

.

Построить полином $q(x)$ наименьшей степени, значения которого задаются таблицей

x	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	31	5	1	1	11	30

.

1.21. Функция $f(x)$ приближается на отрезке $[a, b]$ по равноотстоящим узлам $x_i = a + \dfrac{b-a}{n} i$, $i = 0, \ldots, n$. Оценить погрешность интерполяции для следующих случаев:

(а) $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt, \qquad [0, 1], \qquad n = 2;$

(б) $f(x) = \ln x, \qquad [1, 2], \qquad n = 3.$

1.22. Функция $\sin x$ приближается на отрезке $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ интерполяционным многочленом по значениям в точках $0,\ \dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{\pi}{4}$. Оценить погрешность интерполяции на этом отрезке.

1.23. Функция $\ln x$ приближается на отрезке $[1,\ 2]$ интерполяционным многочленом по значениям в точках $1,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ 2$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $\dfrac{1}{300}$.

1.24. Функция e^{2x} приближается на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ интерполяционным многочленом по значениям в точках $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

1.25. Приближенное значение функции $\ln(x)$ при $x = 15,2$ найдено линейной интерполяцией как значение полинома $P_1(x)$, построенного по узлам $x_0 = 15$ и $x_1 = 16$, Показать, что справедлива оценка

$$0 < \ln(15,2) - P_1(15,2) < 4 \cdot 10^{-4}.$$

1.26. Функция $f(x) = \dfrac{1}{(A^2 + 6 - x)^4}$ приближается на отрезке $[3,5]$ интерполяционным многочленом первой степени, построенным по значениям функции в узлах $x_0 = 3$ и $x_1 = 5$. При каком A погрешность интерполяции в равномерной норме не превышает 10^{-5}?

1.27. Функция $f(x) = \sqrt[5]{e^{A^2 x}}$ приближается на отрезке $[-1,0]$ интерполяционным многочленом первой степени, построенным по значениям функции в узлах $x_0 = -1$ и $x_1 = 0$. При каком A погрешность интерполяции в равномерной норме не превышает $5 \cdot 10^{-7}$?

1.28. С каким шагом следует составлять таблицу функции e^x на отрезке $[0,1]$, чтобы погрешность кусочно-линейной интерполяции не превосходила 10^{-6}?

1.29. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1000 до 10000 с шагом 1. Какова наибольшая погрешность кусочно-линейной интерполяции?

1.30. Какова наибольшая погрешность кусочно-линейной интерполяции для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$, заданной на интервале $[1,\ 1000]$ с шагом 1?

1.31. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции для функции

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^x e^{-z^2} dz,$$

заданной на интервале $[0,\ 3]$ с шагом $0,001$?

1.32. Дана таблица синусов с шагом 1°. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции?

1.33. Пусть требуется составить таблицу функции $f(x) = \sin x$. Какой шаг таблицы h гарантирует погрешность интерполяции меньше $5 \cdot 10^{-4}$ при

(а) линейной интерполяции;

(б) квадратичной интерполяции?

1.34. Функция $\ln x$ интерполируется полиномом по точкам $x = 0,4;\ \ 0,5;\ \ 0,7;\ \ 0,8$. Оценить ошибку интерполяции в точке $x = 0,6$.

1.35. Сколько узлов должна иметь равномерная сетка, покрывающая отрезок $[-1, 1]$, чтобы погрешность кусочно-линейной интерполяции функции Рунге $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ не превосходила 10^{-5}?

1.36. Какую точность можно гарантировать при линейной интерполяции функции $f(x) = xe^{-x}$ на отрезке $[0, 1]$, считая узлами интерполяции его концы?

1.37. Построить многочлен Лагранжа для случаев:

(а) $x_i = -1,\ 0,\ 1; \qquad y_i = 3,\ 2,\ 5.$

(б) $x_i = 1,\ 2,\ 4; \qquad y_i = 3,\ 4,\ 6.$

1.38. Построить многочлен Лагранжа $L_n(x)$ степени n, удовлетворяющий условиям $L_n(x_k) = y_k$:

(а) $n = 3, \qquad x_k = 0,\ 1,\ 2,\ 4, \quad y_k = 2,\ 3,\ 4,\ 6:$

(б) $n = 2, \qquad x_k = 2k + 1, \qquad y_k = 8\sin\dfrac{\pi}{6}(2k + 1), \qquad k = 0,\ 1,\ 2.$

1.39. Функция $f(x)$ приближается интерполяционным полиномом на отрезке $[a, b]$ по равноотстоящим узлам $x_i = a + \dfrac{b-a}{n}i$, $i = 0, \ldots, n$. Найти наибольшее целое p, для которого можно утверждать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит 10^{-p} для следующих случаев:

(а) $a = -1, \quad b = 0, \quad f(x) = e^x, \quad n = 2.$

(б) $a = 0, \quad b = 0{,}1, \quad f(x) = \sin 2x, \quad n = 1;$

1.40. Функция $f(x) = \dfrac{1}{A^2 - x}$ приближается на интервале $[-4, -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -4,\ -3,\ -2,\ -1$. При каких значениях A оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5}?

1.41. Оценить погрешность приближения функции e^{-x} интерполяционным многочленом Лагранжа $L_2(x)$, построенным по узлам $x_0 = 0{,}0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}3$, в точке

(а) $x = 0{,}05;$

(б) $x = 0{,}2.$

1.42. Функция e^x приближается на отрезке $[0, 1]$ интерполяционным полиномом степени n по узлам $x_i = \dfrac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$. При каком n точность приближения будет не хуже 10^{-3}?

1.43. Функция $f(x) = \sin x$ приближается на отрезке $[0, A]$ интерполяционным полиномом второй степени по узлам $x_i = \dfrac{A}{2}i$, $i = 0, 1, 2$. При каком A точность приближения будет не хуже 10^{-3}?

1.44. Построить интерполяционный полином Лагранжа первой степени для функции $f(x) = x^3$ по узлам $x_0 = 0$ и $x_1 = a$. Показать, что значение величины θ в оценке ошибки интерполяции

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

равно $\dfrac{1}{3}(x + a)$.

1.45. Построить интерполяционный полином Лагранжа первой степени для функции $f(x) = x^3$ по узлам $x_0 = a$ и $x_1 = b$. Показать, что значение величины θ в оценке ошибки интерполяции определяется единственным образом и равно $\dfrac{1}{3}(x + a + b)$.

1.46. Построить интерполяционный полином Лагранжа первой степени для функции $f(x) = (2x - a)^4$ по узлам $x_0 = 0$ и $x_1 = a$. Найти все возможные значения величины θ в оценке ошибки интерполяции.

1.47. Задана таблица значений функции

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$$

при $x = i \cdot h$, где $h = 10^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Значение функции $f(x)$ в точке $x \geq 1 + h$ восстанавливается по двум, трем или четырем ближайшим к точке x табличным значениям с помощью интерполяционного полинома

(а) первой,

(б) второй,

(в) третьей степени соответственно.

Показать, что погрешность интерполяции не превосходит

(а) $0,4 \cdot 10^{-2}$,

(б) $0,5 \cdot 10^{-3}$,

(в) $0,75 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

1.48. Задана таблица значений функции

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$

при $x = i \cdot h$, где $h = 10^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Значение функции $f(x)$ в точке $x \geq 1 + h$ восстанавливается по двум, трем или четырем ближайшим к точке x табличным значениям с помощью интерполяционного полинома
(а) первой,
(б) второй,
(в) третьей степени соответственно.

Показать, что погрешность интерполяции не превосходит
(а) $0,15 \cdot 10^{-2}$,
(б) $0,25 \cdot 10^{-3}$,
(в) $0,45 \cdot 10^{-4}$ соответственно.

1.49. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ — набор различных узлов, $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$ — заданные числа. Используя полином $P_n(x)$ степени n, для которого выполняются равенства

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$

построить полином $P_{n+1}(x)$ степени $n + 1$, для которого выполняются равенства

$$P_{n+1}(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n + 1.$$

1.50. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m}$ — набор различных узлов ($m \geq 1$), $y_0, y_1, \ldots y_{n+m}$ — заданные числа. Используя полином $P_n(x)$ степени n, для которого выполняются равенства

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$

построить полином степени $n+m$ вида $P_{n+m}(x) = P_n(x)+\omega(x)Q_{m-1}(x)$, для которого

$$P_{n+m}(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n + m.$$

Здесь $\omega(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

1.51. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ — набор различных узлов, $A_n(x)$, $B_n(x)$ — полиномы степени n такие, что

$$A_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$
$$B_n(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Найти линейные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ такие, что для полинома степени $n+1$

$$P_{n+1}(x) = \alpha(x)A_n(x) + \beta(x)B_n(x)$$

выполняются равенства

$$P_{n+1}(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n+1.$$

1.52. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m}$ — набор различных узлов, $A_{m,i}(x)$ — набор из $n+1$ полиномов степени m каждый со следующими свойствами:

$$A_{m,i}(x_j) = y_j, \quad i = 0, \ldots, n, \quad j = n+1, \ldots, n+m,$$
$$A_{m,i}(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Т. е. каждый из полиномов $A_{m,i}(x)$ в узлах $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ принимает соответственно значения $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+m}$. Кроме того, полином $A_{m,i}(x)$, $i = 0, \ldots, n$ в узле x_i принимает значение y_i. Найти коэффициенты $\alpha_{n,i}(x)$ (полиномы степени n) такие, что полином

$$P_{n+m}(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i}(x)A_{m,i}(x)$$

является интерполяционным для узлов $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m}$, т. е.

$$P_{n+m}(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

1.53. Пусть $\omega(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$, $x_i \neq 0$. Используя $\omega(x)$, построить полином $P_n(x)$ степени n, для которого выполняются условия

$$P_n(x_i) = \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

1.54. (а) Пусть полиномы $L_n(x)$ и $R_n(x)$ степени n и полином $P_{n+1}(x)$ степени $n + 1$ интерполируют функцию $f(x)$, т. е.

$$\begin{aligned} L_n(x_i) &= f(x_i), && i = 0, 1, \ldots, n, \\ R_n(x_i) &= f(x_i), && i = 1, 2, \ldots, n+1, \\ P_{n+1}(x_i) &= f(x_i), && i = 0, 1, \ldots, n+1, \end{aligned}$$

где $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$. Доказать, что $P_{n+1}(x)$ лежит между $L_n(x)$ и $R_n(x)$ при всех $x \in [x_0, x_{n+1}]$.

(б) Пусть полиномы $L_n(x)$ и $R_n(x)$ степени n интерполируют функцию $f(x)$, т. е.

$$\begin{aligned} L_n(x_i) &= f(x_i), && i = 0, 1, \ldots, n, \\ R_n(x_i) &= f(x_i), && i = 1, 2, \ldots, n+1, \end{aligned}$$

где $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1}$. Доказать, что если $f^{(n+1)}(x)$ не меняет знак на $[x_0, x_{n+1}]$, то $f(x)$ лежит между $L_n(x)$ и $R_n(x)$ при всех $x \in [x_0, x_{n+1}]$.

1.55. Пусть $P(x, y) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x) y^i$, где $a_i(x)$ — многочлены степени не выше n. Известно, что $P(k, m) = 0$ при k, $m = 0, \ldots, n$. Доказать, что $a_i(x) \equiv 0$.

1.56. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов из отрезка $[a, b]$, $f(x)$ — достаточно гладкая функция, определенная на отрезке $[a, b]$, $P_n(x)$ — полином степени n, для которого выполняются равенства

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Доказать, что для каждого $x \in [a,b]$ существуют различные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ из отрезка $[a,b]$ и $\theta \in [a,b]$ такие, что

$$P_n'(x) - f'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!}(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_n).$$

1.57. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов и пусть полином $P_n(x)$ степени n задан как

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_i(x)}{\omega_i^2(x_i)},$$

где обозначено $\omega_i(x) = \prod\limits_{k=0,\, k\neq i}^{n} (x - x_k)$. Доказать, что все корни полинома $P_n(x)$ действительны и различны.

Полином Ньютона. Разделенные разности

1.58. Пусть X — множество из $n+1$ различных действительных чисел, принадлежащих области определения действительной функци $f(x)$. Разделенную разность n-го порядка функции $f(x)$ на множестве X определим рекуррентно как

$$f^{\angle}(X) = \frac{f^{\angle}(X \setminus \{a\}) - f^{\angle}(X \setminus \{b\})}{b-a},$$

где a, b — два различных элемента из X. Здесь множество X без элемента a обозначено $X \setminus \{a\}$. Если множество X состоит только из одного элемента, то положим $f^{\angle}(a) = f(a)$ (определили разделенную разность нулевого порядка). Доказать, что такое определение разделенных разностей корректно, т. е. число $f^{\angle}(X)$ не зависит от выбора элементов a, b.

1.59. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов из отрезка $[a, b]$, в которых определена достаточно гладкая функция $f(x)$, и пусть полиномы $A_n(x)$ и $B_n(x)$ степени n, заданные в виде

$$\begin{aligned} A_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ &\quad + a_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}), \\ B_n(x) &= b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \\ &\quad + b_n(x - x_1) \ldots (x - x_n), \end{aligned}$$

являются интерполяционными, т. е. выполняются равенства

$$A_n(x_i) = B_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

(а) Доказать, что $b_i = a_i + a_{i+1}(x_{i+1} - x_0), \quad i = 0, \ldots, n - 1.$

(б) Используя рекуррентные формулы для разделенных разностей

$$f^{\angle}(x_0, \ldots, x_i) = \frac{f^{\angle}(x_1, \ldots, x_i) - f^{\angle}(x_0, \ldots, x_{i-1})}{x_i - x_0},$$

показать, что $a_i = f^{\angle}(x_0, \ldots, x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$

(в) Доказать равенство, связывающее разделенную разность и производную функции:

$$f^{\angle}(x_0, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}, \quad \theta \in [a, b].$$

1.60. Функция $f(x)$ задана таблицей

x	-1	0	1	2
$f(x)$	2	2	2	5

.

Построить интерполяционный полином $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, найдя коэффициенты a_i

(а) из системы уравнений $P_3(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3;$

(б) записав полином в форме Лагранжа;

(в) записав полином в форме Ньютона.

1.61. (а) Записать выражение для разделенной разности второго порядка достаточно гладкой функции $f(x)$, взяв в качестве узлов

$$x_0 = -\varepsilon, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

(б) Найти предел, к которому стремится при $\varepsilon \to 0$ разделенная разность, найденная в пункте (а).

1.62. (а) Записать выражение для разделенной разности второго порядка достаточно гладкой функции $f(x)$, взяв в качестве узлов

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = h + \varepsilon \quad (h, \varepsilon > 0).$$

(б) Найти предел, к которому стремится при $\varepsilon \to 0$ разделенная разность, найденная в пункте (а).

(в) Найти, к чему стремится при $h \to 0$ найденный в пункте (б) предел.

1.63. (а) Записать выражение для разделенной разности третьего порядка достаточно гладкой функции $f(x)$, взяв в качестве узлов

$$x_0 = -h - \varepsilon, \quad x_1 = -h, \quad x_2 = h, \quad x_3 = h + \varepsilon \quad (h, \varepsilon > 0).$$

(б) Найти предел, к которому стремится при $\varepsilon \to 0$ разделенная разность, найденная в пункте (а).

(в) Найти, к чему стремится при $h \to 0$ найденный в пункте (б) предел.

1.64. Пусть x_0, x_1, $\ldots, x_n$ — набор различных узлов из отрезка $[a, b]$, $f(x)$ — достаточно гладкая функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Доказать, что существует набор точек θ_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ из отрезка $[a, b]$ таких, что полином

$$P_n(x) = f(\theta_0) + (x - x_0) \sum_{i=1}^{n} f'(\theta_i) \prod_{k=1,\, k \neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

является интерполяционным, т. е. $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots n$.

1.65. Пусть $f(x)$ — полином степени n с действительными коэффициентами, который имеет только действительные корни x_i, $i = 1, \ldots, n$. Через точку плоскости с декартовыми координатами $(x^*, f(x^*))$, где $f(x^*) \neq 0$, проведено n прямых так, что i-я прямая проходит через точку с координатами $(x_i, 0)$, $i = 1, \ldots, n$. Доказать, что наклон к оси абсцисс графика функции $y = f(x)$ при $x = x^*$ равен сумме наклонов проведенных прямых.

1.66. Пусть многочлен $P_n(x)$ степени n имеет различные корни x_1, $x_2, \ldots, x_n$, причем $P_n(0) \neq 0$. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P_n'(x_i)} = -\frac{1}{P_n(0).}$$

1.67. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов, в которых определена функция $f(x)$.

(а) Индукцией по n доказать формулу для разделенной разности

$$f^{\angle}(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{k=0,\, k\neq i}^{n} (x_i - x_k)}.$$

(б) Пусть полином $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$ удовлетворяет условиям

$$P_{n-1}(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Доказать формулу для разделенной разности

$$f^{\angle}(x_0, \ldots, x_n) = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (x_n - x_k)}.$$

(в) Доказать формулу для разделенной разности

$$f^{\angle}(x_0,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{\angle}(x_0,x_i)}{\prod\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}(x_i-x_k)}.$$

(г) Доказать формулу для разделенной разности

$$f^{\angle}(x_0,\ldots,x_n)=\sum_{i=s}^{n}\frac{f^{\angle}(x_0,\ldots,x_{s-1},x_i)}{\prod\limits_{k=s,\,k\neq i}^{n}(x_i-x_k)},\quad 1\le s\le n.$$

1.68. Найти разделенную разность n-го порядка функции $f(x)$ по узлам $x_0,\ldots,\ x_n$ и значениям, заданным в таблице

(а)

x	2	4	5
$f(x)$	5	4	2

,

(б)

x	1	3	5
$f(x)$	−1	7	3

,

(в)

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	7	13

,

(г)

x	7	8	9	10
$f(x)$	−2	−5	−10	−11

,

(д)

x	0	1	4	9
$f(x)$	3	2	5	30

,

(е)

x	−2	−1	0	1	3
$f(x)$	3	1	0	−3	−7

,

(ж)

x	−4	−3	−1	0	1
$f(x)$	9	6	−6	−11	−26

,

(з)

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	2	1	1	1	2

.

1.69. Доказать, что разделенная разность n-го порядка функции $f(x)$ на множестве различных узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ может быть найдена следующим образом

$$f^{\angle}(x_0, \ldots, x_n) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

1.70. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов, в которых определена функция $f(x)$, и пусть полином $A_n(x)$ степени n, записанный в виде

$$\begin{aligned} A_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\ + a_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

является интерполяционным, т. е. $A_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Не используя понятие разделенных разностей, показать, что

$$a_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{k=0,\, k\neq i}^{m} (x_i - x_k)}.$$

1.71. Пусть $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$ и пусть полином $P_n(x)$ степени n интерполирует функцию $f(x)$, т. е.

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Какие из следующих утверждений про разделенные разности n-го порядка функции $f(x)$ и полинома $P_n(x)$ являются верными:

(а) $P_n^{\angle}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f^{\angle}(x_0, x_1, \dots, x_n)$,

(б) $P_n^{\angle}(x_0^2, x_1^2, \dots, x_n^2) = f^{\angle}(x_0^2, x_1^2, \dots, x_n^2)$,

(в) $P_n^{\angle}(x_0^2, x_1^2, \dots, x_n^2) \neq f^{\angle}(x_0^2, x_1^2, \dots, x_n^2)$,

(г) $P_n^{\angle}(x_0, x_1, \dots, x_n) = P_n^{\angle}(x_0^2, x_1^2, \dots, x_n^2)$?

1.72. Пусть $x_0,\ x_1, \dots, x_n$ — набор различных узлов, $P_m(x)$ — полином степени m, $\omega(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n)$. Найдем разделенную разность n-го порядка функции $P_m(x)$ на множестве узлов $x_0, x_1, \dots, x_n$ следующим образом. Представим полином $P_m(x)$ в виде

$$P_m(x) = \alpha_\tau(x)\omega(x) + \beta_s(x),$$

где $\alpha_\tau(x),\ \beta_s(x)$ — полиномы степени τ и s, причем $s \le n$. Для вычисления разделенной разности используем симметричную формулу

$$\begin{aligned} P_m^{\angle}(x_0, \dots, x_n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P_m(x_k)}{\prod\limits_{i=0,\, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_s(x_k)}{\prod\limits_{i=0,\, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)} = \beta_s^{\angle}(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Так как $\beta_s(x)$ — полином степени не больше n, то разделенная разность n-го порядка для него равна либо нулю (при $s < n$), либо константе (при $s = n$). Делаем вывод: разделенная разность n-го порядка $(n = 1, 2, \dots)$ для любого полинома степени m $(m = 1, 2, \dots)$ всегда равна либо нулю, либо константе. Верен ли такой вывод? Если нет, найдите ошибку в рассуждениях.

1.73. Пусть достаточно гладкая функция $f(x)$, не равная тождественно нулю на отрезке $[a, c]$, обращается в нуль при $x \in [a, b]$ и $x = c$ (здесь $a < b < c$). Доказать, что $f^{(n)}(x)$ (производная n-го порядка, $n = 1, 2, \dots$) принимает на отрезке $[a, c]$ как положительные, так и отрицательные значения.

1.74. Пусть достаточно гладкая функция $f(x)$, не равная тождественно нулю на отрезке $[a, b]$, обращается в нуль при $x = x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ (здесь $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$). Доказать, что производная n-го порядка $f^{(n)}(x)$ принимает на отрезке $[a, b]$ как положительные, так и отрицательные значения.

1.75. Пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $f(x)$ — достаточно гладкая функция. Доказать, что либо производная n-го порядка $f^{(n)}(x)$ является константой на отрезке $[a, b]$, либо для разделенной разности n-го порядка выполняются неравенства

$$\frac{m_n}{n!} < f^{\angle}(x_0, \dots, x_n) < \frac{M_n}{n!},$$

где $m_n = \min\limits_{x \in [a,b]} f^{(n)}(x)$, $M_n = \max\limits_{x \in [a,b]} f^{(n)}(x)$.

1.76. Пусть узлы расположены равномерно: $x_i = i \cdot h$, $i = 0, \dots, n$. Показать, что в этом случае разделенная разность n-го порядка функции $f(x)$ может быть вычислена как

$$f^{\angle}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \left(\frac{T - E}{h} \right)^n f(x_0),$$

где E — тождественный оператор, а оператор T действует следующим образом: $Tf(x_i) = f(x_{i+1})$.

1.77. Пусть полином $P_n(x)$ степени n имеет вид

$$P_n(x) = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{x}{i} - 1 \right) \right) \Delta^k f(1),$$

где $f(x)$ — некоторая функция. Оператор Δ действует следующим образом

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Показать, что $P_n(k) = f(k)$ при $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

1.78. Пусть $f(x, y)$ — вещественная функция двух вещественных переменных, которая является полиномом при любом фиксированном x или y.

(а) Показать, что существуют полиномы $a_k(y)$ такие, что

$$f(x, y) = a_0(y) + a_1(y)\frac{(x-1)}{1!} + \cdots + a_m(y)\frac{(x-1)\ldots(x-m)}{m!},$$

где m, вообще говоря, зависит от y.

(б) Показать, что существует M такое, что при $k > M$ имеет место $a_k(y) \equiv 0$.

1.79. (а) Найти разделенную разность n-го порядка на множестве различных узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ для функции $f(x) = A_n(x)B_n(x)$, равной произведению двух полиномов

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \\
&\quad + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}), \\
B_n(x) &= b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_{n-1})(x - x_n) + \cdots + \\
&\quad + b_n(x - x_1)\ldots(x - x_n),
\end{aligned}$$

(б) Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов, в которых определены функции $g(x)$ и $h(x)$, и пусть $f(x) = g(x)h(x)$. Доказать формулу для разделенных разностей

$$f^{\angle}(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} g^{\angle}(x_0, \ldots, x_i)h^{\angle}(x_i, \ldots, x_n).$$

1.80. Доказать формулу для разделенных разностей

$$f^{\angle}(x, x+1, \ldots, x+n) = \frac{(e-1)^n}{n!}\, e^x,$$

где $f(x) = e^x$.

1.81. (а) Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, узлами являются целые неотрицательные числа. Доказать формулу для разделенных разностей

$$f^{\angle}(m, m+1, \ldots, m+k) = (-1)^k \frac{m!}{(m+k+1)!}.$$

(б) Пусть полином $P_n(x)$ степени n удовлетворяет условиям

$$P_n(k) = \frac{1}{k+1}, \qquad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n.$$

Доказать, что при $n = 99$ имеет место равенство $P_n(n+1) = 0$.

1.82. Пусть $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов и $g_n(x)$ — произвольный полином степени не больше n. Обозначим

$$l_i(x) = \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

Доказать равенство

$$\sum_{i=0}^{n} g_n(x - x_i) l_i(x) = g_n(0).$$

1.83. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов. Обозначим

$$a_i = \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{x_k}{x_k - x_i}.$$

Доказать, что

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i^s = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s = 0; \\ 0, & \text{если} \quad s = 1, 2, \ldots, n; \\ (-1)^n \prod\limits_{k=0}^{n} x_k, & \text{если} \quad s = n+1. \end{cases}$$

1.84. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов. Доказать тождество

$$\sum_{s=i}^{n} \frac{\prod\limits_{k=0}^{s-1} (x - x_k)}{\prod\limits_{k=0,\ k \neq i}^{s} (x_i - x_k)} = \prod_{k=0,\ k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

1.85. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных ненулевых узлов, в которых определена функция $f(x)$. Показать, что разделенную разность n-го порядка функции $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ на множестве узлов $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ можно выразить через разделенные разности функции $f(x)$ следующим образом

$$g^{\angle}(x_0, \ldots, x_n) = -\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{\angle}(x_0, \ldots, x_i)}{\prod\limits_{k=i}^{n} (-x_k)}.$$

1.86. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных ненулевых узлов. Обозначим $\omega(x) = \prod\limits_{i=0}^{n} (x - x_i)$. Построить полином $P_n(x)$ степени n вида

$$P_n(x) = \frac{1 + \omega(x)\, q(x)}{x^k},$$

для которого выполняются условия

$$P_n(x_i) = \frac{1}{x_i^k}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad \text{где} \quad k \text{ — натуральное число.}$$

1.87. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов. Обозначим $\omega(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Построить полином $P_n(x)$ степени n вида

$$P_n(x) = x^m - \omega(x)\, q(x)\,,$$

для которого при $m > n$ выполняются условия

$$P_n(x_i) = x_i^m, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

1.88. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных ненулевых узлов. $f(x) = x^{n+k}$, k — натуральное число. Доказать равенство для разделенной разности

$$f^{\angle}(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i_0+\ldots+i_n=k} x_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}\,.$$

Числа i_s — целые неотрицательные.

1.89. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных ненулевых узлов. Обозначим $\omega(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Доказать, что для разделенной разности функции $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$ выполняется равенство

$$f^{\angle}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = -\frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}\frac{1}{\omega(x)}\right)_{x=0},$$

где s — натуральное число.

Полином Эрмита. Интерполирование с кратными узлами

1.90. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов, $f(x)$ — дифференцируемая функция. Показать, что для полинома $P_{2n+1}(x)$ степени $2n+1$, заданного как

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} D_i(x) F_i(x),$$

где

$$D_i(x) = \prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} (x - x_k)^2,$$

$$F_i(x) = \frac{f(x_i)}{D_i(x_i)} + \frac{f'(x_i)D_i(x_i) - f(x_i)D_i'(x_i)}{D_i^2(x_i)}(x - x_i),$$

выполняются равенства

$$P_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad P_{2n+1}'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

1.91. Пусть $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{2n+1}$ — набор различных узлов, причем $x_{i+n+1} = x_i + \varepsilon$ при $i = 0, \ldots, n$, $f(x)$ — дифференцируемая функция.
(a) Показать, что полином $P_{2n+1}(x)$ степени $2n+1$, удовлетворяющий условиям

$$P_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad P_{2n+1}(x_{i+n+1}) = f(x_i) + \varepsilon f'(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$

можно записать в виде

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \frac{\omega_i(x)\omega_i(x-\varepsilon)}{\omega_i(x_i)\omega_i(x_i-\varepsilon)}\, \frac{x - x_i - \varepsilon}{-\varepsilon} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) + \varepsilon f'(x_i))\, \frac{\omega_i(x)\omega_i(x-\varepsilon)}{\omega_i(x_i)\omega_i(x_i+\varepsilon)}\, \frac{x - x_i}{\varepsilon},$$

где $\omega_i(x) = \prod\limits_{k=0,\, k\neq i}^{n} (x - x_k)$.

(б) Записать полином $H_{2n+1}(x)$ степени $2n+1$, который получается из $P_{2n+1}(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

(в) Проверить, выполняются ли для полинома $H_{2n+1}(x)$ условия

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

1.92. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — набор различных узлов из отрезка $[a,\, b]$, $m_0, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, $f(x)$ — достаточно гладкая функция. Полином $P_m(x)$ степени $m = m_0 + \cdots + m_n + n$ задан следующим образом:

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{n} D_i(x) F_i(x),$$

где

$$D_i(x) = \prod_{k=0,\, k\neq i}^{n} (x - x_k)^{m_k+1},$$

$$F_i(x) = \sum_{k=0}^{m_i} \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left(\frac{d^k}{dx^k} \frac{f(x)}{D_i(x)} \right)_{x=x_i}.$$

(а) Показать, что

$$\left(\frac{d^k}{dx^k} P_m(x) \right)_{x=x_i} = \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x) \right)_{x=x_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 0, \ldots, m_i.$$

(б) Доказать формулу для погрешности интерполяции в точке $x \in [a, b]$

$$f(x) - P_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m_0+1} \ldots (x - x_n)^{m_n+1},$$

здесь $\theta \in [a, b]$.

1.93. Построить многочлен $P_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, удовлетворяющий условиям

$$P_4(1) = P_4(-1) = P_4^{'}(0) = P_4^{''}(0) = 0, \quad P_4(0) = 1.$$

1.94. Построить полином $P_3(x)$ степени 3, удовлетворяющий условиям

$$P_3(-1) = P_3(1) = -1, \quad P_3(0) = P_3'(0) = 1.$$

1.95. Построить полином $P_3(x)$ степени 3, удовлетворяющий условиям

$$P_3(a) = f(a), \quad P_3(b) = f(b), \quad P_3'(a) = f'(a), \quad P_3'(b) = f'(b),$$

где $b > a, \; f(x) = x^5$.

1.96. Построить полином $P_3(x)$ степени 3, удовлетворяющий условиям

$$P_3(0) = f(0), \quad P_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad P_3'(0) = f'(0), \quad P_3'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

где $f(x) = \sin x$.

Оценить погрешность интерполяции для $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

1.97. Построить полином $P_3(x)$ степени 3, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} &P_3(0) = f(0), \\ &P_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right), \; P_3'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right), \\ &P_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

где $f(x) = \sin x$.

Оценить погрешность интерполяции $|f(x) - P_3(x)|$ для $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Полином Чебышева. Оптимальное расположение узлов

1.98. Пусть функция $C_n(x)$ определена на отрезке $[-1, 1]$ как

$$C_n(x) = \cos(n\omega), \quad \omega = \arccos(x).$$

(а) Доказать, что $C_n(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$C_{n+m}(x) + C_{n-m}(x) = 2C_n(x)C_m(x), \quad 0 \le m \le n.$$

(б) Доказать, что $C_n(x)$ — это полином степени n вида

$$\begin{aligned} &C_0(x) = 1, \\ &C_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots, \quad n = 1,\, 2, \ldots. \end{aligned}$$

(в) Доказать равенство $C_n(2x-1) = C_{2n}(\sqrt{x}), \quad x \in [0, 1]$.

(г) Найти корни полинома $C_n(x)$.

(д) Найти корни уравнения $x = C_n(x)$.

(е) Найти точки (локальных) экстремумов полинома $C_n(x)$.

(ж) Доказать, что

$$\left| \prod_{i=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) - \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right)\right)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

1.99. Пусть функция $T_n(x)$ определена как

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \\ &T_1(x) = x, \\ &T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

(а) Доказать формулу для многочлена $T_n(x)$

$$2T_n(x) = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

(б) Доказать, что при четном n функция $T_n(x)$ является четной, а при нечетном n — нечетной.

(в) Доказать, что

$$T_n\left(T_m(x)\right) = T_m\left(T_n(x)\right).$$

(г) Доказать, что если $x^2+y^2=1$, то

$$T_{2n}(x) = (-1)^n T_{2n}(y).$$

(д) Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad m \neq n.$$

(е) Показать, что при заданных коэффициентах c_k значение полинома $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k T_k(x)$ может быть найдено следующим образом

$$\begin{aligned}
&t_n = c_n,\\
&t_{n-1} = c_{n-1} + 2xc_n,\\
&t_k = c_k + 2xt_{k+1} - t_{k+2}, \qquad k = n-2, n-3, \ldots, 1,\\
&Q_n(x) = c_0 + xt_1 - t_2.
\end{aligned}$$

(ж) Пусть $G_n(x) = T_n\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\right)$. Какому рекуррентному соотношению удовлетворяют $G_n(x)$?

1.100. (а) Пусть x^* — точка экстремума для полинома $A(x)$ и для полинома $B(x)$, причем $A(x^*) = B(x^*)$. Доказать, что если $R(x) = A(x) - B(x)$ является полиномом (не тождественным нулем), то точка x^* является корнем $R(x)$ по крайней мере двойной кратности.

(б) Пусть $-1 \le x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \le 1$ и пусть узлы x_k, $k = 0, 1, \dots, n$ являются точками экстремума для полинома $T(x)$, причем $T(x_k) = (-1)^k$. Доказать, что если для полинома $P(x)$ выполняется неравенство

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \le \max_{x\in[-1,1]} |T(x)|,$$

то полином $R(x) = T(x) - P(x)$ (если это ненулевой полином) имеет на отрезке $[-1, 1]$ по крайней мере n корней (с учетом кратности).

(в) Доказать, что для полинома $C_n(x)$ степени $n > 0$, заданного как

$$C_n(x) = \cos(n\omega), \quad \omega = \arccos(x), \quad x \in [-1, 1],$$

выполняется неравенство

$$\max_{x\in[-1,1]} |C_n(x)| < 2^{n-1} \max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|,$$

где $P_n(x)$ — любой отличный от $C_n(x)$ полином степени n вида

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots .$$

1.101. (а) Среди всех полиномов второй степени вида $Q(x) = 2x^2 + \dots$ найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[2,4]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(б) Среди всех полиномов второй степени вида $Q(x) = 8x^2 + \dots$ найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[5,8]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(в) Среди всех полиномов второй степени $Q(x)$ со свободным членом равным 7 найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[3,9]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(г) Среди всех полиномов второй степени $Q(x)$, для которых $Q(9) = 7$, найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[3,7]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(д) Среди всех полиномов третьей степени вида $Q(x) = x^3 + \ldots$ найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[6,10]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(е) Среди всех полиномов третьей степени вида $Q(x) = 4x^3 + \ldots$ найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[-5,1]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(ж) Среди всех полиномов третьей степени $Q(x)$ со свободным членом равным 6 найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[1,5]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(з) Среди всех полиномов третьей степени $Q(x)$, для которых $Q(8) = 111$, найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[1,7]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(и) Среди всех полиномов третьей степени вида $Q(x) = \dfrac{1}{4}x^3 + \ldots$, для которых $Q(2) = Q(6) = 0$, найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[2,6]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(к) Известно, что среди всех полиномов третьей степени со свободным членом, равным 19, для полинома $Q(x)$ величина $\max\limits_{x\in[4,15]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение. Найти $Q(19)$.

(л) Среди всех полиномов третьей степени вида $Q(x) = \dfrac{1}{3}\, x^3 + \ldots$ найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[0,2]} |Q^2(x) - 4Q(x) + 5|$ принимает наименьшее значение.

(м) Среди всех полиномов второй степени вида $Q(x) = x^2 + \ldots$, для которых $Q(3) = 0$, найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[-1,3]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(н) Среди всех функций вида

$$Q(x) = \sin\frac{3x}{2} + a\cos x + b\sin\frac{x}{2} + c$$

найти такую, что величина $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(о) Среди всех полиномов третьей степени $Q(x)$, для которых

$$\int\limits_{13}^{15} Q(x)\,dx = 4,$$

найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[3,11]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

(п) Среди всех полиномов третьей степени $Q(x)$, для которых сумма коэффициентов при четных степенях x равна 7, найти такой, что величина $\max\limits_{x\in[5,9]} |Q(x)|$ принимает наименьшее значение.

1.102. (а) Среди всех полиномов $P(x)$ степени менее n найти наименее отклоняющийся от функции $f(x) = x^n$ на отрезке $[-1, 1]$, т. е. полином, для которого величина $\max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)|$ принимает наименьшее значение.

(б) Среди всех полиномов $P(x)$ степени менее n найти наименее отклоняющийся от функции $f(x) = 1 + \cos(n \arccos x)$ на отрезке $[-1, 1]$, т. е. полином, для которого величина $\max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)|$ принимает наименьшее значение.

(в) Среди всех полиномов $P(x)$ степени n вида

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$$

найти такой, для которого величина

$$\min_{x\in[-1,1]} P(x) - \max_{x\in[-1,1]} P(x)$$

принимает наибольшее значение.

1.103. Функция $\ln x$ приближается на отрезке $[10, 11]$ интерполяционным полиномом (а) первой, (б) второй и (в) третьей степени, причем в качестве узлов интерполяции взяты нули полинома Чебышева соответственно (а) второй, (б) третьей и (в) четвертой степени. Какую точность приближения можно гарантировать в каждом случае?

1.104. Функция $\sin x$ приближается на отрезке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ интерполяционным полиномом (а) первой, (б) второй и (в) третьей степени, причем в качестве узлов интерполяции взяты нули полинома Чебышева соответственно (а) второй, (б) третьей и (в) четвертой степени. Какую точность приближения можно гарантировать в каждом случае?

1.105. Пусть $P_n(x)$ — полином степени n, причем

$$\max_{x\in[a,b]} \left| \frac{P_n(x)}{P_n^{(n)}(0)} \right| = M.$$

Какова длина отрезка $[a, b]$, если для любого полинома $Q_n(x)$ степени n выполняется неравенство

$$\max_{x\in[a,b]} \left| \frac{Q_n(x)}{Q_n^{(n)}(0)} \right| \geq M?$$

1.106. Пусть узлы $x_i,\ \ i = 0, \ldots, n-1$ таковы, что величина

$$M = \max_{x\in[a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \right|$$

принимает наименьшее возможное значение. Найти x_i и M.

1.107. Пусть для полинома $P_n(x)$ степени n нашлось такое x^*, $|x^*| > 1$, что $P_n(x^*) = T_n(x^*)$, где $T_n(x)$ — полином Чебышева степени n. Доказать, что $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \geq 1$.

1.108. С помощью полинома Чебышева $C_n(x) = \cos(n \arccos x)$ среди всех полиномов степени n вида

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$$

таких, что $P_n(-1) = P_n(1) = 0$, найти полином, наименее отклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

1.109. В этой задаче в качестве узлов x_i взяты точки экстремумов полинома Чебышева $C_n(x)$, т. е.

$$x_i = \cos\left(\frac{i}{n}\pi\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

(а) Обозначим $\omega(x) = \prod\limits_{k=0}^{n}(x - x_k)$. Доказать, что

$$\omega(x) = \frac{x^2 - 1}{n \cdot 2^{n-1}} C_n'(x), \quad n > 0.$$

(б) Доказать, что

$$(1 - x^2)C_n''(x) = xC_n'(x) - n^2 C_n(x).$$

(в) Обозначим $\omega_i(x) = \prod\limits_{k=0, k\neq i}^{n}(x - x_k)$. Доказать, что

$$\omega_i(x_i) = \beta\,(-1)^i \frac{n}{2^{n-1}}, \quad \text{где} \quad \beta = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad i = 0, n; \\ 1, & \text{если} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

1.110. Пусть полином $P_{n-1}(x)$ степени $n - 1$ задан как

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f(\cos\theta_k) \sin\theta_k}{x - \cos\theta_k} C_n(x),$$

где

$$\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad C_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Доказать, что

$$P_{n-1}(\cos\theta_k) = f(\cos\theta_k), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

1.111. Обозначим $\widetilde{C}_n(x)$ — нормированный полином Чебышева, т. е.

$$\widetilde{C}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} C_n(x), & \text{если} \quad n = 0; \\ C_n(x), & \text{если} \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $C_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1]$.

(а) Пусть x_k — корни полинома Чебышева степени n, т. е.

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

и пусть $0 < m < 2n$.

Показать, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{C}_m(x_k) = 0.$$

б) Пусть $0 \le \alpha \le \beta < n$. Показать, что

$$\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{C}_\alpha(x_k) \widetilde{C}_\beta(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \alpha = \beta; \\ 0, & \text{если} \quad \alpha < \beta. \end{cases}$$

в) Записать интерполяционный полином в виде

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \widetilde{C}_i(x),$$

т.е. найти коэффициенты $a_i, \ \ i = 0, \dots, n-1$ такие, что выполняются равенства $L_{n-1}(x_k) = f(x_k), \ \ k = 0, \dots, n-1$.

Глава 2.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

2.1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ — линейно независимые элементы гильбертова пространства, в котором скалярное произведение элементов f и g обозначено $\langle f, g\rangle$. Зафиксируем f, положим $g = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\varphi_k$, где c_k — коэффициенты, которые для краткости будем записывать также в виде вектора $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$. Образуем числовую функцию этих коэффициентов $\Phi(\vec{c}) = \langle f - g, f - g\rangle$.

(а) Показать, что для произвольного $\vec{c}^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots, c_m^*)$ функцию $\Phi(\vec{c})$ можно представить в виде

$$\Phi(\vec{c}) = \Phi(\vec{c}^*) + \sum_{k=1}^{m} A_k\Delta c_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} B_{ks}\Delta c_k\Delta c_s,$$

где

$$A_k = \left.\frac{\partial\Phi(\vec{c})}{\partial c_k}\right|_{\vec{c}=\vec{c}^*}, \quad B_{ks} = \left.\frac{\partial^2\Phi(\vec{c})}{\partial c_k\partial c_s}\right|_{\vec{c}=\vec{c}^*}, \quad \Delta c_k = c_k - c_k^*.$$

Записать выражения для A_k, B_{ks}.

(б) Пусть коэффициенты $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_m^*$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\frac{\partial\Phi(\vec{c})}{\partial c_k}\right|_{\vec{c}=\vec{c}^*} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Показать, что в этом случае $\Phi(\vec{c})$ можно записать в виде

$$\Phi(\vec{c}) = \Phi(\vec{c}^*) + \left\langle \sum_{k=1}^{m} \Delta c_k\varphi_k, \sum_{s=1}^{m} \Delta c_s\varphi_s \right\rangle.$$

(в) Показать, что $\Phi(\vec{c}) > \Phi(\vec{c}^*)$, если $\vec{c} \neq \vec{c}^*$.

(г) Показать, что коэффициенты $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_m^*$ единственным образом находятся из системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{m} \langle \varphi_s, \varphi_k \rangle \, c_s^* = \langle f, \varphi_k \rangle \,, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

(д) Показать, что существует коэффициент t_s, $s = 1, 2, \ldots, m$ (и найти t_s) такой, что имеет место равенство

$$\langle f - g - t_s\varphi_s, f - g - t_s\varphi_s \rangle = \langle f - g, f - g \rangle - \frac{\langle f - g, \varphi_s \rangle^2}{\langle \varphi_s, \varphi_s \rangle},$$

где $g = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\varphi_k$.

(е) Показать, что если коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_m$ таковы, что величина

$$\left\langle f - \sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k \right\rangle$$

принимает наименьшее возможное значение, то элементы $f - \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\varphi_k$ и φ_s, $s = 1, 2, \ldots m$ ортогональны, т. е. $\left\langle f - \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\varphi_k, \varphi_s \right\rangle = 0$.

2.2. Пусть последовательность полиномов задана следующим образом:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_k(x) = \frac{2\,k - 1}{k}\, xP_{k-1}(x) - \frac{k - 1}{k} P_{k-2}(x), \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

(а) Доказать, что

$$P_k(1) = 1,$$
$$P_k(-1) = (-1)^k.$$

(б) Доказать, что при четном k функция $P_k(x)$ является четной, а при нечетном k — нечетной.

(в) Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} x\, P_k^2(x)\, dx = 0.$$

(г) Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k(x) P_s(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq s, \\ \dfrac{2}{2k+1}, & \text{если} \quad k = s. \end{cases}$$

(д) Пусть $F(x) = (x^2 - 1)P_n'(x) - nxP_n(x) + nP_{n-1}(x)$.

Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} F(x) P_k(x)\, dx = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

(е) Пусть $Q_n(x)$ — полином степени n, заданный в виде

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

причем коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$ таковы, что для заданной функции $f(x)$ величина $\langle f(x) - Q_n(x), f(x) - Q_n(x) \rangle$ принимает наименьшее возможное значение. Здесь обозначено

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Показать, что среди полиномов $Q_{n+1}(x)$ степени $n+1$ наименьшее возможное значение для $\langle f(x) - Q_{n+1}(x), f(x) - Q_{n+1}(x)\rangle$ получается, если

$$Q_{n+1}(x) = Q_n(x) + c_{n+1}P_{n+1}(x),$$

где

$$c_{n+1} = \frac{\langle f(x) - Q_n(x), P_{n+1}(x)\rangle}{\langle P_{n+1}(x), P_{n+1}(x)\rangle}.$$

(ж) Пусть $Q_n(x)$ — произвольный (но отличный от $P_n(x)$) полином степени n, у которого коэффициент при x^n совпадает с соответствующим коэффициентом полинома $P_n(x)$. Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_n^2(x)\,dx > \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx.$$

(з) Пусть $f(x)$ — заданная непрерывная функция (не полином), а $Q_n(x)$ — полином степени n такой, что интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} (f(x) - Q_n(x))^2\,dx$$

принимает наименьшее возможное значение.

Доказать, что функция $f(x) - Q_n(x)$ меняет знак на отрезке $[-1, 1]$ по крайней мере $n+1$ раз.

(и) Показать, что при заданных коэффициентах c_k значение полинома $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ может быть найдено следующим образом

$$
\begin{aligned}
&t_n = c_n,\\
&t_{n-1} = c_{n-1} + \frac{2n-1}{n}\, x c_n,\\
&t_k = c_k + \frac{2k+1}{k+1}\, x t_{k+1} - \frac{k+1}{k+2}\, t_{k+2}, \quad k = n-2, n-3, \ldots, 1, 0,\\
&Q_n(x) = t_0.
\end{aligned}
$$

2.3. (а) Построить алгебраический полином 3-й степени вида

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

для которого величина

$$\int\limits_2^6 Q^2(x)\, dx$$

принимает наименьшее значение.

(б) Построить алгебраический полином 3-й степени $Q(x)$ со старшим коэффициентом 9, для которого величина

$$\int\limits_{99}^{999} Q^2(x)\, dx$$

принимает наименьшее значение.

(в) Построить алгебраический полином 3-й степени вида

$$Q(x) = (x-a)^3$$

для которого величина

$$\int\limits_5^9 Q^2(x)\, dx$$

принимает наименьшее значение.

(г) Алгебраические полиномы 2-й и 3-й степени вида

$$Q_2(x) = x^2 + \dots \quad \text{и} \quad Q_3(x) = x^3 + \dots$$

таковы, что величина

$$\int_{-1}^{1} \left(Q_2^2(x) + Q_3^2(x)\right)\, dx$$

принимает наименьшее значение.

Доказать равенство

$$\int_{-1}^{1} Q_2(x) Q_3(x)\, dx = 0.$$

(д) Построить алгебраический полином $Q(x)$, для которого величина

$$\int_{-1}^{1} \left(Q^2(x) - Q(x) \cdot \cos\left(3 \arccos x\right)\right)\, dx$$

принимает наименьшее значение.

(е) Построить алгебраический полином 3-й степени вида

$$Q(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c,$$

для которого величина

$$\int_{-1}^{1} \left(Q^2(x) - Q(x) \cdot \cos\left(3 \arccos x\right)\right)\, dx$$

принимает наименьшее значение.

(ж) Построить алгебраический полином 3-й степени вида

$$Q(x) = x^3 + x^2 + ax + b$$

для которого величина

$$\int\limits_1^3 \left[Q^2(x) - 2x^3 Q(x)\right]\, dx$$

принимает наименьшее значение.

(з) Построить алгебраический полином 4-й степени вида

$$Q(x) = x^4 - ax + b$$

для которого величина

$$\int\limits_{-1}^{1} \big(Q(x) + 3x^2 + 2ax\big)\big(Q(x) + x^2 - 2b\big)\, dx$$

принимает наибольшее значение.

2.4. Построить алгебраический полином $Q(x)$ степени не больше 2, для которого величина

$$\int\limits_0^2 Q^2(x)\, dx$$

принимает наименьшее возможное значение при дополнительном условии:

(а) коэффициент при x^2 равен 1;

(б) коэффициент при x равен -2;

(в) свободный член равен $\dfrac{2}{3}$;

(г) сумма коэффициентов при x^2 и x равна -1;

(д) сумма всех трех коэффициентов равна $-\dfrac{1}{3}$.

2.5. Пусть линейная функция $f(x) = ax + b$ имеет наименьшее (среди всех линейных функций) квадратичное отклонение от данных (x_k, y_k), $k = 1, \dots, n$, т. е. сумма

$$F(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - f(x_k))^2$$

принимает наименьшее возможное значение. Показать, что $f(x^*) = y^*$, где x^* и y^* являются средними арифметическими множеств чисел $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ соответственно.

2.6. Пусть линейная функция $f(x) = ax + b$ имеет наименьшее (среди всех линейных функций) квадратичное отклонение от данных (k, y_k), $k = 1, \dots, n$. Показать, что

$$a = \frac{6}{n(n^2-1)} \left(2 \sum_{k=1}^{n} k y_k - (n+1) \sum_{k=1}^{n} y_k \right),$$

$$b = \frac{2}{n(n-1)} \left((2n+1) \sum_{k=1}^{n} y_k - 3 \sum_{k=1}^{n} k y_k \right).$$

2.7. Среди всех полиномов вида

$$Q(x) = a$$

найти полином с наименьшим квадратичным отклонением от следующих данных

(а)

x	-1	2	3
y	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$

;

(б)

x	0	1	4	5
y	-1	1	0	12

;

(в)

x	-1	2	14	22
y	-10	0	1	15

;

(г)

x	-10	0	10	11	13
y	-100	-1	0	4	2

.

2.8. Среди всех полиномов вида

$$Q(x) = a + bx$$

найти полином с наименьшим квадратичным отклонением от следующих данных:

(а)

x	0	1	2
y	5	-6	7

;

(б)

x	1	2	3	4
y	0	1	1	2

;

(в)

x	-2	-1	0	1
y	4	0	4	1

;

(г)

x	1	2	3	10
y	-7	-2	7	22

;

(д)

x	-3	-1	0	1	3
y	5	-2	24	-2	5

;

(е)

x	-1	0	1	2	3
y	1	4	-1	1	0

;

(ж)

x	1	8	9	15
y	12	119	12	133

.

2.9. Среди всех полиномов вида

$$Q(x) = a + bx^2$$

найти полином с наименьшим квадратичным отклонением от следующих данных:

(а)

x	-1	0	1
y	3.1	0.9	2.9

;

(б)

x	0	1	2
y	-2	-1	0

;

(в)

x	-1	0	1	2
y	4	2	0	-2

;

(г)

x	-2	-1	0	1
y	1	-1	0	-3

;

(д)

x	1	2	4	7
y	-99	-13	51	37

;

(е)

x	0	1	11	18
y	-200	207	125	326

.

2.10. Среди всех полиномов вида

$$Q(x) = a + b\,x + c\,x^2$$

найти полином с наименьшим квадратичным отклонением от следующих данных:

(а)

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	1	1	2

;

(б)

x	-1	0	1	4
y	12	-4	22	-10

;

(в)

x	-2	0	1	3
y	1	7	33	27

;

(г)

x	-2	0	1
y	2	10	0

;

(д)

x	-2	-1	1	2	3
y	24	-13	24	30	57

.

2.11. (а) Среди функций вида

$$Q(x) = ax^2 + (a+b)x + b$$

найти функцию с наименьшим квадратичным отклонением от следующих данных:

x	-2	0	1	2
y	5	5	1	6

(б) Среди функций вида

$$Q(x) = (a+b)x^2 + (b-3a)x + 2a$$

найти функцию с наименьшим квадратичным отклонением от следующих данных:

x	-1	0	1	2
y	29	13	-3	-19

(в) Среди функций вида

$$Q(x) = (a+b-1)x^2 - 6(a+b)x + 8a + 5b$$

найти функцию с наименьшим квадратичным отклонением от следующих данных:

x	1	2	3	4	5
y	33	11	10	7	14

2.12. Найти a, b и t, для которых квадратичное отклонение функции вида

$$Q(x) = a + bx$$

от следующих данных минимально:

(а)

x	1	2	3	4
y	7	2	t	20

;

(б)

x	-2	-1	0	2
y	-1	0	t	4

;

(в)

x	0	1	2	3
y	-3	t	$2t$	5

;

(г)

x	1	2	4	5
y	8	14	$3t$	t

;

(д)

x	-1	0	1	2
y	$2t$	10	$2t$	-2

.

2.13. (а) Доказать, что среди функций вида $a+bx+cx^2$ наилучшим квадратичным приближением к данным

x	1	2	5	9
y	-35	73	-25	-27

является $3+5x-x^2$.

(б) Доказать, что среди функций вида $a+bx+cx^2$ наилучшим квадратичным приближением к данным

x	1	2	3	5
y	18	-19	13	-46

является $7+5x-3x^2$.

(в) Доказать, что среди функций вида $a+bx+cx^2$ наилучшим квадратичным приближением к данным

x	1	2	4	7
y	-8	22	-26	28

является $25-21x+3x^2$.

2.14. Среди всех функций вида $Q(x)=a\sin\pi x+b\cos\pi x$ найти функцию с наименьшим квадратичным отклонением от следующих данных:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	-1	0	1	2	1

.

2.15. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad -1 \le x < 0; \\ 1, & \text{если} \quad \phantom{-1 \le{}} 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Среди всех полиномов (а) нулевой, (б) первой, (в) второй степени найти полином $Q(x)$, для которого величина

$$\int\limits_{-1}^{1} (f(x) - Q(x))^2\, dx$$

принимает наименьшее значение.

2.16. Среди всех полиномов второй степени найти полином $Q(x)$, для которого величина

$$\int\limits_{-1}^{1} (e^x - Q(x))^2\, dx$$

принимает наименьшее значение.

(а) Полином искать в виде $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

(б) Полином искать в виде

$$Q(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x),$$

где $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2}$.

2.17. Пусть $f(x) = \pi^2 - x^2$. Среди всех функций вида

$$Q(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x$$

найти функцию, для которой величина $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - Q(x))^2\, dx$ принимает наименьшее значение.

2.18. Построить полиномы степени 0, 1 и 2 со старшим коэффициентом 1, которые ортогональны на интервале $[0, 1]$ с весом $\rho(x) = -\ln(x)$.

2.19. Пусть $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x), \ldots$ — последовательность ортогональных полиномов, $P_k(x)$ имеет степень k. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — различные корни полинома $P_{n+1}(x)$. Доказать, что элементарные полиномы Лагранжа

$$l_i(x) = \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

попарно ортогональны.

2.20. Пусть

(а) $f(x) = 1$,

(б) $f(x) = x$,

(в) $f(x) = \frac{3}{7}(9 + x)$.

Среди функций вида $Q(x) = c_1\sqrt{x} + c_2x^2$ найти функцию, для которой величина

$$\int_0^1 (f(x) - Q(x))^2\, dx$$

принимает наименьшее значение.

2.21. Среди функций вида $f(x) = 1 - c_0x$ найти такую, для которой наименьшее возможное значение величины

$$\int_0^1 (f(x) - Q(x))^2\, dx$$

на функциях вида $Q(x) = c_1\sqrt{x} + c_2x^2$ принимает наименьшее значение.

2.22. Пусть $f(x) = x^2$. Среди полиномов вида

$$Q(x) = c_0 + c_1 x$$

найти полином, для которого величина

(а) $\displaystyle\int\limits_0^1 (f(x) - Q(x))^2\,dx$,

(б) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - Q(x_i))^2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1$

принимает наименьшее значение.

2.23. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Среди полиномов вида

$$Q(x) = c_0 + c_1 x$$

найти полином, для которого величина

(а) $\displaystyle\int\limits_0^1 (f(x) - Q(x))^2\,dx$,

(б) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - Q(x_i))^2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1$

2.24. Доказать ортогональность тригонометрических функций на равномерной сетке, а именно

$$\sum_{i=0}^{m} \sin(kx_i)\sin(sx_i) = 0, \qquad 0 \le k < s \le m,$$

$$\sum_{i=0}^{m} \cos(kx_i)\cos(sx_i) = 0, \qquad 0 \le k < s \le m,$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sin(kx_i)\cos(sx_i) = 0, \qquad 0 \le k,\ s \le m,$$

где $x_i = \dfrac{2\pi i}{m+1}$.

2.25. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — набор различных узлов, $w_1, \dots, w_n$ — набор положительных чисел (весов). Построить последовательность полиномов $P_0(x), \dots, P_n(x)$, для которых выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{n} w_i P_k(x_i) P_s(x_i) = 0, \quad k \neq s.$$

Полиномы искать в виде

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = 1,\\
&P_1(x) = x - \alpha_1,\\
&P_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) P_n(x) - \beta_{n+1} P_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Указать $\alpha_k,\ \beta_k$.

2.26. Построить систему полиномов степени $0,\ 1,\ 2,\ 3$ со старшим коэффициентом 1, которые попарно ортогональны с весом $\rho(x) = 1$ на множестве узлов $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$.

2.27. Построить систему полиномов степени $0,\ 1,\ 2,\ 3$ со старшим коэффициентом 1, которые попарно ортогональны с весом $\rho(x) = 1 + |x|$ на множестве узлов $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$.

2.28. (a) Коэффициенты $c_0,\ c_1,\ c_2$ таковы, что среди всех полиномов второй степени для полинома

$$Q_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

величина

$$F = \int_{-1}^{1} (x^3 - Q_2(x))^2 \, dx$$

принимает наименьшее значение. Найти это наименьшее значение.

(б) Пусть $Q(x)_{n-1}$ — произвольный полином степени $n-1$. Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} (x^n - Q_{n-1}(x))^2\,dx \geq \left(\frac{n!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{2}{2n+1}.$$

(в) Пусть D_{n+1} — определитель матрицы $(n+1)\times(n+1)$, элементы которой равны

$$a_{ij} = \int\limits_{-1}^{1} x^{i+j}\,dx, \quad i,j = 0,1,\ldots,n.$$

Доказать, что

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} = \left(\frac{n!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{2}{2n+1}.$$

(г) Пусть H_{n+1} — определитель матрицы $(n+1)\times(n+1)$, элементы которой равны

$$b_{ij} = \int\limits_{0}^{1} x^{i+j}\,dx, \quad i,j = 0,1,\ldots,n.$$

Доказать, что

$$\frac{H_{n+1}}{H_n} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

2.29. Среди полиномов $Q(x)$ (а) нулевой, (б) первой, (в) второй степени найти полином, для которого величина

$$\int\limits_{1}^{2} (\ln x - Q(x))^2\,dx$$

принимает наименьшее значение.

2.30. Пусть x_i — различные ненулевые целые числа от $-n$ до n (всего $2n$ штук). И пусть

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{если} \quad x_i < 0, \\ 5x_i, & \text{если} \quad x_i > 0. \end{cases}$$

Найти полином первой степени $Q(x)$, для которого величина

$$\sum_{i=1}^{2n} (y_i - Q(x_i))^2$$

принимает наименьшее значение.

2.31. Пусть $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$ — множество полиномов ($P_k(x)$ имеет степень k), ортогональных на множестве узлов $x_1, \ldots, x_n$ с весом $w_k > 0$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} w_k P_i(x_k) P_j(x_k) = 0, \quad 0 \le i < j \le n.$$

Доказать, что $P_n(x_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Глава 3.

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В задачах численного дифференцирования производные функции $f(x)$ приближенно находятся по значениям функции в нескольких точках (узлах).

Будем использовать следующие обозначения:

x_i — узлы сетки,

$h_i = x_{i+1} - x_i$ — положительные шаги сетки,

$h = x_{i+1} - x_i$ — шаг сетки постоянный,

$f_i = f(x_i)$,

$Tf_i = f_{i+1}, \quad T^{-1}f_i = f_{i-1}, \quad Ef_i = f_i$ — операторы сдвига и единичный,

$\Delta f_i = \Delta_+ f_i = f_{i+1} - f_i$,

$\Delta_- f_i = f_i - f_{i-1}$,

$\Lambda f_i = \Lambda_+ f_i = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$ — разность вперед,

$\Lambda_- f_i = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}$ — разность назад,

$\overset{\circ}{\Lambda} f_i = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$ — центральная разность,

$f_x \approx \Lambda f_i$ — **внимание!** если не указано в явном виде, то по умолчанию считаем, что производная, как f_x в этом примере, вычислена (или оценивается) при $x = x_i$.

3.1. Построить полином $P_1(x)$ первой степени в форме Лагранжа, интерполирующий функцию $f(x)$ по узлам x_i и x_{i+1}:

$$P_1(x_i) = f_i, \;\; P_1(x_{i+1}) = f_{i+1}.$$

Первую производную полинома $P_1(x)$ при $x = x_i$ принять за приближенное значение первой производной функции $f(x)$ при $x = x_i$, получив формулу вида

$$f_x \approx \alpha f_i + \beta f_{i+1}.$$

Записать в ответе $P_1(x)$ и полученную формулу.

3.2. С помощью интерполяционного полинома, построенного по узлам x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, получить формулу для производной f_x (шаг сетки неравномерный). Во что превращается формула при $h_i = \mathrm{const} = h$?

3.3. С помощью интерполяционного полинома, построенного по узлам x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, получить формулы для производных f_x и f_{xx} (шаг сетки неравномерный). Во что превращаются формулы при $h_i = \mathrm{const} = h$?

3.4. Показать, что формула для производной f_x, полученная с помощью интерполяционного полинома, построенного по узлам x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, при равномерном шаге сетки $h_i = \mathrm{const} = h$ может быть записана с использованием разделенных разностей в виде

$$f_x \approx f^{\angle}(x_i, x_{i+1}) - hf^{\angle}(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}).$$

3.5. С помощью интерполяционного полинома степени n, построенного по узлам x_i, $x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}$, получена формула для аппроксимации производной f_x, шаг сетки равномерный: $h_i = \mathrm{const} = h$.

(а) Показать, что эта формула может быть записана с помощью разделенных разностей в виде

$$f_x \approx \sum_{k=1}^{n} (-h)^{k-1}(k-1)! f^{\angle}(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}).$$

(б) Показать, что эта формула может быть записана в виде

$$f_x \approx \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Delta^k f_i.$$

(в) Доказать, что эта формула дает точное значение производной f_x, если $f(x)$ — произвольный полином степени не более n.

3.6. С помощью интерполяционного полинома степени n, построенного по узлам x_i, $x_{i+1}, \ldots, x_{i+100}$, получена формула для аппроксимации производной f_x, $h_i = 0.01$. Показать, что коэффициент при f_{i+100} в этой формуле равен -1.

3.7. С помощью интерполяционного полинома степени n, построенного по узлам x_i, $x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}$, получена формула для аппроксимации производной f_x, $h_i = \mathrm{const} = h$. Показать, что коэффициент при f_{i+k} в этой формуле равен

$$\frac{(-1)^{k-1}}{kh} C_n^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

3.8. С помощью интерполяционного полинома степени $s+r$ $(s, r \geq 0)$, построенного по узлам $x_{i-s}, \ldots, x_{i+r}$, получена формула для аппроксимации производной f_x, $h_i = \mathrm{const} = h$. Показать, что коэффициент при f_{i+k} в этой формуле равен

$$\frac{(-1)^{k-1}}{kh} \frac{s!\, r!}{(r-k)!\,(k+s)!}, \quad -s \leq k \leq r, \quad k \neq 0.$$

3.9. (а) Пусть формула

$$f_x|_{x=x^*} \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i, \quad f_i = f(x_i)$$

для аппроксимации первой производной функции $f(x)$ в точке x^* получена с помощью интерполяционного полином степени n, построенного по узлам $x_0, \dots, x_n$ (первая производная полинома в точке x^* и принята за искомое значение). Показать, что соответствующие коэффициенты β_i аналогичной формулы

$$f_x\big|_{x=x^*} \approx \sum_{i=0}^{n} \beta_i f_i, \quad f_i = f(y_i),$$

но построенной на симметричном (по отношению к предыдущему) шаблоне, т. е. с использованием узлов $y_i = 2x^* - x_i$, отличаются только знаком от коэффициентов α_i, т. е. $\beta_i = -\alpha_i$.

(б) Какова связь между α_i и β_i в формулах для второй производной? Какова связь между α_i и β_i в формулах для производной четного (нечетного) порядка?

(в) Пусть сам шаблон конечно-разностной формулы для аппроксимации k-й производной

$$f^{(k)}(x)\Big|_{x=x^*} \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i, \; f_i = f(x_i)$$

симметричен, т. е. $x_i = 2x^* - x_{n-i}$. Какова связь между коэффициентами α_i и α_{n-i} в формулах для производной четного (нечетного) порядка?

3.10. Пусть $x_0, \dots, x_n$ — набор различных фиксированных узлов из отрезка $[a, b]$, и пусть полином $P_n(x)$ степени n интерполирует достаточно гладкую функцию, заданную на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

В этой задаче оценивается разность между k-й производной функции $f(x)$ и интерполяционного полинома $P_n(x)$, т. е.

$$f^{(k)}(z) - P_n^{(k)}(z), \quad k = 0, \dots, n, \quad z \in [a, b].$$

(а) Пусть полином $Q_{n+m+1}(x)$ степени $n+m+1$, $m \geq 0$ интерполирует функцию $f(x)$, а именно

$$Q_{n+m+1}(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$
$$Q_{n+m+1}^{(k)}(z) = f^{(k)}(z), \quad k = 0, \ldots, m, \quad z \in [a, b], \quad z \neq x_i.$$

Коэффициент полинома $Q_{n+m+1}(x)$ при x^{n+m+1} (при старшей степени) обозначим $a(m, z)$. Доказать, что при некотором $\theta \in [a, b]$ выполняется равенство

$$a(m, z) = \frac{f^{(n+m+1)}(\theta)}{(n+m+1)!}.$$

(б) Доказать, что

$$a(m, z) = \frac{1}{m!}\left(\frac{f(z)}{\omega(z)}\right)^{(m)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - z)^{m+1} \prod\limits_{j=0,\ j\neq i}^{n} (x_i - x_j)},$$

где $\omega(z) = \prod_{j=0}^{n}(z - x_j)$.

(в) Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial z}\, a(m-1, z) = m \cdot a(m, z).$$

(г) Доказать, что

$$f(z) - P_n(z) = a(0, z) \cdot \omega(z).$$

(д) Доказать, что

$$f^{(k)}(z) - P_n^{(k)}(z) =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!(n+j+1)!} f^{(n+j+1)}(\theta_j) \cdot \omega^{(k-j)}(z),$$

где $\theta_j \in [a, b]$.

3.11. (а) Исследуется конечно-разностная формула

$$f_x \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}$$

для аппроксимации производной f_x. С помощью разложения в ряд Тейлора в окрестности узла x_i выразить все значения функции, входящие в правую часть, например,

$$f_{i-1} = f - \frac{h_{i-1}}{1!} f_x + \frac{h_{i-1}^2}{2!} f_{xx} - \frac{h_{i-1}^3}{3!} f_{xxx} + \dots .$$

Показать, что погрешность аппроксимации является величиной первого порядка относительно шага сетки, т. е.

$$f_x - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} = O(h_{i-1}).$$

Чему равен главный член погрешности аппроксимации?

(б) Методом неопределенных коэффициентов построить конечно-разностную формулу вида

$$f_x \approx \alpha f_i + \beta f_{i+1} + \gamma f_{i+2}, \quad h_i = \text{const} = h,$$

имеющую максимально высокий порядок точности по h. Систему уравнений для нахождения коэффициентов α, β, γ получить из требований, чтобы погрешность формулы

$$f_x - (\alpha f_i + \beta f_{i+1} + \gamma f_{i+2})$$

была величиной как можно более высокого порядка по h. Для этого выразить с помощью разложения в ряд Тейлора в окрестности узла x_i все значения функции, входящие в выражение для погрешности, как в примере из пункта (а). Затем потребовать, чтобы коэффициенты перед f, f_x, f_{xx}, f_{xxx} и т.д. равнялись нулю. В данном случае записать три уравнения — по числу неопределенных коэффициентов. Каков порядок точности полученной таким образом формулы?

3.12. Методом неопределенных коэффициентов (на равномерной сетке $h_i = \mathrm{const} = h$) построить конечно-разностные формулы наиболее высокого порядка точности по h для аппроксимации производной f_x. В каждом случае указать порядок точности полученной формулы.

(а) $f_x \approx \alpha f_{i-1} + \beta f_i + \gamma f_{i+1}$;

(б) $f_x \approx \alpha f_{i-2} + \beta f_{i-1} + \gamma f_i$;

(в) $f_x \approx \alpha f_{i-1} + \beta f_i + \gamma f_{i+2}$;

(г) $f_x \approx \alpha f_i + \beta f_{i+2} + \gamma f_{i+3}$;

(д) $f_x \approx \alpha f_i + \beta f_{i+1} + \gamma f_{i+2} + \delta f_{i+3}$;

(е) $f_x \approx \alpha f_{i-2} + \beta f_{i-1} + \gamma f_i + \delta f_{i+1}$.

3.13. Методом неопределенных коэффициентов (на равномерной сетке $h_i = \mathrm{const} = h$) построить конечно-разностные формулы наиболее высокого порядка точности по h для аппроксимации производной f_{xx}. В каждом случае указать порядок точности полученной формулы.

(а) $f_{xx} \approx \alpha f_{i-2} + \beta f_{i-1} + \gamma f_i$;

(б) $f_{xx} \approx \alpha f_{i-1} + \beta f_i + \gamma f_{i+1}$;

(в) $f_{xx} \approx \alpha f_i + \beta f_{i+1} + \gamma f_{i+2}$;

(г) $f_{xx} \approx \alpha f_{i-2} + \beta f_{i-1} + \gamma f_i + \delta f_{i+1}$;

(д) $f_{xx} \approx \alpha f_{i-1} + \beta f_{i+1} + \gamma f_{i+2} + \delta f_{i+3}$;

(е) $f_{xx} \approx \alpha f_{i-2} + \beta f_{i-1} + \gamma f_{i+1} + \delta f_{i+2}$.

3.14. Используя операторную форму записи для разности назад, вперед и центральной

$$\Lambda_- = \frac{1}{h}(E - T^{-1}), \quad \Lambda_+ = \frac{1}{h}(T - E), \quad \mathring{\Lambda} = \frac{1}{2h}(T - T^{-1}),$$

получить явные формулы для аппроксимации производных и указать порядок их точности по h.

(а) $f_{xx} \approx \Lambda_- \Lambda_+ f_i$;

(б) $f_{xxx} \approx \mathring{\Lambda} \Lambda_- \Lambda_+ f_i$;

(в) $f_{xxxx} \approx \Lambda_-^2 \Lambda_+^2 f_i$.

3.15. Указать порядок точности по h конечно-разностной формулы для вычисления производной в заданной точке для заданной функции.

(а) $f_x \approx \dfrac{-f_{i-2} - 3f_i + 4f_{i+1}}{6h}, \quad x_i = 1, \qquad f(x) = e^x$;

(б) $f_x \approx \dfrac{-4f_{i-1} + 3f_i + f_{i+2}}{6h}, \quad x_i = 0, \qquad f(x) = \sin(x)$;

(в) $f_x \approx \dfrac{-7f_i + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{6h}, \quad x_i = \dfrac{\pi}{4}, \quad f(x) = \sin(x) + \cos(x)$;

(г) $f_x \approx \dfrac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 7f_i}{6h}, \quad x_i = \dfrac{\pi}{4}, \quad f(x) = \sin(x) - \cos(x)$.

3.16. В этой задаче сетка неравномерная, но все шаги имеют порядок $O(h)$.

(а) Определить главный член погрешности формул

$$f_x \approx \Lambda_+ f_i \quad \text{и} \quad f_x \approx \Lambda_- f_i.$$

(б) Найти коэффициенты α и β, с которыми выражение

$$\alpha\Lambda_+ f_i + \beta\Lambda_- f_i$$

аппроксимирует f_x с наивысшим порядком точности по h.

(в) Найти коэффициенты α и β, с которыми выражение

$$\alpha\Lambda_+ f_i + \beta\Lambda_- f_i$$

аппроксимирует f_{xx} с наивысшим порядком точности по h.

3.17. (а) Доказать равенство

$$f_x = \Lambda f_i - \frac{h}{2}\, f_{xx} + O(h^2).$$

(б) С каким порядком по h достаточно аппроксимировать производную f_{xx}, чтобы формула для f_x из пункта (а) имела второй порядок точности по h? Используя для аппроксимации f_{xx} узлы x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, получить формулу для f_x.

3.18. Пусть $f(x)$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dx} f(x) = g(x).$$

(а) Доказать, что двухточечная формула

$$f_x \approx \Lambda f_i - \frac{h}{2}\Lambda g_i$$

для аппроксимации f_x имеет второй порядок точности по h.

(б) Доказать, что трехточечная формула

$$f_x \approx \mathring{\Lambda} f_i - \frac{h^2}{6}\Lambda_-\Lambda_+ g_i$$

для аппроксимации f_x имеет четвертый порядок точности по h.

3.19. (а) В равенстве

$$(fg)_x = f_x\, g + fg_x$$

каждую первую производную представить в виде

$$f_x = \Lambda f_i - \frac{h}{2}\, f_{xx} + O(h^2),$$

получив конечно-разностный аналог для дифференцирования произведения

$$\Lambda(f_i g_i) = f_i \Lambda g_i + g_i \Lambda f_i + h(\Lambda f_i)(\Lambda g_i) + R,$$

где по построению $R = O(h^2)$. Найти R в явном виде.

(б) Положив $f = \dfrac{v}{g}$, получить конечно-разностный аналог для дифференцирования частного $\Lambda\left(\dfrac{v_i}{g_i}\right)$.

3.20. Указать порядок точности по h конечно-разностных формул для вычисления выражений (сетка равномерная: $h_i = \mathrm{const} = h$).

(а) $(fg_x)_x \approx \Lambda_-(f_i \Lambda_+ g_i)$;

(б) $(fg_x)_x \approx \Lambda_-\left(\dfrac{f_{i+1} + f_i}{2}\, \Lambda_+ g_i\right)$.

Глава 4.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Квадратурные формулы интерполяционного типа

4.1. (а) Для вычисления интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменить полиномом нулевой степени $P_0(x)$, который совпадает с $f(x)$ в узле $x_1 = a$. Найти $S = \int\limits_a^b P_0(x)\,dx$, получив квадратурную формулу (левых прямоугольников) вида $S = A_1 f(x_1)$. Для многочленов какой степени формула точна? С помощью оценки для погрешности интерполяции $|f(x) - P_0(x)|$ оценить погрешность полученной квадратурной формулы

$$|I - S| = \left| \int\limits_a^b (f(x) - P_0(x))\ dx \right|.$$

(б) Для вычисления интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменить полиномом нулевой степени $P_0(x)$, который совпадает с $f(x)$ в узле $x_1 = b$. Найти $S = \int\limits_a^b P_0(x)\,dx$, получив квадратурную формулу (правых прямоугольников) вида $S = A_1 f(x_1)$. Для многочленов какой степени формула точна? Оценить погрешность $|I - S|$.

(в) Для вычисления интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменить полиномом первой степени $P_1(x)$, который совпадает с $f(x)$ в узлах $x_1 = a,\ x_2 = b$. Найти $S = \int\limits_a^b P_1(x)\,dx$, получив квадратурную формулу (трапеций) вида $S = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$. Для многочленов какой степени формула точна? Оценить погрешность $|I - S|$.

(г) Для вычисления интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменить полиномом нулевой степени $P_0(x)$, который совпадает с $f(x)$ в узле $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Найти $S = \int\limits_a^b P_0(x)\,dx$, получив квадратурную формулу (средних прямоугольников) вида $S = A_1 f(x_1)$. Для многочленов какой степени формула точна? Оценить погрешность $|I - S|$.

4.2. Для вычисления интеграла $\int\limits_9^{10} \sqrt{1+x^2}\,dx$ применяется

(а) формула правых прямоугольников,

(б) формула трапеций.

Оценить погрешность вычислений.

4.3. Для вычисления интеграла $\int\limits_1^2 x\ln(x)\,dx$ применяется

(а) формула левых прямоугольников,

(б) формула средних прямоугольников,

(с) формула Симпсона.

Оценить погрешность вычислений.

4.4. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — заданные различные узлы, $l_k(x)$ — элементарные полиномы Лагранжа

$$l_k(x) = \prod_{i=1,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

(а) Пусть веса A_k квадратурной формулы вида $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \rho(x) f(x)\, dx$ найдены как

$$A_k = \int\limits_{-1}^{1} \rho(x)\, l_k(x)\, dx.$$

Показать, что для всех многочленов степени меньше n квадратурная формула точна.

(б) Пусть квадратурная формула вида $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \rho(x) f(x)\, dx$ является точной для всех многочленов степени меньше n. Показать, что веса A_k квадратурной формулы равны

$$A_k = \int\limits_{-1}^{1} \rho(x)\, l_k(x)\, dx.$$

4.5. Пусть заданы узлы x_k и веса A_k квадратурной формулы вида $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла $\int\limits_{0}^{1} \rho(x) f(x)\, dx$, $\rho(x) > 0$. В предположении, что формула является точной для функции $f(x) = 1$, привести пример полинома $Q_{2n}(x)$ степени $2n$, для которого выполняются условия

$$\text{(а)}\quad \int\limits_0^1 \rho(x)Q_{2n}(x)\,dx > 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k Q_{2n}(x_k) = 0,$$

$$\text{(б)}\quad \int\limits_0^1 \rho(x)Q_{2n}(x)\,dx = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k Q_{2n}(x_k) > 0.$$

4.6. Показать, что для коэффициентов интерполяционной квадратурной формулы $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла $\int\limits_a^b \rho(x) f(x)\,dx$ верно равенство

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \int\limits_a^b \rho(x)\,dx.$$

4.7. (а) Пусть квадратурная формула $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ является точной, если $f(x)$ — произвольный полином степени не больше M. Показать, что если

$$\tilde{A}_k = \frac{b-a}{2}\cdot A_k, \quad \tilde{x}_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot x_k,$$

то квадратурная формула $\sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{A}_k g(\tilde{x}_k)$ для вычисления интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ является точной для произвольного полинома $g(x)$ степени не больше M.

(б) Для вычисления интеграла $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменить полиномом второй степени $P_2(x)$, который совпадает с $f(x)$ в узлах $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Найти $S = \int\limits_{-1}^{1} P_2(x)\,dx$, получив квадратурную формулу (Симпсона) вида

$$S = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3).$$

Для многочленов какой степени формула точна? Оценить погрешность $|I - S|$.

(в) Получить формулу Симпсона для отрезка $[-1, 1]$ методом неопределенных коэффициентов (потребовать, чтобы формула была точной для многочленов максимально высокой степени).

(г) Используя результаты пункта (а), записать формулу Симпсона для вычисления интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$.

4.8. (а) Пусть узлы квадратурной формулы $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ расположены симметрично относительно нуля, т. е. $x_k = -x_{n+1-k}$, $k = 1, \ldots, n$. И пусть формула точна для всех многочленов степени $n - 1$.

Показать, что соответствующие веса формулы равны, т. е.

$$A_k = A_{n+1-k}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

(б) Пусть узлы квадратурной формулы $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \rho(x) f(x)\, dx$ расположены симметрично относительно нуля, т. е. $x_k = -x_{n+1-k}$, $k = 1, \ldots, n$.

Верно ли, что соответствующие веса формулы равны, т. е.

$$A_k = A_{n+1-k}, \qquad k = 1, \ldots, n?$$

(в) Верно ли, что интерполяционная квадратурная формула для вычисления интеграла по интервалу $[-1, 1]$, построенная на узлах, расположенных симметрично относительно нуля, т. е. $x_k = -x_{n+1-k}$, $k = 1, \ldots, n$, точна для любой нечетной функции $f(x)$?

4.9. Построить квадратурную формулу следующего вида, точную для многочленов максимально высокой степени n. В каждом случае указать n.

(а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} f(x)\, dx \approx A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{2}{3}\right)$;

(б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} f(x)\, dx \approx A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f\left(\frac{2}{3}\right)$;

(в) $\displaystyle\int\limits_{2}^{6} f(x)\, dx \approx A_1 f\left(\frac{18}{5}\right) + A_2 f\left(\frac{28}{5}\right)$;

(г) $\displaystyle\int\limits_{11}^{13} f(x)\, dx \approx A_1 f\left(\frac{139}{12}\right) + A_2 f\left(\frac{151}{12}\right)$;

(д) $$\int\limits_{3}^{8} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(\frac{23}{6}\right) + A_2 f\left(\frac{27}{4}\right);$$

(е) $$\int\limits_{-4}^{-1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{11}{3}\right) + A_2 f\left(-\frac{13}{7}\right);$$

(ж) $$\int\limits_{-3}^{2} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{9}{8}\right) + A_2 f\left(\frac{11}{8}\right);$$

(з) $$\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(\frac{11}{7}\right) + A_2 f\left(\frac{32}{7}\right);$$

(и) $$\int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(\frac{7}{6}\right) + A_2 f\left(\frac{12}{5}\right);$$

(к) $$\int\limits_{-2}^{7} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f\left(\frac{47}{8}\right).$$

4.10. (а) Пусть квадратурная формула

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

точна для полиномов степени $n-1$, причем

$$\int\limits_{a}^{b} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)\,dx = 0.$$

Доказать, что формула точна для полиномов степени n.

(б) Пусть квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

точна для полиномов степени 1, причем $3x_1x_2 + 1 = 0$.
Доказать, что формула точна для полиномов степени 2.

(в) Пусть квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$

точна для полиномов степени 2, причем $x_1 + x_2 + x_3 + 3x_1x_2x_3 = 0$.
Доказать, что формула точна для полиномов степени 3.

4.11. Построить квадратурную формулу следующего вида, точную для многочленов максимально высокой степени n. В каждом случае указать n.

(а) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f\left(-\frac{1}{2}\right) + A_3 f(1);$$

(б) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{2}{3}\right) + A_2 f\left(-\frac{1}{3}\right) + A_3 f\left(\frac{3}{5}\right);$$

(в) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{2}{3}\right) + A_2 f\left(\frac{1}{3}\right) + A_3 f(1);$$

(г) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{2}{3}\right) + A_2 f\left(\frac{2}{9}\right) + A_3 f\left(\frac{3}{4}\right);$$

(д) $$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{3}{5}\right) + A_2 f\left(\frac{1}{5}\right) + A_3 f\left(\frac{3}{5}\right);$$

(е) $$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{3}{5}\right) + A_2 f\left(\frac{1}{5}\right) + A_3 f\left(\frac{5}{8}\right);$$

(ж) $$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{4}{7}\right) + A_2 f\left(\frac{2}{7}\right) + A_3 f\left(\frac{5}{7}\right);$$

(з) $$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{2}{3}\right) + A_2 f\left(\frac{1}{3}\right) + A_3 f\left(\frac{4}{5}\right);$$

(и) $$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{7}{8}\right) + A_2 f\left(\frac{1}{8}\right) + A_3 f\left(\frac{5}{8}\right);$$

(к) $$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f\left(-\frac{4}{5}\right) + A_2 f\left(-\frac{2}{9}\right) + A_3 f\left(\frac{2}{3}\right).$$

4.12. Построить квадратурную формулу вида

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{2x} f(x)\,dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f(1),$$

точную для многочленов максимально высокой степени.

4.13. Для вычисления интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменить полиномом первой степени $P_1(x)$, который совпадает с $f(x)$ в узлах x_1, x_2.

Найти $S = \int\limits_a^b P_1(x)\,dx$, получив квадратурную формулу вида

$$S = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

(а) В какую формулу вида

$$S = A_1 f(x_1) + A_2 f'(x_1)$$

превращается полученная формула при $x_2 \to x_1$?

(б) При каком x_1 получается формула, не содержащая производную $f'(x_1)$?

4.14. Для вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ построить интерполяционную квадратурную формулу вида

$$A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

с узлами $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$. Для полиномов какой степени формула точна?

4.15. Для вычисления интеграла $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ подынтегральную функцию $f(x)$ заменить полиномом первой степени $P_1(x)$, который совпадает с $f(x)$ в узлах $x_1 = \beta > 0$, $x_2 = -\beta$.

Найти $S = \int\limits_{-1}^{1} P_1(x)\,dx$, получив квадратурную формулу вида

$$S = A_1 f(\beta) + A_2 f(-\beta).$$

(а) Показать, что $A_1 = A_2$ при любом β.

(б) Найти β, с которым формула точна для полиномов второй степени.

(в) Показать, что при найденном β формула будет точной также и для полиномов третьей степени.

4.16. (а) Построить квадратурную формулу вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f(-\beta) + A_2 f(\beta) + A_1 f(1), \quad 0 \le \beta < 1,$$

найдя коэффициенты A_1, A_2 из требований, что формула точна для функций $f(x) = 1$ и $f(x) = x^2$. Для полиномов какой степени полученная формула точна?

(б) Какая формула получается при $\beta = 0$?

(в) Какая формула получается при $\beta = \dfrac{1}{3}$? (Узлы расположены равномерно.)

(г) Какая формула получается при $\beta \to 1$? Для полиномов какой степени она точна?

4.17. Найти A_1, A_2, β, для которых квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f'(\beta)$$

является точной для полиномов максимально высокой степени.

4.18. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — узлы квадратурной формулы вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{2}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)),$$

которая точна для всех многочленов степени не более n (квадратурная формула Чебышева, имеет равные веса). Обозначим

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

(а) Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 0.$$

(б) Доказать, что при $x \neq y$

$$\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y}$$

является полиномом степени $n-1$ по y (и по x).

(в) Доказать тождество

$$\frac{n}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x - y}\,dy = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

(г) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в тождестве из пункта (в) и учитывая равенство из пункта (а), найти коэффициенты полинома $P_n(x)$ при $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

4.19. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка m включительно и кусочно-непрерывную производную порядка $m+1$.

(а) Начиная с равенств

$$f(x) = f(a) + \int\limits_{a}^{x} f'(t)\,dt = f(a) - (x-t)f'(t)\Big|_{t=a}^{t=x} + \int\limits_{a}^{x}(x-t)f''(t)\,dt,$$

многократно интегрируя по частям, получить равенство (формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{m!} \int\limits_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)\, dt.$$

(б) Пусть квадратурная формула $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ является точной для всех многочленов степени не больше m.

Доказать, что для погрешности квадратурной формулы

$$F_{m+1} = \int\limits_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

справедливо равенство

$$F_{m+1} = \frac{1}{m!} \int\limits_a^b \left(\frac{(b-x)^{m+1}}{m+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (x_k - x)_+^m \right) f^{(m+1)}(x)\, dx,$$

где

$$x_+^k = \begin{cases} x^k, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

(в) Пусть $|f^{(m+1)}(x)| \leq M_{m+1}$ при $x \in [a, b]$.

Доказать, что для погрешности квадратурной формулы верно неравенство

$$|F_{m+1}| \leq M_{m+1} c_{m+1} (b-a)^{m+2},$$

где константа c_{m+1} определяется равенством

$$c_{m+1}(b-a)^{m+2} = \frac{1}{m!}\int\limits_a^b \left| \frac{(b-x)^{m+1}}{m+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (x_k - x)_+^m \right| dx.$$

Является ли эта оценка погрешности точной (на классе рассматриваемых функций)?

(г) Проводя вычисления для отрезка интегрирования $[-1,1]$, найти константы c_1 и c_2 для формулы трапеций и формулы средних прямоугольников.

(д) Найти константы $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ для формулы Симпсона.

(е) Найти константы c_1 и c_2 для квадратурной формулы

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f(-\varepsilon) + f(\varepsilon), \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

4.20. Погрешность квадратурной формулы трапеций для вычисления интеграла по отрезку $[-1,1]$ от достаточно гладкой функции $f(x)$ обозначим

$$R = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - [f(-1) + f(1)]\,.$$

(а) Доказать представление для погрешности

$$R = -\frac{1}{3}\left[f^{(1)}(1) - f^{(1)}(-1)\right] - \int\limits_{-1}^{1} \beta_2(x) f^{(2)}(x)\,dx,$$

где $\beta_2(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}$.

(б) Доказать представление для погрешности

$$R = -\frac{1}{3}\left[f^{(1)}(1) - f^{(1)}(-1)\right] + \\ + \frac{1}{45}\left[f^{(3)}(1) - f^{(3)}(-1)\right] - \int\limits_{-1}^{1} \beta_4(x) f^{(4)}(x)\,dx,$$

где $\beta_4(x) = -\dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{12}x^2 - \dfrac{7}{360}$.

(в) Показать, что существует последовательность полиномов $\beta_1(x)$, $\beta_2(x), \ldots$, с которыми погрешность квадратурной формулы трапеций может быть представлена в виде

$$R = \sum_{k=1}^{m} \beta_{2k}(1)\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(-1)\right] - \int\limits_{-1}^{1} \beta_{2m}(x) f^{(2m)}(x)\,dx.$$

4.21. Результат вычисления интеграла $\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx$ для достаточно гладкой функции $f(x)$ по формуле трапеций и средних прямоугольников обозначим соответственно $I_T = hf(-h) + hf(h)$ и $I_M = 2hf(0)$.

(а) Найти константы K_T и K_M в представлениях погрешности

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx - I_T = K_T h^2 + O(h^4),$$

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx - I_M = K_M h^2 + O(h^4).$$

(б) Получить линейную комбинацию формул трапеций и средних прямоугольников $I_S = \alpha I_T + \beta I_M$, для которой

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx - I_S = O(h^4).$$

(в) Представив интеграл $\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx$ в виде суммы интегралов

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int\limits_{-h}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{h} f(x)\,dx,$$

применить формулу трапеций к каждому из интегралов справа, обозначив результат $I_{\frac{T}{2}}$.

Получить линейную комбинацию $I_S = \alpha I_T + \beta I_{\frac{T}{2}}$, для которой

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx - I_S = O(h^4).$$

4.22. Для приближенного вычисления интеграла

$$\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx, \quad \text{где} \quad f(x) = x^3,$$

используется составная квадратурная формула трапеций (интервал интегрирования разбивается на N равных подынтервалов, на каждом из которых используется формула трапеций).

Доказать, что при $N \geq 7$ погрешность квадратурной формулы не превосходит $\varepsilon = 0.006$.

4.23. Интеграл

$$\int_0^1 f(x)\,dx, \quad \text{где} \quad f(x) = x^6,$$

приближенно вычисляется с помощью составной квадратурной формулы Симпсона (интервал интегрирования разбивается на N равных подынтервалов, на каждом из которых используется формула Симпсона).

Доказать, что при $N \geq 7$ погрешность квадратурной формулы не превосходит $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-5}$.

4.24. В этой задаче функция $f(x)$ считается достаточно гладкой.

(a) Для приближенного вычисления интеграла

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

используется составная квадратурная формула правых прямоугольников (интервал интегрирования разбивается на N равных подынтервалов, $h = \dfrac{1}{N}$, $x_i = i \cdot h$, $i = 0, \ldots, N$). Записав погрешность квадратурной формулы на подынтервале $[x_{i-1}, x_i]$ в виде

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f(x_i)\right)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f'(x_i) + O(h))(x - x_i)\,dx,$$

показать, что погрешность составной квадратурной формулы правых прямоугольников может быть представлена следующим образом

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{N} hf(x_i) = -\frac{h}{2}(f(1) - f(0)) + O(h^2).$$

(б) Для приближенного вычисления интеграла

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

используется составная квадратурная формула Симпсона (интервал интегрирования разбивается на N равных подынтервалов, $h = \dfrac{1}{N}$, $x_i = i \cdot h,\ \ i = 0, \ldots, N$). Записав погрешность квадратурной формулы на подынтервале $[x_{i-1}, x_i]$ в виде

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - \frac{1}{6} f(x_{i-1}) - \frac{4}{6} f(x_{i-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{6} f(x_i) \right) dx =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f^{(4)}(x_i) + O(h)}{4!} (x - x_{i-1})(x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 (x - x_i)\,dx,$$

показать, что в случае $f^{(3)}(0) = f^{(3)}(1)$ погрешность составной квадратурной формулы Симсона является величиной $O(h^5)$.

4.25. Для приближенного вычисления интеграла

$$\int_0^1 \sin\left(x^2\right) dx$$

используется составная квадратурная формула (интервал интегрирования разбивается на N равных подынтервалов). Оценить количество разбиений N, гарантирующее точность вычислений не хуже $\varepsilon = 10^{-4}$, если на каждом из N подынтервалов используется формула

(а) правых прямоугольников,

(б) средних прямоугольников,

(в) Симпсона.

4.26. Для приближенного вычисления интеграла

$$\int\limits_0^1 \exp\left(x^2\right) dx$$

используется составная квадратурная формула (интервал интегрирования разбивается на N равных подынтервалов). Оценить количество разбиений N, гарантирующее точность вычислений не хуже $\varepsilon = 10^{-4}$, если на каждом из N подынтервалов используется формула

(а) левых прямоугольников,

(б) трапеций,

(в) Симпсона.

4.27. Для приближенного вычисления интеграла

$$\int\limits_0^{10} f(x)\, dx, \quad \text{где} \quad f(x) = 1 + \sin^2 x\ ,$$

используется составная квадратурная формула (интервал интегрирования разбивается на N равных подынтервалов). Оценить количество разбиений N, гарантирующее точность вычислений не хуже $\varepsilon = 10^{-5}$, если на каждом из N подынтервалов используется формула

(а) трапеций,

(б) Симпсона.

4.28. Для приближенного вычисления интеграла

$$\int\limits_{-10}^{0} f(x)\, dx, \quad \text{где} \quad f(x) = \sin^2 \omega, \quad \omega = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,$$

используется составная квадратурная формула (интервал интегрирования разбивается на N равных подынтервалов). Оценить количество разбиений N, гарантирующее точность вычислений не хуже $\varepsilon = 10^{-5}$, если на каждом из N подынтервалов используется формула

(а) трапеций,

(б) Симпсона.

4.29. Для приближенного вычисления интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx, \qquad \text{где} \quad f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

используется составная квадратурная формула трапеций с равномерным шагом $h = \dfrac{2\pi}{m}$. Доказать, что при $m > n$ квадратурная формула дает точный результат.

4.30. Пусть $f(x)$ — достаточно гладкая функция, для которой строится квадратурная формула на равномерно расположенных узлах $x_k = k \cdot h, \;\; k = 0, \ldots, n$. Обозначим $f_k = f(x_k)$.

(а) Доказать равенство

$$2\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}) + O(h^4).$$

(б) Для вычисления интеграла

$$\int\limits_0^h f(x)\,dx$$

построить квадратурную формулу вида

$$A_1 f(0) + A_2 f(h) + A_3 f(2h),$$

которая является точной для всех многочленов степени не больше 2.

(в) Доказать равенства

$$\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) + O(h^2) =$$

$$= h\left(\frac{5}{12}f_0 + \frac{13}{12}f_1 + f_2 + \dots + f_{n-2} + \frac{13}{12}f_{n-1} + \frac{5}{12}f_n\right) + O(h^3) =$$

$$= h\left(\frac{3}{8}f_0 + \frac{7}{6}f_1 + \frac{23}{24}f_2 + f_3 + \dots + f_{n-3} + \frac{23}{24}f_{n-2} + \frac{7}{6}f_{n-1} + \frac{3}{8}f_n\right) +$$

$$+ O(h^4).$$

Квадратурные формулы Гаусса

4.31. Пусть квадратурная формула $\sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

является точной для всех многочленов степени не больше $2n$, т. е. выполняются равенства

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^s = I_s, \quad s = 0, \dots, 2n, \qquad \text{где} \quad I_s = \int\limits_{-1}^{1} x^s\,dx.$$

(а) Показать, что существуют коэффициенты $\beta_0, \dots, \beta_n$, при которых верны равенства

$$I_{n+1} = \sum_{s=0}^{n} \beta_s I_s, \quad x_k^{n+1} = \sum_{s=0}^{n} \beta_s x_k^s, \quad k = 0, \ldots, n.$$

(б) Показать, что коэффициенты β_k удовлетворяют системе уравнений

$$I_{n+j} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k I_{k+j-1}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(в) Показать, что система уравнений для коэффициентов β_k из пункта (б) может быть записана в виде

$$\int_{-1}^{1} x^{j-1} P_{n+1}(x)\, dx = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $P_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k x^k$.

Показать, что узлы $x_0, \ldots, x_n$ являются корнями полинома $P_{n+1}(x)$.

(г) Пусть $x_0 = -1$. Показать, что узлы $x_1, \ldots, x_n$ являются корнями полинома $P_n(x)$ степени n, который ортогонален на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = x + 1$ всем полиномам меньшей степени, т. е.

$$\int_{-1}^{1} (x+1)\, x^{j-1} P_n(x)\, dx = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(д) Построить систему полиномов степени 0, 1, 2 со старшим коэффициентом 1, которые попарно ортогональны с весом $\rho(x) = x + 1$ на отрезке $[-1, 1]$.

(е) Для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

построить квадратурную формулу вида

$$A_0 f(-1) + A_1 f(x_1),$$

которая является точной для всех многочленов степени не больше 2.

(ж) Для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

построить квадратурную формулу вида

$$A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

которая является точной для всех многочленов степени не больше 4.

4.32. Построить квадратурную формулу Гаусса с двумя, тремя и четырьмя узлами для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

4.33. Построить квадратурную формулу Гаусса с одним и двумя узлами для вычисления интеграла вида

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx.$$

4.34. Построить квадратурную формулу Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла вида

$$\int_0^\infty e^{-x^2} f(x)\,dx.$$

4.35. Построить квадратурную формулу Гаусса с одним узлом для вычисления интеграла

$$\int_0^1 \rho(x) f(x)\,dx$$

для следующих весовых функций $\rho(x)$:

(а) $\rho(x) = e^x$;

(б) $\rho(x) = e^{-x}$;

(в) $\rho(x) = \ln(1+x)$;

(г) $\rho(x) = \sin \pi x$.

4.36. Построить квадратурные формулы Гаусса с одним и двумя узлами для вычисления интеграла

$$\int_0^1 \rho(x) f(x)\,dx$$

для следующих весовых функций $\rho(x)$:

(а) $\rho(x) = x$;

(б) $\rho(x) = 1 - x$;

(в) $\rho(x) = x^2$;

(г) $\rho(x) = x^6$;

(д) $\rho(x) = (2x-1)^2$.

4.37. Построить квадратурные формулы Гаусса с одним и двумя узлами для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} \rho(x) f(x)\, dx$$

для следующих весовых функций $\rho(x)$:

(а) $\rho(x) = x^2$;

(б) $\rho(x) = x^4$;

(в) $\rho(x) = |x|$;

(г) $\rho(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

4.38. Построить квадратурную формулу с одним фиксированным узлом вида

$$A_1 f(0) + A_2 f(x_2),$$

точную для многочленов максимально высокой степени, для вычисления следующих интегралов. Для нахождения узла x_2 предварительно найти соответствующий ортогональный полином первой степени.

(а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x f(x)\, dx$;

(б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x^2 f(x)\, dx$;

(в) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} x^2 f(x)\, dx$;

(г) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x f(x)\, dx$;

(д) $\int\limits_0^2 (x+1)\, f(x)\, dx$;

(е) $\int\limits_0^2 (x+2) f(x)\, dx$.

4.39. Построить квадратурную формулу вида

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(b),$$

точную для многочленов максимально высокой степени.

4.40. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — различные корни полинома $P_n(x)$ степени n, который ортогонален с весом $\rho(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ всем полиномам степени меньше n.

Доказать, что веса A_k квадратурной формулы Гаусса $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} \rho(x) f(x)\, dx$$

могут быть найдены как

$$A_k = \int\limits_{-1}^{1} \rho(x)\, l_k^2(x)\, dx, \quad \text{где} \quad l_k(x) = \prod_{i=1,\ i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Из этой формулы следует положительность A_k.

4.41. (а) Построить систему полиномов степени 0, 1, 2 со старшим коэффициентом 1, которые попарно ортогональны с весом $\rho(x) = 1 - x^2$ на отрезке $[-1, 1]$.

(б) Построить квадратурную формулу вида

$$A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + A_2 f(1)$$

для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx,$$

которая является точной для всех многочленов степени не больше 3.

(в) Построить квадратурную формулу вида

$$A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(1)$$

для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx,$$

которая является точной для всех многочленов степени не больше 5.

4.42. (а) Построить систему полиномов степени $0,\ 1,\ 2,\ 3$ со старшим коэффициентом 1, которые попарно ортогональны с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на интервале $(-\infty, \infty)$.

(б) Построить квадратурную формулу вида

$$A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx,$$

которая является точной для всех многочленов степени не больше 3.

(в) Построить квадратурную формулу вида

$$A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$

для вычисления интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx,$$

которая является точной для всех многочленов степени не больше 5.

4.43. Пусть последовательность полиномов задана следующим образом:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \ldots .$$

(а) Показать, что для произвольного x^* верно равенство

$$I_k = k \int\limits_{-1}^{1} \frac{P_k(x) P_{k-1}(x^*) - P_k(x^*) P_{k-1}(x)}{x - x^*}\, dx = 2.$$

(б) Пусть x_k — корень полинома $P_n(x)$.

Показать, что

$$P_n'(x_k) = \frac{n P_{n-1}(x_k)}{1 - x_k^2}.$$

(в) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни полинома $P_n(x)$.

Показать, что коэффициенты квадратурной формулы

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),$$

которая точна для любого многочлена степени меньше $2n$, могут быть найдены как

$$A_k = \frac{2(1-x_k^2)}{n^2 P_{n-1}^2(x_k)}.$$

Из этой формулы следует положительность A_k.

4.44. (а) Показать, что квадратурная формула

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{3}\left(f\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

точна для всех многочленов степени не больше 5.

(б) Показать, что для всех многочленов $Q(x)$ степени не более $2n-1$ верно равенство

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Q(x_k), \quad x_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi.$$

4.45. (а) Построить систему полиномов степени 0, 1, 2 со старшим коэффициентом 1, которые попарно ортогональны с весом

$$\rho(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{на отрезке} \quad [-1, 1].$$

(б) Построить квадратурную формулу вида

$$A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(1)$$

для вычисления интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

которая является точной для всех многочленов степени не больше 5.

Глава 5.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Пусть $|f(x_*)| < \varepsilon m_1$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $U = [x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, $m_1 = \min\limits_{x \in U} |f'(x)|$. Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно один корень на U.

5.2. Локализовать корни уравнения $x^2 = 17$ с точностью 0.2.

5.3. Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ локализован, т. е. найден отрезок $[a, b]$ такой, что

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0,$$

причем

$$f'(a) = 0, \quad f''(x) > 0, \quad \text{если} \quad x \in [a, b].$$

Указать отрезок, содержащий корень, на котором $f'(x) \neq 0$.

5.4. Отделить корни следующих уравнений.

(а) $4 \sin x + 1 - x = 0$;

(б) $1 - x + e^{-2x} = 0$;

(в) $(x + 1)e^{x-1} - 1 = 0$;

(г) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8 = 0$;

(д) $e^x + x^2 + x = 0$;

(е) $e^x - x^2 - 2x - 2 = 0$;

(ж) $e^x(x - 1) - e^{-x}(x + 1) = 0$;

(з) $x^4 - 4x - 1 = 0$;

(и) $e^{-x} + 4(x^2 - 1) = 0$.

5.5. Не прибегая к перебору, выяснить, имеет ли уравнение $f(x) = 0$ действительные корни и сколько их. Для каждого корня указать отрезок $[a, b]$, на котором находится корень, причем $f(a)$ и $f(b)$ конечны и имеют разные знаки. Кроме того, обеспечить выполнение условия $f'(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$.

(а) $f(x) = \dfrac{x^k - 1}{x - 1} - A, \quad A > 0, \quad 0 < k < 1$;

(б) $f(x) = \dfrac{x^k - 1}{x - 1} - A, \quad A > 0, \quad 1 < k < \infty$;

(в) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} - A, \quad A > 1$;

(г) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} - A, \quad A < 1$;

(д) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x} - A, \quad A > 0$;

(е) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x} - A, \quad A < 0$;

(ж) $f(x) = xe^{-x} - A$;

(з) $f(x) = Ax + B - \sin x, \quad A, B > 0, \quad 0 < x < \pi$;

(и) $f(x) = -A(x - \pi) + B - \sin^2 x, \quad A, B > 0, \quad 0 < x < \pi$;

(к) $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x} - A, \quad A > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

(л) $f(x) = x \operatorname{tg} x - A, \quad A > 0, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

5.6. Пусть отображение $\varphi(x)$ имеет на $U=[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, неподвижную точку x_* и пусть для всех $x_1, x_2 \in U$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \le q|x_1-x_2|, \quad q<1.$$

Рассмотрим два итерационных процесса (которые отличаются начальным приближением):

$$x_{n+1}=\varphi(x_n), \;\; x_0=c-\varepsilon,$$

$$x_{n+1}=\varphi(x_n), \;\; x_0=c+\varepsilon.$$

Какое из следующих утверждений является верным?

(а) Оба итерационных процесса сходятся к x_*.

(б) Хотя бы один итерационный процесс сходится к x_*.

(в) Хотя бы один итерационный процесс расходится.

(г) Если $x_1 \in U$, то итерационный процесс сходится.

(д) Если итерационный процесс сходится, то сходится к x_*.

(е) Если $x_*=c$, то оба итерационных процесса сходятся к x_*.

5.7. Пусть отображение $\varphi(x)$ является сжимающим на $U=[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, с константой $q<1$, т. е. для всех $x_1, x_2 \in U$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \le q|x_1-x_2|.$$

Найти наибольшее Q, для которого из выполнения неравенства $|\varphi(c)-c| \le Q\cdot\varepsilon$ следует выполнение неравенства $|\varphi(x)-c| \le \varepsilon$ для любого $x \in U$.

5.8. Метод простой итерации

$$x_{n+1}=\varphi\,(x_n), \quad \text{где} \quad \varphi\,(x)=\frac{1}{2}(x^2+c), \quad c\in(0,1),$$

применяется для решения уравнения

$$x^2 - 2x + c = 0.$$

Указать все значения начального приближения $x_0 \geq 0$, при которых итерации сходятся к меньшему (большему) корню, расходятся.

5.9. Пусть x_* — корень уравнения $x = \sqrt{1+x}$.

(а) Доказать, что итерационный процесс

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}, \quad x_0 = 1000$$

сходится к x_*.

(б) Оценить количество итераций, гарантирующее достижение точности

$$|x_n - x_*| < 10^{-3}.$$

(в) Показать, что достигнутую точность можно оценить с помощью неравенства

$$|x_n - x_*| < |x_n - x_{n-1}|.$$

5.10. Пусть x_* — корень уравнения $4x = 1 + \ln(1+x^2)$.

(а) Доказать, что итерационный процесс

$$x_{n+1} = \frac{1+\ln(1+x_n^2)}{4}, \;\; x_0 = 1000$$

сходится к x_*.

(б) Оценить количество итераций, гарантирующее достижение точности

$$|x_n - x_*| < 10^{-9}.$$

(в) Показать, что достигнутую точность можно оценить с помощью неравенства

$$|x_n - x_*| < \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}|.$$

(г) Исследовать сходимость к x_* следующего итерационного процесса

$$x_{n+1} = \frac{2 - x_n + \ln(1 + 2x_n^2 + x_n^4)}{7}, \quad x_0 = 1000.$$

5.11. Показать, что уравнение

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

имеет единственный действительный корень и локализовать его.

Выяснить, можно ли найти этот корень методом простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, если в качестве $\varphi(x)$ взять

(а) $\sqrt[3]{x^2 + 2} - 1$;

(б) $\dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$;

(в) $\dfrac{2 + 7x - 4x^2 - 2x^3}{13}$;

(г) $\dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 4}$.

Какой из вариантов предпочтительнее по скорости сходимости?

5.12. Локализовать корни уравнения $f(x) = 0$. Для каждого корня указать начальное приближение x_0 и эквивалентное уравнение вида $x = \varphi(x)$ такие, что итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сойдется к данному корню.

(а) $f(x) = x^3 - x - 1$;

(б) $f(x) = e^x - 4x^2$;

(в) $f(x) = x^2 - 2x - \ln(2x)$;

(г) $f(x) = (\ln x)^2 - x - 1$.

5.13. Найти отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения $f(x) = 0$. Корень будет отыскиваться методом простой итерации вида $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, где $\varphi(x) = x - \tau f(x)$, $\tau \neq 0$. Скорость сходимости (знаменатель) этого так называемого метода релаксации зависит от τ. Найти оптимальный параметр τ, т. е. такой, что величина

$$q = \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|$$

принимает наименьшее значение. Обеспечить выполнение условия $q < 0.2$ (для чего может потребоваться более точная локализация корня).

(а) $f(x) = x^2 - 17$;

(б) $f(x) = x - \sqrt{x+3}$;

(в) $f(x) = \sin x - 2 \ln x$;

(г) $f(x) = \dfrac{5}{2x} - \ln x$.

5.14. Пусть

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) + \xi_n, \quad x_0 = 100, \quad \lim_{n \to \infty} \xi_n = 0$$

где

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_*$, где $x_* = \varphi(x_*)$.

5.15. Пусть t_1, t_2 — действительные корни уравнения

$$x^2 + bx + c = 0, \quad \text{причем} \quad |t_1| < |t_2|.$$

Образуем две последовательности:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = -\frac{c}{b+x}, \quad x_0 = -\frac{b}{2};$$

$$y_{n+1} = \psi(y_n), \quad \psi(y) = -\,b - \frac{c}{y}, \quad y_0 = -\frac{b}{2}.$$

(а) Доказать, что $b + x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(б) Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = t_1, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = t_2.$$

5.16. (а) Показать, что

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$$

представляет собой метод для вычисления $\sqrt{a}$, $a > 0$, имеющий третий порядок сходимости.

(б) Показать, что

$$x_{n+1} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_m^{2i} a^i x_n^{m-2i}}{\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} C_m^{2i+1} a^i x_n^{m-2i-1}}, \quad m \geq 2$$

представляет собой метод для вычисления $\sqrt{a}$, $a > 0$, имеющий порядок сходимости m.

5.17. (а) Положим $f(x) = x^2 - a$. Показать, что итерации метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}\,, \quad a > 0$$

для вычисления квадратного корня $\sqrt{a}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2} = \frac{1}{2x_n}.$$

(б) Получить аналогичную формулу для кубического корня.

5.18. (а) Пусть $\varphi(x) \in C^m$. Доказать, что метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ для отыскания корня x_* имеет порядок сходимости m, если

$$\varphi^{(1)}(x_*) = \varphi^{(2)}(x_*) = \cdots = \varphi^{(m-1)}(x_*) = 0, \quad \varphi^{(m)}(x_*) \neq 0.$$

(б) Пусть коэффициенты полинома

$$P(x) = x^{m+1} - ux^m + vx - w$$

таковы, что выполняются условия

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0.$$

Доказать, что итерационный метод для вычисления $\sqrt[m]{a}$, $a > 0$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = \frac{x^{m+1} + vax}{ux^m + wa}$$

имеет третий порядок сходимости.

5.19. При каком начальном приближении, с каким порядком и к какому корню уравнения $x = \varphi(x)$ сходится метод простой итерации:

(а) $x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = \dfrac{1 - (1 - ax)^m}{a}, \quad a > 0, \quad m = 2, 3, \ldots;$

(б) $x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = \dfrac{1 - (1 - ax)(1 - aAx)}{a}, \quad a,\ A > 0.$

5.20. Пусть x_* — простой корень уравнения $x = \varphi(x)$. Для нахождения x_* используется итерационный метод, в котором очередное приближение x_{n+1} определяется равенством

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) + \varphi^{\angle}(x_n, \varphi(x_n))(x_{n+1} - x_n).$$

(а) Доказать соотношение для погрешности метода

$$x_{n+1} - x_* = \frac{\varphi^{\angle}(x_n, \varphi(x_n), x_*)}{\varphi^{\angle}(x_n, \varphi(x_n)) - 1}(x_n - x_*)(\varphi(x_n) - x_*).$$

(б) Доказать, что при $\varphi'(x_*) \neq 1$ метод имеет по крайней мере второй порядок сходимости.

5.21. Записать итерационный метод Ньютона для вычисления $\sqrt[m]{a}$, $a > 0$, где $m \neq 0$ — вещественное число.

5.22. (а) Показать, что метод Ньютона для нахождения простого корня x_* уравнения $f(x) = 0$, $f(x) \in C^2$ имеет второй порядок сходимости, даже если первая производная оценена с первым порядком, т. е. для метода

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\widetilde{f}'(x_n)},$$

где

$$\widetilde{f}'(x_n) = f'(x_n) + O(\delta_n), \quad \delta_n = |x_n - x_*|,$$

имеет место оценка $\delta_{n+1} = O(\delta_n^2)$.

(б) Для решения уравнения $f(x) = 0$ применяется итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}.$$

Объяснить его связь с методом Ньютона и показать, что в случае простого корня скорость сходимости квадратичная.

5.23. На отрезке $[a, b]$ имеется простой корень x_* уравнения $f(x) = 0$, который отыскивается методом Ньютона, начиная с $x_0 = b$. Известно, что

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0,$$

$$0 < m_1 \le f'(x), \quad 0 < f''(x) \le M_2, \quad \text{если} \quad x \in [a, b].$$

Доказать, что достигнутую точность можно оценить следующим образом

$$|x_{n+1} - x_*| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_{n+1} - x_n|^2.$$

5.24. Для вычисления $\sqrt{a}$, $a > 0$, используется метод Ньютона

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Пусть $d_n = x_{n+1} - x_n$.

(а) Показать, что

$$2x_n d_n = a - x_n^2 = -d_{n-1}^2.$$

(б) С помощью пункта (а) показать, что

$$|d_n| = \frac{d_{n-1}^2}{2\sqrt{d_{n-1}^2 + a}}.$$

5.25. Квадратный корень $\sqrt{a}$, $a > 0$, находится итерационным методом Ньютона как решение уравнения $f(x) = 0$, где

(а) $f(x) = x^2 - a$;

(б) $f(x) = \dfrac{a}{x^2} - 1$.

Для каждого варианта указать область сходимости (все начальные приближения, при которых метод сходится).

5.26. Рассмотрим два эквивалентных уравнения

$$x \ln x - 1 = 0, \qquad \ln x - \frac{1}{x} = 0.$$

(а) Показать, что уравнение имеет единственный положительный корень и локализовать его.

(б) Для каждого уравнения найти интервал, выбор начального приближения из которого гарантирует сходимость метода Ньютона.

(в) Для какого уравнения скорость сходимости метода Ньютона асимптотически выше?

5.27. Выяснить, есть ли у уравнения

$$e^x = 3 + \ln x$$

действительные корни. Если есть, то для каждого корня указать начальное приближение, при котором метод Ньютона сойдется к корню.

5.28. Определить порядок сходимости метода Ньютона к корню уравнения

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0,$$

если в качестве начального приближения взято

(а) $x_0 = 1.5$,

(б) $x_0 = 1.7$.

5.29. Определить порядок сходимости модифицированного метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}\,.$$

5.30. Пусть $f(x)$ — достаточно гладкая функция, определенная на $U = [x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, и пусть $f(x_*) = f'(x_*) = 0$, $0 < m_2 < |f''(x)| < M_2 < 2m_2$ для всех $x \in U$.

(а) Показать, что метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

сходится линейно к x_* (корню кратности 2), начиная с любого $x_0 \in U$.

(б) Показать, что метод Ньютона с параметром

$$x_{n+1} = x_n - 2\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

сходится к x_* по крайней мере квадратично.

5.31. Пусть

$$f(x) = g(x)(x - x_*)^{\omega}, \qquad \omega > 1, \qquad g(x_*) \neq 0.$$

Показать, что итерационный метод $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, где

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) - f(x)\,\dfrac{f''(x)}{f'(x)}}\,,$$

(локально) сходится со вторым порядком к корню x_* кратности ω уравнения $f(x) = 0$.

5.32. (а) Показать, что уравнение

$$e^x - x - 2 = 0$$

имеет один отрицательный (t_1) и один положительный (t_2) корень.

(б) Итерационный метод для решения уравнения $g(x) = h(x)$ получим следующим образом. При известном приближении x_n функции в левой и правой части уравнения заменим линейными функциями, общее значение которых даст очередное приближение x_{n+1}:

$$g(x_n) + g'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = h(x_n) + h'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Объяснить связь этого метода с методом Ньютона.

(в) Показать, что метод Ньютона для решения уравнения

$$e^x - x - 2 = 0$$

при положительном начальном приближении x_0 сходится к положительному корню, а при отрицательном начальном приближении — к отрицательному. Верно ли, что величина $|x_n - t_2|$ монотонно убывает при $x_0 > 0$?

5.33. Показать, что на интервале $[0, \pi]$ существует ровно два корня уравнения

$$x \sin x - 1 = 0.$$

Для каждого корня указать начальное приближение, обеспечивающее сходимость метода Ньютона к этому корню.

5.34. (а) Доказать, что полином $P(x)$ степени $n \geq 1$ вида

$$P(x) = x^{n+1} - b^n x + ab^n, \quad a > 0, \quad b > 0$$

имеет два различных положительных корня тогда и только тогда, когда

$$a < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}\, b.$$

(б) Пусть $P(x)$ имеет два положительных корня (условие из (а) выполнено). Показать, что метод Ньютона сходится к меньшему положительному корню, если начальное приближение $x_0 = a$, и к большему, если $x_0 = b$.

(в) Указать отрезок, на котором находится меньший (больший) положительный корень, причем на этом отрезке $P'(x) \neq 0$.

(г) Пусть n — четное. Указать все возможные начальные приближения x_0, при которых метод Ньютона сходится к меньшему корню; к большему корню; не сходится.

5.35. При каком выборе начального приближения x_0 сходится метод Ньютона для решения уравнения

$$f(x) = 0, \quad \text{где} \quad f(x) = e^x - 1 - x \text{ ?}$$

Определить порядок сходимости.

5.36. Простой корень x_* уравнения

$$f(x) = 0, \qquad f(x) \in C^3$$

отыскивается итерационным методом.

(а) Доказать, что метод имеет четвертый порядок сходимости, если

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_n), \quad \varphi_1(x) = h(x) - \frac{f(h(x))}{f'(h(x))}, \quad h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(б) Доказать, что метод имеет третий порядок сходимости, если

$$x_{n+1} = \varphi_2(x_n), \quad \varphi_2(x) = h(x) - \frac{f(h(x))}{f'(x)}, \quad h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

5.37. Уравнение

$$x^3 - 5x = 0,$$

имеющее корни $t_0 = 0$, $t_\pm = \pm\sqrt{5}$, решается методом Ньютона.

(а) Указать все возможные начальные приближения x_0, при которых итерации сходятся к корню t_0.

(б) Показать, что при $\delta > 0$ начальное приближение x_0 можно выбрать из интервала $[1-\delta, 1+\delta]$ так, что реализуется любой из пяти возможных сценариев: итерации сходятся к любому из трех корней уравнения, зацикливаются, прекращаются из-за $f'(x_N) = 0$ при некотором N.

5.38. Записать итерационный метод секущих для вычисления квадратного корня $\sqrt{a}$, $a > 0$, положив $f(x) = x^2 - a$.

5.39. Показать, что погрешность очередного приближения в методе секущих для поиска корня x_* уравнения $f(x) = 0$ может быть выражена с помощью разделенных разностей следующим образом

$$x_{n+1} - x_* = \frac{f^{\angle}(x_{n-1}, x_n, x_*)}{f^{\angle}(x_{n-1}, x_n)}(x_{n-1} - x_*)(x_n - x_*).$$

5.40. (а) Пусть x_* — корень уравнения $f(x) = 0$, к которому сходится последовательность, задаваемая методом секущих

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

причем $f'(x_*) \neq 0$.

Показать, что

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n \delta_{n-1}} = 1 + \xi_n,$$

где $\delta_n = K\,|x_n - x_*|$, $K = \left|\dfrac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}\right|$, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

(б) Пусть числа τ_n определены равенствами $\delta_n = \delta_{n-1}^{\tau_n}$, так что соотношение из пункта (а) переписывается как

$$\delta_n^{\tau_{n+1} - 1 - \frac{1}{\tau_n}} = 1 + \xi_n.$$

Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = p$, где $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $p - 1 - \dfrac{1}{p} = 0$.

5.41. Определить порядок сходимости метода

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)\left(f(x_n)\right)^2}{2\left(f'(x_n)\right)^3}.$$

5.42. Простой корень уравнения

$$f(x) = 0$$

отыскивается методом простой итерации

$$x_{n+1} = \varphi_m(x_n).$$

Функция $\varphi_m(x)$ определена как

$$\varphi_m(x) = x + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k G_k(x) \frac{(f(x))^k}{k!},$$

где

$$G_1(x) = \frac{1}{f'(x)}, \quad G_{k+1}(x) = \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} G_k(x), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Показать, что метод имеет порядок сходимости по крайней мере m.

5.43. Доказать, что итерационный метод

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

для отыскания простого корня x_* уравнения

$$f(x) = 0, \qquad f(x) \in C^4$$

имеет третий порядок сходимости в случае

(а) $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{2}\, g(x) - \dfrac{1}{2}\, \dfrac{g(x)}{g'(x)}\,,$

(б) $\varphi(x) = x - \dfrac{2g(x)}{1 + g'(x)}\,,$

(в) $\varphi(x) = x - \dfrac{3}{2}\, g(x) + \dfrac{1}{2}\, g(x) g'(x)\,,$

где $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

5.44. (а) Показать, что итерационный процесс (известный как метод Halley)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \dfrac{1}{2} f''(x_n) \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

может быть интерпретирован как метод Ньютона для уравнения

$$g(x) = 0, \qquad\qquad g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}\,.$$

(б) Показать, что в случае простого корня метод имеет третий порядок сходимости.

Библиографический список

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 848 с.
2. *Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 188 с.
3. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов. М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. 432 с.
4. *Вержбицкий В. М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. 400 с.
5. *Волков Е. Л.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1987. 248 с.
6. *Кантор С. А.* Основы вычислительной математики: Учебное пособие. Барнаул, 2010. 357 с.
7. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998. 575 с.
8. *Киреев В. И., Пантелеев А. В.* Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 2008. 408 с.
9. *Копченова Н. В., Марон И. А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. СПб.: Лань, 2008. 368 с.
10. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы высшей математики: в 2 т, Мн., «Вышэйш. школа», 1972. т.1. 584 с.
11. *Мацокин А. М., Сорокин С. Б.* Численные методы: Курс лекций. Ч. 1: Численный анализ. Новосибирск: НГУ, 2006. 132 с.
12. *Островский А. М.* Решение уравнений и систем уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 220 с.
13. *Пирумов У. Г.* Численные методы: Учеб. пособие. М.: Изд-во МАИ, 1998. 188 с.

14. *Ращиков В. И.* Численные методы. Компьютерный практикум: Учеб.-метод. пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. 132 с.
15. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Самарская Е. А.* Задачи и упражнения по численным методам: Учеб. пособие. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 208 с.
16. Сборник задач по методам вычислений: Учеб. пособие / Под ред. П.И. Монастырного. Мн.: Университетское, 2000. 311 с.
17. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 279 с.
18. *Хемминг Р. В.* Численные методы. М.: Наука, 1972. 400 с.
19. *Шарый С. П.* Курс вычислительных методов. Новосибирск: ИВТ СО РАН и НГУ, 2019. 589 с. Электронный учебник, доступен на `http://www.ict.nsc.ru/matmod/files/textbooks/SharyNuMeth.pdf`.
20. *Conte S. D., de Boor C.* Elementary Numerical Analysis. An Algorithmic Approach, 1980. 432 p.
21. *Gautschi W.* Numerical analysis. Springer, 2012. 588 p..
22. *Gerald C. E., Wheatley P. O.* Applied Numerical Analysis, Boston, MA, USA, 1994. 748 p.
23. *Shampine L. F., Allen R. C., Pruess S.* Fundamentals of Numerical Computing, 1997. 268 p.
24. *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to Numerical Analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1992. 660 p.
25. *Süli E., Mayers D.F.* An introduction to numerical analysis. Cambridge University Press, 2003. 433 p.
26. *Thompson W. J.* Computing for scientists and engineers. A Workbook of Analysis, Numerics and Applications, New York, NY, 1992. 444 p.

Учебное издание

Воронина Полина Владимировна,

Лебедев Александр Степанович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Редактор *С. В. Исакова*

Подписано в печать 26.03.2020 г.
Формат 60 x 84 1/16. Уч.-изд. л. 9. Усл. печ. л. 8,8.

Тираж 120 экз. Заказ № 10

Издательско-полиграфический центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.