

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Кемеровский государственный университет

На правах рукописи

Бондарева Любовь Васильевна

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕРАСТВОРЕННЫХ ПРИМЕСЕЙ В ЗАТОПЛЕННЫХ ПОДЗЕМНЫХ ВЫРАБОТКАХ

05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.ф.-м.н., проф., Захаров Юрий Николаевич

Кемерово - 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление.....	2
Введение	4
Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ	34
1.1. Предмет исследования	34
1.2. Модель оседания примеси и слеживания осадка	40
1.3. Модель «самоизлива шахтных вод»	48
1.4. Выводы к первой главе	54
Глава 2. РАЗНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ.....	55
2.1. Постановка разностных задач	55
2.2. Метод решения уравнений переноса	58
2.3. Метод решения уравнения Пуассона	62
2.4. Численные алгоритмы изменения границы области решения	67
2.5. Тестовые расчеты	68
2.6. Выводы ко второй главе	81
Глава 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	82
3.1. Распространение оседающих примесей.....	82
3.1.1. Выбор характеристик задачи	82
3.1.2. Моделирование примеси, состоящей из одной фракции частиц.....	90

3.1.3. Моделирование примеси, состоящей из нескольких фракций частиц	120
3.1.4. Численное моделирование «залпового выброса»	126
3.2. Результаты моделирования «самоизлива шахтных вод»	155
3.3 Выводы к третьей главе	160
Заключение	162
Список литературы	163
Приложение А	186

ВВЕДЕНИЕ

Кузбасс является одним из крупнейших каменноугольных бассейнов России. На его территории сконцентрировано значительное количество угледобывающих и углеперерабатывающих предприятий, реализующих полный производственный цикл по получению больших объемов угольного топлива. Вследствие чего, воздействие горных работ на окружающую природную среду интенсивно проявляется по всей территории области [150]. Как отмечают исследователи в работе [96], часто экологическая ситуация в регионе может усугубляться достаточно высокой стоимостью проведения природоохранных мероприятий, которые позволили бы снизить негативное влияние горных работ на окружающую среду или способствовали бы ликвидации последствий этого воздействия.

Объемы добываемого и перерабатываемого в регионе угля остаются стабильно высокими. Это приводит к увеличению количества вредных веществ, попадающих в окружающую среду с выбросами. Предприятия угольно – промышленного комплекса оказывают многостороннее негативное влияние на все компоненты окружающей природной среды, и могут вызывать их нежелательные как качественные, так и количественные изменения [84, 97, 144]. Как отмечается в работе [95] к наиболее характерным особенностям такого воздействия можно отнести:

- загрязнение воздушного бассейна выбросами вредных веществ от технологических процессов производства, а также последующих транспортировки и переработки угля, хранения сопутствующих отходов;
- загрязнение поверхностных и подземных водных объектов жидкими промышленными стоками (шахтными, карьерными или сточными водами), нарушение гидрогеологического режима в регионе, снижение качества поверхностных и подземных вод и др.;

- изъятие из землепользования значительных территорий, нарушение природного ландшафта, загрязнение его отходами добычи и переработки угля.

Для определения и оценки эффективности работы любого современного горного предприятия, наравне с прибыльностью и рентабельностью, соблюдением правил организации труда, и выполнением плановых заданий, проверяется соответствие требованиям рационального использования недр и осуществления мер для охраны окружающей среды [85, 100]. Необходимость выполнения таких мероприятий прописана в законодательстве Российской Федерации [85, 122].

Такой рационализации может способствовать принятие мер для достижения:

- увеличения качества готовой продукции, использование которой позволит уменьшить или предотвратить загрязнение окружающей среды;
- уменьшения затрат на изготовление товарной продукции нужного качества, с обязательным обеспечением экологической безопасности производства;
- внедрения технологий, которые обеспечат максимальное использование всех компонентов сырья с минимальным образованием отходов, а также последующее комплексное использование отходов добычи и обогащения угля;
- совершенствования технологий переработки и утилизации отходов.

Для получения готовой продукции более высокого качества используются три современные технологии по переработке углей: обогащение, термобрикетиrowание и газификацию [94].

Наибольшее распространение в странах с развитой угольной промышленностью получило гравитационное обогащение. В условиях

экономической действительности обогащение стало обязательной стадией в производстве топлива, не только удовлетворяющего по своему качеству требованиям потребителей, но и с большей стоимостью реализации по сравнению с необработанным сырьем, и меньшим уроном для окружающей среды при использовании [15]. Обогащение позволяет существенно снизить зольность угля и частично удалить из него сернистые соединения. Топливо из обогащенного угля более экологичное в использовании. Во-первых, при его сжигании образуется незначительное количество угольной пыли, соответственно уменьшается нагрузка на атмосферу. Во-вторых, расход обогащенного топлива значительно меньше, чем у не обогащенного по золе угля. Основой гравитационного обогащения является различие плотностей зерен угля и минеральных примесей, разделение которых осуществляется в водной или воздушной среде. В первом случае речь идет о мокром обогащении, а во втором – о сухом или пневматическом обогащении. Несмотря на большую стоимость, мокрый способ обогащения получил широкое распространение, прежде всего благодаря своей эффективности. Так погрешность разделения сырья на уголь и минеральные примеси сухим способом обогащения слишком велика. К тому же для обогащения крупных классов угля он не подходит.

Два других способа по переработке углей являются перспективными, но относительно мало изученными и почти не применяемыми в России. Первый из них, газификация угля – метод получения экологически чистого топлива, который позволит существенно снизить экологическую нагрузку на все компоненты природной среды [4, 5]. В России технология не получила повсеместного использования из-за низкой стоимости природного газа – хорошо известного и доступного источника энергии. Наибольшее распространение и применение газификации угля наблюдается в ЮАР, США и Германии [78]. Второй способ, термобрикетирование предполагает получение окускованного бездымного топлива, с высоким КПД, пониженными выбросами сернистого газа и существенно сниженным

выбросом твердых веществ с дымовыми газами при сжигании [139, 162, 170]. Данная технология широко распространена в Европе, где термобрикеты изготавливают, в том числе, и из угольной мелочи. Основным недостатком брикетирования являются достаточно высокие затраты на производство. Несмотря на наличие опытных установок, в России на текущий момент обе технологии почти не применяются из-за технических сложностей и достаточно высокой стоимости получаемого с их помощью топлива по сравнению с доступными дешевыми аналогами. Поэтому гравитационное обогащение остается основным способом получения топлива более высокого качества в настоящее время.

В последнее десятилетие доля обогащаемого сырья из всего добытого в Кузбассе угля стабильно растет. Серьезно возрастает и техногенная нагрузка на окружающую среду. Наносимый ей ущерб напрямую зависит от количества отходов и уровня загрязнения водной и воздушной среды из-за их размещения [88]. Для предотвращения возникновения или уменьшения отрицательных эффектов от воздействия технологических процессов обогащения углей на экологию региона, исследователи предлагают несколько стратегий:

- усовершенствовать технологии обезвоживания угольных суспензий и угольных шламов путем совершенствования оборудования [67, 79, 92, 157] или разрабатывать новые, более эффективные флокулянты, в том числе отечественного производства [11, 137, 142];
- внедрять новые технологии, позволяющие использовать все компоненты угольного сырья [110]: твердые отходы – для изготовления строительных материалов [93, 94, 117] или как источник энергии [8, 86, 147]; мелкодисперсные шламы – для изготовления топлива методом масляной агломерации [19, 87] или применением селективной флокуляции [11, 113], для производства водо-угольного топлива [7, 60, 111, 140, 141] или синтетического топлива из угля [51];

- разрабатывать и внедрять безводные и маловодные технологические процессы, в том числе оборотные и замкнутые системы водоснабжения [56, 64, 123];
- усовершенствовать, создание и использование методов эффективной утилизации отходов [56, 82, 118, 158], в том числе применять их для переработки и обезвреживания ранее накопленных отходов углеобогащения [12, 44, 69].

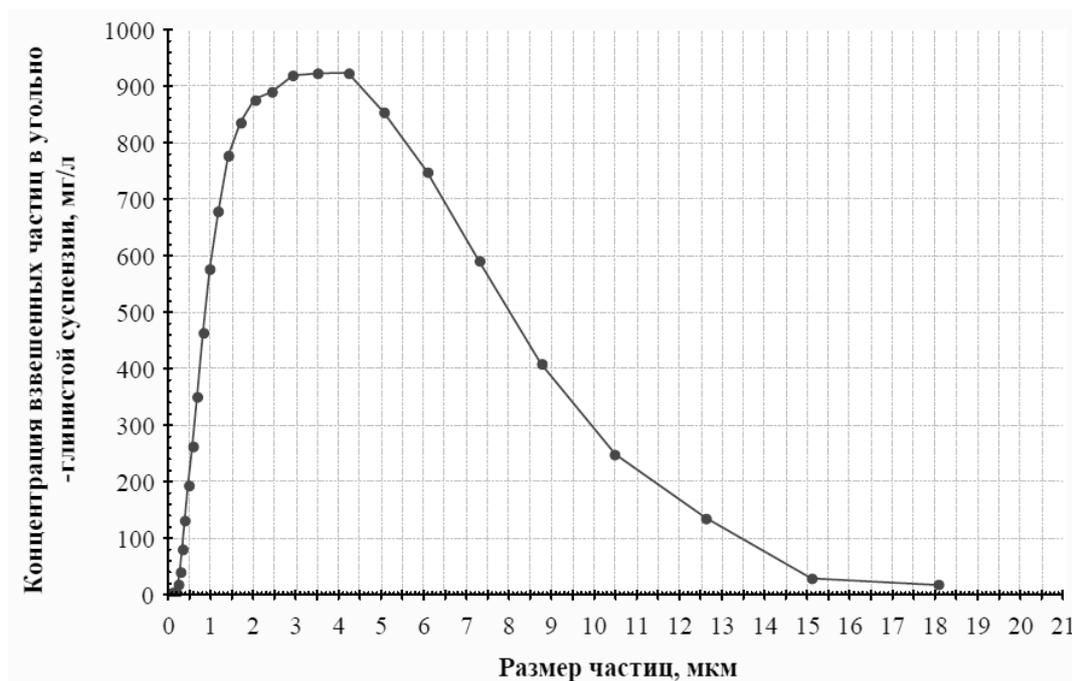


Рисунок 1 Распределение взвешенных веществ по крупности в угольной суспензии ОФ «Коксовая» [159]

По статистике, в настоящее время на более чем 90% всех шахт, разрезов, обогатительных фабрик региона действуют сооружения для очистки сточных вод [103]. На откачку, очистку, отвод и сброс шахтных и сточных вод расходуется большое количество электроэнергии, затрачиваются капитальные средства на строительство водоотливных и очистных сооружений. Помимо расходов на их строительство, зачастую велики и эксплуатационные расходы. Поэтому активно ведутся работы по поиску технологий, которые позволят не только должным образом очистить сточные воды, но и будут дешевле существующих [68]. Особая сложность

при очистке шламовых стоков заключается в их составе. Так как они являются тонкодисперсными системами, содержание частиц крупностью до 5 мкм в которых достигает 80 – 95% (см. Рисунок 1) [48, 159].

Для очистки сточных вод угольных предприятий сегодня используются самые разнообразные технологии водоочистки (см. Рисунок 2), отличающиеся степенью очистки, сложностью используемого оборудования, энергетическими и денежными затратами [151, 179, 182].

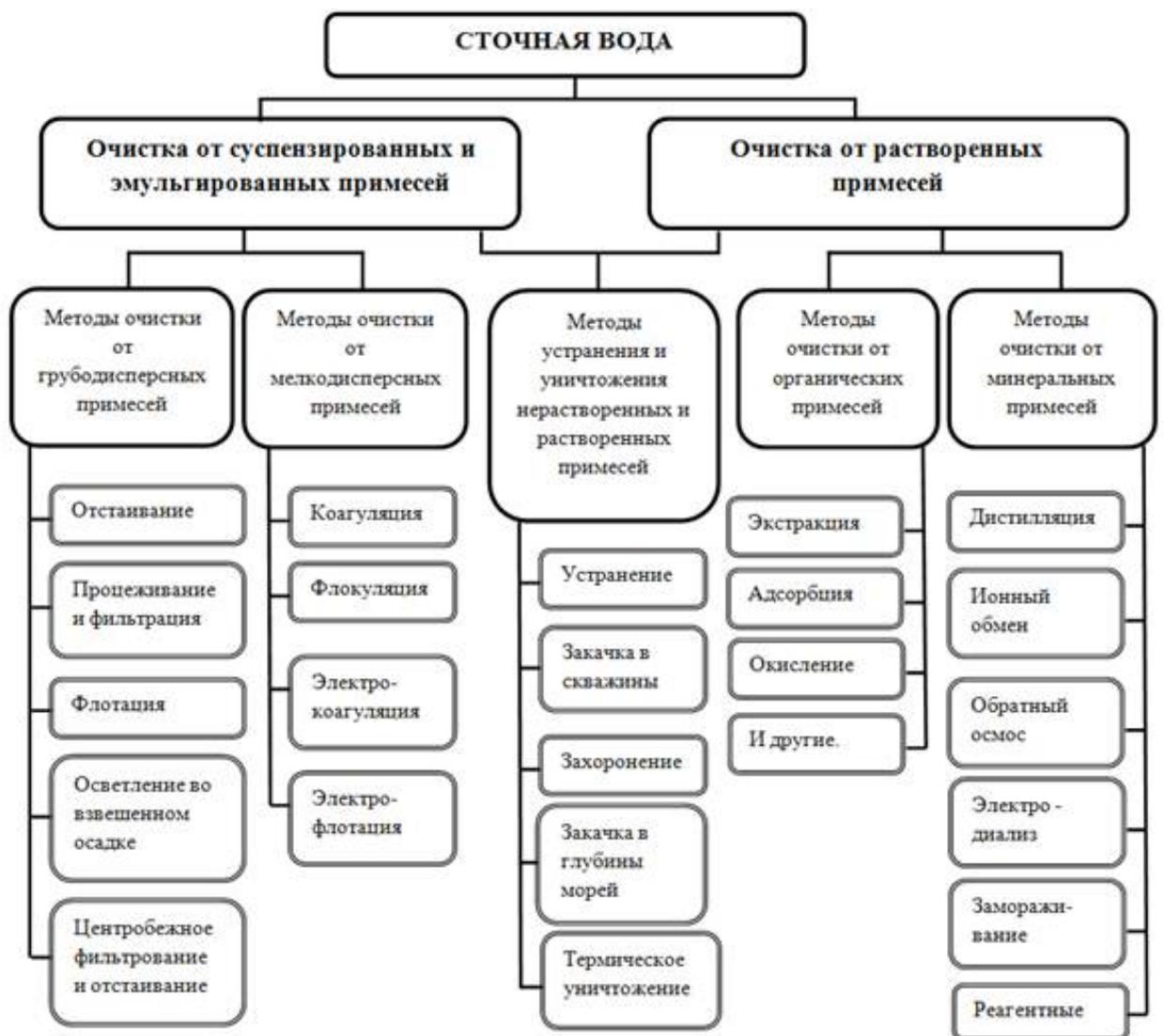


Рисунок 2 Общая классификация методов очистки производственных сточных вод [151]

Основным критерием при выборе технологии очистки сточных вод промышленных предприятий становится состав воды. Качественный состав шахтных вод разнообразен и существенно изменяется по угольным бассейнам, месторождениям и районам [184]. Так сточные воды угольных предприятий могут содержать

- взвешенные частицы (угольная и породная пыль, частицы глины);
- растворенные вещества, такие как: соли тяжелых металлов, свободная серная кислота, аммиак, фенолы, нитраты, нитриты, серу и другие вредные компоненты [56, 133, 151].

Особо стоит отметить, что внедрение на шахтах высокомеханизированных комплексов привело к большому расходу нефтепродуктов при ведении горных работ, часть из которых может попадать в шахтную воду и дополнительно загрязнять ее [68]. Кроме того, в производственных сточных водах могут содержаться остатки флотореагентов, используемых при обогащении, которые частично растворены в воде, частично сорбированы на взвешенных веществах [48].

Все применяемые технологические схемы очистки шахтных и производственных сточных вод углеперерабатывающих предприятий базируются на традиционных методах. Они включают разделение очищаемых стоков на твердую и жидкую фазы путем отстаивания и фильтрования, а также обеззараживание и обработку осадка [84]. На очистных сооружениях сточные воды подвергаются очистке механическими, физико-химическими и биохимическими методами [44, 96, 112, 144]. Наиболее дешевая – механическая очистка – применяется для выделения взвесей. Основные методы: процеживание, отстаивание, фильтрование и флотация. Химическая очистка применяется для выделения из сточных вод растворимых неорганических примесей. При обработке сточных вод реагентами происходит их нейтрализация, выделение растворенных соединений, обесцвечивание и обеззараживание стоков. Это

высокопроизводительный, но весьма дорогой способ очистки. Физико-химическая очистка применяется для очистки сточных вод от грубо и мелкодисперсных частиц, коллоидных примесей, растворенных соединений. Активно исследуемый в последнее время биохимический метод [162, 183] для очистки сточных вод угольных предприятий применяется в меньшей степени из-за его малой эффективности и может быть использован только для доочистки. Загрязнение воды нефтепродуктами требует дополнительных мероприятий по обеззараживанию и осложняет схему очистных сооружений. В основной массе нефтепродукты в стоках находятся в свободном состоянии, образуя плавающую пленку или слой. Меньшая часть может оказаться в тонкодисперсном состоянии, образуя эмульсию [98]. Обычно для первичной очистки производственных сточных вод от нефти, масел, смол, жиров и др. используют процесс отстаивания, а для более глубокой очистки применяют комбинацию других методов. Однако, как отмечается в работе [133], большинство существующих сооружений отстаивания не оборудованы устройствами для удаления выделенных нефтепродуктов, которые в конце отстойной зоны накапливаются в виде пленки и отводятся вместе с очищенными стоками. Таким образом, может происходить повторное загрязнение нефтепродуктами.

Отдельно стоит отметить, что при работе очистных сооружений образуется значительное количество осадка с содержанием взвешенных веществ до 5 г/дм^3 . Часто обработка производится на иловых площадках, в прудах-отстойниках или илонакопителях, где совмещаются процессы его обеззараживания и складирования. Такие сооружения занимают значительные площади, а также являются потенциальными источниками загрязнения окружающей среды [12, 96, 133] при нарушении технических регламентов их безопасного использования или при длительной эксплуатации. Однако на практике, эта технология получила широкое распространение как наиболее простая в обслуживании и конструктивном

исполнении. В настоящее время большинство очистных сооружений Кемеровской области представлены именно горизонтальными отстойниками.

В Кузбассе наряду с традиционными методами (отстаивание, фильтрация, флотация, флокуляция и др.), используется и другой способ очистки промышленных стоков угольной промышленности – в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт [26, 27, 39, 40]. Изучение этого альтернативного способа очистки представляет большой практический интерес. В Кемеровской области в результате закрытия нерентабельных угледобывающих предприятий, заполнены техногенными подземными водами достаточно большие по площади подземные пространства. Часто они находятся вблизи углеперерабатывающих предприятий, поэтому их потенциально можно использовать как очистные сооружения [188]. Суть применения данного способа очистки заключается в следующем: жидкие промышленные стоки углеобогатительной фабрики закачиваются в отработанные выработки закрытой угольной шахты. В затопленном подземном пространстве происходит их естественная очистка за счет отстаивания и разбавления поступающими грунтовыми водами. Осажденные илы при этом остаются в выработанном пространстве, и дополнительные расходы для их складирования не требуются. [68, 96, 120].

Наибольший опыт применения подобной технологии имеется в Кузнецком бассейне. Еще в 1986 г. старые горные выработки шахты им. Кирова использовались для очистки загрязненных вод углеобогатительных фабрик «Комсомолец» и шахты им. Кирова. В работе [48] данный технологический процесс описывается следующим образом: через скважину, пробуренную в затопленный отработанный угольный пласт, закачивались фугаты осадительных центрифуг. Благодаря фильтрации через обрушенные породы они освобождались от твердой фазы, заполняя свободное пространство трещин и пустот. Осветленная вода по откаточному горизонту поступала на центральный водоотлив, откуда ее откачивали на поверхность и

использовали на фабрике, либо после доочистки сбрасывали в р. Иню. Авторы работы [48] отмечают, что пятилетний опыт захоронения твердой фазы шламовых стоков в выработанном пространстве шахты им. Кирова оказался положительным. Метод оказался экономичным, безопасным для ведения горных работ, не оказывающим существенного влияния на качество шахтных вод, не нарушающим гидрологический режим шахты, а также исключающим необходимость сооружения дорогостоящих илосборников или фильтр-прессовых установок. В настоящее время подобный способ осветления и захоронения реализуется для очистки шламовых стоков углеобогатительной фабрики «Комсомолец» в затопленных отработанных выработках шахты «Кольчугинская» [43, 73].

Но при всей идейной простоте и низкой стоимости применения такого способа очистки остается актуальной и важной проблема исследования и прогнозирования возможного развития протекающих внутри процессов. Наибольшую опасность представляет вероятность «залпового выброса» накопленных примесей, при котором может происходить кратковременное, но резкое увеличение концентрации и объема примесей в откачиваемой жидкости. Для безопасного практического применения такого метода очистки промышленных сточных вод очень важно не допустить «залпового выброса» и своевременно вывести выработку, как очистное сооружение, из эксплуатации.

Для безопасного использования технологии очистки жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт необходимо изучать протекающие внутри процессы. Проблема их исследования сводится к решению задач гидродинамики, для чего обычно используют один из трех основных подходов: экспериментальный, теоретический (или аналитический) или численный (см. [2]).

Экспериментальный подход позволяет получить наиболее близкие к реальности результаты, но не всегда его можно легко применить на практике. Когда в рамках экспериментального подхода по каким-либо причинам не удается проводить натурные эксперименты (дороговизна, недоступность объекта и др.), приходится прибегать к моделированию. В этом случае возникают трудности, состоящие в сложности построения корректной модели изучаемого объекта, правильном масштабировании, последующем измерении полученных данных и дороговизне опытов.

Аналитический подход основывается на ряде упрощающих предположений об изучаемой предметной области. Зачастую он позволяет найти решения только для самых простых областей, когда физическая модель гидродинамической задачи сводится к частному упрощенному случаю. При таком подходе решение получается в аналитической форме, как правило, в виде отрезка некоторого ряда. На этой идеологии основывается метод Фурье, вариационные методы и метод Галеркина [24, 107]. Для устойчивости вариационных методов существенно выполнение условия сильной минимальности для системы базисных функций. Построение системы, удовлетворяющей такому условию, в случае областей сложной формы часто бывает затруднительным [14].

При использовании численного подхода также выдвигается ряд упрощающих предположений о предмете изучения. Составляется математическая модель в виде систем уравнений в частных производных, которые решают теми или иными численными методами. По сравнению с экспериментальным методом, численный подход свободен от ряда ограничений. Не всегда возможно на относительно небольшой модели изучаемого объекта воспроизвести желаемые условия, в то время как численно это не составляет проблем. Однако применение численных методов ограничено сложностью построения корректной математической модели реальных явлений, и трудностями эффективной реализации алгоритмов с

использованием ЭВМ и других компьютерных устройств [2]. Численное моделирование особенно важно там, где не совсем ясна физическая картина изучаемого явления. В процессе вычислительного эксперимента происходит уточнение исходной физической модели. Путем расчетов различных вариантов ведется накопление фактов и результатов, что дает возможность произвести отбор наиболее вероятных ситуаций [114, 129].

В случае рассматриваемой задачи, ряд факторов крайне затрудняет проведение натуральных экспериментов. Обводненная выработка представляет собой «черный ящик», реальные измерения каких-либо параметров возможны лишь на входе и выходе. Проведение каких-либо измерений и наблюдений внутри выработки в настоящее время является почти невозможным из-за большой протяженности, непостоянной внутренней структуры выработки (из-за возможных обрушений кровли, оставленного под землей оборудования и других факторов), токсичности очищаемых промышленных стоков и дороговизне таких исследований. В связи с этим, возникает необходимость в применении математического моделирования и численных экспериментов, как инструментов для прогнозирования развития процессов очистки, проходящих в затопленных горных выработках.

В настоящее время, задача о моделировании очистки жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт является малоизученной. В литературе представлена модель очистки жидких промышленных стоков только от растворенных примесей, а вопрос о заилении шахты и распространении нерастворенных примесей почти не освещен. На данный момент в литературе недостаточно освещены математические модели, с помощью которых можно было бы решить эту задачу. Построение и изучение такой модели актуально для многих областей, в которых ведется подземная добыча полезных ископаемых, в том числе, и для Кемеровской области.

В данной работе предлагается математическая модель, описывающая рассматриваемую задачу очистки, в которой учитываются три процесса: во-первых, течение жидкости в области решения; во-вторых, распространение примеси в найденном потоке, и, в-третьих, предусмотрена возможность изменения формы дна выработки из-за накопления и слеживания осадка.

Для определения течения жидкости необходимо решать задачу гидродинамики. Для ее математического описания и численного решения обычно используют либо полную систему уравнений Эйлера, либо систему уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска для идеальной жидкости [52, 102, 165, 166, 175, 178, 181]. При моделировании течения вязкой жидкости используют систему уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока – вихрь» или в естественных переменных [3, 9, 124, 138, 165]. В литературе показано, что обе постановки являются эквивалентными для случая односвязной области решения, в многосвязных же областях система уравнений Навье - Стокса дополняется условиями особого вида, что принципиально усложняет алгоритм решения [136]. Также можно использовать уравнения мелкой воды (система уравнений Сен-Венана), которые получаются путем интегрирования по глубине уравнений Навье - Стокса при условии, что горизонтальный масштаб много больше вертикального [46, 148, 172]. При этом условии, из закона неразрывности следует, что вертикальные скорости в жидкости малы, вертикальные градиенты давления близки к нулю, а горизонтальные градиенты вызываются неровностью поверхности жидкости и горизонтальные скорости одинаковы по всей глубине. Однако, для данной задачи, они не применимы, т.к. в выработку, в общем случае неравномерно по всей ее длине, постоянно фильтруются грунтовые воды, и вертикальные составляющие вектора скорости могут значительно отличаться от нуля. Кроме того, обрушение кровли или скопление осадка может привести к сужению шахтного ствола, тогда скорости в месте сужения будут значительно отличаться от средних по области решения значений.

Подзадача о распространении примесей в потоке жидкости является более сложной и недостаточно изученной в применении к угольным шахтам. Большинство исследователей рассматривают задачи распространения загрязнений от карьеров или хвостохранилищ в атмосфере [49, 83, 108]. Моделирование распространения взвешенных веществ в жидкой среде чаще всего осуществляется в следующих классах задач:

- о транспорте речных наносов и заилении русел рек [1, 13, 16, 45, 58, 61, 109, 186];
- об образовании иловых наносов на морском мелководье или в водохранилищах [143, 169, 187];
- о растекании и транспорте нефтяных пленок [58, 154, 163, 180];
- о течении многокомпонентных смесей и суперкавитации [66];
- о распространении загрязнений в реках, водохранилищах или иных открытых водных объектах [125].

В литературе широко представлены модели, позволяющие изучить процесс движения речных наносов. Водные потоки рек переносят частицы песка, ила, гравия, что может привести к образованию наносов или, наоборот, к размыву русла. По своим свойствам и принципу образования наносы разделяются на взвешенные, переносимые течением во взвешенном состоянии и донные наносы, перемещающиеся в придонном слое. На транспорт наносов существенно влияют гидравлические элементы водного потока, такие как скорость течения, глубина и другие факторы. Полная постановка задачи динамики русловых процессов представляет собой сложную проблему. Обычно она разделяется на три взаимозависимых процесса. Для моделирования взвешенных наносов используется диффузионная теория. Для оценки расходов донных наносов применяются эмпирические формулы [61], а для моделирования переноса взвешенных наносов в потоке – уравнения переноса. Также в ряде работ рассматривается упрощенная модель динамики донных наносов, в которой водонасыщенные

илы представляются в виде текучей вязкопластичной среды. Часто такой подход еще используется для моделирования оползней вдоль поверхности склона [126].

Однако для моделирования очистки шламовых стоков эта методика не применима по ряду причин. Во-первых, для речного потока характерно непостоянство вертикальных и горизонтальных составляющих скоростей. Это приводит к тому, что движение частиц в потоке имеет прерывистый характер. Частицы могут двигаться скачками, перекачиваться, останавливаться и вновь вовлекаться в поток. Скорости же течения в отработанной горной выработке малы. Основной объем жидкости поступает через верхнюю кровлю, и течение не может перейти в турбулентный режим, который принципиально характерен для речных потоков. Более того, в отличие от открытых русел, в рассматриваемой задаче размеры зоны осаждения взвешенных загрязняющих частиц ограничены площадью самой выработки, и распространением загрязнений «по ширине» можно пренебречь. В то время как распределение примеси «по высоте» имеет принципиальное значение в вопросе накопления осадков и выявления тенденций их распространения. Во-вторых, доля твердой фазы в поступающих в выработку промышленных стоках не превышает 10%, и состоит в основном из частиц крупностью до 5 мкм. Процесс осаждения столь малых частиц длителен. Выпавшие в осадок такие примеси уплотняются, слеживаются со временем и перестают размываться течением. Поэтому для таких осадков не применимы эмпирические формулы для определения массообмена между дном и водным потоком, полученные для взвешенных примесей в руслах рек. По схожим причинам методы моделирования образования иловых наносов на морском мелководье в данной задаче также плохо применимы.

В третьем классе задач, в которых моделируется течение и распространение нерастворенных примесей, решается проблема об

образовании и транспорте нефтяных пленок [116, 155, 174]. Рассмотренные в этом случае модели учитывают физико-химические свойства нефти и влияние внешних условий окружающей среды (ветер, температура, соленость воды и др.). В данной задаче, процесс растекания нефтяного пятна не представляет интереса, т.к. выработка представляет собой закрытый, ограниченный по площади водоем. По этой же причине процессами деструкции нефти под воздействием внешних природных факторов (испарение, растворение в воде и др.) можно пренебречь. Существенной задачей моделирования применительно к горным выработкам является изучение процесса накопления всплывающих примесей и возможность их вымывания потоком жидкости.

Часто в задачах о растекании и транспорте нефтяного пятна, точно так же как и в задачах кавитации, используются модели многокомпонентных смесей, когда жидкая среда разделяется на разные по свойствам составляющие. Основную сложность в таких моделях представляет постановка граничных условий на границе раздела и изучения процессов в приграничном слое. Для данной задачи разделение очищаемых стоков на жидкую, твердую и газообразную фазу затруднительно. Если говорить об оседающих примесях, то нужно учитывать, что частицы очень малых размеров и медленно оседают даже в стоячей воде. Они легко вовлекаются в поток и переносятся вместе с ним. Невозможно определить границу раздела между сильно и слабо загрязненными слоями жидкости. Всплывающих же примесей в очищаемых стоках столь незначительное количество, что можно не рассматривать их с большой степенью детализации. По этим причинам очищаемые промышленные стоки можно рассматривать как однородную среду, а расслоение моделировать за счет распределения концентрации по области решения.

Пятый класс задач связан с распространением пассивных примесей в озерах и других открытых водоемах [125]. В данном случае, при выводе

уравнений, описывающих распространение взвешенных частиц в жидкости, исследователи опираются на закон сохранения неоднородной среды [134]. При этом вещества не разделяются на растворенные, взвешенные, коллоидные растворы и другие, так как закон сохранения действует единообразно для них всех. В данной работе используется именно такой подход к моделированию. Таким образом, к системе решаемых уравнений добавляется уравнение переноса примеси, в котором учитываются процессы конвекции и диффузии [17, 23]. Полученное уравнение дополняется граничными условиями, в которых определяющими являются такие факторы как интенсивность накопления и размыва осевших примесей у дна [153], а также отталкивания всплывающей примеси от нижней границы области решения.

Для полученных систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих математическую модель исследуемой задачи, необходимо ставить соответствующие начальные и граничные условия. Полученную краевую задачу можно решать точными или приближенными методами. Так нестационарные задачи о течении стратифицированной [18] и вязкой [99, 156] жидкости рассматривались рядом авторов, были найдены некоторые аналитические решения для частных случаев водоемов простой формы. Однако при решении задач в непрямоугольных водоемах сложной формы приходится прибегать к численным методам и находить лишь приближенное решение.

Создано много универсальных численных методик, которые применяются для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Каждая из них основывается на своем способе получения дискретного аналога исходной системы уравнений. Существует несколько основных подходов: разложение в ряд Тейлора, интерполяция функций полиномами, интегральный подход или метод контрольных объемов. При использовании разложения в ряд Тейлора [127, 128, 130] и интегрального

метода [131] предполагается, что уравнения в частных производных корректны и в соответствующей форме описывают законы сохранения. При таком подходе физические законы сохранения применяются лишь при выводе уравнений в частных производных и никак не используются при построении разностных схем. При использовании метода контрольных объемов разностная схема строится на основе физических законов сохранения, следствием которых является рассматриваемое уравнение в частных производных [2, 119]. Независимо от выбранной методики, при замене решения дифференциальной задачи решением ее разностного аналога возникают две проблемы: сходится ли решение разностной задачи к решению дифференциальной, и насколько сильно изменится решение разностной задачи, при наличии погрешностей вычислений [14]. То есть возникает вопрос о сходимости и устойчивости выбранного метода решения. Также немаловажным для выбранных схем является свойство консервативности и монотонности [121, 127].

Для решения разностных уравнений разработано множество численных методов. Все их можно разделить на следующие классы: метод конечных разностей, метод интегральных соотношений, метод частиц в ячейках и производный от него метод крупных частиц, метод конечных элементов и статистические методы.

Метод интегральных соотношений применим к уравнениям разных типов. Согласно ему, область интегрирования разбивается на полосы с помощью кривых линий, форма которых определяется видом границ этой области. Система уравнений в частных производных интегрируется поперек этих полос с использованием интерполяционных представлений подынтегральных функций. Полученная аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируется численно. Основная трудность состоит в решении краевой задачи, выборе интерполяционных формул и метода численного интегрирования [21, 22].

Метод частиц в ячейках сочетает в себе применение Эйлера и Лагранжева подхода. Область решения разбивается неподвижной сеткой, а сплошная среда трактуется как дискретная модель. Рассматривается совокупность частиц фиксированной массы, которые движутся через Эйлерову сетку. Недостатком этого метода является вычислительная неустойчивость. А также накладываются ограничения на число частиц из-за производительных мощностей ЭВМ, поэтому часто затруднительно получать информацию для сильно разряженных областей [22, 59, 173, 185].

В методе крупных частиц вместо совокупности частиц в ячейках рассматривается масса всей жидкой ячейки в целом. Далее, на основе конечно-разностных или интегральных представлений законов сохранения изучаются нестационарные потоки «крупных частиц» через Эйлерову сетку [20, 114].

Метод конечных элементов подразумевает, что исходные уравнения и краевые условия удовлетворяются только в некотором осредненном смысле для выбранного типичного конечного объема среды. Аппроксимация различных полей проводится на конечном элементе локально и независимо от его положения в общей системе. В методе конечных элементов сразу ищется наилучшее приближение точного решения в некотором пространстве (например, кусочно-гладких функций) [22, 47, 65, 177].

Статистические методы основываются на построении вероятностного процесса, который численно моделируется методом Монте-Карло. В результате получается формальное решение в виде статистических оценок. Главной проблемой является выяснение адекватности построенного вероятностного решения исходному уравнению [22].

Отдельно следует отметить так называемые бессеточные методы [6, 149], основанные на Лагранжевом подходе. Их общей идеей является непосредственное дискретное моделирование движения сплошной среды, минуя стадии вывода и аппроксимации дифференциальных уравнений.

Основной проблемой этих методов является нахождение способа введения дискретного аналога условия несжимаемости. Этот метод применяется для течений, характеризующихся большой деформацией среды.

Метод конечных разностей широко используется для решения не только параболических и эллиптических уравнений, но и гиперболических. Для этого производится дискретизация области решения – замена непрерывной области совокупностью изолированных точек – так называемой сеткой [101]. Искомые функции непрерывных аргументов заменяются функциями дискретных аргументов – сеточными функциями. Полученные разностные уравнения решаются теми или иными численными методами. В данной работе используется именно данный метод.

Для решения разностных уравнений методом сеток используют явные или неявные численные методы. Явные методы отличаются простотой реализации, но не обладают достаточной точностью и устойчивостью в ряде задач. К ним, например, относится метод Гаусса [19]. Неявные методы позволяют получать точное решение задач даже в сложных областях с необходимой точностью.

Выбор того или иного численного метода зависит от типа решаемого уравнения. Так для параболических уравнений описан целый класс неявных устойчивых и условно устойчивых методов расщепления или дробных шагов, отличающиеся порядком аппроксимации исходных уравнений [105, 106, 128, 144, 160, 171]. Основой для появления этого класса методов стал метод переменных направлений, который позволяет сводить решение многомерной задачи к последовательному решению одномерных задач. При этом каждый шаг метода переменных направлений аппроксимирует исходное уравнение. В методах же расщепления удалось отказаться от требования аппроксимации, т.е. на каждом шаге аппроксимация может отсутствовать. Вместо этого требуется, чтобы имела место суммарная аппроксимация. К таким методам относятся такие как: схема стабилизирующих поправок,

схема в дробных шагах, схема «предиктор – корректор» и другие. Позже появился другой подход к построению схем расщепления, основанный на представлении оператора в виде суммы операторов, не обязательно одномерных. Этот метод называют методом расщепления по физическим процессам [89, 90]. Идея состоит в сведении исходной задачи к последовательности задач, описывающих более простые физические процессы [52, 53 - 55, 91, 104]. В данной работе для решения параболических уравнений переноса выбрана устойчивая схема стабилизирующих поправок второго порядка по пространственным переменным, и первого порядка по времени.

При аппроксимации эллиптических уравнений получают системы линейных уравнений, для решения которых разработано множество итерационных и прямых методов [131]. Ко вторым, например, относится метод Гаусса, который за конечное число шагов позволяет получить точное решение СЛАУ. Для решения СЛАУ с разреженной матрицей широкое распространение получили многосеточные методы. Они основаны на последовательном решении задачи на грубых и более мелких сетках. Процесс продолжается до достижения сетки с малым количеством узлов, на которой систему уравнений можно будет решать точно [50, 115, 146, 164, 168, 176].

Но на практике, при решении разностных задач гидродинамики, матрицу системы уравнений зачастую сложно выразить в явном виде, либо она настолько большой размерности, что затруднительно получить точное решение такой системы прямыми методами. Наибольшее распространение получили итерационные методы, которые делятся на две основные группы: методы, основанные на использовании спектральных границ оператора уравнения [130] и вариационные методы [72, 80, 127, 130], основанные на минимизации некоторого функционала, достигающего минимального значения на решении системы. К первой группе относятся методы Якоби-Зейделя, релаксационные методы, Чебышевские методы и другие. К

вариационным методам относятся такие как метод скорейшего спуска, метод минимальных невязок, метод минимальных поправок, метод минимальных ошибок, методы сопряженных градиентов и другие [56]. Среди них обособленно стоят методы неполной аппроксимации [70, 161], которые позволяют решать СЛАУ как с неособенной, так и с особенной или почти особенной, недиагональной матрицей оператора, что невозможно применением других вариационных методов. В рассматриваемой задаче, из-за слеживания осадка область решения может значительно меняться, и, как следствие, матрица полученной СЛАУ может не обладать такими свойствами как симметричность и положительная определенность. Поэтому для решения полученной системы будет использоваться сходящийся метод минимальных невязок неполной аппроксимации с глобальной оптимизацией итерационных параметров.

Цель настоящей работы состоит в построении математической модели, позволяющей описывать процессы очистки жидких промышленных стоков от нерастворенных примесей в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт, получении оценки эффективности такого способа очистки, и определении времени «безопасной» эксплуатации выработки как очистного сооружения.

Для достижения поставленной цели требуется последовательно решить следующие **задачи**:

1. На основе аналитического обзора выявить основные факторы, влияющие на качество очистки в отработанных горных выработках, которые необходимо отразить в математической модели.
2. Разработать математическую модель процессов очистки жидких промышленных стоков от нерастворенных примесей в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт, с учетом поступления грунтовых вод, наличия в очищаемых стоках взвешенных оседающих и всплывающих примесей, различающихся по

фракционному составу, и изменения области решения из-за слеживания осадка.

3. Разработать алгоритмы и комплекс программ для численной реализации предлагаемой математической модели.
4. Используя численные эксперименты, выявить причины возникновения «залпового выброса», и оценить время «безопасного» использования выработки как очистного сооружения.

Метод исследования. В исследовании применялись методы математического моделирования и механики сплошных сред. Для решения краевых задач используются метод конечных разностей, неявные численные схемы для решения параболических уравнений и итерационные методы для решения эллиптических уравнений. Численная реализация модели выполнена в виде зарегистрированного комплекса программ, написанного на языке C++.

Объектом исследования в данной работе является математическая модель процесса очистки жидких промышленных стоков от нерастворенных примесей в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт, а также алгоритмы для ее численной реализации.

Предметом исследования было выбрано моделирование заиливания выработки и «залпового выброса» примесей из шахты, оценки времени «безопасной» работы выработки как очистного сооружения.

Основные результаты, выносимые на защиту. В работе присутствуют результаты, соответствующие трем областям исследования паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико – математическим наукам.

Область исследования 1: (разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений):

1. Математическая постановка задачи моделирования процесса очистки жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках

закрытых и затопленных угольных шахт, с учетом поступления грунтовых вод, наличия в очищаемых стоках взвешенных оседающих и всплывающих примесей, различающихся по фракционному составу, и изменения области решения из-за слеживания осадка.

Область исследования 4: (Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента):

2. Комплекс программ, предназначенный для проведения вычислительных экспериментов по исследованию процессов течения и распространения, оседающих и всплывающих, нерастворенных примесей в области, моделирующей закрытый горно-технологический объект, с возможностью изменения области решения. Комплекс позволяет исследовать процесс очистки жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт.

Область исследования 5: (комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента):

3. Результаты численного моделирования возникновения явления «залпового выброса» для примесей с различным фракционным составом. Оценки времени «безопасного» использования отработанной горной выработки как очистного сооружения.

Научная новизна выносимых на защиту результатов заключается в следующем:

1. Предложена новая математическая модель очистки промышленных стоков от нерастворенных примесей в отработанных горных выработках с учетом всплытия и оседания примеси, особенностей развивающегося в шахте течения и слеживания осадка.
2. Для численной реализации модели разработан алгоритм изменения области решения из-за слеживания осадка примеси.

3. С помощью разработанного программного комплекса получены результаты численных экспериментов, демонстрирующие заиливание выработанного пространства и явление «залпового выброса». Получены оценки времени «безопасной» эксплуатации отработанной горной выработки как очистного сооружения.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается использованием выполнения законов сохранения в качестве основы моделирования, хорошим количественным соответствием методических расчетов с реальными измерениями по мутности откачиваемых стоков.

Теоретическая ценность исследований обуславливается созданием математической модели и получением результатов численного моделирования процессов течения и распространения нерастворенных примесей, с учетом поступления грунтовых вод, наличия в очищаемых стоках взвешенных оседающих и всплывающих примесей, различающихся по фракционному составу, и изменения области решения из-за слеживания осадка.

Практическая ценность работы заключается в том, что предложенные математическая модель, алгоритмы и вычислительная программа, могут применяться для исследования процессов очистки не только в шахте Кольчугинской, но и для отработанных горных выработок закрытых и затопленных угольных шахт. Полученные новые численные результаты могут быть использованы для прогнозирования возникновения «залпового выброса» и оценки максимального возможного времени безопасной эксплуатации подобного очистного сооружения. Результаты, представленные в работе, получены в рамках выполнения проектной части государственного задания 1.630.2014/К и базовой части 2014/64.

Личный вклад автора. Во всех публикациях автору принадлежит участие в формулировке задач, постановке краевых условий, реализации методов решения и проведении расчетов, интерпретации полученных

результатов. Основные результаты диссертации получены автором, им разработан программный комплекс и выполнены вычисления для всех рассмотренных в работе задач.

Доля личного участия автора составляет: в постановке задач исследования, создании математической модели, и в выборе алгоритма и методов решения – 80%, в разработке программного комплекса, реализующего математическую модель и выбранный алгоритм решения – 80%, в проведении численных экспериментов – 100%, в анализе и обобщении полученных результатов – 80%, во внедрении результатов – 50%.

Результаты совместных работ представлены в диссертации с согласия соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 189 наименований и приложения на 2 страницах. Общий объем диссертации составляет 187 страниц, включая 78 рисунков и 11 таблиц.

В настоящее время в прикладной математике сложилась следующая логическая цепочка моделирования того или иного явления:

- выбор физической модели исследуемого явления, выявление совокупности определяющих факторов и закономерностей;
- построение математической модели (уравнения и краевые условия, описывающие явление);
- разработка алгоритма решения задачи, а также разработка или выбор того или иного известного метода решения;
- разработка программы или комплекса программ и обработка полученных результатов на ЭВМ;
- проведение расчетов, анализ и обработка результатов;
- сравнение результатов с физическим объектом и другими данным [121].

Эта логическая последовательность выдержана и в данной работе. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава посвящена построению единой математической модели течения, оседания и подъема примеси и слеживания осадка в виде замкнутых систем дифференциальных уравнений в частных производных с начальными и граничными условиями. В первой главе работы анализируется предмет исследования и рассматривается физическая постановка задачи, излагаются основные предположения о предмете исследования, а также выбираются области решения характерной для отработанных горных выработок формы. Отдельно рассматриваются модели течения жидкости, заполняющей выработку, выбираются соответствующие системы дифференциальных уравнений с граничными условиями. В полученном потоке жидкости ищется распространение взвешенных примесей. Отдельно рассматриваются взвешенные всплывающие и оседающие примеси. Приводятся алгоритмы изменения области решения из-за накопления и слеживания осадка и образования слоя всплывшей примеси.

Разработке алгоритма и выбору численных методов решения полученных систем дифференциальных уравнений в частных производных посвящена **вторая глава**. В ней определяются алгоритм и последовательность решения. Для решения полученных систем дифференциальных уравнений в частных производных предполагается использовать эффективные, сходящиеся численные разностные методы. Для решения систем линейных алгебраических уравнений используется метод минимальных невязок неполной аппроксимации с глобальной оптимизацией параметров, который может быть применим даже для систем уравнений с недиагональной, особенной или почти особенной матрицей. Для решения уравнений переноса – неявные методы в дробных шагах.

Приводятся результаты численных расчетов тестовых модельных задач на последовательности сеток с уменьшением шага по времени и пространству.

В **третьей главе** приводятся результаты численного моделирования процессов очистки шламовых стоков в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт. Рассматривается вопрос выбора безразмерных характеристик задачи, соответствующих реальным измерениям. Проводится исследование влияния основных характеристик течения и примеси, а также фракционного состава на получаемые результаты. Приводятся результаты моделирования оседания и всплытия примесей, накопления и слеживания осадка. Анализируется явление «залпового выброса» и выявляются факторы, которые на него влияют. На основании результатов численного моделирования производится оценка времени «безопасной» работы выработки как очистного сооружения.

В **заключении** сформулированы выводы по полученным результатам работы.

Степень достоверности и апробации результатов. Настоящая работа выполнена в Кемеровском государственном университете на кафедре ЮНЕСКО по Информационным вычислительным технологиям, под руководством доктора физико-математических наук, профессора Захарова Юрия Николаевича. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [25 - 43, 62, 63, 75, 167, 188, 189] и докладывались на: XV Международной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Алтайский край, 2016); XVII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию (г. Новосибирск, 2016); V международной конференции школьников, студентов, аспирантов, молодых ученых «Ресурсоэффективные системы в управлении и контроле: взгляд в будущее» (г. Томск, 2016); International Conference «Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education» (Almaty, Kazakhstan, 2015); International

Scientific Conference Urban Civil Engineering and Municipal Facilities (SPbUCEMF – 2015) (St. Petersburg, 2015); Международной научно-практической конференции «Фундаментальная информатика, информационные технологии и системы управления» (г. Красноярск, 2014); Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Тюмень, 2014); Международной научной конференции «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование (ИВТ & ММ)» (г. Кемерово, 2013); Международной научной студенческой конференции, НГУ, ИВТ СОРАН (г. Новосибирск, 2013); Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «ОБРАЗОВАНИЕ, НАУКА, ИННОВАЦИИ – вклад молодых исследователей», КемГУ (г. Кемерово, 2013); Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 2012); Международной научной студенческой конференции, НГУ, ИВТ СОРАН (г. Новосибирск, 2012); Всероссийской конференции с участием иностранных ученых «Проблемы мониторинга окружающей среды» (г. Кемерово, 2011); Международной конференции «Математические и информационные технологии, МІТ – 2011» (IX конференция «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании») (Врнячка Баня, Сербия, 2011); Международной научной студенческой конференции, НГУ, ИВТ СОРАН (г. Новосибирск, 2011); Международной научно – практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «ОБРАЗОВАНИЕ, НАУКА, ИННОВАЦИИ – вклад молодых исследователей», КемГУ (г. Кемерово, 2010); Международной конференции «Геоинформатика: технологии, научные проекты» (г. Барнаул, 2010).

Основные результаты работы также докладывались и обсуждались на **семинарах**: кафедры вычислительной математики КемГУ «Математические модели, методы решения», г. Кемерово (под рук. проф. Ю.Н. Захарова);

кафедры НИТ КемГУ «Информационные технологии и математическое моделирование», г. Кемерово (под рук. проф. А.М. Гудова); ИВТ СО РАН «Информационно-вычислительные технологии в задачах поддержки принятия решений», г. Новосибирск (под рук. к.ф. – м.н. Д.В. Есипова, Д.Л. Чубарова); ИВТ СО РАН «Информационно-вычислительные технологии», г. Новосибирск (под рук. академика Ю.И. Шокина, профессора В.М. Ковени).

Было получено свидетельство о регистрации программ для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 25 работ: 4 статьи в изданиях, рекомендуемых ВАК [27, 30, 43, 62], 2 статья в журналах, индексируемых SCOPUS и Web of Science [167, 188], 17 работ в трудах и тезисах международных и всероссийских конференций [25, 26, 28, 29, 31 – 37, 40 – 42, 63, 75, 189], в том числе получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [38] (см. Приложение А) и 1 монография [39].

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Захарову Юрию Николаевичу.

Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Данная глава посвящена построению двух математических моделей: модели распространения оседающей примеси и слеживания осадка и модели «самоизлива шахтных вод» в виде замкнутых систем дифференциальных уравнений в частных производных с начальными и граничными условиями. Вначале описывается предмет исследования и физическая постановка задачи, выдвигаются основные упрощающие предположения, выделяются существенные характеристики изучаемых процессов. В моделях учитываются такие процессы как: течение жидкости в отработанной горной выработке, поступление грунтовых вод, оседание и подъем взвешенных примесей, фракционный состав примесей, накопление и слеживание осадка, образование слоя всплывших примесей.

1.1. Предмет исследования

На практике, промышленные стоки угольной промышленности представлены в основном шахтными и шламовыми водами. Обычно после предварительной очистки их используют в технологических процессах добычи и обогащения, только затем подвергают более глубокой очистке и сбрасывают в близлежащие реки.

Производственные сточные воды углеперерабатывающих предприятий представляют собой гидросмесь, в состав которой входят жидкая, твердая и газообразная фазы. Жидкая фаза составляет 95 – 98% по массе и состоит в основном из шахтной или речной воды, потребляемой фабрикой в процессе переработки угля. Газообразная фаза представлена воздухом. А твердая часть состоит из частиц минерального и органического происхождения, при этом

содержание частиц крупностью до 5 мкм в ней достигает 80 – 95 % [48]. Таким образом, основная масса веществ, взвешенных в шламовых стоках углебогатительных фабрик, концентрируется на частицах менее 10 мкм в диаметре. Процесс очистки стоков от таких мелких частиц достаточно длителен, если не применять дополнительные стимулирующие технологии. Поэтому выбор способа очистки остается крайне важным, он определит не только безвредность очищенных стоков, но и диапазон экономических затрат.



Рисунок 1.1 Схема транзита промышленных стоков ш. «Комсомолец» в р. Мереть. На схеме обозначены процессы: (1) – сброс шахтных вод в центральные очистные сооружения; (2) – забор вод для использования в технологических процессах обогащения; (3) – сброс для отстаивания в шламоотстойниках; (4) – сброс для очистки в отработанных выработках ш. «Кольчугинская»; (5), (6) – сброс в очистные сооружения ш. «Красноярской»; (7) – сброс очищенных стоков в р. Мереть [74]

Обычно для очистки жидких промышленных стоков углерерабатывающих предприятий используют традиционные методы (отстаивание, фильтрацию, флотацию, флокуляцию и др.), но в Кемеровской области используется и другой – с помощью отработанных горных

выработок закрытых и затопленных угольных шахт. Изучение этого альтернативного способа очистки представляет большой практический интерес. В Кемеровской области в результате закрытия нерентабельных угледобывающих предприятий, заполнены техногенными подземными водами достаточно большие по площади подземные пространства. Часто они находятся вблизи углеперерабатывающих предприятий, поэтому их потенциально можно использовать как очистные сооружения. Суть применения данного способа очистки заключается в следующем: жидкие промышленные стоки углеобогатительной фабрики закачиваются в отработанные выработки закрытой и затопленной угольной шахты. В подземном пространстве происходит их естественная очистка за счет отстаивания и разбавления поступающими грунтовыми водами. Осажденные илы при этом остаются в выработанном пространстве, и дополнительные расходы для их складирования не требуются. В настоящее время, такой подход реализуется для очистки шламовых стоков углеобогатительной фабрики «Комсомолец» в отработанных выработках шахты «Кольчугинской» [68, 96, 120]. Рассмотрим Рисунок 1.1, на котором представлена часть схемы транзита и очистки жидких промышленных стоков шахты «Комсомолец» в реку Мереть [74].

Впервые в отечественной практике для обезвреживания шламовых стоков углеобогатительной фабрики «Комсомолец» (см. часть транзита (4), Рисунок 1.1) используются отработанные выработки шахты Кольчугинской. Очищенные таким образом стоки сбрасываются в очистные сооружения шахты Красноярской для дополнительного обезвреживания (см. часть транзита (5), Рисунок 1.1). Концентрация взвешенных веществ, наблюдающаяся в сбросах обогатительной фабрики «Комсомолец» в июле 2006 г., в среднем составила 500 г/л [74]. После отстаивания сбрасываемых вод в течение 4 – 20 суток, концентрация уменьшалась до 50 г/л. Из шламоотстойников частично осветленные стоки закачивались в шахту Кольчугинскую в объеме 1000 м³ в сутки, где и происходила их более

глубокая очистка. Ожидалось, что частицы примеси будут осаждаться и заполнять отработанное пространство. По мере заполнения выработок часть частиц вместе с развивающимся внутри течением переносится к месту откачки. Со временем это приводит к повышению мутности откачиваемых стоков.

Обводненная выработка представляет собой «черный ящик», реальные измерения каких-либо параметров возможны лишь на входе и выходе. Проведение каких-либо измерений и наблюдений внутри выработки в настоящее время является почти невозможным из-за большой протяженности, непостоянной внутренней структуры выработки (из-за возможных обрушений кровли, оставленного под землей оборудования и других факторов), токсичности очищаемых промышленных стоков и дороговизне таких исследований. В связи с этим, возникает необходимость в применении математического моделирования и численных экспериментов, как инструментов для прогнозирования развития процессов очистки, проходящих в затопленных горных выработках.

В настоящее время, задача о моделировании очистки жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт является мало изученной. В литературе представлена модель очистки жидких промышленных стоков только от растворенных примесей, а вопрос о заилении шахты и распространении нерастворенных примесей почти не освещен. На данный момент в литературе недостаточно освещены математические модели, с помощью которых можно было бы решить эту задачу. Построение и изучение такой модели актуально для многих областей, в которых ведется подземная добыча полезных ископаемых, в том числе, и для Кемеровской области.

В диссертационной работе были выбраны основные характерные особенности протекающих в горной выработке физических процессов

очистки и сделаны некоторые предположения, принимаемые в описывающей их математической модели:

Во-первых, будут учитываться характерные размеры и форма главного ствола шахты Кольчугинской (см. Рисунок 1.2), хотя рассматриваемый в диссертационной работе способ моделирования может применяться и для других подобных горных выработок. Для шахты Кольчугинской характерным является наличие почти горизонтального участка в центральной части и двух наклонных на входе и выходе. Площадь шахтного ствола в поперечном разрезе составляет $13,5 \text{ м}^2$, а общая длина $\approx 4,35 \text{ км}$. Т.е высота шахтного ствола много меньше общей длины горной выработки.

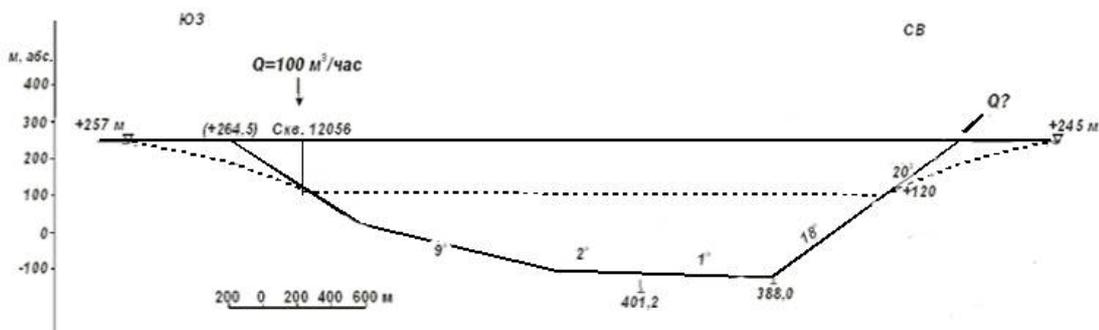


Рисунок 1.2 Общая схема ш. «Кольчугинская» [74]

Во-вторых, для шахты Кольчугинской известно, что основной объем поступающей в шахту жидкости состоит из грунтовых вод, фильтрующихся через верхнюю кровлю. Из данных реальных наблюдений известно, что этот объем примерно в четыре раза больше объема закачиваемых для очистки стоков. Суммарный же объем поступающей жидкости таков, что с учетом общей протяженности ш. Кольчугинской, средние скорости течения в выработке малы. Поэтому для такого течения характерен ламинарный режим.

В-третьих, в диссертационной работе рассматривается очистка только от взвешенных примесей. Доля твердой фазы в поступающих в выработку промышленных стоках не превышает 5 %, и состоит в основном из частиц крупностью до 5 мкм. Частицы примеси таких малых размеров, что на их распространение существенно влияют не только гидродинамические

факторы, но и действие силы тяжести или подъема, из-за которого они могут оседать или всплывать относительно потока жидкости. Также рассматриваемые взвешенные примеси являются инертными, и почти не подвержены деструкции.

В-четвертых, процесс очистки не стационарен, но взвешенные примеси не оказывают прямого влияния на течение жидкости. Концентрация загрязнений в закачиваемых стоках невелика, а течение развивается при очень малых скоростях, соответственно концентрация примеси внутри выработки будет расти медленно. Кроме того, частицы взвешенных примесей таких малых размеров, что процесс их осаждения очень длителен по времени. Поэтому частицы примеси, передвигаясь в потоке жидкости, не изменяют скорости самого течения, и увеличение концентрации примеси до некоторого предела на течение не влияет. Однако выпавшие в осадок примеси со временем уплотняются, слеживаются и перестают размываться течением. Это может привести к изменению формы дна, т.е. произойдет так называемое заиление обводненной выработки. Поэтому характер течения может измениться только вслед за изменением формы дна, а не из-за наличия взвешенных примесей.

В-пятых, взвешенные примеси могут отличаться по фракционному составу. Как правило, для анализа качества очистки шахтных вод исследователи выделяют до пяти фракций примеси – от наиболее мелких и летучих, до относительно крупных и тяжелых. Характер распространения примесей в зависимости от крупности фракции может существенно различаться, поэтому этот фактор необходимо отразить в математической модели.

В-шестых, в отличие от открытых русел, в рассматриваемой задаче размеры зоны осаждения взвешенных загрязняющих частиц ограничены площадью самой выработки и распространением загрязнений «по ширине» можно пренебречь. В то время как распределение примеси «по высоте» имеет принципиальное значение в вопросе накопления осадков и выявления

тенденций их распространения. Также в математической модели рассматривается уже обводненная горная выработка, соответственно частицы примеси со стенок и верхней кровли уже попали в заполняющую выработку жидкость. Других внутренних источников взвешенных примесей внутри выработки нет. Таким образом, стенки горной выработки не окажут существенного влияния на процесс очистки, поэтому в математической модели изучаемых процессов очистки будет рассматриваться только двумерная модель.

В-седьмых, существенное влияние на качество очистки оказывают грунтовые воды. Очистка закачиваемых промышленных стоков аглофабрики от взвешенных примесей происходит из-за существенного разбавления поступающими в выработанное пространство грунтовыми водами, и благодаря отстаиванию. Поэтому «чистота» или «загрязненность» грунтовых вод может повлиять на мутность откачиваемых стоков. После фильтрации через толщу породы грунтовые воды содержат только мелкие частицы примеси, а крупные частицы в них отсутствуют.

1.2. Модель оседания примеси и слеживания осадка

При математическом моделировании очистки закачиваемых в шахту промышленных стоков аглофабрики необходимо учитывать физические особенности исследуемых процессов. Благодаря выпадению твердых частиц, шламовые гидросмеси относятся к неустойчивым системам. Процесс расслоения полидисперсной смеси, какой являются шламы, сложен для аналитического описания. На скорость осаждения частиц в ней влияют взаимодействие сил тяжести и сопротивления среды с гидродинамическими факторами, а также различия в скоростях падения частиц разной крупности.

В процессе осаждения с течением времени в единице объема в верхних слоях гидросмеси число частиц уменьшается, изменяется соотношение между долей частиц различной крупности. Более крупные частицы осаждаются быстрее, соответственно их содержание в верхних слоях уменьшается быстрее, чем мелких. В нижних слоях гидросмеси отмечается противоположная тенденция. Очень мелкие частицы могут оставаться в верхних и средних слоях, поскольку действие силы тяжести на них настолько мало, что ее уравнивают силы сопротивления среды и броуновское движение. Одновременно с осаждением твердой фазы образуется и уплотняется осадок [15].

При выборе области решения определяющими являются характерные особенности шахты Кольчугинской (см. Рисунок 1.2). Так для нее характерна большая протяженность ($\approx 4,35$ км) по отношению к высоте ствола шахты ($\approx 2 - 3$ м). Это может принципиально затруднить математическое и численное моделирование. Реальные размеры выработки и объем поступающей в шахту жидкости таковы, что течение внутри развивается при очень малых скоростях. Это означает, что протяженность выбираемой области решения повлияет только на время «заиления» (заполнения слежавшимся осадком), но не на суть происходящих процессов. А так как основной задачей моделирования в данной проблеме является изучение именно тенденций накопления и выброса примесей из выработки, то процесс заиления в «длинном» канале будем моделировать в «коротком».

Рассмотрим область решения G , характерной для затопленной горной выработки формы [74], с границей $\Gamma = \cup_{i=1}^4 \Gamma_i$, где Γ_1, Γ_4 – входное и выходное отверстия, соответственно, Γ_2, Γ_3 – нижняя и верхняя границы (см. Рисунок 1.3). Входная граница выбирается таким образом, чтобы она соответствовала области в реальной выработке, находящейся на некотором удалении от места закачки жидкости. Это позволит выбирать достаточно гладкую функцию для определения скорости входного потока.

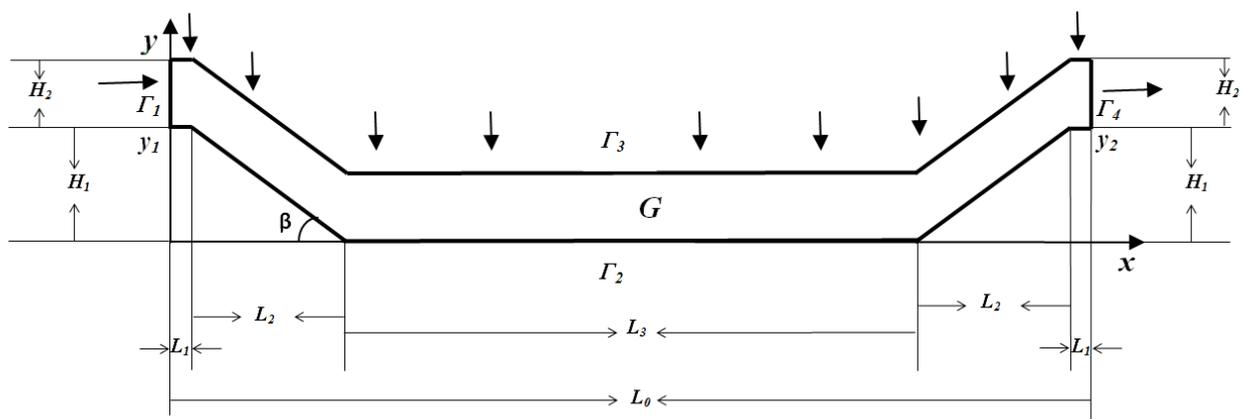


Рисунок 1.3 Область решения для задачи об оседании примеси и слеживании осадка

Шахтные воды, заполняющие отработанную горную выработку, являются вязкой однородной несжимаемой жидкостью. Традиционно движение такой жидкости описывается с помощью системы уравнений Навье – Стокса не в естественных переменных «скорость – давление», а в переменных «функция тока – вихрь» [3, 123]. В результате такого перехода смешанная эллиптически – параболическая система уравнений заменяется на одно параболическое и одно эллиптическое уравнение. Уменьшается количество решаемых уравнений, и обеспечивается автоматическое выполнение уравнения неразрывности. Исчезает необходимость в постановке граничных условий для давления, которые обычно не включены в физическую постановку задачи. Однако это приводит к появлению сложностей с заданием граничных условий для вихря и функции тока, т.к. зачастую в исходной постановке задачи есть условия только для компонентов вектора скорости на границах области решения. Приходится каким-либо образом выразить недостающие граничные условия. В данной работе также используется такой подход.

Для начала введем используемые обозначения. Функция тока определяется соотношениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Направление касательной к линии $\psi(x, y) = const$, которое определяется из равенства $d\psi = -v dx + u dy$, совпадает с направлением вектора скорости $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}\right)$, поэтому линии уровня $\psi = const$ являются векторными линиями поля скоростей. При установившемся движении эти линии совпадают с траекториями движущихся частиц, т.е. с линиями тока [99].

Вектор вихря $\bar{\Omega} = rot \bar{U}$ характеризует вращение частиц сплошной среды, вычисляется по формуле:

$$\bar{\Omega} = rot \bar{U} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix},$$

и в двумерном случае характеризуется скалярной величиной ω (вихрем), где:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Используя введенные обозначения, для описания течения вязкой однородной несжимаемой жидкости в двумерном случае используем безразмерную систему уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока – вихрь»:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega. \quad (1.3.2)$$

В системе уравнений (1.3.1)–(1.3.2) используются следующие обозначения: $\bar{U} = (u(t, x, y), v(t, x, y))$ – вектор скорости, заданный своими компонентами u, v ; ω – вихрь; ψ – функция тока; $Re = \frac{\tilde{u} L_0}{\nu}$ – число Рейнольдса; \tilde{u} – характерная скорость; L_0 – характерная длина; ν – коэффициент кинематической вязкости.

Для системы уравнений (1.3.1) – (1.3.2) необходимо поставить начальные и граничные условия. Для отработанной горной выработки известно, с какой скоростью происходит закачка сточных вод. Скорость откачки жидкости из шахты на практике выбирается таким образом, чтобы уровень грунтовых вод не колебался в районе выработки. Исходя из реальных наблюдений для шахты Кольчугинской известно, что объем фильтрующихся в выработанное пространство грунтовых вод примерно в четыре раза больше объема закачиваемых для очистки стоков. Тогда для физических переменных можно поставить следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{aligned}
 & \text{при } t = 0 \quad u = 0 \text{ и } v = 0; \\
 & \text{на границе } \Gamma_1 \quad u = u_0(t, y), v = 0; \\
 & \text{на границе } \Gamma_2 \quad u = 0, v = 0; \\
 & \text{на границе } \Gamma_3 \quad u = 0, v = v_0(t, x); \\
 & \text{на границе } \Gamma_4 \quad u = u_1(t, y), v = 0,
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $u_0(t, y), u_1(t, y), v_0(t, x)$ – заданные функции, определенные на границе области решения Γ , которые выбираются так, чтобы сохранялся баланс объемов втекающей и вытекающей жидкости.

Граничные условия для функции тока ψ определяются численным интегрированием известного профиля скорости, и принимают вид:

$$\text{на границе } \Gamma \text{ функция тока } \psi = \tilde{\psi}(t, x, y), \tag{1.5}$$

где $\tilde{\psi}(t, x, y)$ – вычисляемая на границе Γ функция, для которой выполняется

$$u = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}, v = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}.$$

Начальные и граничные условия для вихря ω часто определяются по формуле Тома или путем численного дифференцирования известного профиля скорости [124]. В диссертационной работе используется второй подход:

$$\text{при } t = 0 \quad \omega = 0; \text{ на границе } \Gamma \text{ вихрь } \omega = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\Gamma}. \quad (1.6)$$

Для моделирования распространения примеси в найденном потоке жидкости используется закон сохранения непрерывных неоднородных сред в формулировке для фиксированного объема:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C d\Omega = \int_{\Gamma} (C_k + C_m) d\Gamma + \int_{\Omega} (f - \sigma C) d\Omega \quad (1.7)$$

где $C(t, x, y)$ – концентрация загрязняющих примесей, перемещающихся вместе с потоком жидкости, f – внутренние источники загрязнений, $\sigma \geq 0$ – коэффициент, характеризующий поглощение вещества, C_m – диффузионный поток через границу, C_k – поток вещества через границу, переносимый течением [17].

Таким образом, выполнение закона (1.7) означает, что скорость изменения вещества в фиксированном объеме равна сумме потоков через границу и внутренних источников.

Потоки через границу объема определяются соотношениями:

$$C_k = -C(\bar{U} \cdot \bar{n}),$$

$$C_m = -(\bar{q} \cdot \bar{n}),$$

где $\bar{U} = (u, v)$ – вектор скорости; \bar{n} – внешняя нормаль к границе Γ ; $\bar{q} = (q_x, q_y)$ – диффузионный поток, составляющие которого имеют вид: $q_x = -D_x \frac{dC}{dx}$, $q_y = D_y \frac{dC}{dy}$, D_x, D_y – горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии, соответственно.

Для достаточно гладких функций, с учетом действия силы тяжести, отсутствия стоков и внутренних источников, и предположения, что $D_x = D_y = D$, из (1.7) можно получить уравнение переноса концентрации примеси:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + (v - v_s) \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (1.8)$$

где $C(t, x, y)$ – концентрация примеси, (u, v) – компоненты вектора скорости, v_s – скорость оседания примеси под действием силы тяжести или скорость подъема примеси, D – коэффициент диффузии.

В зависимости от знака v_s примесь относительно потока жидкости оседает ($v_s > 0$), поднимается ($v_s < 0$) или находится в равновесии ($v_s = 0$) и переносится вместе с ним. Внутренние свойства примеси определяются экспериментальным подбором коэффициента диффузии D и скорости оседания или подъема v_s .

Оперируя величинами скорости оседания v_s и диффузии D , можно моделировать различные по крупности фракции примеси: ($|v_s| \gg D$) – «тяжелые» примеси крупной фракции; ($|v_s| \ll D$) – «летучие» примеси, мелкие частицы, легкая фракция.

В зависимости от выбранной области решения и характеристик рассматриваемой примеси для уравнения (1.8) необходимо ставить граничные и начальные условия. Как отмечается в работе [121] граничные условия для концентрации могут быть трех основных типов:

1. условия Дирихле: известна концентрация на границе C_Γ ;
2. условия Неймана: определен диффузионный поток $j_\Gamma = -D \frac{\partial C}{\partial n}$;
3. задан закон массообмена: $j_\Gamma = \alpha_c(C_\Gamma - C_c)$, где α_c – коэффициент массообмена, C_Γ – концентрация на границе, C_c – концентрация среды.

В рассматриваемой задаче на входной границе, через которую поступает примесь в область, и на проницаемых верхних границах задаются условия первого типа, на сливных отверстиях – условия второго типа, на непроницаемых стенках – условия третьего типа.

Для моделирования распространения примеси используется безразмерное уравнение переноса (1.8) с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned}
& \text{при } t = 0 \quad C = C_0(x, y); \\
& \text{на границе } \Gamma_1 \quad C = C_1(t, x, y); \\
& \text{на границе } \Gamma_2 \quad D_1 \frac{\partial C}{\partial y} + v_s C = C_D - C_{v_s}; \\
& \text{на границе } \Gamma_3 \quad C = C_2(t, x, y); \\
& \text{на границе } \Gamma_4 \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь $C(t, x, y)$ – концентрация оседающей примеси, $C_0(x, y)$, $C_1(t, x, y)$, $C_2(t, x, y)$ – известные функции, $v_s > 0$ – скорость оседания частиц под действием силы тяжести, D – коэффициент диффузии, D_1 – коэффициент диффузии примеси у дна. На нижней границе области решения Γ_2 определяется поток примеси, равный разности расходов отрывающихся от дна частиц $C_D(t, x, y)$ (отвечает за размыв осадка) и оседающих частиц $C_{v_s}(t, x, y)$ (определяет аккумуляцию примеси на дне).

Граничное условие на границе Γ_2 перепишем в виде: $\frac{\partial C}{\partial y} = \alpha C + \beta$, где $\alpha = -\frac{v_s}{D_1} < 0$ – коэффициент, характеризующий интенсивность накопления осадка у дна; $\beta = \frac{(C_D - C_{v_s})}{D_1}$ – коэффициент, характеризующий массообмен у дна.

Тогда для уравнения (1.8) начальные и граничные условия для концентрации примут вид:

$$\begin{aligned}
& \text{при } t = 0 \quad C = C_0(x, y); \\
& \text{на границе } \Gamma_1 \quad C = C_1(t, x, y); \\
& \text{на границе } \Gamma_2 \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha C + \beta; \\
& \text{на границе } \Gamma_3 \quad C = C_2(t, x, y); \\
& \text{на границе } \Gamma_4 \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Как известно, накопление и уплотнение осадка взвешенных примесей происходит в достаточно тонком слое у дна, который называют активным. Как только концентрация осевшей примеси в активном слое достаточно возрастает, то осадок начинает слеживаться и через некоторое время полностью перестает размываться течением жидкости.

В модели слеживание осадка соответствует изменению формы дна, за счет передвижения нижней границы внутрь области решения, которое определяется исходя из достижения концентрацией примеси в активном слое порогового значения C^* , и сохранением этого значения на протяжении порогового времени слеживания T^* . При этом в слое со слежавшимся осадком нет течения жидкости, и не происходит дальнейшего накопления и уплотнения осадка примеси.

С учетом всех вышеприведенных рассуждений, математическая модель течения и распространения оседающей примеси в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт будет состоять из безразмерной системы уравнений Навье-Стокса (1.3.1 - 1.3.2) с соответствующими начальными и граничными условиями для компонентов вектора скорости – (1.4), для функции тока – (1.5), для вихря – (1.6), и безразмерного уравнения переноса примеси (1.8) при ($v_s > 0$) с начальными и граничными условиями (1.9). Моделирование слеживания осадка обеспечивается передвижением нижней границы внутрь области решения.

1.3. Модель «самоизлива шахтных вод»

Если отработанные горные выработки не используются как очистные сооружения, из них все равно приходится откачивать излишки жидкости для поддержания уровня грунтовых вод и предотвращения подтопления наземных территорий. Это приводит к дополнительным затратам. Для

экономии можно было бы бурить скважины, через которые под действием давления поступающих через верхнюю кровлю грунтовых вод шахтные воды будут «самоизливаться». Однако в процессе угледобычи в выработанном пространстве могут оставаться нефтепродукты, использованные для работы механизированных комплексов. Таким образом, вместе с вытекающим потоком на поверхность могут попадать опасные для окружающей среды загрязняющие примеси. Наравне с всплывающими примесями вымываться могут и взвешенные легкие еще не осевшие частицы примеси или несележавшийся осадок. Для реализации подобного проекта «самоизлива шахтных вод» важно знать, а будут ли частицы взвешенных примесей вымываться потоком жидкости на поверхность из выработанного пространства.

Моделирование всплытия примесей хотя и аналогично осаждению твердых взвешенных частиц, но существенные различия имеются. Нефтезагрязнения в стоках обладают меньшей плотностью по сравнению с водой [123]. В основной массе нефтепродукты в стоках находятся в свободном состоянии, образуя слой на поверхности, меньшая же часть может оказаться в тонкодисперсном состоянии, образуя эмульсию [98]. В отличие от оседающих примесей, которые могут привести к заилению выработки из-за слеживания осадка, слой всплывших примесей будет оставаться подвижным и может размываться и переноситься потоком жидкости. Также важно, что при всплытии примеси заполнять будут преимущественно полости вдоль верхней кровли, благодаря чему загрязнения могут не попасть в поток «самоизливающихся шахтных вод». Таким образом, в задаче о «самоизливе шахтных вод» важно учитывать не общую протяженность выработки, а глубину расположения шахты и неровность верхней кровли с наличием полостей.

Далее используется область решения G , характерной для участка затопленной горной выработки прямоугольной формы с полостью вдоль

верхней кровли и «сливной скважиной» (см. Рисунок 1.4). Область решения определяется своей границей $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{12} \Gamma_i$. Через границы $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ в область решения фильтруются грунтовые воды, через Γ_1 жидкость «самоизливается». За $\Gamma_i, i = 5, \dots, 12$ обозначаются непроницаемые границы. При математическом моделировании рассматриваемой задачи предполагается, что выработка полностью обводнена, через верхний свод постоянно поступают «чистые» грунтовые воды, а через сливную скважину жидкость «самоизливается». Примеси всплывают в жидкости и накапливаются в полостях вдоль верхней границы.

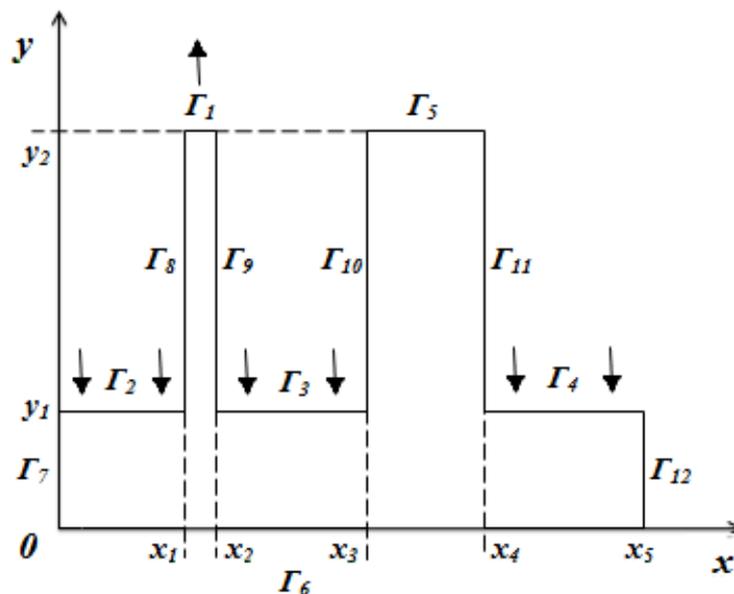


Рисунок 1.4 Область решения для задачи о «самоизливе шахтных вод»

Отдельно стоит отметить, что в случае моделирования «самоизлива шахтных вод» горная выработка представляет собой «черный ящик». Так, например, неизвестно, сколько находятся взвешенных примесей внутри, не контролируется процесс истечения шахтных вод из выработки, трудно выяснить есть ли вблизи скважины полости, в которых скопилась примесь, также сама выработка может располагаться на разной глубине. По этим причинам неизвестно как будет развиваться течение при «самоизливе шахтных вод», и как всплывающие или несслежавшиеся оседающие примеси будут распространяться в потоке жидкости. Поэтому для того, чтобы сделать

вывод о том, а могут ли и будут ли вымываться примеси из шахты, и, соответственно, безопасен ли проект «самоизлива шахтных вод», в диссертационной работе рассматриваются три наиболее характерные для выбранной области решения модели течения жидкости.

Первая – модель течения вязкой однородной несжимаемой жидкости (что свойственно для воды), которая описывается системой уравнений Навье – Стокса, записанной в безразмерном виде в переменных «функция тока – вихрь» (1.3.1 – 1.3.2). Для компонентов вектора скорости ставятся начальные и граничные условия вида:

$$\text{при } t = 0 \quad u = 0; \quad v = 0;$$

$$\text{на проницаемых верхних границах } \cup_{i=1}^4 \Gamma_i \quad u = 0; \quad v = v_i(t, x, y); \quad (1.11)$$

$$\text{на непроницаемых границах } \cup_{i=5}^{12} \Gamma_i \quad u = 0; \quad v = 0.$$

Для функции тока ставятся граничные условия вида (1.5), а для вихря – начальные и граничные условия вида (1.6).

Жидкость, заполняющую выработку, можно считать идеальной, так как течение развивается при очень малых скоростях, а концентрация примесей невелика. При этом если глубина расположения выработок невелика (100 – 300 м.), то стратификация не оказывает существенного влияния на течение в таких каналах, но для более глубоких шахт стратификация может стать существенной.

Поэтому вторая рассматриваемая характерная модель – это модель течения идеальной нестратифицированной жидкости в приближении Буссинеска, описываемая уравнением Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = \psi_1, \quad (1.12)$$

где $\psi_1(x, y)$ – заданная функция, $k = \frac{a}{Fr^2}$, $a = \frac{\partial \rho}{\partial y}$, Fr – плотностное число Фруда. В данной модели $a = \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$, и тем самым $k = 0$, жидкость является нестратифицированной, а ее течение – безвихревым.

Третья – модель течения идеальной стратифицированной жидкости, которая описывается уравнением (1.12) при значении коэффициента стратификации $k \neq 0$.

Для второй и третьей модели течения к уравнению (1.12) добавляются граничные условия (1.5), где $\tilde{\psi}(x, y)$ – вычисляемая на границе Γ функция, для которой выполняется $u = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}$; $u(x, y), v(x, y)$ – компоненты вектора скорости, известные из (1.11).

Для моделирования распространения примесей используется безразмерное уравнение переноса (1.8), при $v_s < 0$, для которого граничные и начальные условия выбираются так:

$$\text{при } t = 0 \quad C = C_0(x, y);$$

$$\text{на выходной границе } \Gamma_1 \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0;$$

$$\text{на входных границах } \bigcup_{i=2}^4 \Gamma_i \quad C = 0;$$

$$\text{на непроницаемых вертикальных границах } \bigcup_{i=7}^{12} \Gamma_i \quad \frac{\partial C}{\partial n} = 0; \quad (1.13)$$

$$\text{на непроницаемой верхней границе } \Gamma_5 \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha_1 C;$$

$$\text{на непроницаемой нижней границе } \Gamma_6 \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha_2 C.$$

Здесь $C_0(t, x, y)$ – известная функции, определенная на границе Γ , C – концентрация поднимающейся примеси, $v_s < 0$ – скорость подъема примеси, характеризует массу всплывающих частиц, D – коэффициент диффузии, α_1 – коэффициент, определяющий интенсивность аккумуляции примеси у

верхней кровли, α_2 – коэффициент, определяющий интенсивность отрыва примеси от дна.

Накопление всплывшей примеси происходит в тонком слое у верхней кровли, который называют активным слоем. Увеличение концентрации всплывшей примеси в активном слое физически возможно до некоторого предела, по достижении которого толщина активного слоя увеличивается. Особенностью в данном случае является то, что активный слой из всплывшей примеси может размываться потоком жидкости.

Образование слоя из всплывшей примеси моделируется за счет передвижение внутрь области верхней границы области решения для расчета концентрации при неизменных границах для скорости. Передвижение верхней границы внутрь области решения для C определяется исходя из достижения концентрацией примеси в активном слое порогового значения $C^* < 1$. Граничное условие для концентрации будет переноситься на измененную границу.

С учетом всех вышеприведенных рассуждений, математическая модель «самоизлива шахтных вод» будет состоять из уравнений, описывающих течение жидкости, и безразмерного уравнения переноса примеси (1.8) при ($v_s < 0$) с начальными и граничными условиями (1.13). В зависимости от выбранной модели, течение жидкости описывается либо безразмерной системой уравнений Навье-Стокса (1.3.1 - 1.3.2) с соответствующими начальными и граничными условиями для компонентов вектора скорости – (1.11), для функции тока – (1.5), для вихря – (1.6); либо уравнением Гельмгольца (1.12) со стратификацией или без и граничными и начальными условиями (1.5), (1.11). Моделирование накопление слоя из всплывшей примеси обеспечивается за счет изменения верхней границы для расчеты примеси, при неизменной области решения для расчета течения.

1.4. Выводы к первой главе

Для исследования процессов очистки жидких промышленных стоков аглофабрики от нерастворенных примесей в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт была предложена математическая модель. В модели учитываются основные характерные особенности отработанной горной выработки и очищаемых шламовых стоков; малые скорости течения внутри шахты; объем, чистота и характер фильтрации поступающих в выработанное пространство грунтовых вод; фракционный состав взвешенных примесей; характер накопления и слеживания осадка. Модель, состоит из системы уравнений Навье-Стокса и уравнения переноса примеси, с возможностью изменения области решения из-за слеживания осадка.

Выполнена математическая постановка задач о распространении всплывающих и оседающих примесей при «самоизливе шахтных вод». С учетом основных характерных особенностей физики течения, выбраны три модели: вязкая, идеальная стратифицированная и идеальная нестратифицированная жидкость. Для определения распространения примесей в найденном потоке решается уравнение переноса примеси, при этом учитывается накопление слоя из всплывших примесей.

Глава 2. РАЗНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

В данной главе рассматриваются алгоритмы численного решения поставленных дифференциальных задач. Для решения полученных систем дифференциальных уравнений в частных производных предлагается использовать эффективные, сходящиеся численные методы. Рассматриваются численные алгоритмы изменения области решения для моделирования слеживания осадка и накопления слоя из всплывшей примеси. Приводятся результаты численных экспериментов тестовых модельных задач на последовательности сеток с измельчением шага по времени и по пространству.

2.1. Постановка разностных задач

Одной из центральных проблем при численном решении уравнений в частных производных является построение разностных сеток. Введем в области решения $G^{(2)}$ разностную согласованную с границей $\Gamma^{(2)}$ прямоугольную сетку:

$$G_h^{(2)} = \{(x_i, y_j), x_i = x_{i-1} + h_{x_i}, i \in I, y_j = y_{j-1} + h_{y_j}, j \in J\},$$

где h_{x_i} – шаг разбиения по x , h_{y_j} – шаг разбиения по y , I, J – множество индексов. Так как рассматриваемая модель является эволюционной, то также вводим разбиение временного интервала, в котором ищется решение, $\{t_k = k \cdot \tau \in [0, T], k \in K\}$, где t_k – момент времени, в котором ищется решение, τ – шаг разбиения по времени, K – множество индексов.

Для аппроксимации конвективных членов в уравнениях переноса используются противопоточные разности первого порядка, т.к. для решения,

полученного для концентрации примеси, очень важно свойство монотонности. Применение центральных разностей может привести к тому, что значения поля концентрации в соседних узлах сетки будут сильно различаться или же значение концентрации в отдельных точках превысит 100%, что физически невозможно. Вторые производные аппроксимируются с первым порядком в случае неравномерной сетки. Порядок аппроксимации увеличивается до второго, при переходе к равномерной сетке. Все производные по времени аппроксимируются односторонними разностями с первым порядком по τ .

Тогда разностные уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega_{ij}^{k+1} - \omega_{ij}^k}{\tau} + \left(\frac{u_{ij}^k + |u_{ij}^k|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^{k+1} - \omega_{i-1j}^{k+1}}{h_{x_{i-1}}} + \left(\frac{u_{ij}^k - |u_{ij}^k|}{2} \right) \frac{\omega_{i+1j}^{k+1} - \omega_{ij}^{k+1}}{h_{x_i}} + \\
& + \left(\frac{v_{ij}^k + |v_{ij}^k|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^{k+1} - \omega_{ij-1}^{k+1}}{h_{y_{j-1}}} + \left(\frac{v_{ij}^k - |v_{ij}^k|}{2} \right) \frac{\omega_{ij+1}^{k+1} - \omega_{ij}^{k+1}}{h_{y_j}} = \\
& = \frac{1}{Re} \frac{\frac{\omega_{i+1j}^{k+1} - \omega_{ij}^{k+1}}{h_{x_i}} - \frac{\omega_{ij}^{k+1} - \omega_{i-1j}^{k+1}}{h_{x_{i-1}}}}{\frac{h_{x_i} + h_{x_{i-1}}}{2}} + \frac{1}{Re} \frac{\frac{\omega_{ij+1}^{k+1} - \omega_{ij}^{k+1}}{h_{y_j}} - \frac{\omega_{ij}^{k+1} - \omega_{ij-1}^{k+1}}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}} \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{\psi_{i+1j}^{k+1} - \psi_{ij}^{k+1}}{h_{x_i}} - \frac{\psi_{ij}^{k+1} - \psi_{i-1j}^{k+1}}{h_{x_{i-1}}}}{\frac{h_{x_i} + h_{x_{i-1}}}{2}} + \frac{\frac{\psi_{ij+1}^{k+1} - \psi_{ij}^{k+1}}{h_{y_j}} - \frac{\psi_{ij}^{k+1} - \psi_{ij-1}^{k+1}}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}} = \omega_{ij}^{k+1} \quad (2.2)$$

$$\frac{\frac{\psi_{i+1j} - \psi_{ij}}{h_{x_i}} - \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-1j}}{h_{x_{i-1}}}}{\frac{h_{x_i} + h_{x_{i-1}}}{2}} + \frac{\frac{\psi_{ij+1} - \psi_{ij}}{h_{y_j}} - \frac{\psi_{ij} - \psi_{ij-1}}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}} + k^2 \psi_{ij} = \psi_{1ij} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{ij}^{k+1} - C_{ij}^k}{\tau} + \left(\frac{u_{ij}^k + |u_{ij}^k|}{2} \right) \frac{C_{ij}^{k+1} - C_{i-1j}^{k+1}}{h_{x_{i-1}}} + \left(\frac{u_{ij}^k - |u_{ij}^k|}{2} \right) \frac{C_{i+1j}^{k+1} - C_{ij}^{k+1}}{h_{x_i}} + \\
& + \left(\frac{v_{ij}^k - v_s + |v_{ij}^k - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij}^{k+1} - C_{ij-1}^{k+1}}{h_{y_{j-1}}} + \left(\frac{v_{ij}^k - v_s - |v_{ij}^k - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij+1}^{k+1} - C_{ij}^{k+1}}{h_{y_j}} = \\
& = D \frac{\frac{C_{i+1j}^{k+1} - C_{ij}^{k+1}}{h_{x_i}} - \frac{C_{ij}^{k+1} - C_{i-1j}^{k+1}}{h_{x_{i-1}}}}{\frac{h_{x_i} + h_{x_{i-1}}}{2}} + D \frac{\frac{C_{ij+1}^{k+1} - C_{ij}^{k+1}}{h_{y_j}} - \frac{C_{ij}^{k+1} - C_{ij-1}^{k+1}}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}} \quad (2.4)
\end{aligned}$$

В приведенных выше формулах разностные схемы (2.1) и (2.2) аппроксимируют систему уравнений Навье – Стокса (1.3.1) – (1.3.2); разностная схема (2.3) аппроксимирует уравнение Гельмгольца (1.12); разностная схема (2.4) аппроксимирует уравнение переноса примеси (1.8). В граничных и начальных условиях для компонентов вектора скорости (1.4) или (1.11), функции тока и вихря (1.5) – (1.6) и концентрации примеси (1.10) или (1.13) первые производные аппроксимируются с первым порядком внутри области.

В работе предлагается следующий алгоритм решения поставленных задач:

1. Выбирается область решения, моделирующая исследуемый объект (см. Рисунок 1.3, Рисунок 1.4);
2. Область решения покрывается разностной прямоугольной согласованной с границей сеткой.
3. Вводится разбиение по времени.
4. Выбирается модель жидкости: вязкой, идеальной, стратифицированной или идеальной нестратифицированной.
5. Выбирается фракционный состав примеси. Для каждой фракции примеси задается свой набор характеристик.
6. Исходя из физической постановки задачи в области решения, ставятся начальные и краевые условия для компонентов вектора скорости (1.4) или (1.11).

7. В случае вязкой жидкости, на каждом шаге по времени решается система уравнений Навье - Стокса (1.3.1) – (1.3.2) с дополнительными начальными и граничными условиями (1.5) и (1.6) и находятся вихрь и функция тока. Если рассматривается идеальная жидкость, сначала выбирается модель со стратификацией или без нее, решается уравнение (1.12) с условием (1.5) и находится функция тока, которая не пересчитывается на каждом слое по времени.
8. Из определения функции тока (1.1) восстанавливаются компоненты вектора скорости. Определяется, какое течение развивается в области решения.
9. Ищется распространение примеси в найденном потоке жидкости на текущем слое по времени. Для каждой фракции примеси решается свое уравнение переноса (1.8) с начальными и граничными условиями (1.10) или (1.13).
10. В зависимости от полученного распределения примеси по области решения проводится проверка, произошло ли слеживание осадка или образовался ли слой из всплывшей примеси. Если да, то область решения изменяется соответствующим образом, граничные условия переносятся внутрь области.
11. При необходимости алгоритм повторяется с шестого пункта, для определения искомых величин на новом слое по времени.

2.2. Метод решения уравнений переноса

Уравнение переноса вихря (1.3.1) и уравнение переноса примеси (1.8) являются уравнениями параболического типа. В данной работе для их решения используется абсолютно устойчивая схема стабилизирующих поправок второго порядка по пространственным переменным на

равномерных сетках и первого – для неравномерных, первого порядка по времени [160]. Схема имеет вид:

$$\frac{\omega^{k+\frac{1}{2}} - \omega^k}{\tau} = \Lambda_1 \omega^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 \omega^k, \quad (2.5)$$

$$\frac{\omega^{k+1} - \omega^{k+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 (\omega^{k+1} - \omega^k), \quad (2.5)$$

где Λ_1 и Λ_2 – аппроксимирующие операторы.

Структура схемы такова, что первый дробный шаг дает полную аппроксимацию решаемого дифференциального уравнения, а второй шаг является поправочным, и служит цели улучшения устойчивости.

Автором [160] показано, что схема является сходящейся и абсолютно устойчивой.

Выпишем вид схемы стабилизирующих поправок применительно к уравнениям переноса вихря (1.3.1) и переноса примеси (1.8), соответственно:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{ij}^{n+1/2} - \omega_{ij}^n}{\tau} = \\ & = - \left(\frac{u_{ij}^n + |u_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_{x_{i-1}}} - \left(\frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{h_{x_i}} - \\ & \quad - \left(\frac{v_{ij}^n + |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^n - \omega_{ij-1}^n}{h_{y_{j-1}}} - \left(\frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij}^n}{h_{y_j}} + \\ & + \frac{1}{Re} \frac{\frac{\omega_{i+1j}^{n+1/2} - \omega_{ij}^{n+1/2}}{h_{x_i}} - \frac{\omega_{ij}^{n+1/2} - \omega_{i-1j}^{n+1/2}}{h_{x_{i-1}}}}{\frac{h_{x_i} + h_{x_{i-1}}}{2}} + \frac{1}{Re} \frac{\frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij}^n}{h_{y_j}} - \frac{\omega_{ij}^n - \omega_{ij-1}^n}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+1/2}}{\tau} = \\ & - \left(\frac{v_{ij}^n + |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij-1}^{n+1}}{h_{y_{j-1}}} - \left(\frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij+1}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+1}}{h_{y_j}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{v_{ij}^n + |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^n - \omega_{ij-1}^n}{h_{y_{j-1}}} + \left(\frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij}^n}{h_{y_j}} + \\
& + \frac{1}{Re} \frac{\frac{\omega_{ij+1}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+1}}{h_{y_j}} - \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij-1}^{n+1}}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}} - \frac{1}{Re} \frac{\frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij}^n}{h_{y_j}} - \frac{\omega_{ij}^n - \omega_{ij-1}^n}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}};
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{ij}^{n+1/2} - C_{ij}^n}{\tau} = \\
& = - \left(\frac{u_{ij}^n + |u_{ij}^n|}{2} \right) \frac{C_{ij}^{n+1/2} - C_{i-1j}^{n+1/2}}{h_{x_{i-1}}} - \left(\frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \right) \frac{C_{i+1j}^{n+1/2} - C_{ij}^{n+1/2}}{h_{x_i}} - \\
& - \left(\frac{v_{ij}^n - v_s + |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij}^n - C_{ij-1}^n}{h_{y_{j-1}}} - \left(\frac{v_{ij}^n - v_s - |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij+1}^n - C_{ij}^n}{h_{y_j}} + \\
& + D \frac{\frac{C_{i+1j}^{n+1/2} - C_{ij}^{n+1/2}}{h_{x_i}} - \frac{C_{ij}^{n+1/2} - C_{i-1j}^{n+1/2}}{h_{x_{i-1}}}}{\frac{h_{x_i} + h_{x_{i-1}}}{2}} + D \frac{\frac{C_{ij+1}^n - C_{ij}^n}{h_{y_j}} - \frac{C_{ij}^n - C_{ij-1}^n}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij}^{n+1/2}}{\tau} = \\
& - \left(\frac{v_{ij}^n - v_s + |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij-1}^{n+1}}{h_{y_{j-1}}} - \left(\frac{v_{ij}^n - v_s - |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij+1}^{n+1} - C_{ij}^{n+1}}{h_{y_j}} + \\
& + \left(\frac{v_{ij}^n - v_s + |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij}^n - C_{ij-1}^n}{h_{y_{j-1}}} + \left(\frac{v_{ij}^n - v_s - |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij+1}^n - C_{ij}^n}{h_{y_j}} + \\
& + D \frac{\frac{C_{ij+1}^{n+1} - C_{ij}^{n+1}}{h_{y_j}} - \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij-1}^{n+1}}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}} - D \frac{\frac{C_{ij+1}^n - C_{ij}^n}{h_{y_j}} - \frac{C_{ij}^n - C_{ij-1}^n}{h_{y_{j-1}}}}{\frac{h_{y_j} + h_{y_{j-1}}}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

В случае равномерных сеток, вид схемы упрощается:

$$\frac{\omega_{ij}^{n+1/2} - \omega_{ij}^n}{\tau} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\frac{u_{ij}^n + |u_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - \left(\frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - \\
&\quad - \left(\frac{v_{ij}^n + |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^n - \omega_{ij-1}^n}{h_y} - \left(\frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij}^n}{h_y} + \\
&\quad + \frac{1}{Re} \frac{\omega_{i+1j}^{n+1/2} - 2\omega_{ij}^{n+1/2} + \omega_{i-1j}^{n+1/2}}{h_x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\omega_{ij+1}^n - 2\omega_{ij}^n + \omega_{ij-1}^n}{h_y^2};
\end{aligned}$$

(2.19)

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+1/2}}{\tau} = \\
&\quad - \left(\frac{v_{ij}^n + |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij-1}^{n+1}}{h_y} - \left(\frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij+1}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+1}}{h_y} + \\
&\quad + \left(\frac{v_{ij}^n + |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij}^n - \omega_{ij-1}^n}{h_y} + \left(\frac{v_{ij}^n - |v_{ij}^n|}{2} \right) \frac{\omega_{ij+1}^n - \omega_{ij}^n}{h_y} + \\
&\quad + \frac{1}{Re} \frac{\omega_{ij+1}^{n+1} - 2\omega_{ij}^{n+1} + \omega_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2} - \frac{1}{Re} \frac{\omega_{ij+1}^n - 2\omega_{ij}^n + \omega_{ij-1}^n}{h_y^2};
\end{aligned}$$

(2.20)

$$\begin{aligned}
&\frac{C_{ij}^{n+1/2} - C_{ij}^n}{\tau} = \\
&\quad = - \left(\frac{u_{ij}^n + |u_{ij}^n|}{2} \right) \frac{C_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - C_{i-1j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - \left(\frac{u_{ij}^n - |u_{ij}^n|}{2} \right) \frac{C_{i+1j}^{n+\frac{1}{2}} - C_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - \\
&\quad - \left(\frac{v_{ij}^n - v_s + |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij}^n - C_{ij-1}^n}{h_y} - \left(\frac{v_{ij}^n - v_s - |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij+1}^n - C_{ij}^n}{h_y} + \\
&\quad + D \frac{C_{i+1j}^{n+1/2} - 2C_{ij}^{n+1/2} + C_{i-1j}^{n+1/2}}{h_x^2} + D \frac{C_{ij+1}^n - 2C_{ij}^n + C_{ij-1}^n}{h_y^2};
\end{aligned}$$

(2.21)

$$\frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij}^{n+1/2}}{\tau} =$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{v_{ij}^n - v_s + |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij-1}^{n+1}}{h_y} - \left(\frac{v_{ij}^n - v_s - |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij+1}^{n+1} - C_{ij}^{n+1}}{h_y} + \\
& + \left(\frac{v_{ij}^n - v_s + |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij}^n - C_{ij-1}^n}{h_y} + \left(\frac{v_{ij}^n - v_s - |v_{ij}^n - v_s|}{2} \right) \frac{C_{ij+1}^n - C_{ij}^n}{h_y} + \\
& + D \frac{C_{ij+1}^{n+1} - 2C_{ij}^{n+1} + C_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2} - D \frac{C_{ij+1}^n - 2C_{ij}^n + C_{ij-1}^n}{h_y^2}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Системы уравнений (2.15) – (2.22) решаются обычным трёхточечным методом прогонки [128]. Соотношение между шагом по времени τ и шагами по пространству h_{xi}, h_{yj} выбирается таким образом, чтобы выполнялись достаточные условия корректности метода прогонки [81].

2.3. Метод решения уравнения Пуассона

Дифференциальное уравнение Пуассона (1.3.2) и уравнение Гельмгольца (1.12) являются уравнениями эллиптического типа. Полученные после их аппроксимации, разностные схемы (2.2) и (2.3) можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$Au = f, \tag{2.35}$$

где A – линейный оператор, определенный в вещественном m -мерном гильбертовом пространстве H_m со скалярным произведением (u, v) и нормой $\|u\| = (u, u)^{1/2}$, $u, v \in H_m$, где m зависит от краевой задачи и количества узлов разностной сетки в области решения и определяется количеством неизвестных, f – заданный вектор, u – вектор искомой функции.

Часто приходится решать СЛАУ с почти особенной матрицей оператора. Применение многих известных итерационных методов в данном

случае проблематично, из-за проблем с численной реализацией. Преодолеть эти трудности помогает использование методов неполной аппроксимации.

Для решения системы (2.35) будем рассматривать схему неполной аппроксимации:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n - \tau_{n+1}B(Au^n - f); \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} - \alpha_{n+1}z^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где B – неособенная квадратная матрица, $z^m \in H_m$ – произвольный вектор, τ_{n+1}, α_{n+1} – итерационные параметры, u^0 – произвольный вектор начальных данных. Пусть D – самосопряженный, положительно определенный оператор, действующий в H_m . Обозначим $v^n = D^{\frac{1}{2}}(u^n - u)$, $C = D^{1/2}BAD^{-1/2}$.

Параметр τ_{n+1} вычисляется по формуле:

$$\tau_{n+1} = \frac{(Cv^n, v^n)}{\|Cv^n\|^2}. \quad (2.37)$$

Параметр α_{n+1} может быть как константой, так и матрицей. Пусть $\alpha_{n+1} = const$, а вектор z^n выбран так, что $D^{1/2}z^n \neq 0$, тогда параметр α_{n+1} ищется в виде:

$$\alpha_{n+1} = \frac{(v^{n+1/2}, D^{1/2}z^n)}{\|D^{1/2}z^n\|^2}. \quad (2.38)$$

Параметр α_{n+1} можно выбирать в виде диагональной матрицы размерности m .

Пусть z^n – вектор, состоящий из элементов, равных единице. Тогда произведение $\alpha_{n+1}z^n$ примет вид:

$$\alpha_{n+1}z^n = \sum_{i=1}^m \alpha_{n+1}^i z_i^n, \quad (2.39)$$

где α_{n+1}^i – элемент главной диагонали матрицы α_{n+1} в i – ой строке, z_i^n – вектор с ненулевой i – ой компонентой.

Выпишем условие для нахождения элементов матрицы $\{\alpha_{n+1}^i\}$:

$$\begin{pmatrix} (D^{1/2}z_1^n, D^{1/2}z_1^n) & (D^{1/2}z_1^n, D^{1/2}z_2^n) & \dots & (D^{1/2}z_1^n, D^{1/2}z_m^n) \\ (D^{1/2}z_2^n, D^{1/2}z_1^n) & (D^{1/2}z_2^n, D^{1/2}z_2^n) & \dots & (D^{1/2}z_2^n, D^{1/2}z_m^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (D^{1/2}z_m^n, D^{1/2}z_1^n) & (D^{1/2}z_m^n, D^{1/2}z_2^n) & \dots & (D^{1/2}z_m^n, D^{1/2}z_m^n) \end{pmatrix} \times \\
\times \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}^1 \\ \alpha_{n+1}^2 \\ \dots \\ \alpha_{n+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D^{1/2}z_1^n, v^{n+1/2}) \\ (D^{1/2}z_2^n, v^{n+1/2}) \\ \dots \\ (D^{1/2}z_m^n, v^{n+1/2}) \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Если после решения системы (2.40) получено точное решение α_{n+1} , то схема (2.36) сойдется за одну итерацию.

Решение полученной системы (2.40) может оказаться непростой задачей, поэтому часто прибегают к ее упрощениям. Например, можно прибегнуть к так называемой покомпонентной оптимизации, которая подробно описана в [70].

Также для упрощения нахождения решения системы (2.40) можно особым образом подбирать систему векторов $\{z_i^n\}$. Пусть z^n – вектор, все элементы которого равны единице. Проведем ортогонализацию векторов z^n относительно скалярного произведения $(D^{1/2}z_i^n, D^{1/2}z_j^n)$ и получим новый вектор z^{*n} :

$$\{z_i^n\} :/ (D^{\frac{1}{2}}z_i^{*n}, D^{\frac{1}{2}}z_j^{*n}) = 0 \Leftrightarrow i \neq j. \quad (2.41)$$

Тогда СЛАУ для нахождения оптимальных параметров α_{n+1} примет вид:

$$\begin{pmatrix} (D^{1/2}z_1^{*n}, D^{1/2}z_1^{*n}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (D^{1/2}z_2^{*n}, D^{1/2}z_2^{*n}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (D^{1/2}z_m^{*n}, D^{1/2}z_m^{*n}) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}^1 \\ \alpha_{n+1}^2 \\ \dots \\ \alpha_{n+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D^{1/2} z_1^{*n}, v^{n+1/2}) \\ (D^{1/2} z_2^{*n}, v^{n+1/2}) \\ \dots \\ (D^{1/2} z_m^{*n}, v^{n+1/2}) \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

и

$$\alpha_{n+1}^i = \frac{(D^{1/2} z_i^{*n}, v^{n+1/2})}{\|D^{1/2} z_i^{*n}\|^2}. \quad (2.43)$$

Процедура нахождения системы векторов z^{*n} может быть затратной по времени и машинным ресурсам, что становится значительным с увеличением размерности системы m . Однако, если исходная система векторов z^n остается неизменной на протяжении всего счета, то данную процедуру приходится проводить лишь один раз, до счета. Уже найденный вектор можно использовать для расчетов с другими параметрами (например, при изменении вязкости, скорости входного потока и др.), но с той же системой векторов $\{z_i^n\}$. Если во время счета система векторов $\{z_i^n\}$ изменяется (например, из-за изменения области решения или граничных условий), то лучше воспользоваться покомпонентной оптимизацией параметров α_{n+1} или использовать $\alpha_{n+1} = const$.

В данной работе будем использовать метод минимальных невязок неполной аппроксимации. Пусть $D = A^*A$, $B = E$ и невязка вычисляется по формуле $r^n = Au^n - f$, тогда минимизируя норму $\|r^n\|$, получим:

$$\alpha_{n+1} = \frac{(r^{n+\frac{1}{2}}, Az^n)}{\|Az^n\|^2}, \quad (2.44)$$

и СЛАУ для нахождения α_{n+1} если α_{n+1} – матрица:

$$\begin{pmatrix} (Az_1^n, Az_1^n) & (Az_1^n, Az_2^n) & \cdots & (Az_1^n, Az_m^n) \\ (Az_2^n, Az_1^n) & (Az_2^n, Az_2^n) & \cdots & (Az_2^n, Az_m^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (Az_m^n, Az_1^n) & (Az_m^n, Az_2^n) & \cdots & (Az_m^n, Az_m^n) \end{pmatrix} \times \\
\times \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}^1 \\ \alpha_{n+1}^2 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Az_1^n, r^n) \\ (Az_2^n, r^n) \\ \vdots \\ (Az_m^n, r^n) \end{pmatrix}.$$

(2.45)

Параметр τ_{n+1} находится из условия:

$$\tau_{n+1} = \frac{(r^n, Au^n)}{\|Au^n\|^2}. \quad (2.46)$$

Схема минимальных невязок неполной аппроксимации является сходящейся [70].

Таким образом, алгоритм решения СЛАУ методом минимальных невязок неполной аппроксимации принимает вид:

1. Имеем известное значение функции на прошлом шаге по времени u^n ;
2. Вычисляем невязку $r^n = Au^n - f$;
3. Находим итерационный параметр τ_{n+1} по формуле (2.46) из условия минимизации нормы невязки $\|r^{n+1/2}\|$;
4. После применения первого шага итерационной схемы (2.36) получаем $u^{n+1/2}$;
5. Находим значение параметра α_{n+1} по формулам (2.44) или (2.45);
6. Находим значение искомой функции на текущем шаге по времени u^{n+1} в соответствии со вторым шагом схемы (2.36);
7. Продолжаем итерационный процесс (2) – (6) до тех пор, пока не достигнем нужной точности значения нормы $\|r^{n+1/2}\| < \varepsilon$, где ε – заданная точность.

2.4. Численные алгоритмы изменения границы области решения

Для всех численных расчетов шаг по пространству должен выбираться таким образом, чтобы при дальнейшем его измельчении толщина активного слоя не изменялась. После выбора шага по пространству, отвечающего толщине активного слоя, слеживание осадка и накопление слоя из всплывшей примеси моделируется изменением границы области решения.

Численный алгоритм изменения границы области решения для моделирования слеживания осадка принимает вид:

1. В узлах сетки у дна проверяется выполнение условия вида:
 $C \geq C^*$ и $t \geq T^*$.
2. Граница области решения переносится внутрь области в ближайшие по вертикали расчетные узлы сетки, в которых это условие не выполняется.
3. Граничные условия на передвинутую границу области решения переносятся без изменений с прошлой границы.

Численный алгоритм изменения границы области решения для моделирования образования слоя всплывшей примеси принимает вид:

1. В узлах сетки у верхней границы проверяется выполнение условия вида: $C \geq C^*$. Если условие выполняется, то дальнейшее накопление примеси будет проходить в слоях с меньшей концентрацией примеси.
2. Граница области решения для примеси переносится внутрь области в ближайшие по вертикали расчетные узлы, в которых концентрация не превышает порогового значения C^* .
3. Граничное условие для примеси переносится с прошлого положения границы на текущее без изменений. А компоненты вектора скорости пересчитываются на каждом шаге по времени в исходной области решения.

2.5. Тестовые расчеты

Рассмотрим численные эксперименты более простых тестовых задач с измельчением шага по времени и пространству. Во всех тестовых задачах область решения покрывается равномерной разностной сеткой с шагом $h_x = h_y = h$ по пространству и шагом τ по времени.

Для исследования процесса оседания примеси и слеживания осадка первой рассмотрим задачу об оседании примеси в прямоугольном канале с непроницаемыми стенками.

Задана прямоугольная область решения размера a на b с непроницаемыми неподвижными стенками (см. Рисунок 2.1.a). Жидкость, полностью заполняющая область решения, неподвижна $u = 0, v = 0$. В начальный момент времени область решения равномерно заполнена примесью концентрации C_1 до уровня H (см. Рисунок 2.1.b). Далее под действием скорости оседания и диффузии примесь распространяется по области решения, у дна копится и слеживается осадок.

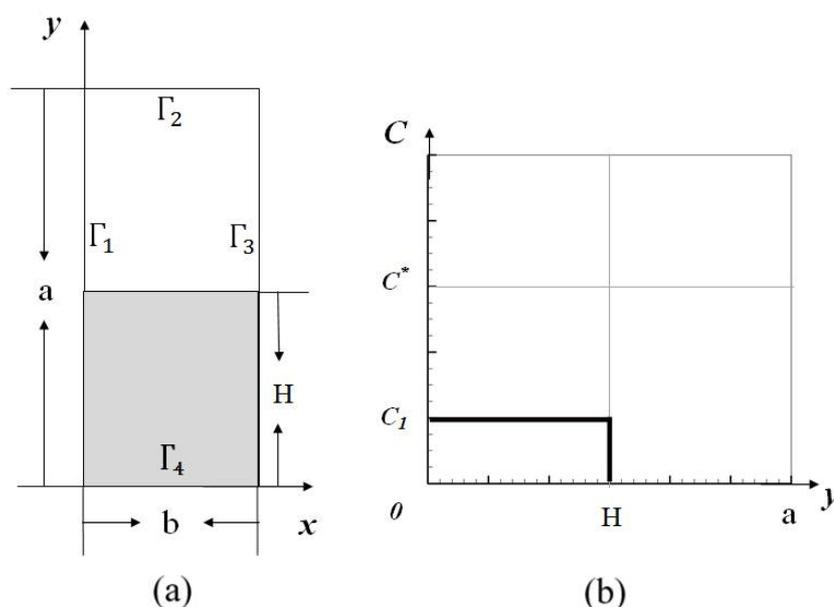


Рисунок 2.1 Задача о распространении примеси в прямоугольном канале с непроницаемыми стенками, где (a) область решения; (b) начальное распределение примеси по высоте области решения

Для определения распространения примеси решается уравнение (1.8) с начальными и граничными условиями вида:

$$\text{при } t = 0 \quad C = C_1(x, y);$$

$$\text{на границах } \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_3 \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_2 \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_4 \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha C + \beta.$$

Область решения покрывается равномерной разностной сеткой с шагом $h_x = h_y = h$ по пространству и шагом τ по времени.

Выбирались следующие характеристики области решения и примеси: область решения высоты $a = 3$ и ширины $b = 1$; высота исходного столба примеси $H = 1.5$; функция, определяющая начальное распределение концентрации примеси принимает значение $C_1(x, y) = 0.2$, если $y \leq H$ и $C_1(x, y) = 0$, в противном случае; скорость оседания примеси под действием силы тяжести $v_s = 1.0$; коэффициент диффузии $D = 0.001$; интенсивность накопления осадка $\alpha = -2$; интенсивность размыва примеси у дна $\beta = 0$; пороговое значение концентрации $C^* = 0.6$, при котором выпавшая в осадок примесь слежится, по истечении порогового времени оседания $T^* = 10$.

Рассмотрим полученное численное решение для шага по времени $\tau = 0.01$ и $h = 0.05$ (см. Рисунок 2.2). Из-за воздействия силы тяжести с течением времени основная часть примеси оседает на дно (см. Рисунок 2.2.с). А из-за воздействия диффузии в верхней части области решения повышается фоновая концентрация. К моменту времени $t = 1$ концентрация примеси у дна превышает пороговое значение (Рисунок 2.3.b), что приводит к слеживанию осадка в дальнейшем (Рисунок 2.2.d). Из-за того, что осадок слеживается только по истечении порогового времени, концентрация у дна может превышать пороговое значение (Рисунок 2.3.с). На момент времени $t = 5$ происходит окончательное расслоение примеси. У дна накапливается

осадок, однако его концентрации недостаточно для дальнейшего слеживания (Рисунок 2.2.f).

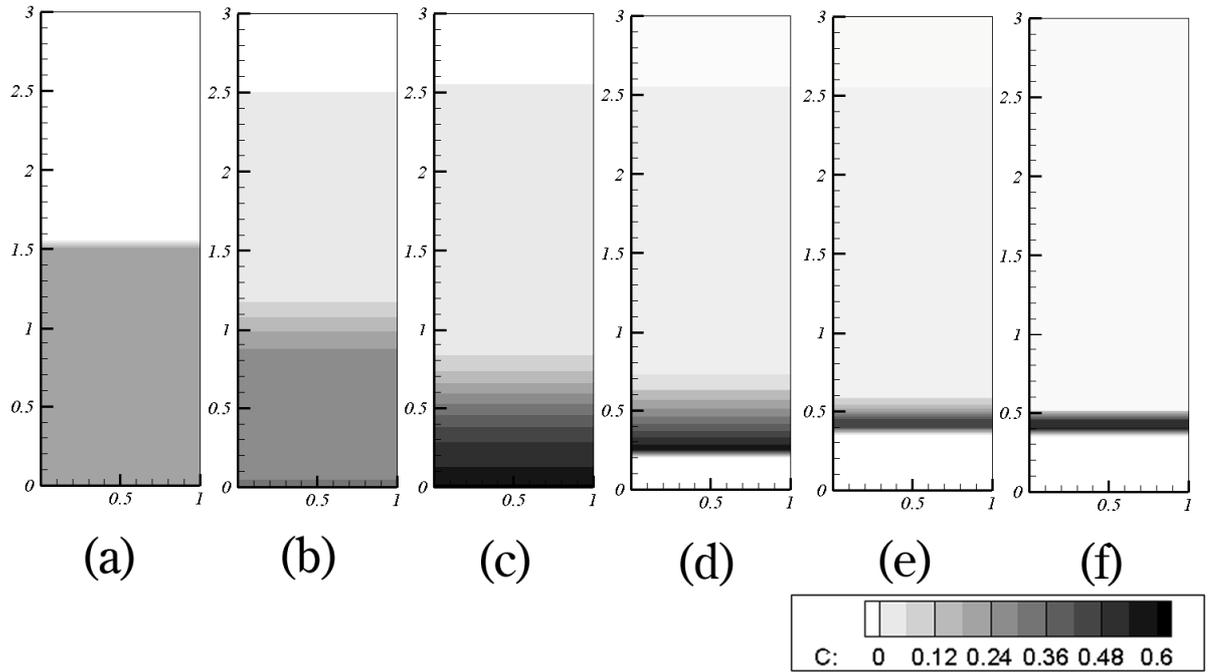


Рисунок 2.2 Распространение примеси в прямоугольном канале с непроницаемыми стенками по времени, где (a) $t = 0$; (b) $t = 0.5$; (c) $t = 1$; (d) $t = 1.2$; (e) $t = 2.5$; (f) $t = 5$

Для данной тестовой задачи проводились серии расчетов с одним и тем же шагом по времени $\tau = 0.01$ и с измельчением шага по пространству, со значениями: $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.025$, $h_4 = 0.01$, $h_5 = 0.005$.

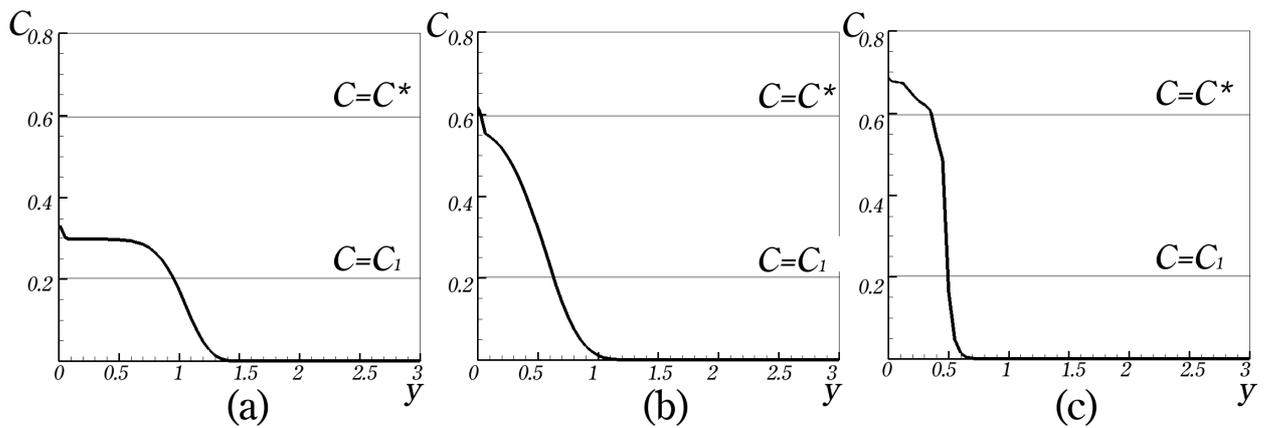


Рисунок 2.3 Изменение концентрации примеси по высоте каверны при $x = 0.5$ в моменты времени (a) $t = 0.5$; (b) $t = 1$; (c) $t = 5$

Введем обозначения: x_i^q и y_j^q - координаты разностной сетки, определенные для шага h_q , где $x_i^q = i * h_q$, $i \in I$; $y_j^q = j * h_q$, $j \in J$; $q \in Q$; $C_{ij}^q = C(t, x_i^q, y_j^q)$ - значение концентрации примеси в узлах сетки (x_i^q, y_j^q) , полученное на момент времени t . Для полученных результатов вычислялась норма разности решений, полученных с измельчением шага по пространству, по формуле:

$$\|C^q - C^{q+1}\| = \max_{i \in I, j \in J} |C_{ij}^q - C_{ij}^{q+1}|; \quad q \in Q.$$

Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по пространству, уменьшаются (Таблица 1). Толщина слоя слежавшегося осадка совпадает с точностью до $O(h)$ (см. Таблица 2).

Таблица 1 Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по пространству при $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.025$, $h_4 = 0.01$, $h_5 = 0.005$

	$\ C^1 - C^2\ $	$\ C^2 - C^3\ $	$\ C^3 - C^4\ $	$\ C^4 - C^5\ $
$t = 0.5$	0.010178	0.0025566	0.0024805	0.001228
$t = 1$	0.011818	0.0045678	0.0043741	0.002088
$t = 5$	0.014578	0.0129881	0.007290	0.006178

Таблица 2 Толщина слоя слежавшегося осадка на момент времени $t = 5$

$h_1 = 0.1$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.025$	$h_4 = 0.01$	$h_5 = 0.005$
0.4	0.4	0.425	0.42	0.415

Также проводились численные эксперименты для данной задачи со значением шага по пространству $h = 0.05$ и измельчением шага по времени со значениями: $\tau_1 = 0.01$; $\tau_2 = 0.005$; $\tau_3 = 0.0025$; $\tau_4 = 0.001$.

Введем обозначения: t_k^p - расчетное время, полученное с шагом τ_p , где $t_k^p = k * \tau_p, k \in K; p \in P$; $C_{tijk}^p = C(t_k^p, x_i, y_j)$ - значение концентрации в узлах сетки (x_i, y_j) , полученное на момент времени t_k^p . Для полученных решений, полученных с измельчением шага по времени, вычисляется норма разностей по формуле:

$$\|C_{\tau}^p - C_{\tau}^{p+1}\| = \max_{i \in I, j \in J, k \in K} |C_{tijk}^p - C_{tijk}^{p+1}|.$$

Таблица 3 Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по времени: $\tau_1 = 0.01$; $\tau_2 = 0.005$; $\tau_3 = 0.0025$; $\tau_4 = 0.001$

	$\ C_{\tau}^1 - C_{\tau}^2\ $	$\ C_{\tau}^2 - C_{\tau}^3\ $	$\ C_{\tau}^3 - C_{\tau}^4\ $
$t = 0.5$	0.016258	0.010303	0.006129
$t = 1$	0.031605	0.011995	0.008014
$t = 5$	0.057864	0.031298	0.010231

Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по времени, уменьшаются (Таблица 3) в отдельные моменты времени. Однако со временем этот показатель растет, так как из-за первого порядка аппроксимации по τ происходит накопление ошибки.

Для исследования процессов распространения примеси в потоке жидкости второй рассматривалась модельная задача протекания в плоском канале с непроницаемыми верхней и нижней границами.

Рассматривается плоский прямоугольный канал размера a на b (см. Рисунок 2.4). Жидкость, полностью заполняет область решения, и является вязкой однородной и несжимаемой. В начальный момент времени жидкость неподвижна $u = 0, v = 0$. На левой границе Γ_1 задается параболический профиль скорости. Верхняя и нижняя границы области решения являются непроницаемыми и неподвижными, а на правой границе задается условие свободного вытекания.

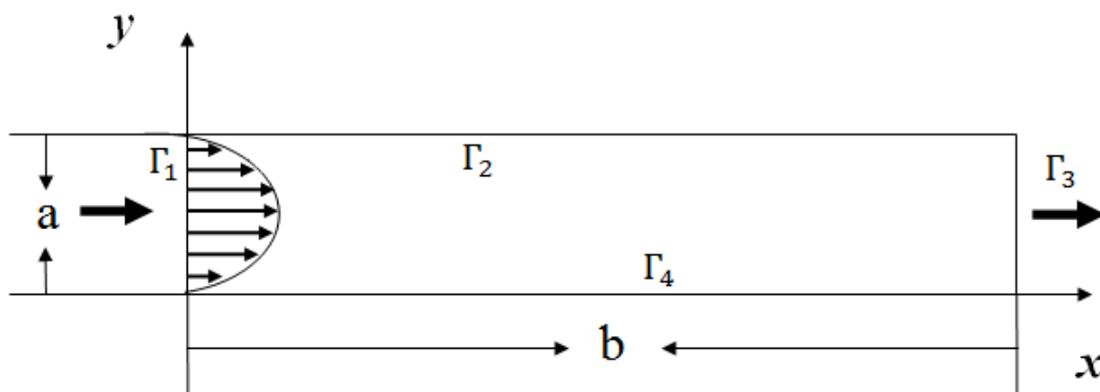


Рисунок 2.4 Область решения задачи протекания в плоском канале с непроницаемыми верхней и нижней границами

Для определения скорости в канале решается система уравнений (1.3.1) - (1.3.2) с начальными и граничными условиями вида:

$$\text{при } t = 0 \quad u = 0 \text{ и } v = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_1 \quad u = \frac{Re}{4b} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{a}{2} \right)^2 \right); \quad v = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_2 \quad u = 0, \quad v = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_3 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_4 \quad u = 0, \quad v = 0.$$

Для определения распространения примеси в найденном потоке жидкости решается уравнение (1.8). Заполняющая канал жидкость в начальный момент времени считается чистой. На входной границе известна концентрация загрязнений, верхняя граница для примеси непроницаема, на выходной границе ставится условие свободного вытекания, а на нижней границе задается закон массообмена между дном и потоком. Таким образом, для концентрации примеси ставятся начальные и граничные условия вида:

$$\text{при } t = 0 \quad C = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_1 \quad C = C_1(x, y);$$

$$\text{на границе } \Gamma_2 \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_3 \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_4 \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha C + \beta.$$

Выбирались следующие характеристики области решения, примеси и течения: область решения высоты $a = 1$ и длины $b = 6$; число Рейнольдса $Re = 1000$; концентрация примеси во входном потоке $C_2(x, y) = 0.05$; скорость оседания примеси под действием силы тяжести $u_s = 0.1$; коэффициент диффузии $D = 0.001$; интенсивность накопления осадка $\alpha = -2$; интенсивность размыва примеси у дна $\beta = 0$; пороговое значение концентрации $C^* = 0.8$, при котором выпавшая в осадок примесь слежится, по истечении порогового времени оседания $T^* = 10$.

Рассмотрим полученное численное решение для шага по времени $\tau = 0.01$ и $h = 0.05$ (см. Рисунок 2.5). В области решения развивается плоскопараллельное течение (см. Рисунок 2.5.a). Линии уровня концентрации изгибаются ближе к нижней границе за счет воздействия скорости оседания и из-за накопления осадка (см. Рисунок 2.5.b- Рисунок 2.5.c). Вдоль нижней границы копится осадок, однако его концентрация не достигает порогового значения, чтобы начать слеживаться (см. Рисунок 2.5.d- Рисунок 2.5.e).

Примесь почти не задерживается в области решения и вымывается течением через границу слева.

Нормы разностей численных решений, полученных для шага по времени $\tau = 0.01$ и со значениями шагов по пространству: $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.025$ уменьшаются (Таблица 4). Аналогичная тенденция наблюдается в серии расчетов с одним и тем же шагом по пространству $h_2 = 0.05$ и измельчением шага по времени при: $\tau_1 = 0.01$; $\tau_2 = 0.00$; $\tau_3 = 0.00$ (Таблица 5).

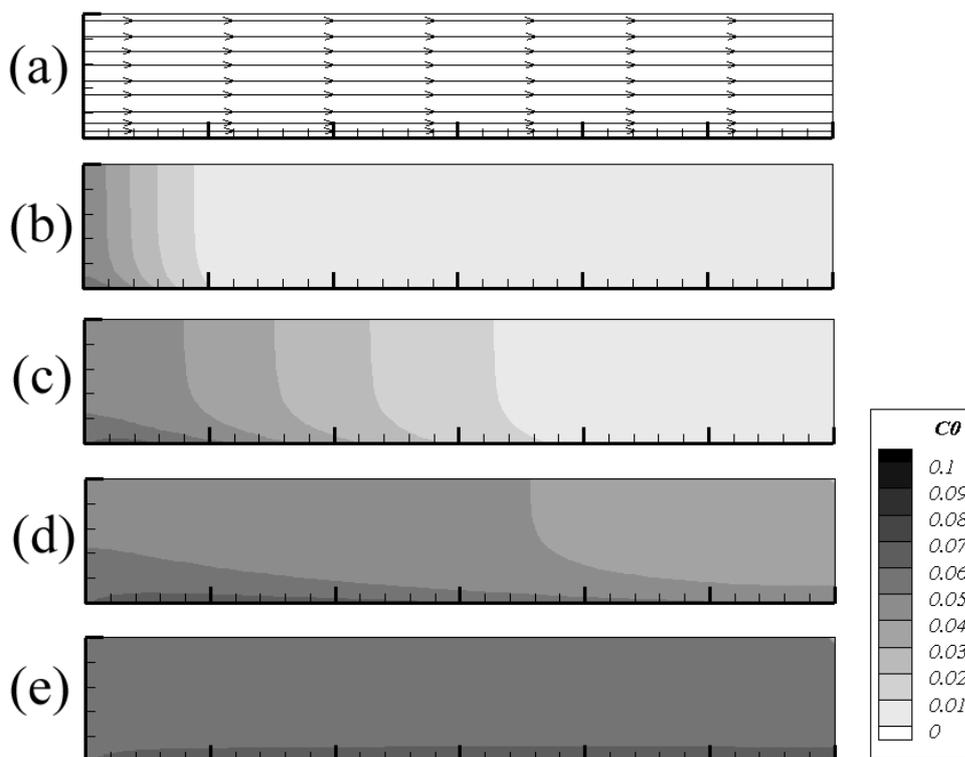


Рисунок 2.5 Распространение примеси в плоском канале, где на (a) течение в области решения; распространение примеси по времени отображено на (b) при $t = 1$; (c) при $t = 10$; (d) при $t = 50$; (e) при $t = 200$

Таблица 4 Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по пространству при $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.025$ для задачи протекания в плоском канале с непроницаемыми верхней и нижней границами

	$\ c^1 - c^2\ $	$\ c^2 - c^3\ $
$t = 1$	0.008204	0.002542
$t = 10$	0.010026	0.004502
$t = 50$	0.012008	0.006524
$t = 100$	0.012568	0.008432

Таблица 5 Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по времени: $\tau_1 = 0.01$; $\tau_2 = 0.005$; $\tau_3 = 0.001$ для задачи протекания в плоском канале с непроницаемыми верхней и нижней границами

	$\ c_\tau^1 - c_\tau^2\ $	$\ c_\tau^2 - c_\tau^3\ $
$t = 1$	0.005325	0.000802
$t = 10$	0.008573	0.001027
$t = 50$	0.010012	0.003564
$t = 100$	0.011602	0.006342

На процесс очистки существенное влияние могут оказать поступающие в выработку грунтовые воды. Поэтому третьей рассматривалась задача протекания в плоском канале с проницаемой верхней границей.

Рассматривается плоский прямоугольный канал размера a на b с проницаемой верхней границей, через которую в область решения равномерно поступает «чистая» жидкость (см. Рисунок 2.6)

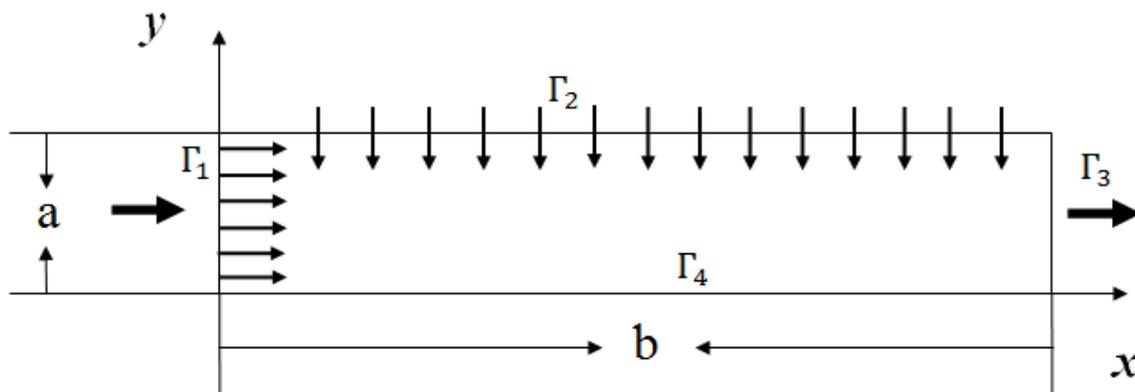


Рисунок 2.6 Область решения для задачи протекания в плоском канале с проницаемой верхней границей

В начальный момент времени жидкость неподвижна $u = 0$, $v = 0$ и в области решения нет примеси. Через левую границу равномерно втекает загрязненная жидкость, а на выходной границе жидкость свободно вытекает.

Для определения скорости в канале решается система уравнений (1.3.1) - (1.3.2) с начальными и граничными условиями вида:

$$\text{при } t = 0 \quad u = 0 \text{ и } v = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_1 \quad u = u_0 = \text{const}; \quad v = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_2 \quad u = 0, \quad v = v_0 = \text{const};$$

$$\text{на границе } \Gamma_3 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_4 \quad u = 0, \quad v = 0.$$

Для определения распространения примеси в канале решается уравнение (1.8). Для концентрации примеси ставятся начальные и граничные условия вида:

$$\text{при } t = 0 \quad C = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_1 \quad C = C_1(x, y);$$

$$\text{на границе } \Gamma_2 \quad C = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_3 \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0;$$

$$\text{на границе } \Gamma_4 \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha C + \beta.$$

Характеристики области решения, примеси и течения выбирались те же, что и в задаче протекания в плоском канале с непроницаемыми верхней и нижней границами, со значением скорости входного потока $u_0 = 1$ и скоростью потока через верхнюю границу $v_0 = -0.5$.

Рассмотрим полученное численное решение для шага по времени $\tau = 0.01$ и $h = 0.05$ (см. Рисунок 2.7). Линии тока в области решения изгибаются по направлению к нижней границе из-за поступления жидкости через верхнюю границу (см. Рисунок 2.7.a).

Хотя слеживания осадка вплоть до момента времени $t = 100$ также не происходит, полученные концентрации примеси у дна превышают значения, полученные для течения в канале с непроницаемой верхней границей (Рисунок 2.7.b - Рисунок 2.7.e). Таким образом, течение через верхнюю границу способствует дополнительному осаждению примеси и может положительно влиять на процесс очистки.

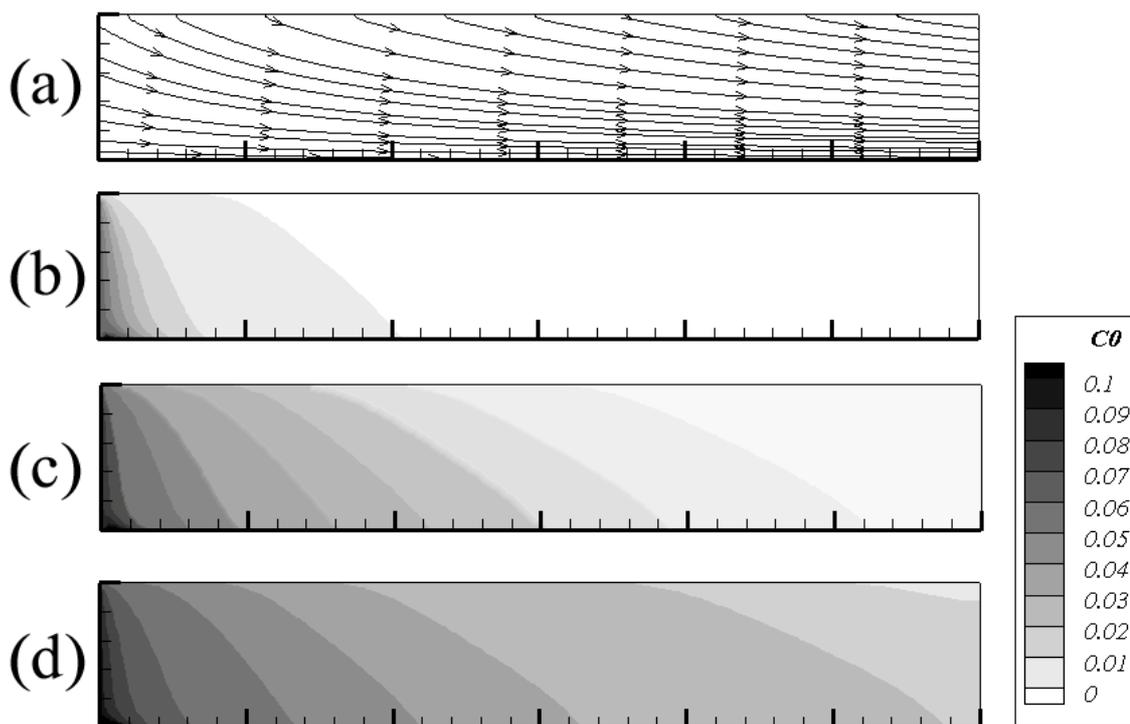


Рисунок 2.7 Распространение примеси в плоском канале с верхней проницаемой границей, где на (a) течение в области решения; распространение примеси по времени отображено на (b) при $t = 1$; (c) при $t = 50$; (d) при $t = 100$.

По аналогии с другими тестовыми задачами, проводились расчеты данной задачи с уменьшением шага по времени и пространству. Нормы разностей решений, полученных с измельчением как шага по пространству (Таблица 6), так и шага по времени (Таблица 7), уменьшаются.

В качестве критерия корректности всех полученных численных результатов тестовых задач дополнительно проверялось выполнение закона сохранения примеси. Во всех представленных результатах выполняется закон сохранения с учетом втекающей, вытекающей и слежавшейся примеси.

Таблица 6 Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по пространству при $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.025$ для задачи протекания в плоском канале с проницаемой верхней границей

	$\ c^1 - c^2\ $	$\ c^2 - c^3\ $
$t = 1$	0.010240	0.006045
$t = 50$	0.014025	0.008377
$t = 100$	0.020542	0.019068

Таблица 7 Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по времени: $\tau_1 = 0.01$; $\tau_2 = 0.005$; $\tau_3 = 0.001$ для задачи протекания в плоском канале с проницаемой верхней границей

	$\ c_\tau^1 - c_\tau^2\ $	$\ c_\tau^2 - c_\tau^3\ $
$t = 1$	0.006001	0.002343
$t = 50$	0.013208	0.004374
$t = 100$	0.016436	0.008501

2.6. Выводы ко второй главе

Во второй главе предложены алгоритмы для численной реализации, описанной выше математической модели изучаемых процессов.

Области решения покрываются конечно-разностной сеткой с шагами h_{xi}, h_{yj} по пространству и шагом τ по времени. Частные производные, входящие в уравнения и граничные условия, аппроксимируются в узлах разностной сетки. Для аппроксимации первых производных внутри области используются разности против потока с первым порядком. Первые производные на границе аппроксимируются внутрь области с первым порядком. Вторые производные аппроксимируются с первым порядком по пространственным переменным на неравномерных сетках и со вторым на равномерных, с использованием центральных разностей.

Для решения уравнений переноса примеси и переноса вихря используется абсолютно устойчивая схема стабилизирующих поправок. Из-за слеживания осадка область решения может значительно меняться, и, как следствие, матрица СЛАУ, полученной после аппроксимации уравнения Пуассона для функции тока, может не обладать такими свойствами как симметричность и положительная определенность. Поэтому для решения полученной системы используется сходящийся метод минимальных невязок неполной аппроксимации с глобальной оптимизацией итерационных параметров, который может применяться для решения СЛАУ даже для особенной или почти особенной матрицей.

Приводятся результаты расчетов для трех тестовых задач: об оседании примеси в прямоугольном канале с непроницаемыми стенками; и две задачи протекания – в плоском прямоугольном канале с непроницаемыми верхней и нижней стенками и в канале с проницаемой верхней границей. Нормы разностей решений, полученных с измельчением шага как по времени так и по пространству для всех тестовых задач уменьшаются.

Глава 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной главе приводятся результаты численного моделирования процессов очистки шламовых стоков в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт. Проводится исследование влияния основных характеристик течения и примеси, фракционного состава примесей на получаемые результаты. Приводятся результаты моделирования оседания и всплытия примесей, накопления и слеживания осадка. Исследуется явление «залпового выброса» и анализируются причины его возникновения и влияющие на него факторы. На основании результатов численного моделирования производится оценка времени «безопасной» работы выработки как очистного сооружения.

3.1. Распространение оседающих примесей

3.1.1. Выбор характеристик задачи

Основной целью моделирования в данной задаче является не только выявление тенденций развития процессов очистки, но и получение оценки времени работы выработки как очистного сооружения. При практическом применении способа очистки в отработанных горных выработках важно не допустить залпового выброса накопленных примесей и оценивать время до его возникновения. Такое время и будем называть временем безопасной работы.

Прежде чем приступать к численному моделированию исследуемых процессов очистки, необходимо определить, как выбирать характеристики,

входящие в решаемые системы безразмерных уравнений, а также установить соответствие между расчетным и реальным временем.

В данной работе для получения безразмерных параметров задачи используются характерные размеры шахты Кольчугинской. Длина основного канала шахты составляет 4.35 км, площадь поперечного сечения шахтного ствола – 13.5 м^2 , а его высота в среднем составляет 3 м. Во всех численных расчетах область решения предполагается полностью обводненной, независимо от ее формы. Заполняющая выработку жидкость считается однородной вязкой несжимаемой, коэффициент кинематической вязкости для которой $\nu = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Объем закачиваемых в ш. Кольчугинскую промышленных стоков составляет 1000 м^3 в сутки, объем же поступающих грунтовых вод примерно в четыре раза больше. Следовательно, скорость закачки жидкости можно оценить в $8.6 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$. Скорость оседания примеси, толщина активного слоя у дна с максимальной концентрацией примеси и интенсивность образования и слеживания осадка, как правило, определяется из натуральных наблюдений в лабораторных условиях. Для вычисления этих характеристик в идеальных условиях разработаны некоторые эмпирические формулы [15]. При наличии бокового течения скорость осаждения частиц взвешенных примесей (частицы угля и породы) разной крупности может изменяться от 10^{-7} до 10^{-1} м/с , а в стоячей воде – от 10^{-5} до 1 м/с [120].

Таблица 8 Значение концентрации взвешенных веществ на входе и выходе из шахты Кольчугинской [74]

в отстойнике ОФ «Комсомолец»	10000 – 50000 мг/л
в сточных водах ш. «Кольчугинская» (Выборка 1)	29,87 мг/л
в сточных водах ш. «Кольчугинская» (Выборка 2)	20,85 мг/л

Концентрация взвешенных веществ в стоках, закачиваемых в ш. Кольчугинскую, изменяется в пределах 10000 – 50000 мг/л

(см. Таблица 8), что соответствует диапазону от 1% до 5% [74]. Как показывают натурные данные (см. Таблица 8), дополнительное отстаивание шламовых стоков в отработанных выработках позволяет уменьшить концентрацию взвешенных веществ в 300 – 1600 раз. Однако даже после такой очистки, концентрация загрязнений в откачиваемой жидкости не может считаться «безопасной». Согласно действующим санитарным правилам и нормам, при сбросе сточных вод содержание взвешенных веществ в контрольном створе не должно увеличиваться по сравнению с естественными условиями более чем на $0.25 - 0.75 \text{ мг/дм}^3$, на поверхности воды не должны обнаруживаться пленки нефтепродуктов, масел, жиров и скопление других примесей [132]. Поэтому откачанные из отработанных выработок стоки необходимо подвергать дополнительной очистке перед сбросом в водные объекты.

Для определения диапазонов изменения параметров задачи и сопоставления расчетного и реального времени выбираются характерные величины. Характерным размером выбирается высота ствола шахты, т.к. для процессов осаждения именно эта величина имеет первостепенное значение. Характерной скоростью берется скорость закачки жидкости в выработку. В данной задаче из-за малых скоростей течения протяженность выбираемой области решения повлияет только на время «заиления» (заполнения слежавшимся осадком). А, так как одной из основных задач моделирования в данной задаче является изучение изменения концентрации вымываемой примеси и тенденций накопления примесей внутри выработки, то процесс заиления в «длинном» канале будем моделировать в «коротком». С учетом сделанных предположений, расчетные характеристики выбираются следующим образом: высота канала $H_2 = 1$, длина области решения $L = 18.4$, скорость жидкости на входной границе $u_0 = 1$, концентрация примеси на входной границе C_1 может изменяться в интервале $[0.01; 0.05]$,

скорость оседания v_s берется из диапазона от 10^{-4} до 10, число Рейнольдса

$$Re = \frac{3 \cdot 8.6 \cdot 10^{-4} \text{ м/с} \cdot \text{м}}{1.6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}} = 1612.5 \approx 1600.$$

С учетом выбранных характерных величин проведем сопоставление расчетного и реального времени. Для того, чтобы получить оценки наихудшего варианта, при котором примесь не оседает внутри шахты и полностью вымывается, будем сопоставлять минимальное реальное время, за которое частица примеси может преодолеть расстояние от входа в выработку до выхода. Также будем учитывать, что, так как на один объем закачиваемых стоков приходится четыре объема поступающих грунтовых вод, скорость на выходной границе может быть не более чем в пять раз больше скорости закачки. Именно максимальную скорость откачки жидкости из шахты и будем учитывать при сопоставлении времени. С учетом вышесказанного соответствующее реальное время можно вычислить следующим образом

$$t_p = \frac{4.35 \text{ км}}{5 \cdot 8.6 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}} \approx 10^6 \text{ с} \approx 0.3858 \text{ мес.}$$

Отвечающее ему расчетное время рассчитывается как $t_{расч.} = \frac{18.4}{5 \cdot 1} = 3.68$. Таким образом, расчетное время $t = 10$ соответствует примерно одному месяцу.

Для всех представленных далее результатов численных экспериментов будет указываться не расчетное, а соответствующее ему реальное время. Все приведенные ниже расчеты получены с помощью разработанного и зарегистрированного программного комплекса [38, 39, 62, 63].

Рассматривается задача о распространении примеси, состоящей из двух фракций. Характеристики области решения и течения выбираются следующим образом: начальные условия для компонентов вектора скорости: $u_{t=0} = 0, v_{t=0} = 0$, скорость поступления жидкости через входное отверстие $u_0 = 1$, скорость поступления жидкости через верхнюю границу вычисляется из условия соотношения объемов $\int_{\Gamma_3} v_0 d\Gamma_3 = 4 \int_{\Gamma_1} u_0 d\Gamma_1$, и берется одинаковой по всей границе Γ_3 . Параметры безразмерной области решения

выбираются так: высота входного отверстия $H_2 = 1$, длина наклонной части $H_1 = L_2 = 3$, длина средней горизонтальной части $L_3 = 12$, длина горизонтальной части у входного и выходного отверстий $L_1 = 0,2$. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ в области решения нет примесей $C|_{t=0} = 0$ и жидкость покоится $u|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = 0$. Далее через входную границу начинается подача загрязненных стоков. Через верхнюю границу поступают грунтовые воды, а на выходной границе жидкость откачивается.

Рассмотрим смесь, состоящую из двух фракций частиц, для которых выбраны следующие характеристики:

- для «тяжелой фракции»: скорость оседания под действием силы тяжести $v_s = 2.5$; коэффициент диффузии $D = 1$; концентрация во входном потоке $C_1 = 0.025$; концентрация в грунтовых водах $C_2 = 0$; интенсивность накопления осадка $\alpha = -2$; пороговое значение концентрации $C^* = 0.6$, при котором выпавшая в осадок примесь слежится, по истечении порогового времени оседания $T^* = 10$.
- для «легкой фракции»: $v_s = 0.1$; $D = 4$; $C_1 = 0.025$; $C_2 = 0.00003$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.9$, $T^* = 10$.

Для верификации предложенной модели приводится сравнение решений, полученных на разных дискретных сетках с уменьшением шага по времени и пространству. Приведем серию расчетов с шагами по пространству $h_1 = 0.05$ и $h_2 = 0.25$ и с шагами по времени: $\tau_1 = 0.01$, $\tau_2 = 0.005$, $\tau_3 = 0.0001$ (Рисунок 3.1 - Рисунок 3.4).

Проведенные расчеты показывают, что при измельчении шага как по пространству, так и по времени, зоны осаждения и накопления слежавшегося осадка располагаются сходным образом. (Рисунок 3.1.а, Рисунок 3.2.а; Рисунок 3.1.б, Рисунок 3.2.б; Рисунок 3.1.с, Рисунок 3.2.с). При уменьшении шага по пространству нижняя граница измененной области становится более гладкой, «ступенчатость», характерная для более крупных сеток, исчезает.

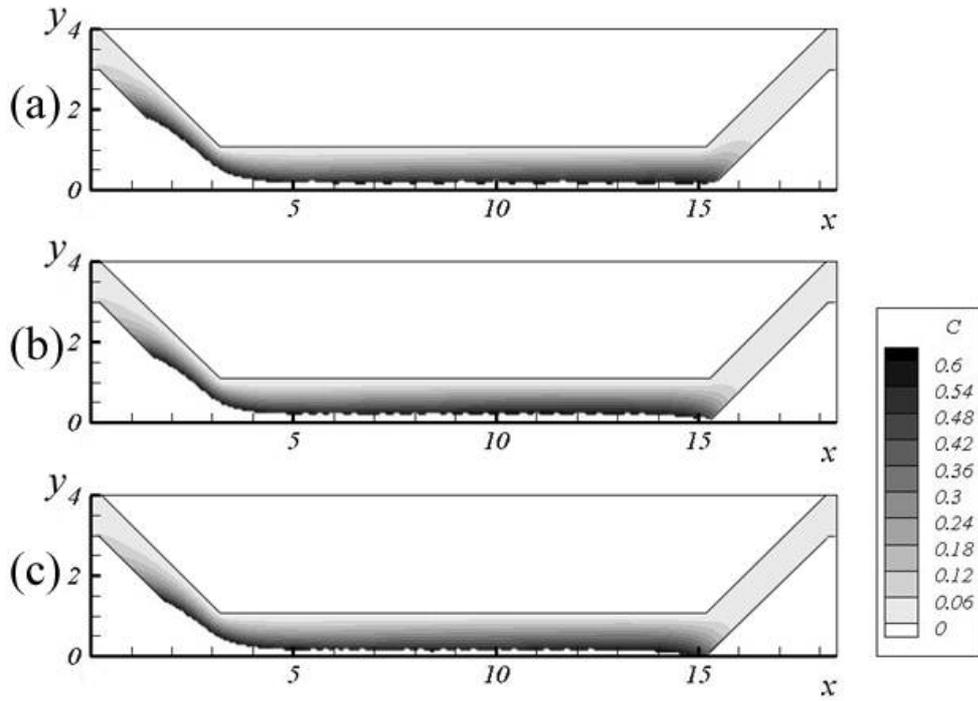


Рисунок 3.1 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес. Где шаг по пространству $h_1 = 0.05$, шаг по времени: (a) $\tau_1 = 0.01$; (b) $\tau_2 = 0.005$; (c) $\tau_3 = 0.001$

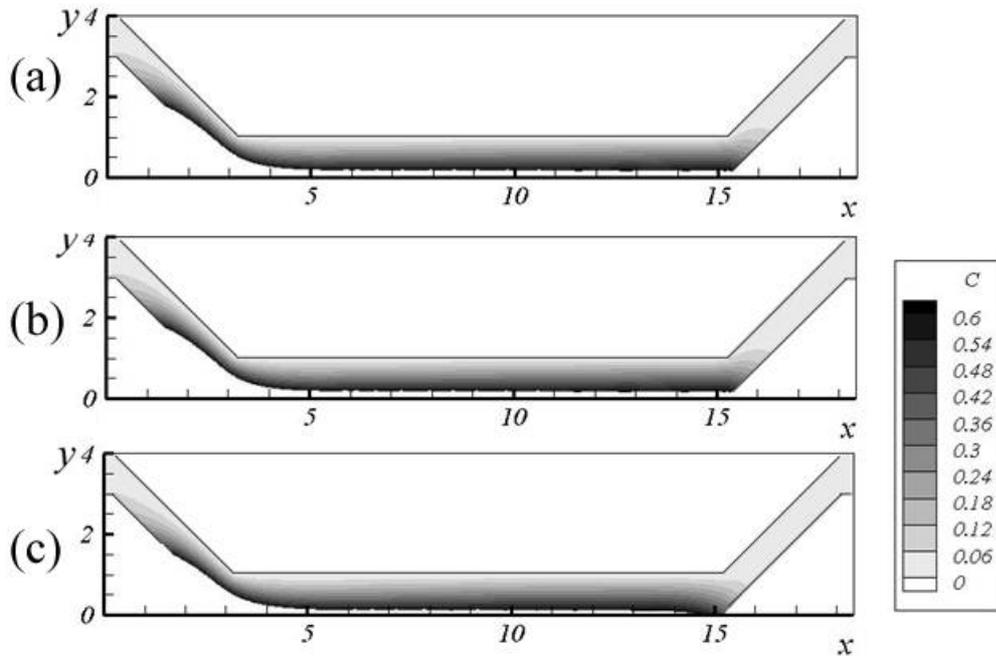


Рисунок 3.2 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес. Где шаг по пространству $h_2 = 0.025$, шаг по времени: (a) $\tau_1 = 0.01$; (b) $\tau_2 = 0.005$; (c) $\tau_3 = 0.001$

Для оценки степени очистки от загрязнений приведем графики изменения концентрации примеси в откачиваемой жидкости по времени (см. Рисунок 3.3– Рисунок 3.4), полученные для рассмотренных выше расчетов. На данных графиках безразмерные характеристики приведены к размерному виду.

Величина C_{out} представляет собой среднее значение концентрации примеси на выходной границе области решения. При уменьшении шагов по времени и пространству графики величины C_{out} становятся более гладкими (см. Рисунок 3.3, Рисунок 3.4). Характеры поведения графиков концентрации примеси на выходной границе сходны и на протяжении 700 мес. на всех графиках концентрация примеси находится в интервале, соответствующем натурным данным (см. Таблица 8).

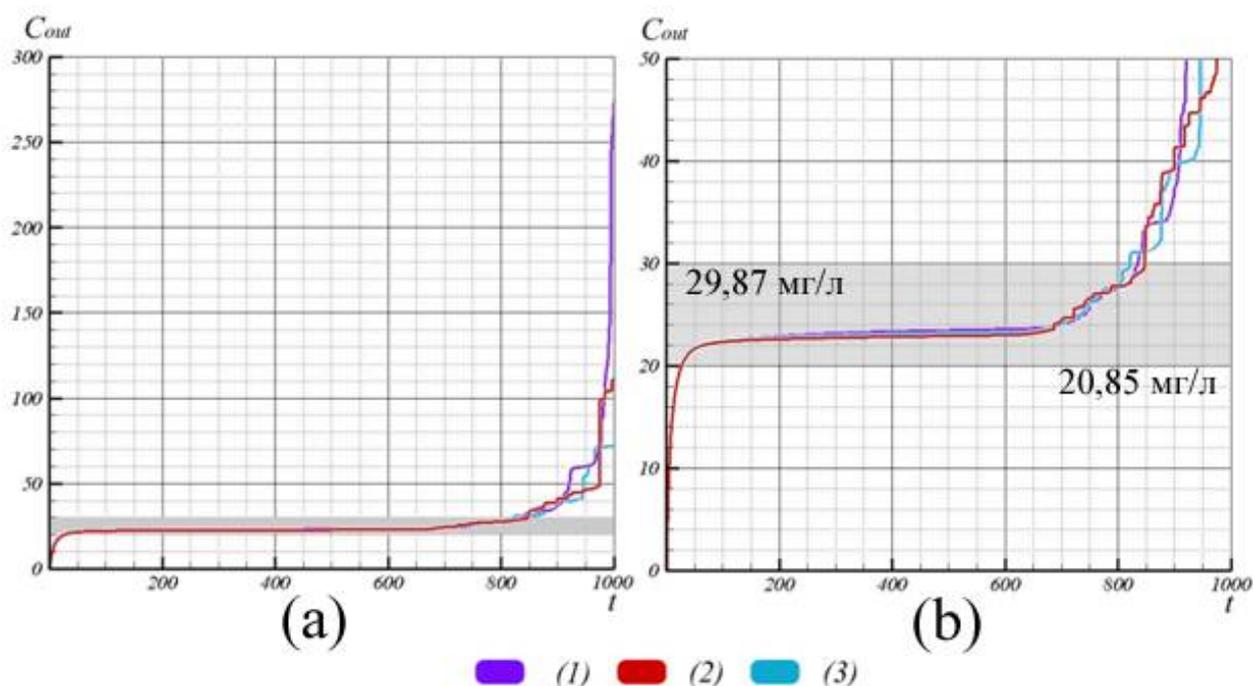


Рисунок 3.3 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Где шаг по пространству $h_1 = 0.05$, шаг по времени: (1) $\tau_1 = 0.01$; (2) $\tau_2 = 0.005$; (3) $\tau_3 = 0.001$. На рисунке (a) представлен общий график, на (b) – увеличенная часть графика, где выделенная серым цветом область соответствует натурным данным (см. Таблица 8)

Таблица 9 Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по времени при $h_1 = 0.05$ для $\tau_1 = 0.01$, $\tau_2 = 0.005$, $\tau_3 = 0.0001$

	$\ c_\tau^1 - c_\tau^2\ $	$\ c_\tau^2 - c_\tau^3\ $
<i>t = 100 мес</i>	0.014049	0.006421
<i>t = 500 мес.</i>	0.018605	0.007905
<i>t = 1000 мес.</i>	0.022032	0.010056

Таблица 10 Нормы разности решений, полученных с измельчением шага по времени при $h_2 = 0.025$ для $\tau_1 = 0.01$, $\tau_2 = 0.005$, $\tau_3 = 0.0001$

	$\ c_\tau^1 - c_\tau^2\ $	$\ c_\tau^2 - c_\tau^3\ $
<i>t = 100 мес</i>	0.010053	0.003849
<i>t = 500 мес.</i>	0.011808	0.004988
<i>t = 1000 мес.</i>	0.016450	0.008504

3.1.2. Моделирование примеси, состоящей из одной фракции частиц

Для выявления тенденций развития процессов распространения загрязнений, сначала рассмотрим примеси, состоящие из частиц одной крупности. Выясним, как изменение основных характеристик выбранной фракции повлияет на качество очистки.

Каждая фракция примеси определяется со своим набором характеристик: скорость оседания под действием силы тяжести u_s ; коэффициент диффузии D ; концентрация примеси во входном потоке C_1 ; концентрация примеси в грунтовых водах C_2 ; интенсивность накопления осадка α ; пороговое значение концентрации C^* , при котором выпавшая в осадок примесь слеживается, по истечении порогового времени оседания T^* . Соответственно, если примесь представлена частицами одной крупности, то необходимо выбрать один набор всех перечисленных характеристик и решить одно уравнение переноса примеси с соответствующими начальными и граничными условиями.

Для проведения сравнения по характеристикам примеси, все расчеты, представленные в этом пункте, будут приведены при следующих параметрах сетки: шаги пространственной сетки $h_x = h_y = 0.05$, шаг по времени $\tau = 0.01$; начальные и граничные условия для компонентов скорости, размеры области решения выбираются также как и в прошлом пункте. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ в области решения нет примесей $C|_{t=0} = 0$; в области решения отсутствуют источники примеси. Во избежание искажений при выявлении тенденций развития процесса очистки от примесей разных фракций во всех расчетах, приведенных в этом пункте, считается, что грунтовые воды чистые.

Рассмотрим детальнее процесс распространения примеси не крупной фракции (см. Рисунок 3.5 – Рисунок 3.7). В начальный момент времени $t = 10$ мес. примесь начинает поступать через входное отверстие (Рисунок 3.5.а).

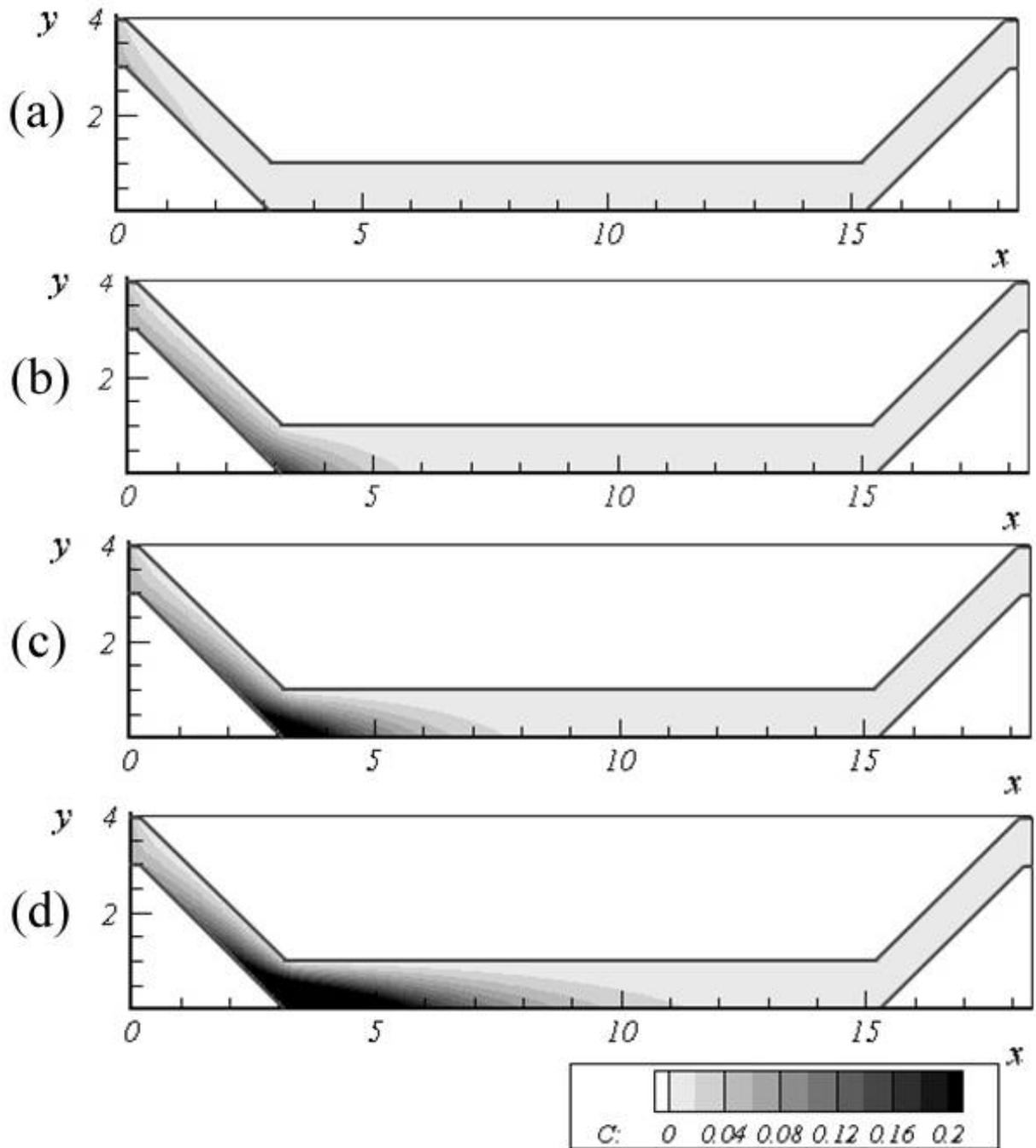


Рисунок 3.5 Распространение примеси, определенной с параметрами: концентрация примеси в поступающей жидкости $C_1 = 0.05$; концентрация примеси в грунтовых водах $C_2 = 0$; коэффициент диффузии $D = 1$; скорость оседания $v_s = 2$; интенсивность накопления осадка $\alpha = -1$; пороговое значение концентрации $C^* = 0.6$; пороговое значение времени слеживания осадка $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 10$ мес.; (b) $t = 50$ мес.; (c) $t = 100$ мес.; (d) $t = 200$ мес.

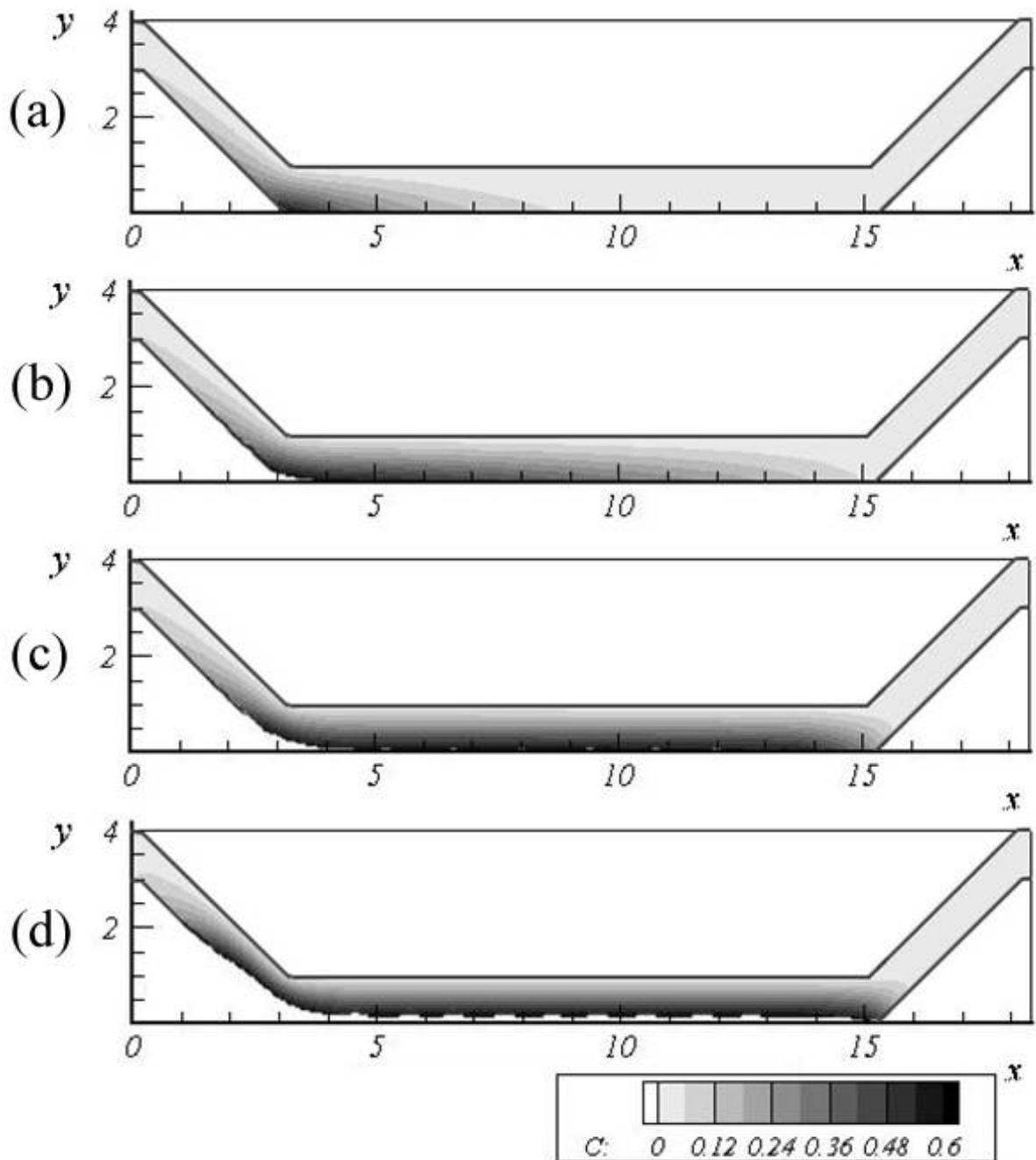


Рисунок 3.6 Распространение примеси, определенной с параметрами: концентрация примеси в поступающей жидкости $C_1 = 0.05$; концентрация примеси в грунтовых водах $C_2 = 0$; коэффициент диффузии $D = 1$; скорость оседания $v_s = 2$; интенсивность накопления осадка $\alpha = -1$; пороговое значение концентрации $C^* = 0.6$; пороговое значение времени слеживания осадка $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

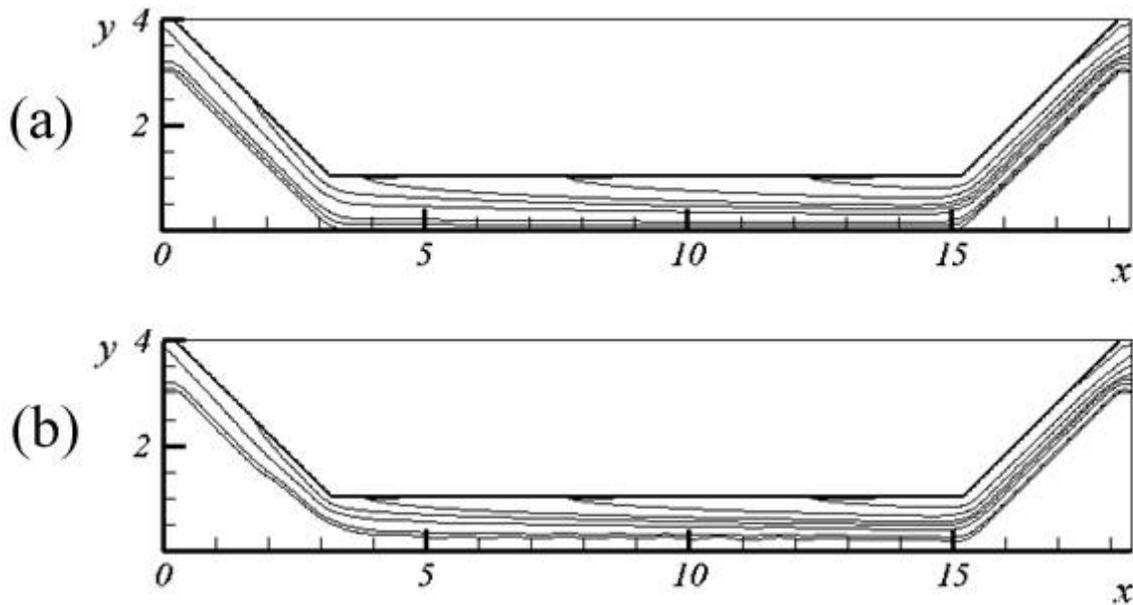


Рисунок 3.7 Течение жидкости в линиях уровня функции тока: (а) на момент времени $t = 10$ мес., до начала накопления осадка у дна; (б) в измененной из-за слеживания осадка области решения, на момент времени $t = 1000$ мес.

За счет действия силы тяжести и благодаря поступлению жидкости через верхнюю границу концентрация примеси возрастает с приближением к нижней границе (Рисунок 3.5.b). За счет малых скоростей течения, осадок накапливается преимущественно вдоль наклонной границы вблизи входного отверстия (Рисунок 3.5.c). Концентрация примеси в поступающей жидкости невелика, частицы примеси малы и процесс накопления осадка и его слеживания достаточно длителен. На момент времени $t = 200$ мес. (Рисунок 3.5.d, Рисунок 3.6.a) максимальная концентрация примеси сохраняется у основания наклонной границы вблизи входного отверстия и не превышает 40%. Слеживание осадка наблюдается только к моменту времени $t = 500$ мес. (Рисунок 3.6.b). Процесс заиления приводит к сужению канала, скорость потока в этом месте увеличивается, поэтому примеси переносятся дальше по области и оседают вдоль всей центральной части области решения (Рисунок 3.6.c). Со временем образуется «пляж» из осевшей примеси и слежавшегося осадка (Рисунок 3.6.d).

Однако так как существенного сужения канала не происходит, скорость течения жидкости в области решения остается невелика. Линии тока направлены в области решения вдоль границ, и вихревых зон не образуется (Рисунок 3.7.a). Характер развивающегося течения остается ламинарным на протяжении всего времени расчета вплоть до $t = 1000$ мес. (Рисунок 3.7.b).

На (Рисунок 3.5 - Рисунок 3.6) рассматривалось распространение примеси относительно некрупной фракции, со значение коэффициента диффузии только в два раза меньше скорости оседания. Рассмотрим более крупные фракции, для которых коэффициент диффузии D равен соответственно 0.1 – (Рисунок 3.8), 0.25 – (Рисунок 3.9), 0.5 – (Рисунок 3.10), при прочих равных характеристиках.

Чем меньше коэффициент диффузии – тем больше фракции примеси, и тем интенсивнее она будет оседать и слеживаться. Следовательно, при этом значительнее сужается основной канал области решения, больше увеличиваются скорости течения, частицы примеси интенсивнее вовлекаются в поток и переносятся дальше по области решения. Наблюдается и обратная тенденция, чем больше коэффициент диффузии, тем равномернее распределена концентрация примеси по высоте основного канала. Наблюдаются незначительное заиливание, и умеренное увеличение скорости в месте сужения канала, осевший осадок равномернее заполняет центральную часть области решения. Однако большее количество примеси остается во взвешенном состоянии, и именно эти частицы будут интенсивно вымываться с потоком жидкости из области решения. Таким образом, коэффициент диффузии определяет насколько «летучей» будет примесь (см. Рисунок 3.6, Рисунок 3.8 - Рисунок 3.10).

Для оценки степени очистки от загрязнений приведем графики изменения концентрации примеси в откачиваемой жидкости по времени (см. Рисунок 3.11– Рисунок 3.12), полученные для рассмотренных выше

расчетов. На данных графиках безразмерные характеристики приведены к размерному виду.

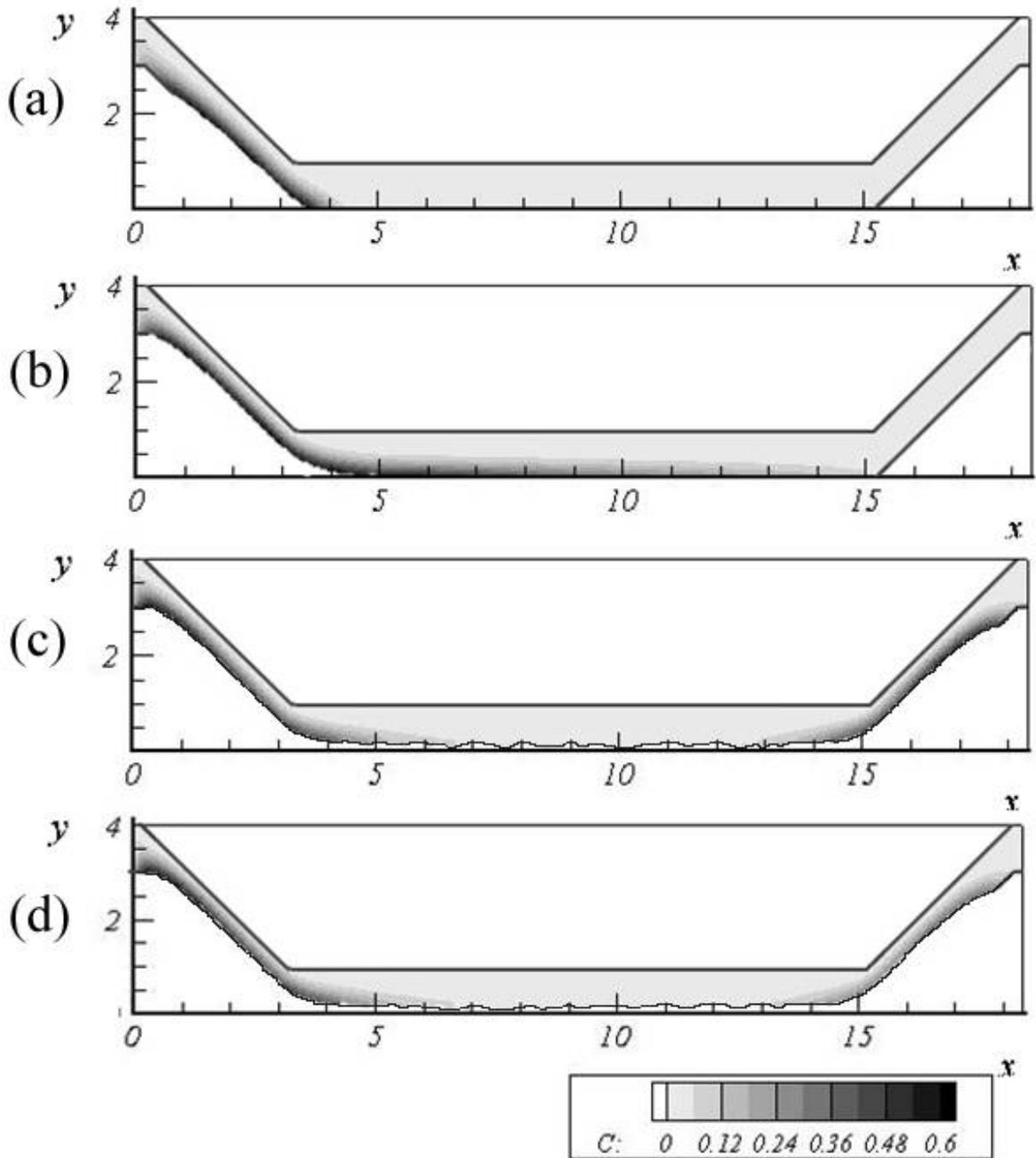


Рисунок 3.8 Серия расчетов с изменением коэффициента диффузии. Распространение примеси при $D = 0.1$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $v_s = 2$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

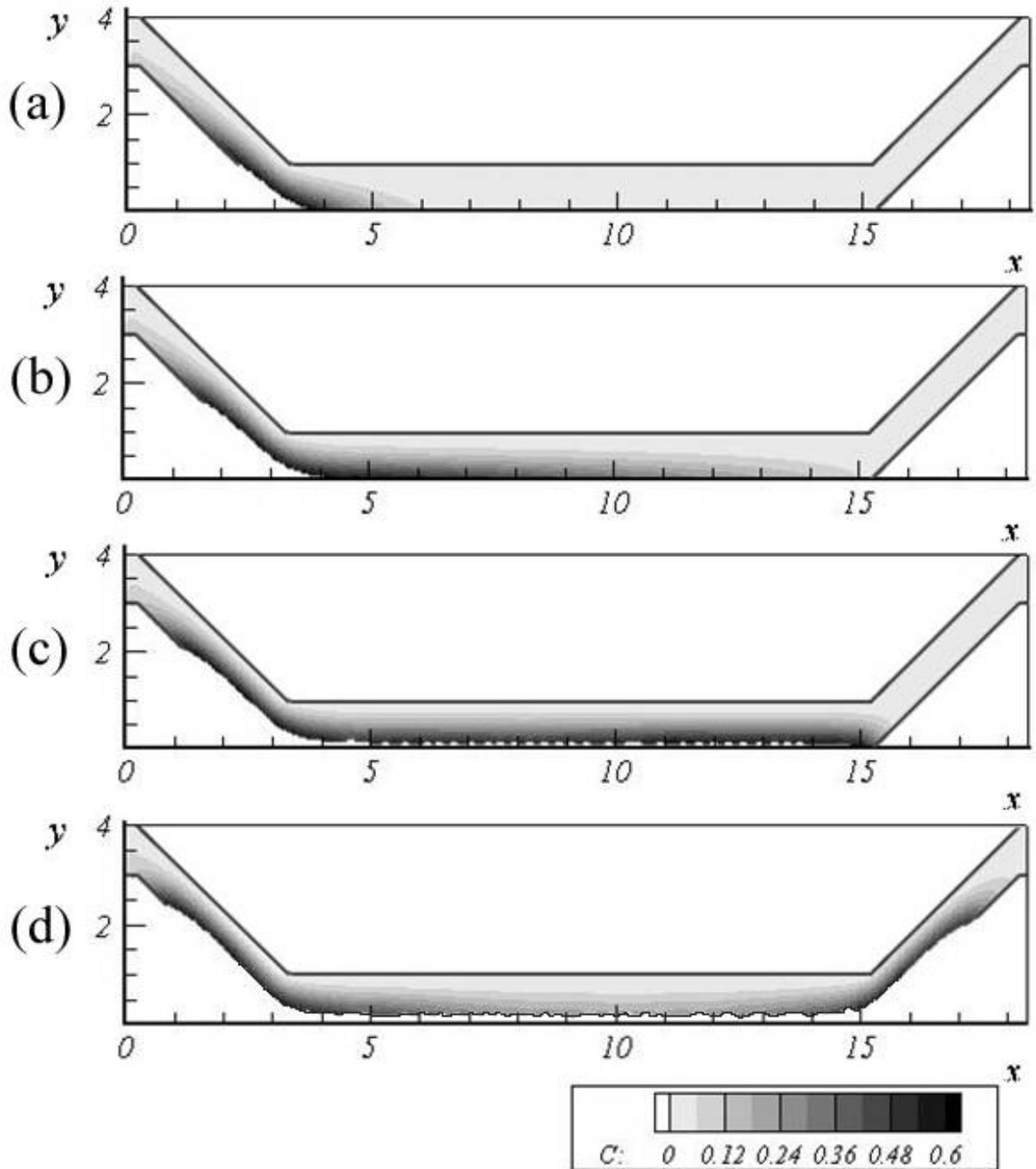


Рисунок 3.9 Серия расчетов с изменением коэффициента диффузии. Распространение примеси при $D = 0.25$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $v_s = 2$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

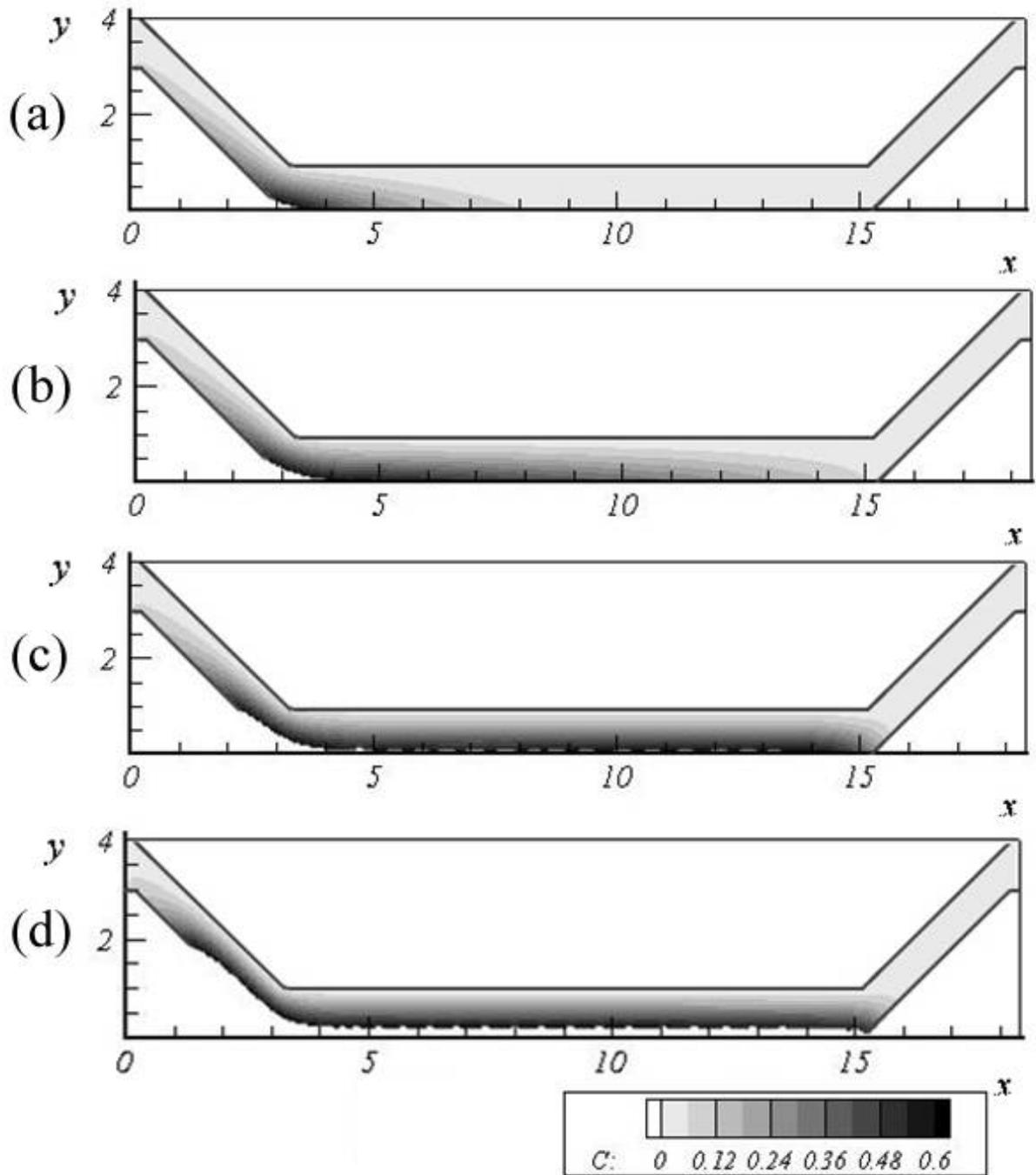


Рисунок 3.10 Серия расчетов с изменением коэффициента диффузии. Распространение примеси при $D = 0.5$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $v_s = 2$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

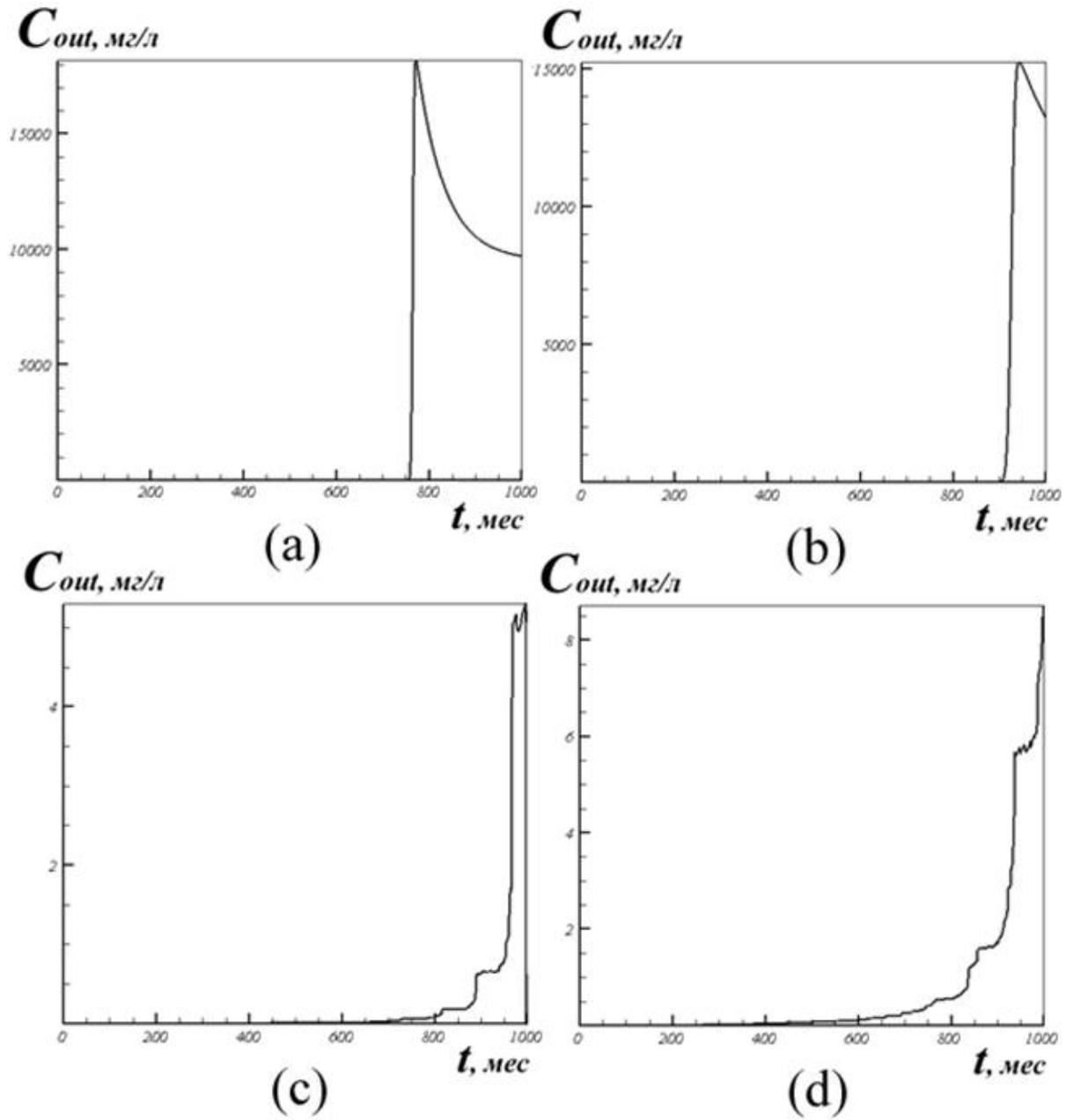


Рисунок 3.11 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения для разных фракций, со значениями коэффициента диффузии (a) $D = 0.1$; (b) $D = 0.25$; (c) $D = 0.5$; (d) $D = 1.0$

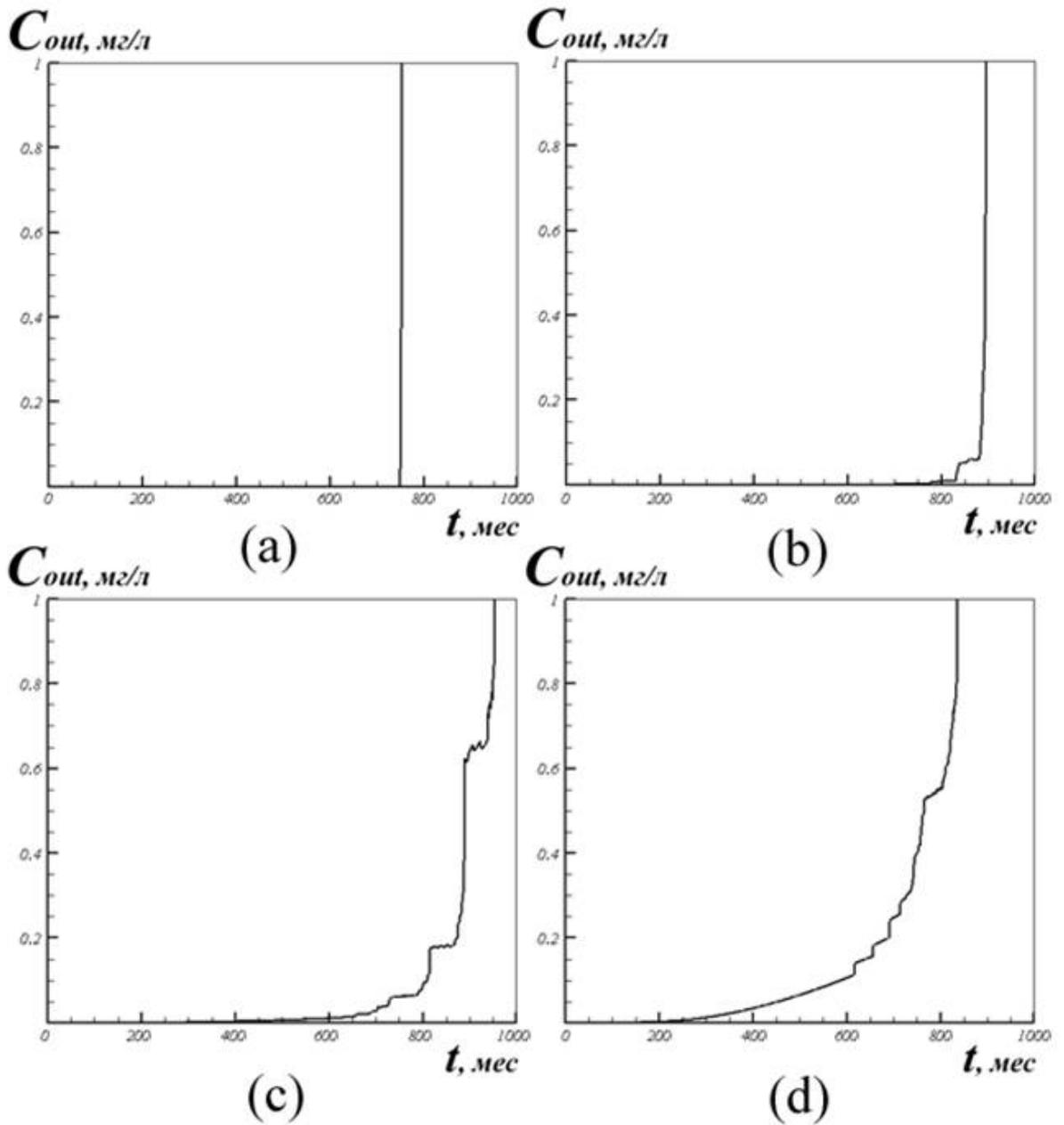


Рисунок 3.12 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения, для разных фракций, со значениями коэффициента диффузии (a) $D = 0.1$; (b) $D = 0.25$; (c) $D = 0.5$; (d) $D = 1.0$. Выбранный диапазон C_{out} соответствует «безопасной» предельно допустимой концентрации взвешенных примесей, прописанных в СанПиНе

Заметим, что концентрация всех рассмотренных примесей на выходной границе остается «безопасной» на протяжении $\approx 700 - 800$ мес. (58 – 66 лет) с начала поступления (см. Рисунок 3.12). В дальнейшем же наблюдается резкое увеличение этого показателя.

Для более легких фракций при $D = 0.5$ и $D = 1$ концентрация примеси на выходной границе начинает расти раньше так как большее количество частиц примеси не оседает, оставаясь во взвешенном состоянии, и равномерно заполняет область решения. Легкие фракции с увеличением скорости в местах сужения области решения интенсивно вымываются (см. Рисунок 3.12.с, Рисунок 3.12.d) Однако пиковые концентрации остаются невелики по сравнению с концентрацией на входной границе (см. Рисунок 3.11.с, Рисунок 3.11.d). Концентрация же более тяжелых фракций меньше подверженных диффузии при $D = 0.1$ и $D = 0.25$ на выходной границе начинает расти несколько позже, но значительно более резко (см. Рисунок 3.12.a, Рисунок 3.12.b). Пиковые концентрации в этом случае (15 000 – 18 000 мг/л) почти достигают значения концентрации поступающей примеси – 50 000 мг/л (см. Рисунок 3.12.a, Рисунок 3.12.b). Это означает, что такие примеси интенсивно слеживаются и хорошо задерживаются в области решения, но могут привести к существенному изменению дна. Тогда скопившийся неслежавшийся осадок может резко вымываться.

Скорость оседания частиц примеси разной крупности под действием силы тяжести v_s отличаются. Параметр v_s и крупность частиц примеси взаимозависимы и соответствуют друг другу. На (Рисунок 3.13 – Рисунок 3.18) приведем полученные результаты численных экспериментов для примесей с различными скоростями оседания, равных соответственно 0.1 – (Рисунок 3.13), 1 – (Рисунок 3.14), 2.0 – (Рисунок 3.15), 5.0 – (Рисунок 3.16), при прочих равных характеристиках.

Чем меньше скорость оседания по сравнению с коэффициентом диффузии, тем более «летучими» примеси являются. Если коэффициент диффузии значительно превышает скорость оседания, тогда такая примесь дальше от входной границы распространяется по области решения и начинает выпадать в осадок только на достаточном удалении от нее (Рисунок 3.13). С увеличением скорости оседания место слеживая осадка становится ближе к входной границе (Рисунок 3.14 – Рисунок 3.15). Однако если скорость оседания начинает существенно превышать коэффициент диффузии, то слежавшийся осадок быстрее приводит к сужению основного канала области решения (Рисунок 3.16).

Скорости течения в местах сужения резко растут, примесь переносится с ускорившимся потоком и начинает слеживаться вдоль наклонной границы вблизи выходного отверстия. Наклонная граница способствует замедлению потока, и тяжелые фракции выпадают в осадок и слеживаются у ее основания. По мере образования пляжа из примеси у правой наклонной границы канал сужается, скорость вновь возрастает и тяжелые фракции примеси вымываются из области решения.

Чем меньше скорость оседания – тем более летучими являются фракции примеси, а, следовательно, тем интенсивнее переносятся с потоком и вымываются (Рисунок 3.17.a – Рисунок 3.17.b, Рисунок 3.18.a – Рисунок 3.18.b). Для примесей более крупных фракций интенсивность вымывания из области решения напрямую зависит от интенсивности сужения канала из-за заиления (Рисунок 3.17.c – Рисунок 3.17.d, Рисунок 3.18.c – Рисунок 3.18.d).

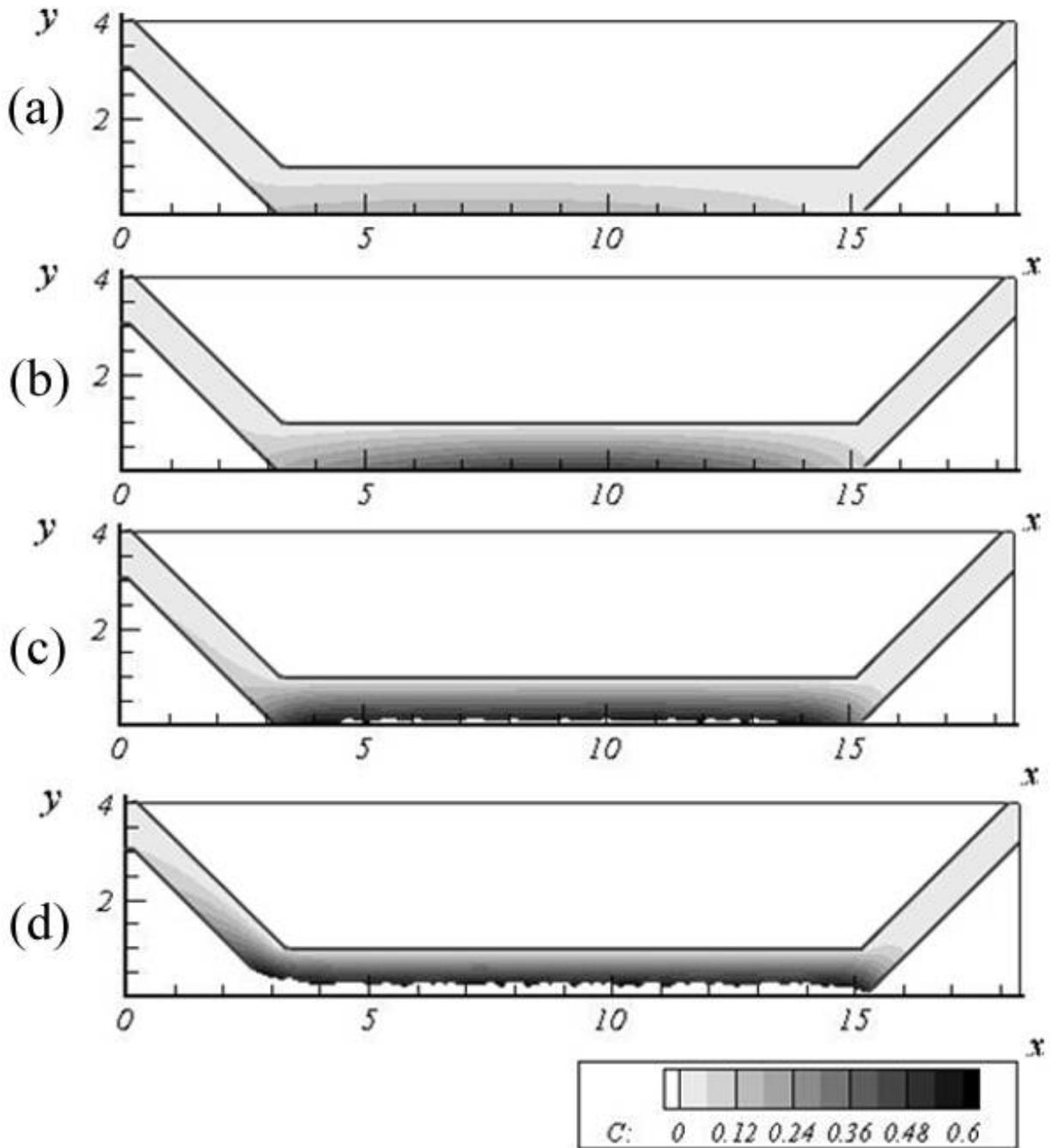


Рисунок 3.13 Серия расчетов с изменением скорости оседания примеси под действием силы тяжести. Распространение примеси при $v_s = 0.1$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

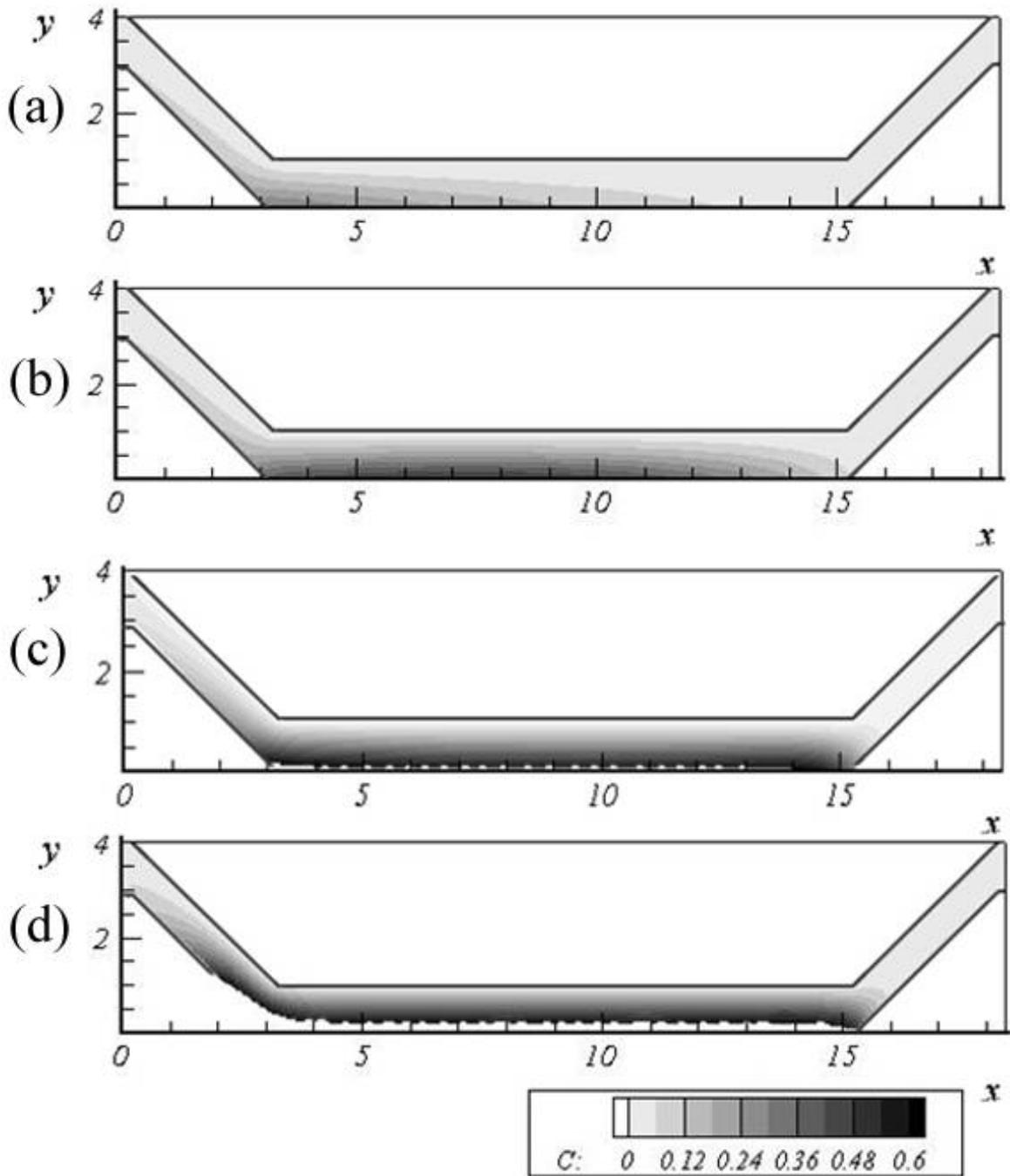


Рисунок 3.14 Серия расчетов с изменением скорости оседания примеси под действием силы тяжести. Распространение примеси при $v_s = 1$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

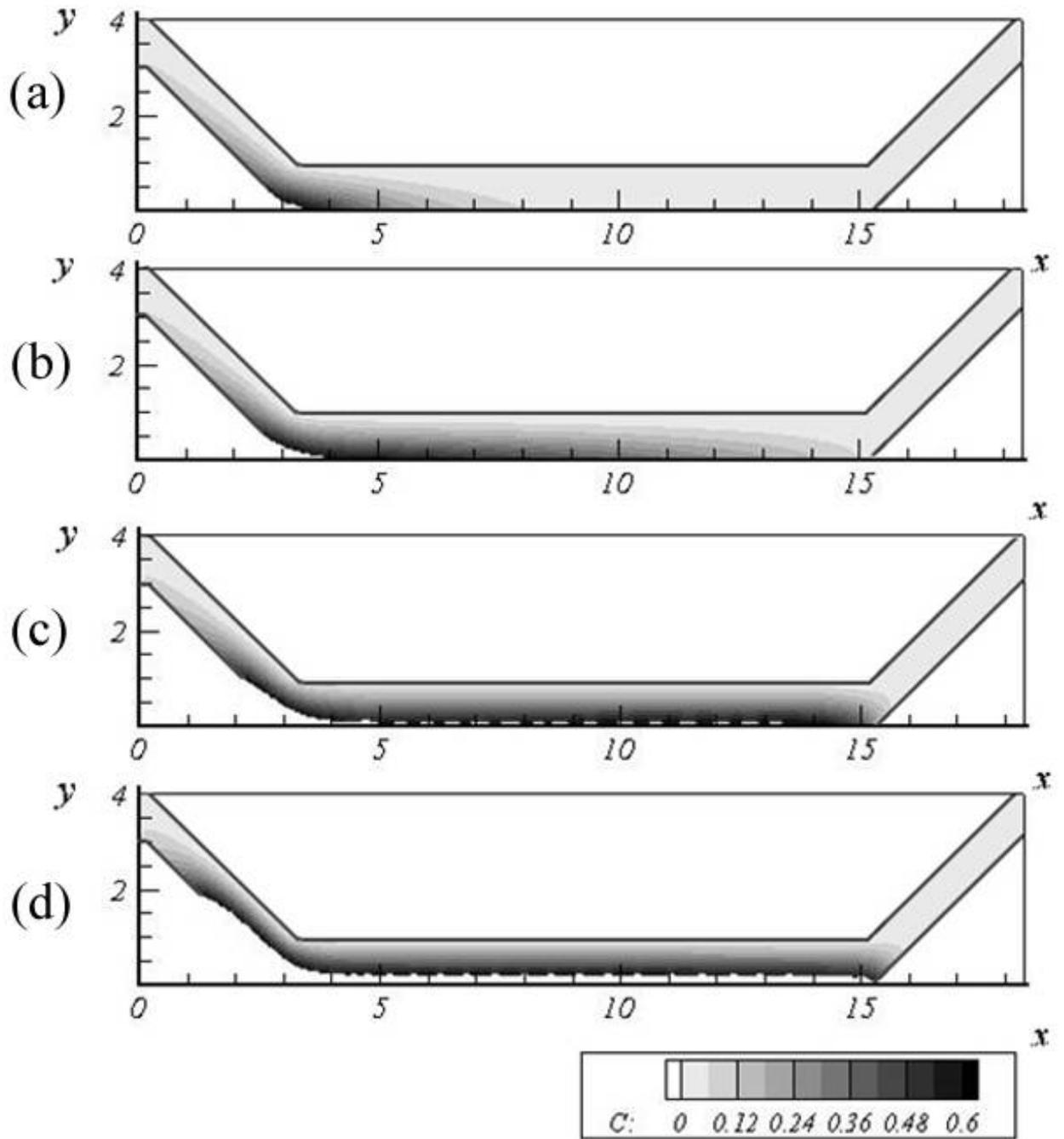


Рисунок 3.15 Серия расчетов с изменением скорости оседания примеси под действием силы тяжести. Распространение примеси при $v_s = 2.0$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

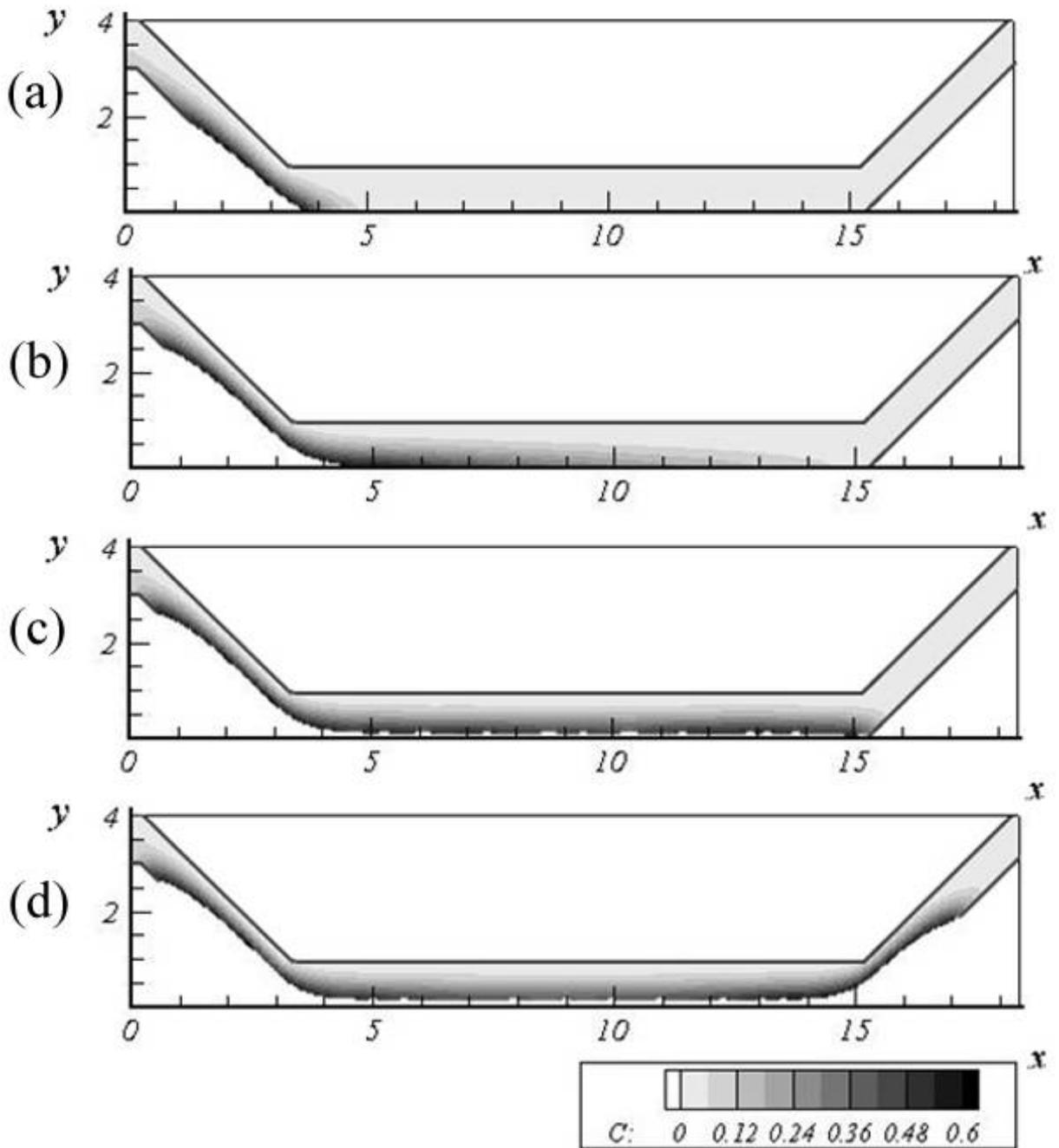


Рисунок 3.16 Серия расчетов с изменением скорости оседания примеси под действием силы тяжести. Распространение примеси при $v_s = 5.0$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

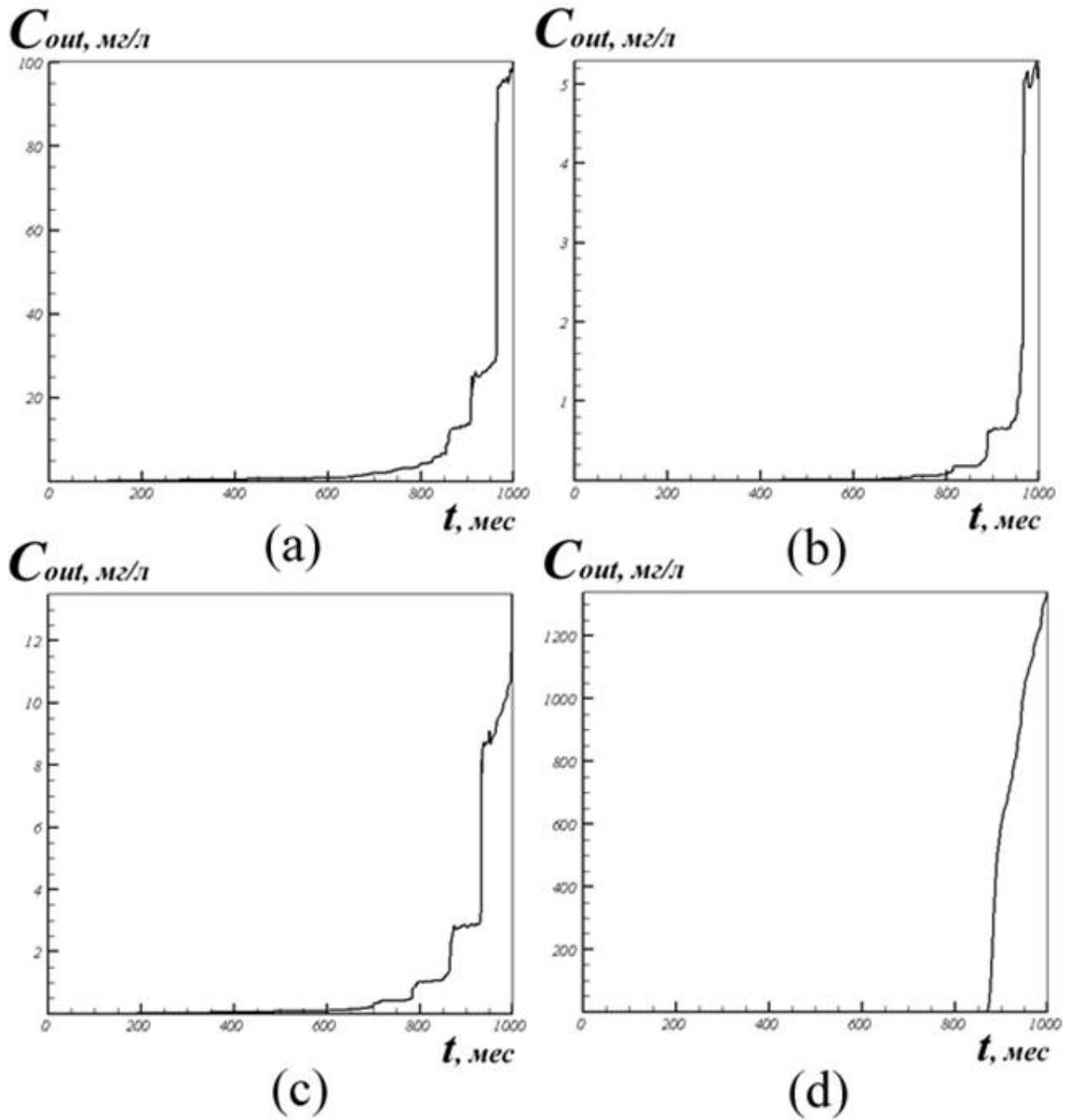


Рисунок 3.17 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения для разных фракций, со значениями скорости оседания примеси под действием силы тяжести: (a) $v_s = 0.1$; (b) $v_s = 0.5$; (c) $v_s = 1.0$; (d) $v_s = 5.0$

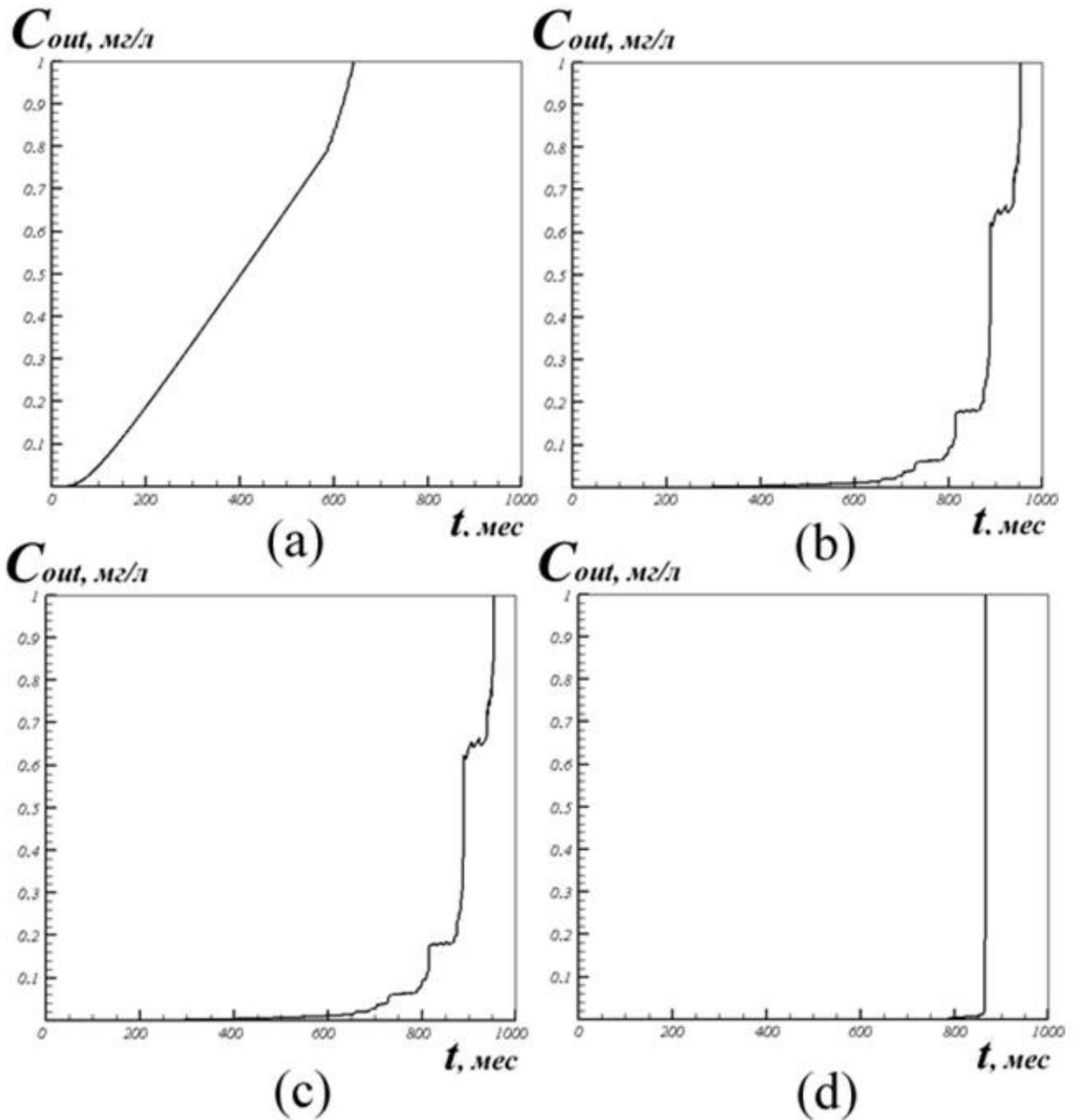


Рисунок 3.18 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения для разных фракций, со значениями скорости оседания примеси под действием силы тяжести: (a) $v_s = 0.1$; (b) $v_s = 0.5$; (c) $v_s = 1.0$; (d) $v_s = 5.0$. Выбранный диапазон C_{out} соответствует «безопасной» предельно допустимой концентрации взвешенных примесей, прописанных в СанПиНе

Также на качество очистки может существенно влиять интенсивность образования осадка. На (Рисунок 3.19 – Рисунок 3.23) приведем полученные результаты численных экспериментов для примесей с различными значениями коэффициента интенсивности накопления осадка α , равных

соответственно (-0.5) – (Рисунок 3.19), (-1.0) – (Рисунок 3.20), (-2.0) – (Рисунок 3.21), при прочих равных характеристиках.

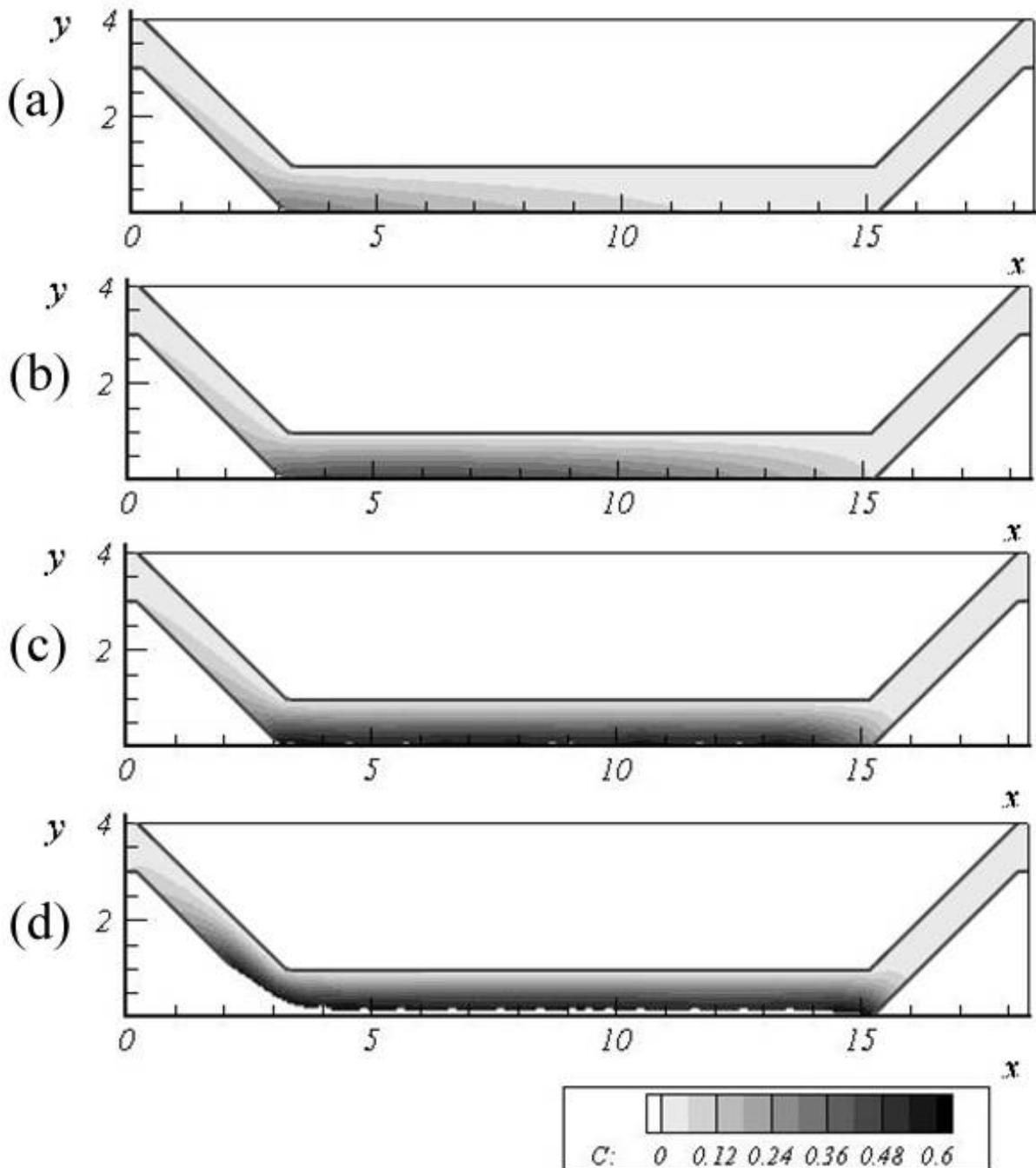


Рисунок 3.19 Серия расчетов с изменением интенсивности накопления осадка. Распространение примеси при $\alpha = -0.5$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $u_s = 2.0$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

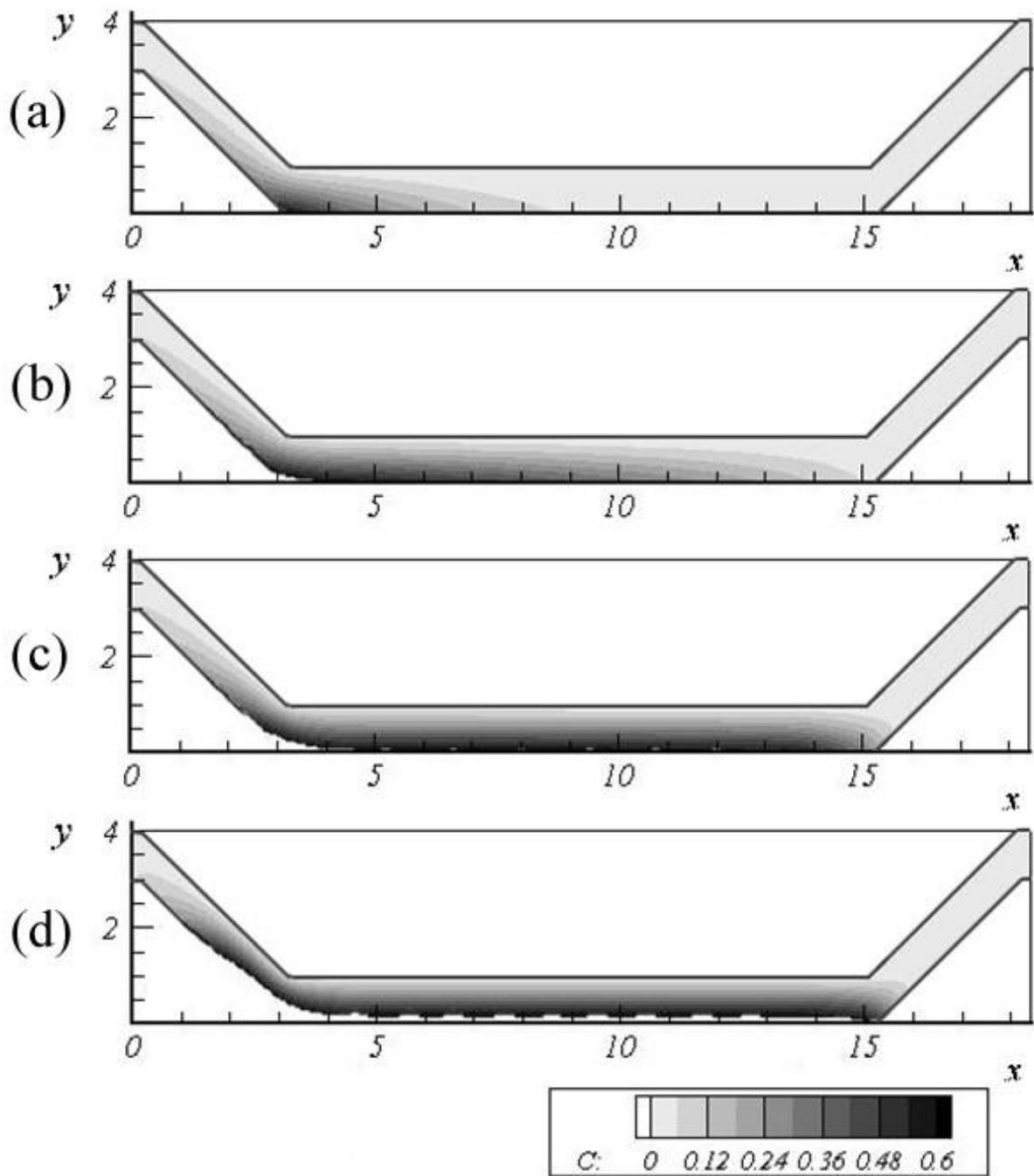


Рисунок 3.20 Серия расчетов с изменением интенсивности накопления осадка. Распространение примеси при $\alpha = -1.0$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $u_s = 2.0$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

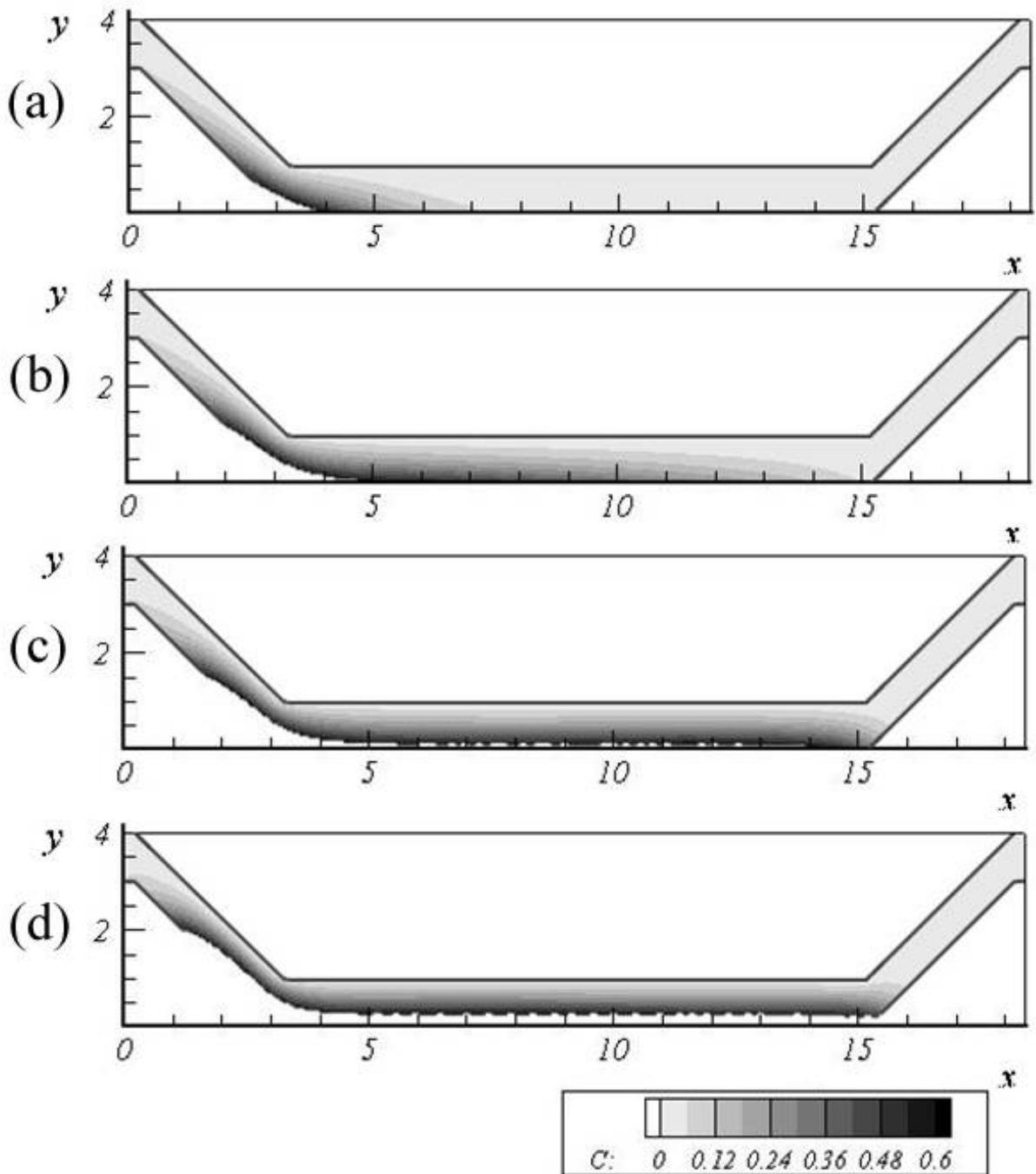


Рисунок 3.21 Серия расчетов с изменением интенсивности накопления осадка. Распространение примеси при $\alpha = -2.0$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $v_s = 2.0$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

Характер изменения концентрации примеси при изменении интенсивности накопления осадка схож с приведенными выше результатами. Чем больше по модулю коэффициент α – тем больше концентрация примеси

у дна, и тем быстрее происходит накопление осадка, при этом место слеживания располагается ближе к входной границе.

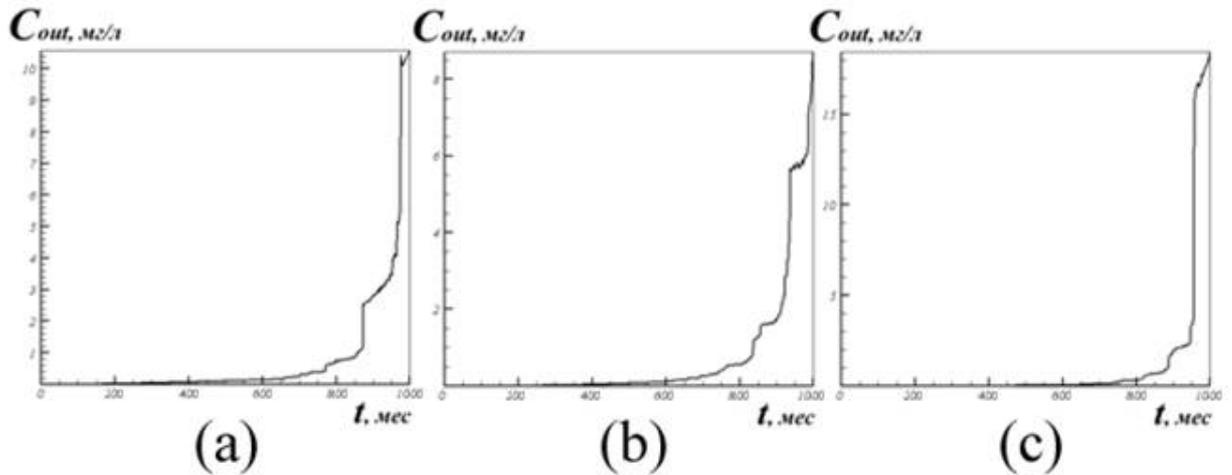


Рисунок 3.22 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения для разных фракций, со значениями коэффициента интенсивности накопления осадка: (a) $\alpha = -0.5$; (b) $\alpha = -1.0$; (c) $\alpha = -2.0$.

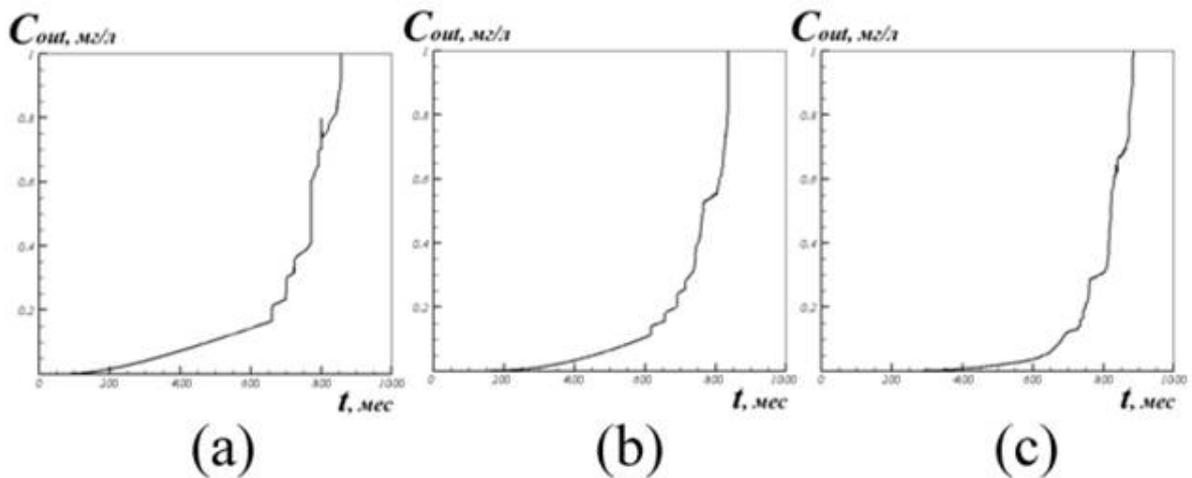


Рисунок 3.23 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения для разных фракций, со значениями коэффициента интенсивности накопления осадка: (a) $\alpha = -0.5$; (b) $\alpha = -1.0$; (c) $\alpha = -2.0$. Выбранный диапазон C_{out} соответствует «безопасной» предельно допустимой концентрации взвешенных примесей, прописанных в СанПиНе.

Если коэффициент α приближается к нулю, то такие примеси становятся более «летучими», пиковые концентрации примеси на выходе

увеличиваются. При увеличении по модулю данного коэффициента, примеси становятся более тяжелыми, и на их вымывание начинает в большей степени влиять увеличение скорости внутри выработки (см. Рисунок 3.22 – Рисунок 3.23).

Еще одна характеристика, существенно влияющая на характер образования осадка примеси – это пороговое значение концентрации, при достижении которого осадок начинает слеживаться. На (Рисунок 3.24 – Рисунок 3.27) приведем полученные результаты для примесей с различными значениями пороговой концентрации слеживания C^* , равных соответственно: 0.4 – (Рисунок 3.24), 0.6 – (Рисунок 3.25), 0.7 – (Рисунок 3.26), 0.9 – (Рисунок 3.27), при прочих равных значениях параметров.

С уменьшением пороговой концентрации C^* значение максимальной концентрации примеси в области решения падает, заиление происходит быстрее, равномернее по нижней границе области решения. Соответственно с увеличением C^* наблюдается обратная тенденция. При этом если примесь интенсивно слеживается, это приводит к тому, что область решения быстрее заполняется слежавшимся осадком. В месте сужения основного канала значительно увеличиваются скорость, и пиковое значение концентрации на выходе интенсивно растет (Рисунок 3.28 – Рисунок 3.29).

Это означает, что параметр C^* определяет слеживаемость осадка. Чем осадок более слеживаемый, тем интенсивнее сужается область решения из-за заиления. На вымывание таких фракций влияет характер увеличения скорости в местах сужения.

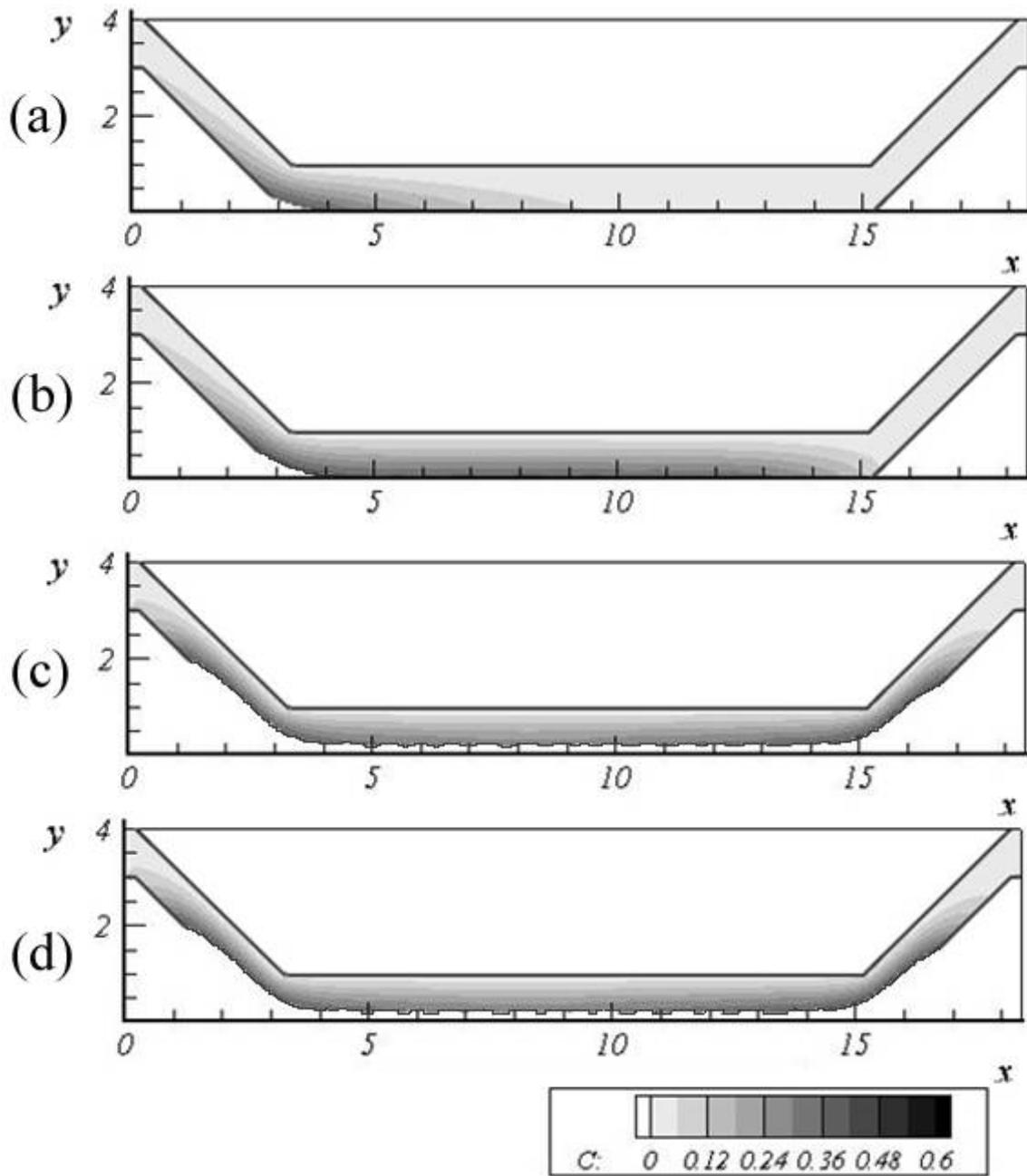


Рисунок 3.24 Серия расчетов с изменением пороговой концентрации слеживания осадка. Распространение примеси при $C^* = 0.4$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $v_s = 2.0$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

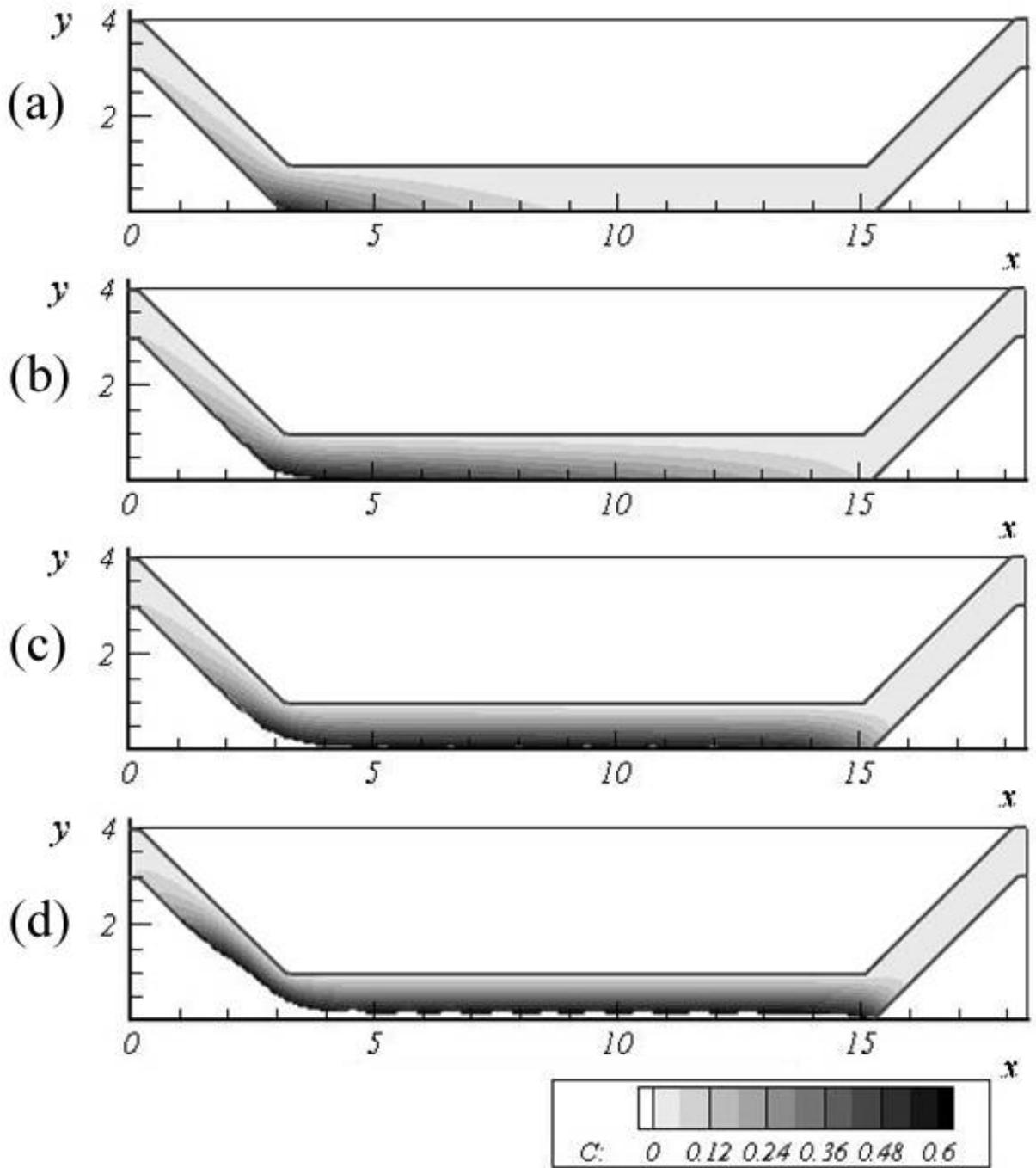


Рисунок 3.25 Серия расчетов с изменением пороговой концентрации слеживания осадка. Распространение примеси при $C^* = 0.6$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $v_s = 2.0$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

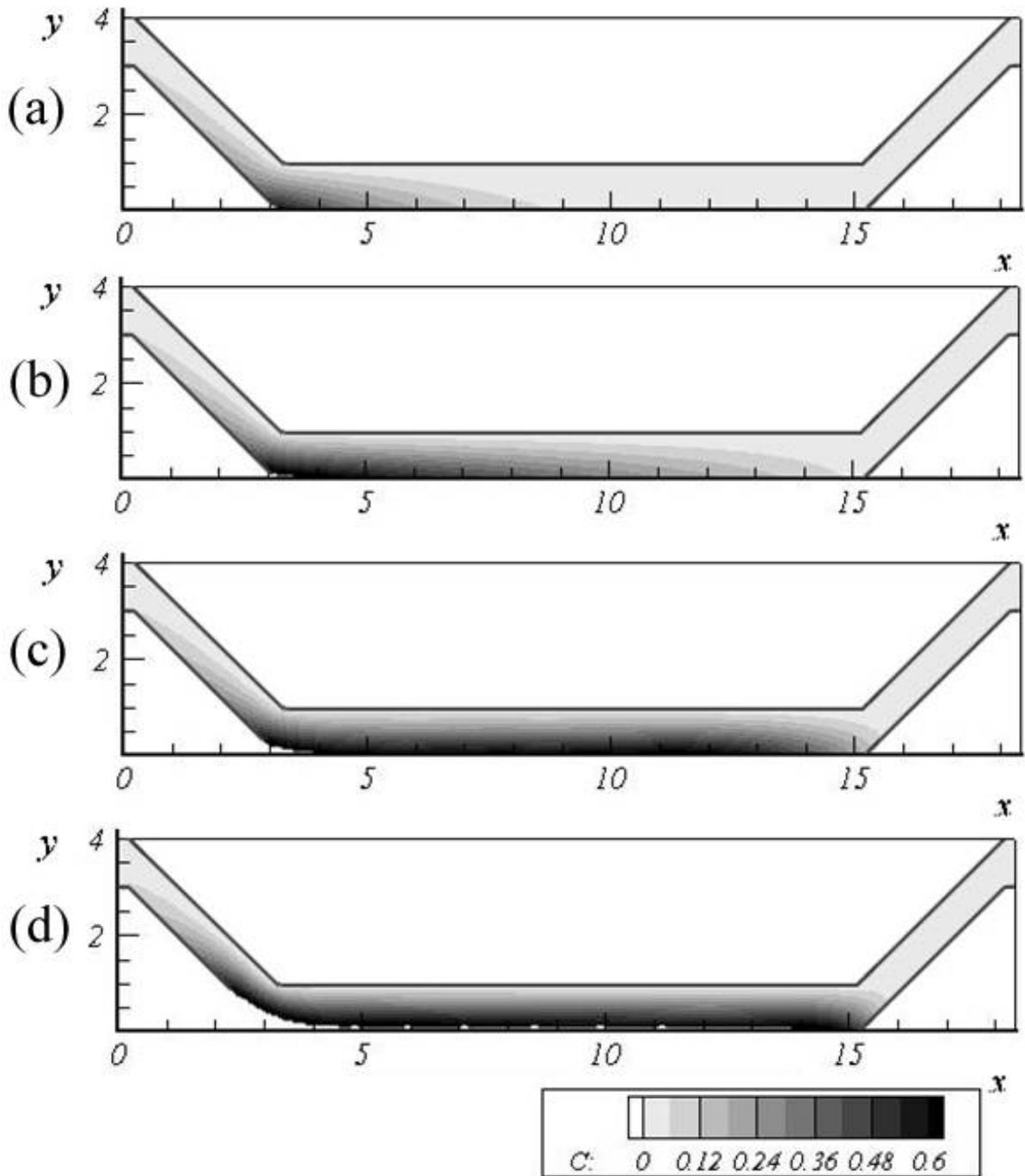


Рисунок 3.26 Серия расчетов с изменением пороговой концентрации слеживания осадка. Распространение примеси при $C^* = 0.7$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $v_s = 2.0$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

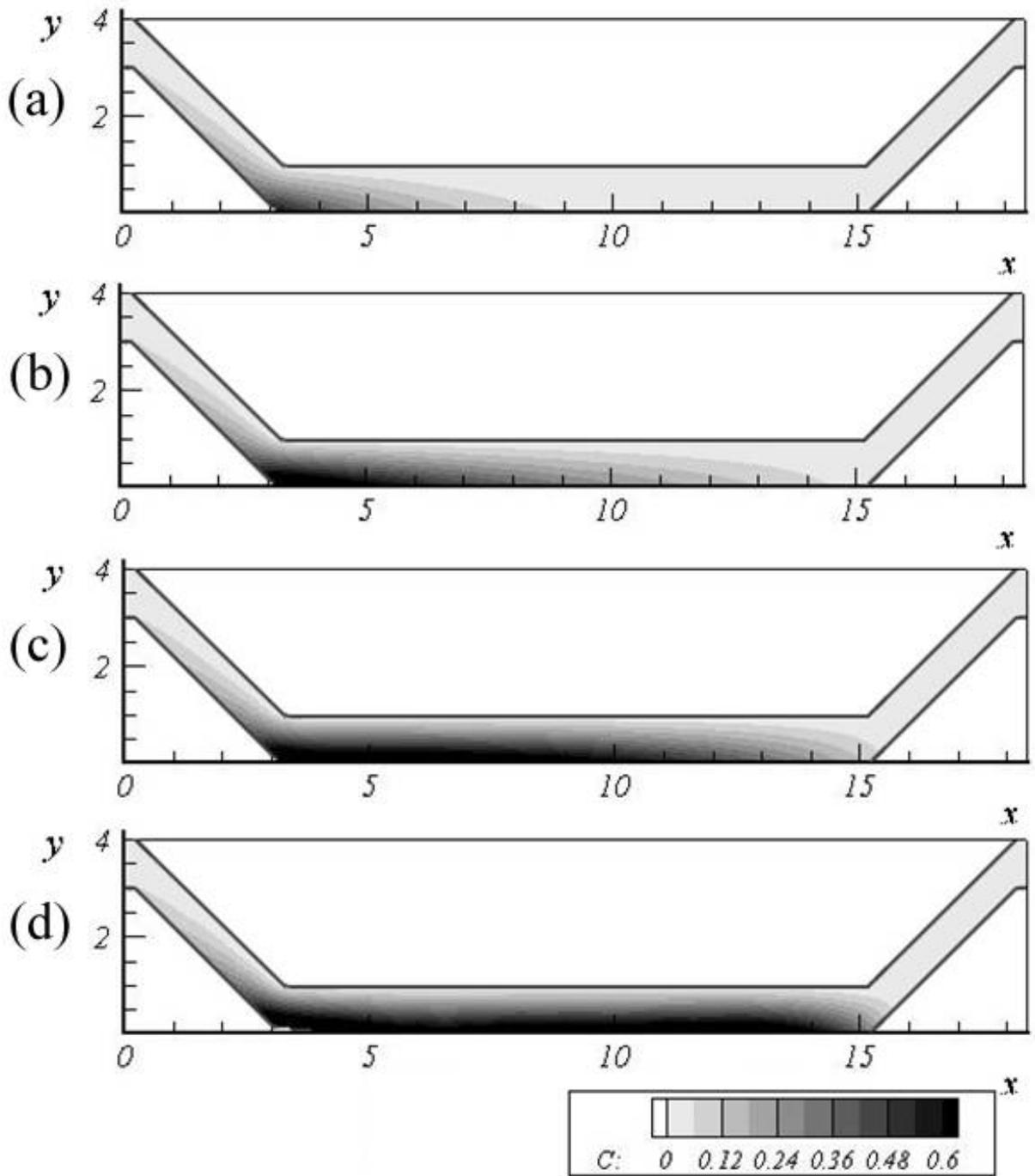


Рисунок 3.27 Серия расчетов с изменением пороговой концентрации слеживания осадка. Распространение примеси при $C^* = 0.9$, и прочих параметрах: $C_1 = 0.05$; $C_2 = 0$; $D = 1.0$; $v_s = 2.0$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. На рисунке представлено поле концентрации, полученное на моменты времени: (a) $t = 200$ мес.; (b) $t = 500$ мес.; (c) $t = 800$ мес.; (d) $t = 1000$ мес.

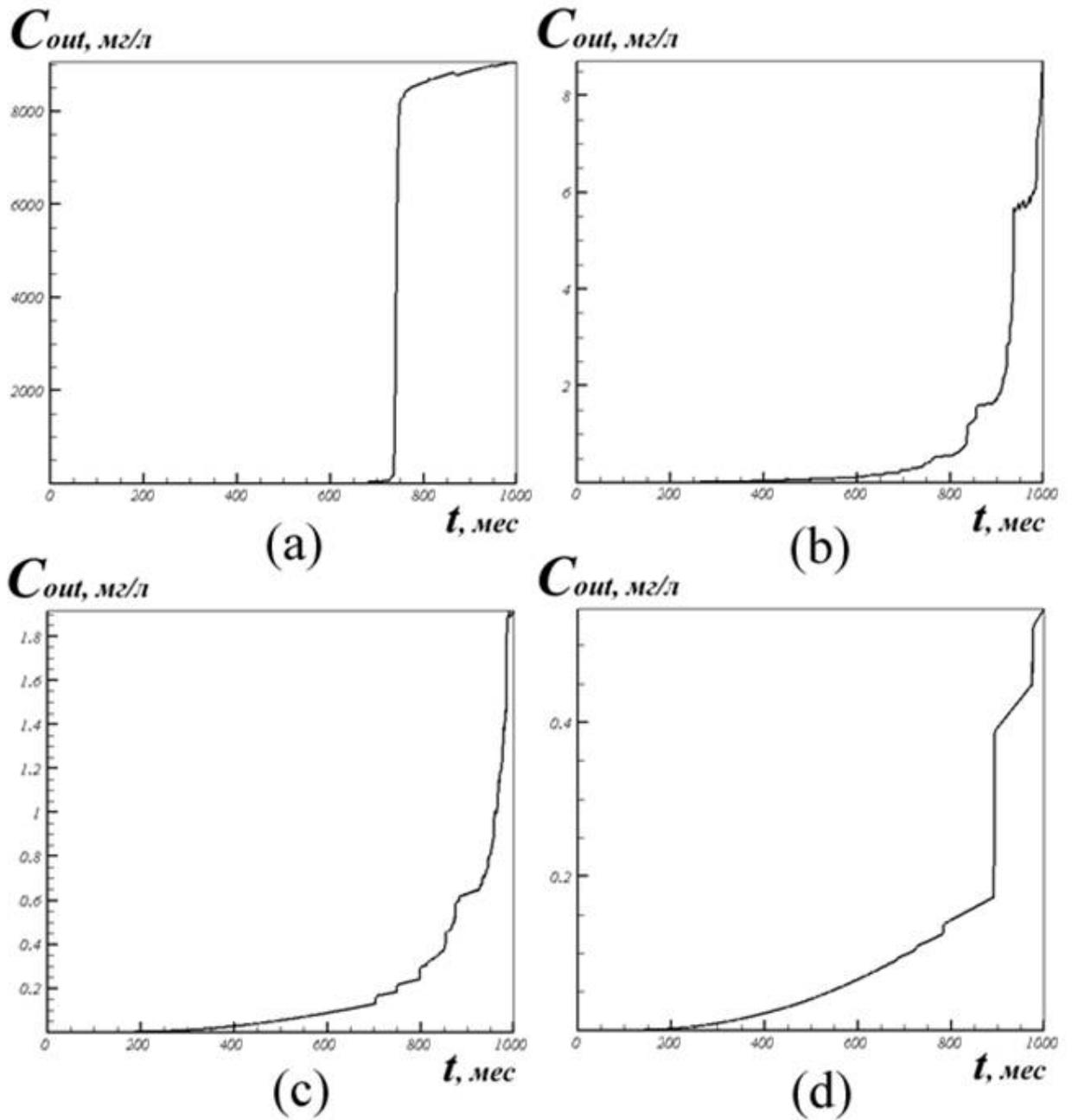


Рисунок 3.28 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения для разных фракций, со значениями пороговой концентрации слеживания осадка: (a) $C^* = 0.4$; (b) $C^* = 0.6$; (c) $C^* = 0.7$; (d) $C^* = 0.9$

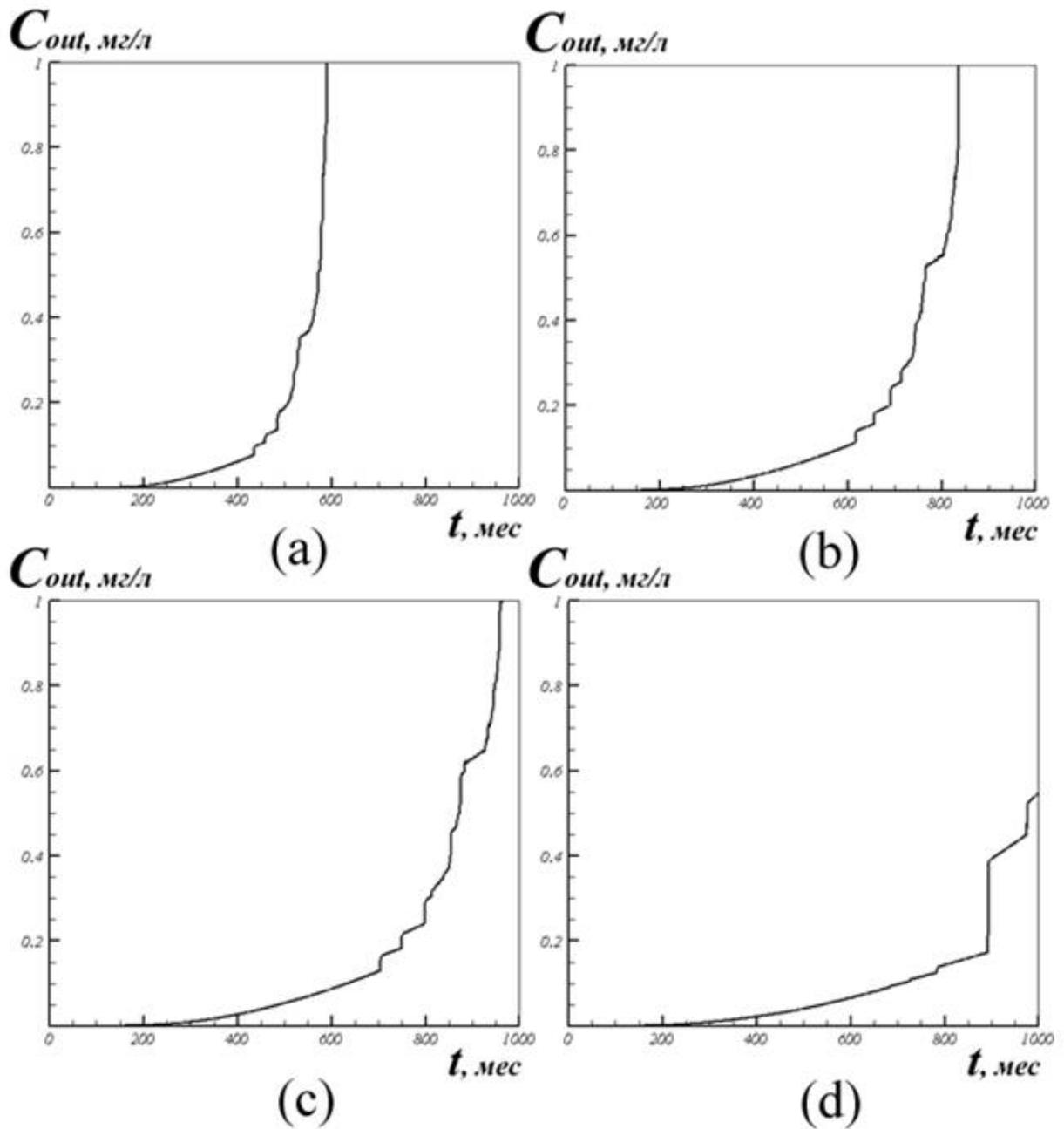


Рисунок 3.29 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения для разных фракций, со значениями пороговой концентрации слеживания осадка: (a) $C^* = 0.4$; (b) $C^* = 0.6$; (c) $C^* = 0.7$; (d) $C^* = 0.9$. Выбранный диапазон C_{out} соответствует «безопасной» предельно допустимой концентрации взвешенных примесей, прописанных в СанПиНе

Анализ проведенных серий расчетов, показывает, что изменение выбираемых параметров определяет насколько летучей или тяжелой будет рассматриваемая фракция примеси. Фракции примеси тем более летучие, чем больше для них коэффициент диффузии D , меньше скорость оседания примеси под действием силы тяжести v_s , больше по модулю коэффициент интенсивности накопления осадка α , или больше пороговая концентрация слеживания осадка C^* . В обратном случае – фракции становятся тяжелыми. Летучие фракции остаются преимущественно во взвешенном состоянии и даже при незначительных увеличениях скорости внутри области решения легко переносятся потоком и вымываются. Тяжелые же фракции начинают вымываться из области решения только вслед за значительными сужениями канала, и последующим существенным увеличением скорости потока внутри канала.

3.1.3. Моделирование примеси, состоящей из нескольких фракций частиц

Как правило, шламовые стоки не состоят из частиц одной крупности, и в них выделяют до пяти фракций. При этом каждая из фракции должна определяться своим набором характеристик. И в предложенной в данной диссертационной работе модели для каждой из фракций должно решаться свое уравнение переноса примеси с соответствующими граничными и начальными условиями. Разработанный программный комплекс позволяет выделять до пяти фракций примеси в очищаемых стоках [38].

Рассмотрим смесь, состоящую из пяти фракций – от самой «летучей» до «тяжелой». Для каждой из фракций совпадают значения параметров: скорость оседания примеси под действием силы тяжести $v_s = 1$; концентрация во входном потоке $C_1 = 0.01$; концентрация в грунтовых водах

$C_2 = 0$; коэффициент интенсивности накопления осадка $\alpha = -1$; пороговое значение концентрации слеживания осадка $C^* = 0.9$, при котором примесь слежится, по истечении порогового времени оседания $T^* = 10$. Значение коэффициента диффузии различалось, и именно это значение определяло крупность выбранной фракции. Коэффициент диффузии D выбирался, соответственно: 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0. Все приведенные ниже расчеты были проведены с такими же характеристиками сетки, и размерами области решения, как и в прошлом пункте. На (Рисунок 3.30 – Рисунок 3.31) иллюстрируется распространение рассматриваемой примеси, состоящий из пяти фракций частиц.

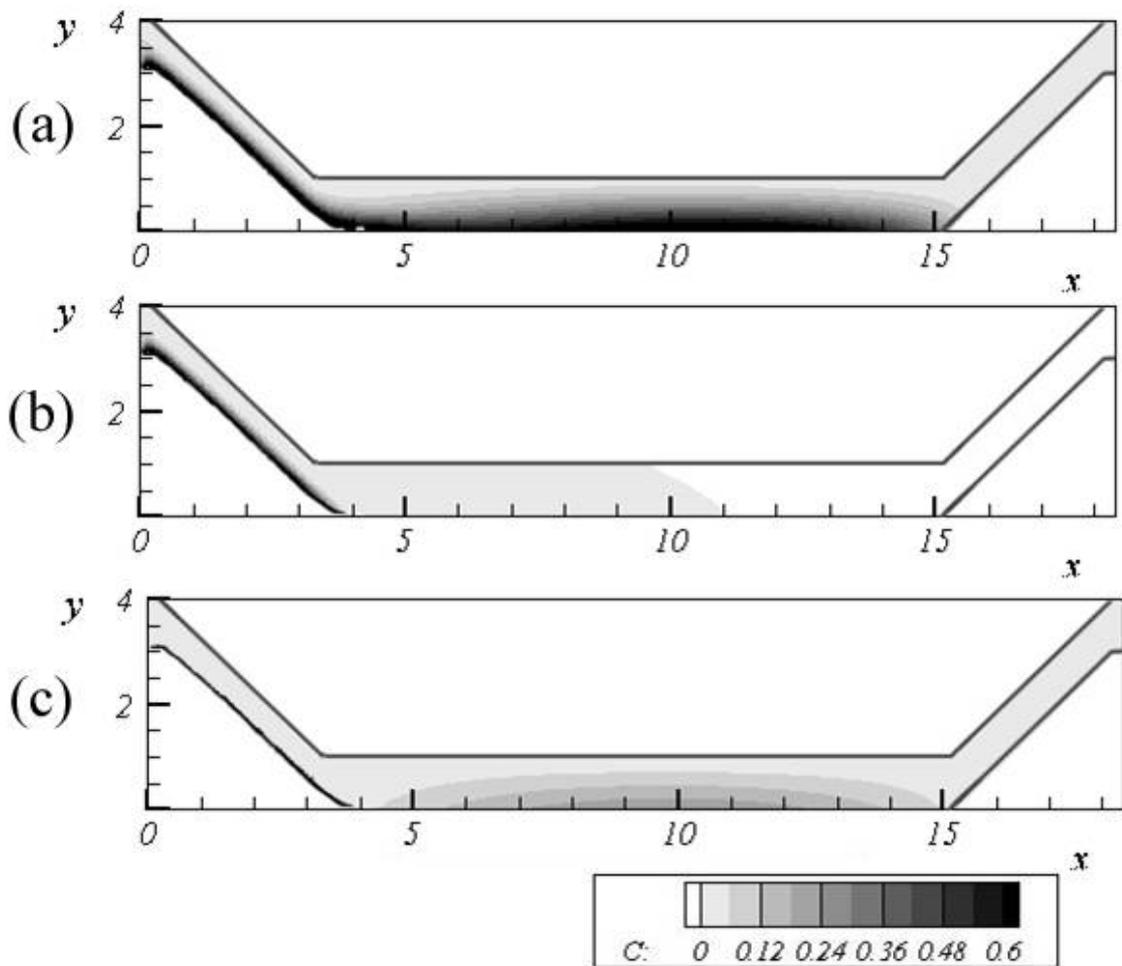


Рисунок 3.30 Распространение примеси, состоящей из пяти фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес., где: (a) суммарное поле концентрации; (b) первая фракция (самая «тяжелая») при $D = 0.01$; (c) пятая фракция (самая «летучая») при $D = 1.0$

Самая «тяжелая» фракция примеси оседает преимущественно вдоль наклонной границы вблизи входного отверстия и незначительно переносится с потоком жидкости вдоль канала (см. Рисунок 3.30.b). С увеличением диффузии каждая следующая фракция становится более «летучей», и распространяется дальше по каналу, место накопления осадка сдвигается ближе к выходной границе (см. Рисунок 3.31). Однако самая «легкая» примесь наиболее равномерно заполняет всю область решения, остается преимущественно во взвешенном состоянии и почти не осаждается (см. Рисунок 3.30.c).

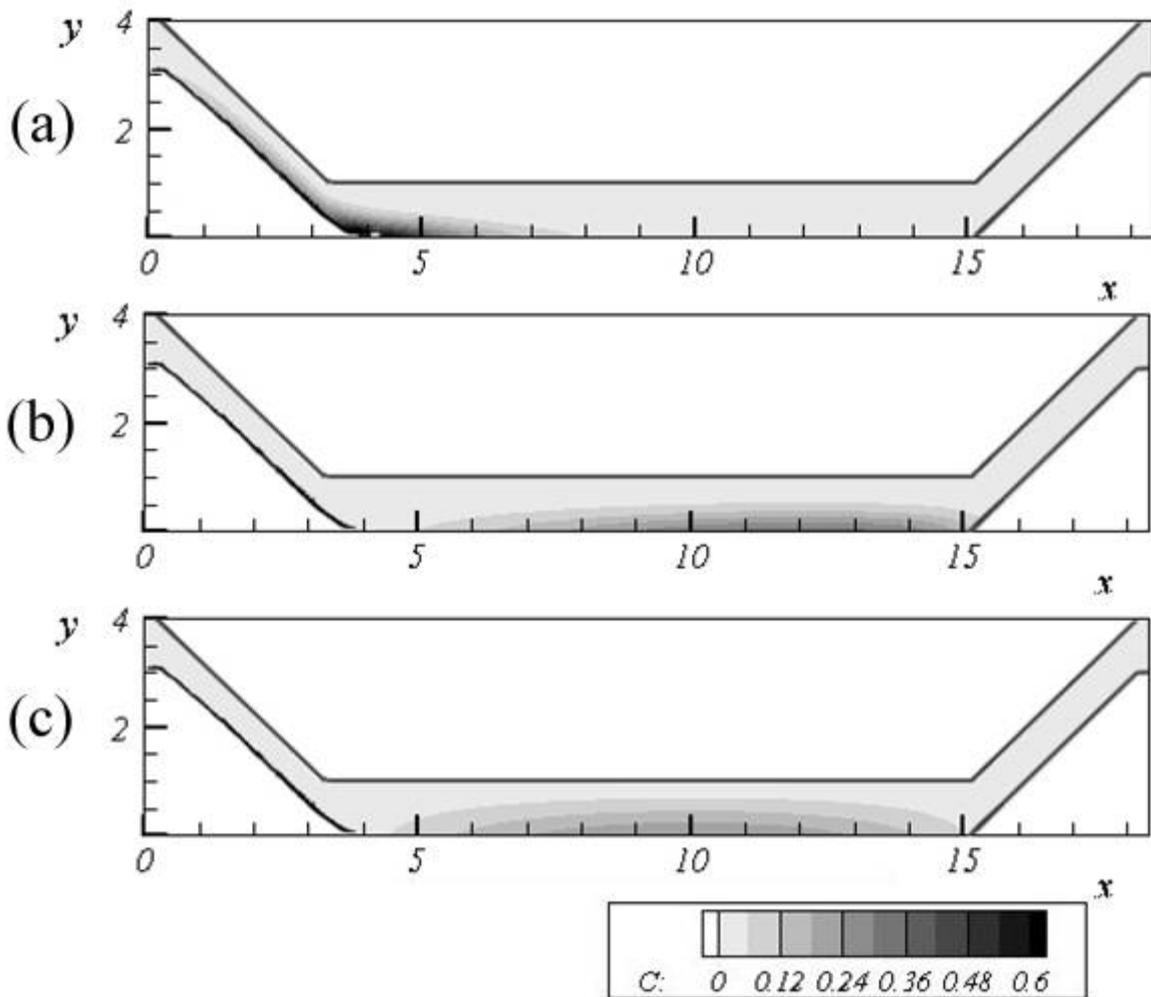


Рисунок 3.31 Распространение примеси, состоящей из пяти фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес., где: (a) вторая фракция при $D = 0.05$; (b) третья фракция при $D = 0.1$; (c) четвертая фракция при $D = 0.5$

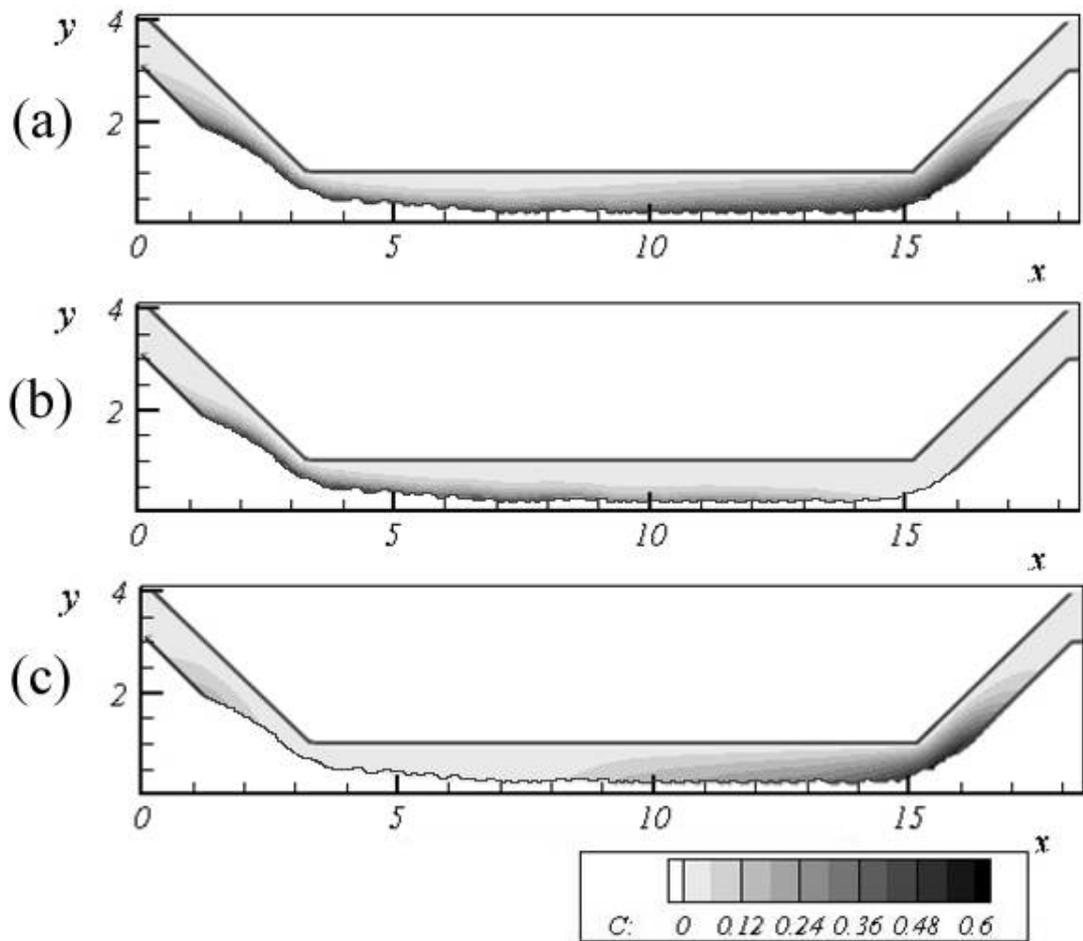


Рисунок 3.32 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц. «Тяжелая фракция» задана с параметрами: $C_1 = 0.025$; $C_2 = 0$; $D = 1$; $v_s = 2.5$; $\alpha = -5$; $C^* = 0.6$; $T^* = 10$. «Легкая фракция» задана с параметрами: $C_1 = 0.025$; $C_2 = 3 \cdot 10^{-5}$; $D = 4$; $v_s = 0.1$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.9$; $T^* = 10$. Результаты, представленные на рисунке, были получены на момент времени $t = 1000$ мес., где: (a) суммарное поле концентрации; (b) «тяжелая» фракция; (c) «легкая» фракция

Для проведения исследования качества очистки не обязательно выделять пять фракций частиц в очищаемых стоках. По фракционному составу примеси условно можно поделить на «летучие» и «тяжелые», и проведенные выше численные эксперименты это подтверждают. Рассмотрим примесь, состоящую из двух фракций (см. Рисунок 3.32).

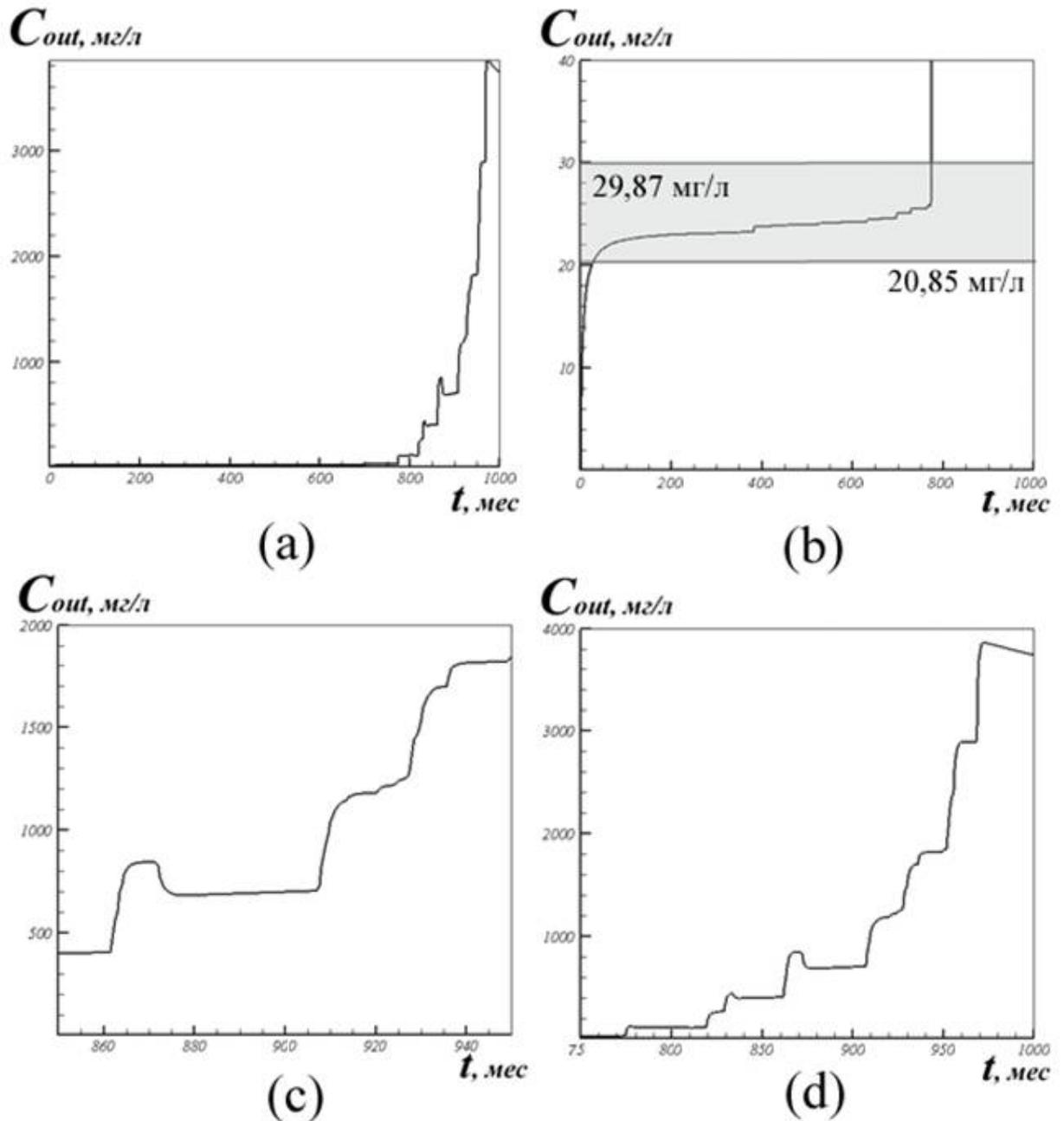


Рисунок 3.33 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения, где (а) общий график; (б) увеличенная часть графика для концентрации $C_{out} \in [0, 50]$ мг/л, где серым выделен диапазон, соответствующий натурным данным; (с) увеличенная часть графика для $C_{out} \in [0, 200]$ мг/л и $t \in [850, 950]$ мес.; (д) увеличенная часть графика для $t \in [750, 1000]$ мес.

Летучие примеси представляют собой самые мелкие частицы, тяжелые фракции, наоборот, состоят из крупных частиц. Последние в значительной мере осаждаются, их концентрация увеличивается ближе к нижней границе области решения (см. Рисунок 3.32.б). Осадок из тяжелых фракций

слеживается, что приводит к изменению области решения и соответствующему увеличению скорости течения в месте сужения основного канала. Из-за этого, а также за счет большой диффузии и плохой осаждаемости, легкие фракции интенсивно распространяются по области решения, незначительно выпадают в осадок, и существенно вымываются (см. Рисунок 3.32.с), увеличивая мутность откачиваемой жидкости.

Из приведенных графиков изменения среднего значения концентрации примеси на выходной границе C_{out} (Рисунок 3.33) видно, что примерно через год концентрация примеси в откачиваемой жидкости достигает значения 21 мг/л и на протяжении 780 месяцев (≈ 65 лет) эта величина незначительно меняется (см. Рисунок 3.33.б), что соответствует натурным данным. В дальнейшем слеживание выпавшего осадка приводит к сужению канала и «летучие» фракции примеси «смываются». Концентрация загрязнений на выходной границе области решения резко растет (см. Рисунок 3.33.а).

В период времени $t \in [700, 900]$ мес. происходит несколько таких скачков, после каждого из которых наблюдается временная нормализация – концентрация устанавливается на некотором уровне и почти не меняется (см. Рисунок 3.33.с). Легкие фракции примеси остаются во взвешенном состоянии, и, как только скорости внутри области решения начинают увеличиваться, продвигаются к выходной границе вместе с потоком жидкости. При этом у наклонной границы вблизи выходного отверстия такие фракции задерживаются и накапливаются и частично выпадают в осадок. Именно у основания этой границы концентрация легких фракций максимальна. В моменты времени, когда осадок из тяжелых фракций слеживается – скорость потока в местах сужения канала может достаточно резко расти (в 20 и более раз в месте сужения). Соответственно увеличивается скорость и по всему каналу. Это приводит к тому, что часть взвешенных легких фракций, сконцентрированная у правой наклонной границы, вымывается. В дальнейшем скорости в области решения нормализуются, вслед за чем нормализуется и концентрация примеси на

выходной границе (см. Рисунок 3.33.d). У правой наклонной границы вновь увеличивается концентрация перенесенных потоком легких фракций. Такая ситуация сохраняется, и повторяется со следующим сужением канала из-за слеживания тяжелых фракций примеси. По мере заполнения слежавшимся осадком и существенного изменения области решения, скорости внутри области решения все больше растут, а легкие фракции меньше задерживаются, вымываясь с потоком жидкости. Концентрация легких фракций на выходной границе растет. Но, несмотря на то, что каждый следующий скачок концентрации на выходе имеет большее «пиковое» значение, чем предыдущий, на момент времени $t = 1000$ мес. для выбранной примеси из двух фракций частиц этот показатель остается более чем в 10 раз меньше, чем концентрация примеси на входной границе (50000 мг/л).

3.1.4. Численное моделирование «залпового выброса»

Наибольшая опасность при очистке жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт заключается в возможности «залпового выброса». Это явление характеризуется резким увеличением концентрации примеси в откачиваемой жидкости до сравнимых с концентрацией на входе значений. Для безопасного использования выработки как очистного сооружения крайне важно не допустить этого явления, и иметь возможность дополнительно очищать откачиваемую из подземного пространства жидкость на резервных очистных сооружениях. Пиковое значение концентрации во время залпового выброса играет большую роль. Чем выше этот показатель, тем более серьезная доочистка откачиваемой жидкости потребуется, а, следовательно, и возрастут затраты. Нельзя допускать, чтобы значения пиковой

концентрации загрязнений в откачиваемой жидкости стали близки или превысили концентрацию загрязнений в закачиваемых для очистки стоках.

Причинами возникновения «залпового выброса» могут стать следующие факторы:

- сужение основного канала выработки из-за оставленного оборудования или других причин;
- изменение гидродинамических условий вслед за сезонным изменением уровня грунтовых вод;
- фракционный состав примеси с преобладанием легких плохослеживаемых взвешенных частиц;
- особенности топологии горной выработки, при которых несслежавшийся осадок будет существенно вымываться.

В представленной в диссертационной работе модели имеется возможность изучать влияние всех этих факторов. Далее последовательно рассмотрим каждый из них и выясним их влияние на явление «залпового выброса».

Как известно, в зависимости от погодных условий и их сезонного изменения уровень грунтовых вод может значительно меняться. Безусловно, этот показатель должен повлиять на эффективность очистки шламовых стоков в отработанных горных выработках.

Рассмотрим задачу о распространении примеси, состоящей из двух фракций, при постоянном и изменяющемся объеме грунтовых вод, поступающих в область решения. Выберем те же характеристики области решения и сетки, что и в прошлом пункте, а характеристики примеси – следующим образом:

- для «тяжелой фракции»: скорость оседания под действием силы тяжести $u_s = 2.5$; коэффициент диффузии $D = 1$; концентрация во входном потоке $C_1 = 0.025$; концентрация в грунтовых водах

$C_2 = 0$; интенсивность накопления осадка $\alpha = -5$; пороговое значение концентрации $C^* = 0.6$, при котором выпавшая в осадок примесь слежится, по истечении порогового времени оседания $T^* = 10$.

- для «легкой фракции»: $v_s = 0.1$; $D = 4$; $C_1 = 0.025$; $C_2 = 0.000025$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.9$, $T^* = 10$.

Последовательно рассмотрим случаи, когда в выработанное пространство поступает постоянный объем грунтовых вод (Рисунок 3.34, Рисунок 3.35), когда периодически этот показатель растет (Рисунок 3.36, Рисунок 3.37) или падает (Рисунок 3.38, Рисунок 3.39) и возвращается на прежний уровень, или происходят сезонные колебания (Рисунок 3.40, Рисунок 3.41).

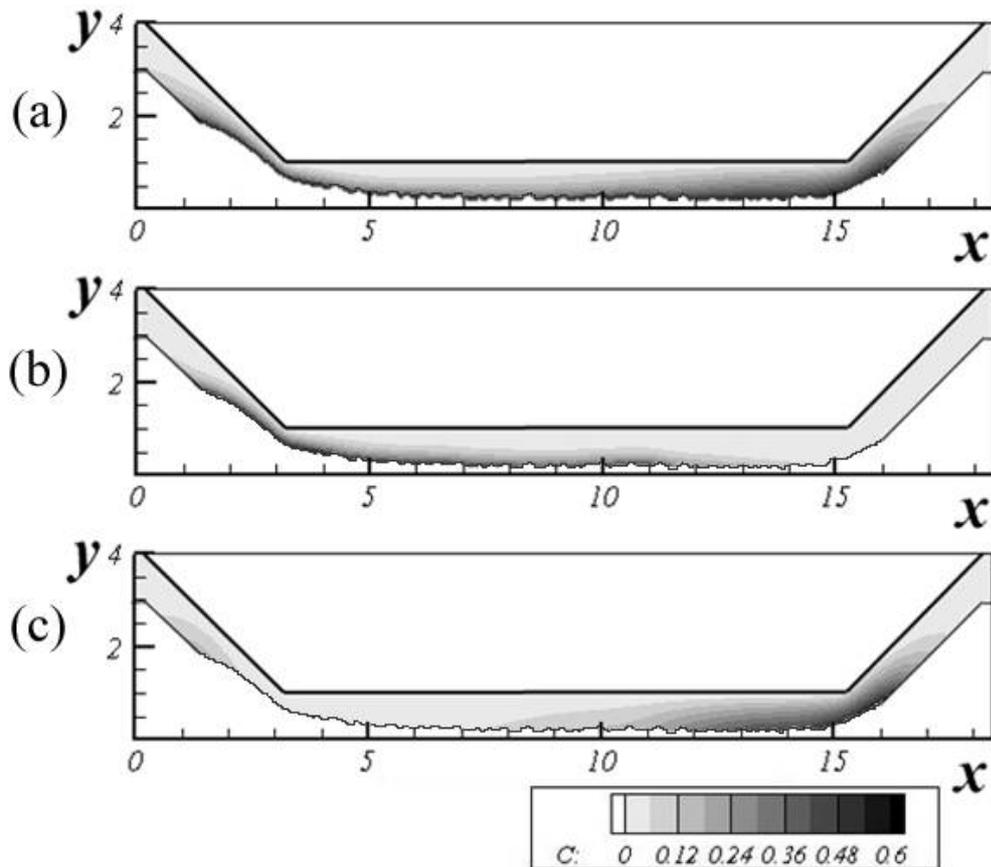


Рисунок 3.34 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, при постоянном объеме грунтовых вод V , поступающих в область решения. Результаты, представленные на рисунке, были получены на момент времени $t = 1000$ мес., где (a) суммарное поле концентрации; (b) «тяжелая» фракция; (c) «легкая» фракция

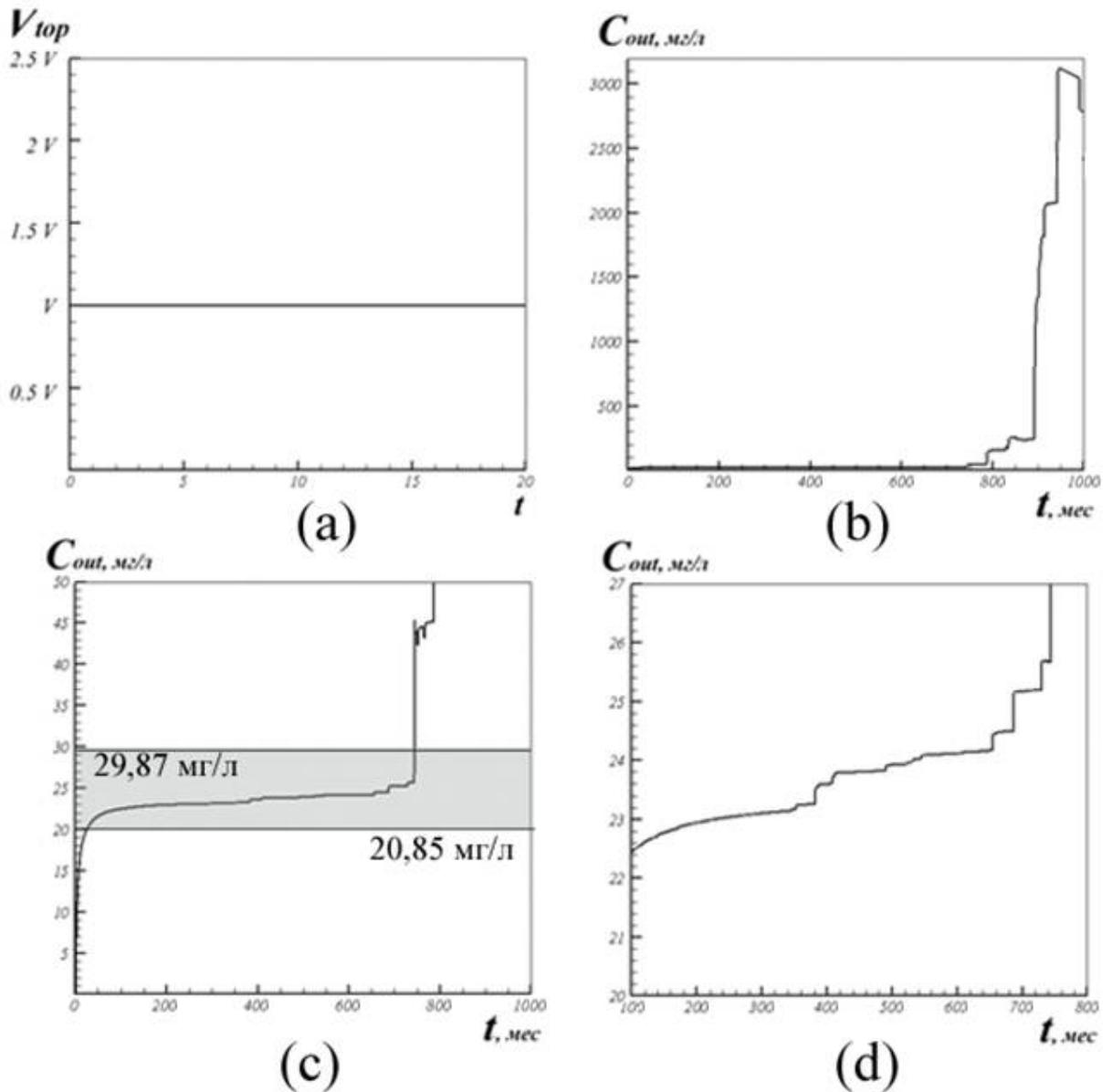


Рисунок 3.35 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Результаты получены для случая с постоянным объемом поступающих в выработанное пространство грунтовых вод, где: (а) график изменения объема грунтовых вод, поступающих в область решения; (б) общий график изменения концентрации на выходной границе; (с) увеличенная часть графика для $C_{out} \in [0, 50]$ мг/л., где серым выделен диапазон, соответствующий натурным данным, представленным в (Таблица 8).; (д) часть графика при $t \in [100, 800]$ мес. и $C_{out} \in [20, 27]$ мг/л

Если объем грунтовых вод V , поступающих в область решения, остается постоянным на протяжении всего расчетного времени и вычисляется из соотношения объемов как $V = \int_{\Gamma_3} v_0 d\Gamma_3 = 4 \int_{\Gamma_1} u_0 d\Gamma_1$ (см. Рисунок 3.34), тогда «залповый выброс» возникает только при существенном изменении области решения из-за слеживания осадка. На протяжении долгого периода времени процесс очистки остается «безопасным», график изменения концентрации примеси на выходной границе остается достаточно гладким и соответствует натурным данным (см. Рисунок 3.35).

Колебания объема поступающих в область решения грунтовых вод V могут существенно повлиять на качество очистки. В частности, если каждый год в период с марта по май (с третьего по пятый месяц) объем грунтовых вод будет увеличиваться в 2.5 раза, а в остальной период времени оставаться постоянным (см. Рисунок 3.37.a), изменится не только характер распространения примесей по области решения (см. Рисунок 3.36), но и график изменения концентрации на выходной границе (см. Рисунок 3.37.b).

С одной стороны, «тяжелая» фракция примеси интенсивнее распространяется по области решения и равномернее заполняет центральную часть (см. Рисунок 3.36.b), при этом вдоль наклонной границы вблизи выходной границы осадок сильнее уплотняется и больше слеживается. А с другой стороны, «легкая» фракция почти полностью «смывается» из области решения (см. Рисунок 3.37.c), нет зон, где легкие фракции бы существенно скапливались.

Явление «залпового выброса» в данном случае возникает немного раньше $t \approx 700$ мес., и «пиковое» значение концентрации на выходной

границе существенно возрастает (≈ 3.5 раза) по сравнению с прошлым расчетом (см. Рисунок 3.37). Это, прежде всего, связано с тем, что доля «тяжелых» фракций в откачиваемой жидкости растет. Также из-за колебаний величины V наблюдаются и похожие пульсирующие изменения на графике концентрации на выходной границе (см. Рисунок 3.37.d).

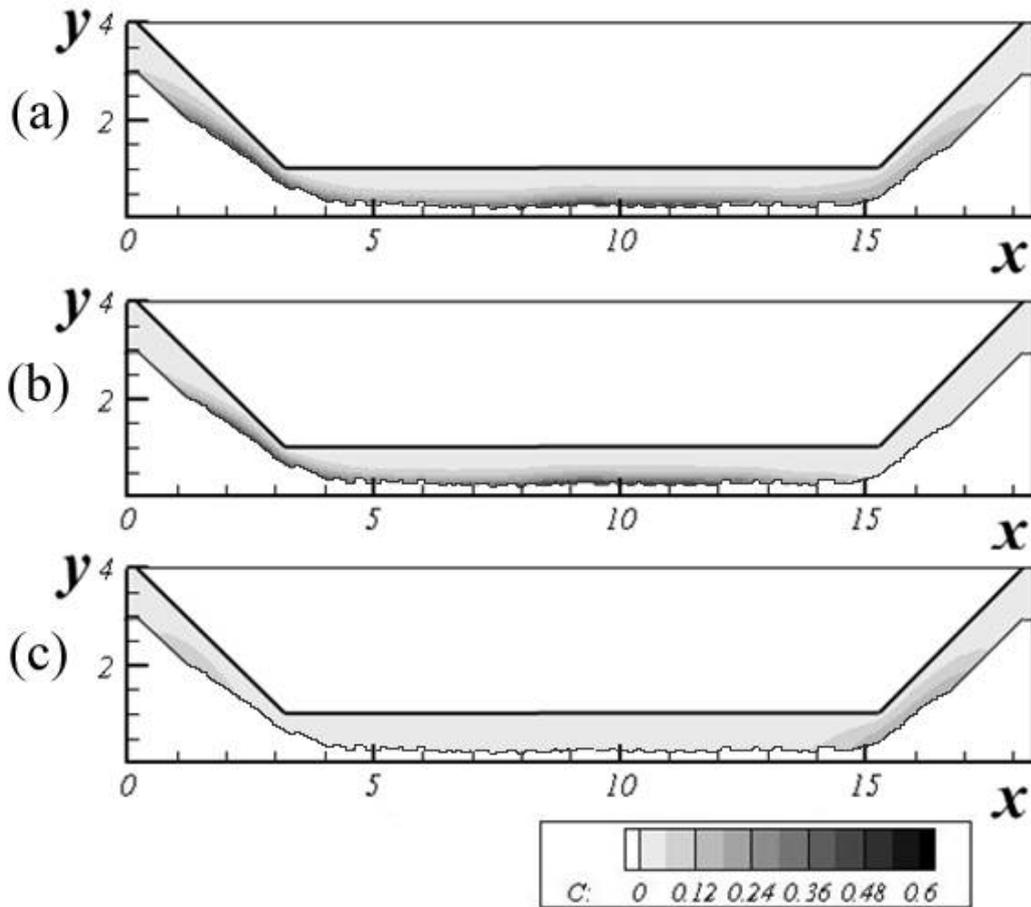


Рисунок 3.36 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, при изменяющемся объеме грунтовых вод V . С марта по май каждого года V увеличивается в 2.5 раза и возвращается к «нормальному» значению $V = \int_{\Gamma_3} v_0 d\Gamma_3 = 4 \int_{\Gamma_1} u_0 d\Gamma_1$ в остальные периоды времени. На рисунке представлено полученное на момент времени $t=1000$ мес., где (a) суммарное поле концентрации; (b) «тяжелая» фракция; (c) «легкая» фракция

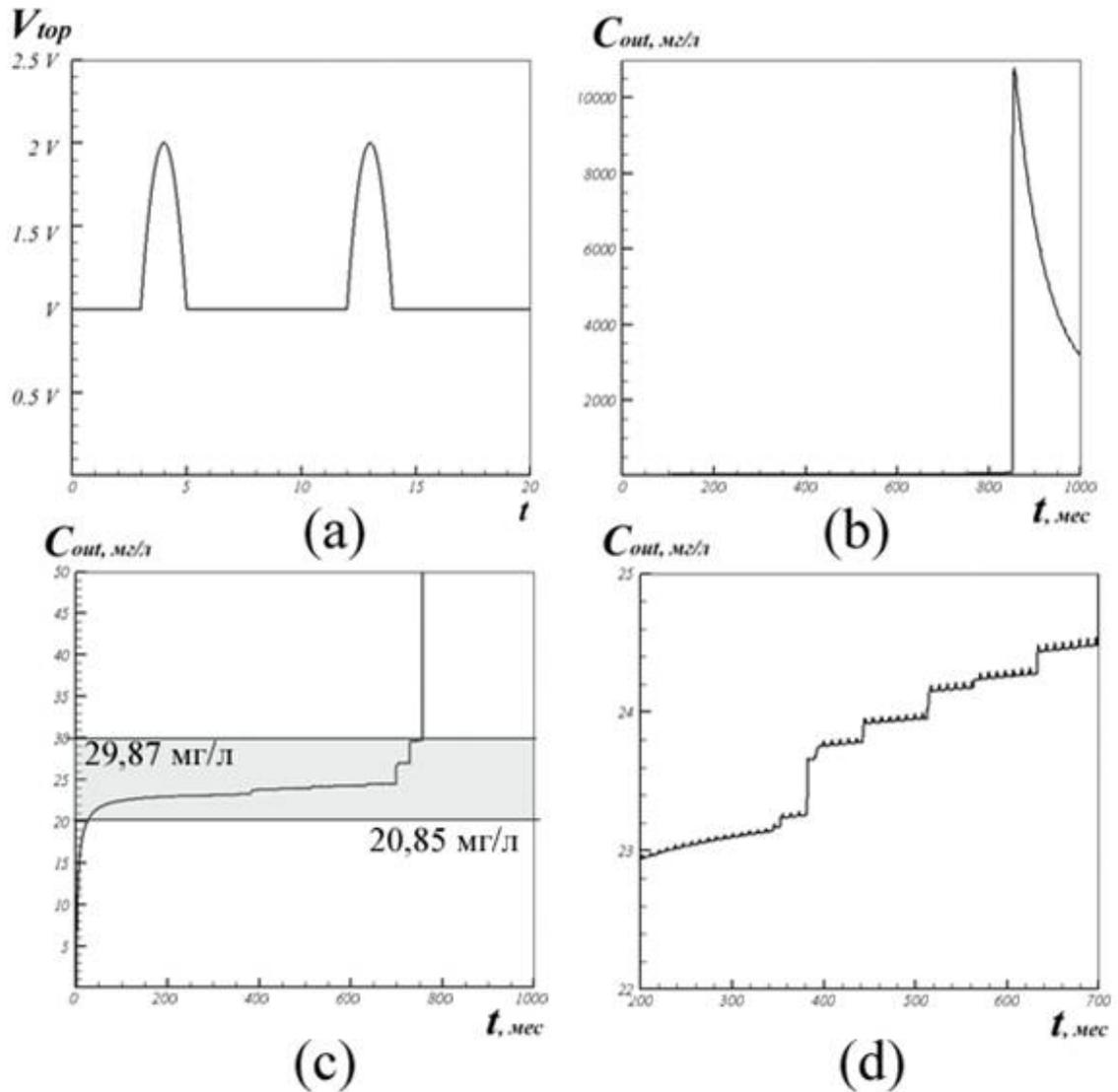


Рисунок 3.37 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Результаты получены для случая с сезонными увеличениями объема поступающих в выработанное пространство грунтовых вод, где: (а) график изменения объема грунтовых вод, поступающих в область решения; (б) общий график изменения концентрации на выходной границе; (с) увеличенная часть графика для $C_{out} \in [0, 50]$ мг/л., где серым выделен диапазон, соответствующий натурным данным, представленным в (Таблица 8).; (д) часть графика при $t \in [100, 700]$ мес. и $C_{out} \in [20, 27]$ мг/л

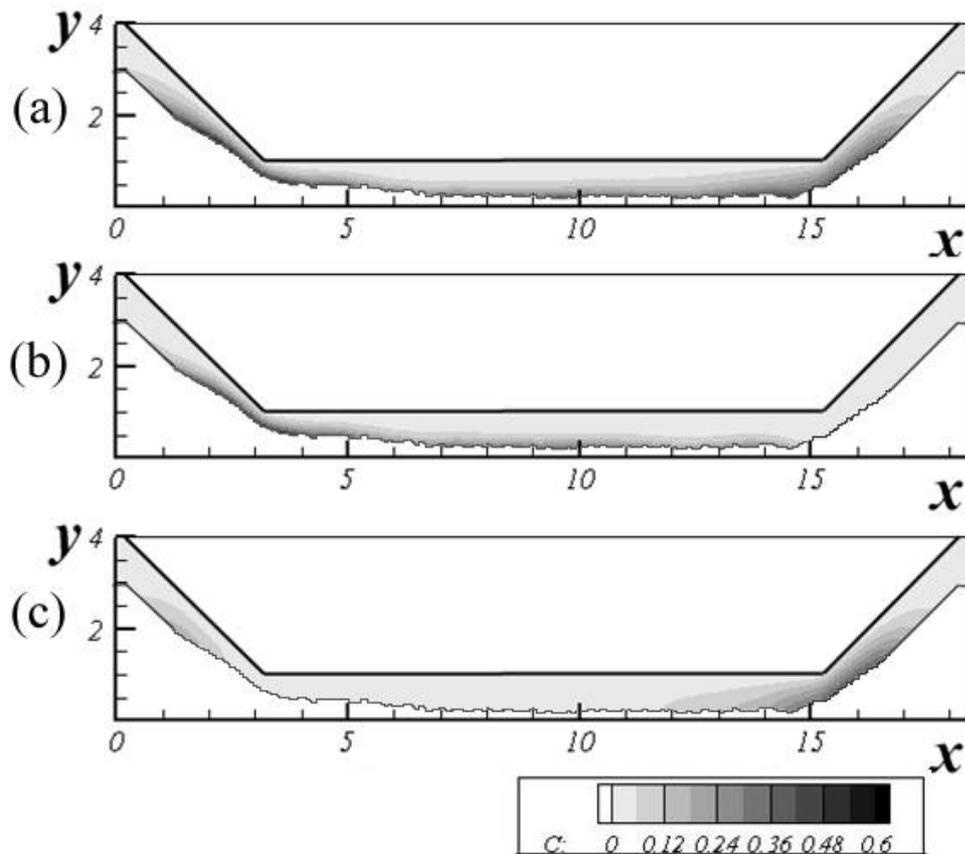


Рисунок 3.38 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, при изменяющемся объеме грунтовых вод V . С июня по август каждого года V уменьшается в 2 раза и возвращается к «нормальному» значению $V = \int_{\Gamma_3} v_0 d\Gamma_3 = 4 \int_{\Gamma_1} u_0 d\Gamma_1$ в остальные периоды времени. На рисунке представлено полученное на момент времени $t = 1000$ мес. где (a) суммарное поле концентрации; (b) «тяжелая» фракция; (c) «легкая» фракция

Однако уменьшение объема грунтовых вод V может привести к не менее негативным последствиям, по сравнению с увеличением этого показателя. Рассмотрим случай, когда с июня по август каждого года объем грунтовых вод будет падать в два раза и возвращаться к своему «нормальному» значению в остальное время (см. Рисунок 3.39.а).

Однако по сравнению с первым расчетом, когда $V = const$ на протяжении всего расчетного времени, в данном случае пиковое значение концентрации на выходной границе только в два раза больше, полученного ранее (см. Рисунок 3.39.б). Время «безопасной» работы выработки как

очистного сооружения немного увеличивается $t = 780$ мес. (см. Рисунок 3.39.с). График концентрации имеет такие же пульсирующие локальные изменения, как и график изменения V (см. Рисунок 3.39.d).

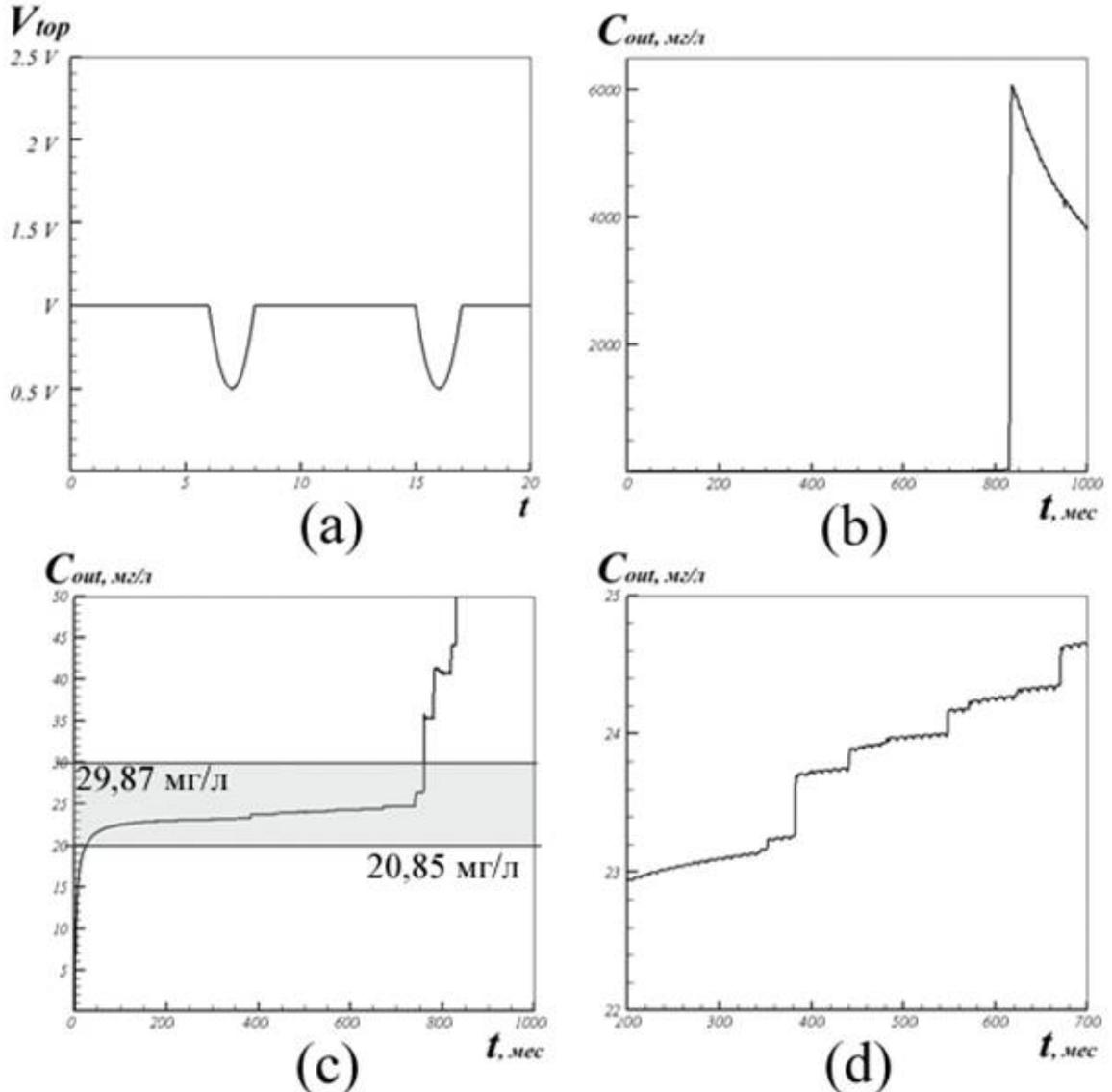


Рисунок 3.39 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Результаты получены для случая с сезонными уменьшениями объема поступающих в выработанное пространство грунтовых вод, где: (а) график изменения объема грунтовых вод, поступающих в область решения; (б) общий график изменения концентрации на выходной границе; (с) увеличенная часть графика для $C_{out} \in [0, 50] \text{ мг/л}$, где серым выделен диапазон, соответствующий натурным данным, представленным в (Таблица 8).; (д) часть графика при $t \in [100, 800]$ мес. и $C_{out} \in [20, 27] \text{ мг/л}$

Также можно моделировать комбинированные изменения уровня грунтовых вод, когда наблюдаются как увеличения, так и уменьшения показателя V (см. Рисунок 3.40 – Рисунок 3.41). При этом комбинация периодов времени с увеличением и уменьшением объема грунтовых вод может «благоприятно» повлиять на равномерность заполнения области слежавшимся осадком (см. Рисунок 3.40). Также время до возникновения залпа увеличивается по сравнению с идеальными условиями при постоянном объеме поступающих грунтовых вод, но значение пиковой концентрации, наоборот, увеличивается в 2,5 раза при наличии колебаний V .

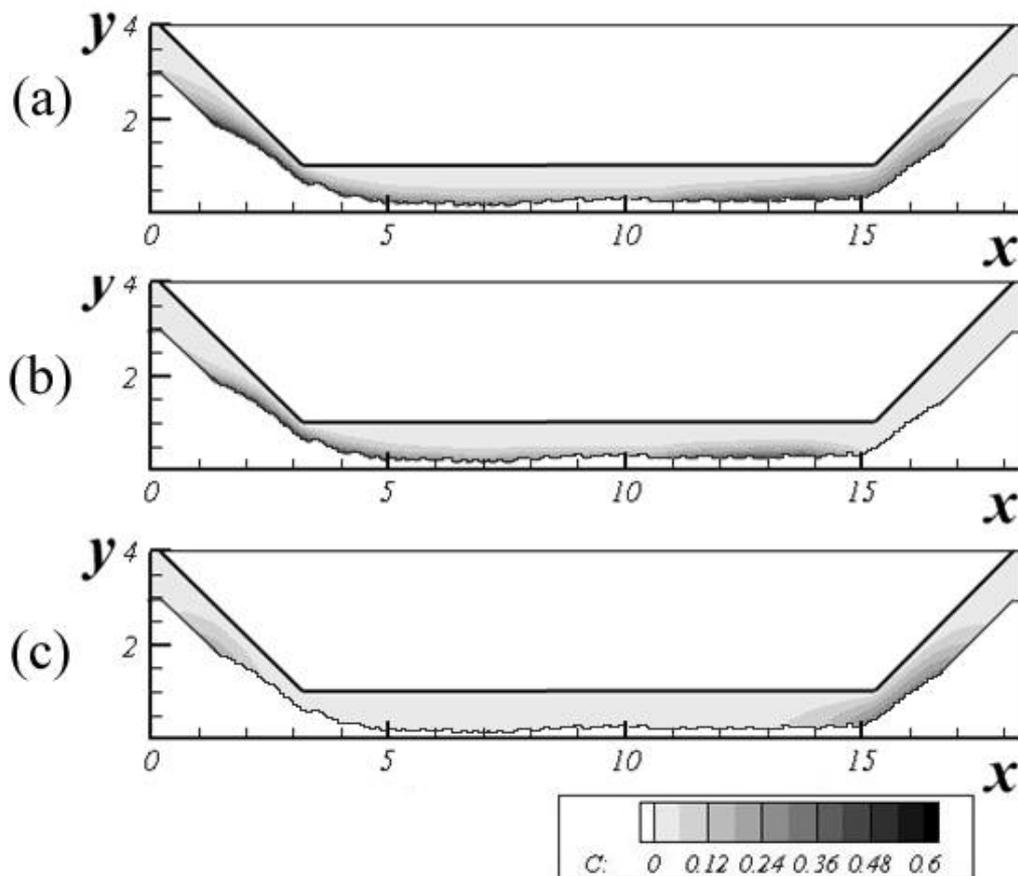


Рисунок 3.40 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, при изменяющемся объеме грунтовых вод V . С марта по май каждого года V увеличивается в 2.5 раза, а с июня по август – уменьшается в 2 раза и возвращается к «нормальному» значению $V = \int_{\Gamma_3} v_0 d\Gamma_3 = 4 \int_{\Gamma_1} u_0 d\Gamma_1$ в остальные периоды времени. На рисунке представлено полученное на момент времени $t = 1000$ мес., где (a) суммарное поле концентрации; (b) «тяжелая» фракция; (c) «легкая» фракция

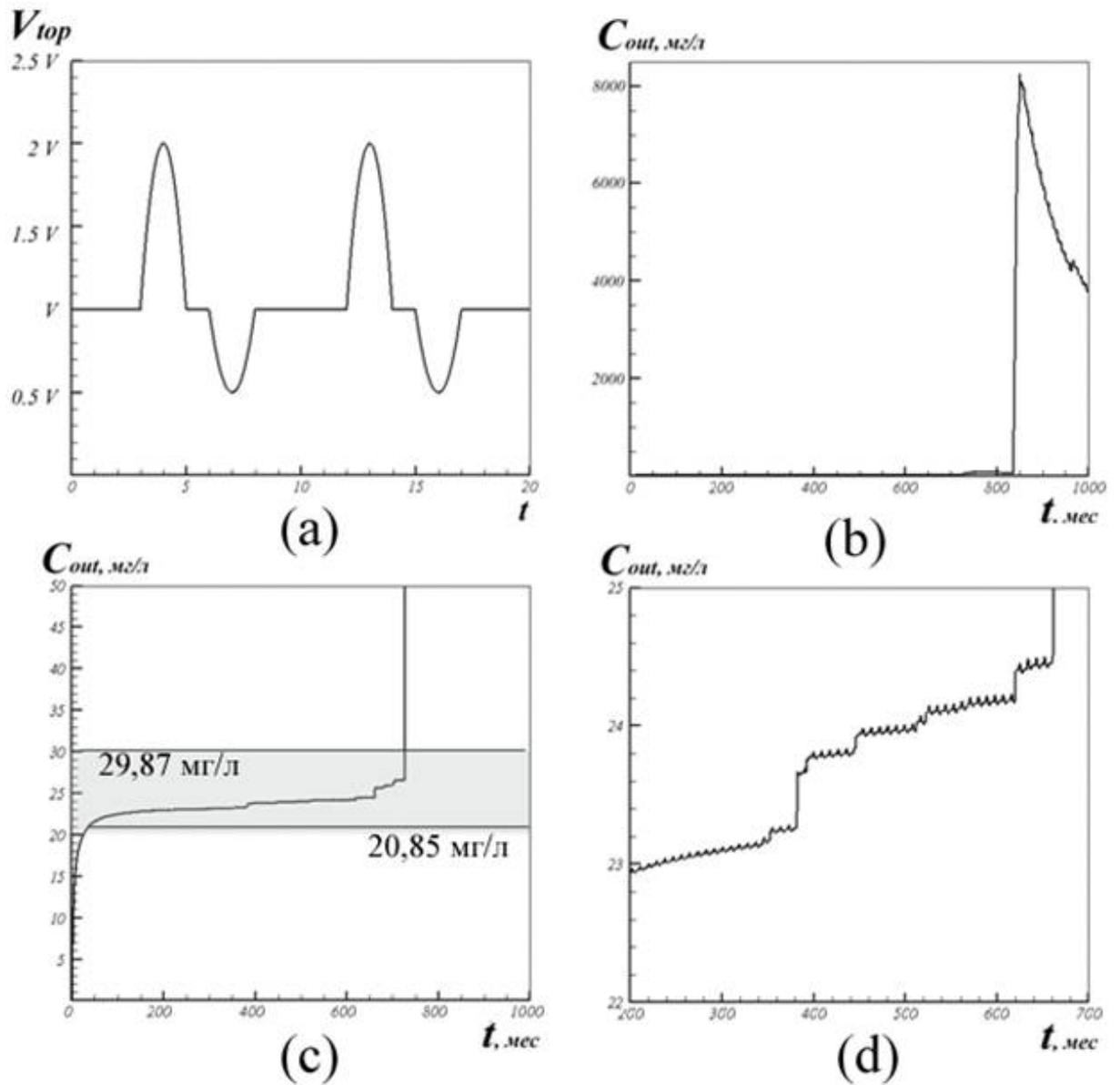


Рисунок 3.41 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Результаты получены для случая с сезонными колебаниями объема поступающих в выработанное пространство грунтовых вод, где: (а) график изменения объема грунтовых вод, поступающих в область решения; (б) общий график изменения концентрации на выходной границе; (с) увеличенная часть графика для $C_{out} \in [0, 50]$ мг/л., где серым выделен диапазон, соответствующий натурным данным, представленным в (Таблица 8).; (д) часть графика при $t \in [100, 700]$ мес. и $C_{out} \in [20, 27]$ мг/л

Таким образом, изменение уровня грунтовых вод может принципиально повлиять на процесс очистки (см. Рисунок 3.42.а). Результаты проведенных численных экспериментов показали, что время до возникновения залпового выброса при наличии колебаний объема поступающих грунтовых вод V может увеличиваться по сравнению с идеальным случаем при $V = const$. Так наибольшее время получено при сезонных колебаниях V , а наименьшее – при $V = const$, однако различие этой величины во всех рассмотренных случаях незначительно (см. Рисунок 3.42.б). Наибольшее влияние показатель V оказывает на пиковые значения залпа (см. Рисунок 3.42.а). Так при сезонных краткосрочных увеличениях V было получено максимальное пиковое значение концентрации загрязнений на выходной границе, которое в 3,5 раза превышает соответствующее значение, полученное при $V = const$.

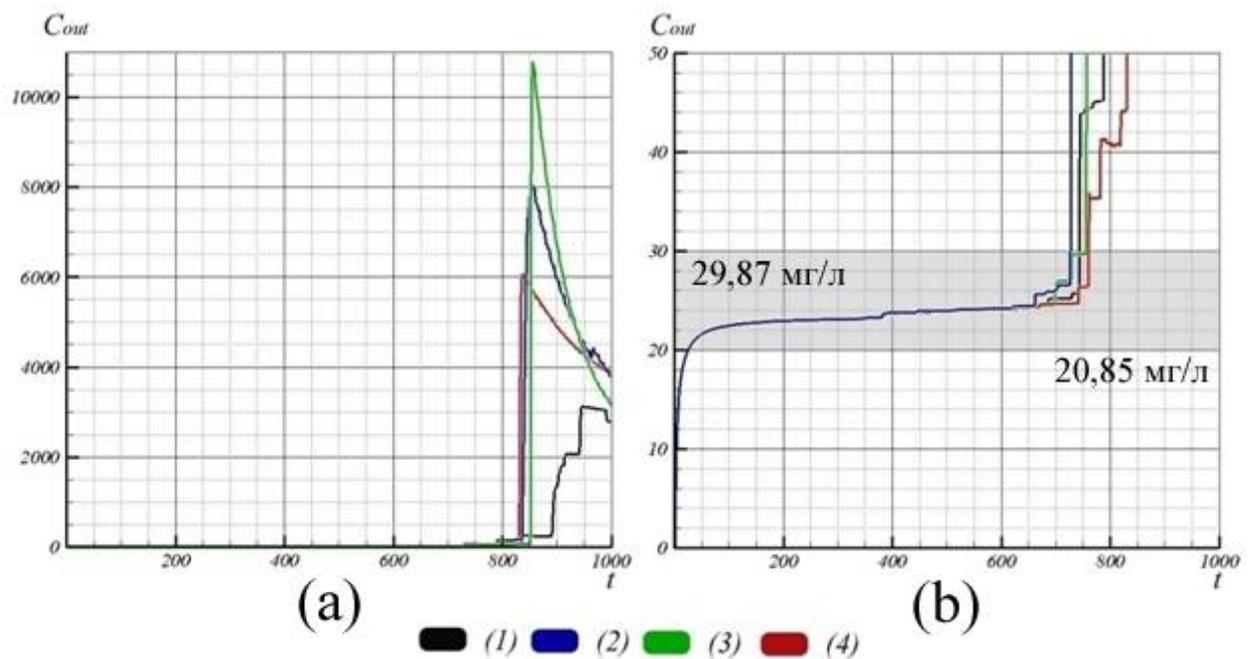


Рисунок 3.42 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения, полученные с учетом сезонных колебаний объема поступающих в выработанное пространство грунтовых вод. Где выбирается уровень грунтовых вод: (1) постоянный; (2) с сезонными колебаниями, с сезонными увеличениями (3) и уменьшениями (4). На рисунке (а) представлен общий график, на (б) – увеличенная часть графика, где серым выделена область, соответствующая натурным данным (см. Таблица 8)

концентрации $C^* = 0.6$, при котором выпавшая в осадок примесь слежится, по истечении порогового времени оседания $T^* = 10$.

- «легкая фракция»: $v_s = 0.5$; $D = 2$; $C_1 = 0.01$; $C_2 = 0.00003$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.9$, $T^* = 10$.

Очистка выбранной примеси моделировалась в каналах с сужениями: на четверть от высоты канала $H_3 = \frac{1}{4} H_2$ (см. Рисунок 3.44.b, Рисунок 3.45.b); на треть $H_3 = \frac{1}{3} H_2$ (см. Рисунок 3.44.c, Рисунок 3.45.c); половину $H_3 = \frac{1}{2} H_2$ (см. Рисунок 3.44.d, Рисунок 3.46.d); две трети $H_3 = \frac{2}{3} H_2$ (см. Рисунок 3.44.e, Рисунок 3.46.e); три четверти $H_3 = \frac{3}{4} H_2$ (см. Рисунок 3.44.f, Рисунок 3.46.f) и без сужения $H_3 = 0$ (см. Рисунок 3.44.a, Рисунок 3.45.a).

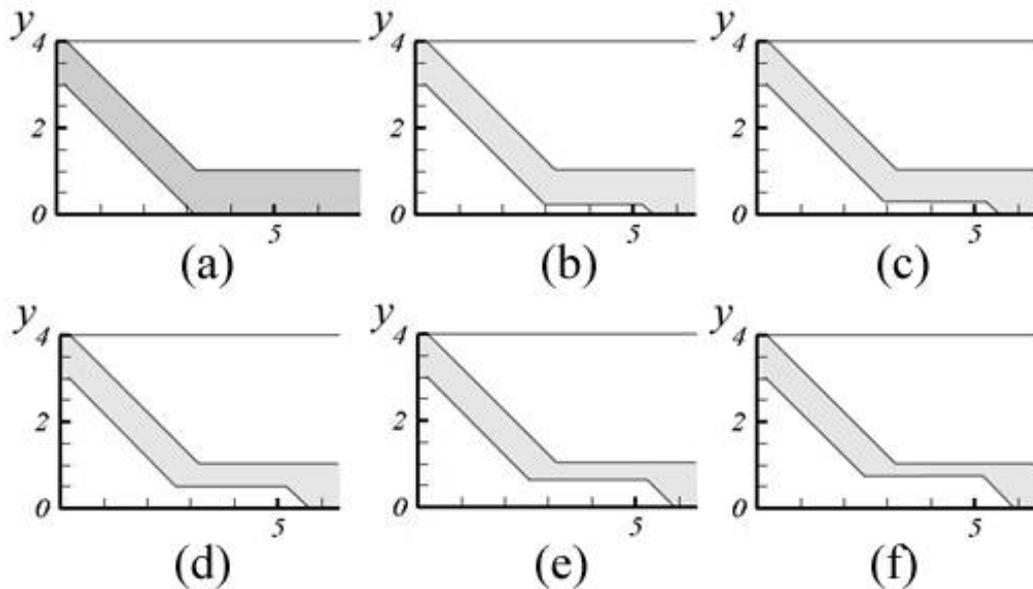


Рисунок 3.44 Увеличенная часть области решения (a) без сужения и с искусственным сужением: (b) на четверть высоты основного канала; (c) на треть; (d) на половину; (e) на две трети; (f) на три четверти

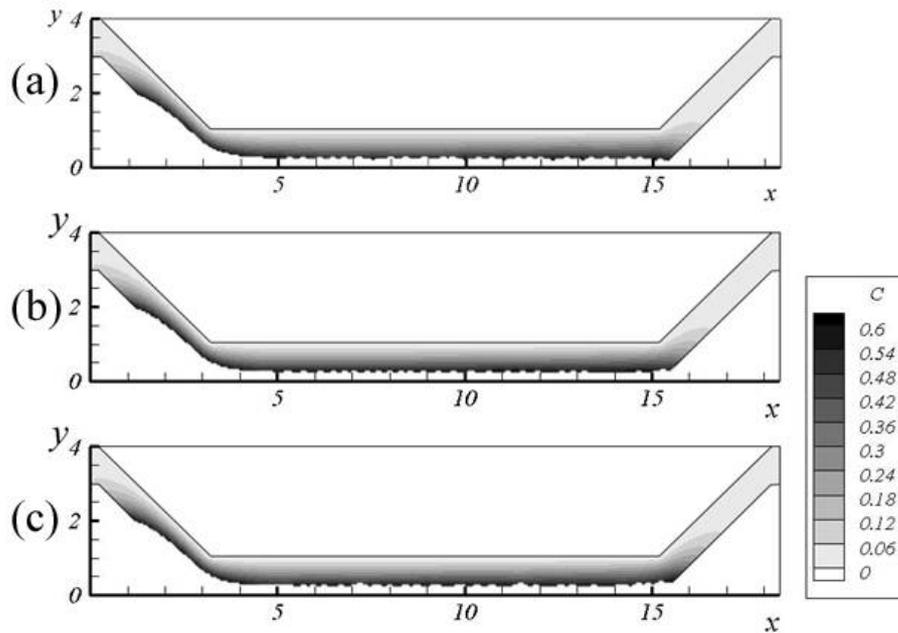


Рисунок 3.45 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес. В начальный момент времени область решения выбиралась (a) без сужения, с искусственным сужением (b) на четверть высоты основного канала; (c) на треть

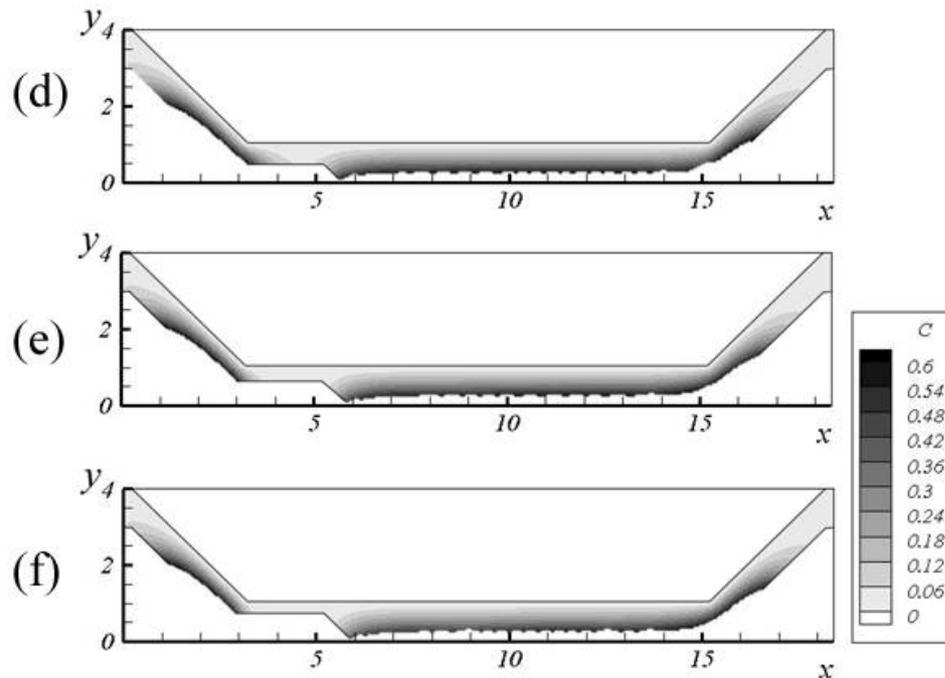


Рисунок 3.46 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес. В начальный момент времени область решения выбиралась с искусственным сужением (d) на половину высоты основного канала; (e) на две трети; (f) на три четверти

Наличие искусственного сужения в канале на начальный момент времени может иметь существенное значение для распространения примеси по области решения.

Модуль скорости $\|\bar{U}\| = \sqrt{u^2 + v^2}$ в самом узком месте каналов в начальный момент времени тем больше, чем больше искусственное сужение (см. Таблица 11). В месте сужения области решения примесь будет тем интенсивнее вымываться, чем меньше высота канала. При этом из-за возросших скоростей в месте сужения на искусственной «ступеньке» примесь не слеживается. Самые крупные фракции будут оседать вдоль наклонных границ у основания «ступеньки» (см. Рисунок 3.46). Легкие же фракции примеси вымываются из области решения, а пиковые значения концентрации на выходной границе растут в зависимости от увеличения высоты искусственного сужения (см. Рисунок 3.47.а). Более того, чем больше изначально было сужение – тем раньше возникнет «залповый выброс» примеси (см. Рисунок 3.47.б).

Таблица 11 Модуль скорости в самом узком месте канала в момент времени $t = 0$ в шахте, в зависимости от высоты искусственного сужения.

H_3	0	$\frac{1}{4} H_2$	$\frac{1}{3} H_2$	$\frac{1}{2} H_2$	$\frac{2}{3} H_2$	$\frac{3}{4} H_2$
$\ \bar{U}\ \cdot 10^4$, м/с.	7	12	34	45	63	83

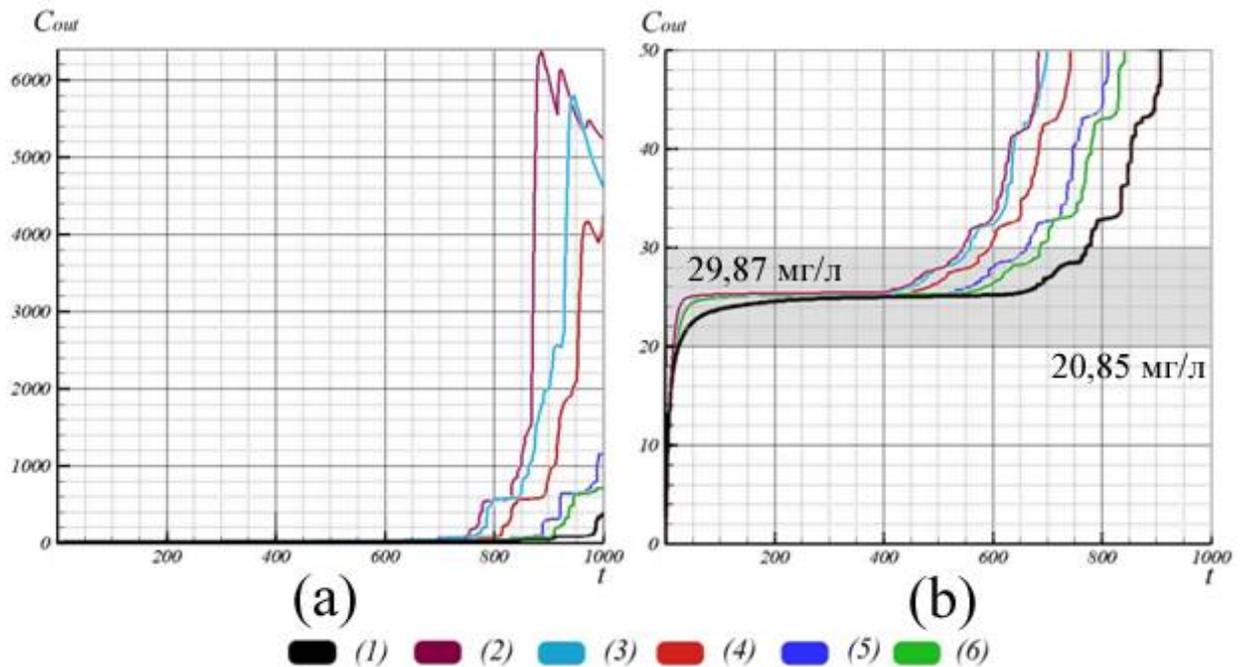


Рисунок 3.47 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения, полученные с учетом наличия сужения области решения в начальный момент времени. Результаты получены для областей (1) без сужения; и с сужениями (2) на четверть от высоты канала; (3) на треть; (4) на половину; (5) на две трети и (6) на три четверти. На рисунке (а) представлен общий график, на (b) – увеличенная часть графика, где серым выделена область, соответствующая натурным данным (см. Таблица 8)

На «залповый выброс» может повлиять не только наличие сужения в области решения, но и выбранная область решения как таковая. При ее выборе учитывались основные характерные особенности шахты Кольчугинской. Однако технология очистки в отработанных горных выработках может применяться и для других подобных горно-технологических объектов. Рассмотрим подобные области решения с теми же характерными размерами, но отличающиеся формой от выбранной ранее области. Рассмотрим области решения следующих форм: симметричную, выбранную как «базовую» (см. Рисунок 1.3, Рисунок 3.48.a); несимметричные области с удлиненной наклонной границей вблизи входного (см. Рисунок 3.49.a) и выходного отверстий (см. Рисунок 3.50.a), а также симметричную область с обеими удлиненными наклонными границами и укороченной средней частью (см. Рисунок 3.51.a). Высота основного канала

и общая длина в выбранных областях решения одинакова. Таким образом, не изменяются характерные размеры. Фракционный состав примесей взят таким же, как и в последней серии расчетов.

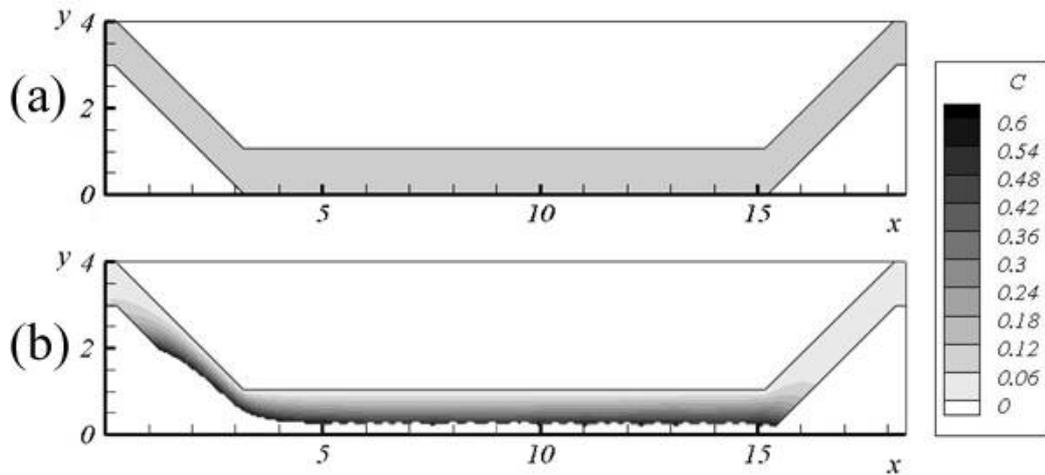


Рисунок 3.48 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес. в симметричной области решения. Где (a) область решения (b) распространение примеси

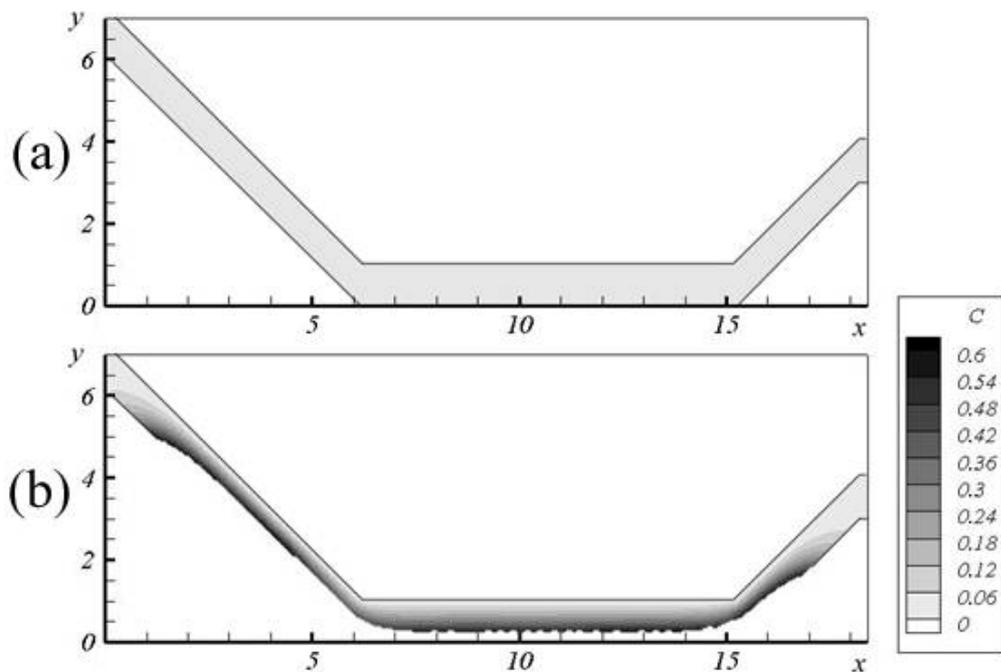


Рисунок 3.49 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес. в несимметричной области решения с удлиненной наклонной границей вблизи входной границы. Где (a) область решения (b) распространение примеси

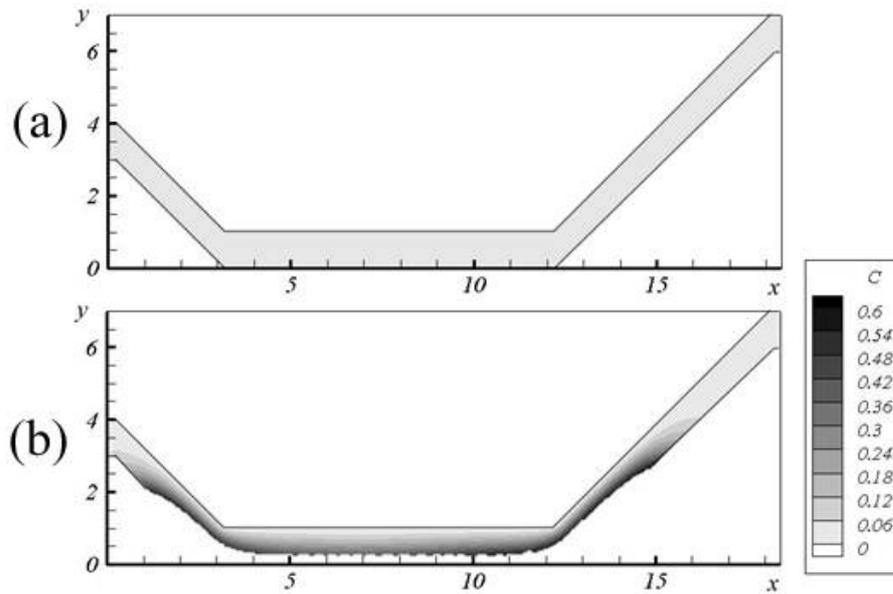


Рисунок 3.50 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес. в несимметричной области решения с удлиненной наклонной границей вблизи выходной границы. Где (a) область решения (b) распространение примеси

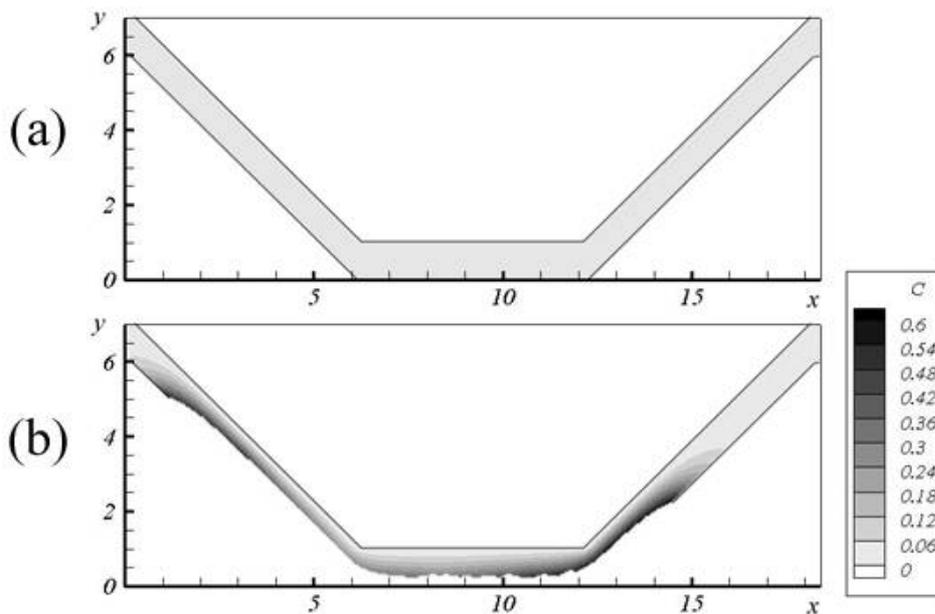


Рисунок 3.51 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, полученное на момент времени $t = 100$ мес в симметричной области решения с удлиненными наклонными границами и короткой горизонтальной частью в середине. Где (a) область решения (b) распространение примеси

Наибольшее время «безопасной» работы было получено для симметричной области решения с длинной средней частью и меньшими по сравнению с ней наклонными границами (см. Рисунок 3.52.b). В случае выбора такой области накопление осадка начинается у основания наклонной границы вблизи входной границы, соответственно и сужение образуется именно здесь (см. Рисунок 3.48.b). С ускорившимся потоком частицы примеси переносятся дальше по области решения и равномерно оседают вдоль всей длинной нижней горизонтальной границы. Таким образом, не происходит резкого сужения, и примеси хорошо задерживаются в области решения.

Если же наклонная граница вблизи входной границы слишком длинная, то примеси начинают слеживаться не у ее основания, а выше (Рисунок 3.49.b, Рисунок 3.51.b). Это приводит к резкому сужению канала, соответственно в области развивается течение с большей скоростью, и легкие взвешенные частицы быстрее вымываются (см. Рисунок 3.52.b). Если при этом еще и наклонная граница вблизи выходной границы недостаточно длинная, тогда времени для оседания и слеживания таких легких частиц не достаточно. Соответственно мутность откачиваемой жидкости может в разы увеличиваться при таких условиях.

В случае с длинной наклонной границей вблизи выходного отверстия (Рисунок 3.50) не были получены самые лучшие результаты по времени «безопасной» работы. Это связано с тем, что если горизонтальная часть в середине области решения недостаточно длинная, то частицы примеси интенсивно переносятся потоком жидкости и раньше начинают слеживаться у основания правой наклонной границы. В месте сужения больше увеличивается скорость, и, вслед за этим, увеличивается и мутность откачиваемой жидкости.

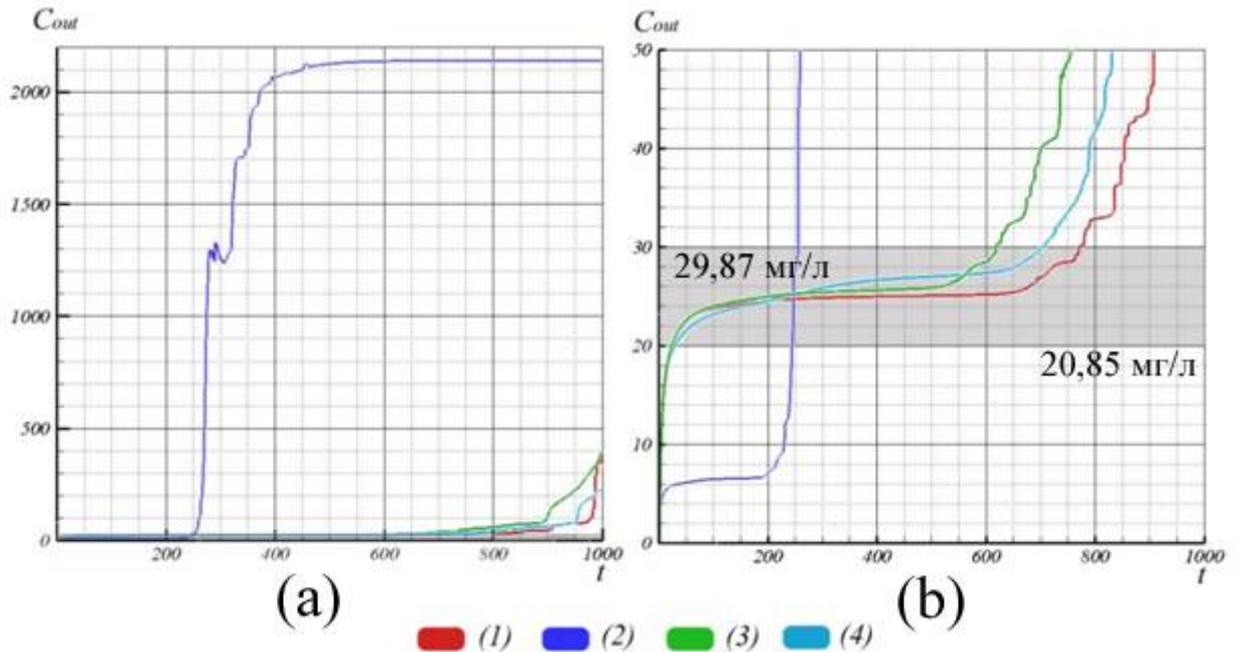


Рисунок 3.52 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Результаты получены для областей (1) симметричной и несимметричных с удлиненными наклонными границами вблизи входной (2) и выходной границ (3); симметричной с удлиненными наклонными границами и короткой средней частью (4). На рисунке (а) представлен общий график, на (b) – увеличенная часть графика, где серым выделена область, соответствующая натурным данным (см. Таблица 8)

Таким образом, решающую роль для увеличения срока «безопасной» эксплуатации играет именно длина среднего горизонтального сегмента. При этом желательно наличие наклонной границы вблизи выходной границы достаточной протяженности. Это будет способствовать дополнительной преградой для летучих фракций примесей.

Принципиальным фактором, определяющим, как быстро возникнет «залповый выброс», и каковы будут пиковые концентрации в откачиваемой жидкости, является фракционный состав очищаемых стоков. Рассмотрим случаи, когда соотношение между тяжелыми и легкими фракциями примеси изменяется. Ниже представлены результаты, когда это соотношение: четыре к одному, т.е. на четыре части тяжелой фракции приходится одна легкой (Рисунок 3.53, Рисунок 3.55.1); три к двум (Рисунок 3.55.2); один к одному (Рисунок 3.55.3); две к трем (Рисунок 3.55.4); и одна к четырем

(Рисунок 3.54, Рисунок 3.55.5). Характеристики тяжелой и легкой фракции примеси берутся такими же, как и в предыдущей серии расчетов, и отличаются только концентрациями.

Для наглядности, приведем результаты, полученные для крайних случаев, с соотношениями тяжелой и легкой фракции (4% к 1%) и (1% к 4%). Так как суммарная концентрация примеси в очищаемой жидкости не более 5%, то различия между промежуточными соотношениями фракций будут не столь явными. Общая концентрация загрязнений невелика, поэтому какое бы соотношение между частицами легких и тяжелых фракций не выбиралось, на время «безопасной» эксплуатации это не оказало существенного влияния (Рисунок 3.55.b). Пиковые же концентрации мутности откачиваемой жидкости при этом существенно отличаются (Рисунок 3.55.a).

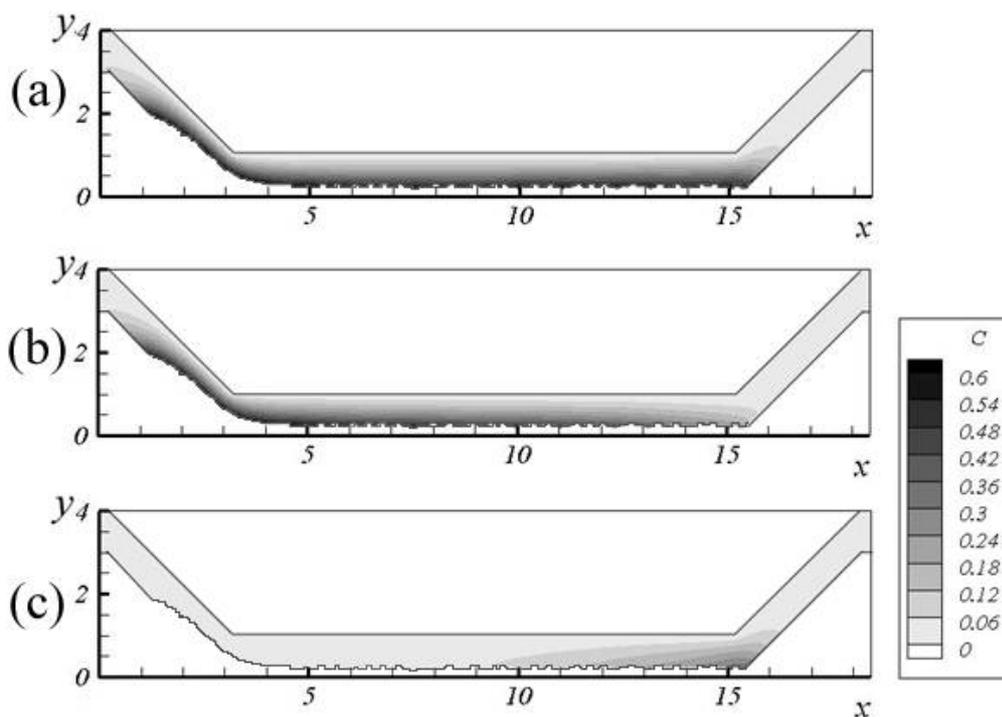


Рисунок 3.53 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц. Концентрация «тяжелой» фракции равна 4%, «легкой» –1%. Результаты, представленные на рисунке, были получены на момент времени $t = 1000$ мес. Где (a) суммарное поле концентрации; (b) «тяжелая» фракция; (c) «легкая» фракция

Так, наибольшим этот показатель был получен при преобладании тяжелой фракции над легкой. В этом случае «пляж» из слежавшейся примеси образуется быстрее, канал значительно сужается, и легкая фракция, несмотря на то, что ее всего 1% поступает на входе, быстрее начинает вымываться. В обратном случае, если «легкой» фракции 4% в очищаемых стоках, а «тяжелой» – 1%, на момент времени 1000 мес. пиковые концентрации примеси в откачиваемой жидкости много меньше.

Однако, на Рисунок 3.54.с видно, что концентрация не слежавшейся взвешенной «легкой» фракции примеси в области решения очень велика. Это означает, что при прочих неблагоприятных условиях, таких как резкое увеличение объема поступающих грунтовых вод или появление сужений в области решения, может произойти резкое вымывание всей этой примеси. Тогда время «безопасной» эксплуатации может оказаться в разы меньше.

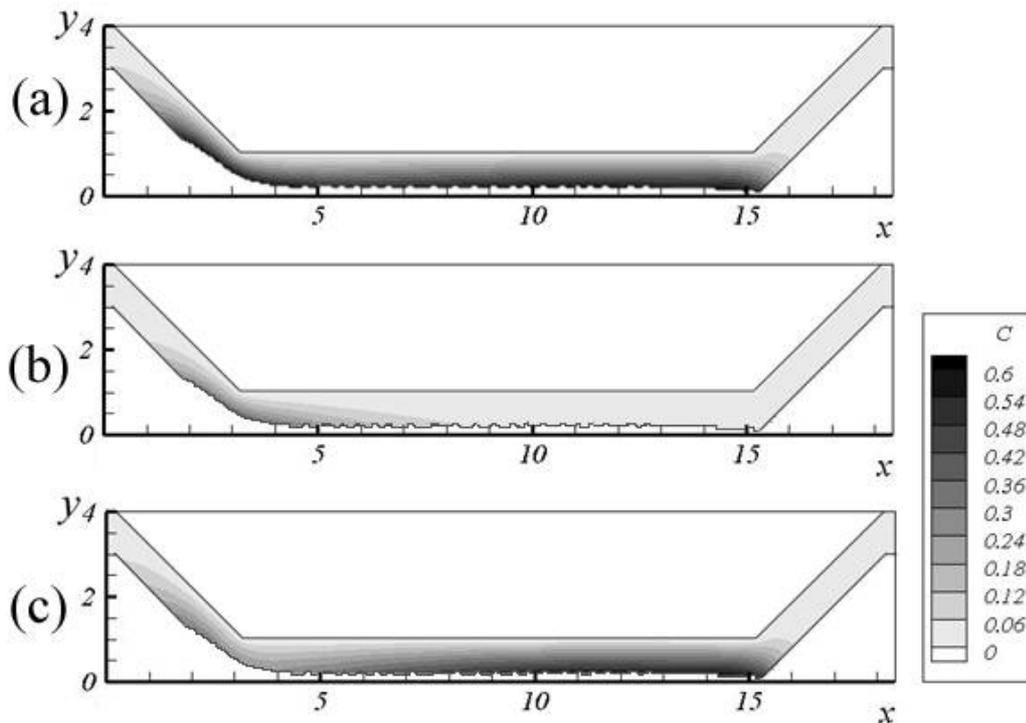


Рисунок 3.54 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц. Концентрация «тяжелой» фракции равна 1%, «легкой» – 4%. Результаты, представленные на рисунке, были получены на момент времени $t = 1000$ мес. Где (a) суммарное поле концентрации; (b) «тяжелая» фракция; (c) «легкая» фракция

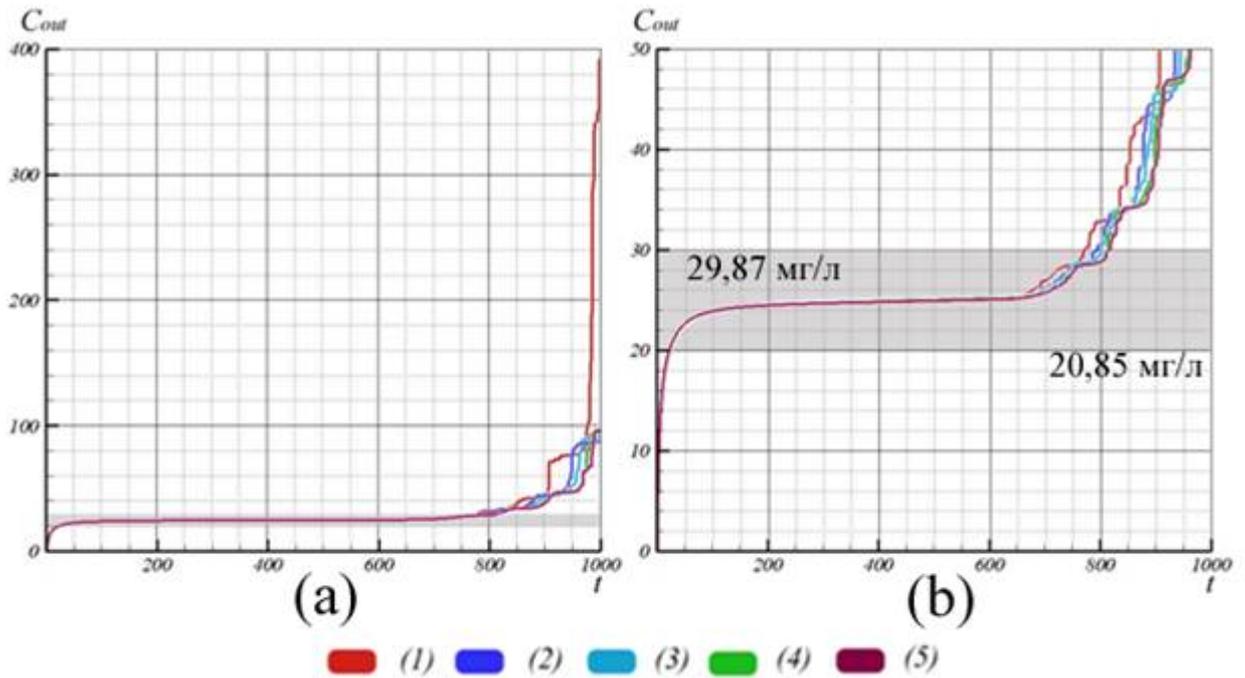


Рисунок 3.55 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Результаты получены с учетом различных соотношений между тяжелой и легкой фракциями в очищаемой жидкости: (1) четыре к одному; (2) три к двум; (3) один к одному; (4) два к трем; (5) один к четырем. На рисунке (а) представлен общий график, на (b) – увеличенная часть графика, где серым выделена область, соответствующая натурным данным (см. Таблица 8)

Даже если фракционный состав постоянен, концентрация «легкой» и «тяжелой» фракции берутся в одинаковых частях и равны по 2,5%, то на время возникновения «залпового» выброса может оказать влияние слеживаемость примеси. Рассмотрим примесь, состоящую из двух фракций частиц:

- «тяжелая фракция»: скорость оседания под действием силы тяжести $u_s = 2,5$; коэффициент диффузии $D = 1$; концентрация во входном потоке $C_1 = 0.025$; концентрация в грунтовых водах $C_2 = 0$; интенсивность накопления осадка $\alpha = -2$; пороговое значение концентрации $C^* = 0.6$.
- «легкая фракция»: $u_s = 0.1$; $D = 4$; $C_1 = 0.025$; $C_2 = 0.00003$; $\alpha = -1$; $C^* = 0.9$.

Рассмотрим три случая, когда пороговое время оседания T^* для частиц обеих фракций равно: $T^* = 10$ (1 мес.), $T^* = 5$ (15 дней) и $T^* = 1$ (3 дня). Т.е. в последнем случае рассматривается самая слеживаемая примесь.

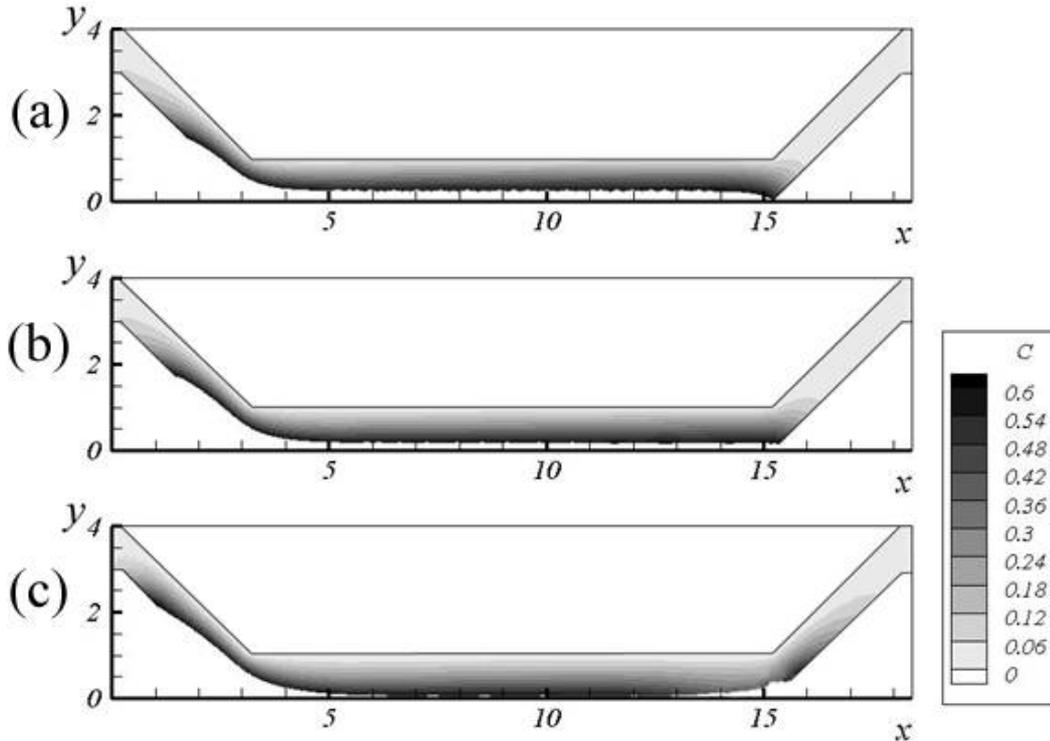


Рисунок 3.56 Распространение примеси, состоящей из двух фракций частиц, полученное на момент времени $t = 1000$ мес. для примесей с разной слеживаемостью. Где пороговое время слеживания равно: (a) $T^* = 10$, что соответствует 1 мес. (b) $T^* = 5$, что соответствует 15 дням.; (c) $T^* = 1$, что соответствует 3 дням.

Чем больше пороговое время слеживания примеси – тем дальше от входной границы она начнет слеживаться, и тем позднее появится сужение основного канала в области решения и равномернее заполнится слежавшимся осадком средняя часть канала (Рисунок 3.56). Если же примеси хорошо слеживаемые, то область решения будет быстрее и интенсивнее сужаться, что приведет к более существенному распространению по каналу накопленных примесей. И зона накопления осадка будут образовываться ближе к выходной границе. Однако выработка такой протяженности, что существенно этот показатель не должен повлиять на время возникновения

«залпового выброса», но может определить пиковое значение концентрации при залпе, и увеличить скорость достижения этого пика. Так, если примесь плохо слеживаемая, то при заполнении выработки она будет быстрее вымываться и достигать выходной границы.

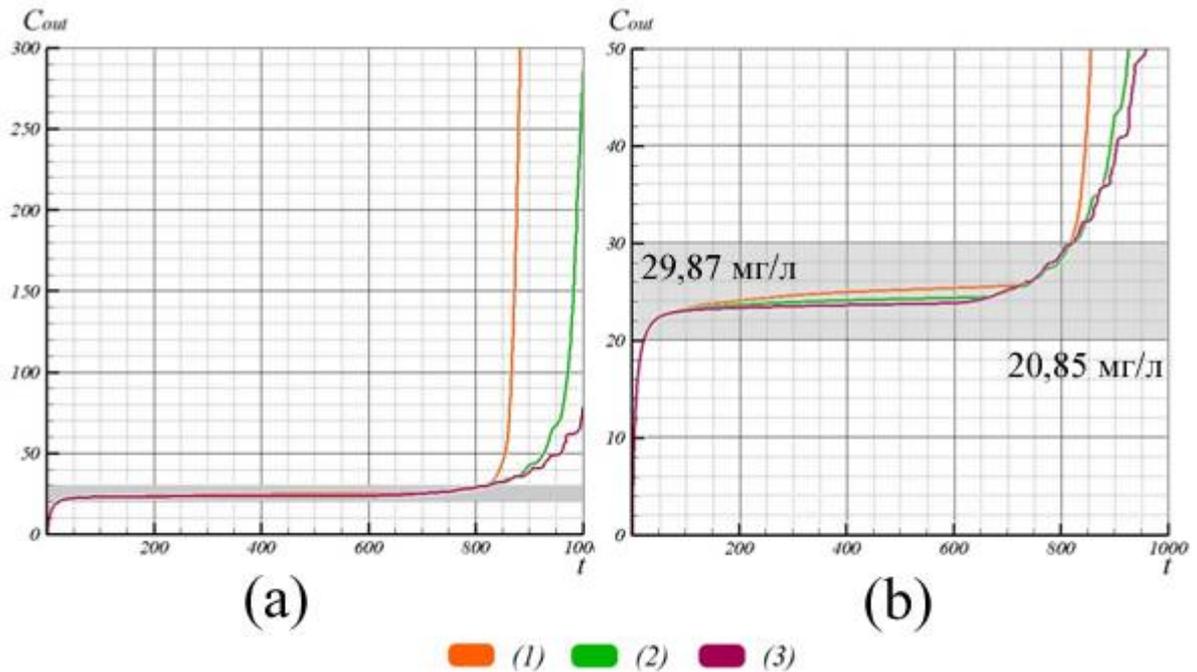


Рисунок 3.57 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Результаты получены с учетом разной слеживаемости примесей. Пороговое время слеживания равно: (1) $T^* = 10$, что соответствует 1 мес. (2) $T^* = 5$, что соответствует 15 дням; (3) $T^* = 1$, что соответствует 3 дням. На рисунке (a) представлен общий график, на (b) – увеличенная часть графика, где серым выделена область, соответствующая натурным данным (см. Таблица 8)

Еще один фактор, который может повлиять на возникновение залпового выброса – это объем закачиваемых для очистки в выработку шламовых стоков. Значительно этот показатель меняться не может, для шахты Кольчугинской же он постоянен. Предполагаем, что примесь, состоит из двух фракций частиц, с теми же характеристиками, что были выбраны выше.

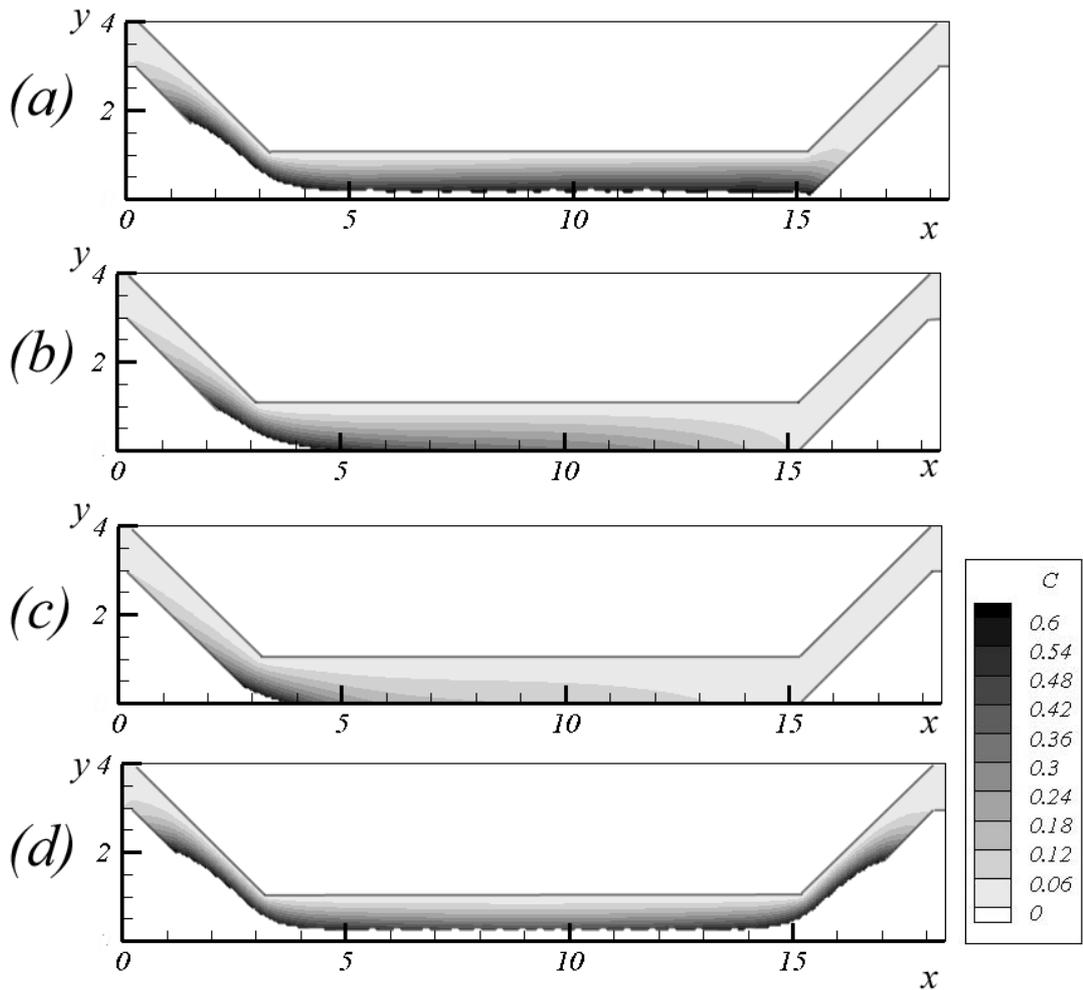


Рисунок 3.58 Распространение примеси на момент времени $t = 1000$ мес., полученное с разным объемом закачиваемых для очистки в отработанной горной выработке стоков, равным соответственно (а) «нормальному объему»; (б) в два раза меньше «нормы»; (с) в четыре раза меньше «нормы»; (с) в два раза больше «нормы»

Рассмотрим случаи, когда при неизменном объеме поступающих грунтовых вод V объем закачиваемых стоков берется равным: обычному для шахты Кольчугинской объему $V/4$, который будем называть «нормальным объемом» (см. Рисунок 3.58.а, Рисунок 3.59.а); в два раза меньше «нормального объема» $V/8$ (см. Рисунок 3.58.б, Рисунок 3.59.б); в четыре раза меньше «нормального объема» $V/16$ (см. Рисунок 3.58.с, Рисунок 3.59.с); и в два раза больше одного $V/2$ (см. Рисунок 3.58.д, Рисунок 3.59.д).

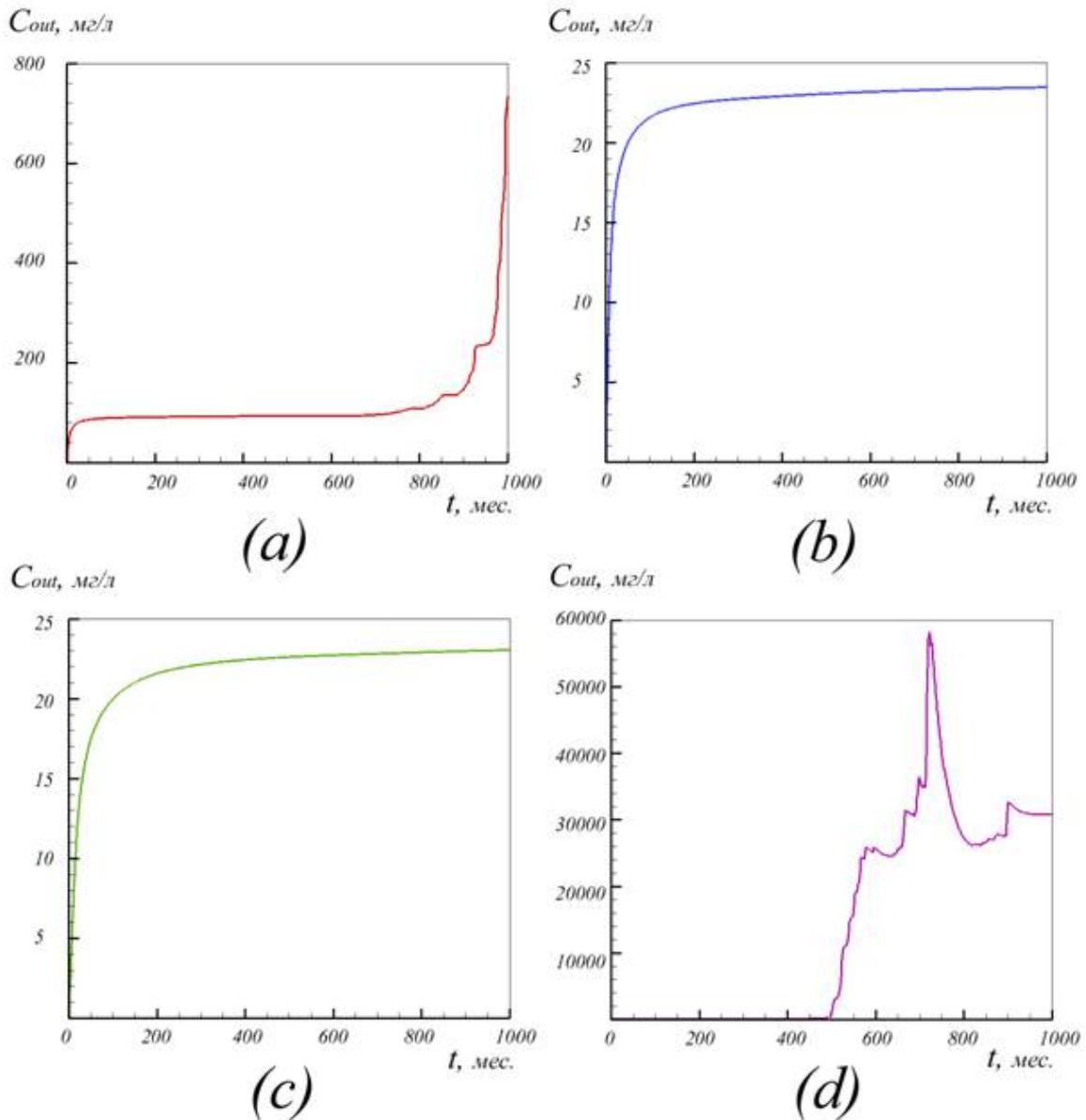


Рисунок 3.59 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Результаты получены с разным объемом закачиваемых для очистки в отработанной горной выработке стоков, равным соответственно (а) «нормальному объему»; (b) в два раза меньше «нормы»; (с) в четыре раза меньше «нормы»; (с) в два раза больше «нормы»

При прочих равных условиях, при уменьшении объема поступающих для очистки в отработанную горную выработку стоков, соразмерно уменьшается и объем поступающих загрязнений. Вследствие чего и заиливание выработки будет тем меньше, чем меньше загрязнений в выработку попадет (Рисунок 3.58).

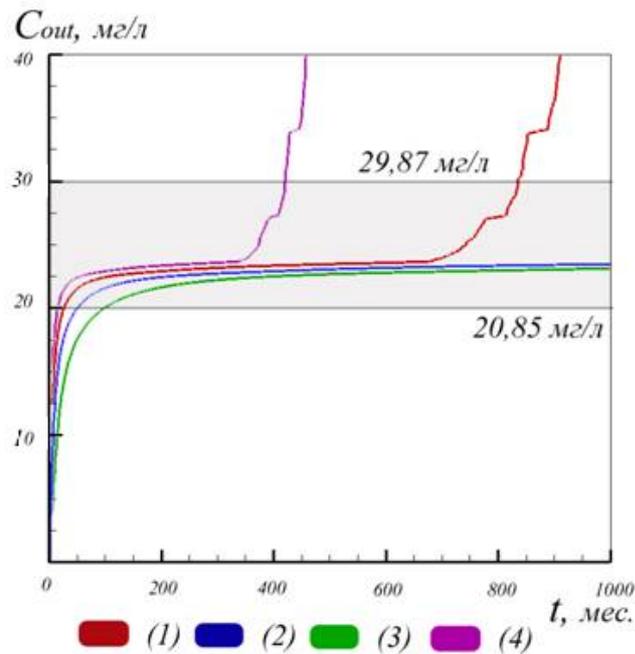


Рисунок 3.60 Графики изменения концентрации примеси на выходной границе области решения. Результаты получены с разным объемом закачиваемых для очистки в отработанной горной выработке стоков, равным соответственно (1) «нормальному объему»; (2) в два раза меньше «нормы»; (3) в четыре раза меньше «нормы»; (4) в два раза больше «нормы». Серым выделена область, соответствующая натурным данным (см. Таблица 8)

При увеличении объема закачиваемых стоков наблюдается обратная тенденция, выработка интенсивнее заполняется слежавшимся осадком, значительно раньше возникает явление «залпового выброса» (см. Рисунок 3.60), а пиковые концентрации залпа существенно превышают аналогичные показатели, полученные при «нормальном объеме» закачиваемых стоков (Рисунок 3.59). Таким образом, существенно увеличивать объем очищаемых стоков нецелесообразно, с точки зрения уменьшения времени использования шахты, как очистного сооружения. Уменьшать же объем очищаемых стоков может оказаться экономически невыгодно.

3.2. Результаты моделирования «самоизлива шахтных вод»

Сначала рассмотрим задачу о «самоизливе шахтных вод», в которых взвешены только всплывающие примеси. Будем использовать область решения, характерной для затопленной горной выработки прямоугольной формы с полостью вдоль верхней кровли и «сливной скважиной» (см. Рисунок 1.4).

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ в области решения имелось некоторое количество поднимающихся примесей, которые полностью всплыли и скопились вдоль верхней кровли и в полостях вблизи границ $\Gamma_i, i = 2, \dots, 5$. Считаем, что через верхнюю кровлю $\Gamma_i, i = 2, \dots, 4$ начинают поступать «чистые» грунтовые воды. Под действием давления поступающей жидкости происходит «самоизлив шахтных вод» через границу Γ_1 .

В представленных ниже результатах вычислительных экспериментов выбраны следующие значения параметров: шаг по пространственным переменным $h_x = h_y = 0.05$; шаг сетки в трубе $h_{x1} = 0.001, h_{y1} = h_y$; ширина трубы равна 0.1; скорость разбавления через кровлю шахты равна 0.1.

Выбор модели жидкости оказывает существенное влияние на характер течения и распространения всплывающих примесей. Течение вязкой однородной несжимаемой жидкости является вихревым, по мере его развития в полости по всей высоте образуются вихри (см. Рисунок 3.61).

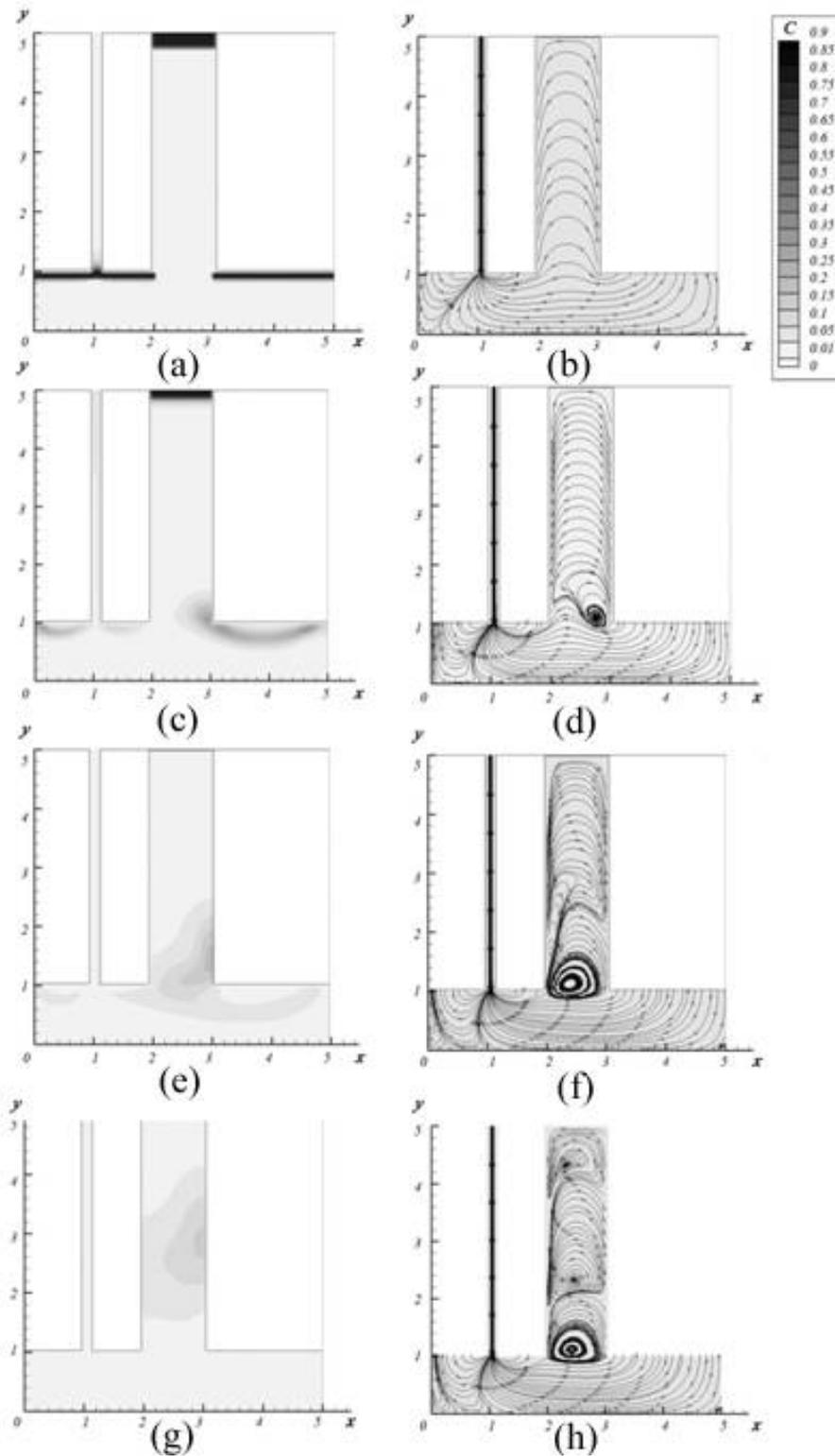


Рисунок 3.61 Распространение всплывающих примесей в потоке вязкой однородной несжимаемой жидкости при $D = 0.001$; $v_s = -0.1$; $Re = 2000$. На рисунках (a, c, d, g) – динамика распространения примеси, на рисунках (b, d, f, h) – течение жидкости, на момент времени (a) – (b) $t = 0$; (c) – (d) $t = 10$; (e) – (f) $t = 50$; (g) – (h) $t = 100$

В основном канале примеси распространяются преимущественно вдоль линий тока (см. Рисунок 3.61.3, Рисунок 3.61.5), и накопленные вдоль верхней кровли примеси, существенно вымываются из области решения. Накопленные в полости примеси перемешиваются вихрями. За счет действия диффузии они частично попадают в основной канал, где переносятся потоком жидкости к выходной границе. Благодаря вихрям, незначительная доля примесей, накопленная вдоль Γ_4 может затягиваться в полость и всплывать (см. Рисунок 3.61.5, Рисунок 3.61.7).

При использовании моделей стратифицированной (см. Рисунок 3.62) и нестратифицированной (см. Рисунок 3.63) жидкостей картина течения изменяется, но примеси также незначительно задерживаются в области решения и постепенно вымываются.

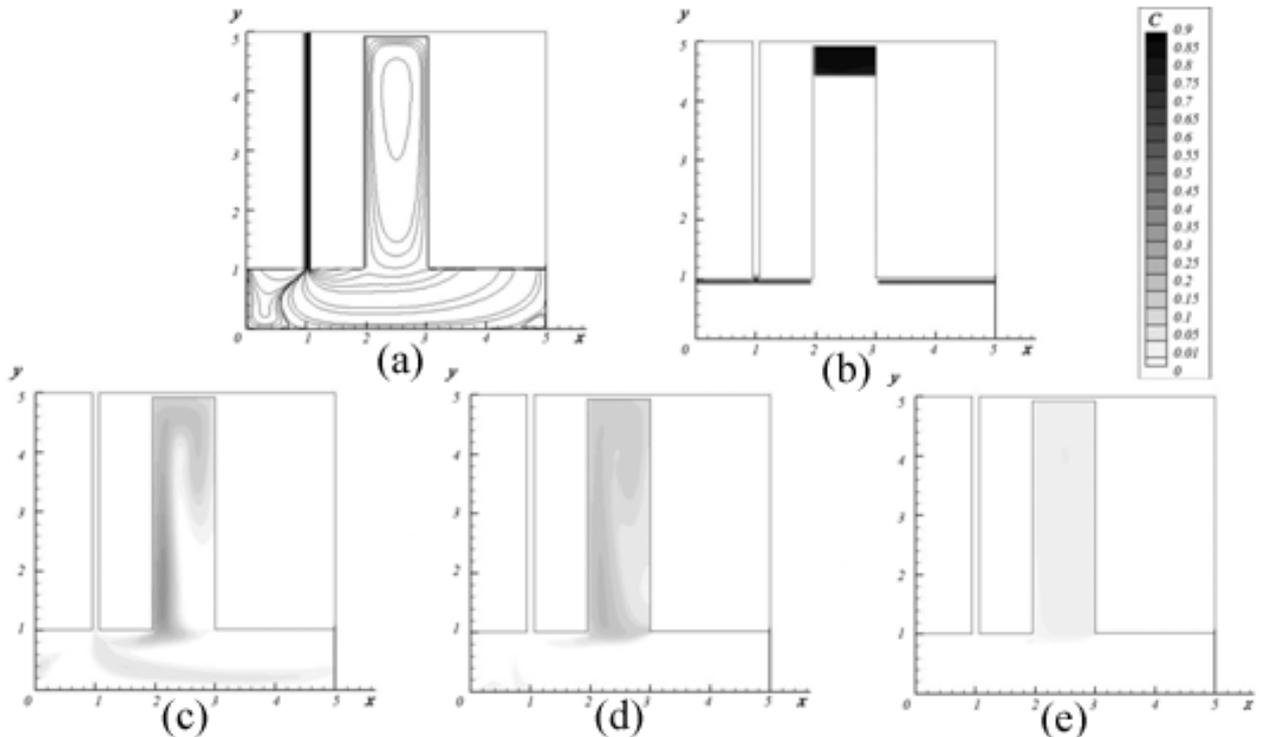


Рисунок 3.62 Распространение всплывающих примесей в потоке идеальной стратифицированной жидкости при $D = 0.001$; $v_s = -0.1$; $k = 1$. Где на (a) течение, (b) – (e) динамика всплывания примеси на моменты времени (b) $t = 0$; (c) $t = 10$; (d) $t = 50$; (e) $t = 100$

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что какая бы из характерных моделей течения жидкости ни рассматривалась, примеси все равно будут вымываться из области решения при «самоизливе шахтных вод». Таким образом, если подобный проект будет реализован, необходимо будет «самоизливающиеся шахтные воды» дополнительно очищать на резервных очистных сооружениях.

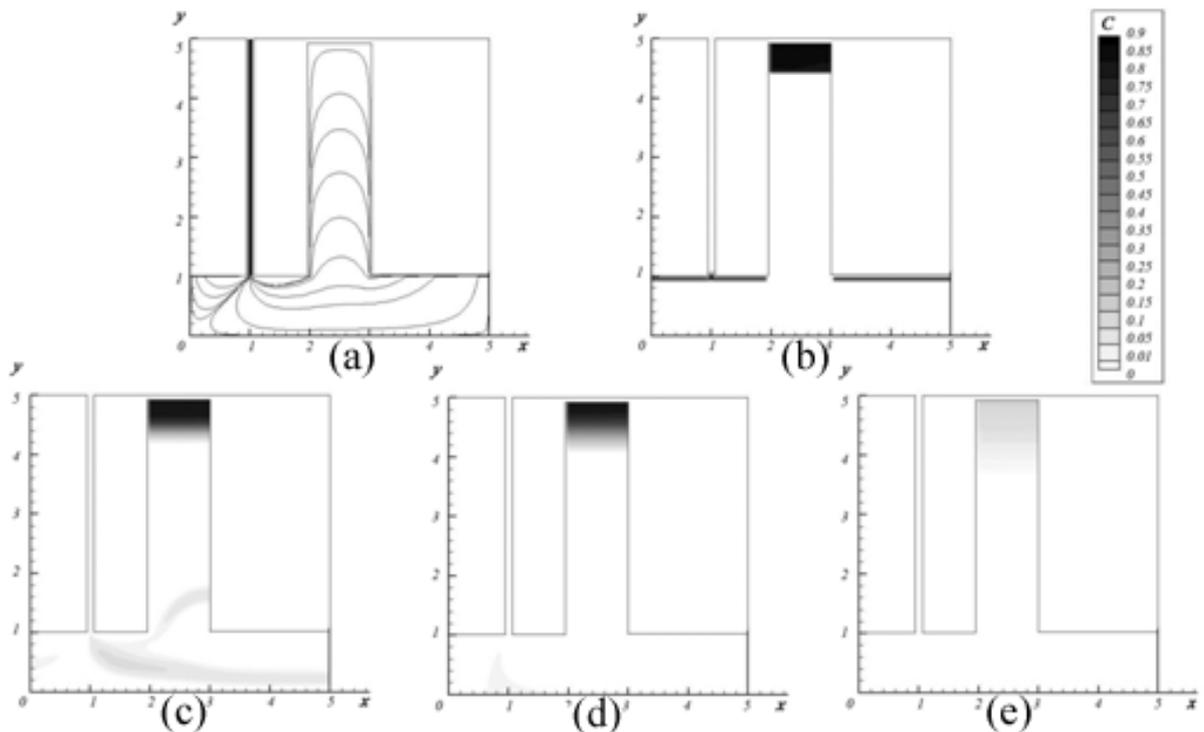


Рисунок 3.63 Распространение всплывающих примесей в потоке идеальной нестратифицированной жидкости при $D = 0.001$; $v_s = -0.1$; $k = 0$. Где на (a) течение, (b) – (e) динамика всплывания примеси на моменты времени (b) $t = 0$; (c) $t = 10$; (d) $t = 50$; (e) $t = 100$

Заметим, что помимо всплывающих примесей при «самоизливе шахтных вод» вместе с потоком из области решения могут вымываться и легкие фракции оседающей примеси и неслежавшийся осадок. Рассмотрим случай, когда выбранная область решения была заполнена взвешенными оседающими примесями. После отстаивания, образовалась «горка» из осадка, который частично слежался. Далее считаем, что через верхнюю границу начинает поступать жидкость, а через выходную границу –

«самоизливаться». Как видно из представленных результатов (Рисунок 3.64), те примеси, которые успели слежаться, остаются в области решения, а вот значительная часть неслежавшегося осадка вымывается.

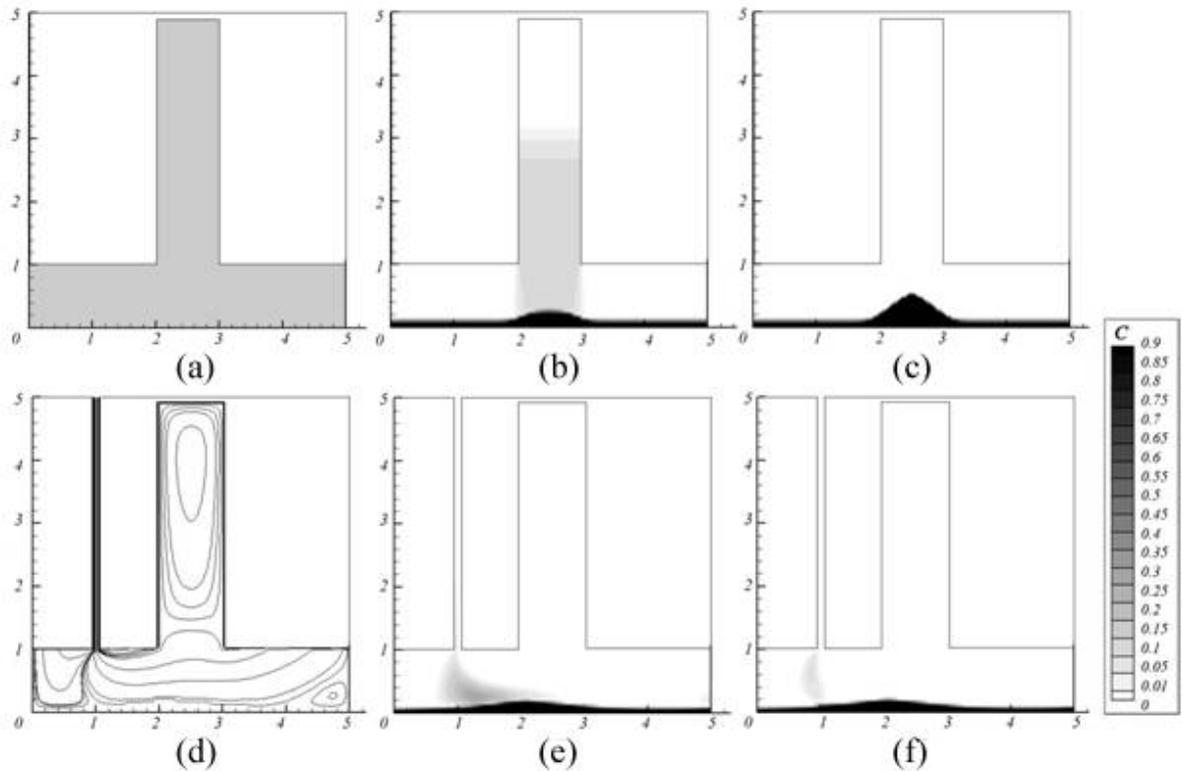


Рисунок 3.64 Распространение оседающих примесей в потоке идеальной стратифицированной жидкости, с коэффициентом стратификации, равным 1. Результаты получены, при $D = 0.001$; $v_s = -0.1$. Где на (a) показано исходное равномерное заполнение области решения примесью, на (b),(c) демонстрируется процесс отстаивания и образования «горки» из осевшей примеси, (d) – развивающееся в области решения течение, (e)-(f) – динамика размыва осадка на моменты безразмерного времени (e) $t = 10$; (f) $t = 50$, соответственно

Таким образом «самоизливающиеся шахтные воды», загрязненные как всплывающими, так и оседающими неслежавшимися примесями, необходимо дополнительно очищать на резервных очистных сооружениях.

3.3 Выводы к третьей главе

При практическом применении способа очистки в отработанных горных выработках важно не допустить залпового выброса накопленных примесей и оценивать время до его возникновения. В данной главе приведены результаты численного моделирования оседания примесей из одной, двух и пяти фракций.

Приведенные результаты подтвердили, что по фракционному составу примеси условно можно поделить на «летучие» и «тяжелые». Летучие примеси представляют собой самые мелкие частицы, тяжелые фракции, наоборот, состоят из крупных частиц. Наличие тяжелых фракций определяет интенсивность заиления выработанного пространства. Наличие же летучих фракций во многом определяет мутность откачиваемой жидкости.

Для оценки процесса очистки жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках приводятся графики изменения среднего значения концентрации примеси на выходной границе. На основании этих графиков получены оценки времени безопасной эксплуатации (времени до возникновения «залпового выброса») выработки как очистного сооружения при выбранных идеальных условиях. В среднем это время составляет 60 – 70 лет.

Приведенные результаты численного моделирования показали, что при очистке жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках возможно явление «залпового выброса», когда концентрация загрязнений в откачиваемой жидкости резко и значительно растет. Такие факторы как сужение основного канала выработки; изменение гидродинамических условий вслед за сезонным изменением уровня грунтовых вод; фракционный состав примеси с преобладанием легких плохослеживаемых взвешенных частиц, приводят к сокращению времени безопасной эксплуатации горной выработки как очистного сооружения, так как явление «залпового выброса» в

этих случаях происходит раньше. Выполнение отдельных из этих факторов может привести еще и к существенному увеличению пиковых концентраций залпа.

Приводятся результаты численного моделирования «самоизлива шахтных вод». Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что какая бы из характерных моделей течения жидкости ни выбиралась, примеси все равно будут вымываться из области решения при «самоизливе шахтных вод». Таким образом, если подобный проект будет реализован, необходимо будет «самоизливающиеся шахтные воды» дополнительно очищать на резервных очистных сооружениях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение можно привести следующие основные результаты диссертационной работы:

1. Для исследования процессов очистки жидких промышленных стоков от нерастворенных примесей в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт была предложена математическая модель, в которой учитывается возможность изменения области решения из-за слеживания осадка.
2. С помощью разработанного программного комплекса получены результаты численного моделирования, в которых обнаружена возможность «залпового выброса» примеси из шахты, когда концентрация загрязнений в откачиваемой жидкости резко и значительно растет.
3. Получены оценки времени безопасного использования выработки как очистного сооружения – до появления «залпового выброса».
4. Как всплывающие, так и несслежавшиеся оседающие примеси будут вымываться «самоизливающимися шахтными водами». Поэтому, в случае реализации подобного проекта необходимо предусматривать очистку «самоизливающихся шахтных вод» на резервных очистных сооружениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеевский, Н. И. Формирование и движение речных наносов/ Н. И. Алексеевский. – М, 1998. – 202 с.
2. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 – х т., пер. с англ./ Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – Т. 1 – 384 с.
3. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 – х т., пер. с англ./ Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – Т. 2 – 384 с.
4. Анферов, Б. А. Комбинированная геотехнология комплексного освоения угольного месторождения с попутным извлечением элементов – примесей/ Б. А. Анферов, Л. В. Кузнецова, Б. Ф. Нифантов// Вестник КузГТУ. – 2010. – № 3. – С. 19 – 22.
5. Анферов, Б. А. Проблемы и перспективы комплексного освоения угольных месторождений Кузбасса/ Б. А. Анферов, Л. В. Кузнецова. – Кемерово: ИУУ СО РАН – 2009. – 243 с.
6. Афанасьев К. Е. Метод естественных соседей для решения задач вязкой и идеальной несжимаемой жидкости/ К. Е. Афанасьев, Т. С. Рейн, С. Н. Карабцев// Вестник КемГУ. – 2009. – № 2. – С. 25 – 33.
7. Багрянцев, В. И. Практика и перспективы использования твердых углеродсодержащих отходов в качестве топлива для теплоэнергетических агрегатов/ В. И. Багрянцев, С.А. Казимиров, А.И. Куценко, А.П. Подольский, А.А. Рыбушкин, М.В. Темлянец// Вестник СибГИУ. – 2013. – № 3(5). – С. 33 – 37.
8. Багрянцев, В. И. Сжигание угольных шламов с применением вихревых технологий/ В. И. Багрянцев, С. А. Бровченко, М. В. Темлянец, А. А. Рыбушкин, С. А. Казимиров// Вестник КузГТУ. – 2015. – № 1(107). – С. 153 – 158.

9. Базовкин А. В. Метод факторизации для численного решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости/ А. В. Базовкин, В. М. Ковеня, О. М. Вавилова// Вычислительные технологии. – 2009. – № 2. – С. 13 – 31.
10. Байченко А. А. Интенсификация процесса агрегирования частиц отходов флотации при очистке сточных вод углеобогащения/ А. А. Байченко, А. В. Кардашов// Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2005. – № 4.2. – С. 31 – 33.
11. Байченко, А. А. Селективная очистка шламовых вод углеобогащения/ А. А. Байченко, А. В. Кардашов// Вестник КузГТУ. – 2005. – № 3. – С. 70 – 74.
12. Байченко, А. А. Утилизация угольных шламов Кузбасса из наружных отстойников/ А. А. Байченко, Г. Л. Евменова// Вестник КузГТУ. – 2005. – № 4.1. – С. 57 – 60.
13. Барышников, Н. Б. Морфология, гидрология и гидравлика пойм/ Н. Б. Барышников. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 280 с.
14. Бахвалов, Н. С. Численные методы: учеб. пособие для физ. – мат. специальностей вузов/ Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков; под общ. ред. Н. И. Тихонова. – 2 – е изд. – М.: Физматлит: Лаб. базовых знаний; СПб.: Нев. диалект, 2002. – 630 с.
15. Беловолов, В. В. Техника и технология обогащения углей/ В. В. Беловолов, Ю. Н. Бочков, М. В. Давыдов и др.; под. ред. В. А. Чантурия, А. Р. Молявко. – М.: Наука, 1995. – 622 с.
16. Белолипецкий, В. М. Вычислительный алгоритм для определения динамики взвешенных и донных наносов в речном русле/ В. М. Белолипецкий, С. Н. Генова// Вычислительные технологии – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 9 – 25.

17. Белолипецкий, В. М. Математическое моделирование в задачах охраны окружающей среды/ В. М. Белолипецкий, Ю. И. Шокин. – Новосибирск: Инфолио – пресс, 1997. – 240 с.
18. Белолипецкий, В. М. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости/ В. М. Белолипецкий, В. Ю. Костюк, Ю. И. Шокин. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1991. – 176 с.
19. Белоусов, В. А. Перспективные методы обогащения угольных шламов/ В. А. Белоусов// Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 4. – С. 15 – 17.
20. Белоцерковский, О. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент/ О. М. Белоцерковский, Ю. М. Давыдов. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
21. Белоцерковский, О. М. Численный метод интегральных соотношений/ О. М. Белоцерковский, П. И. Чушкин// ЖВМ и МФ. – Т. 2, № 5. – 1962. – С. 731 – 59.
22. Белоцерковский, О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред/ О.М. Белоцерковский. – 2 – е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 1984. – 448 с.
23. Беляев, Н. Н. Математическое моделирование процесса очистки воды в вертикальном отстойнике/ Н. Н. Беляев, Е. К. Нагорная//Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. – 2012. – № 12. – С. 35 – 39.
24. Березин, И. С. Методы вычислений: в 2 – х т./ И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 1959. – Т. 2 – 620 с.
25. Бондарева, Л.В. Движение лёгких и тяжелых примесей в затопленных горных выработках / Л. В. Бондарева // Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование (ИВТ&ММ): Сборник трудов Международной научной конференции

- (г. Кемерово, 23-30 июня 2013 г.) [Электронный ресурс]: (тексто - графические материалы). - Кемерово: Изд-во КемГУ, 2013.
26. Бондарева, Л.В. Моделирование очистки промышленных стоков от нерастворенных примесей в затопленных подземных выработках закрытых угольных шахт// Ресурсоэффективные системы в управлении и контроле: взгляд в будущее: сборник научных трудов V международной конференции школьников, студентов, аспирантов, молодых ученых. В 3 томах/ Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во томского политехнического университета, 2016. – Т.1. – С. 48-49.
 27. Бондарева, Л.В. Моделирование процесса очистки промышленных стоков с помощью затопленных горных выработок/ Л. В. Бондарева, Ю. Н. Захаров// Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. – 2014. – № 1. – С. 122 - 127.
 28. Бондарева, Л.В. Нестационарное распределение примесей в затопленных горных выработках / Л. В. Бондарева // Образование, наука, инновации – вклад молодых исследователей: материалы V (XXXVII) международной научно-практической конференции / Кемеровский госуниверситет. – Кемерово: ООО «ИНТ», 2010. – Вып. 11. – Т. 2. – С. 115-116.
 29. Бондарева, Л.В. Об одной задаче моделирования очистки промышленных стоков в затопленных угольных шахтах / Л. В. Бондарева// XV Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям: программа и тезисы докладов, Тюмень, 29-31 ноября 2014г. – Тюмень, 2014. – 96 с. – С. 21-22.
 30. Бондарева, Л.В. Об одной модели распространения всплывающей примеси в затопленных горных выработках/ Л.В. Бондарева, М.А. Гурских, Ю.Н. Захаров// Вестник Кемеровского государственного университета. – 2014. – № 4 (60). – С. 54 - 61.

31. Бондарева, Л.В. Об одной нестационарной модели подъема и оседания примеси в закрытом водоеме / Л. В. Бондарева // Студент и научно-технический прогресс: Математика: Материалы 51-й Международной научной студенческой конференции, 12-18 апреля 2013 г. / Новосиб. гос. ун-т. - Новосибирск, 2013. – 268 с. – С. 131.
32. Бондарева, Л.В. Об одной нестационарной модели движения примесей в закрытых водоемах / Л. В. Бондарева // Студент и научно-технический прогресс: материалы Юбилейной 1-й международной научной студенческой конференции, 13-19 апреля 2012 г. Математика. / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2012. С. 246.
33. Бондарева, Л.В. Об одной нестационарной модели движения примесей в закрытых водоёмах / Л. В. Бондарева // Студент и научно-технический прогресс: материалы XLIX Международной научной студенческой конференции, 16-20 апреля 2011 г. Математика. / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2011. С. 124.
34. Бондарева, Л.В. Об одной нестационарной модели движения примесей в закрытых водоёмах / Л. В. Бондарева // Проблемы мониторинга окружающей среды: Сборник трудов XI Всероссийской конференции с участием иностранных ученых, 24-28 октября 2011 г. – Кемерово: КеМГУ, 2011. – 388 с. – С. 18-21.
35. Бондарева, Л.В. Об одной нестационарной модели движения примесей в закрытых водоемах / Л. В. Бондарева, К.С. Иванов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2010): Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, 19-20 ноября 2010 г. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. – Ч. 2. – С. 150-155.
36. Бондарева, Л.В. Об одной нестационарной модели движения примесей в закрытых водоемах / Л. В. Бондарева // Актуальные проблемы механики, математики, информатики: сб. тез. науч.-практ. Конф.

- (Пермь, 12 – 15 октября 2010 г.) / гл. ред. В. И. Яковлев; Перм. Гос. ун-т. – Пермь, 2010. – С. 103.
37. Бондарева, Л.В. Об одной нестационарной модели распространения примеси в закрытом водоеме/ Л. В. Бондарева // Образование, наука, инновации – вклад молодых исследователей: материалы VII (XXXIX) Международной научно-практической конференции / Кемеровский госуниверситет, Кемерово: 2012. – Вып. 13. / сост. Е.А. Баннова; под общ.ред. К.Е. Афанасьева – 1107 с. – С. 281.
38. Бондарева, Л.В. Программный комплекс для численного расчета течения и распространения примесей в закрытых водоёмах «Distribution and Stream of Impurity in the Closed Reservoirs»: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014617559/ Л.В. Бондарева, Ю.Н. Захаров; КемГУ. – № 2014615508; заявл. 03.06.2014; Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ, г. Москва, 28 июля 2014 г.
39. Бондарева, Л.В. Распространение нерастворенных примесей в затопленных подземных горных выработках / Л.В. Бондарева, Ю.Н. Захаров, В.П. Потапов, Е.Л. Счастливцев // Кемеровский государственный университет. – Кемерово, 2017. – 91 с.
40. Бондарева, Л.В. Распространение нерастворенных примесей в затопленных подземных выработках на примере ш. Кольчугинской// Материалы XVII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию/ Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2016. – С. 29.
41. Бондарева, Л.В. Численное моделирование очистки шламовых стоков от взвешенных примесей// информационные технологии и математическое моделирование: материалы XV Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2016. – Ч. 2. – С.144-148.

42. Бондарева, Л.В. Численное моделирование процесса очистки промышленных стоков в отработанных горных выработках/ Л.В. Бондарева, Ю.Н. Захаров// Материалам международной научной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании»: сборник тезисов, 24 - 27 сентября 2015 г. – Алматы, Казахстан, 2015. – 296 с. – С. 194 - 195.
43. Бондарева, Л.В. Численное моделирование процесса очистки промышленных стоков в отработанных горных выработках/ Л.В. Бондарева, Ю.Н. Захаров//совместный выпуск по материалам международной научной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании»: Вычислительные технологии, Новосибирск, 2015. – Т. 20. – Вестник КАЗНУ им. Аль-Фараби, серия математика, механика и информатика, Алматы, 2015. – №. 3(86), Ч. 3. – С. 121 - 131.
44. Борисова, Е. А.Способы очистки шахтных и карьерных вод (аналитический обзор)/ Е. А. Борисова, М. Н. Щербакова; под.ред. С. М. Простова; ГУ КузГТУ; РАЕН (ЗСО). – Кемерово, 2007. – 138 с.
45. Боровков, В. С. Русловые процессы и динамика речных потоков на урбанизированных территориях/ В. С. Боровков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 266 с.
46. Булатов, О. В. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах/ О. В. Булатов, Т. Г. Елизарова// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 1. – С. 170 – 184.
47. Булгаков, В. К.Основы теории метода смешанных конечных элементов для задач гидродинамики/ В. К. Булгаков, К. А. Чехонин. – Хабаровск: Изд- во Хабар. Гос. техн. ун- та, 1999. – 283 с.
48. Бутовецкий, В. С. Охрана природы при обогащении углей: Справочное пособ./ В. С. Бутовецкий. – М.: Недра, 1991. – 231 с.

49. Быков, А. А. Об одном методе восстановления параметров выбросов в атмосферу от пылящего неорганизованного источника/ А. А. Быков, М. Ю. Захаров, Е. Л. Счастливец// Вестник КемГУ. – 2012. – № 2. – С. 17 – 22.
50. Василевский, Ю. В. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области: Учебно – методическое пособие/ Ю. В. Василевский, М. А. Ольшанский. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В Ломоносова; МАКС Пресс, 2007. – 104 с.
51. Ведрученко, В. Р. О производстве и перспективах использования в дизелях жидких синтетических топлив из углей как альтернативных нефтяным/ В. Р. Ведрученко, В. В. Крайнов, Н. В. Жданов, М. В. Кокшаров, Е. С. Воропаева// Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2013. – № 8 – 3. – С. 12 – 19.
52. Вирченко Ю. П. Плоские стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости/ Ю. П. Вирченко// Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2011. – № 5(100). – С. 133 – 139.
53. Воеводин, А. Ф. Метод расчета вязких течений в замкнутых областях/ А. Ф. Воеводин, Т. В. Протопопова// Сибирский журнал индустриальной математики. – 2001. – Т. 4, вып. 1. – С. 29 – 37.
54. Воеводин, А. Ф. Метод расщепления по физическим процессам для расчета задач конвекции/ А. Ф. Воеводин, О. Н. Гончарова// Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14, № 1. – С. 66 – 74.
55. Воеводин, А. Ф. Численные методы исследования конвективных течений: реализация метода расщепления по физическим процессам/ А.Ф. Воеводин, О.Н. Гончарова, Т.В. Протопопова//Известия Алтайского гос. ун – та. – 2013. – N. 1 – 1(77). – С. 88 – 93.
56. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

57. Ворон, Л. В. Проблемы очистки шахтных вод/ Л. В. Ворон, Л. Р. Ланге, А. М. Благоразумов// Вестник Сибирского государственного индустриального университета. – 2015. – № 2(12). – С. 76 – 79.
58. Врагова Е. В. Математическая модель поведения нефтяных разливов на акватории рек и болотистой местности/ Е. В. Врагова// МНКО. – 2011. – № 6 – 2. – С. 434 – 440.
59. Вычислительные методы в гидродинамике/ под ред. Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг. – М.: Изд-во «Мир», 1967. – 384 с.
60. Гридин, В. Г. Разработка модульной установки для приготовления и сжигания ВУТ из отходов углеобогащения/ В. Г. Гридин// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2009. – № 12. – С. 62 – 67.
61. Гришанин, К. В. Динамика русловых потоков/ К.В. Гришанин. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 211 с.
62. Гудов, А.М. Научно-информационный программный web-инструментарий для решения задач экологии угольного региона/ А.М. Гудов, С.Ю. Завозкин, И.В. Григорьева, Л.В. Бондарева, Н.Н. Окулов// Вестник Кемеровского государственного университета. – 2015. – Т. 1. – №. 2(62).С. 22 – 30.
63. Гудов, А.М. Научно-информационный программный web-инструментарий для решения задач экологии угольного региона/ А.М. Гудов, С.Ю. Завозкин, И.В. Григорьева, Л.В. Бондарева, Н.Н. Окулов// Фундаментальная информатика, информационные технологии и системы управления: реалии и перспективы. FIITM-2014: материалы международной научно - практической конференции – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2014 . – С. 109 - 119.
64. Гусев, Н. Н. Эколого – экономическая оценка вовлечения шахтных вод в хозяйственный оборот/ Н. Н. Гусев// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2010. – вып. 7. – С. 245 – 248.

65. Даугавет, И. К. Теория приближенных методов, линейные уравнения/ И. К. Даугавет. – 2 – е изд., перераб. и доп. – С. – Петербург, 2006. – 288 с.
66. Демиденко, Н.Д. Тепломассообмен и суперкавитация/ Н.Д. Демиденко. В.А. Кулагин, Ю.Н. Шокин, Ф.-Ч. Ли. – Новосибирск: Наука, 2015. – 436 с.
67. Демкин, В. И. Комплексная переработка шахтных вод с использованием мембранно – сорбционных методов/ В. И. Демкин, А. М. Навитный, Н. Н. Гусев, А. А. Свитцов, Ю. В. Каплунов// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2011. – вып. 9. – С. 311 – 315.
68. Ельчанинов, Е. А. Охрана окружающей среды при подземной разработке угольных месторождений/ Е. А. Ельчанинов, Е. В. Беляев, М. И. Весков и др. – М.: «Наука», 1995. – 240 с.
69. Ефимов, В. И. Использование отходов углеобогащения и оптимизация ресурсов по экологическому фактору/ В.И. Ефимов, И.Б. Никулин, В.Л. Рыбак// Известия ТулГУ. – Науки о Земле. – 2014. – № 1. – С. 85 – 95.
70. Захаров, Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики/ Ю. Н. Захаров. – Новосибирск: Наука, 2004. – 239 с.
71. Захаров, Ю. Н. Итерационный метод определения течения стратифицированной жидкости в проточном водоеме/ Ю. Н. Захаров, А. В. Чирюкина// Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Материалы V всероссийской научной конференции. – 2006. – С. 511 – 512.
72. Захаров, Ю. Н. Метод минимальных невязок решения системы уравнений Навье – Стокса/ Ю. Н. Захаров, С. А. Кривушин// Вестник Кем. гос. ун – та. Математика. – Кемерово, 2000. – вып. 4. – С. 108 – 113.
73. Захаров, Ю. Н. Моделирование распространения загрязняющих веществ в затопленных горных выработках/ Ю. Н. Захаров,

- В. П. Потапов, Е. Л. Счастливцев, А. В. Чирюкина// Вестник НГУ. – 2009. – Т. 7, вып. 4. – С. 66 – 72.
74. Захаров, Ю. Н. Моделирование распространения примесей в затопленных горных выработках: монография/ Ю. Н. Захаров, В. П. Потапов, Е. Л. Счастливцев, А. В. Чирюкина// Кемеровский государственный университет. – Кемерово, 2013. – 96 с.
75. Захаров, Ю.Н. Об одной нестационарной модели движения примесей в закрытых водоемах / Ю.Н. Захаров, Л.В. Кемерова, Е.Л. Счастливцев, В.П. Потапов// II Международная конференция «Геоинформатика: технологии, научные проекты», Барнаул, 2010. – С. 124.
76. Захаров, Ю. Н. Течение жидкости в подземных полостях с учетом фильтрации через стенки/ Ю. Н. Захаров, А. В. Чирюкина// Инновационные недра Кузбасса. IT – технологии: сборник научных трудов. – 2007. – С. 305 – 309.
77. Захаров, Ю. Н. Течение идеальной жидкости в закрытых водоемах/ Ю. Н. Захаров, Е. Л. Счастливцев, А. В. Чирюкина// Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, спец. вып. 2. – С. 21 – 27.
78. Злобина, Е. С. Экологические и технологические аспекты утилизации твердых углеводородных отходов/ Е. С. Злобина, А. В. Папин, А. Ю. Игнатова// Вестник КузГТУ. – 2015. – № 3(109). – С. 92 – 102.
79. Ивлева, Г. А. Анализ мирового опыта и научно – технических разработок в области кондиционирования опресненных высокоминерализованных вод для питьевых целей (применительно к шахтным водам восточного Донбасса)/ Г. А. Ивлева, Н. Н. Гусев// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2011. – вып. 10. – С. 162 – 170.
80. Ильин, В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений/ В. П. Ильин. – Новосибирск: Изд- во Ин – та математики, 2000. – 345 с.

81. Ильин, В. П. Трехдиагональные матрицы и их приложения /В.П. Ильин, Ю.И. Кузнецов – М.: Наука, 1985, 205 с.
82. Исхаков, Х. А. Необходимость использования техногенных отходов угледобычи и энергетики/ Х. А. Исхаков, Е. Л. Счастливец, Ю. А. Кондратенко// Вестник КузГТУ. – 2008. – № 5. – С. 87 – 89.
83. Качурин, Н. М. Математическое моделирование предельно допустимых пылегазовых выбросов горных предприятий в атмосферу/ Н. М. Качурин, В. И. Ефимов, С. А. Воробьев, Л. Л. Рыбак// Известия ТулГУ. Науки о Земле – 2014. – № 4. – С. 10 – 16.
84. Каплунов, Ю. В. Экология угольной промышленности России на рубеже XXI века/ Ю. В. Каплунов, С. Л. Климов, А. П. Красавин. под общей ред. С. Л. Климова. – М.: Изд- во Академии горных наук, 2001. – 295 с.
85. Квагинидзе, В. С. Комплекс требований, определяющий эффективность работы горного предприятия/ В. С Квагинидзе, Е. В Воросина, К. Р Арсланов// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2011. – вып. 5. – С. 40 – 47.
86. Клейн, М. С. Повышение технологической и экологической эффективности очистки шламовых вод углеобогащения/ М.С. Клейн, Т.Е. Вахонина// Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2014. – Т. 3, вып. 103. – С. 125 – 127.
87. Клейн, М. С. Подготовка пульпы перед флотацией методом масляной аэроагломерации угольных частиц/ М. С. Клейн, Т. Е. Вахонина// Вестник КузГТУ. – 2012. – № 1(89). – С. 28 – 31.
88. Клейн, М. С. Рациональное природопользование и экологизация производства при обогащении углей/М. С. Клейн// Вестник КузГТУ. – 2005. – № 5. – С. 72 – 75.
89. Ковеня, В.М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики/ В.М. Ковеня; отв. редактор Ю.И. Шокин;

- Рос. Акад. Наук, Сиб. отд-ние, институт вычислительных технологий. – Новосибирск. Изд-во СО РАН. 2014 – 280 с.
90. Ковеня, В. М. Об одном алгоритме решения уравнений Навье – Стокса вязкой несжимаемой жидкости/ В. М. Ковеня// Вычислительные технологии. – 2006. – № 2. – С. 39 – 51.
91. Ковеня, В. М. Схемы оптимального расщепления для решения уравнений Навье – Стокса/ В. М. Ковеня, А. Ю. Слюняев// Проблемы и достижения прикладной математики и механики/ РАН. Сиб. отд-е. Ин – т теор. и прикл. механики. – 2010. – С. 66 – 75.
92. Козлов, В. А. Осадительно – фильтрующие центрифуги «Декантер» техническая основа обезвоживания Угольного шлама/ В. А. Козлов, В. И. Новак// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2011. – № 7. – С. 229 – 237.
93. Котляр В. Д. Эффективная стеновая керамика на основе опок и отходов углеобогащения/ В. Д. Котляр, А. В. Устинов// Интернет – журнал Науковедение. – 2013. – № 3(16). – С. 131 – 139.
94. Крапчин, С. С. Экологические проблемы в области добычи и использования углей и возможные направления их решения/ С. С. Крапчин// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2007. – № 6. – С. 331 – 337.
95. Красавин, А. П. На стремнине экологических проблем м/ А. П. Красавин. – Пермь: ИПК «Звезда», 2006. – 208 с.
96. Красавин, А. П. У истоков отраслевой экологии/ А. П. Красавин. – Пермь: Изд- во «Золотой город», 2001. – 268 с.
97. Красавин, А. П. Экологичное оздоровление промышленного производства/ А. П. Красавин. – Пермь: ИПК «Звезда», 2005. – 232 с.
98. Кузубова, Л. И. Очистка нефтесодержащих сточных вод: Аналит. обзор/ Л. И. Кузубова, С. В. Морозов/ СО РАН. ГПНТБ, НИОХ. – Новосибирск, 1992. – 72 с.

99. Лаврентьев, М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели/ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: «Наука», 1973. – 416 с.
100. Лесин, Ю. В. Охрана и рациональное использование водных ресурсов при разработке угольных месторождений Кузбасса/ Ю. В. Лесин, Л. С. Скрынник. – Кемерово: Кузбассвуиздат, 2008. – 179 с.
101. Лисейкин, В.Д. Технология построения разностных сеток/ В.Д. Лисейкин, Ю.И. Шокин, И.А. Васева, Ю.В. Лиханова. – Новосибирск: Наука, 2009. – 414 с.
102. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: государственное издательство технико – теоретической литературы, 1950. – 677 с.
103. Малышенко, В. С. Совершенствование природоохранных работ в угольной промышленности: Обзор/ В. С. Малышенко, Ю. В. Каплунов, А. П. Красавин, А. А. Харионовский. ЦНИЭИуголь. – М., 1992. – 142 с.
104. Марчук, Г. И. Методы расщепления/ Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1988. – 262 с.
105. Марчук, Г. И. Методы расщепления и переменных направлений/ Г. И. Марчук. – М.: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1986. – 263 с.
106. Марчук, Г. И. Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики, некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики/ Г. И. Марчук, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1966.
107. Масленникова, В. Н. Дифференциальные уравнения в частных производных: учебник/ В. Н. Масленникова. – М.: Изд- во РУДН, 1997. – 447 с.
108. Маслобоев, В. А. Численное моделирование процессов пыления хвостохранилища АНОФ – 2/ В. А. Маслобоев, А. А. Бакланов, С. И. Мазухина, О. Ю. Ригина, П. В. Амосов// Вестник МГТУ. – 2014. – № 2. – С. 376 – 384.

109. Методические основы оценки и регламентирования антропогенного влияния на качество поверхностных вод/ под ред. А. В. Караушева// Л.: Ленинград Гидрометеоиздат. – 1987 – 286 с.
110. Михайлов, В. Г. Некоторые аспекты переработки отходов в Кузбассе/ В. Г. Михайлов, Т. В. Киселёва// Известия Самарского научного центра РАН. – 2010. – № 4 – 3. – С. 576 – 579.
111. Мурко В. И. Диверсификация источников энергии в сельском хозяйстве Сибири/ В. И. Мурко, В. Н. Делягин, М. П. Баранова, С. Н. Шахматов// Вестник КрасГАУ. – 2015. – № 11. – С. 103 – 108.
112. Наркевич, И. П. Утилизация отходов в технологии неорганических веществ/ И. П. Наркевич, В. В. Печковский. – М.: Химия, 1984. – 240 с.
113. Новак, В. И. Селективная флокуляция угольного шлама на ОФ «Распадская»/ В. И. Новак, В. В. Долматов, В. А. Козлов// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2010. – № 5. – С. 48 – 51.
114. Новое в численном моделировании: алгоритмы, вычислительные эксперименты, результаты. – М.: Наука, 2000. – 247 с.
115. Ольшанский, М. А. Лекции и упражнения по многосеточным методам/М. А. Ольшанский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 169 с.
116. Павлов А. А. Моделирование процессов трансформации нефтяных загрязнений при разливах нефтепродуктов на акваторию малых рек/ А. А. Павлов, А. В. Черняев// Известия Волгоградского Государственного Технического Университета. – 2009. – Т. 6, №. 6 – С. 23 – 27.
117. Панова, В. Ф. Отходы углеобогащения как сырье для получения строительных материалов/ В. Ф. Панова, С. А. Панов// Вестник СибГИУ. – 2015. – № 2(12). – С. 71 – 75.
118. Папин, А. В. Технология утилизации угольных шламов с отходом производства гуматов/ А. В. Папин, А. Н. Заостровский, Г. А. Солодов, М. С. Исмагилов, А. И. Гудков// Вестник Кузбасского

- государственного технического университета. – 2006. – № 2. – С. 86 – 87.
119. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости/ С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
120. Певзнер, М. Е. Экология горного производства/ М. Е. Певзнер, В. П. Костовецкий. – М.: Недра, 1990.
121. Полежаев, В. И. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье – Стокса/ В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Вerezуб и др. – М.: Наука, 1987. – 272 с.
122. Пугачев А. В. Экологическая безопасность – направление государственной экологической политики России и экологической политики Кузбасса/ А. В. Пугачев// Вестник КемГУ. – 2009. – № 1. – С. 55 – 59.
123. Родионов, А. И. Технологические процессы экологической безопасности, основы энвайроменталистики: учебник для студентов технических и технологических специальностей/ А. И. Родионов, В. Н. Клушин, В. Г. Систер. – 3 – е изд., перераб. и доп. – Калуга: Изд-во Н. Бочкаревой, 2000. – 800 с.
124. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика/П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 618 с.
125. Руховец Л. А. Использование математических моделей для решения задач сохранения водных ресурсов Онежского озера/ Л. А. Руховец, Н. Н. Филатов// Труды Карельского научного центра Российской академии наук. – 2011. – № 4. – С. 77 – 87.
126. Сагамонян, А. Я. Движение оползней, возникающих на склонах возвышенностей под действием дождя/ А. Я. Сагамонян// Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 143 – 148.
127. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем/ А. А. Самарский. – М.: «Наука», 1971. – 552 с.

128. Самарский, А. А. Введение в численные методы/ А. А. Самарский. – М.: Наука. Главная редакция физико – математической литературы, 1982. – 272 с.
129. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры/ А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2 – е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
130. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений/ А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: «Наука», 1978. – 592 с.
131. Самарский, А. А. Численные методы: учеб. пособ. для вузов/ А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: «Наука», 1989. – 432 с.
132. СанПиН 2.1.5.980 – 00. 2.1.5. Водоотведение населенных мест, санитарная охрана водных объектов. Гигиенические требования к охране поверхностных вод. Санитарные правила и нормы (утв. Главным государственным врачом РФ 22.06.2000) (с изм. от 25.09.2014)
133. Сапрыкин, И. С. Электрохимические методы обработки производственных сточных вод/ И. С. Сапрыкин, Л. В. Ворон// Труды Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Новокузнецк: изд. СибГИУ. – 2014. – 4 ч., вып. 18. – С. 76 – 79.
134. Седов Л. И. Механика сплошной среды: в 2 – х т. Т. 1. – М.:»Наука», 1970. – 492 с.
135. Сенкус, В. В. Моделирование процессов осаждения шлама в отстойниках угольных шахт/ В. В. Сенкус, Б. М. Стефанюк, В. К. Буторин// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2007. – № 7. – С. 102 – 109.
136. Сироченко, В. П. Численное моделирование конвективных течений вязкой жидкости в многосвязных областях/ В. П. Сироченко// Труды международной конференции РААММ – 2001. – 6 т., 2 ч., спец. вып. – 2001. – С. 554 – 562.

137. Скрынник, Л. С. Очистка угольно – глинистой суспензии от взвешенных частиц/ Л. С. Скрынник, Н. И. Юкина// Вестник КузГТУ. – 2006. – № 6. – С. 82 – 85.
138. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования: в 2 – х т./ под ред. Н. С. Бахвалов, В. В. Воеводин, Ин – т вычисл. математики. – М.: «Наука», 2005. – Т. 1. – 343 с.
139. Солодов, В. С. Технологические аспекты брикетирования мелкодисперсных твердых углеродсодержащих материалов/ В. С. Солодов, А. В. Папин, В. И. Косинцев, А. И. Сечин// Вестник КузГТУ. – 2013. – № 3. – С. 110 – 113.
140. Солодов, Г. А. Технология комплексной переработки шламовых вод предприятий угольной отрасли/ Г. А. Солодов, Е. В. Жбырь, А. В. Папин, А. В. Неведров// Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 310, № 1. – С. 139 – 144.
141. Солодов, Г. А. Утилизация угольных шламов Кузбасса в виде высококонцентрированных водоугольных суспензий/ Г. А. Солодов, А. Н. Заостровский, А. В. Папин, Т. А. Папина, М. С. Клейн// Вестник КузГТУ. – 2003. – № 6. – С.71 – 74.
142. Субботин, В. В. Исследование влияния эффективности действия флокулянтов при обогащении угольного шлама/ В. В. Субботин, В. Н. Петухов// Вестник МГТУ им. Г.И. Носова. – 2014. – № 2(46). – С. 20 – 24.
143. Сухинов, А. И. Построение дискретной математической модели транспорта наносов/А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко// Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2011. – Т. 121, № 8. – С. 32 – 443.
144. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики/ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: «Наука», 1966. – 735 с.

145. Томаков, П. И. Экология и охрана природы при открытых горных работах/ П. И. Томаков, В. С. Коваленко, А. М. Михайлов, А. Т. Калашников. – М.: Изд- во Московского государственного горного университета. – 1994. – 418 с.
146. Федоренко, Р. П. О скорости сходимости одного итерационного процесса/ Р. П. Федоренко// ЖВМ и МФ, 1964. – № 4. – С. 227 – 235.
147. Федорчук, Ю. М. Разработанные и перспективные технологии использования техногенных материалов в России и Казахстане/ Ю. М. Федорчук, М. А. Саденова// Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 7 – 2. – С. 218 – 222.
148. Федотова, З. И. Нелинейно - дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне/ З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов// Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № 4. – С. 114 – 126.
149. Франк, А. М. Дискретные модели несжимаемой жидкости/ А. М. Франк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 208 с.
150. Чамкина, Т. И. Влияние отраслей промышленности на состояние окружающей среды Кузбасса/ Т. И. Чамкина// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2008. – № 8. – С. 268 – 279.
151. Чебакова, И. Б. Очистка сточных вод: учеб. пособие/ И. Б. Чебакова. – Омск: Изд- во ОмГТУ, 2001. – 84 с.
152. Чернышова, Т. И. Технологии утилизации углеродсодержащих отходов коксохимического производства с целью получения топливных брикетов/ Т. И. Чернышова, Е. П. Набоков, Н. В. Алпатов// Актуальные вопросы современной науки. – 2015. – № 44 – 1. – С. 144 – 152.
153. Чикина, Л. Г. Развитие специальных итерационных методов для решения задач моделирования процесса изменения донной поверхности водоемов, дисс. доктора физ. – мат. наук. – Ростов – на – Дону, 2010. – 333 с.

154. Шабас И. Н. Математическое моделирование задач переноса многокомпонентных примесей в Азовском море на многопроцессорных вычислительных системах/И. Н. Шабас, А. Л. Чикин, Л. Г. Чикина// Известия ЮФУ. Технические науки. – 2014. – № 12(161). – С. 200 – 210.
155. Шабас, И. Н. Моделирование на высокопроизводительных вычислительных системах процессов распространения многокомпонентных примесей в водоеме/ И. Н. Шабас// Вестник Южно – Уральского гос. ун – та. – 2014. – Т. 3, № 1. – С. 89 – 95.
156. Шкадов, В. Я. Течение вязкой жидкости: учеб. пособие/ В. Я. Шкадов, З. Д. Запрянов. – М.: Изд- во московского университета, 1984. – 199 с.
157. Шкоп, А. А. Обезвоживание угольных полидисперсных суспензий/ А. А. Шкоп// Восточно – Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Т. 2., № 6(74) – С. 44 – 49.
158. Шорохова, А. В. Концепция управления системой утилизации отходов и создания рекреационных зон в угледобывающих регионах/ А. В. Шорохова// Вестник СибГИУ. – 2013. – № 1(3). – С. 38 – 39.
159. Юкина, Н. И. Определение гранулометрического состава угольно – глинистой суспензии/ Н. И. Юкина// Горный информационно – аналитический бюллетень. – 2009. – № 12. – С. 232 – 235.
160. Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики/ Н. Н. Яненко. – Новосибирск.: «Наука», 1967. – 197 с.
161. Яненко, Н. Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности/ Н. Н. Яненко// ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, № 6. – С. 1207 – 1210.
162. Abdel-Raouf N., Al-Homaidan A.A., Ibraheem I.B.M. Microalgae and wastewater treatment (2012) Saudi Journal of Biological Sciences, № 19, pp. 257 - 275.

163. Aditya Ku.M., G Suresh Ku. Weathering of oil spill: modeling and analysis Aquatic Procedia [Proc. of the International Conference on water resources, coastal and ocean engineering (ICWRCOE 2015)], 2015, no. 4, pp. 435-442.
164. Bastian, P., Hackbush W., Wittum G. Addaptive and multiplicative multigrid - a comporasion, Computing. 1998, V .62. pp. 345 - 364.
165. Batchelor G. K. An introduct into fluid dynamics, Cambridge 1970.
166. Blazek J. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier science Ltd. 2001.
167. Bondareva L, Zakharov Yu, Goudov A Simulation of Industrial Wastewater Treatment from the Suspended Impurities into the Flooded Waste Mining Workings Engineering [Proc. of the 5th International Conference: Modern Technologies For Non-Destructive Testing] IOP Conf. series: Materials and Engineering 189 (2017) pp.1 – 5. doi: 10.1088/1757-899X/189/1/012011
168. Brandt F. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems, Math. Comput. 1977, V. 31, pp. 333 - 390.
169. Carretier, S., Martinod, P., Reich, M., Godderis, Y. Modeling sediment clasts transport during landscape evolution: Earth Surf. Dynam., 4, 2016, pp. 237 – 251.
170. Davis E. B. New Developments in Environmental Research// Nova Science Publishers. – June 2006. – 354 p.
171. Dyakonov E. G. Optimization in Solving Elliptic problems, N.Y.: CRC Press 1996.
172. Elizarova T.G., Bulatov O.V. Regularized shallow water equations and a new method of numerical simulation of the open channel, Comp. Fluids № 46 (2011), pp. 206 - 211.
173. Evans M. W., Harlow F. H. The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations, Los Alamos Scientific Lab., Rept. NLA-2139 Los Alamos 1957.
174. Fay, J. A. Physical processes in the spread of oil on a water surface Oil on sea, New-York, Plenum Press 1969, P. 53 - 63.

175. James F. Price Lagrangian and Eulerian Representations of Fluid Flow: Kinematics and the Equations of Motion, Woods Hole Oceanographic Institution 2006.
176. Hackbush W. Multi-grid Methods and Applications, Berlin: Springer, 1985.
177. Heywood J. G., Rannacher R. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, II Stability of solutions and error estimates uniform in time, SIAM J. Numer. Anal. 1986, V. 25. pp. 750 - 777.
178. Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows, Vol.1 The fundamentals of computational fluid dynamics, Elsevier science Ltd. 2007.
179. Hudson-Edwards K., Dold B. Mine waste characterization, management and Remediation: minerals, 2015, no. 5, pp. 82 - 85.
180. Lubartseva, S., Coppini, G., Pinardi, N., De Dominicis, M., Lecci, R., Turrisi, G., Creti, S., Martinelli, S., Agostini, P., Marra, P., Palermo, F. Decision support system for emergency management of oil spill accidents in the Mediterranean Sea: Earth Surf. Dynam., 16, 2016, pp. 2009 – 2020.
181. Pulliam T. H. Solution Methods In Computational Fluid Dynamics, NASA Ames Research Center 1986.
182. Punkkinen He., Rasanen Le., Mroueh Ul.-M., Korkealaakso J., Luoma S., Kaipainen T., Bacnas S., Turunen K., Hentinen K., Pasanen A., Kauppi S., Vehvilainen B., Krogerus K. Guidelines for mine water management, VTT Technology, 2016, 171 p. Available at: <http://www.vttresearch.com/impact/publications>
183. Qu X., Alvarez P.J.J., Li Q. Applications of nanotechnology in water and wastewater treatment (2013) Water research № 47 (12), pp. 3931 - 3946.
184. Reference guide to treatment technologies for mining-influenced water. United States Environmental Protection Agency, 2014, 94 p.
185. Rich M. A method for Eulerian fluid dynamics, Los Alamos Scientific Lab. Rept. NLAMS-2826 Los Alamos 1963.

186. Saletti, M., Molnar, P., Hassan, M.A., Burlando, P. A reduced-complexity model for sediment transport and step-pool morphology: *Earth Surf. Dynam.*, 4, 2016, pp. 549 – 566.
187. Van Maren D.S., Van Kessel T., Cronin K., Sittoni L. The impact of channel deepening and dredging on estuarine sediment concentration. *Continental shelf research*, 2015, no. 95, pp. 1-14.
188. Zakharov Yu, Bondareva L. Simulation of Domestic and Industrial Wastewater Disposal in Flooded Mine Workings. *Procedia Engineering* [Proc. of the International Scientific Conference Urban Civil Engineering and Municipal Facilities (SPbUCEMF-2015)], 2015, vol. 117, pp. 389 - 396. doi: 10.1016/j.proeng.2015.08.183
189. Zakharov, Y.N. Нестационарное распространение примесей в закрытых проточных водоёмах/ Y.N. Zakharov, L.V. Кемерова¹, A.V. Chiryukina// *Mathematical and Informational Technologies (MIT 2011): Conference Information, Врнячка Баня, Serbia, 2011, Budva, Montenegro, 2011. – Белоград, 2011. – P. 136 - 137.*

¹02.11.2011 в связи с изменением семейного положения поменяла фамилию с «Кемерова» на «Бондарева»

Свидетельство о регистрации программы № 2014617559

Программный комплекс предназначен для численного моделирования очистки жидких промышленных стоков в отработанных горных выработках закрытых и затопленных угольных шахт.

В представленном программном комплексе предусмотрены возможности для численного моделирования примесей, с выделением до пяти фракций частиц, и реализованы алгоритмы изменения области решения из-за заиливания.

Реализованные методы могут быть полезны для прогнозирования явления «залпового выброса» примесей из выработанного пространства, а также получения оценок времени безопасной эксплуатации выработки как очистного сооружения. Программный комплекс может применяться для исследования процессов очистки не только в шахте Кольчугинской, но и для других подобных проектов очистки.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014617559

«Программный комплекс для численного расчета течения
и распространения примесей в закрытых водоемах
«Distribution and Stream of Impurity in the Closed Reservoirs»

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Кемеровский государственный университет»
(КемГУ) (RU)*

Авторы: *Бондарева Любовь Васильевна (RU),
Захаров Юрий Николаевич (RU)*

Заявка № 2014615508

Дата поступления 03 июня 2014 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 28 июля 2014 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

