

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения
Российской академии наук

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный
исследовательский центр информационных и вычислительных технологий»

На правах рукописи

Червов Виктор Васильевич

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ В ВЕРХНЕЙ МАНТИИ ЗЕМЛИ

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Диссертация
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н., профессор Черных Г.Г.

Новосибирск – 2021

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Постановка задачи трёхмерного численного моделирования мантийной конвекции	41
1.1 Основные уравнения	41
1.1.1 Уравнения неразрывности и движения вязкой жидкости в гравитационном поле	41
1.1.2 Уравнение переноса тепла	42
1.1.3 Уравнение состояния.....	42
1.2 Основные уравнения движения жидкости в мантии Земли.....	43
1.3 Уравнения свободной конвекции в геодинамическом приближении в переменных «векторный потенциал-завихренность»	47
1.4 Граничные условия для завихренности и векторного потенциала.	49
Глава 2. Трёхмерные численные модели и их тестирование	53
2.1 Численная модель конвективных процессов в мантии Земли в переменных «векторный потенциал-завихренность»	55
2.2 Численная модель конвективных процессов в мантии Земли с привлечением неявной реализации метода искусственной сжимаемости	56
2.3 Численная модель трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявных методов расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления	66
2.4 Численное решение краевых задач для трёхмерного модельного уравнения Пуассона.....	74
2.4.1 Задача Неймана–Дирихле для уравнения Пуассона	74
2.4.2 Задача Неймана для уравнения Пуассона	75
2.5 Комплексы программ расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли в декартовых переменных.....	81

2.5.1	Комплекс программ расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли в переменных «завихренность-векторный потенциал» с вязкостью, зависящей от давления и температуры.....	84
2.5.2	Комплекс программ численного моделирования трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявных методов расщепления с коррекцией давления.....	86
2.5.3	Комплекс программ численного моделирования трёхмерных конвективных процессов в мантии Земли с применением неявной реализации метода искусственной сжимаемости в декартовых координатах	88
2.6	Тестирование численных моделей и комплексов программ.....	89
2.6.1	Результаты тестирования в переменных «векторный потенциал-завихренность».....	90
2.6.2	Сопоставление с основным тестом решений, полученных методом искусственной сжимаемости и неявным методом расщепления с коррекцией давления.....	104
2.6.3	Тестирование численных моделей с применением метода экстраполяции по Ричардсону.....	108
2.7	Задача протекания	116
	Выводы.....	121
Глава 3. Трёхмерное моделирование тепловой конвекции в верхней мантии под континентальной литосферой		
	122	122
3.1	Постановка задачи	122
3.2	Конвекция под литосферной плитой постоянной мощности	128
3.3	Трёхмерная конвекция под континентальной литосферой с протяжённым кратоном.....	143
3.4	Конвекция под континентальной литосферой с квадратным в плане кратоном.....	156
3.5	Конвекция под литосферой с двумя кратонами	167

3.6	Моделирование конвекции под литосферой с ловушкой	192
3.7	Численное моделирование конвекции под литосферой с симметричным расположением протяжённого кратона или ловушки.....	215
3.8	Трёхмерное моделирование конвективных процессов под литосферой Центральной Азии.....	221
	Выводы.....	227
Глава 4. Математическое моделирование конвекции в верхней мантии Земли в сферических переменных		229
4.1	Метод и его численная реализация.....	233
4.2	Комплекс программ: «Программа расчёта трёхмерной конвекции под континентальными плитами Земли в сферических координатах»	242
4.3	Сравнительное численное моделирование трёхмерной конвекции с применением декартовой и сферической систем координат	243
4.4	Численное моделирование конвекции под литосферой Евразии.....	247
	Выводы.....	264
Глава 5. Моделирование тепловой конвекции в верхней мантии Земли в зонах спрединга и субдукции		266
5.1	Влияние спрединга на формирование субдукции около удалённого континента	268
5.2	Формирование субдукции вследствие надвига микроконтинента на пассивную океаническую литосферу.....	275
	Выводы.....	286
	Общие выводы.....	287
	Литература.....	289

Введение

Кинематика литосферных плит и геологическая история развития континентальных областей определяется пространственно-временной эволюцией структуры конвекции.

Современные представления о недрах Земли позволяют интерпретировать сплошную среду, называемую мантией планеты, как высоковязкую жидкость. Таким образом, весьма важной является задача изучения конвекции в мантии Земли, которая может объяснить тектонические процессы, происходящие на Земле. Поэтому, изучение конвекции в верхней мантии Земли – одна из центральных задач геофизики. Выполненные в этом направлении в последние годы работы ([1, 17-23, 25, 36-43, 52-55, 59, 60, 67, 76-78, 85-114, 119-126, 131-139, 143-203] и др.) существенно расширили наши представления о строении и составе недр планеты. Определяющая роль в процессе получения по данному вопросу содержательной информации отводится численным экспериментам.

Конвективные течения вязкой несжимаемой жидкости относятся к классическому разделу гидромеханики. Результаты численного исследования конвекции с применением уравнений Навье-Стокса отражены в многочисленных отечественных и зарубежных публикациях (основные из них приведены в списке литературы).

Результаты расчётов широкого класса двумерных классических задач конвекции в переменных «функция тока - завихренность» ($\psi-\omega$) представлены В.И. Полежаевым и соавторами [33, 70, 73, 74]. В этих работах приведён ряд конечноразностных схем решения начально-краевых задач для уравнений гидродинамики в приближении Обербека-Буссинеска; подробно проанализированы различные аппроксимации граничных условий для завихренности в переменных $\psi-\omega$; рассмотрены вопросы математического моделирования конвекции и изложены

результаты численных экспериментов для широкого класса задач конвективного теплообмена.

В монографии Е.Л. Тарунина [81] представлены численные алгоритмы, на основе которых найдены решения и обсуждаются вопросы численного интегрирования краевых задач гидродинамики вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в приближении Обербека-Буссинеска с введением переменных ψ - ω . Разработаны численные реализации метода фиктивных областей, метода последовательности сеток и проанализированы возможности предлагаемых подходов. Книга проиллюстрирована большим количеством примеров решения задач свободной конвекции в замкнутых объёмах. Обсуждаются вопросы уточнения краевых условий для вихря с применением параметра нижней релаксации.

В книге Б.М. Берковского, Е.Ф. Ноготова [14] также представлены конечно-разностные алгоритмы решения задач конвективного теплопереноса. Работа Б.М. Берковского, В.К. Полевинова [15] содержит конечно-разностные методы решения уравнений термомагнитной и гравитационной конвекции. Для задач естественной конвекции выявлена взаимозависимость чисел Нуссельта и Рэлея, а также и зависимость от применяемых разностных схем.

Для уравнений гидродинамики в переменных «функция тока-завихренность» (ψ - ω) в работе А.Ф. Воеводина, В.В. Остапенко и др. [28] исследуется конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости в замкнутой прямоугольной области. Для интегрирования уравнения завихренности применялась факторизованная разностная схема, а для функции тока - пятиточечная неявная схема расщепления продольно-поперечной прогонки [130].

Решение двумерной задачи в нелинейном случае сводится к решению одномерных задач при аппроксимации конвективных слагаемых с применением подхода, основанного на методе слабой

аппроксимации и изложенного в книге Г.И. Марчука [63]. С использованием дискретного преобразования Фурье и неявного метода расщепления по пространственным переменным построены прямые и итерационные методы интегрирования системы разностных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих уравнения свободной конвекции. Вопрос о сходимости итерационных методов в линейной постановке подробно обсуждается в статье А.Ф. Воеводина [27]. Условия на границах для завихренности определялись по формуле Тома [84]. В последующих работах А.Ф. Воеводина, Т.В. Юшковой [29] и А.Ф. Воеводина, Т.В. Протопоповой [30] эти подходы и их теоретический и численный экспериментальный анализ получили дальнейшее развитие.

Вопросы теоретического анализа конвективных течений с применением теоретико-группового подхода рассмотрены В.К. Андреевым, О.В. Капцовым, В.В. Пухначёвым, А.А. Родионовым [3]. Построены аналитические решения. В.В. Пухначёвым указаны условия применимости приближения Обербека-Буссинеска.

В.С. Бердниковым и его учениками и коллегами выполнен большой цикл исследований конвективных течений [11]. Разработаны численные модели широкого класса конвективных течений, включая течения с сопряжённым теплообменом. Применялись и усовершенствовались как конечноразностные, так и конечноэлементные методы. Проведён цикл экспериментальных исследований. Результаты численного моделирования согласуются с экспериментальными данными. Экспериментальные и расчётные исследования дополняют друг друга. Ряд работ коллектива авторов имеет геодинимическое приложение [4, 7, 12, 13].

В работе К.Е. Пирсона [72] для описания нестационарных двумерных течений вязкой однородной несжимаемой жидкости применялись уравнения Навье-Стокса в переменных ψ - ω . Построено

точное аналитическое решение модельной задачи гидродинамики. Построена конечно-разностная схема решения с применением при решении уравнения завихренности на каждом временном слое неявной конечно-разностной схемы Писмана-Рекфорда [177] с центральными разностями для пространственных производных в конвективных слагаемых; уравнение Пуассона для функции тока интегрировалось с помощью метода верхней релаксации [24].

Двумерному конвективному теплообмену в геодинимических задачах посвящены работы Мак-Кензи, Туркотта, Кристенсена, Хауземана, Робертса, Вейса, Флейто, Йена, Олсона [143, 150, 160-163, 165, 166, 171, 172, 174-176, 181, 185, 186, 189, 190, 193] и многих других.

К.Е. Торранс и Д.Л. Туркотт [193] воспользовались двухполевым методом для решения задач конвекции, в которых вязкость зависит от давления и температуры. При проведении вычислений использовался метод конечных разностей с центральными разностями для производных по пространству и времени. Конвективные члены в уравнении теплопроводности аппроксимировались как симметричными, так и несимметричными трёхточечными разностными операторами. Аналогичный метод решения был применён и в работах G.A. Houseman, D.P. McKenzie, P. Molnar, D.R. Moore, N.O. Weiss, D. Sandiford, L. Moresi [160, 171, 185], а также D.R. Moore, N.O. Weiss [171], но с постоянной вязкостью.

Хауземаном (G.A. Houseman et al., [160]) на основе двухполевого метода осуществлено численное решение системы уравнений Навье-Стокса при постоянной вязкости с применением схемы «чехарда» с центральными разностями по пространству и времени и со вторым порядком аппроксимации для решения уравнения переноса тепла.

Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом Фурье и скалярной трёхдиагональной прогонкой.

В случае вязкости, зависящей только от глубины, M.H. Houston, J.C.I. De Dreuwerker [161] при численном моделировании конвекции с внутренними источниками тепла, применили для решения системы уравнений Навье-Стокса в переменных $T-\psi$ (температура- функция тока) уравнение четвёртого порядка для функции тока. Решение задач осуществлялось по схеме переменных направлений. В уравнении теплопереноса конвективные слагаемые аппроксимировались направленными разностями.

U. Christensen [143] использовал метод конечных элементов при моделировании мантийной конвекции на основе уравнений Навье-Стокса с вязкостью, зависящей от давления и температуры. Применялся подход, использующий уравнение 4-го порядка для функции тока, представленной бикубическими сплайнами. Температурное поле представлялось биквадратными сплайнами.

Для решения двумерных задач конвекции в верхней мантии Земли U. Hansen, A. Ebel применили методы конечных элементов [156]. Решение бигармонического уравнения для функции тока на каждом временном слое осуществлялось с использованием неконформного типа конечных элементов и билинейного типа с коррекцией «по потоку» - для уравнения температуропроводности (J.C. Heinrich, P.S. Huysakorn, O.C. Zienkiewicz, [157]).

При численном решении уравнений Навье-Стокса в переменных (u, v, p) с вязкостью, зависящей от температуры и давления, L. Fleitout, D.A. Yuen [150, 151] использовали подход, основанный на применении прямоугольных конечных элементов в Лагранжевой системе координат.

В работах В.П. Трубицына с соавторами представлены двумерные и трёхмерные численные модели конвекции в мантии Земли [17, 18, 76, 85-101, 104, 195]. Структурные элементы литосферы, такие, например, как континентальная плита, кратон или слэб, возникают в результате

конвективных течений в мантии и интерпретируются в зависимости от вычисленной вязкости.

Хорошо известный метод слабой сжимаемости (Н.Н. Владимирова, Б.Г. Кузнецов, Н.Н. Яненко [26]) и близкий к нему метод искусственной сжимаемости (А.Ж. Chorin [2, 117, 142]) состоит в том, что уравнение несжимаемости в первом из подходов заменяется уравнением неразрывности слабосжимаемой жидкости; во втором подходе последнее уравнение линеаризуется. Система уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости становится системой уравнений в частных производных типа Коши-Ковалевской и для её численного интегрирования могут быть применены методы дробных шагов [130]. Поскольку численные расчёты ведутся при конечном параметре искусственной сжимаемости ε , то при численном исследовании нестационарных течений возникают вопросы точности аппроксимации, связанные со стремлением параметра сжимаемости ε к нулю. В качестве одного из возможных подходов к устранению ограничений такого рода может рассматриваться метод экстраполяции Ричардсона [64] (экстраполяция по малому параметру ε). При решении стационарных задач подобные проблемы снимаются.

Хорошо известными и популярными численными методами решения задач гидродинамики несжимаемых жидкостей являются в настоящее время методы расщепления по физическим процессам (О.М. Белоцерковский, В.А. Гущин (см.[10]), Р. Пейре, Т.Д. Тейлор [71], А.И. Толстых [34, 35, 83], К. Флетчер [117], В.М. Ковеня [48, 49]) и их модификации. Весьма важным этапом методов расщепления является этап отыскания давления (избыточного давления, разности давлений на соседних временных слоях); при этом возникает необходимость решения задачи Неймана для трёхмерного уравнения Пуассона для давления (поправки давления).

Численное интегрирование трёхмерных задач гидродинамики несжимаемых жидкостей может быть также осуществлено с применением подходов, основанных на переменных $\mathbf{V}-\boldsymbol{\omega}$ (вектор скорости, вектор завихренности) (Х. Роуч, [75] S.C.R. Dennis, D.V. Ingham, R.N. Cook [147]). При использовании подобных подходов, как отмечается в [2], возможно появление проблем, связанных с выполнением в процессе вычислений уравнения неразрывности (К. Азиз [131], Х. Роуч [75], В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов [70]).

Классические задачи гидродинамики в трёхмерном случае решаются различными методами, как в естественных переменных, так и в векторных $\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\omega}$. В связи с тем, что трёхмерной функции тока не существует, применяется аналог – векторный потенциал

$$\boldsymbol{\psi} \equiv i\psi^x + j\psi^y + k\psi^z.$$

Таким образом, подходы, используемые в классической гидродинамике, могут быть обобщены и на случай задач конвективного теплообмена в мантии Земли.

При использовании подхода $\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\omega}$ задача численного интегрирования на временных слоях в однородной жидкости может быть сведена к последовательному интегрированию трёх конвективно-диффузионных уравнений для каждой из компонент вихря и векторного уравнения Пуассона (трёх скалярных уравнений) для компонент векторного потенциала.

Подобный численный алгоритм с применением искомым векторов завихренности и потенциала был успешно применён, в частности, в статье О.А. Бессонова, В.А. Брайловской, В.И. Полежаева [16], где исследовалось течение, инициированное градиентами температуры и концентрации в поле силы тяжести в области в виде прямоугольного параллелепипеда. Математическое моделирование проводилось на

основе нестационарных уравнений гидродинамики в приближении Обербека-Буссинеска. Для построения конечно-разностного алгоритма применялись разнесённые сетки, с заданием и вычислением различных физических величин в различных точках вычислительной ячейки (для выполнения условия консервативности для завихренности на дискретном уровне). На каждом временном слое решение уравнения Пуассона для векторной завихренности осуществлялось неявным методом переменных направлений; уравнение Пуассона для векторного потенциала интегрировалось с использованием быстрого преобразования Фурье по двум пространственным направлениям и метода трёхточечной прогонки по третьему.

В работах О.Н. Гончаровой [31, 32] исследованы задачи конвекции с применением уравнений Навье-Стокса с зависящей от температуры вязкостью. Применялся метод расщепления по физическим процессам. Решены задачи конвекции для слабосжимаемой жидкости и задачи микроконвекции с твёрдыми и свободными границами в условиях пониженной гравитации.

Задачи двумерной и трёхмерной конвекции и тектоника плит последовательно рассмотрены В.П. Трубицыным и др. [17, 18, 76, 86-102, 104, 195]; в работах [17, 76, 92, 96, 98] исследовались перемещения литосферных плит. В [92] получены движения модельных континентов, их соединение в суперконтинент и последующий распад на отдельные плиты, а в [98] построены численные модели мантийной конвекции, в которых создаётся самосогласованная динамическая картина тектоники литосферных плит.

В работах В.П. Трубицына и его коллег [91, 95, 97-99] рассматриваются проблемы фазовых переходов в мантийной жидкости; в работах [102, 103] изучено влияние тепловых источников на режимы конвекции.

Результаты тестирования двумерных задач мантийной конвекции анализировались во многих работах. В первую очередь в работах В. Blankenbach, F. Busse et al. [134], Н.П. Мошкина, Е.В. Рычковой, С.А. Тычкова, Г.Г. Черных [67, 137] и в В.В. Червова [118].

В [67] в переменных ψ - T уравнение теплопереноса интегрировалось методом, основанном на схеме предиктор-корректор, где на этапе предиктора использовались направленные разности. Уравнение четвёртой степени для функции тока решалось с помощью схемы стабилизирующей поправки [130]. В подходе [137] применялся явный метод расщепления по физическим процессам.

В работе автора для двумерной мантийной конвекции [118] применён подход с использованием разностных схем интегрирования уравнений Навье-Стокса в переменных ψ - ω ; для решения уравнения теплопроводности привлекались четыре аппроксимации конвективных слагаемых для сравнительного анализа.

Б. Бланкенбах и др. в работе [134] представили результаты тестирования двумерной конвекции, а в работе F.H. Busse, U. Christensen et al. [136] были опубликованы тесты трёхмерной конвекции в мантии Земли. Данные в этой работе получены в результате применения весьма различающихся методов и подходов.

Основным движущим механизмом тектоники плит является конвекция в верхней мантии Земли. Процессы, идущие непосредственно под жёсткой литосферной оболочкой, в астеносфере (до глубин примерно 350 км) и в мантии (до 660-700 км) являются предметом настоящего исследования.

Конвективные процессы принимают непосредственное участие в наблюдаемых перемещениях литосферных плит и в формировании тектонических режимов.

Одной из главных особенностей структуры конвективных течений можно считать существование замкнутых обособленных ячеек

конвекции. Отдельно в нижней и отдельно в верхней мантии (Н.Л. Добрецов, А.Г. Кирдяшкин [36], С.А. Тычков [105], F. Dubuffet, M. Rabinowicz, M. Monnereau [149], J.C. Hewitt, D.P. McKenzie, N.O. Weiss [158], F. Richter [182]). Такая структура может нарушаться ввиду возникающих на границе верхней и нижней мантии возмущений (L.P. Solheim, W.R. Peltier, [189]). При исследовании конвекции в верхней мантии важным является выяснение причин и условий, определяющих кинематику литосферных плит и геологическую историю их развития.

Эволюционные характеристики конвекции в верхней мантии во многом зависят от геометрических параметров литосферных блоков, входящих в модель. Для континентальных областей характерны существенные вариации мощности литосферы, оказывающие значительное влияние на режимы верхнемантийной конвекции. Для океанской литосферы в первую очередь учитываются динамические параметры и условия сопряжения с континентальными плитами.

Одной из задач настоящего исследования является исследование трёхмерной конвекции в присутствии значительных перепадов по мощности участков континентальной литосферы. В Евразии это Ангария, Русская платформа и Центрально-Азиатский складчатый пояс, Тарим и Западно-Сибирская платформа, Китайские кратоны и Индостан.

Изучение воздействия геометрии литосферы на динамику тепловой гравитационной конвекции в двумерной постановке выполнено в цикле исследований В.П. Трубицына с коллегами [85-88]. На основании анализа результатов расчётов, выполненных группой В.П. Трубицына, выяснилось, что под неравномерной по простиранию в глубины мантии континентальной плитой возникают течения, направления которых зависят от мощности литосферы. В областях, где мощность литосферы имеет аномально большие в сравнении с

окружением значения, формируются устойчивые конвективные потоки, устремлённые к верхним горизонтам. Объясняется это теплоэкранирующим эффектом. В местах, где мощность значительно меньше, чем основная часть литосферного блока, возникают течения, направленные к нижним горизонтам, т.е. формируется устойчивый нисходящий поток мантийного вещества. Происходит это благодаря более интенсивной теплоотдаче под аномально тонкой литосферой.

Двумерные модели можно назвать значительным упрощением реальной трёхмерной картины течения. Несмотря на это известны результаты исследований в двухмерном варианте, направленные на изучение конвекции под литосферой океанов и континентов. В работах Н. Schmeling, G. Marquart [186, 187] была представлена математическая модель, в которой континентальная литосфера представлена высоковязкой жидкостью. Причём «континентальная» вязкость отличалась от средней по мантии на три порядка. Аналогичный подход применялся и в работах L. Fleitout, D.A. Yuen [148, 150, 151, 186, 187, 192]. Ввиду того, что данная концепция для континентальных областей нереалистична, в работе [108] (С.А. Тычков, Е.В. Рычкова, А.Н. Василевский, В.В. Червов) были найдены соответствующие этому подтверждения. Выяснилось, что взаимоотношение расчётных геофизических характеристик, таких как тепловой поток, рельеф местности, геоид, не соответствуют наблюдениям.

В лабораторных экспериментах [153] (L. Guillou, C. Jaupart) при изучении теплового эффекта под континентальной литосферой континентом служила теплоизолирующая пластина, вставленная в медную плиту. Плита имела в эксперименте постоянную температуру и моделировала океанскую литосферу. В [86] (В.П. Трубицын, Ю.Ф. Белавина, В.В. Рыков) повторили эту ситуацию при проведении численного моделирования. Полученные В.П. Трубицыным данные оказались достаточно близки к лабораторным измерениям [153] и

подтвердили ранее замеченный эффект формирования устойчивого конвективного восходящего потока под континентальной плитой с частично теплоизолированной поверхностью.

Задачи, основанные на решениях уравнений Навье-Стокса, рассматривались в работах Трубицына [100, 104 и др.] при моделировании ситуаций под литосферой океанов и примыкающих к континентам зонам субдукции. Следуя [6] субдукцией (от лат. *subductio* – буквально, подведение) называется процесс погружения океанской литосферы в астеносферный слой мантии, происходящий на конвергентных границах плит. Этот процесс может носить вынужденный характер, при котором происходит надвигание континента или островной дуги на океан, и литосфера последнего заталкивается в астеносферу. Для современной Земли более характерна самопроизвольная субдукция, при которой океанская литосфера тонет в астеносфере, убыстряя тем самым движение всей плиты. К настоящему времени известен ряд физико-математических моделей субдукции. Отметим лишь некоторые из них [38, 44-46, 52, 53, 59, 100, 104, 126, 140, 141, 185] (в них можно найти более подробную библиографию). В книге Л.И. Лобковского [59] в рамках упруго-пластической реологии литосферы рассматривается и анализируется состояние погружающейся плиты под островную дугу. В книге Н.Л. Добрецова [38] на основе геофизических подходов изучаются зоны субдукции островодужного и андийского типов. Задачи, основанные на решениях уравнений Навье-Стокса, рассматривались в работах В.П. Трубицына [100, 104] при моделировании ситуаций под литосферой океанов и примыкающих к континентам зонам субдукции. Лабораторные эксперименты А.А. Кирдяшкина и А.Г. Кирдяшкина позволили найти профили скоростей свободноконвективного течения в астеносфере под срединно-океаническим хребтом (СОХ) при подвижной литосфере. Кроме того, получено выражение для

касательного напряжения на кровле астеносферы под СОХ и определена суммарная сила трения, действующая со стороны астеносферного потока на литосферную плиту [44-46]. В рамках вязкоупругой двумерной постановки С.Н. Коробейниковым, В.В. Ревердатто, О.П. Полянским и др. [52, 53] построена математическая модель коллизии платформенных плит с погружением одной из плит в мантию под другой. Предполагается, что в начальном состоянии земная кора имела разлом и в результате взаимного сближения происходит поддвиг одного участка плиты под другой участок. Численное моделирование осуществлялось с применением нелинейных моделей МДТТ. Учитывались все известные типы нелинейностей: геометрическая, физическая и контактная. Численное решение задачи проводилось с применением пакета программ MSC.Marc 2005. Численная модель детально протестирована путём решения модельных задач. Результаты расчётов хорошо согласуются с результатами известных модельных экспериментов. Анализ результатов расчётов позволил выявить механизм явления субдукции, связанного с геометрической неоднородностью субдуцирующей плиты в районе разлома и уплотнением материала этой плиты при её погружении в мантию. В работе Dan Sandiford и Louis Moresi [185] построены двумерные численные модели субдукции основанные на уравнениях Навье-Стокса в геодинимическом приближении в декартовой системе координат. Построено приближение слабого слоя (weak layer) и демонстрируется его применение к математическому моделированию долговременной динамики течения в зоне субдукции.

Начиная с 90-х годов прошлого века с появлением более мощной вычислительной техники появились трёхмерные варианты численных моделей тепловой гравитационной конвекции в мантии Земли. Помимо моделирования течений несжимаемой конвектирующей мантийной жидкости, предпринимались попытки моделирования конвекции во

всей мантии с учётом сжимаемости вещества. В результате расчётов (D. Bercovici, G. Schubert, G.A. Glatzmaier, P. Machetel, M. Rabinowicz, P. Bernadet, J.T. Ratcliff, P.J. Tackley, G. Schubert, A. Zebib [133, 152, 167, 180]) было обнаружено нарушение симметрии между формой нисходящих и восходящих течений, характерной для несжимаемой жидкости. Структура потоков для случая сжимаемой мантийной жидкости характеризовалась узкими изолированными восходящими течениями (плюмами) внутри медленно погружающейся остывающей мантии.

Изучалась роль стратификации по реологии и плотности, а также и роль фазовых переходов в мантии Земли [146, 178] (L. Cserepes, M. Rabinowicz, C. Rosemberg-Borot, G. Ceuleneer, M. Monnereau, C. Rosemberg).

В работе В.П. Трубицына и В.В. Рыкова [195] континенты вводились в модель как жёсткие непроницаемые объекты с бесконечной вязкостью в окружении высоковязкой среды, состав которой по своим физико-химическим характеристикам удовлетворяет параметрам, присущим веществу астеносферы, или, что то же самое, - океанической литосферы. Вязкость в задаче зависела от температуры. Цель этих исследований – определение воздействия конвективных течений на модельные континенты; вычисление сил, действующих на помещённые в астеносферу объекты, определение их скоростей.

Ранее отмечалось, что достаточно эффективным подходом к численному моделированию двумерных задач конвекции в мантии является подход с применением функции тока и завихренности [143, 150, 160-163, 165, 166, 171, 172, 174-176, 181, 185-187, 189, 190, 193]. В трёхмерном варианте функцию тока заменяют векторным потенциалом (ψ), а завихренность - векторной завихренностью (ω).

Анализ численных моделей классических конвективных течений (в классической гидродинамике) показывает, что широко используются

как подходы, основанные на переменных ψ - ω , так и на естественных переменных с применением неявных методов расщепления по пространственным переменным, неявных методов расщепления с коррекцией давления и неявной реализации метода искусственной сжимаемости. Уравнения конвективных процессов в верхней мантии Земли существенно отличаются от уравнений классической гидродинамики, прежде всего бесконечными значениями числа Прандтля, значительным варьированием и нелинейной зависимостью вязкости мантийного вещества от литостатического давления и температуры.

К моменту начала исследований диссертанта вышеупомянутые подходы к решению трёхмерных задач геодинамики практически не были разработаны. Исходя из этого актуальной является задача построения новых более совершенных и эффективных (в сравнении с известными) численных трёхмерных моделей конвекции в верхней мантии Земли как в декартовой прямоугольной системе координат, так и в сферических переменных. В диссертационной работе построены оригинальные численные модели трёхмерных конвективных процессов в верхней мантии Земли, основанные на вышеупомянутых подходах. Особое внимание уделяется анализу надёжности и эффективности созданных численных моделей и комплексов программ. Впервые решены актуальные задачи конвекции в мантии Земли под кратонами Центральной Азии и Евразии. Построены оригинальные численные модели спрединга и субдукции.

Цель работы состоит в разработке трёхмерных численных моделей и комплексов программ, ориентированных на исследование тепловой конвекции в верхней мантии Земли, основанных на переменных «векторный потенциал – завихренность» (ψ - ω), а также на естественных переменных (V - p), с применением неявных методов

расщепления по пространственным переменным и исследовании особенностей динамики мантии континентальных областей Земли и процессов, происходящих в зонах спрединга (раздвижения литосферных плит) и субдукции (погружения океанических плит в мантию Земли).

Научная новизна

- Разработаны основанные на неявных методах расщепления по пространственным переменным численные методы и алгоритмы решения трёхмерных задач конвекции в верхней мантии Земли. С применением этих алгоритмов построены и детально протестированы трёхмерные численные модели и комплексы программ расчёта конвекции в декартовой и сферической постановках;
- построены численные модели конвекции под модельными кратонами;
- обоснована трёхмерность конвекции под модельным протяжённым кратоном (ловушкой);
- выявлена мелкомасштабная мода конвекции под модельными кратонами и предложено обоснование механизма траппового магматизма;
- построены численные реализации геодинамических моделей верхнемантийной теплогравитационной конвекции под континентальной неоднородной литосферой Евразии. На основе численных экспериментов показано, что реальные кратоны, как и модельные прямоугольные в плане кратоны, приводят к аналогичным конвективным структурам. Течение характеризуется устойчивыми восходящими потоками в виде плюмов и нисходящими потоками и прогретыми областями по периферии кратонов.
- построены две численные модели образования слэба:

а) трёхмерная численная модель конвекции в зонах спрединга и субдукции; найдена скорость погружения слэба до глубин порядка 700 км, согласующаяся в верхней мантии со скоростью раздвижения плит; в результате расчётов получен нисходящий поток холодного мантийного вещества, перетекающего из области океанической литосферы под континент;

б) трёхмерная численная модель конвективных течений мантийной жидкости под движущимся от срединно-океанического хребта (СОХ) континентом с прирастающей к нему океанической литосферой; при движении континент надвигается на пассивную океаническую плиту, образуя при этом уходящий под континент низкотемпературный след, который можно интерпретировать как слэб.

Достоверность результатов диссертационной работы основана на проведении многочисленных содержательных тестовых расчётов, результатах детальных численных экспериментов по сопоставлению с известными аналитическими и числовыми данными решения модельных задач, использовании мер контроля точности найденных решений, согласовании наблюдаемых и рассчитанных геолого-геофизических характеристик.

На защиту выносятся:

- Основанные на неявных методах расщепления по пространственным переменным численные методы, алгоритмы и комплексы программ расчёта трёхмерных задач конвективного теплопереноса в верхней мантии Земли в декартовых и сферических координатах;
- численные модели конвекции под модельными кратонами и обоснование трёхмерности конвективных процессов; найденная в численных экспериментах мелкомасштабная мода конвекции; обоснование траппового магматизма;

- результаты численного моделирования конвективных течений под литосферой Центральной Азии, подтверждающие результаты исследования модельных структур на примере Сибирского кратона и его ближайшего окружения (Тарим и Сев. Китайский кратон);
- результаты численного моделирования конвективных течений под литосферой Евразии с учётом конфигураций элементов литосферных блоков, входящих в Евразийский континент (Сибирский кратон, Русская, Западно–Сибирская и Китайские платформы, Тарим, Центрально-Азиатский складчатый пояс, Индийская плита и др.); полученные температурные поля, согласующиеся с сейсмотомографической низкоскоростной аномалией на юго-западной оконечности Сибирского кратона и в восточной части Центральной Монголии;
- результаты трёхмерного численного моделирования спрединга под океанической литосферой и субдукции под континентальной литосферной плитой, демонстрирующие погружающийся под континент поток холодной мантийной жидкости; оценки динамических параметров полученного потока и мантийных течений в расчётной области.

Представление работы

Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях:

- Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях». С-Петербург, 2003.
- Международная конференция по вычислительной математике. Новосибирск, 2004.
- Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях». Москва, 2005.

- XIII International Conference on the Methods of Aerophysical Research. Novosibirsk, 2007.
- International Conference «Fluxes and Structures in Fluids». S - Petersburg, 2007.
- V совещание Российско-Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям (6-8 февраля, Новосибирск, ИВТ СО РАН, 2007).
- Международная конференция «Потоки и Структуры в Жидкостях: Физика Геосфер». Москва, 2009.
- Всероссийский симпозиум с международным участием «Кайнозойский континентальный рифтогенез». Иркутск, Ин-т земной коры СО РАН, 2010.
- Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж, ВГУ, 2010.
- International Conference on the Methods of Aerophysical Research. Novosibirsk, ITAM SB RAS, 2010.
- Всероссийская конференция по вычислительной математике КВМ- 2011. Новосибирск, 2011.
- «Современные проблемы геодинамики и геоэкологии внутриконтинентальных орогенов», к 75-летию со дня рождения Ю.А. Трапезникова. Международный симпозиум. Бишкек: НС РАН, 2011.
- «Современное состояние наук о Земле»: Международная конференция памяти В.Е. Хаина (Москва, 1-4 февраля 2011).
- «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика»: Международная конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011).

- Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Всероссийская конференция. Новосибирск, 2012.
- Тектонофизика и актуальные вопросы наук о Земле. Третья тектонофизическая конференция в ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН. Москва, 8-12 октября 2012.
- Методы создания, исследования и идентификации математических моделей: Международная научная конференция, посвящённая 85- летию со дня рождения А.С. Алексеева. Новосибирск, 10-13 октября 2013 г.
- 50 лет сейсмологического мониторинга Сибири. Всероссийская конференция с международным участием. Новосибирск, 21-25 октября 2013.
- Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015» (АПВПМ-2015), посвящённая 90-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука. Новосибирск, 19-23 октября 2015.
- Четвертая тектонофизическая конференция в ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН. Москва, 3-8 октября 2016.
- Международная конференция «Вычислительная и прикладная математика 2017» (ВПМ 2017). Новосибирск, 25 - 30 июня 2017.
- Международная конференция «Вычислительная математика и математическая геофизика», посвящённая 90-летию со дня рождения академика Анатолия Семёновича Алексеева. Новосибирск, 8 – 10 октября 2018.

Содержание диссертации докладывалось на семинарах Института геологии СО РАН (рук. д.г.-м.н. А.Ю. Казанский), Института геологии СО РАН (рук. акад. Н.Л. Добрецов), Института вычислительных технологий СО РАН (рук. акад. Ю.И. Шокин, проф. В.М. Ковеня),

Института вычислительных технологий СО РАН (рук. д.ф.-м.н. С.Б. Медведев), на заседании Учёного совета Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука (председатель – д.т.н., профессор И.Н. Ельцов).

Результаты диссертационных исследований обсуждались также на семинарах ИНГГ им. А.А. Трофимука СО РАН, ИВМиМГ СО РАН и ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН.

Публикации

Содержание диссертации и предшествующие работы по теме диссертационной работы отражены в 55 публикациях, в том числе в 18 статьях, опубликованных в ведущих научных журналах, входящих в рекомендованный список ВАК РФ, а также в четырёх комплексах компьютерных программ, отвечающих теме диссертации.

Основные результаты диссертационной работы с достаточной полнотой опубликованы в следующих работах (18):

Статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

1. Тычков, С.А. Тепловая конвекция в верхней мантии континентов и её эффект в геофизических полях / С.А. Тычков, Е.В. Рычкова, А.Н. Василевский, В.В. Червов // Геология и геофизика. –1999. –Т.40, №9. –С. 1275-1290.

Соискателем предложены и лично разработаны конечно-разностные алгоритмы решения задач конвекции в верхней мантии Земли с применением переменных «завихренность–функция тока», составлены комплексы программ расчёта конвекции. Соискатель совместно с соавторами участвовал в постановке задач и обсуждении результатов расчётов.

2. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерных задач конвекции в мантии Земли с применением завихренности и векторного потенциала / В.В. Червов // Вычислительные технологии. –2002. –Т.7, №1. –С. 114-125.

3. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерных задач конвекции в мантии Земли с применением последовательности сеток / В.В. Червов // Вычислительные технологии. –2002. –Т.7, №3. –С.85-92.

4. Тычков, С.А. О численном моделировании тепловой конвекции в мантии Земли / С.А. Тычков, В.В. Червов, Г.Г. Черных // ДАН. –2005. –Т.402, №2. –С. 248-254.

Соискателем лично рассчитана тепловая гравитационная конвекция под кратонами (ловушками) протяжённой формы на основе разработанного им конечно-разностного алгоритма решения задачи конвекции в мантии Земли в переменных «векторный потенциал–завихренность» и созданного комплекса программ. В.В. Червов совместно с соавторами принимал участие в постановках задач и обсуждении результатов расчётов.

5. Тычков, С.А. Численная модель трёхмерной конвекции в верхней мантии Земли. / С.А. Тычков, В.В. Червов, Г.Г. Черных // Физика Земли. –2005. –№5. –С. 48-64.

Соискателем лично на основе разработанной им численной модели проведено математическое моделирование тепловой конвекции под литосферой переменной мощности; определены пространственные характеристики мелкомасштабной моды конвекции в астеносфере планеты на глубинах 220-350 км и определены особенности и характеристики проявлений траппового магматизма на древних кратонах и на их периферии. Соискатель совместно с соавторами принимал участие в постановках задач и обсуждении результатов расчётов в части, касающейся трёхмерности конвективных процессов под кратонами(ловушками) протяжённой формы.

6. Tychkov, S.A. Numerical modeling of 3D convection in the Earth mantle / S.A. Tychkov, V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. –2005. –Vol.20, No.5. –P. 483-500.

Соискателем на основе лично разработанных конечно-разностного алгоритма и комплекса программ расчёта задач конвекции в мантии Земли в переменных «векторный потенциал–завихренность» выполнены расчёты конвективных процессов в верхней мантии Земли под модельными кратонами. Выполнены детальные численные эксперименты по тестированию алгоритма и комплекса программ путём решения модельной краевой задачи Неймана для трёхмерного уравнения Пуассона с нелинейной правой частью, имеющей аналитическое решение. Проведены расчёты на последовательности сеток с применением алгоритма экстраполяции по Ричардсону [64]. Проведены дополнительные расчёты по сопоставлению с международным тестом по моделированию конвекции в мантии Земли [136] с применением экстраполяции по Ричардсону и показана высокая эффективность метода. Совместно с соавторами он участвовал в постановках задач и обсуждении результатов расчётов.

7. Червов, В.В. Моделирование трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам // Вычислительные технологии. –2006. –Т.11, №4. –С.73-86.

8. Владимиров, А.Г. Пермский магматизм и деформации литосферы Алтая как следствие термических процессов в земной коре и мантии. / А.Г. Владимиров, Н.Н. Крук, В.В. Червов [и др.] // Геология и геофизика. –2008. –Т.49, №7. –С. 621-636.

Соискателем выполнено численное моделирование и предоставлены результаты расчётов трёхмерных конвективных течений под Алтаем и его окружением. Соискатель принимал также совместное с соавторами участие в постановках задач и обсуждении результатов расчётов.

9. Червов, В.В. Моделирование трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода слабой сжимаемости // Вычислительные технологии. –2009. –Т.14, №3.–С. 86-92.

10. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерной конвекции под кратонами Центральной Азии / В.В. Червов, А.В. Червов, Г.Г. Черных // Вычислительные технологии. –2009. –Т.14, №5. –С. 114-121.

Соискателем лично предложены простейшие конфигурации модельных кратонов, близких к реальным объектам Центральной Азии; на основе разработанных им конечно-разностных алгоритмов выполнено моделирование трёхмерной конвекции под литосферой Центральной Азии с учётом полученных геометрических особенностей. Соискатель лично дал геофизическую интерпретацию численных результатов расчётов. А.В. Червов принимал участие в проведении вычислительных экспериментов. Постановка задачи обсуждалась с научным консультантом Г.Г. Черных.

11. Chervov, V.V. Numerical Modeling of 3D Convection in the Upper Mantle of the Earth beneath Lithosphere of Central Asia / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. –2012. –Vol.21, No.1. –P. 78-89.

Соискателем лично разработаны конечно-разностные алгоритмы решения и обработки, построена трёхмерная численная модель тепловой конвекции в верхней мантии Земли, основанная на применении метода дробных шагов. Соискателем проведено детальное тестирование модели и представлены результаты трёхмерного моделирования конвекции под литосферой Центральной Азии. Дана геофизическая интерпретация результатов математического моделирования тепловой гравитационной конвекции под кратонами центральной Азии. Обсуждение постановки задачи проводилось совместно с соавтором.

12. Koulakov, I. Slab interactions in the Taiwan region based on the P- and S- velocity distributions in the upper mantle / I. Koulakov, V. Chervov [et al.] // Journal of Asian Earth Sciences. –2013. –Vol.79. – P. 53-64.

Соискателем предоставлены результаты расчётов 3D-конвекции под Юго-Восточной Азией. Постановка задачи и обсуждение результатов расчётов проводились совместно с соавторами.

13. Chervov, V.V. Numerical Modeling of Three-Dimensional Convection in the Upper Mantle of the Earth beneath Eurasia Lithosphere / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. – 2014. –Vol.23, No.2. –P.105-111.

Соискателем лично разработаны конечно-разностные алгоритмы и создан комплекс программ расчёта конвективных верхнемантийных течений под литосферой Евразии на основе неявной реализации метода искусственной сжимаемости в сферических координатах. Проведено детальное тестирование комплекса программ и выполнено численное моделирование тепловой гравитационной конвекции под литосферой Евразии. Дана геофизическая интерпретация полученных результатов. Постановка задачи обсуждалась совместно с соавтором.

14. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерной конвекции в верхней мантии Земли под литосферой Евразии / В.В. Червов, Г.Г. Черных, Н.А. Бушенкова, И.Ю. Кулаков // Вычислительные технологии. –2014. –Т.19, №5. –С. 101-114.

Соискателем лично построены основанные на концепциях Флейто–Йена и Трубицына–Тычкова оригинальные численные модели спрединга и субдукции. Привлекаются уравнения Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска и геодинамическом приближении в сферической системе координат. Дискретизация задачи осуществляется на основе неявной реализации метода искусственной сжимаемости. Представлены результаты численного моделирования трёхмерной

конвекции под океанической литосферой в зонах раздвижения плит (спрединг) и формирования слэба (субдукция) под континентальной литосферой. Дана геодинамическая интерпретация. Обсуждение результатов расчётов осуществлялось совместно с соавторами.

15. Бушенкова, Н.А. Субмеридиональная пограничная зона в Азии: сейсмичность, структура литосферы и распределение конвективных потоков в верхней мантии / Н.А. Бушенкова, О.А. Кучай, В.В. Червов // Геодинамика и тектонофизика. –2018. –Т.9, №3. – С. 1007-1023.

Соискателем лично построены и разработаны конечно-разностные алгоритмы расчёта конвекции в верхней мантии Земли под литосферой Евразии на основе неявной реализации метода искусственной сжимаемости в сферических координатах. Представлены результаты численного моделирования трёхмерной конвекции под континентальной литосферой Центральной Азии. Обсуждение результатов расчётов проводилось совместно с соавторами.

16. Chervov, V.V. Numerical Modeling of Convection in the Zone of Spreading and Subduction / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. –2019. –Vol.28, No.1. –P. 14-25.

Соискателем лично разработаны конечно-разностные алгоритмы и создан комплекс программ расчёта конвекции в верхней мантии Земли в зонах спрединга и субдукции на основе неявной реализации метода искусственной сжимаемости в сферических координатах с применением метода последовательности сеток. Осуществлено детальное тестирование алгоритма и комплекса программ. Дана геофизическая интерпретация полученных результатов. Постановка задачи обсуждалась совместно с соавтором.

17. Chervov, V.V. Flow in Subduction Zone Against Bevel Angle of Leading Edge of Continent Overthrusting on Passive Oceanic Lithosphere /

V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. – 2020. – Vol.29, No.3. – P. 460-466.

Соискателем лично разработаны конечно-разностные алгоритмы и создан комплекс программ расчёта конвекции в верхней мантии Земли в зонах спрединга и субдукции на основе неявной реализации метода искусственной сжимаемости в сферических координатах с применением метода последовательности сеток. Осуществлено детальное тестирование алгоритма и комплекса программ. Дана геофизическая интерпретация полученных результатов. Постановка задачи обсуждалась совместно с соавтором.

18. Червов, В.В. Тектонические прогибы на Восточно-Европейской и Сибирской платформах: численное моделирование конвекции под Евразийским континентом / В.В. Червов, Н.А. Бушенкова, Г.Г. Черных // Геодинамика и тектонофизика. –2021. –Т.12, №1. С. 84-99.

Соискателем лично разработаны конечно-разностные алгоритмы и создан комплекс программ расчёта конвекции в верхней мантии Земли на основе неявной реализации метода искусственной сжимаемости в сферических координатах с применением метода последовательности сеток. Осуществлено детальное тестирование алгоритма и комплекса программ. Дана геофизическая интерпретация полученных результатов. Постановка задачи обсуждалась совместно с соавторами.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

19. Червов, В.В. Программа расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли в переменных «завихренность–векторный потенциал» с вязкостью, зависящей от давления и температуры PSIOMEGA/2015 // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2018610212 от 09.01.2018 г.

20. Червов, В.В. Программа расчёта трёхмерной конвекции под континентальными плитами Земли в сферических координатах Navie_Spherical_Coords/2017 // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2018616280 от 28.05.2018 г.

21. Червов, В.В. Программа моделирования трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам Mantle_RFP/2018 / В.В. Червов, Г.Г. Черных // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2018660074 от 16.08.2018 г.

Разработка метода решения, написание комплекса программ и его тестирование осуществлено В.В. Червовым. Г.Г. Черных принимал участие в разработке аналитических тестов.

22. Червов, В.В. Программа расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли неявным методом искусственной сжимаемости в декартовой системе координат Mantle_IS/2019 / В.В. Червов // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2019664642 от 11.11.2019 г.

Научная и практическая значимость результатов исследований, полученных в диссертационной работе, определяется исследованием широкого класса конвективных течений в верхней мантии Земли. Отметим следующее:

✓ Построены основанные на неявных методах расщепления по пространственным переменным трёхмерные численные модели и комплексы программ расчёта конвекции в мантии Земли в декартовых и сферических координатах. Разработанные численные модели могут быть использованы для исследования широкого класса задач геодинамики недр планеты.

✓ Изучена тепловая гравитационная конвекция под модельными кратонами. Обоснована трёхмерность конвекции под модельными

кратонами протяжённой формы. В численных экспериментах выявлена мелкомасштабная мода конвекции, наблюдаемая на периферии кратонов, позволившая обосновать трапповый магматизм около бортов Сибирского кратона в триасе.

✓ Осуществлено численное моделирование конвективных течений под литосферой Центральной Азии и Евразии с учётом конфигураций элементов литосферных блоков, входящих в Евразийский континент (Сибирский кратон, Русская, Западно–Сибирская и Китайские платформы, Тарим, Центрально-Азиатский складчатый пояс, Индийская плита и др.). Получены температурные поля, согласующиеся с сейсмотомографической низкоскоростной аномалией на юго-западной оконечности Сибирского кратона и в восточной части Центральной Монголии.

✓ Построены численные модели спрединга и субдукции. Представлены результаты численного моделирования трёхмерной конвекции под океанической литосферой в зонах раздвижения плит (спрединг) и формирования слэба (субдукция) под континентальной литосферой. Указан механизм возникновения погружающихся холодных гравитационно-неустойчивых областей океанической литосферы под воздействием архимедовых сил. Получены тепловые аномалии, имеющие вид слэбов, погружённых в мантию.

✓ Получены тепловые аномалии, имеющие вид тяжёлой гравитационно-неустойчивой холодной «капли», возникновение и отрыв которой от кромки континента по времени хорошо согласуется с теоретическими оценками отрыва приращённого в процессе спрединга мантийного материала с образованием слэба, погружающегося в мантию.

Разработанные численные модели и комплексы программ могут быть использованы для исследования широкого класса задач конвекции в верхней мантии Земли; при планировании лабораторных и натуральных

экспериментов, обработке известных экспериментальных данных, построении новых более полных численных моделей.

Результаты, представленные в диссертации, получены при проведении исследований в рамках Приоритетного направления СО РАН «Геодинамическая и геохимическая эволюция литосферы и мантии Земли: тектоника, магматизм, флюидный режим и металлогения», по Программе СО РАН №26.2. «Геодинамическая эволюция литосферы Азии: тектоника, магматизм, метаморфизм, геохимия и металлогения основных её этапов». (2002-2004 гг.) и проектов:

1. Проект РФФИ № 08-05-00276, «Глубинная структура и геодинамика под внутриконтинентальными областями (на примере Южной Сибири и Восточной Африки)» (2008-2010 гг., руководитель д.г.-м.н. И.Ю. Кулаков).
2. Проект РФФИ № HRJRG-110 (09-05-91321) (СИГ-а - Совместный конкурс РФФИ - объединение им. Гельмгольца), «Алгоритмы сейсмической томографии для решения фундаментальных и прикладных задач» (2009-2011 гг., руководитель: д.г.-м.н. И.Ю. Кулаков).
3. Проект РФФИ № 12-05-93085 (Норв_а - Конкурс совместных инициативных российско-норвежских научных проектов), «Структура и эволюция литосферы арктического региона на основе аномасштабных геофизических исследований» (2012-2014 гг., руководитель: д.г.-м.н. И.Ю. Кулаков).
4. Проект РФФИ № 13-05-00054, «Проявления глубинной геодинамики в формировании полей деформации Алтае-Саянского региона» (2013-2015 гг., руководитель: к.г.-м.н. Н.А. Бушенкова).

Проекты по программам фундаментальных исследований РАН и её отделений

5. Междисциплинарный интеграционный проект СО РАН № 116. «Геодинамические модели взаимодействия литосферы и мантии Центральной Азии и их геолого-геофизическое тестирование» (2006- 2008 гг., руководители: акад. В.А. Верниковский, акад. Б.Г. Михайленко).
6. Программа СО РАН № 26.1 «Глубинная геодинамика, геодинамическая эволюция литосферы», проект «Геодинамические модели для ключевых современных и докембрийско-палеозойских структур Центральной Азии на основе синтеза геолого-геохимических, палеомагнитных и геофизических данных» (2007-2009 гг., руководитель: акад. В.А. Верниковский).
7. Междисциплинарный интеграционный проект СО РАН № 44, «Взаимодействие коры и мантии внутриконтинентальных областей Азии по данным геолого-геофизических исследований и математического моделирования» (2009-2011 гг., руководитель: акад. В.А. Верниковский).
8. Междисциплинарный интеграционный проект СО РАН № 21, «Геодинамические процессы в зонах субдукции: теплофизическое (экспериментальное и теоретическое) моделирование и сопоставление с геолого-геофизическими данными» (2009-2011 гг., руководитель: акад. В.А. Верниковский).
9. Междисциплинарный интеграционный проект СО РАН № 76 «Структура и геодинамика коллизионных зон Азии по данным геолого-геофизических исследований и математического моделирования» (2012-2014 гг., руководитель: акад. В.А. Верниковский).
10. Междисциплинарный интеграционный проект СО РАН № 20. «Глубинные источники вулканизма в зонах субдукции» (2012- 2014 гг., руководитель: акад. Н.Л. Добрецов).

11. Междисциплинарный интеграционный проект СО РАН № 90 «Кайнозойское горообразование Центральной Азии и сейсмичность: термохронологическое, сейсмотомографическое и физико-математическое моделирование» (2012-2014 гг., руководитель: д.г.- м.н. М.М. Буслов).
12. Интеграционный проект СО-УрО- ДВО РАН № 42, «Тектоническая структура и геодинамические модели курило-камчатской вулканической системы Разработка моделей формирования и эволюция флюидо-магматических систем в Курило-Камчатском регионе» (2012-2014 гг., руководители: акад. Гордеев Е.И., акад. В.А. Верниковский).
13. Междисциплинарный интеграционный проект СО РАН №44 «Изучение зон субдукции и связанного с ними вулканизма методами геофизики, петрологии и математического моделирования (2018- 2020 гг., руководитель чл.-корр. РАН И.Ю. Кулаков).
14. Программа президиума РАН ААА-А18-118021490041-5 «Математическое моделирование сценариев подготовки и реализации вулканических извержений» (2018-2020 гг., руководитель д.ф.-м.н. Г.Г. Черных).

Структура и объем диссертации

Диссертация изложена на 312 страницах, включает в себя введение, пять глав, отражающие методику, содержание и результаты выполненных исследований, заключение и список литературы.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы. Выполнен обзор исследований по тематике диссертации. Сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В Главе 1, носящей вспомогательный характер, кратко представлены основные уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости в гравитационном поле Земли в приближении Обербека-Буссинеска. Продемонстрировано преобразование уравнений гидродинамики (упрощение математической модели) для изучения высоковязких несжимаемых течений, происходящих в верхней мантии Земли. Проведено стандартное обезразмеривание уравнений геодинамики с учётом величин определяющих параметров, свойственных веществу мантии Земли и области исследования. Сформулированы начальные условия, приведены современные представления о начальных и граничных условиях в задачах тепловой гравитационной конвекции в мантии Земли. Изложена постановка задачи в переменных «векторный потенциал»–«завихренность» для трёхмерных задач конвекции в мантии Земли с постановкой начальных и граничных условий в этих переменных.

В Главе 2 изложены разработанные автором численные методы и алгоритмы. Построен алгоритм расчёта трёхмерных задач конвекции в верхней мантии Земли в декартовой системе координат с применением переменных «завихренность - векторный потенциал». Построен алгоритм решения задач конвекции в исходных переменных, основанный на неявных методах расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления. Построены алгоритм и метод решения задач конвекции, базирующийся на неявной реализации метода искусственной сжимаемости. Разработаны комплексы программ и приведено их краткое описание. Сформулированы постановки тестовых задач. Представлены результаты расчётов тестовых модельных задач вязких течений в прямоугольном параллелепипеде при переменной вязкости, зависящей от глубины и температуры.

Получено достаточно хорошее совпадение с данными международного теста [136].

Показана достаточно высокая эффективность метода последовательности сеток в процессе его применения и к тестовой задаче, и к модельной краевой задаче интегрирования уравнения Пуассона в прямоугольном параллелепипеде. Достигнуто значительное повышение точности результатов расчётов, полученных в процессе применения в численных экспериментах экстраполяционного алгоритма Ричардсона [64].

Осуществлено численное моделирование трёхмерной конвекции в мантии Земли (модельная задача [136]) с использованием неявного метода расщепления с коррекцией давления и с применением неявной реализации метода искусственной сжимаемости на разнесённой и на обычной сетках и сделано сопоставление с известным тестовым решением [136].

В Главе 3 изложены результаты трёхмерного численного моделирования верхнемантийной теплогравитационной конвекции под континентальной литосферной плитой переменной толщины. Последовательно изучены следующие задачи эволюции мантийного вещества в расчётной области в форме параллелепипеда, протяжённостью 4200 в направлении на восток и 4200 км в направлении на север, и мощностью 700 км в направлении к центру Земли:

- 1) конвекция под литосферной плитой постоянной мощности;
- 2) конвекция под континентальной литосферой с протяжённым кратоном;
- 3) конвекция под континентальной литосферой с квадратным в плане кратоном;
- 4) конвекция под литосферой с двумя кратонами;
- 5) моделирование конвекции под литосферой с ловушкой;

б) численное моделирование конвекции под литосферой с симметричным расположением протяжённого кратона или ловушки;

7) трёхмерное моделирование конвективных процессов под Центральной Азией.

В п. 3.1 приведена постановка задач. В п. 3.2 представлены результаты численного моделирования конвекции в условиях равномерной литосферы; получено начальное распределение температурного поля для последующих расчётов; в пп. 3.3-3.7 продемонстрирован существенно трёхмерный характер мантийных течений; в пп. 3.4, 3.5 выявлена мелкомасштабная мода, объясняющая трапповый магматизм; в п. 3.8 продемонстрирована существенная зависимость конвективных течений от конфигурации кратонов.

В Главе 4 приведены уравнения геодинамики, описывающие движение вязкого мантийного вещества в верхней мантии Земли в сферических координатах; изложены граничные условия в указанных переменных, построен основанный на неявной реализации метода искусственной сжимаемости численный алгоритм и его компьютерная реализация. Представлены результаты трёхмерного численного моделирования в сферических переменных тепловой гравитационной конвекции в мантии Земли под континентальной и океанической литосферой переменной толщины (Евразия и её окружение). Последовательно изучены следующие задачи.

1. Сравнительное численное моделирование трёхмерной конвекции в модельной задаче с кратоном и ловушкой в декартовых и сферических переменных; получено качественное и количественное согласование искомым полей.

2. Численное моделирование трёхмерной конвекции под литосферой Евразии в сферических переменных; получены температурные поля, согласующиеся с сейсмотомографической картиной данного региона.

В Главе 5 построена базирующаяся на методе искусственной сжимаемости численная модель и выполнено исследование трёхмерной тепловой гравитационной конвекции под океанической литосферой в зоне раздвижения плит (спрединг) и формирования слэба (субдукция) под континентальной литосферой. На основе анализа результатов численных экспериментов указан механизм возникновения погружающихся «холодных» гравитационно-неустойчивых областей океанической литосферы.

Автор выражает благодарность д.г.-м.н. Сергею Анатольевичу Тычкову и д.ф.-м.н. Геннадию Георгиевичу Черных за постоянное внимание к работе и научное консультирование. Автор благодарит д.ф.-м.н. Николая Павловича Мошкина за полезные советы при построении численных моделей, д.г.-м.н. чл.-корр. РАН Ивана Юрьевича Кулакова и к.г.-м.н. Наталью Анатольевну Бушенкову за помощь в геолого-геофизической интерпретации результатов исследований.

Глава 1. Постановка задачи трёхмерного численного моделирования мантийной конвекции

1.1 Основные уравнения

Уравнения гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости [57] хорошо известны и после проведения соответствующих упрощений (см., например, [38]) могут быть использованы для расчётов высоковязких течений в мантии Земли.

1.1.1 Уравнения неразрывности и движения вязкой жидкости в гравитационном поле

Система уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости в поле силы тяжести записывается следующим образом [57, 66]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right), \quad (1.2)$$

где ρ - плотность жидкости, \mathbf{V} - вектор скорости, v_k - компоненты вектора скорости $\mathbf{V} = \{ u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t) \}$; g_z - компоненты вектора силы тяжести \mathbf{g} ; $p(x, y, z, t)$ - давление; $\eta(x, y, z, t) > 0$, $\zeta(x, y, z, t) > 0$ - коэффициенты вязкости, причём η называют динамической вязкостью, а ζ называют второй вязкостью; δ_{ik} - символ

Кroneckera; $i=1,2,3$; $k=1,2,3$. В (1.2) по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

1.1.2 Уравнение переноса тепла

Уравнение переноса тепла записывается следующим образом [57, 66]:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla s \right) = \text{div}(\kappa \nabla T) + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\text{div} \mathbf{V})^2, \quad (1.3)$$

где T - температура жидкости, s - энтропия жидкости, κ - коэффициент теплопроводности, $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ - векторный дифференциальный оператор градиента, обладающий свойствами векторов и подчиняющийся законам частного дифференцирования. Коэффициент теплопроводности κ выражается через коэффициент температуропроводности χ , плотность ρ и c_p - удельную теплоёмкость при постоянном давлении: $\kappa = \rho c_p \chi$ [57, 66].

1.1.3 Уравнение состояния

Пусть $T = T_s + T'$ и $\rho = \rho_s + \rho'$, причём T_s - некоторое постоянное среднее значение температуры, от которого отсчитывается T' , ρ_s - постоянное значение плотности при температуре T_s , ρ' - приращение к ρ_s . В этом случае, если температура изменяется на величину, равную T' , то, в линейном приближении [57]

$$\rho' = -\rho_s \alpha T',$$

где α - температурный коэффициент объёмного расширения жидкости.

При постоянных T_s, ρ_s : $p = p_s + \bar{p}$, где $p = p(x, y, z, t)$ – давление, $p_s = -\rho_s g_z h$ – гидростатическое давление, \bar{p} – дефект (отклонение) давления, h – высота столба жидкости, g_z – вертикальная компонента вектора силы тяжести $\mathbf{g} = \{0, 0, -g_z\}$.

1.2 Основные уравнения движения жидкости в мантии Земли

Если в некотором элементарном объёме изменяется температура, меняется и значение плотности. В результате этого в гравитационном поле возникают возмущения, способствующие появлению свободной конвекции [57, 66], которую невозможно представить уравнениями для однородной жидкости.

Если учесть уравнение состояния и приближение Обербека – Буссинеска [57, 66], систему уравнений (1.1)-(1.3) можно свести к системе уравнений для несжимаемой жидкости.

В дальнейшем, в зависимости от свойств среды, для которой исследуется течение, используется процедура обезразмеривания данных задачи.

Таблица 1.1 – Обезразмеривание параметров конвективных течений в верхней мантии Земли

Независимые переменные и функции	масштабный множитель
(x, y, z) – координаты	$(x', y', z') d$
t - время	$t' d^2 / \chi$
η - коэффициент динамической вязкости	$\eta' \eta_0$
P - давление	$P' \eta_0 \chi / d^2$
ρ - плотность жидкости	$\rho' \rho_0$
T - температура жидкости	$T' (\Delta T)$
u, v, w , - компоненты вектора скорости \mathbf{V}	$(u', v', w') \chi / d$
$Ra = \alpha g_z \rho_0 d^3 \Delta T / \eta_0 \chi$ - число Рэлея;	

Для задачи тепломассопереноса внутри Земли обезразмеривание производится с применением масштабных множителей (Таблица 1.1) [36, 136 и др.], где d - расстояние от поверхности Земли до подошвы мантии, χ - коэффициент температуропроводности, η_0 и ρ_0 - характерные значения вязкости и плотности соответственно, ΔT - разность между температурой на подошве верхней/нижней мантии и температурой на поверхности, α - температурный коэффициент объёмного расширения жидкости, переменные со штрихом - безразмерные.

После подстановки данных из таблицы 1.1 в общие уравнения Навье-Стокса, учитывая уравнение состояния [38, 39, 57, 59, 66], характерное значение $\eta_0 = 10^{22}$ кг/м·с и добавив уравнение температуропроводности, получим в новых штрихованных величинах систему обезразмеренных уравнений Навье-Стокса, в геодинамическом и Обербека-Буссинеска приближениях. Опуская в формулах штрихи, окончательно получим:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.4)$$

$$\nabla p = \nabla \cdot \sigma + (RaT)\mathbf{e}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}T) = \nabla^2 T, \quad (1.6)$$

где σ - тензор вязких напряжений, $\mathbf{e} = (0,0,1)$ - безразмерный вектор.

После обезразмеривания и применения приближения Обербека–Буссинеска в (1.5) $T = T - T_s$ - дефект температуры; p - дефект давления, а не давление ($p \equiv \bar{p}$). Эти величины в дальнейшем будут называться, если специально не оговорено, температура и давление.

В декартовых переменных компоненты тензора вязких напряжений имеют вид [57]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}; & \sigma_{xy} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); & \sigma_{xz} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ \sigma_{yx} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); & \sigma_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}; & \sigma_{yz} &= \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\ \sigma_{zx} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); & \sigma_{zy} &= \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); & \sigma_{zz} &= 2\eta \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}$$

Вопрос о применимости приближения Обербека-Буссинеска возникает, в особенности в связи с громадными масштабами течения, существенными изменениями температуры и огромными значениями вязкости. Теоретические оценки применимости приближения даны В.В. Пухначёвым [3].

В соответствии с этими оценками приближение применимо, если параметр

$$\mathfrak{P} = g_z d^3 / \eta_0 \chi \geq 1.$$

Для задач конвекции в верхней мантии Земли, как показывают прямые вычисления в предположении постоянства вязкости, $\mathfrak{P} > 100$. Таким образом, система уравнений (1.4)-(1.6) может быть применена для описания конвективных процессов в верхней мантии Земли.

Обратимся теперь к постановке модельной задачи, согласующейся с постановкой задачи в работе [136] (ниже, в Главе 2 будет осуществлено детальное сопоставление расчётов настоящей работы с приведёнными в [136]).

На границе прямоугольного параллелепипеда

$$\Pi = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z] \quad (1.7)$$

для компонент вектора скорости ставятся следующие граничные условия (Рисунок 1.1):

$$\text{на поверхностях } x=x_1=0, \quad x=x_2=X; \quad (y_1 \leq y \leq y_2, \quad z_1 \leq z \leq z_2): \quad (1.8)$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

на поверхностях $y=y_1=0$, $y=y_2=Y$; ($x_1 \leq x \leq x_2$, $z_1 \leq z \leq z_2$):

$$v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad (1.9)$$

на поверхностях $z=z_1=0$; $z=z_2=Z$; ($x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$):

$$u = v = w = 0. \quad (1.10)$$

Для системы уравнений (1.4)-(1.6) необходимо задать начальные условия для температуры [116, 129]

$$T(x, y, z, 0) = \tilde{T}_0(x, y, z). \quad (1.11)$$

Следуя [129], отметим, что в уравнении (1.5) нет производной по времени и оно имеет смысл связи, в которой «скорость «следит» за температурой». В связи с этим начальное условие для компонент вектора скорости не ставится.

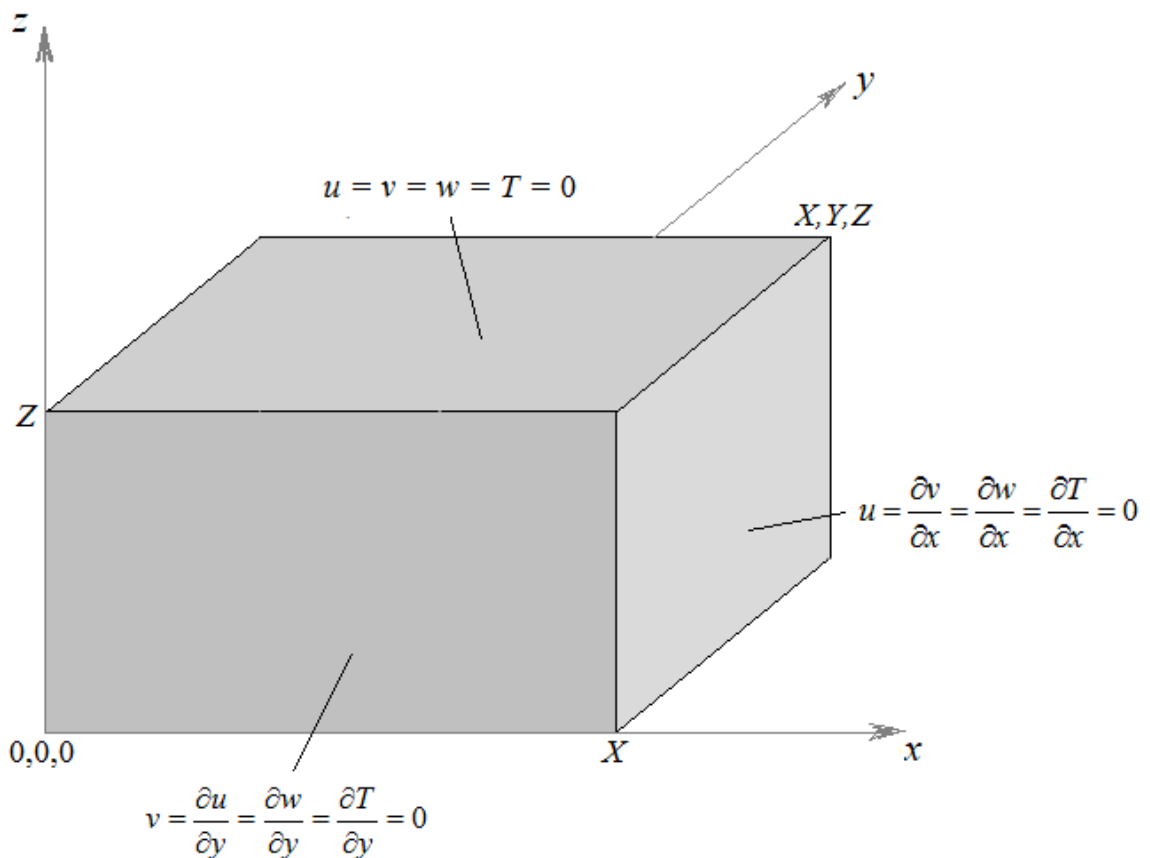


Рисунок 1.1 – Условия на гранях параллелепипеда для температуры и вектора скорости в декартовых координатах

Для уравнения (1.6) при решении задачи в прямоугольном параллелепипеде (1.7) ставятся следующие граничные условия (Рисунок 1.1):

на поверхностях $x = 0, x = X; (y_1 \leq y \leq y_2, z_1 \leq z \leq z_2)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad (1.12)$$

на поверхностях $y = 0, y = Y; (x_1 \leq x \leq x_2, z_1 \leq z \leq z_2)$:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad (1.13)$$

на поверхности $z = 0; (x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2)$:

$$T = 1; \quad (1.14)$$

на поверхности $z = Z, (x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2)$:

$$T = 0. \quad (1.15)$$

1.3 Уравнения свободной конвекции в геодинамическом приближении в переменных «векторный потенциал-завихренность»

Систему дифференциальных уравнений, применяемых для расчётов конвективных течения в мантии, можно переписать в переменных $\boldsymbol{\psi} = i\psi^x + j\psi^y + k\psi^z$ и $\boldsymbol{\omega} = i\omega^x + j\omega^y + k\omega^z$ [61].

Применив операцию **rot** к уравнению (1.5) и учитывая соотношения $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$, $\mathbf{V} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$, $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\omega}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$, получим векторное уравнение для векторного потенциала:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega} \quad (1.16)$$

или три уравнения Пуассона для соответствующих компонент:

$$\nabla^2 \psi^x = -\omega^x, \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 \psi^y = -\omega^y, \quad (1.18)$$

$$\nabla^2 \psi^z = -\omega^z \quad (1.19)$$

и векторное уравнение для завихренности:

$$\nabla^2(\eta\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{F}, \quad (1.20)$$

где $\mathbf{F} = iF^x + jF^y + kF^z$, которое также расщепляется на три скалярных уравнения Пуассона:

$$\nabla^2(\eta\omega^x) = F^x, \quad (1.21)$$

$$\nabla^2(\eta\omega^y) = F^y, \quad (1.22)$$

$$\nabla^2(\eta\omega^z) = F^z. \quad (1.23)$$

Компоненты вектора \mathbf{F} представляются следующими соотношениями:

$$F^x = \omega^x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \omega^x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \omega^y}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \omega^z}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (1.24)$$

$$F^y = \omega^y \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \omega^x}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \omega^y}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \omega^z}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.25)$$

$$F^z = \omega^z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \omega^x}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \omega^y}{\partial z} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \omega^z}{\partial z} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (1.26)$$

При таком подходе уравнение неразрывности (1.4) удовлетворяется тождественно, а давление p при необходимости можно восстановить из решения задачи Неймана для следующего уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \text{Ra} \cdot T \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Граничными условиями для уравнения (1.27) будут условия Неймана [5], непосредственно вычисляемые из (1.5).

Таким образом, для решения поставленной трёхмерной задачи потребуется на каждом слое по времени решить шесть однотипных уравнений Пуассона (1.17)-(1.23) и проинтегрировать уравнение теплопереноса либо в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T, \quad (1.28)$$

либо в эквивалентной консервативной форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (uT)}{\partial x} + \frac{\partial (vT)}{\partial y} + \frac{\partial (wT)}{\partial z} = \nabla^2 T. \quad (1.29)$$

1.4 Граничные условия для завихренности и векторного потенциала.

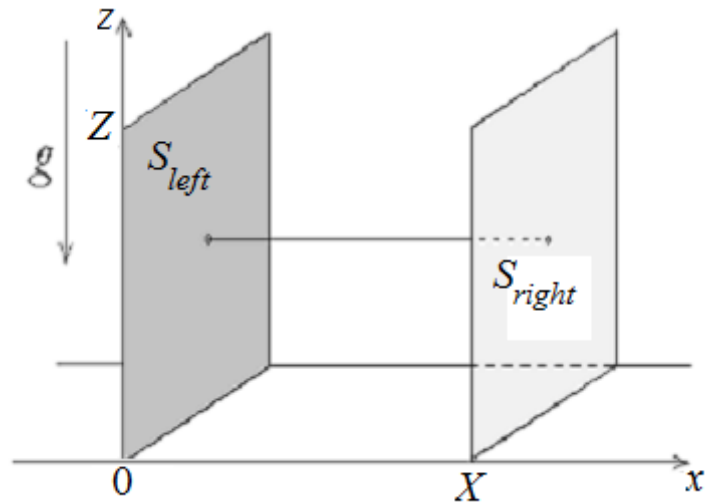
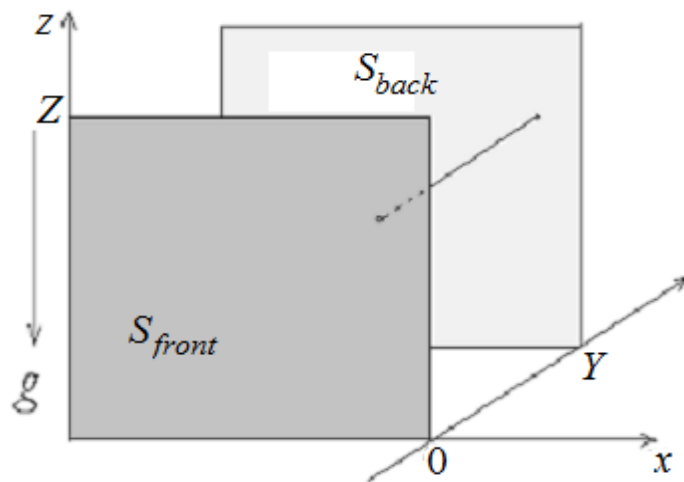
С учётом краевых условий (1.8)-(1.10) в пункте 1.1 и $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ в п. 1.3 граничные условия для функций $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\omega}$ ставятся следующими (см., например, [117]).

На поверхностях S_{left}, S_{right} , где $x = 0$ и $x = X$ (Рисунок 1.2),

$$0 \leq y \leq Y, \quad 0 \leq z \leq Z:$$

$$\frac{\partial \psi^x}{\partial x} = \psi^y = \psi^z = 0, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \omega^x}{\partial x} = \omega^y = 0, \quad \omega^z = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.31)$$

Рисунок 1.2 – Схема граничных условий вдоль оси x Рисунок 1.3 – Схема граничных условий вдоль оси y

На поверхностях S_{front} , S_{back} , где $y = 0$ и $y = Y$ (Рисунок 1.3),

$$0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq z \leq Z:$$

$$\psi^x = \frac{\partial \psi^y}{\partial y} = \psi^z = 0, \quad (1.32)$$

$$\omega^x = \frac{\partial \omega^y}{\partial y} = 0, \quad \omega^z = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.33)$$

На поверхностях S_{bottom}, S_{top} , где $z=0$ и $z=Z$ (Рисунок 1.4),

$$0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y:$$

$$\psi^x = \psi^y = \psi^z = 0, \quad (1.34)$$

$$\omega^x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega^y = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \omega^z = 0. \quad (1.35)$$

Условия, представленные выражениями (1.34) и (1.35) отвечают неподвижной жёсткой границе. Начальные условия для поля температуры ставятся в соответствии с (1.11).

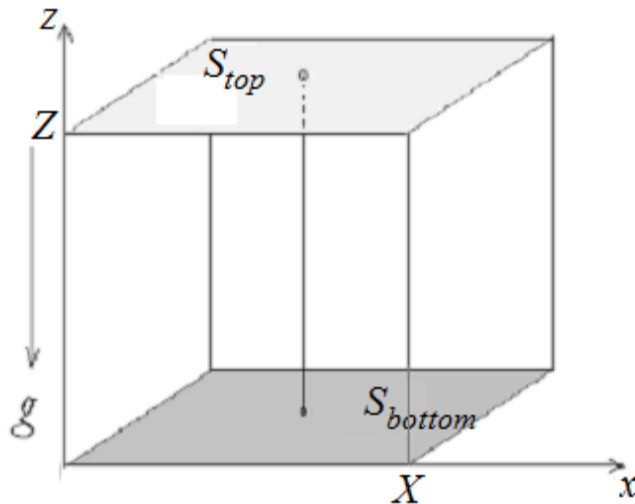


Рисунок 1.4 – Схема граничных условий вдоль оси z

Результаты главы 1, носящей вспомогательный характер, сводятся к следующему.

1. Приведена система уравнений, описывающих конвективные течения в верхней мантии Земли. Сформулирована постановка модельной начально-краевой задачи для конвективного течения мантийной жидкости в параллелепипеде.

2. Представлена система уравнений конвекции в верхней мантии Земли и сформулирована постановка модельной начально-краевой задачи в переменных «векторный потенциал-завихренность».

Глава 2. Трёхмерные численные модели и их тестирование

В настоящей главе рассматривается модельная задача [136] конвекции в трёхмерном прямоугольном параллелепипеде. Прямоугольный параллелепипед $\Pi = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$ с помощью одномерных сеток

$$\zeta_i^{(1)}: 0 = x_1 < x_2 < \dots < x_M = X,$$

$$\zeta_j^{(2)}: 0 = y_1 < y_2 < \dots < y_N = Y,$$

$$\zeta_k^{(3)}: 0 = z_1 < z_2 < \dots < z_K = Z$$

разбивается на частичные параллелепипеды:

$$\Pi_{i,j,k} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}];$$

$$(i=1, 2, \dots, M-1; j=1, 2, \dots, N-1; k=1, 2, \dots, K-1),$$

и вводятся постоянные- шаги разностной сетки по координатным осям

$$h_x = x_{i+1} - x_i, \quad h_y = y_{j+1} - y_j, \quad h_z = z_{k+1} - z_k.$$

Введём также временной интервал (шаг сетки по времени)

$$\Delta t = t_{m+1} - t_m = \text{const},$$

$$t_m = m \cdot \Delta t, \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

где индексом m обозначен текущий слой по времени.

Алгоритм решения задач, поставленных как на основе уравнений в естественных переменных, так и для векторного потенциала и завихренности, заключается в последовательном интегрировании системы уравнений (1.4)-(1.6) или (1.16), (1.20), (1.28) на каждом временном слое (m).

Для решения уравнений Пуассона

$$\nabla^2 \Omega = \Phi \tag{2.1}$$

применяется метод стационарирования и метод дробных шагов с использованием итерационной схемы стабилизирующей поправки [130]:

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega^{n+1/3} - \Omega^n}{\Delta\tau} &= L_{xx}\Omega^{n+1/3} + L_{yy}\Omega^n + L_{zz}\Omega^n - \Phi, \\
\frac{\Omega^{n+2/3} - \Omega^{n+1/3}}{\Delta\tau} &= L_{yy}(\Omega^{n+2/3} - \Omega^n), \\
\frac{\Omega^{n+1} - \Omega^{n+2/3}}{\Delta\tau} &= L_{zz}(\Omega^{n+1} - \Omega^n),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где Φ - правая часть уравнения Пуассона и введён шаг $\Delta\tau$ по фиктивному времени τ

$$\begin{aligned}
\Delta\tau &= \tau_{n+1} - \tau_n = const, \\
\tau_n &= n \cdot \Delta\tau, (n = 0, 1, 2, \dots),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

индекс n – текущий слой по фиктивному времени.

Итерационный процесс заканчивается, если выполнено условие

$$\max_{i,j,k} \frac{|\Omega_{i,j,k}^{n+1} - \Omega_{i,j,k}^n|}{\max_{i,j,k} |\Omega_{i,j,k}^{n+1}|} < \varepsilon, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon > 0$ - некоторая малая положительная величина.

Уравнение теплопереноса (1.28) также интегрируется с привлечением схемы стабилизирующей поправки, в которой индекс m – текущий слой по времени:

$$\begin{aligned}
\frac{T^{m+1/3} - T^m}{\Delta t} + uL_x T^{m+1/3} - L_{xx} T^{m+1/3} &= -vL_y T^m + L_{yy} T^m - wL_z T^m + L_{zz} T^m, \\
\frac{T^{m+2/3} - T^{m+1/3}}{\Delta t} + vL_y T^{m+2/3} - L_{yy} T^{m+2/3} &= vL_y T^m - L_{yy} T^m, \\
\frac{T^{m+1} - T^{m+2/3}}{\Delta t} + wL_z T^{m+1} - L_{zz} T^{m+1} &= wL_z T^m - L_{zz} T^m,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

или при аппроксимации в форме (1.29)

$$\begin{aligned}
\frac{T^{m+1/3} - T^m}{\Delta t} + L_x(uT^{m+1/3}) - L_{xx} T^{m+1/3} &= -L_y(vT^m) + L_{yy} T^m - L_z(wT^m) + L_{zz} T^m, \\
\frac{T^{m+2/3} - T^{m+1/3}}{\Delta t} + L_y(vT^{m+2/3}) - L_{yy} T^{m+2/3} &= L_y(vT^m) - L_{yy} T^m, \\
\frac{T^{m+1} - T^{m+2/3}}{\Delta t} + L_z(wT^{m+1}) - L_{zz} T^{m+1} &= L_z(wT^m) - L_{zz} T^m.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

В схемах (2.2), (2.5) и (2.6) трёхточечные разностные операторы L_{xx}, L_{yy}, L_{zz} и L_x, L_y, L_z аппроксимируют дифференциальные следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\cong L_{xx} f = \frac{f_{i+1} - 2f + f_{i-1}}{h_x^2}; & \frac{\partial f}{\partial x} &\cong L_x f = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h_x}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\cong L_{yy} f = \frac{f_{j+1} - 2f + f_{j-1}}{h_y^2}; & \frac{\partial f}{\partial y} &\cong L_y f = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h_y}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &\cong L_{zz} f = \frac{f_{k+1} - 2f + f_{k-1}}{h_z^2}; & \frac{\partial f}{\partial z} &\cong L_z f = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2h_z}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Представленные в настоящей главе алгоритмы решения задачи конвекции в верхней мантии Земли на классе гладких решений имеют первый порядок аппроксимации по временной переменной и второй по пространственным.

2.1 Численная модель конвективных процессов в мантии Земли в переменных «векторный потенциал-завихренность»

Численное моделирование трёхмерных течений в переменных ψ - ω , основанное на решении системы дифференциальных уравнений (1.16), (1.20), являющихся следствием (1.4)–(1.6), с применением метода дробных шагов [130] осуществлялось на каждом слое по времени по следующему записанному в символическом виде алгоритму:

$$\nabla_h^2 (\eta \boldsymbol{\omega}^{m,n+1}) = \mathbf{F}^{m,n}, \quad (2.8)$$

$$\nabla_h^2 \boldsymbol{\psi}^{m,n+1} = -\boldsymbol{\omega}^{m,n+1}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{V}^{m,n+1} = (\nabla \times \boldsymbol{\psi})_h^{m,n+1}, \quad (2.10)$$

$$T^{m+1} = T^m - \Delta t \cdot \left(\nabla \cdot (\mathbf{V}^{m,n+1} T^{m+1}) - \nabla^2 T^{m+1} \right)_h. \quad (2.11)$$

В рассматриваемой постановке в исследуемом объёме при $t=0$ ($m=0$) задаётся распределение температуры, удовлетворяющее граничным условиям. Компоненты векторного потенциала и завихренности не задаются. Индекс h означает конечноразностную аппроксимацию соответствующего оператора. Алгоритм сводится к следующим этапам.

1. Из уравнения (2.8) методом стационарирования вычисляется поле завихренности $\omega^{m,n+1}$.
2. Аналогично из уравнения (2.9) вычисляется векторный потенциал $\psi^{m,n+1}$ с привлечением полученного на предыдущем шаге поля завихренности.
3. Из разностного аналога соотношения $\mathbf{V} = \nabla \times \psi$ определяется поле скорости $\mathbf{V}^{m,n+1}$.
4. Путём решения уравнения (2.11) вычисляется поле температуры на временном слое $m+1$.

Процесс повторяется до некоторого значения $t_m = m \cdot \Delta t$.

Давление P при необходимости можно восстановить из решения задачи Неймана для уравнения Пуассона (1.27) для дефекта давления p и из уравнения состояния (п. 1.1.3) [57] с учётом литостатического давления. Граничными условиями для уравнения (1.27) будут условия Неймана, непосредственно вычисляемые из (1.5) первой главы.

2.2 Численная модель конвективных процессов в мантии Земли с привлечением неявной реализации метода искусственной сжимаемости

Численное моделирование трёхмерных течений в естественных переменных, основанное на решении системы дифференциальных уравнений (1.4)-(1.6) в случае применения неявной модификации метода искусственной сжимаемости [26, 71, 128] и метода дробных шагов [65, 130] осуществлялось по следующему алгоритму (стрелка означает переход к символическим обозначениям разностных аппроксимаций):

$$\frac{\partial p^{m,n+1}}{\partial \tau} = -c^2 (\nabla \cdot \mathbf{V})_h^{m,n+1} \Rightarrow \quad (2.12)$$

$$p^{m,n+1} = p^{m,n} - \Delta \tau \cdot c^2 \nabla_h \cdot \mathbf{V}^{m,n+1},$$

$$\frac{v_i^{m,n+1} - v_i^{m,n}}{\Delta \tau} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_h^{m,n+1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \eta^m \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right)_h^{m,n+1} + \text{Ra} \cdot T^m \cdot e_i, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial T^{m+1}}{\partial t} + \left(\nabla \cdot (\mathbf{V}^{m,n+1} T^{m+1}) \right)_h = \nabla_h^2 T^{m+1} \Rightarrow \quad (2.14)$$

$$T^{m+1} = T^m - \Delta t \cdot \left(\nabla \cdot (\mathbf{V}^{m,n+1} T^{m+1}) - \nabla^2 T^{m+1} \right)_h,$$

где c^2 – релаксационный параметр, $\{i, k = 1, 2, 3\}$: по повторяющимся индексам производится суммирование.

Ограничения на c^2 и $\Delta \tau = \tau_{n+1} - \tau_n = \text{const}$ в расчётах выбирались аналогичными [81]:

$$\Delta \tau < \min (h_x, h_y, h_z) / c.$$

В исследуемом объёме при $t = 0$ ($m = 0$) ставилось начальное распределение температуры, удовлетворяющее граничным условиям. Давление и компоненты скорости не задаются; они вычисляются по начальным условиям для температуры путём решения соответствующих уравнений.

Из уравнения (2.13) методом стационарирования вычисляется поле скорости $\mathbf{V}^{m,n+1}$ с привлечением уравнения, из которого давление (p) на

верхнем слое по фиктивному времени выражается через дивергенцию поля скорости и подставляется в (2.12). При аппроксимации вязких слагаемых в (2.13) применялись консервативные аппроксимации [79]. Путём решения (2.14) вычисляется поле температуры на временном слое $m+1$. Процесс повторяется до некоторого значения $t_m = m \cdot \Delta t$. Алгоритм сводится к выполнению следующих этапов на каждом слое по времени.

Этап А

В начальный момент времени $t = t_0 = 0, m = 0$, задаются условия для температуры (1.11) в области (1.7) с учётом граничных условий (1.12)-(1.15). Функция $\tilde{T}_0(x, y, z)$ рассчитывается по линейной зависимости в слое от z' до z'' :

$$\tilde{T}_0 = \frac{T_2 - T_1}{z'' - z'}(z - z'') + T_2. \quad (2.15)$$

В верхнем 120-ти километровом слое температура изменяется от $T_1 = 0^\circ\text{C}$ при $z' = 0$ км, до $T_2 = 1200^\circ\text{C}$ при $z'' = 120$ км;

в нижнем слое от 120-ти километровой отметки (z') до подошвы верхней мантии (z'') изменение температуры следующее: от $T_1 = 1200^\circ\text{C}$ при $z' = 120$ км, до $T_2 = \Delta T = 1800^\circ\text{C}$ при $z'' = Z$ км.

Переменная z изменяется от 0 км (дневная поверхность)

до $Z = Z_{upmantle} = 670 \div 700$ км (глубины залегания верхнемантийной границы) либо до $Z = Z_{mantle} = 2700 \div 2900$ км (глубины залегания нижнемантийной границы) [6, 38, 39, 42, 60, 82 и др.].

Этап Б

По формуле [110, 111]

$$\eta(x, y, z, t) = \exp(b(1-z) - aT(x, y, z, t)); \quad (2.16)$$

$$a = 3,89, \quad b = 5,84$$

вычисляется поле вязкости $\eta^m = \exp(b \cdot (1-z) - a \cdot T^m)$.

Этап В

Методом стабилизирующей поправки [130] ищется поле скорости $\mathbf{V}: u \equiv V^x, v \equiv V^y, w \equiv V^z$ с учётом найденных полей T^m и η^m .

Уравнение движения (1.5) для компонент вектора скорости \mathbf{V} в декартовых координатах записывается следующим образом:

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \eta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \eta \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} - \text{Ra} \cdot T. \quad (2.19)$$

Схема стабилизирующей поправки для расчёта u -компоненты вектора скорости (2.17) записывается так:

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\Delta \tau} = 2L_x(\eta L_x u^{n+1/3}) + L_y(\eta L_y u^n) + L_z(\eta L_z u^n) + \Phi_u^n, \quad (2.20)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\Delta \tau} = L_y(\eta L_y u^{n+2/3}) - L_y(\eta L_y u^n), \quad (2.21)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\Delta \tau} = L_z(\eta L_z u^{n+1}) - L_z(\eta L_z u^n), \quad (2.22)$$

где

$$\Phi_u^n = L_y[\eta(L_x v)]^n + L_z[\eta(L_x w)]^n - L_x p^n. \quad (2.23)$$

Здесь и ниже трёхточечные разностные операторы L_x, L_y, L_z аппроксимируют дифференциальные аналогично представленным в (2.7).

Аппроксимация уравнений в приведённой выше схеме сводится к следующим шагам.

Первый дробный шаг (2.20) (верхний индекс $n+1/3$):

$$u^{n+1/3} - 2\Delta\tau L_x(\eta L_x u^{n+1/3}) = d^x \equiv u^n + \Delta\tau \Lambda_x, \quad (2.24)$$

где $\Lambda_x = L_y(\eta L_y u^n) + L_z(\eta L_z u^n) + \Phi_u^n$.

Входящие в (2.24) операторы перепишем следующим образом:

$$L_x(\eta L_x u^{n+1/3}) \cong \frac{\eta_{i+1/2,j,k} (u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k})^{n+1/3} - \eta_{i-1/2,j,k} (u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k})^{n+1/3}}{h_x^2}, \quad (2.25)$$

$$L_y(\eta L_y u^n) \cong \frac{\eta_{i,j+1/2,k} (u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k})^n - \eta_{i,j-1/2,k} (u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k})^n}{h_y^2}, \quad (2.26)$$

$$L_z(\eta L_z u^n) \cong \frac{\eta_{i,j,k+1/2} \cdot (u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k})^n - \eta_{i,j,k-1/2} \cdot (u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1})^n}{h_z^2}. \quad (2.27)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned} \eta_{i+1/2,j,k} &= (\eta_{i+1,j,k} + \eta_{i,j,k})/2, & \eta_{i-1/2,j,k} &= (\eta_{i-1,j,k} + \eta_{i,j,k})/2, \\ \eta_{i,j+1/2,k} &= (\eta_{i,j+1,k} + \eta_{i,j,k})/2, & \eta_{i,j-1/2,k} &= (\eta_{i,j-1,k} + \eta_{i,j,k})/2, \\ \eta_{i,j,k+1/2} &= (\eta_{i,j,k+1} + \eta_{i,j,k})/2, & \eta_{i,j,k-1/2} &= (\eta_{i,j,k-1} + \eta_{i,j,k})/2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Операторное уравнение (2.24) можно переписать в виде

$$u_{i,j,k}^{n+1/3} - 2\frac{\Delta\tau}{h_x^2} \left[\eta_{i+1/2,j,k} (u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k})^{n+1/3} - \eta_{i-1/2,j,k} (u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k})^{n+1/3} \right] = d_{i,j,k}^x, \quad (2.29)$$

которое преобразуется в разностное трёхдиагональной матрицей:

$$-a_{i,j,k}^x u_{i+1,j,k} + b_{i,j,k}^x u_i - c_{i,j,k}^x u_{i-1,j,k} = d_{i,j,k}^x. \quad (2.30)$$

Из (2.29) получаем коэффициенты для первого дробного шага (2.20) поиска решения уравнения (1.5):

$$a_{i,j,k}^x = \frac{2 \cdot \Delta\tau}{h_x^2} (\eta_{i+1/2,j,k}), \quad c_{i,j,k}^x = \frac{2 \cdot \Delta\tau}{h_x^2} (\eta_{i-1/2,j,k}),$$

$$b_{i,j,k}^x = 1 + a_{i,j,k}^x + c_{i,j,k}^x.$$

Величину $d_{i,j,k}^x$ находим с использованием выражений (2.26) и (2.27) в (2.20), а также учитывая сеточное представление Φ_u^n из (2.23):

$$\Phi_u^n \cong (\Phi_u^n)_{i,j,k} = \Lambda_{21} v_{i,j,k}^n + \Lambda_{31} w_{i,j,k}^n - f(p_{i,j,k}^n). \quad (2.31)$$

Здесь [79]:

$$f(p_{i,j,k}^n) = \frac{(p_{i+1,j,k} - p_{i-1,j,k})^n}{2h_x}, \quad (2.32)$$

$$L_{21} v_{i,j,k} \cong 0.5 \cdot [\Lambda_{21}^- v_{i,j,k} + \Lambda_{21}^+ v_{i,j,k}]; \quad (2.33)$$

$$\Lambda_{21}^- v_{i,j,k} = \frac{1}{h_y} \left[\eta_{i,j+1,k} \frac{v_{i,j+1,k} - v_{i-1,j+1,k}}{h_x} - \eta_{i,j,k} \frac{v_{i,j,k} - v_{i-1,j,k}}{h_x} \right] = (\eta v_{\bar{x}})_y; \quad (2.34)$$

$$\Lambda_{21}^+ v_{i,j,k} = \frac{1}{h_y} \left[\eta_{i,j,k} \frac{v_{i+1,j,k} - v_{i,j,k}}{h_x} - \eta_{i,j-1,k} \frac{v_{i+1,j-1,k} - v_{i,j-1,k}}{h_x} \right] = (\eta v_x)_{\bar{y}}. \quad (2.35)$$

Второе слагаемое в (2.31) аппроксимируется аналогично.

Второй дробный шаг (2.21) (верхний индекс $n+2/3$):

$$u^{n+2/3} - \Delta\tau L_y (\eta L_y u^{n+2/3}) = d^y \equiv u^{n+1/3} - \Delta\tau L_y (\eta L_y u^n). \quad (2.36)$$

Операторное соотношение (2.36) преобразуется в разностное

$$u^{n+2/3} - \frac{\Delta\tau}{h_y} \cdot \left[\eta_{i,j+1/2,k} (u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k})^{n+2/3} - \eta_{i,j-1/2,k} (u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k})^{n+2/3} \right] = d_{i,j,k}^y, \quad (2.37)$$

для которого коэффициенты уравнения

$$-a_{i,j,k}^y u_{i,j+1,k} + b_{i,j,k}^y u_i - c_{i,j,k}^y u_{i,j-1,k} = d_{i,j,k}^y \quad (2.38)$$

следующие:

$$\begin{aligned}
a_{i,j,k}^y &= \frac{\Delta\tau}{h_y^2} (\eta_{i,j+1/2,k}), & c_{i,j,k}^y &= \frac{\Delta\tau}{h_y^2} (\eta_{i,j-1/2,k}), \\
b_{i,j,k}^y &= 1 + a_{i,j,k}^y + c_{i,j,k}^y; \\
d_{i,j,k}^y &\equiv u^{n+1/3} - \frac{\Delta\tau}{h_y^2} \cdot \left[\eta_{i,j+1/2,k} (u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k})^n - \right. \\
&\quad \left. - \eta_{i,j-1/2,k} (u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k})^n \right].
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Третий шаг (2.22) (верхний индекс $n+1$):

$$u^{n+1} - \Delta\tau L_z (\eta L_z u^{n+1}) = d^z \equiv u^{n+2/3} - \Delta\tau L_z (\eta L_z u^n) \tag{2.40}$$

Операторное выражение (2.40) преобразуется в разностное

$$\begin{aligned}
u^{n+1} - \frac{\Delta\tau}{h_z^2} \cdot \left[\eta_{i,j,k+1/2} \cdot (u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k})^{n+2/3} - \right. \\
\left. - \eta_{i,j,k-1/2} \cdot (u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1})^{n+2/3} \right] = d_{i,j,k}^z,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

для которого коэффициенты уравнения

$$-a_{i,j,k}^z u_{i,j,k+1} + b_{i,j,k}^z u_{i,j,k} - c_{i,j,k}^z u_{i,j,k-1} = d_{i,j,k}^z \tag{2.42}$$

следующие:

$$\begin{aligned}
a_{i,j,k}^z &= \frac{\Delta\tau}{h_z^2} (\eta_{i,j,k+1/2}), & c_{i,j,k}^z &= \frac{\Delta\tau}{h_z^2} (\eta_{i,j,k-1/2}), \\
b_{i,j,k}^z &= 1 + a_{i,j,k}^z + c_{i,j,k}^z.
\end{aligned}$$

Разностный аналог $d^z \cong d_{i,j,k}^z$:

$$\begin{aligned}
d_{i,j,k}^z &\equiv u^{n+2/3} - \frac{\Delta\tau}{h_z^2} \cdot \left[\eta_{i,j,k+1/2} \cdot (u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k})^n - \right. \\
&\quad \left. - \eta_{i,j,k-1/2} \cdot (u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1})^n \right].
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Правые части $d_{i,j,k}^x$, $d_{i,j,k}^y$ и $d_{i,j,k}^z$ приведённых выше уравнений (2.30), (2.38) и (2.42) можно построить исходя из найденных слагаемых разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
d_{i,j,k}^x &= u_{i,j,k}^n + a_{i,j,k}^y u_{i,j+1,k}^n + (1 - b_{i,j,k}^y) u_{i,j,k}^n + c_{i,j,k}^y u_{i,j-1,k}^n + \\
&\quad a_{i,j,k}^z u_{i,j,k+1}^n + (1 - b_{i,j,k}^z) u_{i,j,k}^n + c_{i,j,k}^z u_{i,j,k-1}^n; \\
d_{i,j,k}^y &= u_{i,j,k}^{n+1/3} - (a_{i,j,k}^y u_{i,j+1,k}^n + (1 - b_{i,j,k}^y) u_{i,j,k}^n + c_{i,j,k}^y u_{i,j-1,k}^n);
\end{aligned}$$

$$d_{i,j,k}^z = u_{i,j,k}^{n+2/3} - (a_{i,j,k}^z u_{i,j,k+1}^n + (1 - b_{i,j,k}^z) u_{i,j,k}^n + c_{i,j,k}^z u_{i,j,k-1}^n).$$

В дальнейшем, по формулам прогонки [130] и с учётом разностных аналогов граничных условий задачи вычисляется компонента скорости $u \equiv V^x$. Аналогично записываются и вычисляются компоненты скорости $v \equiv V^y$ и $w \equiv V^z$.

Этап Г

С использованием полученного поля скоростей вычислялось давление на $n+1$ -м шаге по фиктивному времени τ :

$$p^{n+1} = p^n - c^2 \Delta \tau (L_x u^{n+1} + L_y v^{n+1} + L_z w^{n+1}). \quad (2.44)$$

Параметр c^2 существенно влияет на устойчивость вычислительного процесса и должен быть согласован с ограничением на шаг по времени $\tau^n - \tau^{n-1} = \Delta \tau$ [80]: $\Delta \tau < h/c$. Существуют ограничения и на c^2 . Исходя из результатов численных экспериментов c^2 выбирается равным 25000.

Этапы **B** и **Г** повторяются до тех пор, пока не будет выполнено некоторое условие сходимости. Например, в задачах чаще всего применяется условие для w -компоненты вектора скорости

$$\max_{i,j,k} |(w^{m,n+1}) - (w^{m,n})| < \varepsilon_w \cdot \max_{i,j,k} |(w^{m,n})|, \quad (2.45)$$

а также и необходимое условие, вытекающее из уравнения (1.4)

$$\max_{i,j,k} |div(\mathbf{V})^{m,n+1}| < \varepsilon_{div}. \quad (2.46)$$

Величины ε_w , ε_{div} – положительные величины. В расчётах варьировались в пределах от 10^{-4} до 10^{-7} .

Этап Д

Далее методом стабилизирующей поправки проводится интегрирование уравнения теплопереноса (1.29) на временном слое

$m+1$ по схеме, в которой компоненты вектора скорости внесены с $n+1$ -го слоя по фиктивному времени τ :

$$\begin{aligned} \frac{T^{m+1/3} - T^m}{\Delta t} = & L_{xx}(T^{m+1/3}) - L_x(u^{m,n+1} \cdot T^{m+1/3}) + \\ & + L_{yy}(T^m) - L_y(v^{m,n+1} \cdot T^m) + L_{zz}(T^m) - L_z(w^{m,n+1} \cdot T^m), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{T^{m+2/3} - T^{m+1/3}}{\Delta t} = & L_{yy}(T^{m+2/3}) - L_y(v^{m,n+1} \cdot T^{m+2/3}) - \\ & - L_{yy}(T^m) + L_y(v^{m,n+1} \cdot T^m), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{T^{m+1} - T^{m+2/3}}{\Delta t} = & L_{zz}(T^{m+1}) - L_z(w^{m,n+1} \cdot T^{m+1}) - \\ & - L_{zz}(T^m) + L_z(w^{m,n+1} \cdot T^m). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Преобразование выражений, предназначенных для вычисления температуры по схеме (2.47)-(2.49) также приводит к коэффициентам для разностных уравнений второго порядка.

Для первого дробного шага в схеме (2.47) имеем уравнение в операторной форме

$$\begin{aligned} T^{m+1/3} - \Delta t L_{xx}(T^{m+1/3}) + \Delta t L_x(u^{m,n+1} \cdot T^{m+1/3}) = & d_T^x \equiv T^m + \Delta t L_{yy}(T^m) - \\ & - \Delta t L_y(v^{m,n+1} \cdot T^m) + \Delta t L_z(T^m) - \Delta t L_z(w^{m,n+1} \cdot T^m), \end{aligned} \quad (2.50)$$

которое преобразуется в разностное уравнение

$$-a_{T,i,j,k}^x T_{i+1,j,k} + b_{T,i,j,k}^x T_{i,j,k} - c_{T,i,j,k}^x T_{i-1,j,k} = d_{T,i,j,k}^x \quad (2.51)$$

с коэффициентами

$$a_{T,i,j,k}^x = \frac{\Delta t}{h_x^2} - u_{i+1,j,k}^{m,n+1} \cdot \frac{\Delta t}{2h_x}; \quad c_{T,i,j,k}^x = \frac{\Delta t}{h_x^2} + u_{i-1,j,k}^{m,n+1} \cdot \frac{\Delta t}{2h_x}; \quad b_{T,i,j,k}^x = 1 + 2 \cdot \frac{\Delta t}{h_x^2}.$$

Для следующего дробного шага (в схеме (2.48))

$$\begin{aligned} T^{m+2/3} - \Delta t L_{yy}(T^{m+2/3}) + \Delta t L_y(v^{m,n+1} \cdot T^{m+2/3}) = & d_T^y; \\ d_T^y \equiv & T^{m+1/3} - \Delta t L_{yy}(T^m) + \Delta t L_y(v^{m,n+1} \cdot T^m) \end{aligned} \quad (2.52)$$

получим разностное выражение

$$-a_{T,i,j,k}^y T_{i,j+1,k} + b_{T,i,j,k}^y T_{i,j,k} - c_{T,i,j,k}^y T_{i,j-1,k} = d_{T,i,j,k}^y \quad (2.53)$$

с коэффициентами:

$$a_{T,i,j,k}^y = \frac{\Delta t}{h_y^2} - v_{i,j+1,k}^{m,n+1} \cdot \frac{\Delta t}{2h_y}; \quad c_{T,i,j,k}^y = \frac{\Delta t}{h_y^2} + v_{i,j-1,k}^{m,n+1} \cdot \frac{\Delta t}{2h_y}; \quad b_{T,i,j,k}^y = 1 + 2 \cdot \frac{\Delta t}{h_y^2}.$$

Для последнего шага в разностном уравнении (2.49), из

$$\begin{aligned} T^{m+1} - \Delta t L_{zz} (T^{m+1}) + \Delta t L_z (w^{m,n+1} \cdot T^{m+1}) &= d_T^z; \\ d_T^z &\equiv T^{m+2/3} - \Delta t L_{zz} (T^m) + \Delta t L_z (w^{m,n+1} \cdot T^m) \end{aligned} \quad (2.54)$$

получим уравнение

$$-a_{T,i,j,k}^z T_{i,j,k+1} + b_{T,i,j,k}^z T_{i,j,k} - c_{T,i,j,k}^z T_{i,j,k-1} = d_{T,i,j,k}^z, \quad (2.55)$$

в котором коэффициенты будут такими:

$$a_{T,i,j,k}^z = \frac{\Delta t}{h_z^2} - w_{i,j,k+1}^{m,n+1} \cdot \frac{\Delta t}{2h_z}; \quad c_{T,i,j,k}^z = \frac{\Delta t}{h_z^2} + w_{i,j,k-1}^{m,n+1} \cdot \frac{\Delta t}{2h_z}; \quad b_{T,i,j,k}^z = 1 + 2 \cdot \frac{\Delta t}{h_z^2}.$$

Правые части $d_{T,i,j,k}^x$, $d_{T,i,j,k}^y$ и $d_{T,i,j,k}^z$ уравнений (4.49), (4.51) и (4.53) с учётом найденных коэффициентов разностных уравнений (4.51) и (4.53) будут следующими:

$$\begin{aligned} d_{T,i,j,k}^x &= T_{i,j,k}^m + a_{T,i,j,k}^y T_{i,j+1,k}^m + (1 - b_{T,i,j,k}^y) T_{i,j,k}^m + c_{T,i,j,k}^y T_{i,j-1,k}^m + \\ &\quad a_{T,i,j,k}^z T_{i,j,k+1}^m + (1 - b_{T,i,j,k}^z) T_{i,j,k}^m + c_{T,i,j,k}^z T_{i,j,k-1}^m; \\ d_{T,i,j,k}^y &= T_{i,j,k}^{m+1/3} - (a_{T,i,j,k}^y T_{i,j+1,k}^m + (1 - b_{T,i,j,k}^y) T_{i,j,k}^m + c_{T,i,j,k}^y T_{i,j-1,k}^m); \\ d_{T,i,j,k}^z &= T_{i,j,k}^{m+2/3} - (a_{T,i,j,k}^z T_{i,j,k+1}^m + (1 - b_{T,i,j,k}^z) T_{i,j,k}^m + c_{T,i,j,k}^z T_{i,j,k-1}^m). \end{aligned}$$

Вычисления продолжаются до некоторого значения $m=M=t_m$, обусловленного условиями задачи. Если $m < M$ процесс повторяется, т.е. возвращается на *Этап Б*, приведённой схемы с новым значением $m=m+1$.

2.3 Численная модель трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявных методов расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления

Численное моделирование трёхмерных конвективных течений в мантии Земли, основанное на решении системы дифференциальных уравнений (1.4)-(1.6) с применением неявного метода расщепления по пространственным переменным с поправкой давления осуществлялось по следующему алгоритму [10, 34, 35, 83, 117]:

$$\frac{\tilde{v}_i - v_i^{m,n}}{\Delta\tau} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)_h^{m,n} + \frac{\partial}{\partial x_k} \eta^m \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k^{m,n}}{\partial x_i} \right)_h + \text{Ra} \cdot T^m \cdot e_i, \quad (2.56)$$

$$\nabla_h^2(\delta p) = \frac{(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}})_h}{\Delta\tau}, \quad (2.57)$$

$$(\delta p) = p^{m,n+1} - p^{m,n}, \quad (2.58)$$

$$\frac{\mathbf{V}^{m,n+1} - \tilde{\mathbf{V}}}{\Delta\tau} = -\nabla_h(\delta p)^{m,n+1}, \quad (2.59)$$

$$T^{m+1} = T^m - \Delta t \cdot \left(\nabla \cdot (\mathbf{V}^{m,n+1} T^{m+1}) - \nabla^2 T^{m+1} \right)_h. \quad (2.60)$$

В области (1.7) при $t = 0$ ($m = 0$) вычисляется первоначальное распределение температурного поля, удовлетворяющее условиям (1.12)-(1.15), (1.8)-(1.10). Компоненты скорости и давление полагаются нулевыми. Численная реализация алгоритма сводится к выполнению следующих этапов (с применением схемы стабилизирующей поправки и как схемы интегрирования, и как итерационной схемы).

- 1) На первом этапе находится несоленоидальное промежуточное поле скорости $\tilde{\mathbf{V}}$ из векторного уравнения (2.56).
- 2) Рассчитывается поле разности давлений (δp) на основе уравнения (2.57)

$$\frac{(\delta p)^{s+1} - (\delta p)^s}{\Delta\tau} = \nabla^2(\delta p)^{s+1} - \frac{\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}}}{\Delta\tau}$$

с условиями Неймана на границах до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости по внутреннему индексу s (расчёт производится на слое m по времени и на слое n по фиктивному времени для компонент вектора скорости. Итерационный процесс заканчивается, если выполнено условие

$$\max_{i,j,k} |(\delta p^{m,n,s+1}) - (\delta p^{m,n,s})| < \varepsilon, \quad (2.61)$$

где $\varepsilon > 0$ - некоторая малая положительная величина.

После выполнения условия сходимости (2.61) из уравнения (2.58) вычисляется давление на слое $n=n+1$:

$$p^{m,n+1} = (\delta p)^{m,n,s+1} + p^{m,n}.$$

- 3) Из уравнения (2.59) получается окончательное поле скорости на итерационном слое $n+1$ для временного слоя m .
- 4) Путём решения (2.60) с шагом по времени Δt вычисляется поле температуры на временном слое $m+1$.

Процесс повторяется до некоторого значения $t_m = m \cdot \Delta t$.

Алгоритм сводится к выполнению этапов, приведённых в п. 2.2 на каждом слое по времени, но в случае этапов **Б** и **В** ищется несоленоидальное промежуточное поле скорости $\tilde{\mathbf{V}}$, а на этапе **Г** вычисляется уравнение Пуассона для разности давлений, давление и окончательное поле скорости \mathbf{V} . Этапы **А** и **Д** остаются без изменений.

При решении задач моделирования конвекции в верхней мантии Земли в естественных переменных с применением приведённых в пунктах 2.2 и 0 алгоритмов использовалась обычная и разнесённая сетки.

Здесь представлено описание именно варианта разнесённой сетки, в котором давление, вязкость и температура определялись в центре элементарного объёма, компоненты вектора скорости - в центрах граней элементарного объёма (Рисунок 2.1): u - в центре граней, параллельных плоскости (yz) : Рисунок 2.2, v - в центре граней,

параллельных плоскости (xz) : Рисунок 2.3, w - в центре граней, параллельных плоскости (xy) : Рисунок 2.2 и Рисунок 2.3.

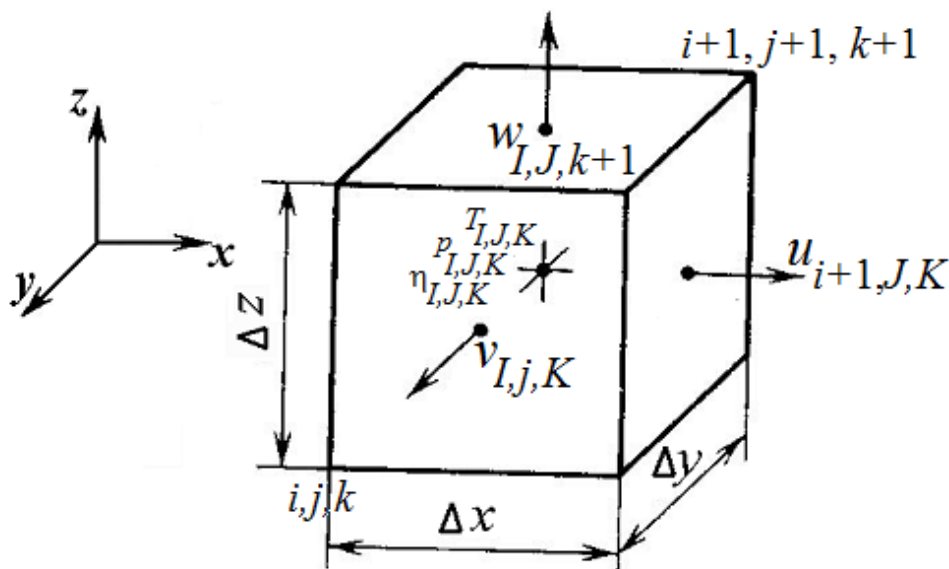


Рисунок 2.1 – Элементарный объём сеточного пространства на разнесённой сетке. В центре элемента объёма вычисляются T , η и p : температура, вязкость и дефект давления; на гранях – компоненты u , v , w вектора скорости \mathbf{V} . Индексы: $i=I-\frac{1}{2}$, $I=i+\frac{1}{2}$, $J=j+\frac{1}{2}$, $K=k+\frac{1}{2}$

В декартовой системе координат равномерную разнесённую сетку можно задать в виде

$$\Omega \equiv \begin{cases} x_I = \left(I - \frac{1}{2}\right)\Delta x, & \Delta x > 0, & I = 0, 1, \dots, M; & (M-1)\Delta x = X, \\ y_J = \left(J - \frac{1}{2}\right)\Delta y, & \Delta y > 0, & J = 0, 1, \dots, N; & (N-1)\Delta y = Y, \\ z_K = \left(K - \frac{1}{2}\right)\Delta z, & \Delta z > 0, & K = 0, 1, \dots, L; & (L-1)\Delta z = Z, \end{cases} \quad (2.62)$$

где Δx , Δy , Δz - размеры шагов сетки; M , N , L - число ячеек сетки в направлениях x , y , и z .

Для наглядности численной реализации алгоритма в работе применены индексы, удобные для последующего переноса в компьютерную программу на алгоритмическом языке Фортран. В центре элементарного объёма, где определяются скалярные поля

температуры T , вязкости η и давления p , индексы обозначены прописными латинскими буквами I, J, K . На гранях - индексы i, j, k . Таким образом, между I и $I+1$ находится $i+1$ (Рисунок 2.2), между j и $j+1$ (Рисунок 2.3) находится индекс J , а между $K-1$ и K - индекс k (Рисунок 2.2 и Рисунок 2.3).

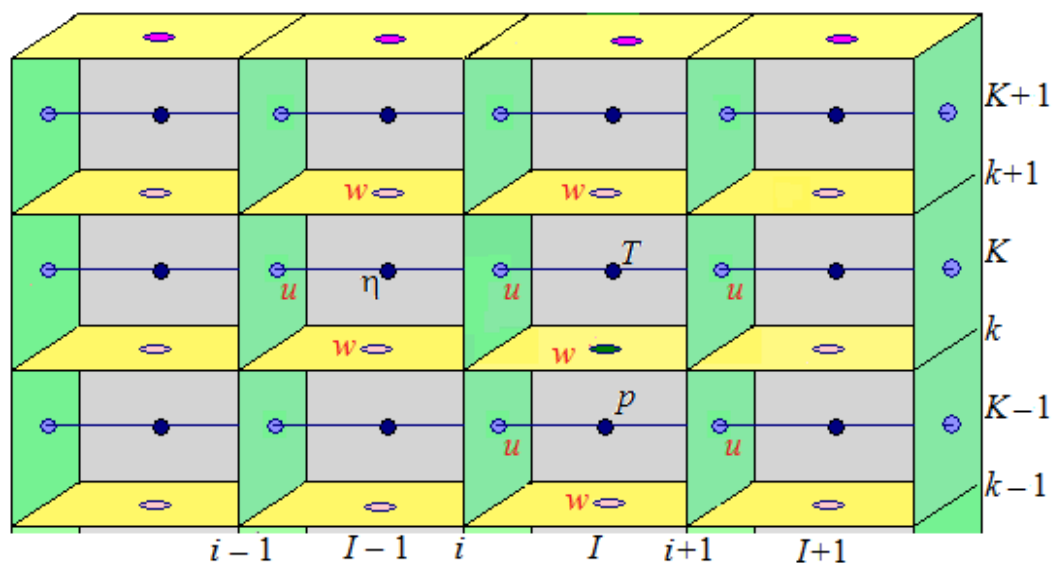


Рисунок 2.2 – Местонахождение индексов по направлениям X и Z . Компоненты вектора скорости u и w расположены в центрах плоскостей, ограничивающих каждую из ячеек. Вязкость η , давление p и температура T находятся в центрах элементарных ячеек. Индексы:

$$i=I-\frac{1}{2}, I=i+\frac{1}{2}, K=k+\frac{1}{2}, k=K-\frac{1}{2}$$

Например, вместо общепринятой записи $w_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}$ автору удобнее записать $w_{I, J, k+1}$ (см. Рисунок 2.1), т.к. в общепринятой записи точка $i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}$ находится в центре ячейки и записывается теперь как I, J, K .

Граничные условия для уравнения (2.57) для вычислений разности давлений являются следствием условий для (2.59). Так как граничные условия для $\mathbf{V}^{m, n+1}$ и $\tilde{\mathbf{V}}$ ставятся одинаковыми, решается задача Неймана с однородными граничными условиями.

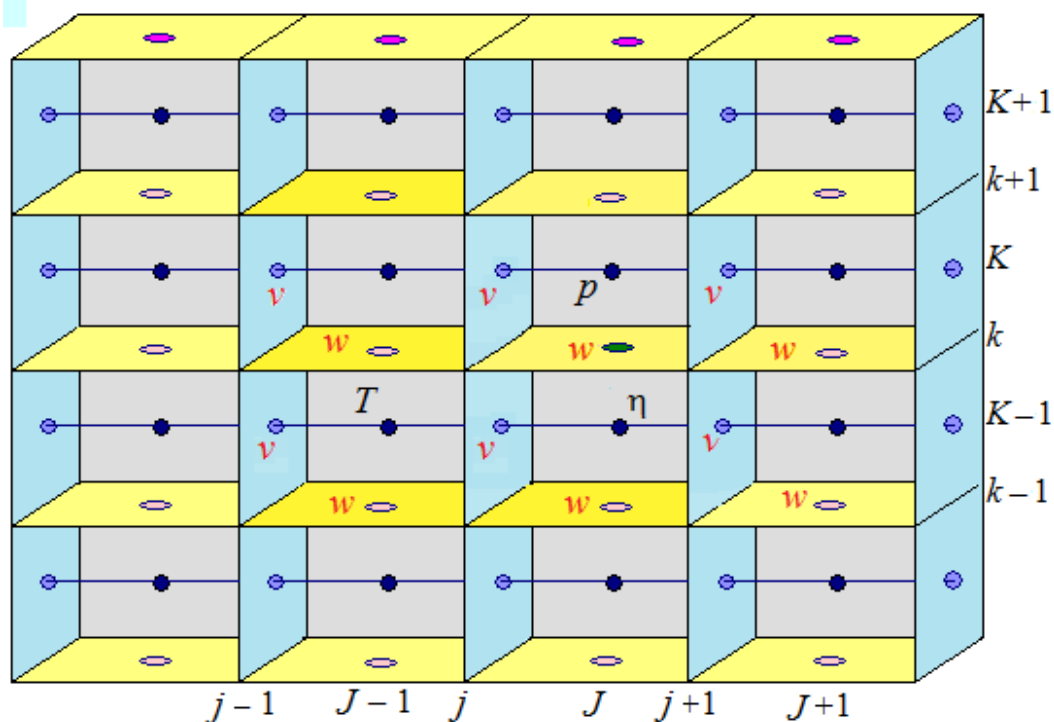


Рисунок 2.3 – Местонахождение индексов по направлениям Y и Z . Компоненты вектора скорости v и w расположены в центрах плоскостей, ограничивающих каждую из ячеек. Вязкость η , температура T и давление p находятся в центрах элементарных ячеек. Индексы: $J=j+1/2, j=J-1/2, K=k+1/2, k=K-1/2$

Метод решения задачи Неймана основан на приёме, изложенном в книге [63], который соответствует требованию, вытекающему из теоремы Гаусса - Остроградского:

$$\iiint_A \nabla^2(\delta p) dA = \iint_C \frac{\partial(\delta p)}{\partial n} dS, \quad (2.63)$$

где C - замкнутая граница области A , в которой ищется решение, S - величина площади вдоль C . Чтобы удовлетворить условию (2.63), в уравнении (2.57), в каждой точке сетки необходимо подправлять решение $(\delta p) \equiv G$ на величину ΔG (вычитать из решения):

$$\Delta G_{I,J,K} = \frac{\sum G_{I,J,K}^{s+1}}{M \cdot N \cdot L}. \quad (2.64)$$

Тестирование задачи Неймана для уравнения Пуассона приведено далее в п. 2.4.2.

После вычисления компонент скорости следует расчёт поля температуры по схеме стабилизирующей поправки.

Численная реализация вычислений имеет вид (см. [10]):

$$\begin{aligned} & T_{I,J,K}^{m+1/3} + \frac{\Delta t}{h_x} \left(u_{i+1,J,K} T_{i+1,J,K}^{m+2/3} - u_{i,J,K} T_{i,J,K}^{m+1/3} \right) - \frac{\Delta t}{h_x^2} \left(T_{i+1,J,K}^{m+1/3} - 2T_{I,J,K}^{m+1/3} + T_{i-1,J,K}^{m+1/3} \right) = \\ & = T_{I,J,K}^m + \frac{\Delta t}{h_y} \left(v_{I,j+1,K} T_{I,j+1,K}^m - v_{I,j,K} T_{I,j,K}^m \right) - \frac{\Delta t}{h_y^2} \left(T_{I,J+1,K}^m - 2T_{I,J,K}^m + T_{I,J-1,K}^m \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{h_z} \left(w_{I,J,k+1} T_{I,J,k+1}^m - w_{I,J,k} T_{I,J,k}^m \right) + \frac{\Delta t}{h_z^2} \left(T_{I,J,K+1}^m - 2T_{I,J,K}^m + T_{I,J,K-1}^m \right); \\ & T_{I,J,K}^{m+2/3} + \frac{\Delta t}{h_y} \left(v_{I,j+1,K} T_{I,j+1,K}^{m+2/3} - v_{I,j,K} T_{I,j,K}^{m+2/3} \right) - \frac{\Delta t}{h_y^2} \left(T_{I,J+1,K}^{m+2/3} - 2T_{I,J,K}^{m+2/3} + T_{I,J-1,K}^{m+2/3} \right) = \\ & = T_{I,J,K}^{m+1/3} + \frac{\Delta t}{h_y} \left(v_{I,j+1,K} T_{I,j+1,K}^m - v_{I,j,K} T_{I,j,K}^m \right) - \frac{\Delta t}{h_y^2} \left(T_{I,J+1,K}^m - 2T_{I,J,K}^m + T_{I,J-1,K}^m \right); \\ & T_{I,J,K}^{m+1} + \frac{\Delta t}{h_z} \left(w_{I,J,k+1} T_{I,J,k+1}^{m+1} - w_{I,J,k} T_{I,J,k}^{m+1} \right) - \frac{\Delta t}{h_z^2} \left(T_{I,J,K+1}^{m+1} - 2T_{I,J,K}^{m+1} + T_{I,J,K-1}^{m+1} \right) = \\ & = T_{I,J,K}^{m+2/3} + \frac{\Delta t}{h_z} \left(w_{I,J,k+1} T_{I,J,k+1}^m - w_{I,J,k} T_{I,J,k}^m \right) - \frac{\Delta t}{h_z^2} \left(T_{I,J,K+1}^m - 2T_{I,J,K}^m + T_{I,J,K-1}^m \right). \end{aligned}$$

Здесь

$$T_{i,J,K} = \frac{1}{2} (T_{i-1,J,K} + T_{i,J,K}), \quad T_{i+1,J,K} = \frac{1}{2} (T_{i+1,J,K} + T_{i,J,K}). \quad (2.65)$$

Для направлений y и z - аналогичные представления.

На разнесённой сетке (см. Рисунок 2.4), горизонтальный разрез которой изображён на представленном рисунке, граничные условия

прилипания вычислялись следующим образом. Пусть для вектора скорости \mathbf{V} на границе В1-В2 заданы условия прилипания, т.е. $u = v = w = 0$. Тогда $u_{i,1,K} = -u_{i,0,K}$ и $w_{I,1,k} = -w_{I,0,k}$.

Для компоненты v вычисления на границе не производятся, а переносятся в первую ($j=1$) и последнюю ($j=N$) точку массива, определённого в точке как $v(I, j, K)$.

Определение массива v в ФОРТРАН-ПРОЦЕДУРЕ выглядит так:

real, dimension (0:M, 1: N, 0: L) :: v.

Область определения y -компоненты скорости v следующая:

$$\Omega_v \equiv \begin{cases} x_I = \left(I - \frac{1}{2}\right)\Delta x, & \Delta x > 0, & I = 0, 1, \dots, M; & (M - 1)\Delta x = X, \\ y_j = (j - 1)\Delta y, & \Delta y > 0, & j = 1, \dots, N; & (N - 1)\Delta y = Y, \\ z_K = \left(K - \frac{1}{2}\right)\Delta z, & \Delta z > 0, & K = 0, 1, \dots, L; & (L - 1)\Delta z = Z. \end{cases} \quad (2.66)$$

Массив $u(:, :, :)$, в свою очередь, определён внутренними точками и точками, лежащими на границе в направлении x , а также внутренними точками (1:N-1, 1:K-1) и точками, лежащими за пределами границ в направлениях y и z (0,N и 0,K).

Массив $u(i, J, K)$ в ФОРТРАН-ПРОЦЕДУРЕ задаётся следующим образом:

real, dimension (1:M, 0:N, 0:L) :: u.

Область определения x -компоненты скорости такова:

$$\Omega_u \equiv \begin{cases} x_i = (i - 1)\Delta x, & \Delta x > 0, & i = 1, \dots, M; & (M - 1)\Delta x = X, \\ y_J = \left(J - \frac{1}{2}\right)\Delta y, & \Delta y > 0, & J = 0, 1, \dots, N; & (N - 1)\Delta y = Y, \\ z_K = \left(K - \frac{1}{2}\right)\Delta z, & \Delta z > 0, & K = 0, 1, \dots, L; & (L - 1)\Delta z = Z. \end{cases} \quad (2.67)$$

Вещественный массив $w(:, :, :)$ определён внутренними точками и точками, лежащими на границе в направлении z , а также внутренними точками $(1:M-1, 1:N-1)$ и точками, лежащими за пределами границ в направлениях x и y $(0, M$ и $0, N)$.

Массив $w(I, J, k)$ в ФОРТРАН-ПРОЦЕДУРЕ вводится так:

real, dimension $(0:M, 0:N, 1:L) :: w$.

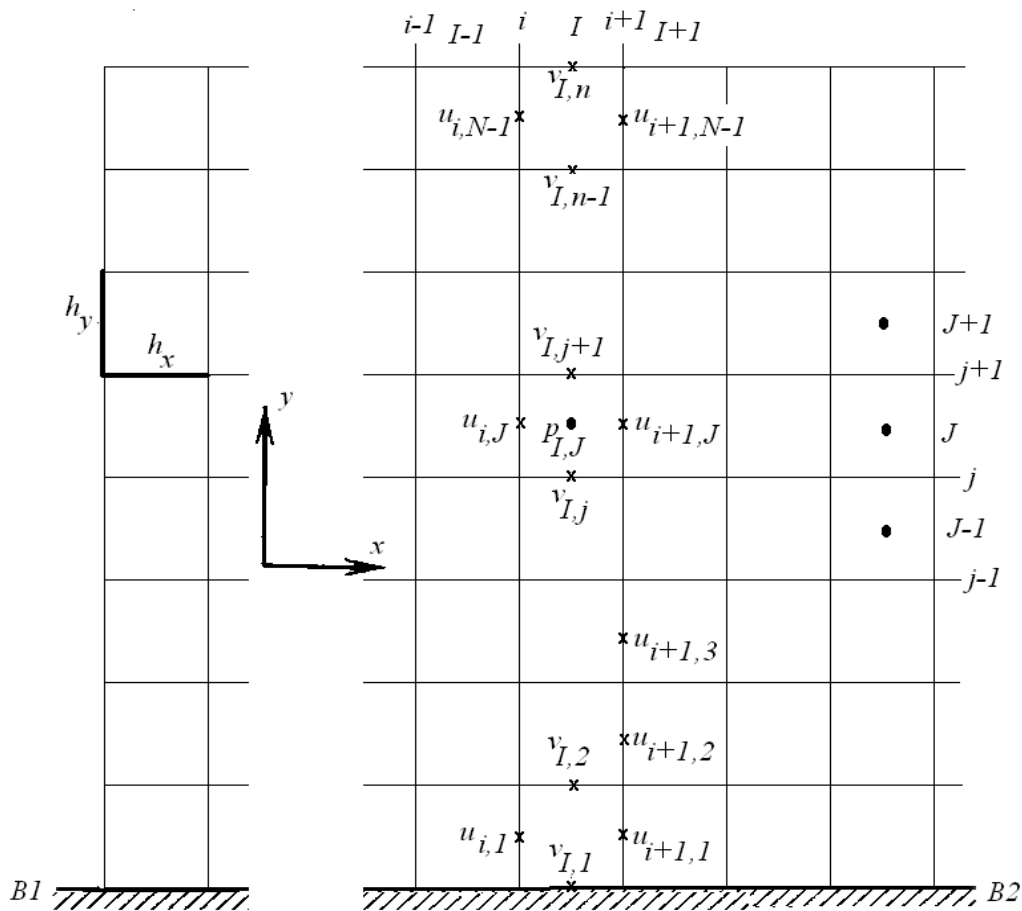


Рисунок 2.4 – Двумерная разнесённая сетка

Область определения z -компоненты скорости следующая:

$$\Omega_w \equiv \begin{cases} x_I = \left(I - \frac{1}{2}\right)\Delta x, & \Delta x > 0, & I = 0, 1, \dots, M; & (M - 1)\Delta x = X, \\ y_J = \left(J - \frac{1}{2}\right)\Delta y, & \Delta y > 0, & J = 0, 1, \dots, N; & (N - 1)\Delta y = Y, \\ z_k = (k - 1)\Delta z, & \Delta z > 0, & k = 1, \dots, L; & (L - 1)\Delta z = Z. \end{cases} \quad (2.68)$$

Область определения температуры, давления и вязкости на разнесённой сетке - Ω приведена в начале раздела (формула (2.62)).

Массивы $T(I, J, K)$, $p(I, J, K)$ и $\eta(I, J, K)$, в ФОРТРАН-ПРОЦЕДУРЕ могут выглядеть так: `real, dimension (0:M, 0:N, 0:L) :: Therm, Press, Eta.`

2.4 Численное решение краевых задач для трёхмерного модельного уравнения Пуассона

2.4.1 Задача Неймана–Дирихле для уравнения Пуассона

Для проверки работоспособности разработанных алгоритмов и программ привлекалось модельное трёхмерное уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = 2\beta \cdot \left[3 + 2\beta \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \right] \cdot e^{\beta(x^2 + y^2 + z^2)}, \quad (2.69)$$

имеющее аналитическое решение (оно использовалось при постановке граничных условий)

$$\Phi_a \equiv \Phi(x, y, z) = e^{\beta(x^2 + y^2 + z^2)}. \quad (2.70)$$

Численное решение производилось в единичном кубе. На нижней грани, при $z=0$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, ставилось условие Дирихле

$$\Phi(x, y, 0) = e^{\beta(x^2 + y^2)}. \quad (2.71)$$

Условия Неймана ставилось на всех остальных границах:

на горизонтальной верхней грани, при $z=1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$,

$$\frac{\partial \Phi(x, y, 1)}{\partial z} = 2\beta e^{\beta(x^2 + y^2 + 1)}; \quad (2.72)$$

на боковых вертикальных гранях куба:

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Phi(0, y, z)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Phi(1, y, z)}{\partial x} = 2\beta e^{\beta(1+y^2+z^2)}; \quad (2.73)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Phi(x, 0, z)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \Phi(x, 1, z)}{\partial y} = 2\beta e^{\beta(x^2+1+z^2)}. \quad (2.74)$$

Применялась итерационная схема стабилизирующей поправки. Итерационный параметр выбирался в ходе численных экспериментов. Ошибка на аналитическом решении, вычисленная по формуле

$$\delta = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^s - (\Phi_a)_{i,j,k}|, \quad \max_{i,j,k} |(\Phi_a)_{i,j,k}| = 1 \quad (2.75)$$

составила $\delta = 1,85 \cdot 10^{-4}$ на сетке $(64 \times 64 \times 64)$ ячеек.

Критерий выхода из итерационного процесса:

$$\varepsilon = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^s - \Phi_{i,j,k}^{s-1}| < 5 \cdot 10^{-8}. \quad (2.76)$$

Здесь и в (2.75) s означает номер итерационного слоя; Φ_a - точное аналитическое решение модельной задачи. При измельчении шагов пространственной сетки в два раза ошибка в соответствии с порядком аппроксимации уменьшалась примерно в 4 раза.

Вычисления проводились на сетках $(33 \times 33 \times 33)$, $(48 \times 48 \times 48)$, $(64 \times 64 \times 64)$ ячеек.

2.4.2 Задача Неймана для уравнения Пуассона

Для определения разности давления $\delta p = p^{n+1} - p^n$ в методе расщепления с коррекцией давления (п. 0) необходимо решать задачу Неймана для уравнения Пуассона [63]. Ниже представлены результаты тестирования алгоритма численного интегрирования задачи Неймана

для уравнения Пуассона на тестах с аналитическим решением из предыдущего раздела в трёх вариантах: одномерном, двумерном и трёхмерном. Первые два варианта размерности задачи рассматривались исходя из соображений наглядности результатов вычислительных экспериментов.

1D - вариант: Рассмотрено модельное уравнение

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = 2\beta[1 + 2\beta x^2]e^{\beta x^2}$$

на отрезке единичной длины. На границах ставились условия Неймана:

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0, \quad x = 0;$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2\beta e^{\beta}, \quad x = 1.$$

Эта задача имеет точное аналитическое решение

$$\Phi_a \equiv \Phi(x) = e^{\beta x^2} + C, \quad C = \text{const.}$$

Параметр задавался равным $\beta = -2,0$.

Решение находилось путём стационарирования $(\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi^s = \Phi)$. Ошибка на аналитическом решении, вычисленная по формуле $(s \rightarrow \infty)$

$$\delta = \max_i |\Phi_i^s - (\Phi_a)_i|, \quad \max_i |(\Phi_a)_i| = 1$$

обозначена как δ_{1D} (Таблица 2.1) и составила на сетке с числом узлов, равным 480, величину $\delta_{1D} = 3,94 \cdot 10^{-4}$.

Критерий выхода из итерационного процесса на данной сетке: итерации останавливались по условию (число итераций для достижения заданной точности, как в одномерной, так и задачах большей размерности обозначено в таблицах (Таблица 2.1 – Таблица 2.3) величиной ITER)

$$\max_i |\Phi_i^s - \Phi_i^{s-1}| < \varepsilon_{1D}.$$

Ошибка при переходе к измельчённой в два раза сетке уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации примерно в 4 раза.

2D - вариант: Рассмотрено модельное уравнение

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = 4\beta \cdot [1 + \beta \cdot (x^2 + y^2)] \cdot e^{\beta(x^2 + y^2)}$$

в единичном квадрате. На всех границах задавались условия Неймана:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2\beta e^{\beta(1+y^2)}, \quad x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2\beta e^{\beta(1+x^2)}, \quad y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Эта задача имеет точное аналитическое решение

$$\Phi_a \equiv \Phi(x, y) = e^{\beta(x^2 + y^2)} + C, \quad C = const.$$

Рассматриваемое эллиптическое уравнение приводилось к параболическому:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla^2 \Phi - 4\beta \cdot [1 + \beta \cdot (x^2 + y^2)] \cdot e^{\beta(x^2 + y^2)}$$

и решение находилось путём стационарирования с применением итерационной схемы стабилизирующей поправки. Итерационный параметр τ имеет смысл шага по фиктивному времени. Величина $\beta = -2,0$. Итерационный параметр выбирался в ходе численных экспериментов; во внутренних узлах сетки начальное приближение выбиралось нулевым. Ошибка на аналитическом решении, вычисленная по формуле ($s \rightarrow \infty$)

$$\delta = \max_{i,j} \left| \Phi_{i,j}^s - (\Phi_a)_{i,j} \right|, \quad \max_{i,j} |(\Phi_a)_{i,j}| = 1$$

обозначена как δ_{2D} (Таблица 2.2) и составила на сетке 80x80 величину

$$\delta_{2D} = 1,5 \cdot 10^{-5}.$$

Критерий выхода из итерационного процесса на данной сетке:

$$\max_{i,j} \left| \Phi_{i,j}^s - \Phi_{i,j}^{s-1} \right| < \varepsilon_{2D}.$$

3D - вариант: Рассмотрено модельное уравнение

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = 2\beta \cdot \left[3 + 2\beta \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \right] \cdot e^{\beta(x^2 + y^2 + z^2)}$$

в кубе со стороной равной единице. В отличие от задачи в разделе 2.4.1, здесь на всех гранях ставились условия Неймана:

- на нижней и верхней гранях:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2\beta e^{\beta(x^2 + y^2 + 1)}; \quad z = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

- на боковых гранях выделенного объёма:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2\beta e^{\beta(1 + y^2 + z^2)}, \quad x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2\beta e^{\beta(1 + x^2 + z^2)}, \quad y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Эта задача имеет точное аналитическое решение

$$\Phi_a \equiv \Phi(x, y, z) = e^{\beta(x^2 + y^2 + z^2)} + C, \quad C = const.$$

Рассматриваемое эллиптическое уравнение приводилось к параболическому:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla^2 \Phi - 2\beta \cdot \left[3 + 2\beta \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \right] \cdot e^{\beta(x^2 + y^2 + z^2)}$$

и решение находилось путём стационарирования с применением итерационной схемы стабилизирующей поправки. Значение итерационного параметра, как и в двумерном случае выбиралось

экспериментально; во внутренних узлах начальное распределение полагалось нулевым. Параметр $\beta = -2,0$. Ошибка на аналитическом решении, вычисленная по формуле ($s \rightarrow \infty$)

$$\delta = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^s - (\Phi_a)_{i,j,k}|, \quad \max_{i,j,k} |(\Phi_a)_{i,j,k}| = 1$$

обозначена как δ_{3D} (Таблица 2.3) и составила на сетке $80 \times 80 \times 80$ величину $\delta_{3D} = 7,851 \cdot 10^{-6}$, а критерий выхода из итерационного процесса на данной сетке:

$$\max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^s - \Phi_{i,j,k}^{s-1}| < \varepsilon_{3D}.$$

В представленных таблицах:

N_x, N_y, N_z - размеры массивов, т.е. количество точек в соответствующих направлениях, на которых решалась задача;

ε_{mD} - параметр сходимости итерационного процесса;

δ_{mD} - максимальное отклонение от аналитического решения;

ITER - количество итераций, потребовавшихся для выполнения критерия сходимости.

В последних двух таблицах (Таблица 2.2 и Таблица 2.3) собраны результаты расчётов на различных сетках в многомерных случаях. С уменьшением размеров сеточных шагов, как и в одномерном варианте, в соответствии со вторым порядком аппроксимации уменьшается абсолютная разность между аналитическим и вычисленным значениями: $\delta_{mD} \rightarrow 0, m = 1, 2, 3$.

Представленные результаты численных экспериментов (Таблица 2.1 – Таблица 2.3) демонстрируют достаточно высокую эффективность численного алгоритма.

Таблица 2.1 – Результаты расчётов (1D - вариант) одномерной задачи Неймана

N_x	ε_{1D}	δ_{1D}	ITER
120	5,00E-06	6,058E-03	25
240	5,00E-07	1,554E-03	65
480	5,00E-08	3,941E-04	185

Таблица 2.2 – Результаты расчётов (2D - вариант) двумерной задачи Неймана

N_x	N_y	ε_{2D}	δ_{2D}	ITER
20	20	5,00E-05	2,630E-04	55
40	40	5,00E-06	6,212E-05	125
80	80	5,00E-07	1,501E-05	280

Таблица 2.3 – Результаты расчётов (3D - вариант) трёхмерной задачи Неймана

N_x	N_y	N_z	ε_{3D}	δ_{3D}	ITER
20	20	20	5,00E-06	1,292E-04	70
40	40	40	5,00E-07	3,223E-05	155
80	80	80	5,00E-09	7,851E-06	410

2.5 Комплексы программ расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли в декартовых переменных

Комплексы программ реализованы на алгоритмическом языке ФОРТРАН-90. Выполнены добавления к основным программам в виде комплекса процедур визуализации результатов. Все искомые трёхмерные поля могут быть просмотрены в виде 2D-разрезов в изолиниях. Процедуры визуализации в изолиниях встроены в комплексы программ расчёта [204-207]. Предусмотрено сохранение результатов на жёстком диске с целью дальнейшей обработки или для продолжения расчётов. Программы в естественных переменных записаны на обычных и разнесённых сетках.

Комплексы программ состоят из кода, предназначенного для вычислений в MPI-технологии [51], т.е. на многопроцессорной ЭВМ с разделённой памятью.

Для распараллеливания задач, решаемых с применением метода дробных шагов, первоначально был рассмотрен и протестирован алгоритм параллельной скалярной прогонки на примере простейшей задачи Дирихле в единичном кубе для уравнения Пуассона (2.69), имеющей аналитическое решение (2.70).

Тестирование осуществлялось на сетке $144 \times 144 \times 144$ с 3D-топологиями $4 \times 3 \times 2 = 24$, $3 \times 3 \times 2 = 18$, $4 \times 2 \times 2 = 16$, $3 \times 2 \times 2 = 12$, $3 \times 3 \times 1 = 9$, $2 \times 2 \times 2 = 8$ (столбец 3 в таблицах). А также на сетках $145 \times 144 \times 143$, $5 \times 2 \times 1 = 10$ и $147 \times 144 \times 141$, $7 \times 2 \times 1 = 14$.

При сравнении времени расчёта $\tau_0 = 127,43$ вышеупомянутой задачи Дирихле на $n_0 = 8$ потоках с временами расчётов $\tau_c = 80,57$; $48,58$ и $29,38$ на $n_c = 12, 16$ и 24 потоках (Таблица 2.4) вычислялось (записано в шестой колонке) ожидаемое ускорение $a = n_c / n_0$ через отношение количеств процессов; ускорение, полученное в результате расчётов

записано в 7-й колонке через соотношение времён: $b = \frac{\tau_0}{\tau_c}$. В последнем столбце сравниваются полученное ускорение и ожидаемое, демонстрируя, тем самым, значения выигрыша во времени счёта (если число больше единицы) или проигрыша (в противном случае).

Как показывают результаты расчётов (Таблица 2.4–Таблица 2.6), ускорение несколько больше ожидаемого. По-видимому, это происходит благодаря более быстрой обработке данных в кэш-памяти процессоров, т.к. с увеличением количества вовлекаемых процессов пропорционально уменьшаются блоки данных, обрабатываемых каждым ядром.

В декартовой системе координат реализованы следующие комплексы программ.

- 1) Комплекс программ расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли в переменных «завихренность-векторный потенциал» с вязкостью, зависящей от давления и температуры [204].
- 2) Комплекс программ численного моделирования трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления с коррекцией давления [206].
- 3) Комплекс программ численного моделирования трёхмерных конвективных процессов в мантии Земли с применением неявной реализации метода искусственной сжимаемости в декартовых координатах [207].

Таблица 2.4 – Сравнение времени расчёта $\tau_0=127,43$ сек на $n_0=8$ потоках с временами расчётов на $n_c=12,16$ и 24 потоках; $c=1,2,3$

№	Количество процессов: n	Топология процессов	Размер данных для процесса	Время счета τ : секунды	ожидаемое ускорение $a = n_c / n_0$	$b = \frac{\tau_0}{\tau_c}$	b/a
0	8	2×2×2	72×72×72	127,43	-	-	-
1	12	3×2×2	48×72×72	80,57	1,50	1,58	1,05
2	16	4×2×2	32×72×72	48,58	2,00	2,62	1,31
3	24	4×3×2	36×48×72	29,38	3,00	4,34	1,45

Таблица 2.5 – Сравнение времени счета на 12 потоках с временами расчётов на 16 и 24 потоках; $c=1,2$

№	Количество процессов: n	Топология процессов	Размер данных для процесса	Время счета τ : секунды	ожидаемое ускорение $a = n_c / n_0$	$b = \frac{\tau_0}{\tau_c}$	b/a
0	12	3x2x2	48×72×72	80,57	-	-	-
1	16	4x2x2	32×72×72	48,58	1,33	1,66	1,24
2	24	4x3x2	36×48×72	29,38	2,00	2,74	1,37

Таблица 2.6– Сравнение времени счета на 16 потоках с временем счета на 24 потоках; $c=1$

№	Количество процессов: n	Топология процессов	Размер данных для процесса	Время счета τ : секунды	ожидаемое ускорение $a = n_c / n_0$	$b = \frac{\tau_0}{\tau_c}$	b/a
0	16	4x2x2	32×72×72	48,58	-	-	-
1	24	4x3x2	36×48×72	29,38	1,50	1,65	1,10

2.5.1 Комплекс программ расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли в переменных «завихренность-векторный потенциал» с вязкостью, зависящей от давления и температуры

Схема основной программы

I

- A. Задание начального распределения температуры (1.11).
- B. Вычисление значений вязкости, зависящей от температуры и, возможно, от давления.

II

Основной цикл

- A. Вычисление температуры из уравнения (1.28) или (1.29) по схеме (2.5) стабилизирующей поправки [130].
- B. Перевычисление вязкости и выражений для правых частей уравнения завихренности: $Ra \cdot T_x$ и $Ra \cdot T_y$.

Внутренний цикл

- C. Определяются компоненты вектора завихренности путём интегрирования уравнений (1.21)–(1.23) с граничными условиями (1.31), (1.33), (1.35).
- D. Определяются компоненты векторного потенциала путём решения уравнений (1.17)–(1.19) с условиями (1.30), (1.32), (1.34).
- E. Вычисляются компоненты вектора скорости из соотношения $\mathbf{V} = \nabla \times \psi$.
- F. Проверка по формуле (2.4) условия сходимости для векторного потенциала: если условие (2.4) при некотором $\varepsilon > 0$ не выполняется, процедура вычислений повторяется (с пункта II.C.).

Конец внутреннего цикла

- G. Вычисляются вспомогательные параметры задачи, оформляются графические представления некоторых векторных полей,

температуры, давления, вязкости, а также таблицы оценочных параметров, после чего, начиная с П.А. вычисления повторяются. Происходит запись результатов.

Конец основного цикла

В каждой точке пространства области интегрирования дифференциальные уравнения заменяются разностными аналогами и, согласно схеме стабилизирующей поправки, разделяются на три «потока» по пространственным переменным. Каждый такой поток, называемый дробным шагом, удобен для применения трёхточечных прогонок.

Программы были протестированы и запускаются на ЭВМ Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН под управлением:

Кластер НКС-1П: Операционная система - CentOS 7.3.

Очередь заданий - SLURM (slurm 17.02.3).

Компиляторы - Intel Parallel Studio XE 2017 Update 4.

Гибридный кластер НКС-30Т + GPU: Операционная система - Red Hat Enterprise Linux 5.4. Очередь заданий - PBS Pro 11.1.

Компиляторы - Intel Cluster Studio XE, Intel Parallel Studio XE for OS Linux; MPI - Intel MPI Version 4.1, Intel Trace Analyzer&Collector Version 8.1.

Комплекс программ включает в себя основную программу, которая в собранном состоянии (т.е. после компиляции) занимает менее 700 килобайт. Набор из вспомогательных модулей занимает на диске не более 2-х мегабайт. Требования программ к оперативной памяти не превышают 4 Мбайт. Вспомогательные модули формируют временные массивы данных для каждого потока, суммарный объём которых находится в пределах 120 Мбайт. Для вывода данных необходимо до 100 Гбайт жёсткого диска.

2.5.2 Комплекс программ численного моделирования трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявных методов расщепления с коррекцией давления

Комплекс зарегистрирован под именем "Программа моделирования трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам Mantle_RFP/2018" [206].

Схема основной программы неявного метода расщепления с коррекцией давления

- I. Задаётся начальное распределение температуры (1.11).
Начальное значение поля дефекта давления p и компоненты вектора скорости – нулевые.
- II. Основной цикл
 - II.a Вычисляется вязкость, зависящая от температуры и давления.
 - III. *Внутренний цикл (III.a – III.г)*
 - III.a Вычисление промежуточного поля скорости $\tilde{\mathbf{V}}$ путём решения системы разностных уравнений (2.56).
 - III.б Расчёт поля разности давлений, исходя из (2.57).
 - III.в Расчёт давления на верхнем временном слое на основе (2.58).
 - III.г Уточнение значений компонент вектора скорости исходя из соотношения (2.59).

Завершение внутреннего цикла (возврат к п. III.a)
 - II.б На временном слое $t+1$ вычисляется новое температурное поле исходя из (2.60) с учётом значений вектора скорости на верхнем временном слое.

Завершение основного цикла (вычисляются вспомогательные параметры задачи, формируются графические представления

некоторых векторных полей, температуры, давления, вязкости, а также таблицы оценочных параметров; происходит запись результатов, после чего, начиная с II.a вычисления повторяются ($m=m+1$) до некоторого значения $t_m = N_m \cdot \Delta t$, N_m – фиксированное число, отвечающее за конечность процесса вычислений).

Программы были протестированы и запускаются на ЭВМ Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН под управлением инструментов, перечисленных в п. 2.5.1.

Основная программа комплекса после компиляции занимает менее 900 килобайт. Вспомогательные модули занимают на диске не более 3-х мегабайт. Модули формируют временные массивы данных для каждого потока, суммарный объём которых находится в пределах 200 Мбайт. Для вывода данных необходимо до 100 Гбайт жёсткого диска. Требования программ к оперативной памяти не превышают 4 Мбайт.

2.5.3 Комплекс программ численного моделирования трёхмерных конвективных процессов в мантии Земли с применением неявной реализации метода искусственной сжимаемости в декартовых координатах

Комплекс является частью инструмента под названием «Программа расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли неявным методом искусственной сжимаемости в декартовой системе координат Mantle_IS/2019» [207].

Уравнения (1.4)-(1.6) с граничными условиями (1.12)-(1.15) интегрировались на каждом временном слое по схеме (2.12)-(2.14) при помощи метода стабилизирующей поправки [130], где на мелких шагах применялись скалярные трёхточечные прогонки. За основу был выбран метод искусственной сжимаемости [26, 71, 130].

Расчёты проводились и реализовывались по схеме, приведённой в п. 2.2.

Программы были протестированы и запускаются на ЭВМ Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН под управлением инструментов, перечисленных в п. 2.5.1.

Комплекс программ включает в себя основную программу, которая в собранном состоянии занимает менее 900 килобайт. Набор из вспомогательных модулей занимает на диске не более 3-х мегабайт. Требования программ к оперативной памяти не превышают 4 Мбайт. Вспомогательные модули формируют временные массивы данных для каждого потока, суммарный объём которых находится в пределах 180 Мбайт. Для вывода данных необходимо до 100 Гбайт жёсткого диска.

2.6 Тестирование численных моделей и комплексов программ

На основе комплексов программ рассчитывался международный тест [136] (он ниже будет называться основным тестом), в котором рассмотрена модельная задача о конвекции в кубе. Отдельные фрагменты комплексов программ тестировались на модельной задаче для уравнения Пуассона и изложены выше. Постановка полной тестовой задачи и тестируемые параметры представлены ниже.

При тестировании на основе данных [136] значения размерных величин (в системе СИ) принимались следующими:

$$\begin{aligned} d &= 2\,700\,000 \text{ м}, \Delta T = 3700^\circ\text{C}, \chi = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha = 10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}, \\ \rho &= 3300 \text{ кг/м}^3, g_z = 10 \text{ м/с}^2, \eta_0 = 10^{24} \text{ кг/м}\cdot\text{с}, \text{Ra} = 2 \cdot 10^4. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Геометрические безразмерные параметры параллелепипеда (1.7):

$$X=1,0; Y=1,0; Z=1,0. \quad (2.78)$$

Начальное распределение температуры \tilde{T}_0 для (1.11), предложенное в [136] и внесённое в комплексы программ, следующее:

$$\tilde{T}_0(x,y,z) = (1-z) + \mathfrak{L} (\cos(\pi x/X) + \cos(\pi y/Y)) \sin(\pi z), \quad (2.79)$$

где $\mathfrak{L} = 0,2$.

Вязкость вычислялась по формуле [136]:

$$\begin{aligned} \eta(T) &= \exp(\theta/(T + \Theta) - \theta/(0,50 + \Theta)), \\ \theta &= 225 / \ln(q) - 0,25 \ln(q), \\ \Theta &= 15 / \ln(q) - 0,50, q = \eta|_{T=0} / \eta|_{T=1} = 20. \end{aligned} \quad (2.80)$$

В работе [136] наиболее полно представлены результаты Кристенсена (Chr), (всего 20 величин) которые приняты за эталонные. Вычислялись и сравнивались параметры из выражений, сведённых в следующую таблицу (Таблица 2.7). Результаты сопоставления с этими параметрами будут приведены ниже.

2.6.1 Результаты тестирования в переменных «векторный потенциал-завихренность»

Постановка задачи тестирования в переменных "завихренность-векторный потенциал" приводит безразмерную систему (1.4)-(1.6), определённую в (1.7) с граничными условиями (1.8)-(1.10) и (1.12)-(1.15) к виду (1.17)-(1.23) с граничными условиями (1.30)-(1.35).

Для температурного поля задаётся некоторое начальное распределение (1.11). Вычисления температуры ((1.28) или (1.29)) замыкают систему.

Использованные в [136] и в комплексах программ [204-206] значения (в системе СИ) размерных величин, входящих в задачу и число Релея принимались согласно (2.77)-(2.80) и данным таблицы (Таблица 2.7), которая содержит все искомые величины для сравнения.

Сопоставление результатов расчётов Кристенсена (Chr) и автора (Che) для постоянной вязкости оказалось приемлемым [119]. В расчётах тестовой задачи с переменной вязкостью в переменных "векторный потенциал - завихренность" при нахождении поля температуры испытывались две схемы для конвективных слагаемых уравнения теплопроводности: дивергентная (2.6) с центральноразностными неявными аппроксимациями конвективных слагаемых и неконсервативная (2.5). Ниже представлены результаты расчётов как для неконсервативной (Таблица 2.8), так и для дивергентной схем (Таблица 2.9). Расчёты выполнены на равномерной сетке с числом узлов (32×32×64), аналогичной применённой в [133]. Ошибка вычислялась по формуле:

$$Err = \left| \frac{Che - Chr}{Chr} \right| \cdot 100\%, \quad (2.81)$$

где Err - величина относительной ошибки.

Соответствие удовлетворительное. Вопрос о консервативной и неконсервативной аппроксимациях уравнения переноса тепла в классических задачах конвективного теплообмена подробно обсуждался в (Полежаев и др., [74]). Рисунок 2.5 иллюстрирует одно из сечений рассчитанного поля температуры.

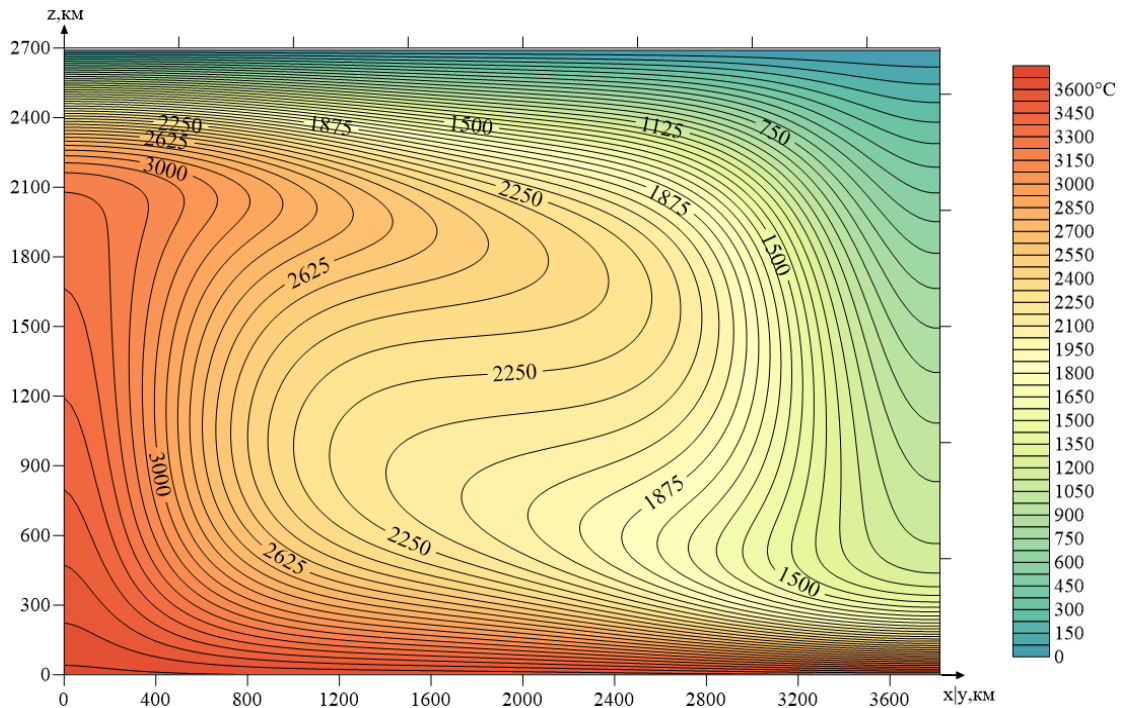


Рисунок 2.5 – Температурное поле (изолинии температуры). Диагональное сечение (в плоскости $x-y = 0$) кубической расчётной области в тестовой задаче [136]

Таблица 2.7 – Вычисляемые параметры тестирования. В правой колонке – результаты Кристиенсена, с которыми ведётся сравнение

i	число Нуссельта (Nu) по формуле $\text{Nu} = -(X \cdot Y)^{-1} \iint_{S_{top}} \frac{\partial T}{\partial z} dx dy$, где S_{top} - верхняя поверхность параллелепипеда	Nu = 3,0393
ii	среднеквадратичная скорость $V_{rms} = \sqrt{\left\{ \frac{1}{X \cdot Y \cdot Z} \iiint_A (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \right\}}$, где A - объем параллелепипеда со сторонами X, Y, Z=1	$V_{rms} = 35,1320$
iii	значение вертикальной компоненты скорости w ----- и температуры T в угловых точках среднего сечения конвективного слоя	$w(0,0,1/2)=165,91$ $w(0,Y,1/2)=-26,72$ $w(X,Y,1/2)=-58,23$ $T(0,0,1/2)=0,90529$ $T(0,Y,1/2)=0,49565$ $T(X,Y,1/2)=0,23925$
iv	значение теплового потока $Q = -\frac{\partial T}{\partial z}$ в угловых точках верхней поверхности куба	$Q(0,0)=5,8339$ $Q(0,Y)=1,7136$ $Q(X,Y)=0,7684$
v	интегральный параметр, вычисляемый по формуле $\lambda(x,z) = \int_0^y \frac{\partial T}{\partial z} dy$ вдоль линий, параллельных оси Y: от точки $(0,0,1/4)$ до точки $(0,1,1/4)$; от точки $(1/2,0,1/4)$ до $(1/2,1,1/4)$ и от точки $(1,0,1/4)$ до точки $(1,1,1/4)$	$\lambda(0, 1/4)=-0,5059$ $\lambda(X/2,1/4)=-0,1921$ $\lambda(X, 1/4)=-0,1388$
vi	средняя температура $T_m = \iint_{S_z} T dx dy$, вычисляемая на горизонтальных сечениях области $S_{z=0,75}$ и $S_{z=0,50}$, на глубинах $z = 3/4$ и $z = 1/2$	$T_m(3/4)=0,56593$ $T_m(1/2)=0,58158$
vii	значения высоты рельефа H_z (в метрах) в углах вычислительной области	$H_z(0,0,1)= 10869,0$ $H_z(0,Y,1)=-4145,0$ $H_z(X,Y,1)=-12811,0$
viii	значение вертикальной компоненты вектора завихренности ω^z в точке $(3/4,1/4,3/4)$	$\omega^z(3/4,1/4,3/4) = 11,125$

Таблица 2.8 – Результаты расчётов на сетке (32×32×64) при применении неконсервативной схемы численного решения уравнения теплопроводности (2.5). Обозначения: (Chr) – результаты, полученные Кристенсенем; (Che) – результаты автора; ((Err) – относительная ошибка в процентах)

Параметры	(Chr)	(Che)	(Err)
Nu	3,0393	3,0400	0,0240
V_{rms}	35,1320	35,1800	0,1366
$w(0,0,1/2)$	165,9100	167,2000	0,7775
$w(0,Y,1/2)$	-26,7200	-26,4300	1,0853
$w(X,Y,1/2)$	-58,2300	-58,2300	0,0000
$T(0,0,1/2)$	0,9053	0,9067	0,1558
$T(0,Y,1/2)$	0,4957	0,4965	0,1715
$T(X,Y,1/2)$	0,2393	0,2379	0,5643
$Q(0,0)$	5,8339	5,8121	0,3737
$Q(0,Y)$	1,7136	1,7322	1,0854
$Q(X,Y)$	0,7684	0,7731	0,6117
$\lambda(0,1/4)$	-0,5059	-0,5141	1,6209
$\lambda(X/2,1/4)$	-0,1921	-0,1891	1,5617
$\lambda(X,1/4)$	-0,1388	-0,1356	2,3055
$T_m(3/4)$	0,5659	0,5636	0,4117
$T_m(1/2)$	0,5816	0,5799	0,2889

Таблица 2.9 – Результаты расчётов на сетке (32×32×64) при применении консервативной схемы численного решения уравнения теплопроводности (2.6)

Параметры	(Chr)	(Che)	(Err)
Nu	3,0393	3,0960	1,8666
V_{rms}	35,1320	35,6300	1,4175
$w(0,0,1/2)$	165,9100	164,0100	1,1452
$w(0,Y,1/2)$	-26,7200	-26,5140	0,7710
$w(X,Y,1/2)$	-58,2300	-59,1900	1,6486
$T(0,0,1/2)$	0,9053	0,9241	2,0778
$T(0,Y,1/2)$	0,4957	0,5009	1,0592
$T(X,Y,1/2)$	0,2393	0,2392	0,0209
$Q(0,0)$	5,8339	5,7434	1,5513
$Q(0,Y)$	1,7136	1,7233	0,5661
$Q(X,Y)$	0,7684	0,7540	1,8740
$\lambda(0,1/4)$	-0,5059	-0,5113	1,0674
$\lambda(X/2,1/4)$	-0,1921	-0,1966	2,3425
$\lambda(X,1/4)$	-0,1388	-0,1404	1,1527
$T_m(3/4)$	0,5659	0,5636	0,4117
$T_m(1/2)$	0,5816	0,5850	0,5881

2.6.1-1 Проверка численной реализации закона сохранения тепла

Для основного теста (задачи предыдущего параграфа) и неконсервативной схемы численного интегрирования уравнения температуропроводности (1.28) (в недивергентной форме) были выполнены численные эксперименты с целью анализа выполнения закона сохранения тепла.

Если в уравнении

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.82)$$

ввести обозначения

$$\left(-uT + \frac{\partial T}{\partial x}\right) = \tilde{P}, \quad \left(-vT + \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \tilde{Q}, \quad \left(-wT + \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \tilde{R}, \quad \text{то} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-uT + \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-vT + \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-wT + \frac{\partial T}{\partial z}\right) \equiv \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z}, \quad (2.84)$$

причём $(x, y, z) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \equiv A$ (из единичного куба).

Интегрируя (2.84) по объёму A , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_A T dA = \iiint_A \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} \right) dA. \quad (2.85)$$

Применяя к правой части соотношения (2.85) формулу

Остроградского, получим

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (\tilde{P} \cos \alpha + \tilde{Q} \cos \beta + \tilde{R} \cos \gamma) dS = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS,$$

где $\vec{a} = \{\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}\}$, $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – нормаль к поверхности.

Проанализируем шесть участков поверхности кубической области – граней куба с учётом граничных условий:

$$S_{bottom} : z = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad \vec{n} = \{0, 0, -1\};$$

$$T = 1; \quad u = v = w = 0; ;$$

$$\iint_{S_{bottom}} (\vec{a}, \vec{n}) dx dy = \iint_{S_{bottom}} (-\tilde{R}) dx dy = - \iint_{\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ z=0 \end{cases}} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy,$$

$$S_{top} : z = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad \vec{n} = \{0, 0, 1\};$$

$$T = 0; \quad u = v = w = 0; ;$$

$$\iint_{S_{top}} (\vec{a}, \vec{n}) dx dy = \iint_{S_{top}} (\tilde{R}) dx dy = \iint_{\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ z=1 \end{cases}} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy.$$

Интегралы по боковым поверхностям полагаются нулевыми исходя из соответствующих условий на границе.

На части границы области интегрирования

$$S_{left} : x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1; \quad \vec{n} = \{-1, 0, 0\};$$

$$\iint_{S_{left}} (\vec{a}, \vec{n}) dx dy = \iint_{S_{left}} (-\vec{P}) dy dz = \iint_{\begin{cases} x=0 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}} \left(-uT + \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy dz = 0,$$

$$\text{т.к. } \frac{\partial T}{\partial x} = u = 0.$$

На грани куба

$$S_{right} : x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1; \quad \vec{n} = \{1, 0, 0\};$$

$$\iint_{S_{right}} (\vec{a}, \vec{n}) dx dy = \iint_{S_{right}} (\vec{P}) dy dz = \iint_{\begin{cases} x=1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}} \left(-uT + \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy dz = 0,$$

$$\text{т.к. } \frac{\partial T}{\partial x} = u = 0.$$

В квадратной области

$$S_{front} : y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1; \quad \vec{n} = \{0, -1, 0\};$$

$$\iint_{S_{front}} (\vec{a}, \vec{n}) dx dy = \iint_{S_{front}} (-\vec{Q}) dy dz = \iint_{\begin{cases} y=0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}} \left(-vT + \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dz = 0,$$

$$\text{т.к. } \frac{\partial T}{\partial y} = v = 0.$$

Наконец, на поверхности

$$S_{front} : y=1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1; \quad \vec{n} = \{0,1,0\};$$

$$\iint_{S_{front}} (\vec{a}, \vec{n}) dx dy = \iint_{S_{front}} (\vec{Q}) dy dz = \iint_{\substack{y=1 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} \left(-vT + \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dz = 0,$$

$$\text{т.к. } \frac{\partial T}{\partial y} = v = 0.$$

Учитывая граничные условия, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_A T dA = \iint_{S_{top}(z=1)} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy - \iint_{S_{bottom}(z=0)} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy. \quad (2.86)$$

Численная проверка выполнения интегрального соотношения (2.86) осуществляется следующим образом:

1) с помощью кубатурной формулы трапеций вычисляется интеграл $I_0 = \iiint_A T dA$, соответствующий начальному значению времени t_0 , начиная с которого начинается анализ соотношения (2.86);

2) на всех слоях по времени $t_n = \sum_{k=0}^n \tau_k$ вычисляются интегралы

$$I_n = \iiint_A T dA, \quad I_{n,top} = \iint_{S_{top}(z=1)} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy, \quad I_{n,bottom} = \iint_{S_{bottom}(z=0)} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy.$$

3) Сопоставляется величина I_n с величиной

$$I_0 + \sum_{k=0}^n (I_{k,top} - I_{k,bottom}) \cdot \tau_k :$$

$$E_n = I_n - \left[I_0 + \sum_{k=1}^n (I_{k,top} - I_{k,bottom}) \cdot \tau_k \right].$$

Для иллюстрации результатов расчётов на сетке $(32 \times 32 \times 32)$ составлена Таблица 2.10. Процесс стационарирования решения модельной задачи конвекции в верхней мантии Земли иллюстрируется поведением соотношения $f_n = (I_{k,top} - I_{k,bottom}) / I_0$.

Таблица 2.10 – Численный анализ закона сохранения тепла

n	t_n	t (млн лет)	$ E_n $	$ E_n/I_0 $	$ \int_n $
2	$0,09 \cdot 10^{-3}$	22,62	$1,17 \cdot 10^{-5}$	$2,13 \cdot 10^{-5}$	$2,20 \cdot 10^{-5}$
39	$1,91 \cdot 10^{-3}$	441,18	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$2,83 \cdot 10^{-4}$	$8,80 \cdot 10^{-6}$
80	$3,91 \cdot 10^{-3}$	904,99	$2,99 \cdot 10^{-4}$	$5,44 \cdot 10^{-4}$	$7,32 \cdot 10^{-6}$
120	$5,87 \cdot 10^{-3}$	1357,48	$4,32 \cdot 10^{-4}$	$7,86 \cdot 10^{-4}$	$7,01 \cdot 10^{-6}$
151	$7,39 \cdot 10^{-3}$	1708,17	$5,35 \cdot 10^{-4}$	$9,73 \cdot 10^{-4}$	$6,83 \cdot 10^{-6}$
176	$8,61 \cdot 10^{-3}$	1990,98	$6,17 \cdot 10^{-4}$	$1,12 \cdot 10^{-3}$	$6,65 \cdot 10^{-6}$
186	$9,10 \cdot 10^{-3}$	2104,10	$6,51 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$6,56 \cdot 10^{-6}$

Анализируя результаты выполненных методических расчётов, можно сделать вывод о том, что численное решение уравнения температуропроводности в неконсервативной форме (1.28) характеризуется достаточно точным выполнением закона сохранения и свидетельствует о возможности использования аппроксимации (1.29).

Зависимость значений $|\int_n| = |(I_{k,top} - I_{k,bottom})/I_0|$ от номера временных слоёв изображена ниже: Рисунок 2.6. По вертикали откладывалась приведённая выше относительная величина; на горизонтальной оси – номера слоёв по времени.

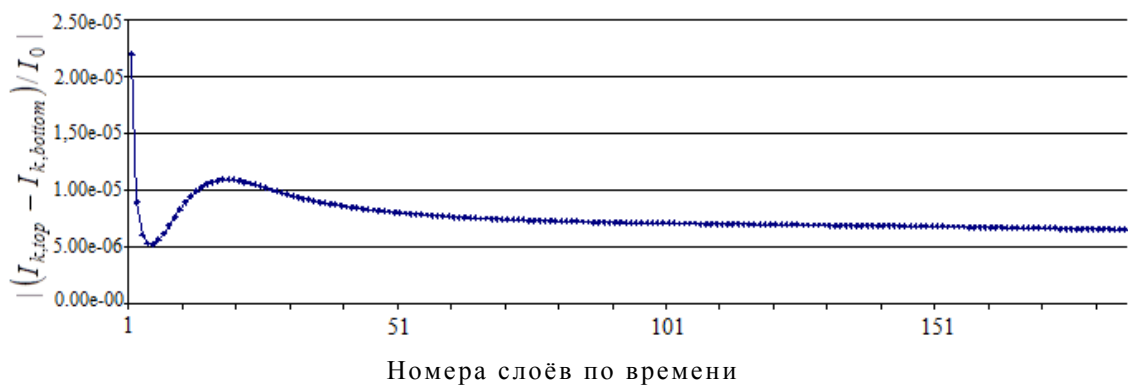


Рисунок 2.6 – Относительные погрешности, полученные в численных экспериментах по анализу выполнения закона сохранения тепла

2.6.1-2 Расчёты с использованием метода последовательности сеток

Вычисления на последовательности сеток можно считать наиболее удобным способом расчётов больших задач (см., например, [50, 80, 81, 115]). Подход к вычислению решения стационарных задач математической физики на последовательности сеток предложен Р.П. Федоренко [115]. В настоящей работе начальное распределение поля температуры и векторных полей на более мелкой сетке получено при помощи простой линейной интерполяции. Ниже приводятся результаты численных экспериментов для теста [136] на различных последовательностях сеток. Расчёты по-прежнему выполнены в постановке «векторный потенциал - завихренность».

В упомянутой работе [136] результаты Кристенсена (Chr) по-прежнему приняты за эталонные, т.к. они наиболее полно представлены. Сопоставление результатов расчётов автора (Che) с результатами Кристенсена (Chr) приведено в таблицах (Таблица 2.11 – Таблица 2.14). Расчёты выполнялись на ПЭВМ Athlon-1000.

В таблице сравниваются относительные погрешности (*Err*, Таблица 2.12), найденные с применением формулы (2.81)) для данных предыдущей таблицы (Таблица 2.11).

На последовательности пространственных сеток $\{16 \times 16 \times 16 - 32 \times 32 \times 32 - 64 \times 64 \times 64\}$ были получены результаты, представленные в таблицах (Таблица 2.13 и Таблица 2.14). Прямое вычисление на сетке $64 \times 64 \times 64$ занимает 6 суток (ПЭВМ Athlon 1000 MGh), т. е. 144 часа. Выигрыш составляет ~ 8 раз.

Можно видеть, что результаты численных экспериментов демонстрируют достаточно высокую эффективность метода последовательности сеток.

Таблица 2.11 – Результаты расчётов на последовательности сеток
(12×12×12) – (24×24×24) – (48×48×48)

Параметры	Chr	Результаты автора на сетках		
		(12×12×12)	(24×24×24)	(48×48×48)
Nu	3,0393	3,2450	3,0400	3,0397
V_{rms}	35,1320	37,9700	35,3600	35,0700
$w(X, Y, 1/2)$	-58,2300	-60,6800	-58,4200	-58,2620
$T(X, Y, 1/2)$	0,2393	0,2326	0,2377	0,2393
$Q(X, Y)$	0,7684	0,8017	0,7804	0,7726
$\lambda(X, 1/4)$	-0,1388	-0,1576	-0,1341	-0,1400
$T_m(1/2)$	0,5816	0,5844	0,5792	0,5815
Время счета		65 сек	119 сек	4811 сек

Таблица 2.12 – Сопоставление результатов численных экспериментов на последовательности сеток с результатами международного теста

Параметры	Относительная погрешность (в процентах) на сетках		
	(12×12×12)	(24×24×24)	(48×48×48)
Nu	6,7691	0,0240	0,0141
V_{rms}	8,0781	0,6490	0,1765
$w(X, Y, 1/2)$	4,2075	0,3263	0,0550
$T(X, Y, 1/2)$	2,7795	0,6479	0,0209
$Q(X, Y)$	4,3337	1,5617	0,5466
$\lambda(X, 1/4)$	13,5447	3,3862	0,8646
$T_m(1/2)$	0,4849	0,4092	0,0138

Вычисления выполнены в рамках подхода, основанного на переменных «векторный потенциал-завихренность».

Таблица 2.13 – Результаты расчётов на последовательности сеток
(16×16×16) – (32×32×32) – (64×64×64) и сравнение времён счёта

Параметры	Chr	Результаты автора на сетках		
		(16×16×16)	(32×32×32)	(64×64×64)
Nu	3,03927	3,0840	3,0370	3,0410
<i>Vrms</i>	35,13200	36,0400	35,2300	35,1200
$w(X,Y,1/2)$	-58,23000	-58,7900	-58,4500	-58,2900
$T(X,Y,1/2)$	0,23925	0,2342	0,2386	0,2391
$Q(X,Y)$	0,76840	0,7855	0,7758	0,7702
$\lambda(X,1/4)$	-0,13880	-0,1355	-0,1414	-0,1377
$T_m(1/2)$	0,58158	0,5777	0,5802	0,5820
Время счёта		2 мин	16 мин	1064 мин

Таблица 2.14 – Результаты вычислений относительной погрешности (в процентах) на последовательности сеток

Параметры	Относительная погрешность		
	(16×16×16)	(32×32×32)	(64×64×64)
Nu	1,4717	0,0747	0,0569
<i>Vrms</i>	2,5845	0,2789	0,0342
$w(X,Y,1/2)$	0,9617	0,3778	0,1030
$T(X,Y,1/2)$	2,1108	0,2717	0,0627
$Q(X,Y)$	2,2254	0,9630	0,2343
$\lambda(X,1/4)$	2,3775	1,8732	0,7925
$T_m(1/2)$	0,6671	0,2373	0,0722

Аналогичные результаты получены и с применением численных моделей в естественных переменных и будут изложены ниже.

2.6.1-3 Применение координатных преобразований

Для повышения точности расчётов в отдельных областях расчётной области используются неравномерные сетки, сгущающиеся в местах больших градиентов искомых функций. Одним из простейших подходов является использование вместо равномерной сетки неравномерной, более подробной в областях, представляющих особый интерес. Увеличение разрешения можно получить также при помощи растяжения координат, которое приводит к преобразованию исходных уравнений, что (как отмечено, в частности, в [2, 10, 49, 58, 117]) является более точным подходом, нежели расчёт на построенной неравномерной сетке исходных уравнений. Для иллюстрации вышеупомянутого были использованы простейшие преобразования растяжения координат [2]:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = B + \frac{1}{\lambda} \operatorname{arsh} \left[\left(\frac{z}{z_c} - 1 \right) \cdot \operatorname{sh}(\xi B) \right],$$

$$\text{где } B = \frac{1}{2\xi} \ln \left[\frac{1 + (e^\xi - 1)(z_c/d)}{1 + (e^{-\xi} - 1)(z_c/d)} \right], \quad 0 < \xi < \infty.$$

Величина параметра растяжения ξ влияет на измельчение сетки вблизи $z = z_c$. Растяжение соответствует неравномерной (в исходных переменных) сетке по направлению z . Значения $z_c = 1$, $d = 1$ и $\xi = 2$ иллюстрируются результатами, приведёнными в таблице (Таблица 2.15). Сетку демонстрирует Рисунок 2.7.

Значения $z_c = 3/4$, $d = 1$, $\xi = 4$ иллюстрируются результатами, представленными в таблице (Таблица 2.16). Сетка также представлена: Рисунок 2.8. Видно, что полученное численное решение достаточно хорошо согласуется с результатами международного теста. Таким образом тестировался комплекс программ с применением простейшей неравномерной сетки.

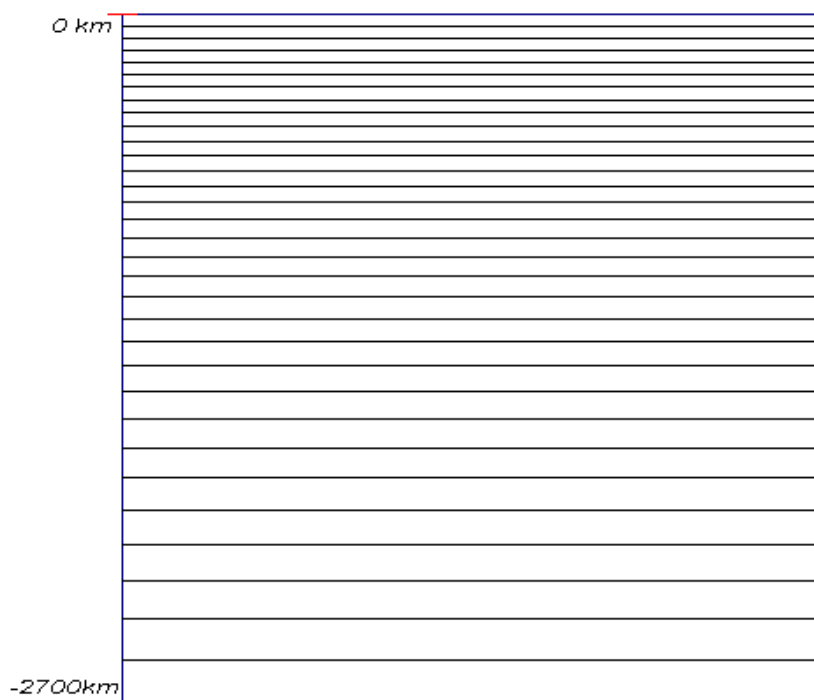


Рисунок 2.7 – Распределение узлов по вертикальной переменной для значений $z_c = 1, d = 1, \xi = 2$. Наименьшее значение шага сетки по вертикальной переменной вблизи линии сгущения ($z_c = 1$) равно 46,56 км, наибольшее - 169,89 км

Таблица 2.15 – Сопоставление результатов численных экспериментов с использованием сгущения сетки в вертикальном направлении при значениях $z_c = 1, d = 1, \xi = 2$ на сетке (32×32×64)

Параметры	(Chr)	(Che)	(Err)
Nu	3,03927	3,0890	1,607
V_{rms}	35,13200	35,8000	1,868
$w(0,0,1/2)$	165,9100	169,5000	2,112
$w(0,Y,1/2)$	-26,7200	-27,3700	2,363
$w(X,Y,1/2)$	-58,2300	-60,8400	4,285
$T(0,0,1/2)$	0,90529	0,9138	0,934
$T(0,Y,1/2)$	0,49565	0,5056	1,974
$T(X,Y,1/2)$	0,23925	0,2431	1,596
$Q(0,0)$	5,83390	5,9015	1,145
$Q(0,Y)$	1,71360	1,7557	2,398
$Q(X,Y)$	0,76840	0,7863	2,271
$T_m(3/4)$	0,56593	0,5731	1,252
$T_m(1/2)$	0,58158	0,5912	1,631
$\omega^z(3/4,1/4,3/4)$	-11,12500	-11,5200	3,446

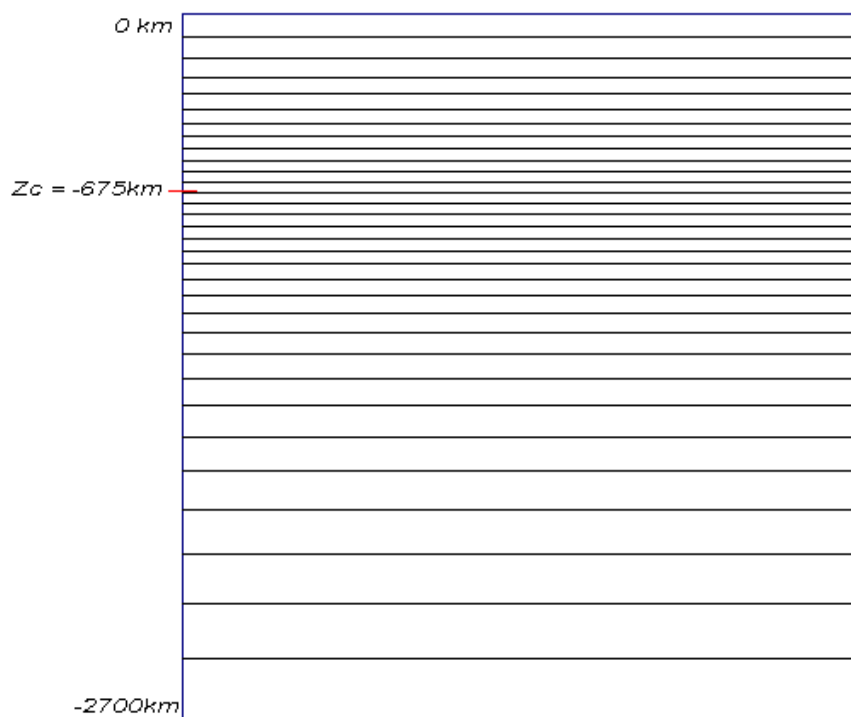


Рисунок 2.8 – Распределение узлов по вертикальной переменной для значений $z_c = \frac{3}{4}, d = 1, \xi = 4$. Наименьшее значение h_i вблизи линии сгущения ($z_c = \frac{3}{4}$) равно 40,82 км, наибольшее - 241,21 км.

Таблица 2.16 – Сопоставление результатов численных экспериментов с использованием сгущения сетки в вертикальном направлении с применением значений

$z_c = \frac{3}{4}, d = 1, \xi = 4$ на сетке (32×32×64)

Параметры	(Chr)	(Che)	(Err)
Nu	3,03927	3,0910	1,684
V_{rms}	35,13200	35,7100	1,631
$w(0,0,1/2)$	165,91000	169,4000	2,038
$w(0,Y,1/2)$	-26,72000	-27,3200	2,205
$w(X,Y,1/2)$	-58,23000	-60,3400	3,497
$T(0,0,1/2)$	0,90529	0,9130	0,842
$T(0,Y,1/2)$	0,49565	0,5034	1,547
$T(X,Y,1/2)$	0,23925	0,2415	0,919
$Q(0,0)$	5,83390	5,9097	1,282
$Q(0,Y)$	1,71360	1,7484	1,989
$Q(X,Y)$	0,76840	0,7816	1,689
$T_m(3/4)$	0,56593	0,5704	0,775
$T_m(1/2)$	0,58158	0,5890	1,263
$\omega^z(3/4,1/4,3/4)$	-11,12500	-11,4600	2,955

2.6.2 Сопоставление с основным тестом решений, полученных неявными методами искусственной сжимаемости и расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления

Остановимся сначала на неявном методе расщепления с коррекцией давления (разностные уравнения (2.56)-(2.60)).

В процессе решения уравнений (1.4)-(1.6) в (1.7) с граничными условиями (1.8)-(1.10), с учётом условий и параметров раздела 2.6 получены результаты сопоставления с тестом, сведённые в таблицах (Таблица 2.17 и Таблица 2.18).

Для решений, полученным методом расщепления с коррекцией давления применялся также метод последовательности сеток [115], что отражает Таблица 2.18.

Таблица 2.17 – Сопоставление результатов расчётов с применением неявного метода расщепления с коррекцией давления; разнесённая сетка (32×32×64). Сопоставлены все 20 величин из числа заявленных в [136] (Таблица 2.7)

Параметры	(Chr)	(Che)	(Err)
Nu	3,03927	3,0676	0,9328
V_{rms}	35,13200	35,7431	1,7394
$w(0,0,1/2)$	165,91000	168,6430	1,6473
$w(0,Y,1/2)$	-26,72000	-26,8058	0,3211
$w(X,Y,1/2)$	-58,23000	-59,0940	1,4838
$T(0,0,1/2)$	0,90529	0,9068	0,1646
$T(0,Y,1/2)$	0,49565	0,4993	0,7348
$T(X,Y,1/2)$	0,23925	0,2424	1,3317
$Q(0,0)$	5,83390	5,8380	0,0703
$Q(0,Y)$	1,71360	1,7263	0,7429
$Q(X,Y)$	0,76840	0,7733	0,6402
$\lambda(0,1/4)$	-0,50590	-0,5046	0,2532
$\lambda(X/2,1/4)$	-0,19210	-0,1936	0,7553
$\lambda(X,1/4)$	-0,13880	-0,1407	1,3566
$T_m(3/4)$	0,56593	0,5705	0,8020
$T_m(1/2)$	0,58158	0,5835	0,3281
$H_z(0,0,1)$	10869,00000	10711,7000	1,4472
$H_z(0,Y,1)$	-4145,00000	-4078,7100	1,5993
$H_z(X,Y,1)$	-12811,00000	-12645,0000	1,2958
$\omega^z(3/4,1/4,3/4)$	-11,12500	-10,9630	1,4562

Прямые расчёты на сетке (128×128×128) требуют около 180 минут на персональном компьютере AMD Ryzen 5 1500X с тактовой частотой 3600 МГц. Таким образом, применение последовательных сеток позволяет сократить вычислительный процесс более чем в восемь раз.

Результаты тестирования с применением неявной реализации метода искусственной сжимаемости (разностные уравнения (2.12)-(2.14)) приведены в таблицах (Таблица 2.19-Таблица 2.20).

Таблица 2.18 – Результаты расчётов на последовательности сеток и сопоставление времён счёта. (n32 – сетка (32×32×32), n64 – сетка (64×64×64), n128 – сетка (128×128×128), Неявный метод расщепления с коррекцией давления

Параметры	(Chr)	(Che)			Относительная ошибка в процентах		
		n32	n64	n128	n32	n64	n128
Nu	3,0393	3,0473	3,0431	3,0393	0,2632	0,1250	0,0000
V_{rms}	35,1320	35,2439	35,1546	35,1280	0,3185	0,0643	0,0114
$w(0,0,1/2)$	165,9100	166,2674	166,0415	165,8993	0,2154	0,0793	0,0064
$w(0,Y,1/2)$	-26,7200	-27,1400	-26,8274	-26,7199	1,5719	0,4019	0,0004
$w(X,Y,1/2)$	-58,2300	-59,0922	-58,4458	-58,2301	1,4807	0,3706	0,0002
$T(0,0,1/2)$	0,9053	0,9073	0,9058	0,9053	0,2209	0,0552	0,0000
$T(0,Y,1/2)$	0,4957	0,5007	0,4969	0,4956	1,0087	0,2421	0,0202
$T(X,Y,1/2)$	0,2393	0,2438	0,2404	0,2392	1,8805	0,4597	0,0418
$Q(0,0)$	5,8339	5,8395	5,8356	5,8339	0,0960	0,0291	0,0000
$Q(0,Y)$	1,7136	1,7313	1,7179	1,7136	1,0329	0,2509	0,0000
$Q(X,Y)$	0,7684	0,7752	0,7700	0,7684	0,8850	0,2082	0,0000
$\lambda(0,1/4)$	-0,5059	-0,4954	-0,5032	-0,5056	2,0755	0,5337	0,0593
$\lambda(X/2,1/4)$	-0,1921	-0,1986	-0,1937	-0,1922	3,3837	0,8329	0,0521
$\lambda(X,1/4)$	-0,1388	-0,1400	-0,1391	-0,1388	0,8646	0,2161	0,0000
$\omega^z(3/4,1/4,3/4)$	-11,1250	-10,9746	-11,0903	-11,1251	1,3519	0,3119	0,0009
Время счёта		16 сек	113 сек	1157 сек			

Из анализа полученных данных можно сделать вывод о том, что неявный метод расщепления с коррекцией давления (Таблица 2.17) приводит к результатам, аналогичным полученным в случае применения метода искусственной сжимаемости (Таблица 2.19), а

также и в случае вычислений в переменных «векторный потенциал-завихренность (Таблица 2.8).

Таблица 2.19 – Результаты расчётов на разнесённой сетке (32×32×64) с применением метода искусственной сжимаемости

Параметры	(Chr)	(Che)	(Err)
Nu	3,03927	2,9900	1,6211
V_{rms}	35,13200	35,1600	0,0797
$w(0,0,1/2)$	165,91000	168,6600	1,6575
$w(0,Y,1/2)$	-26,72000	-26,8100	0,3368
$w(X,Y,1/2)$	-58,23000	-59,5000	2,1810
$T(0,0,1/2)$	0,90529	0,9070	0,1889
$T(0,Y,1/2)$	0,49565	0,5000	0,8776
$T(X,Y,1/2)$	0,23925	0,2400	0,3135
$Q(0,0)$	5,83390	5,8400	0,1046
$Q(0,Y)$	1,71360	1,7300	0,9570
$Q(X,Y)$	0,76840	0,7700	0,2082
$\lambda(0,1/4)$	-0,50590	-0,4960	1,9569
$\lambda(X/2,1/4)$	-0,19210	-0,1890	1,6137
$\lambda(X,1/4)$	-0,13880	-0,1372	1,1527
$T_m(3/4)$	0,56593	0,5660	0,0124
$T_m(1/2)$	0,58158	0,5870	0,9319
$H_z(0,0,1)$	10869,00000	10782,3000	0,7977
$H_z(0,Y,1)$	-4145,00000	-4163,8600	0,4550
$H_z(X,Y,1)$	-12811,00000	-12747,1000	0,4988
$\omega^z(3/4,1/4,3/4)$	-11,12500	-11,0264	0,8863

Для решений, полученных методом искусственной сжимаемости, применялся также метод последовательности сеток (Таблица 2.20). Представленные в таблице результаты аналогичны приведённым выше (Таблица 2.18).

Таблица 2.21 иллюстрирует одновременное сопоставление трёх численных моделей. Можно видеть, что результаты настоящих расчётов с применением трёх вышеизложенных подходов (алгоритмов) и метода последовательности сеток достаточно близки к результатам [136], что свидетельствует о высокой эффективности построенных численных моделей.

Таблица 2.20 – Результаты расчётов на последовательности сеток и сравнение времён счёта. Неявный метод искусственной сжимаемости: (n32 – сетка (32×32×32), n64 – сетка (64×64×64), n128 – сетка (128×128×128), (Chr) – результаты, полученные Кристенсенем на сетке (32×32×64))

Параметры	Chr	(Che)			Относительная ошибка в процентах		
		n32	n64	n128	n32	n64	n128
Nu	3,0393	2,989	3,035	3,036	1,6368	0,1290	0,0938
V_{rms}	35,1320	35,104	35,108	35,115	0,0781	0,0664	0,0486
$w(0,0,1/2)$	165,9100	163,194	165,774	165,809	1,6368	0,0819	0,0609
$w(0,Y,1/2)$	-26,7200	-26,631	-26,609	-26,637	0,3330	0,4149	0,3084
$w(X,Y,1/2)$	-58,2300	-56,976	-58,007	-58,060	2,1527	0,3826	0,2917
$T(0,0,1/2)$	0,9053	0,9039	0,9048	0,9049	0,1574	0,0570	0,0426
$T(0,Y,1/2)$	0,4957	0,4913	0,4944	0,4947	0,8697	0,2499	0,1859
$T(X,Y,1/2)$	0,2393	0,2385	0,2381	0,2384	0,3098	0,4745	0,3550
$Q(0,0)$	5,8339	5,8279	5,8321	5,8326	0,1022	0,0300	0,0229
$Q(0,Y)$	1,7136	1,6975	1,7092	1,7103	0,9405	0,2590	0,1916
$Q(X,Y)$	0,7684	0,7668	0,7667	0,7672	0,2057	0,2149	0,1562
$\lambda(0,1/4)$	-0,5059	-0,4961	-0,5031	-0,5038	1,9305	0,5509	0,4151
$\lambda(X/2,1/4)$	-0,1921	-0,1890	-0,1904	-0,1909	1,5885	0,8598	0,6427
$\lambda(X,1/4)$	-0,1388	-0,1372	-0,1385	-0,1386	1,1412	0,2231	0,1635
$\omega^z(3/4,1/4,3/4)$	-11,1250	-11,0273	-11,0892	-11,0973	0,8784	0,3220	0,2494
Время счёта		15 сек	99 сек	1001 сек			

Таблица 2.21 – Сопоставление с результатами [136]. Сетка (32×32×64). Методы расщепления с коррекцией давления (РКД), искусственной сжимаемости (ИС) и с применением векторного потенциала-завихренности (ВПЗ)

Параметры	(Chr)	(Che) РКД	(Che) ИС	(Che) ВПЗ
Nu	3,039	3,040	2,990	3,039
V_{rms}	35,132	35,740	35,160	35,180
$w(X,Y,1/2)$	-58,230	-58,260	-59,040	-58,210
$T(X,Y,1/2)$	0,239	0,242	0,240	0,238
$T_m(3/4)$	0,566	0,570	0,566	0,563
$T_m(1/2)$	0,582	0,583	0,587	0,579
$\omega^z(3/4,1/4,3/4)$	-11,125	-10,963	-11,026	-11,250

Ощутимый выигрыш во времени счета достигается также в результате применения экстраполяционного алгоритма Ричардсона [63, 64]. Результаты его использования в численных моделях конвекции в верхней мантии Земли обсуждаются ниже.

2.6.3 Тестирование численных моделей с применением метода экстраполяции по Ричардсону

В модельных задачах тестирования, а также в конкретных геодинамических задачах, приведённых в последующих главах диссертации, рассчитываются последовательности сеточных решений, которые можно использовать для повышения точности, если применить к каждой такой последовательности алгоритм экстраполяции Ричардсона [63, 64]. Анализ, выполненный автором, показывает эффективность упомянутого алгоритма в рассмотренных задачах.

В книге Г.И. Марчука и В.В. Шайдурова [64] приведены иллюстративные результаты численного решения одномерной задачи Дирихле для стационарного уравнения диффузии

$$\begin{aligned}
 -((1+x)u')' + xu &= \frac{1+x^2+x^3}{(1+x)^2}, x \in (0,1), \\
 u(0) &= 0, \quad u(1) = 1/2.
 \end{aligned}
 \tag{2.87}$$

Аналитическое решение задачи имеет вид

$$u_a(x) = \frac{x}{1+x}.
 \tag{2.88}$$

Для равномерных сеток с числом узлов 10, 20, 40 и 80 автором были получены максимальные погрешности применения экстраполяции по Ричардсону, которые в точности совпали с представленными в [64] числовыми значениями.

Результаты этого численного эксперимента носят иллюстративный характер.

Формулы экстраполяции по Ричардсону [64] для одномерного случая:

- на двух сетках:

$$\Phi_i^{m+1,m} = (4 \cdot \Phi_{2i-1}^{m+1} - \Phi_i^m) / 3, \quad (2.89)$$

- на трёх сетках:

$$\Phi_i^{m,m+1,m+2} = (\Phi_i^m - 20 \cdot \Phi_{2i-1}^{m+1} + 64 \cdot \Phi_{4i-3}^{m+2}) / 45. \quad (2.90)$$

Значения индекса i изменяется от единицы до своего максимального значения, а индекс $m=1,2,3, \dots$ обозначает (так же, как и в (2.75), (2.76)) номер сетки в последовательности сеток. Для численного интегрирования задачи (2.87) применялась стандартная разностная схема второго порядка аппроксимации.

В таблице (Таблица 2.22) (строка 0 и столбец 0) приведены значения, вычисленные на четырёх сетках. Используются обозначения:

$$\delta^m = \max_i |u_i^m - (u_a^m)_i|, \quad m=1,2,3,4,$$

где u_i^m - решение (2.87) на сетке m (последовательность $m=1,2,3,4$ соответствует последовательности сеток: $m=1, i=1, \dots, 11$; $m=2, i=1, \dots, 21$; $m=3, i=1, \dots, 41$ и $m=4, i=1, \dots, 81$; т.е. 10, 20, 40 и 80 ячеек соответственно);

$(u_a^m)_i$ - аналитическое решение (2.88) на сетке с номером m ;

$$\delta^{m,m+1} = \max_i |u_i^{m,m+1} - (u_a^m)_i|, \quad m=1,2,3;$$

$u^{m,m+1}$ - решение, найденное по формуле (2.89) на сетках m и $m+1$;

$$\delta^{m,m+1,m+2} = \max_i |u_i^{m,m+1,m+2} - (u_a^m)_i|, \quad m=1;$$

$u^{m,m+1,m+2}$ - решение, найденное по формуле (2.90) на трёх сетках $m, m+1$

и $m+2$: $\delta^{1,2,3} = \max_i |u_i^{1,2,3} - (u_a^1)_i|$.

Далее числа $\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^{1,2,3}$ в столбце 0 таблицы последовательно делятся на элементы $\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^{1,2,3}$ строки 0 (всюду делитель старше делимого: нельзя делить $k+1$ -й элемент в столбце 0 на k -й элемент

нулевой строки). Результаты деления образуют приведённые в таблице элементы верхней треугольной матрицы.

Таблица 2.22 – Результаты экстраполяции решений одномерной задачи Дирихле для стационарного уравнения диффузии (2.87)

-		0	1	2	3	4	5	6	7	8
		-	δ^1	δ^2	δ^3	δ^4	$\delta^{1,2}$	$\delta^{2,3}$	$\delta^{3,4}$	$\delta^{1,2,3}$
0	-	-	2,30E-04	5,79E-05	1,45E-05	3,63E-06	4,21E-07	2,66E-08	1,67E-09	2,96E-10
1	δ^1	2,30E-04	1,00E+00	3,97E+00	1,58E+01	6,32E+01	5,46E+02	8,65E+03	1,38E+05	7,77E+05
2	δ^2	5,79E-05	-	1,00E+00	3,99E+00	1,59E+01	1,38E+02	2,18E+03	3,48E+04	1,96E+05
3	δ^3	1,45E-05	-	-	1,00E+00	4,00E+00	3,45E+01	5,47E+02	8,72E+03	4,91E+04
4	δ^4	3,63E-06	-	-	-	1,00E+00	8,63E+00	1,37E+02	2,18E+03	1,23E+04
5	$\delta^{1,2}$	4,21E-07	-	-	-	-	1,00E+00	1,58E+01	2,53E+02	1,42E+03
6	$\delta^{2,3}$	2,66E-08	-	-	-	-	-	1,00E+00	1,60E+01	8,99E+01
7	$\delta^{3,4}$	1,67E-09	-	-	-	-	-	-	1,00E+00	5,63E+00
8	$\delta^{1,2,3}$	2,96E-10	-	-	-	-	-	-	-	1,00E+00

Решение модельной задачи для уравнения Пуассона с условиями Неймана–Дирихле и Дирихле

При решении трёхмерной модельной задачи для уравнения Пуассона из раздела 2.4.1 экстраполяционные формулы для двух последовательных трёхмерных сеток выглядят следующим образом:

$$\Phi_{i,j,k}^{m+1,m} = (4 \cdot \Phi_{2i-1,2j-1,2k-1}^{m+1} - \Phi_{i,j,k}^m) / 3; \quad (2.91)$$

для трёх сеток:

$$\Phi_{i,j,k}^{m,m+1,m+2} = (\Phi_{i,j,k}^m - 20 \cdot \Phi_{2i-1,2j-1,2k-1}^{m+1} + 64 \cdot \Phi_{4i-3,4j-3,4k-3}^{m+2}) / 45, \quad (2.92)$$

причём значения индексов i, j, k изменяются от 1 до своих максимальных значений, а индекс $m=1,2,3,\dots$ обозначает номер сетки в последовательности сеток. Ошибка на аналитическом решении (2.70) может быть вычислена по формуле, аналогичной (2.75) т.е.

$$\delta^{m,m+1,\dots} = \max_{i,j,k} \left| \Phi_{i,j,k}^{m,m+1,\dots} - (\Phi_a^m)_{i,j,k} \right|. \quad (2.93)$$

Результаты повышения точности решения за счёт экстраполяции по Ричардсону на двух сетках для модельной задачи (2.69), (2.70) вместе с результатами, полученными в 2.4.1, 2.4.2 и экстраполяция по Ричардсону на двух сетках для модельной задачи основного теста [136], представленной в п. 2.6, вместе с результатами, полученными в 2.6.1-2 и в 2.6.1-3 (Таблица 2.18) позволяют сделать сравнительный анализ результатов, полученных при решении на последовательности сеток вплоть до сетки (128x128x128), на которой вычисления не производились.

Для задачи Неймана-Дирихле, упомянутой в разделе под номером 2.4.1, исследовались решения, полученные при различных значениях β .

Область интегрирования задавалась единичным кубом, как и в разделе 2.4.1.

Уравнение Пуассона (2.69)

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = 2\beta \cdot \left[3 + 2\beta \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \right] \cdot e^{\beta(x^2 + y^2 + z^2)},$$

имеет аналитическое решение Φ_a (2.70)

$$\Phi_a \equiv \Phi(x, y, z) = e^{\beta(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Пусть $\beta = -2, 0$; $\tau = 10^{-3}/4^{m-1}$, $m=1, 2, 3$; критерий выхода из итерационного процесса: $\varepsilon = 10^{-8}$.

Начальное распределение $\Phi_{i,j,k}^1$ нулевое: $\Phi_{i,j,k}^1 = 0$.

Как было сказано ранее, верхний индекс – номер сетки в последовательности. В данном случае $m=1$ соответствует сетке $32 \times 32 \times 32$ ячеек (зависимость от m можно выразить в общей форме: $32 \cdot 2^{m-1} \times 32 \cdot 2^{m-1} \times 32 \cdot 2^{m-1}$). Таким образом, величине $m=2$ соответствует сетка $64 \times 64 \times 64$ ячеек; $m=3$ – сетка $128 \times 128 \times 128$ ячеек.

Ищется решение уравнения с граничными условиями Неймана на вертикальных плоскостях куба, и с условиями Дирихле на верхней и нижней границах.

На первом шаге ($m=1, \Phi_{i,j,k}^1$) после выполнения $s = 1275$ шагов по фиктивному времени с шагом $\tau = 10^{-3}$ значение

$$\max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^{1,s} - \Phi_{i,j,k}^{1,s-1}| = 0,99 \cdot 10^{-8}$$

становится меньше $\varepsilon = 10^{-8}$ и решение считается установившимся.

При этом получилось в процессе вычислений

$$\delta^1 = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^{1,s} - (\Phi_a^1)_{i,j,k}| = 2,36 \cdot 10^{-4}, s = 1275.$$

Начальное распределение $\Phi_{i,j,k}^2$ (сетка $64 \times 64 \times 64$ ячеек) рассчитывается от предыдущего поля $\Phi_{i,j,k}^1$ линейной интерполяцией.

На втором шаге ($m=2, \Phi_{i,j,k}^2$) после выполнения $s = 525$ итераций

$$\delta^2 = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^{2,s} - (\Phi_a^2)_{i,j,k}| = 5,82 \cdot 10^{-5}, s = 525.$$

Выход из итерационного процесса осуществляется при значении

$$\max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^{2,s} - \Phi_{i,j,k}^{2,s-1}| = 0,98 \cdot 10^{-8}, s \text{ по-прежнему – номер итерации.}$$

На третьем шаге ($m=3, \Phi_{i,j,k}^3$) начальное распределение $\Phi_{i,j,k}^3$ (сетка $128 \times 128 \times 128$ ячеек) вычисляется от предыдущего поля $\Phi_{i,j,k}^2$ при помощи линейной интерполяции. После выполнения $s = 375$ итераций происходит выход из итерационного процесса при значении

$$\max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^{3,s} - \Phi_{i,j,k}^{3,s-1}| = 0,99 \cdot 10^{-8} < \varepsilon = 10^{-8},$$

а ошибка становится равной

$$\delta^3 = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^{3,s} - (\Phi_a^3)_{i,j,k}| = 1,50 \cdot 10^{-5}, s = 375.$$

Сравнение решений $\Phi_{i,j,k}^1$, $\Phi_{i,j,k}^2$ и $\Phi_{i,j,k}^3$ с аналитическими $(\Phi_a^1)_{i,j,k}$, $(\Phi_a^2)_{i,j,k}$ и $(\Phi_a^3)_{i,j,k}$ соответственно, и с решениями, полученными в результате применения процедуры экстраполяции по Ричардсону [64] по формулам (2.91) и (2.92) даёт следующие значения, сведённые в таблицу (Таблица 2.23).

Результаты расчётов значительно хуже результатов, полученных в одномерной модельной задаче из [64], однако экстраполяция по Ричардсону в представленных результатах численных экспериментах приводит к существенному повышению эффективности численного алгоритма.

Таблица 2.23 – Решение модельного уравнения Пуассона с граничными условиями Неймана на вертикальных и с условиями Дирихле на горизонтальных границах ($\beta=-2,0$) на последовательности трёх сеток с применением экстраполяции по Ричардсону

-		0	1	2	3	4	5	6
		-	δ^1	δ^2	δ^3	$\delta^{1,2}$	$\delta^{2,3}$	$\delta^{1,2,3}$
0	-	-	2,36E-04	5,82E-05	1,50E-05	5,80E-06	2,56E-06	1,06E-06
1	δ^1	2,36E-04	1,00E+00	4,05E+00	1,57E+01	4,07E+01	9,22E+01	2,23E+02
2	δ^2	5,82E-05	-	1,00E+00	3,88E+00	1,00E+01	2,27E+01	5,49E+01
3	δ^3	1,50E-05	-	-	1,00E+00	2,59E+00	5,86E+00	1,42E+01
4	$\delta^{1,2}$	5,80E-06	-	-	-	1,00E+00	2,27E+00	5,47E+00
5	$\delta^{2,3}$	2,56E-06	-	-	-	-	1,00E+00	2,42E+00
6	$\delta^{1,2,3}$	1,06E-06	-	-	-	-	-	1,00E+00

В случае граничных условий Дирихле на всех границах расчётной области получим следующие данные (Таблица 2.24):

Для элементов нулевой строки используются обозначения:

$$\delta^m = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^m - (\Phi_a^m)_{i,j,k}|, \quad m=1,2,3,$$

где $\Phi_{i,j,k}^m$ - решение (2.69) на сетке m (последовательность $m = 1, 2, 3$ соответствует последовательности сеток $32 \cdot 2^{m-1} \times 32 \cdot 2^{m-1} \times 32 \cdot 2^{m-1}$ ($32 \times 32 \times 32$, $64 \times 64 \times 64$ и $128 \times 128 \times 128$) ячеек; пределы изменений

индексов: $i, j, k = 1, 2, \dots, 32 \cdot 2^{m-1}, 32 \cdot 2^{m-1} + 1$; $(\Phi_a^m)_{i,j,k}$ - аналитическое решение (2.70) на сетке с номером m ;

$$\delta^{m,m+1} = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^{m,m+1} - (\Phi_a^m)_{i,j,k}|, \quad m=1,2,$$

где $\Phi_{i,j,k}^{m,m+1}$ - решение, найденное по формуле (2.91) на сетках m и $m+1$;

$$\delta^{m,m+1,m+2} = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^{m,m+1,m+2} - (\Phi_a^m)_{i,j,k}|, \quad m=1,$$

$\Phi_{i,j,k}^{m,m+1,m+2}$ - решение, найденное по формуле (2.92) по решениям на трёх

сетках $m, m+1$ и $m+2$: $\delta^{1,2,3} = \max_{i,j,k} |\Phi_{i,j,k}^{1,2,3} - (\Phi_a^1)_{i,j,k}|$.

Таблица 2.24 – Решение модельного уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле на всех границах ($\beta=-2,0$) на последовательности трёх сеток с применением экстраполяции по Ричардсону

-		0	1	2	3	4	5	6
		-	δ^1	δ^2	δ^3	$\delta^{1,2}$	$\delta^{2,3}$	$\delta^{1,2,3}$
0	-	-	6,63E-05	1,66E-05	4,17E-06	3,76E-07	1,20E-07	8,33E-08
1	δ^1	6,63E-05	1,00E+00	3,99E+00	1,59E+01	1,77E+02	5,53E+02	7,97E+02
2	δ^2	1,66E-05	-	1,00E+00	3,99E+00	4,43E+01	1,38E+02	2,00E+02
3	δ^3	4,17E-06	-	-	1,00E+00	1,11E+01	3,48E+01	5,01E+01
4	$\delta^{1,2}$	3,76E-07	-	-	-	1,00E+00	3,13E+00	4,50E+00
5	$\delta^{2,3}$	1,20E-07	-	-	-	-	1,00E+00	1,44E+00
6	$\delta^{1,2,3}$	8,33E-08	-	-	-	-	-	1,00E+00

Числа $\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^{1,2,3}$ в столбце 0 таблиц (Таблица 2.23, Таблица 2.24) последовательно делятся на элементы $\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^{1,2,3}$ строки 0. Результаты деления образуют диагональ приведённой в таблицах элементов верхней треугольной матрицы. Ниже приведены данные результатов при других значениях переменной β .

Таблица 2.25 – Решение модельного уравнения Пуассона с граничными условиями Неймана на вертикальных и с условиями Дирихле на горизонтальных границах ($\beta=-4,0$) на последовательности трёх сеток с применением экстраполяции по Ричардсону

-		0	1	2	3	4	5	6
		-	δ^1	δ^2	δ^3	$\delta^{1,2}$	$\delta^{2,3}$	$\delta^{1,2,3}$
0	-	-	4,43E-04	1,02E-04	2,50E-05	2,00E-05	9,45E-06	4,74E-06
1	δ^1	4,43E-04	1,00E+00	4,33E+00	1,77E+01	2,21E+01	4,68E+01	9,34E+01
2	δ^2	1,02E-04	-	1,00E+00	4,08E+00	5,11E+00	1,08E+01	2,16E+01
3	δ^3	2,50E-05	-	-	1,00E+00	1,25E+00	2,65E+01	5,25E+00
4	$\delta^{1,2}$	2,00E-05	-	-	-	1,00E+00	2,12E+00	4,23E+00
5	$\delta^{2,3}$	9,45E-06	-	-	-	-	1,00E+00	1,99E+00
6	$\delta^{1,2,3}$	4,74E-06	-	-	-	-	-	1,00E+00

Таблица 2.26 – Решение модельного уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле на всех границах ($\beta=-4,0$) на последовательности трёх сеток с применением экстраполяции по Ричардсону

-		0	1	2	3	4	5	6
		-	δ^1	δ^2	δ^3	$\delta^{1,2}$	$\delta^{2,3}$	$\delta^{1,2,3}$
0	-	-	1,62E-04	4,05E-05	1,01E-05	8,17E-07	4,99E-07	2,09E-07
1	δ^1	1,62E-04	1,00E+00	4,00E+00	1,60E+01	1,99E+02	3,25E+02	7,77E+02
2	δ^2	4,05E-05	-	1,00E+00	4,00E+00	4,96E+01	8,12E+01	1,946E+02
3	δ^3	1,01E-07	-	-	1,00E+00	1,24E+01	2,03E+01	4,86E+01
4	$\delta^{1,2}$	8,17E-07	-	-	-	1,00E+00	1,63E+00	3,91E+00
5	$\delta^{2,3}$	4,99E-07	-	-	-	-	1,00E+00	2,39E+00
6	$\delta^{1,2,3}$	2,09E-07	-	-	-	-	-	1,00E+00

Благодаря применённому алгоритму можно существенно сократить время счета. К примеру, на приведённой здесь модельной задаче для уравнения Пуассона удалось достичь 14-ти кратного ускорения на сетках – $(32 \times 32 \times 32) - (64 \times 64 \times 64)$ и $64 \times 64 \times 64 - (128 \times 128 \times 128)$. На сетках $(32 \times 32 \times 32) - 64 \times 64 \times 64$ в модельных задачах Busse et al. [135] (раздел 2.6) выигрыш оказался 24-х кратным.

Таблица 2.27 – Решение модельного уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле на всех границах ($\beta = -5, 0$) на последовательности трёх сеток с применением экстраполяции по Ричардсону

-		0	1	2	3	4	5	6
		-	δ^1	δ^2	δ^3	$\delta^{1,2}$	$\delta^{2,3}$	$\delta^{1,2,3}$
0	-	-	2,06E-04	5,15E-05	1,28E-05	1,01E-06	3,00E-07	1,24E-07
1	δ^1	2,06E-04	1,00E+00	4,00E+00	1,60E+01	2,04E+02	6,87E+02	1,66E+03
2	δ^2	5,15E-05	-	1,00E+00	4,00E+00	5,09E+01	1,72E+02	4,15E+02
3	δ^3	1,28E-05	-	-	1,00E+00	1,27E+01	4,29E+01	1,04E+02
4	$\delta^{1,2}$	1,01E-06	-	-	-	1,00E+00	3,37E+00	8,15E+00
5	$\delta^{2,3}$	3,00E-07	-	-	-	-	1,00E+00	2,42E+00
6	$\delta^{1,2,3}$	1,24E-07	-	-	-	-	-	1,00E+00

Таблица 2.28 – Решение модельного уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле на всех границах ($\beta = -8, 0$) на последовательности трёх сеток с применением экстраполяции по Ричардсону

-		0	1	2	3	4	5	6
		-	δ^1	δ^2	δ^3	$\delta^{1,2}$	$\delta^{2,3}$	$\delta^{1,2,3}$
0	-	-	3,30E-04	8,30E-05	2,08E-05	2,02E-06	5,45E-07	2,45E-07
1	δ^1	3,30E-04	1,00E+00	3,98E+00	1,59E+01	1,63E+02	6,05E+02	1,35E+03
2	δ^2	8,30E-05	-	1,00E+00	4,00E+00	4,10E+01	1,52E+02	3,40E+02
3	δ^3	2,08E-05	-	-	1,00E+00	1,03E+01	3,80E+01	8,49E+01
4	$\delta^{1,2}$	2,02E-06	-	-	-	1,00E+00	3,71E+00	8,27E+00
5	$\delta^{2,3}$	5,45E-07	-	-	-	-	1,00E+00	2,23E+00
6	$\delta^{1,2,3}$	2,45E-07	-	-	-	-	-	1,00E+00

В дальнейшем экстраполяция по Ричардсону была применена (и продемонстрирована её эффективность) при решении задачи конвективного теплообмена в обширной области верхней мантии Земли, перекрытой кондуктивной литосферой постоянной мощности.

2.7 Задача протекания

Ввиду того, что при постановке задач в переменных «векторный потенциал–завихренность» довольно трудно поставить задачу

движения жидкости (протекание жидкости через область, движение поршня внутри жидкости и другие аналогичные задачи), ниже обсуждаются численные модели с использованием естественных переменных, в основе которых представленные выше:

неявный метод расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления (2.56)-(2.60);

неявный метод с привлечением метода искусственной сжимаемости (2.12)-(2.14).

Протекание верхнемантийного вещества через куб, размеры которого $700 \times 700 \times 700$ км³, осуществлялось при следующих естественных для мантийной жидкости параметрах (в системе СИ):

$$\begin{aligned} d &= 700\,000 \text{ м}, \Delta T = 1800^\circ\text{C}, \chi = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \\ \alpha &= 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \rho = 3300 \text{ кг/м}^3, \\ g_z &= 10 \text{ м/с}^2, \eta_0 = 3 \cdot 10^{21} \text{ кг/м}\cdot\text{с}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Число Рэлея, при этом, $Ra = 2 \cdot 10^5$.

Вязкость зависит от давления и температуры следующим образом (2.16):

$$\eta(x, y, z, t) = e^{b(1-z) - aT(x, y, z, t)}.$$

Предложенная зависимость (2.16) изображена на графике (Рисунок 2.9) и привлекается в дальнейшем для всех задач диссертационной работы.

На граничной плоскости (yz) в точках, где $x = 0$, скорость равнялась: $u|_{in} = u_0 = 2$ см/год; $v|_{in} = w|_{in} = 0$. На выходной границе (yz), в точках, где $x = 700$ км, задавались условия «свободного» протекания [2, 117]:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{out} = - \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{out}; \quad \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{out} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{out} = 0.$$

На вертикальных границах ($y = 0$; $y = Y = 700$ км) для вектора скорости задавались условия проскальзывания (1.9), а на горизонтальных ($z = 0$, $z = Z = 700$ км) - условия прилипания.

Условия для обезразмеренной температуры (как и в задаче тестирования):

- на вертикальных гранях: $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0$,
- на подошве верхней мантии: $T = 1$,
- на дневной поверхности: $T = 0$.

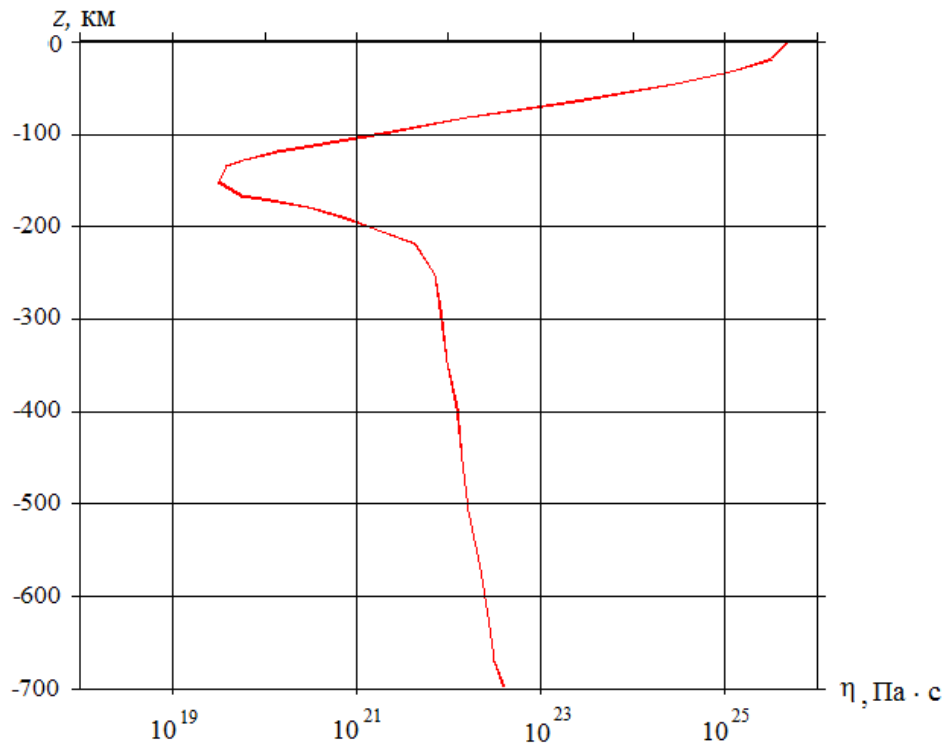


Рисунок 2.9 – Вязкость, вычисленная по (2.16) при $t = 0$. На горизонтальной оси – величина вязкости в Па·сек, на вертикальной – глубина в километрах

Профиль горизонтальной компоненты скорости u на выходной границе через $t = 50 \cdot \Delta t$ представлен на рисунке (Рисунок 2.9).

Вычисления проводились на сетке $(49 \times 49 \times 49)$ с шагом по времени $\Delta t = 1.0$ млн лет.

Движение мантийной жидкости через границу отражает Рисунок 2.10, на котором изображена горизонтальная компонента скорости. Из рисунка видно, что наибольшую скорость протекания на выходе приобретает жидкость, имеющая наименьшую вязкость, но суммарной расход через входную плоскость равен суммарному расходу мантийной жидкости через выходную границу. Профиль скорости повторяет, по сути, зависимость, представленную формулой (2.16) (сравните Рисунок 2.9 и Рисунок 2.10).

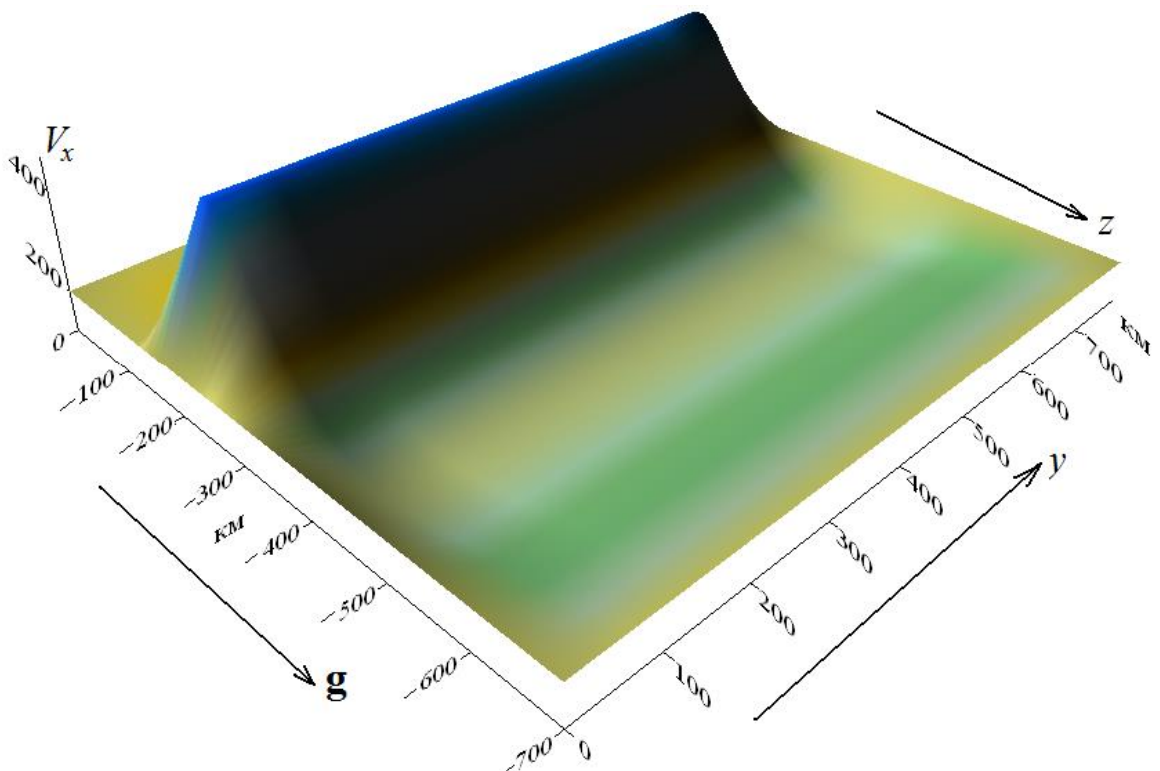


Рисунок 2.10 – Графическое представление горизонтальной компоненты скорости V_x в плоскости $x = X_{max} = 700$ км. По вертикали изображены безразмерные значения скорости

Можно сделать заключение: выбор зависимости (2.16) вполне отражает ситуацию, близкую к реальной для верхней мантии, а именно: между горизонтами 80-100 км и 250-300 км под континентальной литосферой присутствует менее вязкий астеносферный слой, а результат численного эксперимента подтверждает (и демонстрирует) правильность выбранной для расчётов мантийных течений модели. Результаты с применением двух подходов (неявный метод расщепления с коррекцией давления и метод искусственной сжимаемости) практически совпали.

Выводы

Основные результаты главы 2 сводятся к следующему.

1. Построены основанные на уравнениях Навье-Стокса в геодинамическом и Обербека-Буссинеска приближениях и неявных методах расщепления по пространственным переменным трёхмерные численные модели тепловой гравитационной конвекции в мантии Земли. Первая модель сформулирована в переменных «векторный потенциал-завихренность», вторая численная модель использует естественные переменные и неявный метод расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления. Третья численная модель основана на неявной реализации метода искусственной сжимаемости.

2. С применением методов последовательности сеток и экстраполяции по Ричардсону осуществлена модификация построенных численных моделей, основанных как на переменных «векторный потенциал-завихренность», так и в естественных переменных. Модификация позволила существенно повысить эффективность численных моделей.

3. Созданы комплексы программ решения задач конвективного теплообмена в верхней мантии Земли с применением разработанных алгоритмов.

4. Осуществлено детальное тестирование разработанных численных моделей и комплексов программ. Результаты численных экспериментов хорошо согласуются с результатами международного теста и демонстрируют эффективность построенных численных моделей.

Глава 3. Трёхмерное моделирование тепловой конвекции в верхней мантии под континентальной литосферой

В настоящей главе осуществлено применение численных моделей трёхмерной конвекции в верхней мантии Земли, основанных на естественных переменных и переменных «векторный потенциал - завихренность»; приводятся результаты численных экспериментов, выполненных на геолого-геофизических моделях с разными геометрическими характеристиками неоднородной литосферной плиты. Для выбора начального состояния во все модели привлекалась предварительно рассчитанная конвекция под равномерной кондуктивной литосферой.

Рассмотрены модели с квадратным (в плане) кратоном, с двумя кратонами, с кратоном в форме полосы, а также модели с ловушкой (принято называть утолщённые участки литосферы геологическим термином «кратон», а утонённые участки - термином «ловушка»).

Представленные варианты задач имеют «геологический» смысл и моделируют различные тектонические ситуации во внутриконтинентальных областях.

Построена математическая модель и проведены численные расчёты конвекции под литосферой центральной Азии, включающей в себя Сибирскую платформу, Западно-Сибирскую плиту, Тарим и часть Северо-Китайской плиты.

3.1 Постановка задачи

Параметры задачи для верхней мантии выбирались аналогично выбранным для задачи протекания, приведённой в п. 2.7 (формулы

(2.94)). Геометрические безразмерные параметры в параллелепипеде (1.7):

$$Z=1,0. \quad (3.1)$$

X и Y варьировались в широких пределах, в зависимости от конкретной задачи.

Для численного моделирования конвективных процессов в верхней мантии Земли начальное распределение температуры (2.15) и вычисление вязкости (2.16) осуществлялось согласно описанию *этапов А и Б* схемы алгоритма, предназначенного для комплексов программ (п. 2.2).

Глубина залегания верхнемантийной границы $Z_{upmantle}$ во всех задачах данного раздела выбиралась равной 700 км.

Возмущение температуры задавалось по формуле, аналогичной формуле (2.79) при $\zeta = 0,05$. Окончательно получаем температурное поле при $t = 0$:

$$\tilde{T}(x,y,z) = T_0(x,y,z,0) + \zeta (\cos(\pi x/X) + \cos(\pi y/Y)) \sin(\pi z). \quad (3.2)$$

Зависимость вязкости от температуры и глубины выражена формулой (2.16).

В расчётах настоящей главы число Рэлея полагалось равным $Ra = 3,0 \times 10^5$. Основные характеристики верхнемантийной среды (2.94), зависимость вязкости от температуры и глубины (2.16), граничные условия (1.30)-(1.35) описаны для общей модели в предыдущих главах.

Для верхней мантии Земли известна [82] зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея, которая выражается следующей формой: $Nu \approx 0,1 \cdot Ra^{1/4}$, $Ra < 5 \cdot 10^4$ ($Ra = 300\ 000$). Для всей мантии (см. результаты в 2.6.1) при $Ra = 30\ 000$ и $Ra = 20\ 000$ получена следующая оценка: $Nu \approx 0,114 \cdot Ra^{1/3}$ при $Ra < 5 \cdot 10^4$.

Большинство задач данной главы рассчитывались на равномерных сетках в параллелепипеде (1.7) при $X = Y = 6$ и $Z = 1$. Безразмерная единица соответствует мощности верхней мантии, т.е. величине $Z_{upmantle}$ равной 700 км. Граничные условия задавались в рамках задачи 1.3, п. 1.4 для векторного потенциала и векторной завихренности.

Для конвективного течения под равномерной литосферой был сделан расчёт на сетке $132 \times 132 \times 70$. Экстраполяция по Ричардсону, применённая для тестовых задач, была использована и в случае данных расчётов. На двух сетках ($66 \times 66 \times 35$) и ($132 \times 132 \times 70$) получено решение, соответствующее решению на сетке $264 \times 264 \times 140$. Для качественного сравнения (без указания значений изолиний) изображены горизонтальные сечения поля температуры на глубине $z = 460$ км на временном срезе $t = 1375$ млн лет (рисунки 3.1–3.3).

Сравнивая Рисунок 3.2 и Рисунок 3.3 можно сделать заключение о достаточной близости результатов расчётов на сетке более мелкой, чем $132 \times 132 \times 70$ и исходной, ввиду практически полного совпадения рисунков.

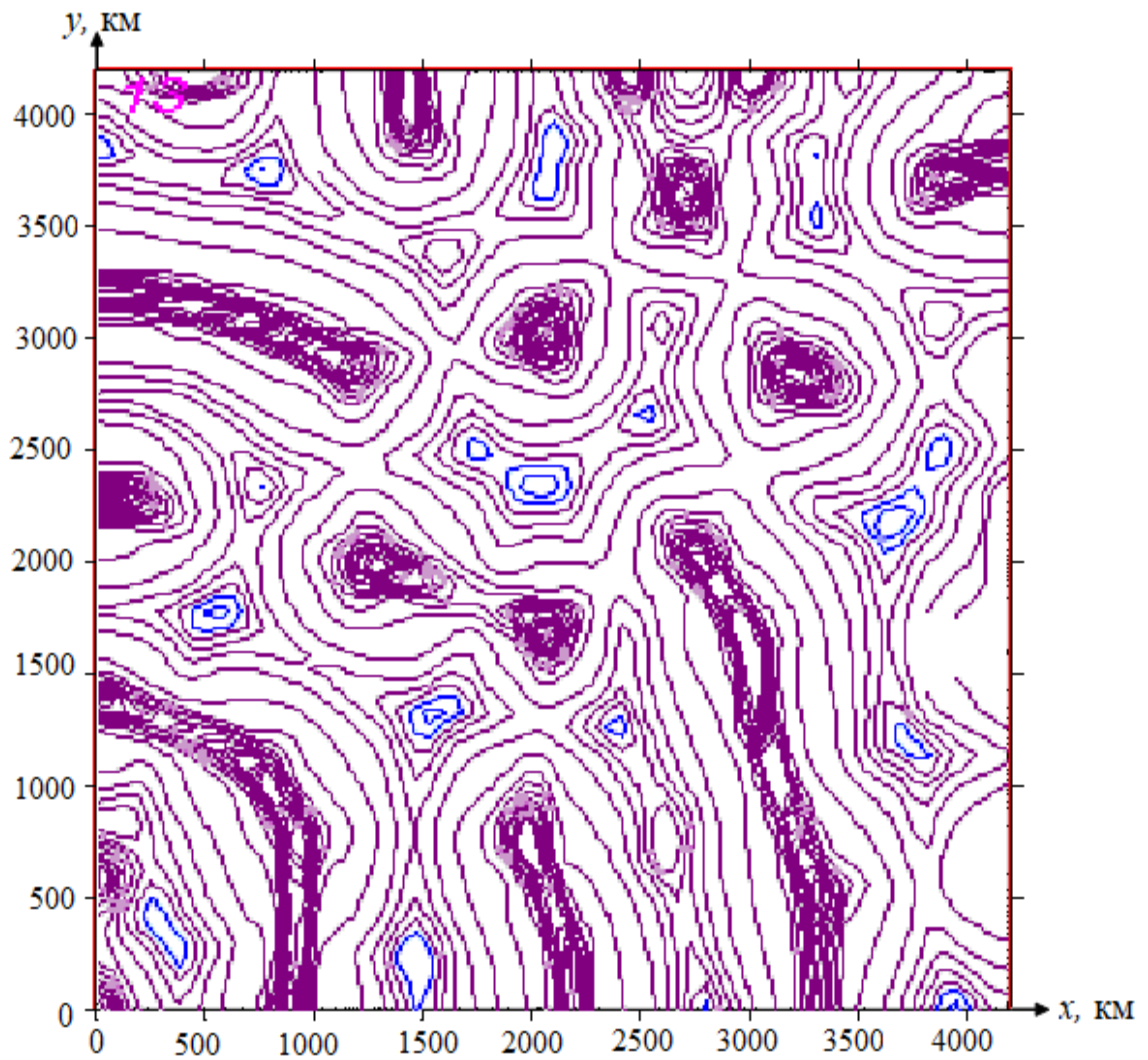


Рисунок 3.1 –Изолинии температурного поля на глубине $z = 460$ км: время $t = 1375$ млн лет; сетка $66 \times 66 \times 35$ ячеек

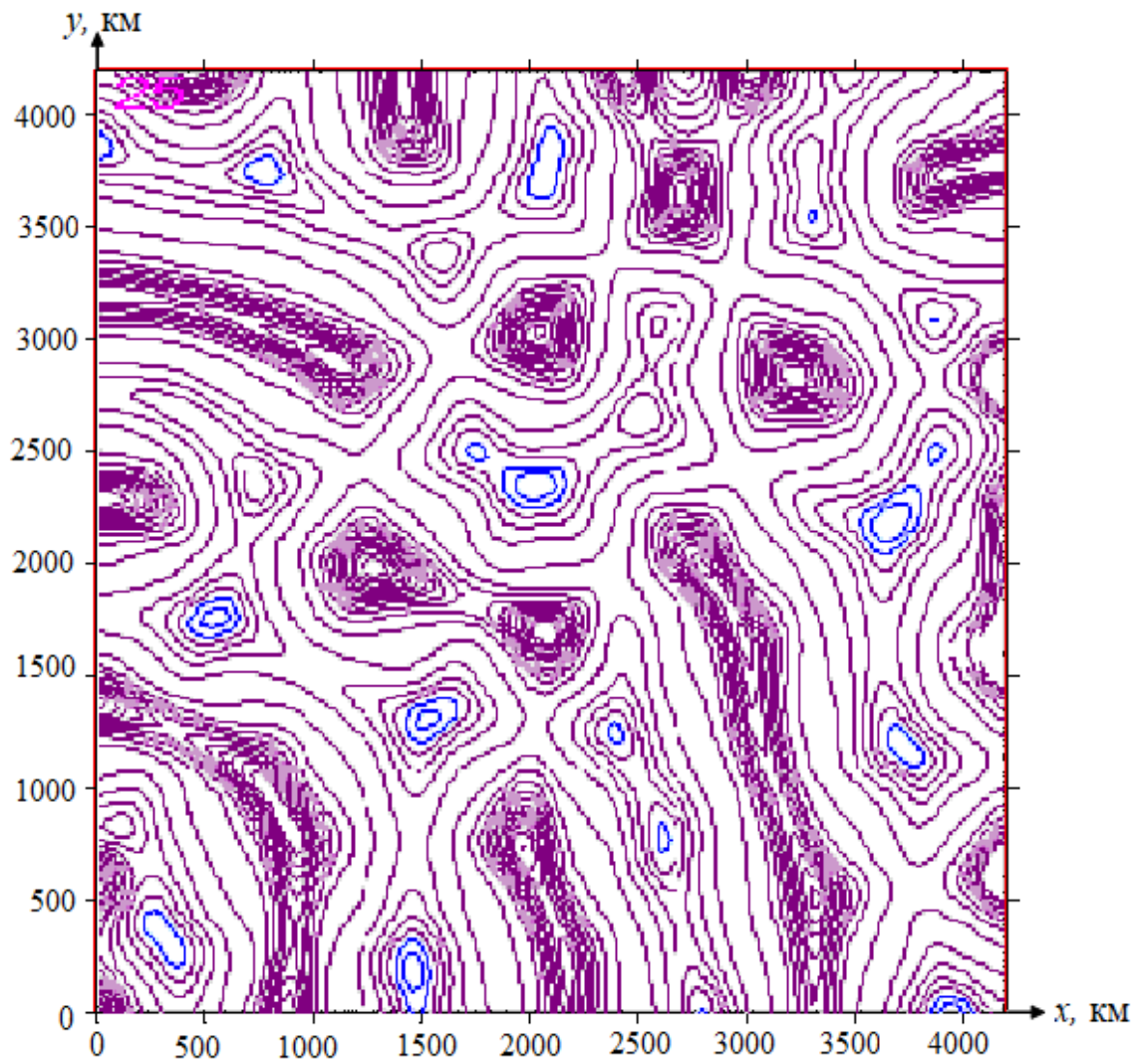


Рисунок 3.2 –То же, - сетка $132 \times 132 \times 70$ ячеек

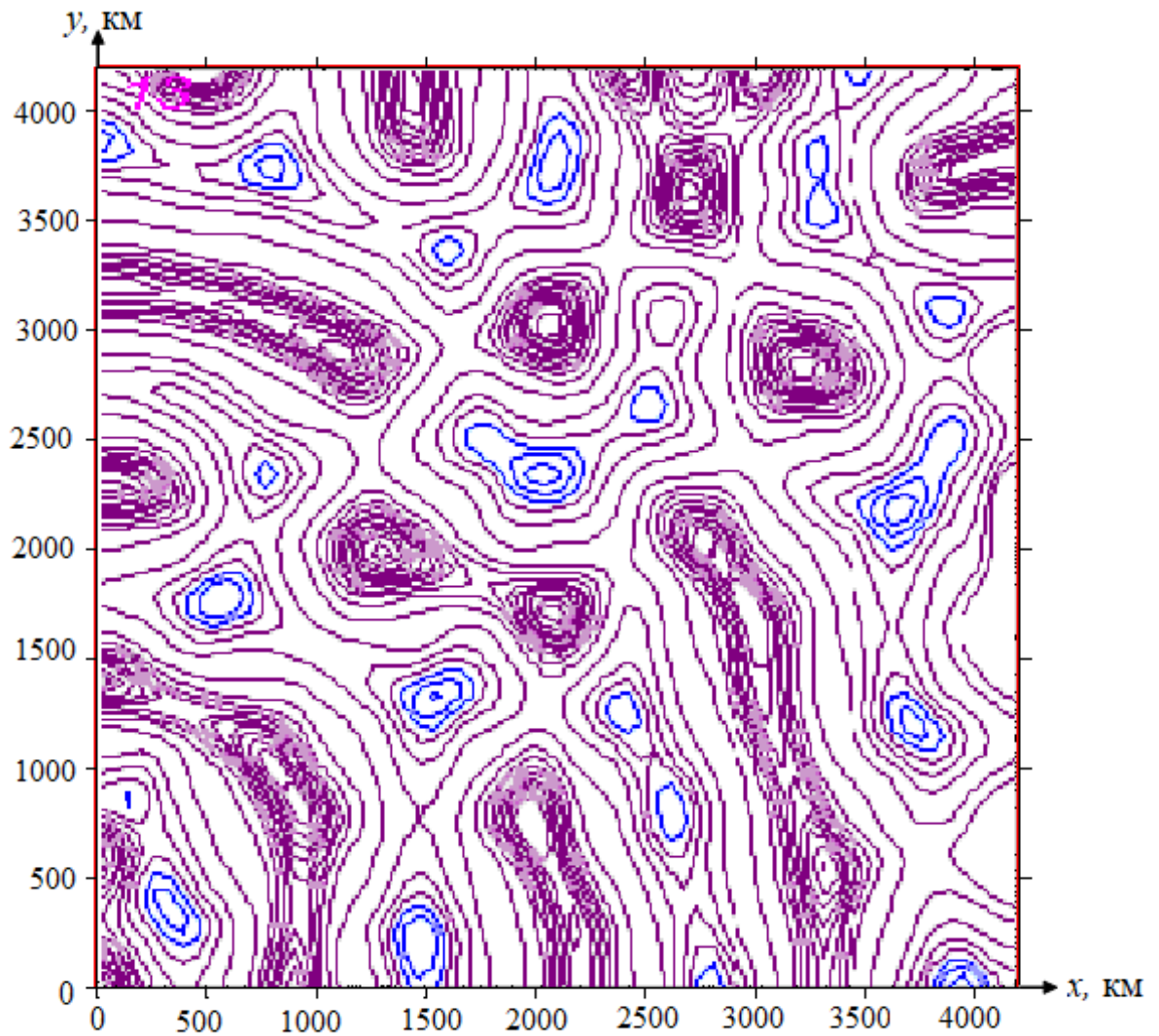


Рисунок 3.3 – Изолинии температурного поля на глубине $z = 460$ км: время $t = 1375$ млн лет; сечение получено в результате экстраполяции по Ричардсону на сетках $66 \times 66 \times 35$ и $132 \times 132 \times 70$ ячеек. Изолинии температуры прорисованы с шагом 100°C

3.2 Конвекция под литосферной плитой постоянной мощности

Как и в предыдущем пункте численные расчёты тепловой конвекции осуществлялось в параллелепипеде (1.7) с аспектным отношением $X/Z = Y/Z = 6$, которое обусловлено размерами исследуемых объектов, таких как Русская и Сибирская платформы (около 2000 км в поперечнике). Чтобы минимизировать влияние границ на возникающие течения около кратона и под ним, выбиралась расчётная область, примерно вдвое превышающая объект.

При моделировании область конвекции перекрывалась многокилометровым слоем равномерной мощности (120 км), что вполне соответствует литосфере континентов [36, 85]. Исходя из недавних геофизических исследований [183, 184, 188, 200], можно сделать заключение о том, что на континентах не существует достаточно больших территорий с постоянным значением мощности литосферного слоя, так что задача является модельной.

В результате двумерного моделирования конвекции [107] было установлено время выхода на субстационарный режим под кондуктивной литосферой постоянной толщины в 120 км, которое составило 6000 млн лет. Структура течения (Рисунок 3.4) получена в виде протяжённой ячейки с аспектным отношением равным 10.

В трёхмерном случае ввиду наличия больших степеней свободы конвекция идёт более интенсивно [170]. Как показывают проведённые в данной работе численные эксперименты, через 1800–2200 млн лет структура конвективных потоков в мантии практически устанавливается, т.е. количество ячеек не меняется. Это обстоятельство является свидетельством наступления субстационарного режима (субстационарный режим: меняются в некоторых пределах поперечные размеры конвективных ячеек, но не их количество).

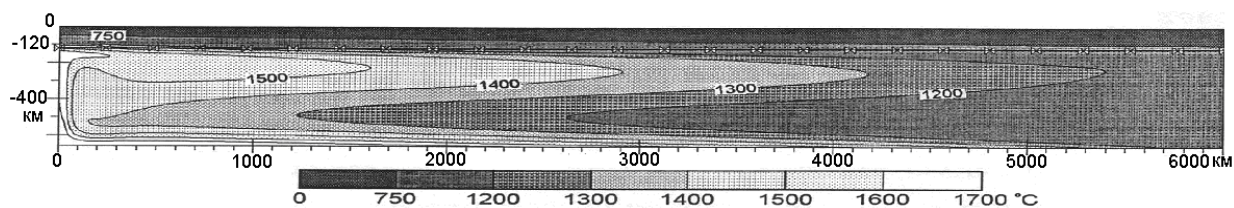


Рисунок 3.4 – Модель двумерной конвекции (изолинии температуры) в области $6000 \times 670 \text{ км}^2$, перекрытой кондуктивным литосферным слоем постоянной мощности в 120 км; $t = 6000$ млн лет. По горизонтали отложены значения в направлении x , по вертикали – значения в направлении z

Проведённый численный эксперимент в модели с постоянной по мощности кондуктивной литосферой показал, что введение трёхмерности при моделировании радикально меняет не только характер конвекции, но и эволюционные характеристики, сокращая, при этом, время выхода исследуемой системы на устойчивый режим более чем вдвое.

Расчёты производились с шагами по времени $\Delta t = 2,5$ млн лет; $\Delta t = 5,0$ млн лет. Выход на близкое к стационарному решение в первом случае составил 1000 шагов по времени, во втором - 500. Таким образом, показана независимость стационарного решения от шага по времени. Кроме того, применялись различные методы аппроксимации дифференциальных уравнений при интегрировании уравнений Пуассона (1.17)-(1.19), (1.21)-(1.23). В основном применялся метод стабилизирующей поправки со вторым порядком аппроксимации по пространственным переменным и с первым порядком по времени. Также был испытан метод предиктор-корректор и метод стабилизирующей поправки со вторым порядком аппроксимации как по пространственным переменным, так и по времени [130]. В случае решения уравнения теплопереноса проверялись различные аппроксимации конвективных слагаемых [79], входящие в это

уравнение. Времена выхода на стационарное решение практически совпали.

Эволюция конвекции под континентальной плитой постоянной толщины

Рисунок 3.5 иллюстрирует расположение плоскостей ($z = const.$), представляющих распределение температурного поля на различных глубинах. Структура течения, полученная из начального распределения температуры за время порядка 250-300 млн лет, представлена рисунками (Рисунок 3.5 – Рисунок 3.8). Формально, время $t = 0$, указанное на рисунках раздела, соответствует 300 млн лет. Мощность кондуктивного слоя в расчётах выбиралась равной 120-ти километров.

Непосредственно под литосферной плитой ($z = 160$ км) конвективные нисходящие потоки образуют ячейки, в центре которых находится восходящий поток горячего мантийного вещества. Температура на этой глубине в восходящем течении может достигать значения в 1500°C (Рисунок 3.6,а), и не более 1200°C в нисходящем. Количество ячеек при эволюции структуры течения постепенно уменьшается.

При горизонтальных размерах ячеек в 500-800 км вертикальный размер конвектирующей области равен 575 км. До глубины 220-260 км (Рисунок 3.6,б) структура конвективных течений практически не меняется. Изменения становятся значительными только на глубине 380 км. (Рисунок 3.6,с). На глубине 560 км (Рисунок 3.6,д) ячеистая конфигурация полностью разрушена.

В отличие от двумерного случая [85-89, 105-109], в трёхмерном не образуются восходящие потоки в виде «стен» большой протяжённости. Вместо этого внутри каждой ячейки формируется восходящее течение, имеющее форму гриба.

Вертикальные разрезы температурного поля (Рисунок 3.8) и их пространственное расположение (Рисунок 3.7) для времени, выбранном за начальное и для времени 2500 млн лет (Рисунок 3.10) показывают, что как и в случае двумерного моделирования [108, 109], количество ячеек с течением времени сокращается.

Если сопоставить структуры течений при $t = 0$ (Рисунок 3.5) и $t = 2500$ млн лет (Рисунок 3.9) можно заметить двухкратное уменьшение числа конвективных ячеек в расчётной области. При дальнейших расчётах вплоть до $t = 5000$ млн лет (Рисунок 3.11 – Рисунок 3.14), течение в общих чертах не меняется и сохраняет и свою структуру и количество ячеек в исследуемом объёме.

Исходя из представленных результатов и иллюстраций к ним можно сделать вывод о том, что добавление третьего измерения при решении задачи конвекции в верхней мантии Земли кардинально меняет и структуру течений, и эволюционные характеристики конвекции. Время выхода исследуемой системы на устойчивый стационарный режим по сравнению с $2D$ -моделями сократилось более чем вдвое. Время выхода на стационар составляет теперь величину порядка 2500 млн лет. Таким образом, в значительной степени ставится под сомнение достоверность в оценке временных интервалов изучаемых процессов в $2D$ -постановке.

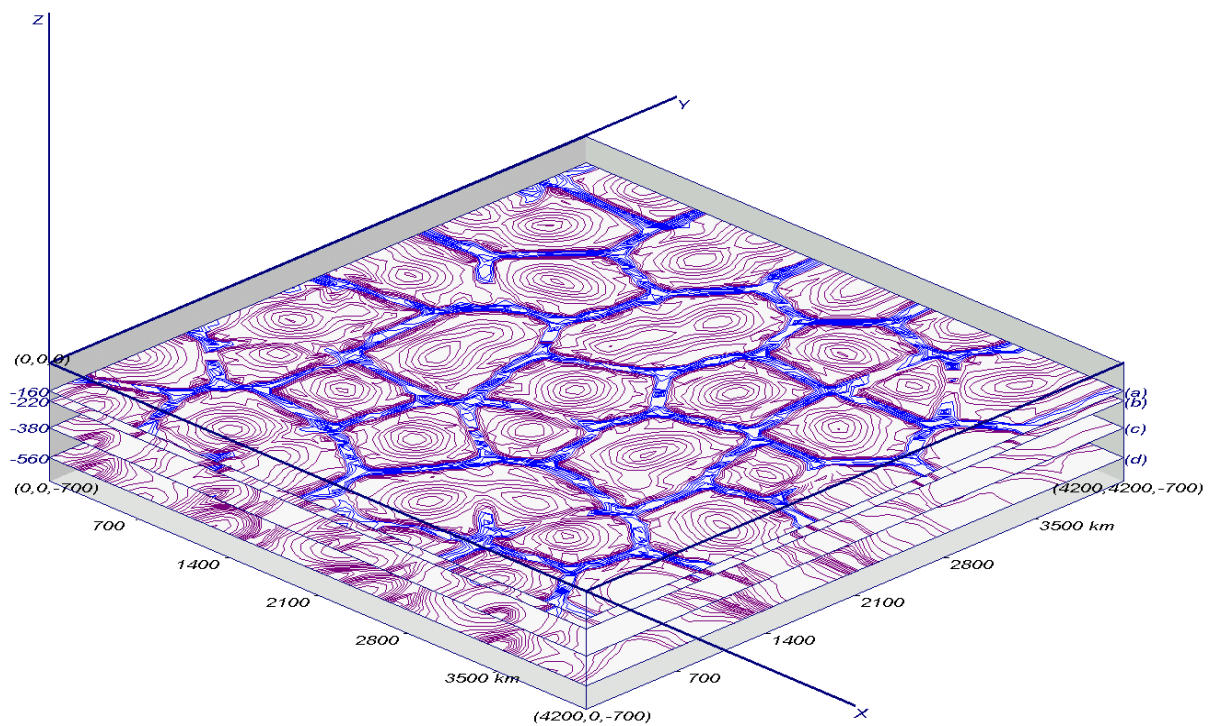


Рисунок 3.5 – Расположение горизонтальных слоёв температурного поля под равномерной литосферой ($t = 0$ млн лет). Горизонтальные сечения на глубинах: (a): $z = 160$ км, (b): $z = 220$ км, (c): $z = 380$ км и (d): $z = 560$ км

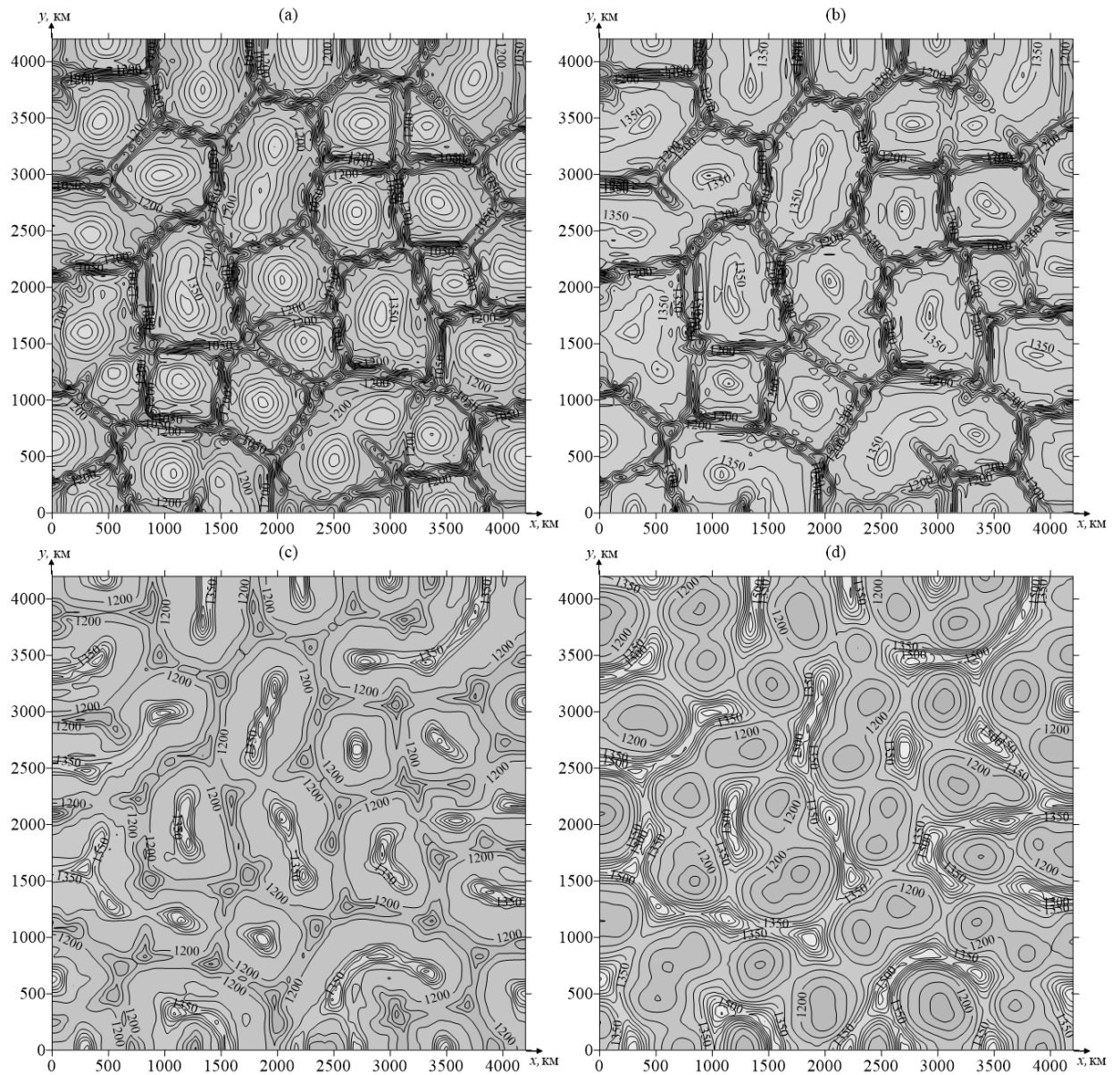


Рисунок 3.6 – Температурные поля при $t = 0$ млн лет; горизонтальные сечения: (а): $z = 160$ км, (б): $z = 220$ км, (с): $z = 380$ км и (д): $z = 560$ км

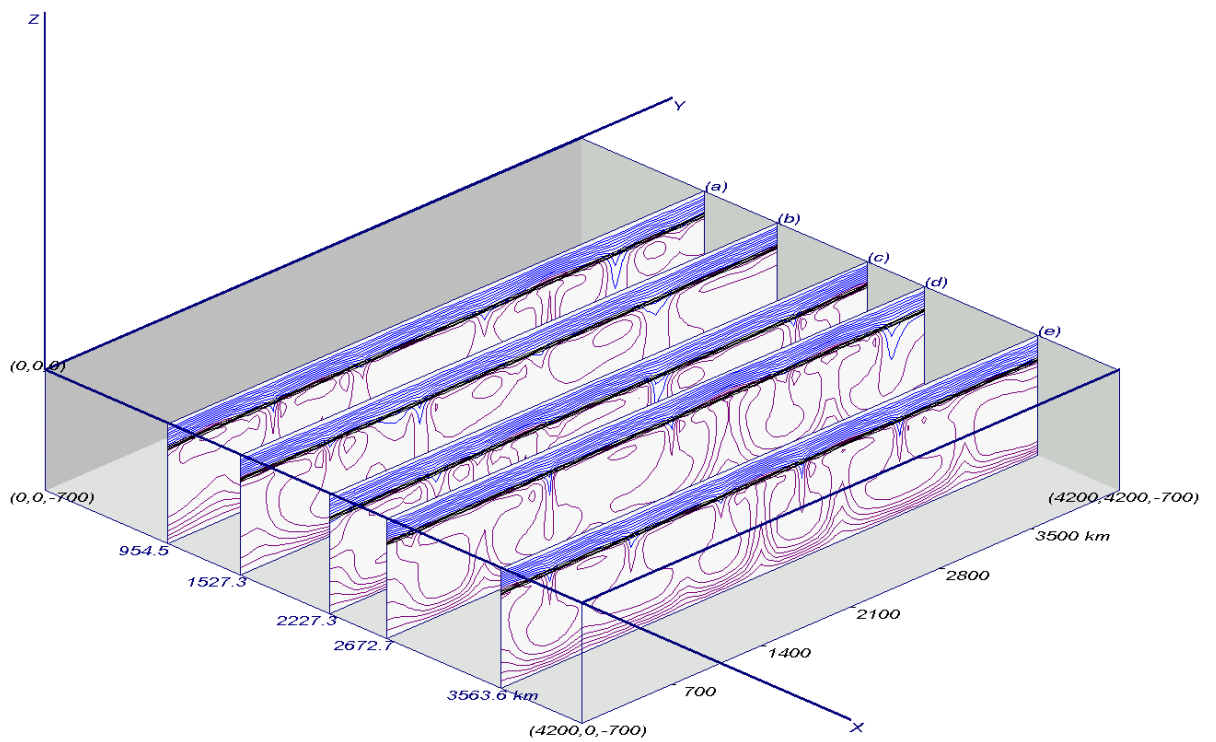


Рисунок 3.7 – Пространственное расположение вертикальных сечений температурного поля при $t = 0$ млн лет. Плоскости: (a): $x = 954,5$ км; (b): $x = 1527,3$ км; (c): $x = 2227,3$ км; (d): $x = 2672,7$ км; (e): $x = 3563,6$ км

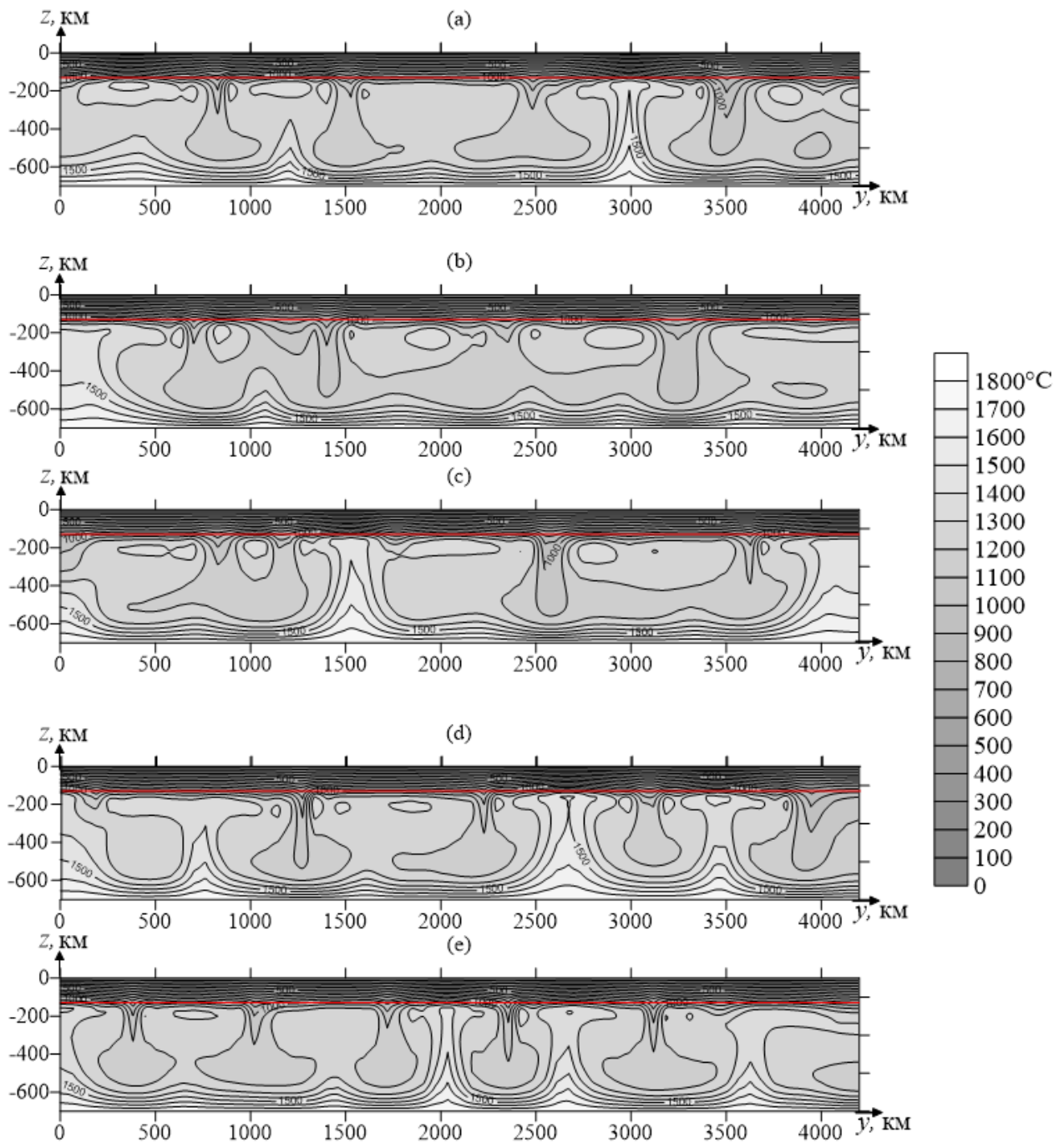


Рисунок 3.8 – Вертикальные сечения поля температуры под ровной литосферой при $t = 0$ млн лет. (a): $x = 954,5$ км; (b): $x = 1\,527,3$ км; (c): $x = 2\,227,3$ км; (d): $x = 2\,672,7$ км; (e): $x = 3\,563,6$ км

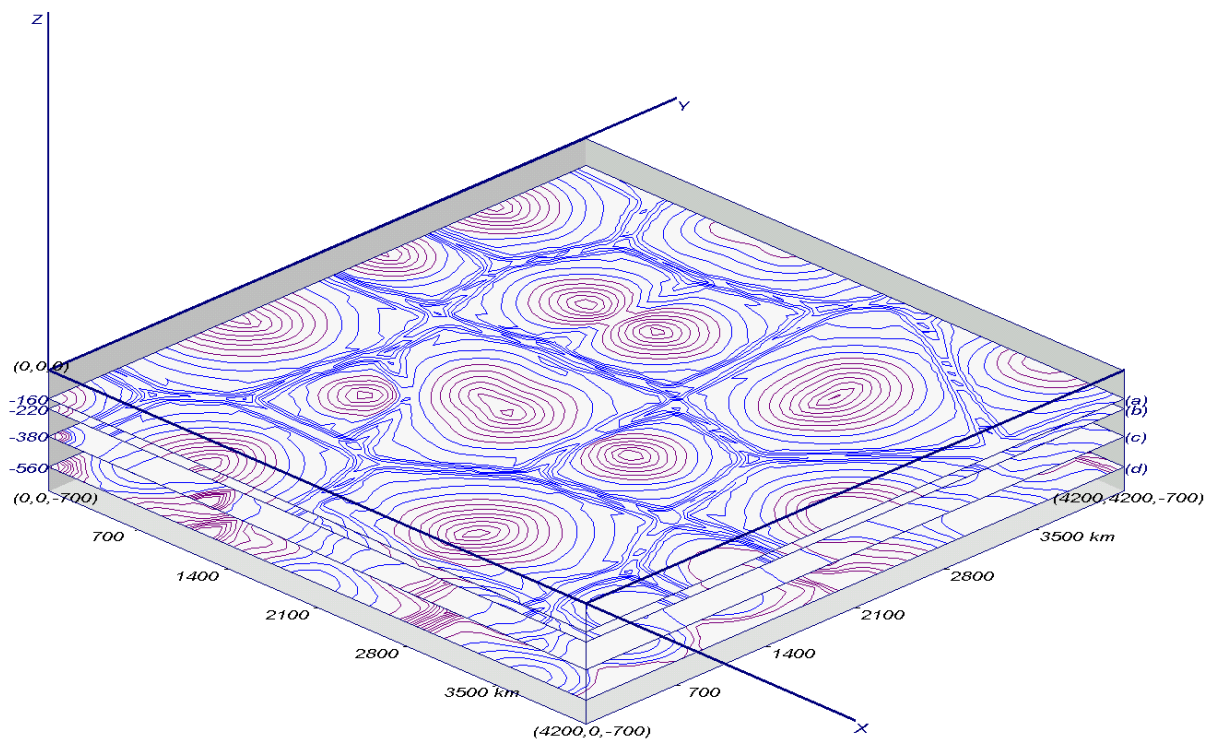


Рисунок 3.9 – Горизонтальные сечения поля температуры в модели конвекции под равномерной литосферой при $t = 2500$ млн лет. Сечения в плоскостях, параллельных плоскости (xy) на глубинах: (a): $z = 160$ км, (b): $z = 220$, (c): $z = 380$ км и (d): $z = 560$ км

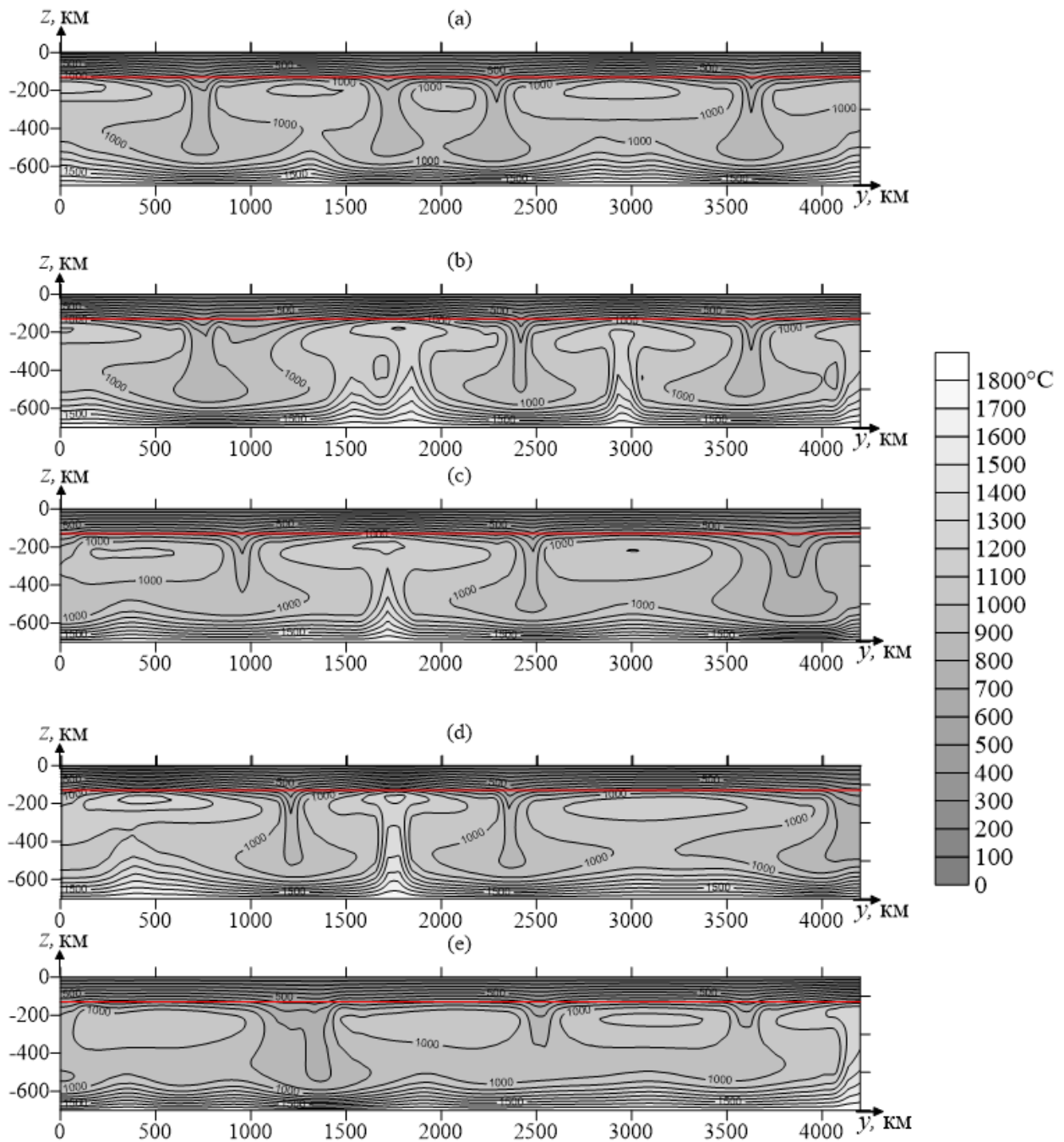


Рисунок 3.10 – Вертикальные сечения поля температуры под литосферой постоянной мощности при $t = 2500$ млн лет. (a): $x = 954,5$ км; (b): $x = 1527,3$ км; (c): $x = 2227,3$ км; (d): $x = 2672,7$ км; (e): $x = 3563,6$ км

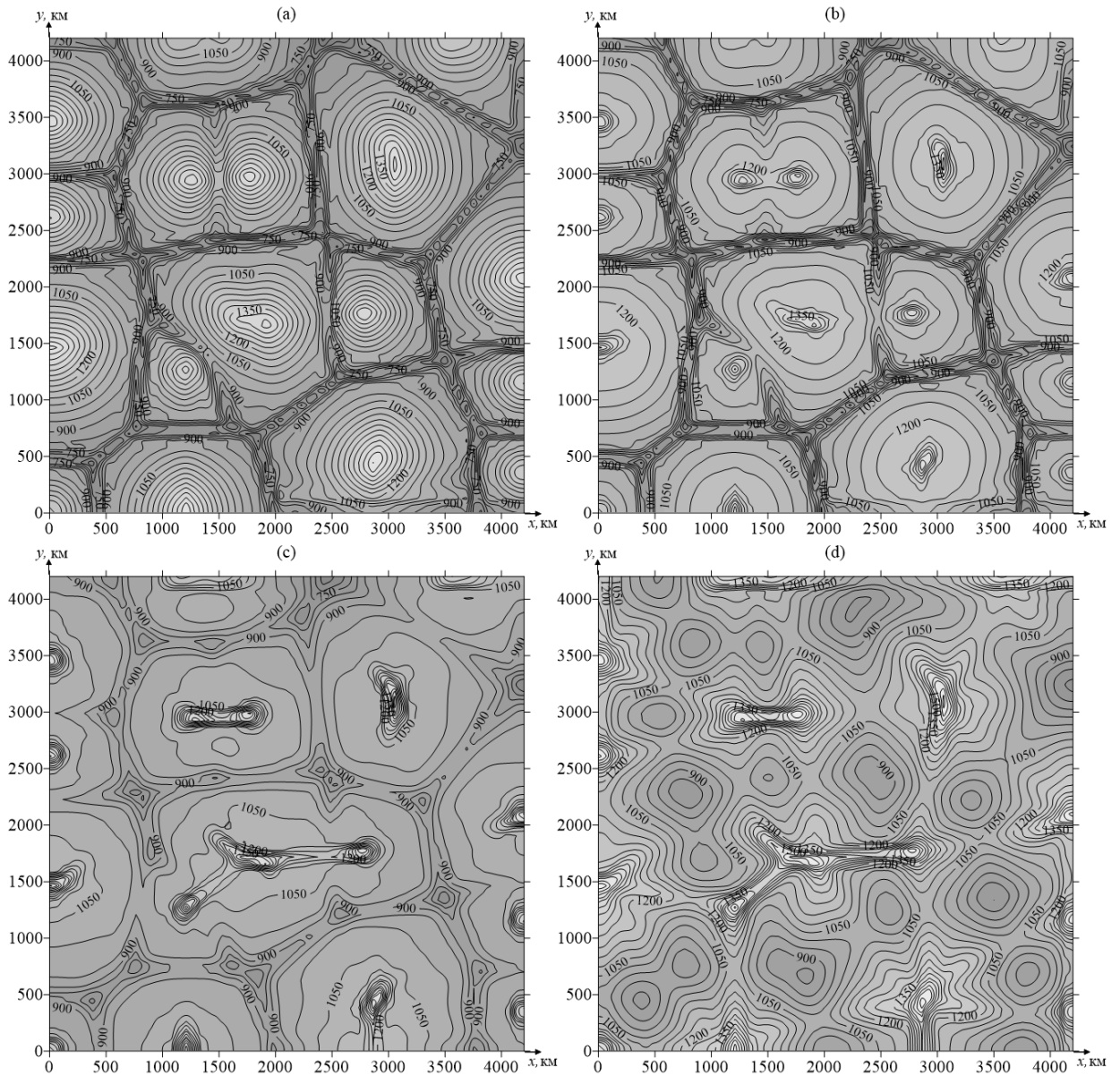


Рисунок 3.11 – Горизонтальные сечения поля температуры в плоскостях, параллельных плоскости (xy) на глубинах 160-(а), 220-(б), 380-(с) и 560 км-(д) в модели конвекции под ровной литосферой при $t = 2500$ млн лет

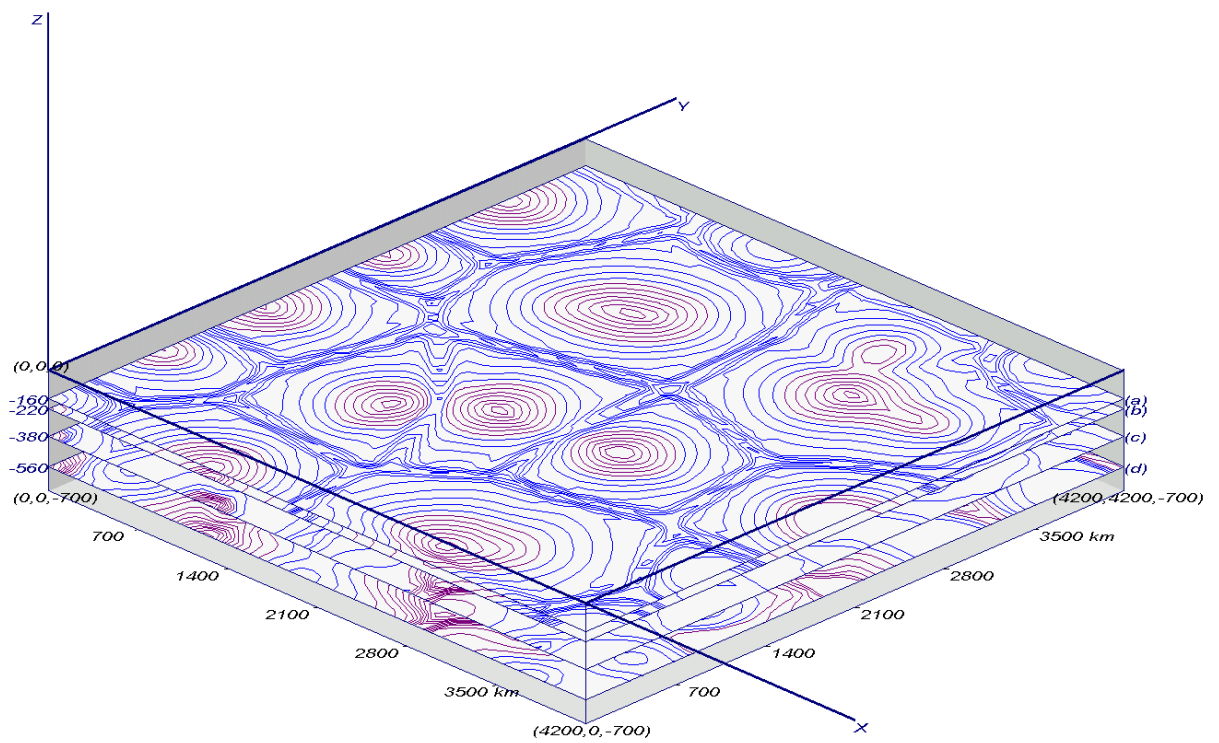


Рисунок 3.12 – Расположение горизонтальных слоёв поля температуры в модели конвекции под ровной литосферой при $t = 5000$ млн лет. Сечения на глубинах: (а): $z = 160$ км, (b): $z = 220$ км, (с): $z = 380$ км и (d): $z = 560$ км

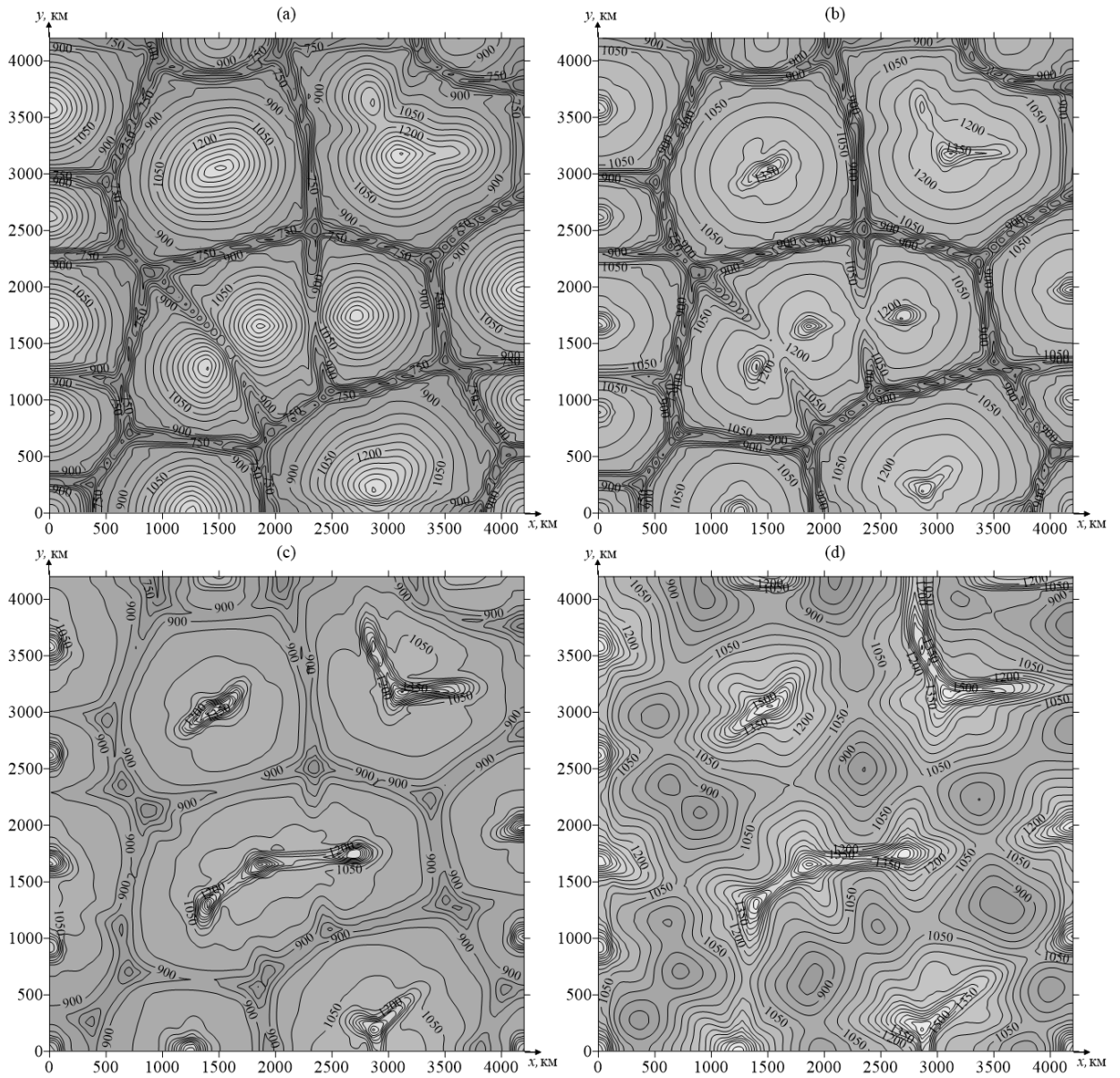


Рисунок 3.13 – Горизонтальные (xy)-сечения поля температуры на глубинах (а): $z = 160$ км, (б): $z = 220$ км, (с): $z = 380$ км и (д): $z = 560$ км в модели конвекции под ровной литосферой при $t = 5000$ млн лет

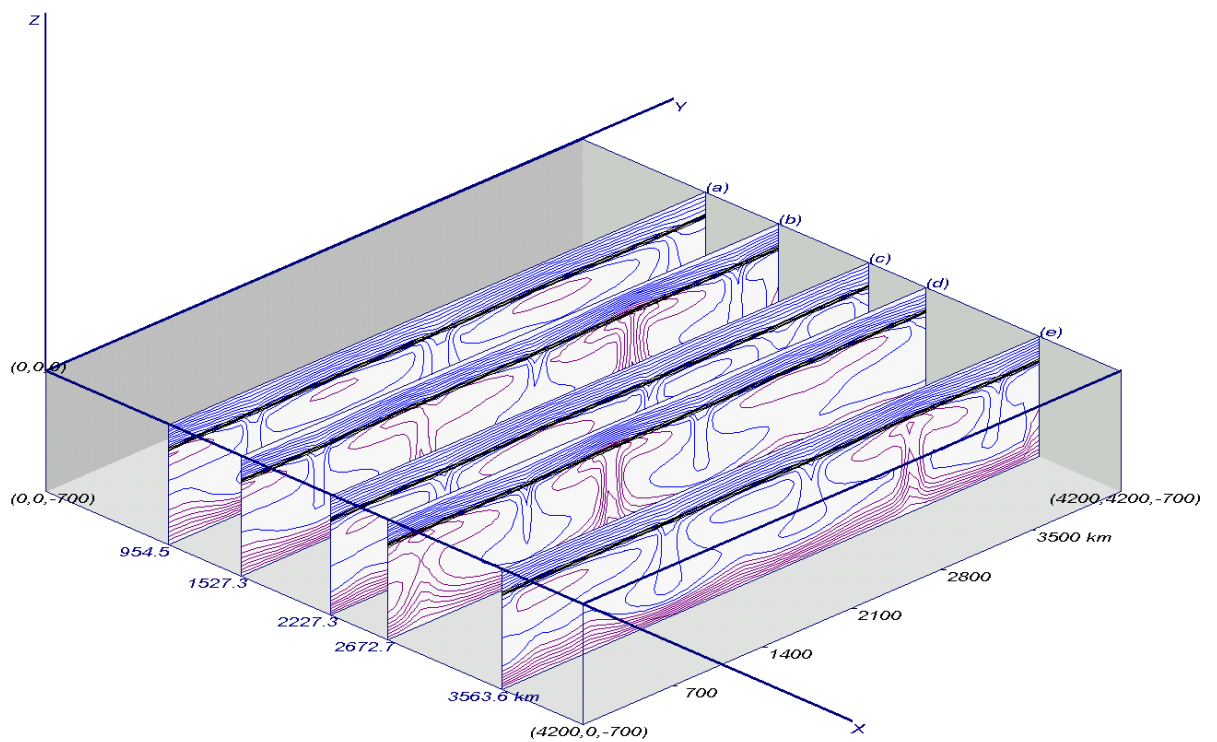


Рисунок 3.14 – Расположение вертикальных сечений поля температуры, параллельных плоскости (yz) в модели конвекции под ровной литосферой при $t = 5000$ млн лет; (a): $x = 954,5$ км; (b): $x = 1527,3$ км; (c): $x = 2227,3$ км; (d): $x = 2672,7$ км; (e): $x = 3563,6$ км

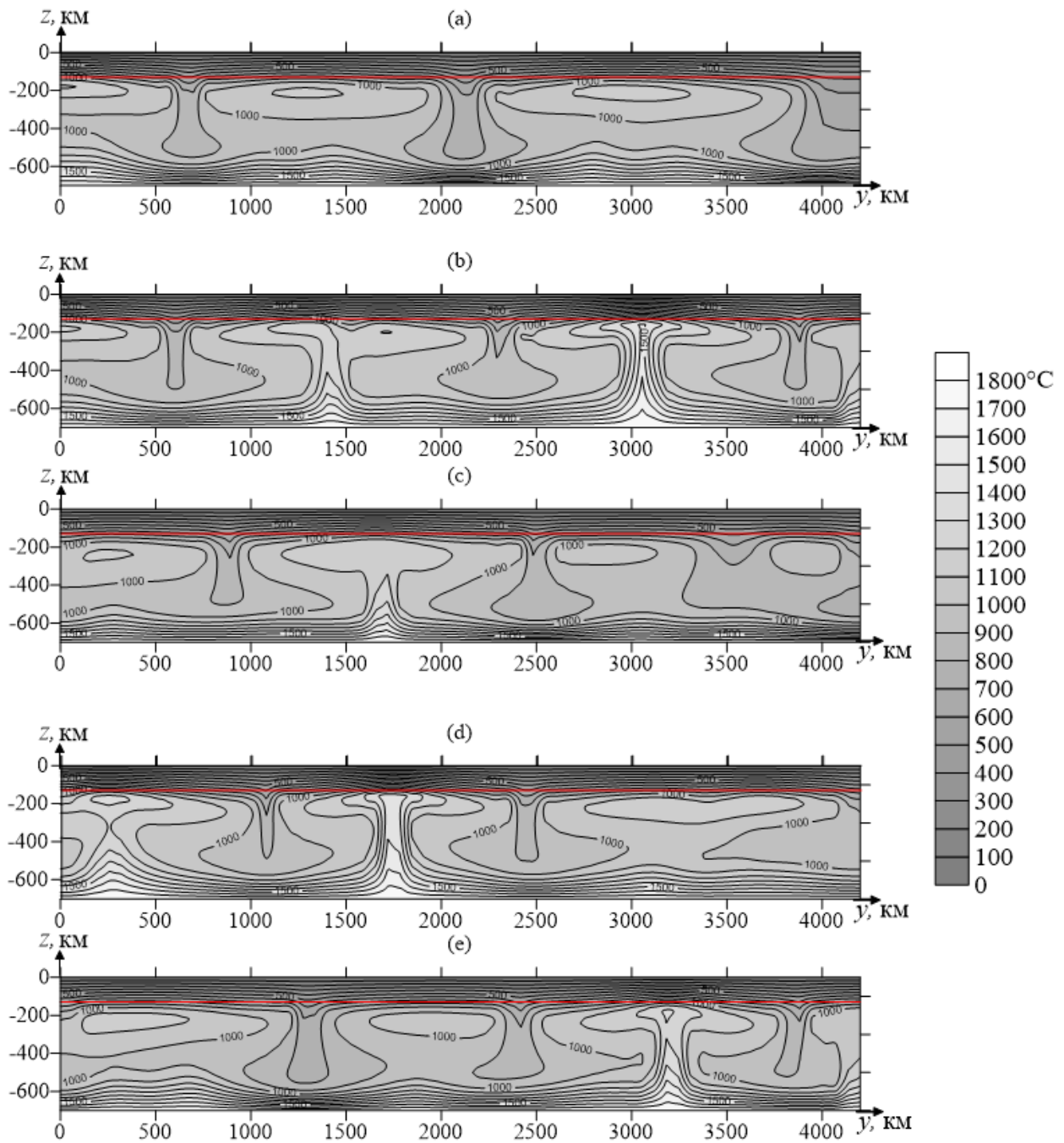


Рисунок 3.15 – Сечения поля температуры в плоскостях, параллельных плоскости (yz) в модели конвекции под ровной литосферой при $t = 5000$ млн лет; (a): $x = 954,5$ км; (b): $x = 1527,3$ км; (c): $x = 2227,3$ км; (d): $x = 2672,7$ км; (e): $x = 3563,6$ км

3.3 Трёхмерная конвекция под континентальной литосферой с протяжённым кратоном

Континентальная литосфера, как правило, довольно неоднородна по своим геометрическим характеристикам. Составляющими элементами континентов являются древние кратоны, платформы разного возраста, складчатые пояса. Мощность этих образований различна, но находится в известных пределах: от 40 км до 350 км. Все эти элементы погружены в астеносферный слой, имеющий менее вязкую, по сравнению с остальной мантией, вязкость.

Текущий раздел посвящён изучению влияния протяжённого кратона в виде полосы шириной в 1000 км и толщиной в 200 км, простирающийся через всю расчётную область под некоторым углом к координатным осям в плоскости (xy) (Рисунок 3.16 показывает начальное распределение температуры при $t = 0$).

Случай интересен тем, что позволяет понять, насколько двумерное моделирование процессов конвективного теплопереноса в мантии отвечает реальной трёхмерной ситуации в недрах.

Заметим, что двухмерное численное моделирование было основным инструментом изучения конвективных процессов в мантии Земли в предыдущие годы [86, 154, 171]. Основным оправданием использования двумерного моделирования можно считать: первое – ограниченность вычислительных возможностей того времени; второе – факт существования на планете геологических структур, строение которых вдоль одной из координатных осей не меняется на протяжении десятков сотен и даже многих тысяч километров. Протяжённые срединно-океанические хребты и зоны субдукции могут служить иллюстрацией таких структур.

Постоянство строения вдоль одной из осей является характерной особенностью данных структур и, как уже отмечалось, служит

оправданием для использования двумерного математического приближения.

Основной задачей нашей работы является изучение конвективных течений под обширными областями континентов, такими, например, как Евразия и Африка.

На всех рисунках данного раздела мощность кондуктивного слоя составляет 120 километров с утолщением в виде полосы двухсоткилометровой толщины.

При решении двумерных задач конвекции срединно-океанические хребты задавались в виде постоянного поля горизонтальной компоненты скорости на верхней границе расчётной области, направленной от оси хребта в противоположные стороны, а для субдукционных зон скорости имели направление к оси поглощения литосферой плиты. При этом делалось допущение неизменности полей (температуры, вектора скорости и др.) вдоль несуществующей оси.

В результате двумерного моделирования под кратоном получены результаты, показывающие возникновение устойчивого конвективного потока не позднее 200 млн лет. Этот результат вполне соответствует наблюдаемым геофизическим характеристикам [108, 114].

Построенная автором трёхмерная модель с полосой утолщённой литосферы достаточно хорошо соответствует поставленным выше условиям.

На рисунках раздела (Рисунок 3.17 – Рисунок 3.25) представлена структура стационарного течения: $t = 2500$ млн лет. При $z = 560$ км под модельным кратоном наблюдается почти непрерывный восходящий поток, который выстраивается под центральной частью и между линиями бортов кратона. При постановке задачи, предполагалось, что потоки мантийного вещества будут течь вдоль бортов, а не под самим кратоном. Впрочем, на меньших глубинах течения в мантии

приобретают совершенно трёхмерный характер. Это достаточно хорошо иллюстрируется рисунками (Рисунок 3.24,в и Рисунок 3.25,в), где показана структура конвективных течений вдоль кратона.

Здесь можно выделить два сформировавшихся восходящих потока (при $y \sim 1800$ км и $y \sim 2800$ км) и нисходящее течение между ними. Ещё один нисходящий поток под кратоном – при $y \sim 500$ км. Анализ конвективных течений, полученных в результате расчётов позволяет утверждать, что под кратоном вещество верхней мантии в целом горячее, чем под более тонкой литосферой (Рисунок 3.18 - Рисунок 3.25).

Таким образом, выполненное численное моделирование показывает, что при числах Рэлея $\sim 10^5$ и выше, что соответствует условиям в верхней мантии Земли, конвективные течения имеют существенно трёхмерную структуру. В связи с этим применение двухмерного моделирования для изучения и понимания мантийной динамики неприемлемо даже для протяжённых структур.

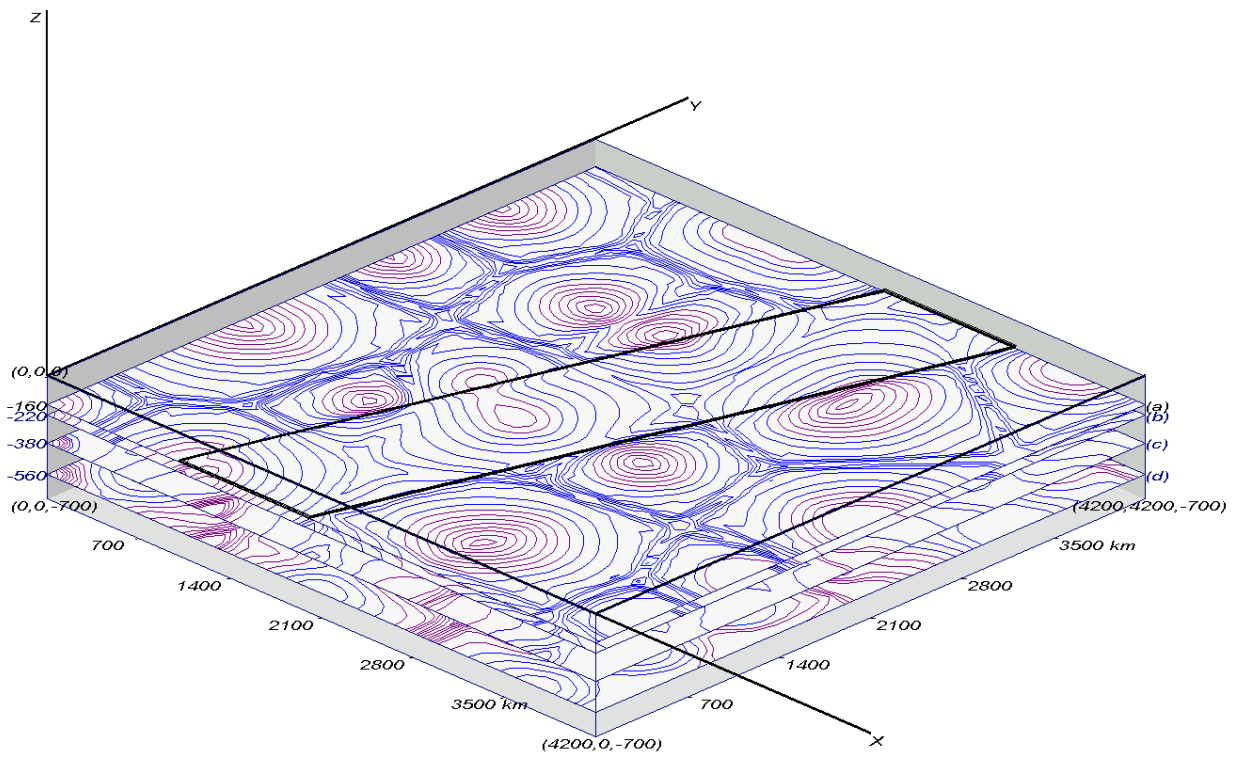


Рисунок 3.16 – Расположение горизонтальных слоёв температурного поля под литосферой с протяжённым кратоном при $t = 0$ млн лет; (xy) -сечения на глубинах: (a): $z = 160$ км, (b): $z = 220$ км, (c): $z = 380$ км и (d): $z = 560$ км

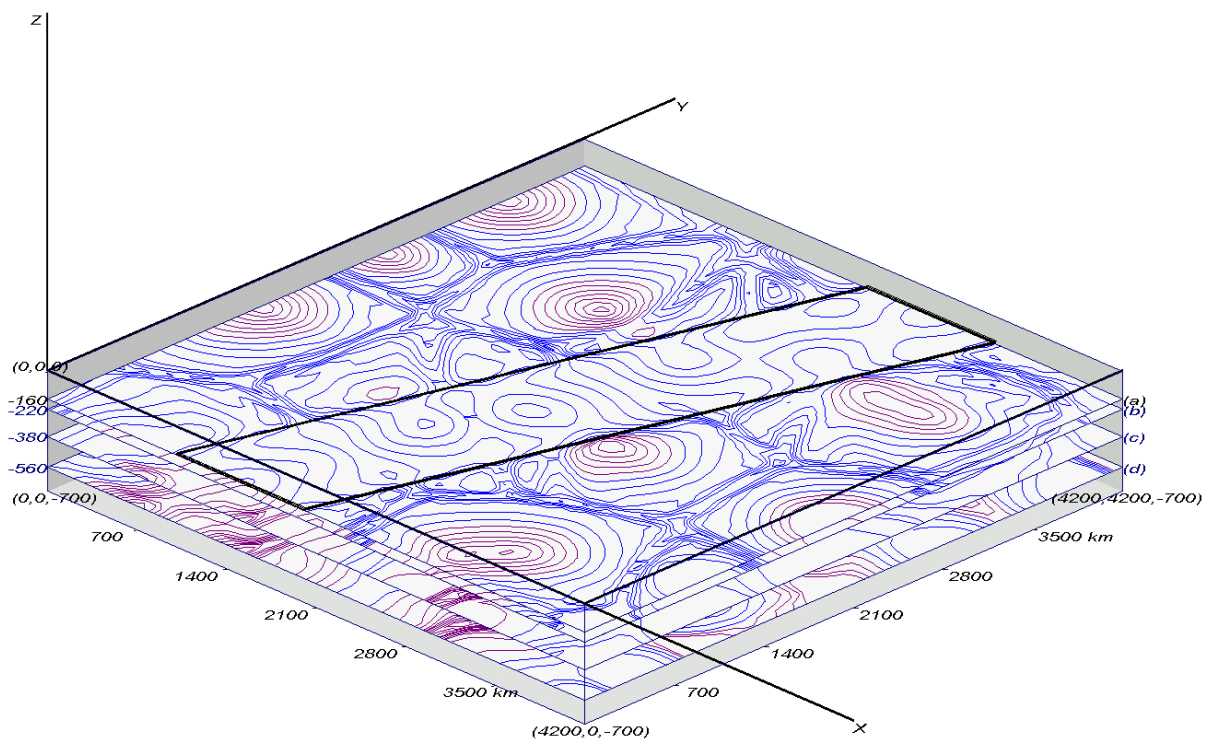


Рисунок 3.17 – Горизонтальные сечения поля температуры в модели конвекции под литосферой при $t = 2500$ млн лет. (xy) -сечения на глубинах: (a): $z = 160$ км, (b): $z = 220$ км, (c): $z = 380$ км и (d): $z = 560$ км

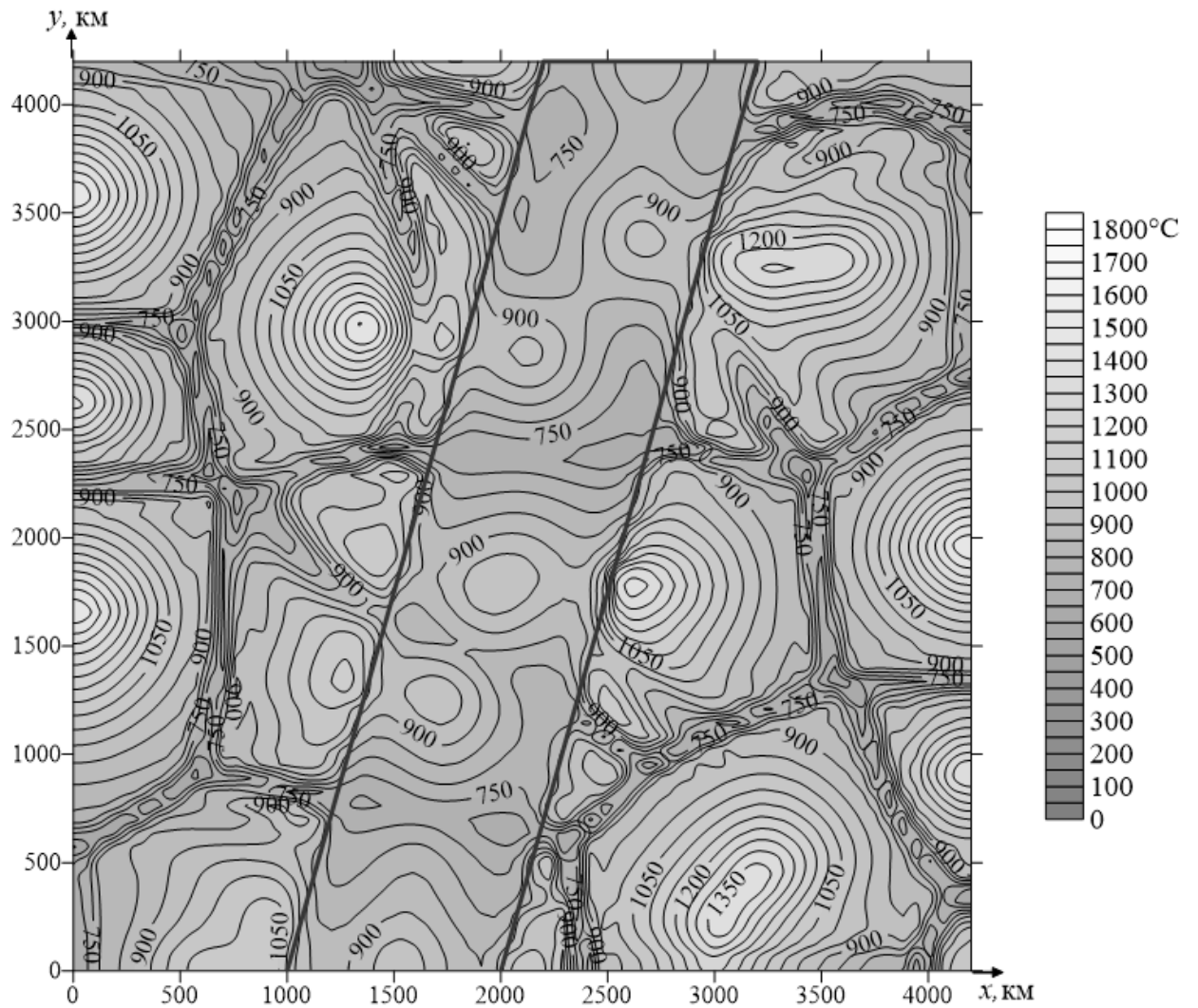


Рисунок 3.18 – Горизонтальное сечение поля температуры при $z = 160$ км в модели конвекции под литосферой с протяжённым кратоном при $t = 2500$ млн лет

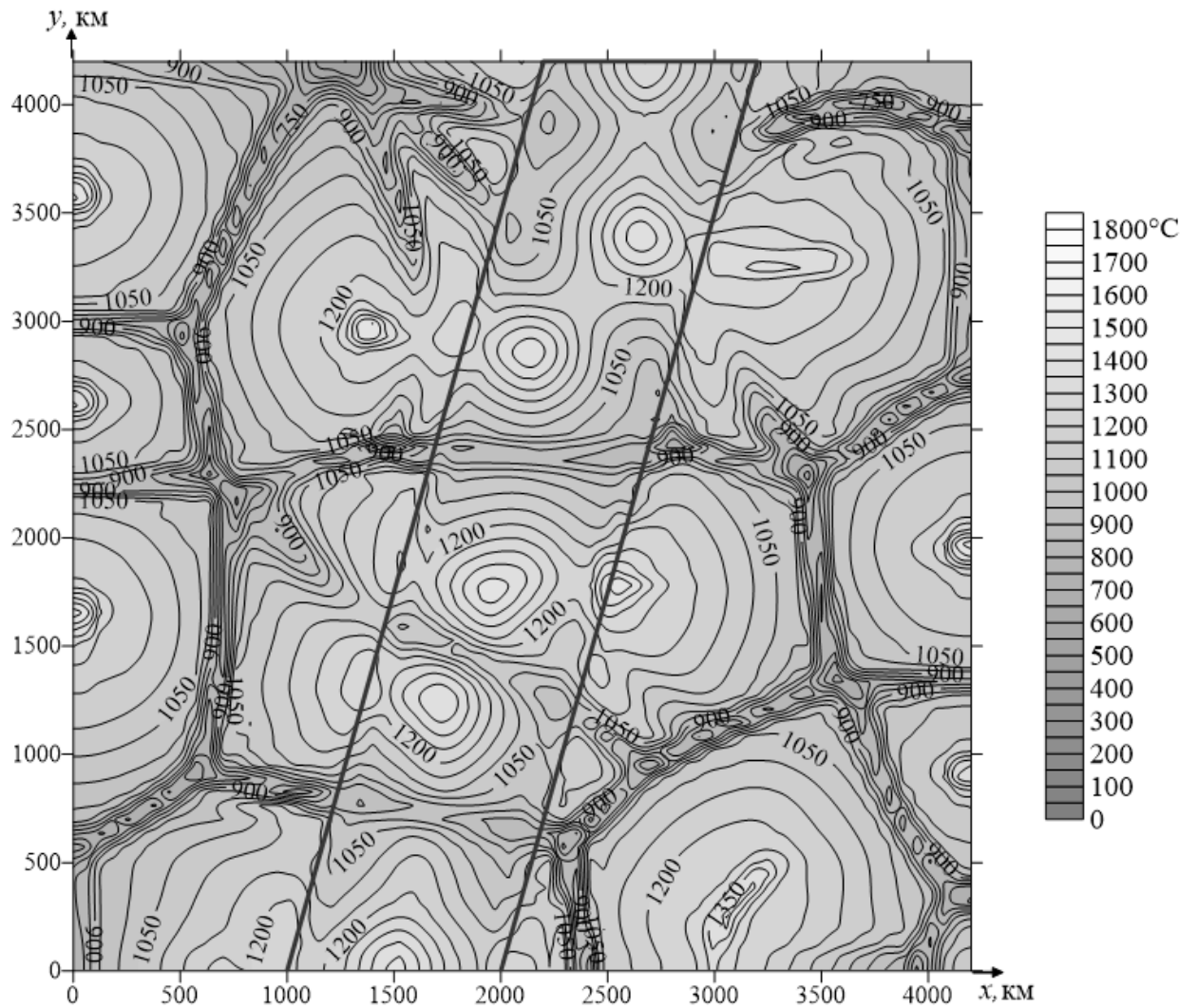


Рисунок 3.19 – Горизонтальное сечение поля температуры при $z = 220$ км в модели конвекции под литосферой с протяжённым кратоном при $t = 2500$ млн лет

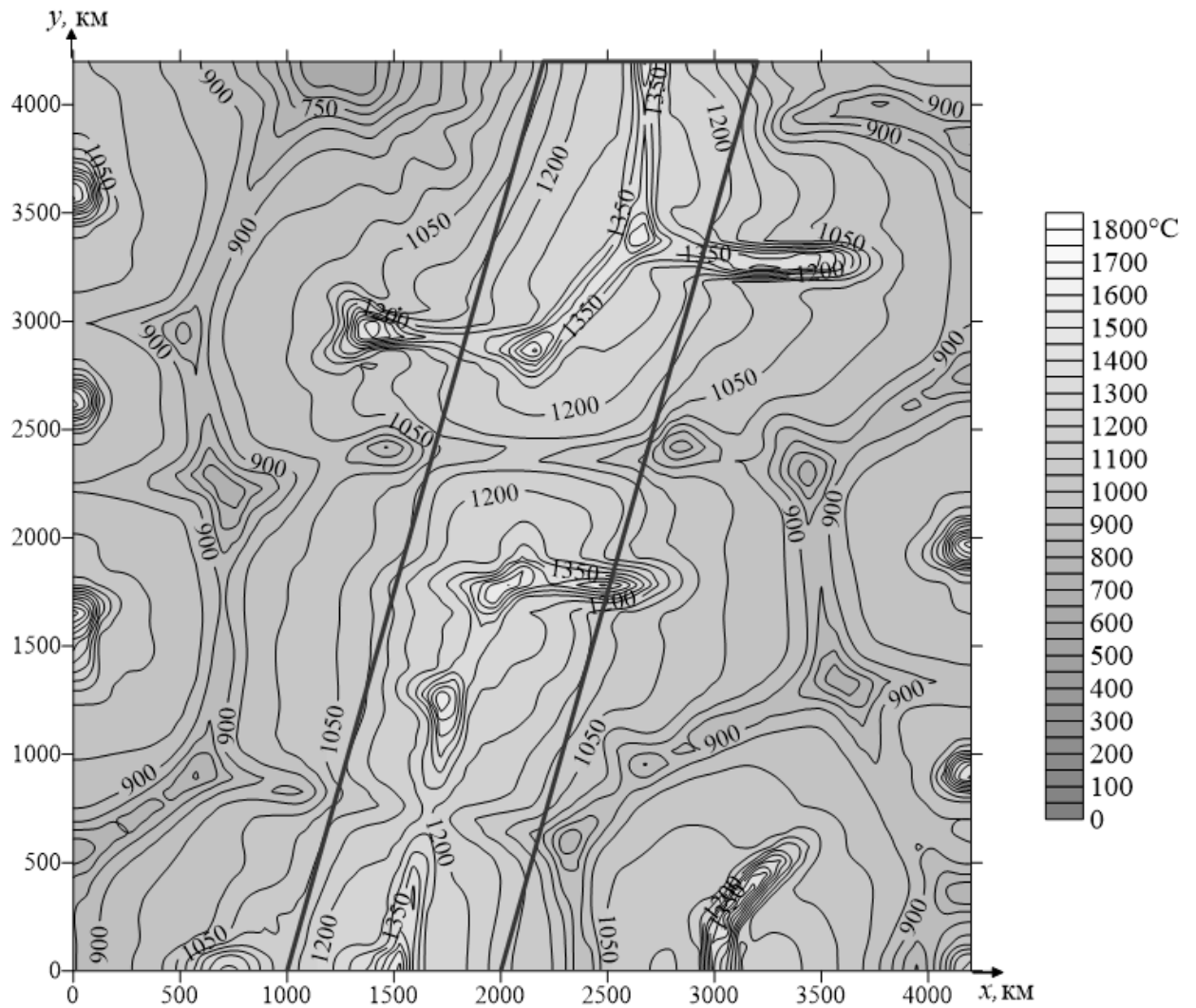


Рисунок 3.20 – Сечение поля температуры в горизонтальной плоскости на глубине 380 км в модели конвекции под литосферой с протяжённым кратоном при $t = 2500$ млн лет

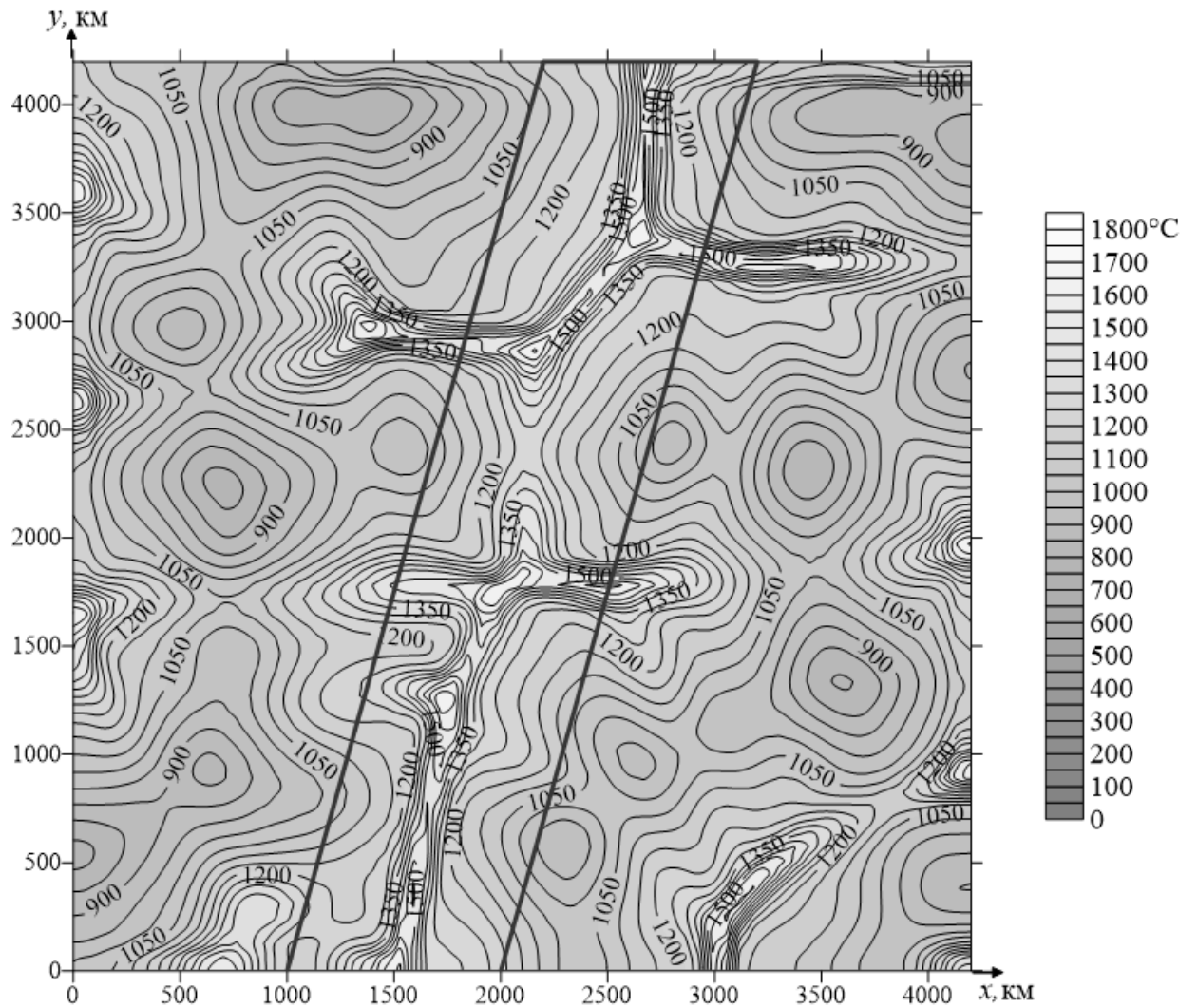


Рисунок 3.21 – Сечение поля температуры в горизонтальной плоскости на глубине 560 км в модели конвекции под литосферой с протяжённым кратоном при $t = 2500$ млн лет

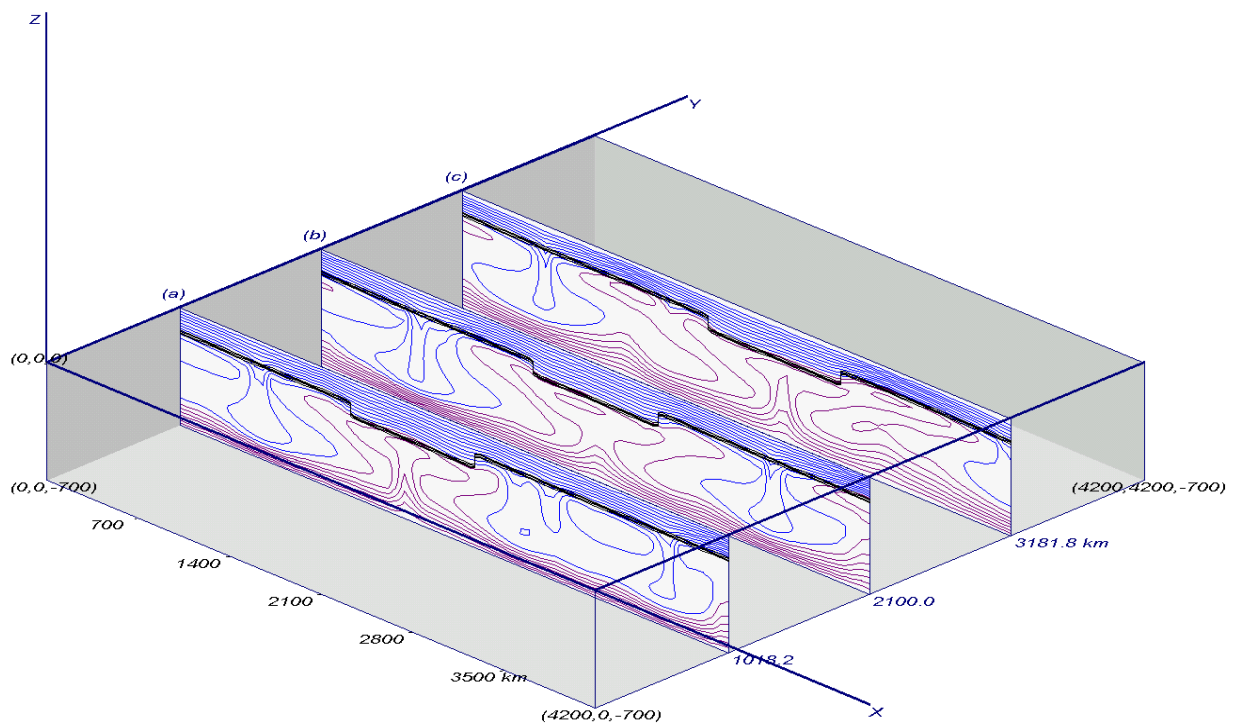


Рисунок 3.22 – Расположение вертикальных сечений поля температуры в плоскостях, параллельных плоскости (xz) в модели конвекции под литосферой с протяжённым кратоном при $t = 2500$ млн лет. (a): $y = 1018,2$ км, (b): $y = 2100,0$ км, (c): $y = 3181,8$ км

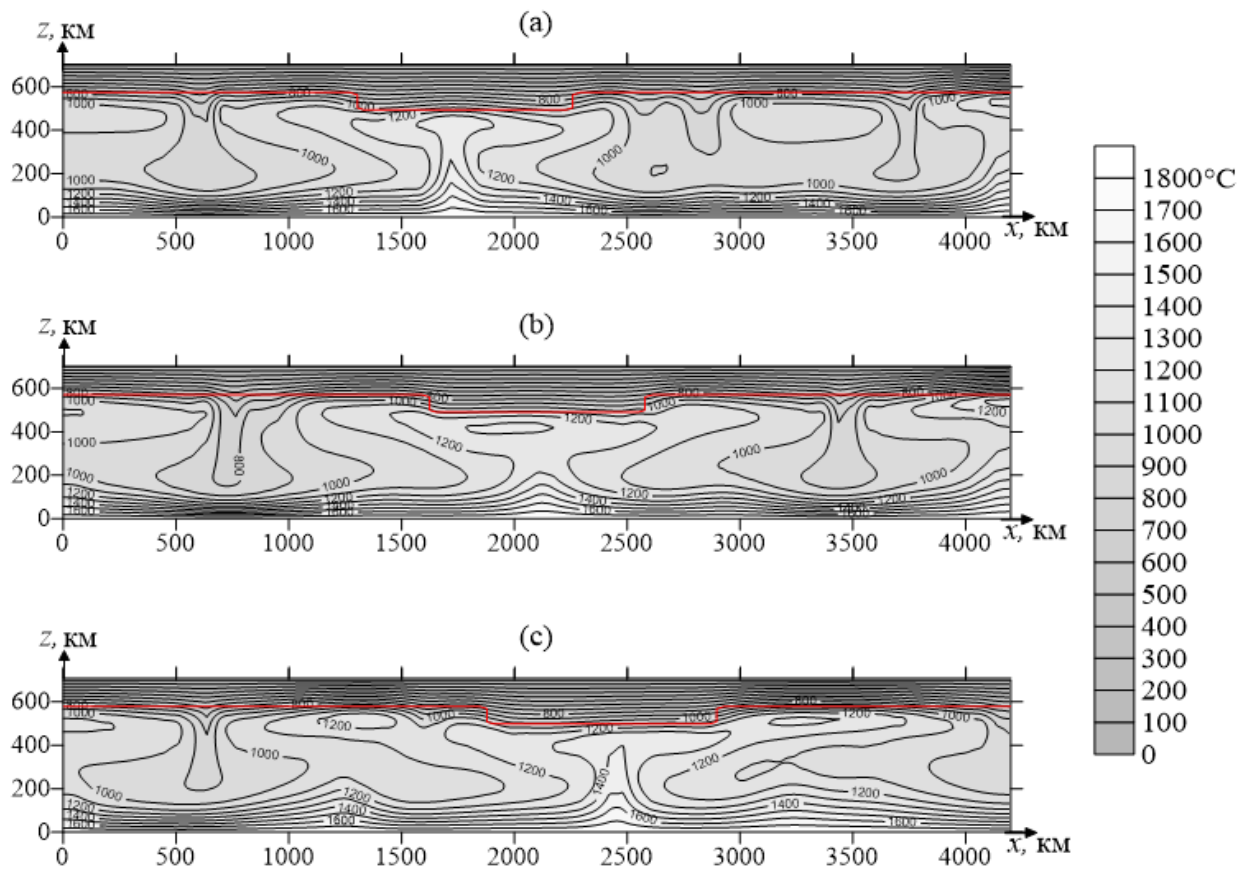


Рисунок 3.23 – Вертикальные (xz)-сечения поля температуры в модели конвекции под литосферой с протяжённым кратоном при $t = 2500$ млн лет. (a): $y = 1018,2$ км, (b): $y = 2100,0$ км, (c): $y = 3181,8$ км

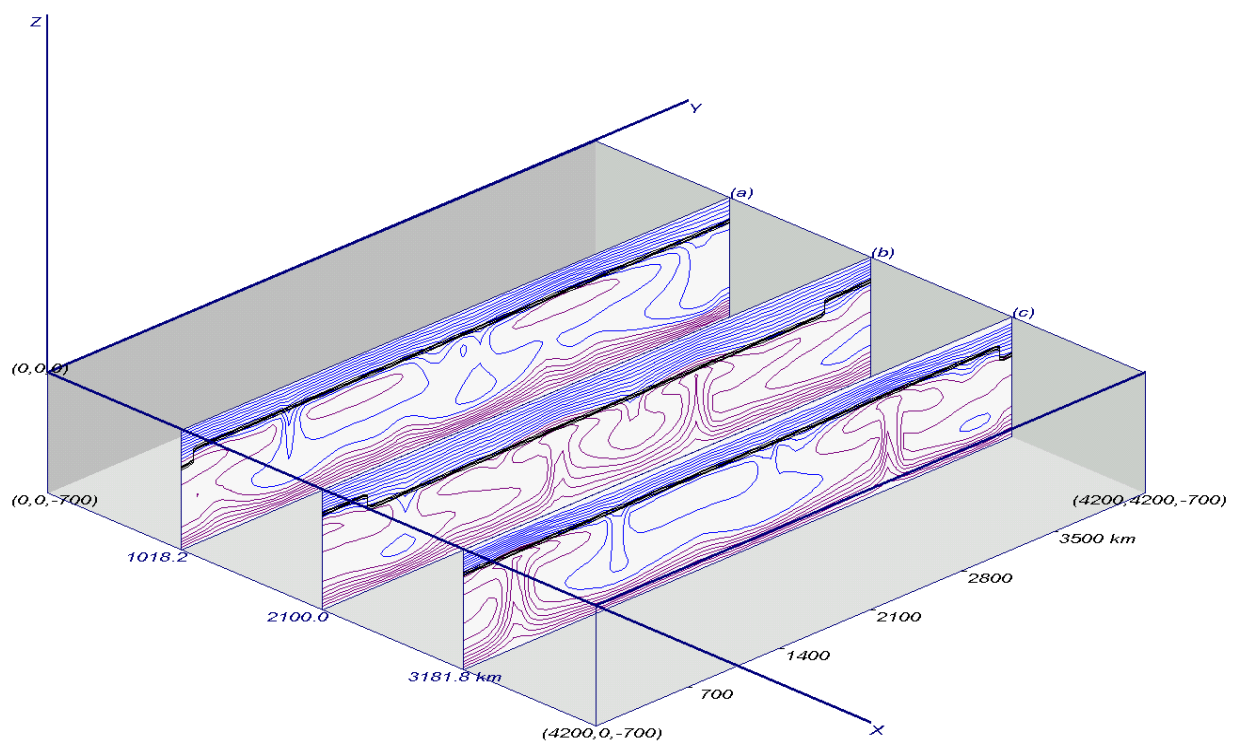


Рисунок 3.24 – Расположение вертикальных (yz)-сечений поля температуры в модели конвекции под литосферой с утолщённой полосой при $t = 2500$ млн лет. (a): $x = 1018,2$ км, (b): $x = 2100,0$ км, (c): $x = 3181,8$ км

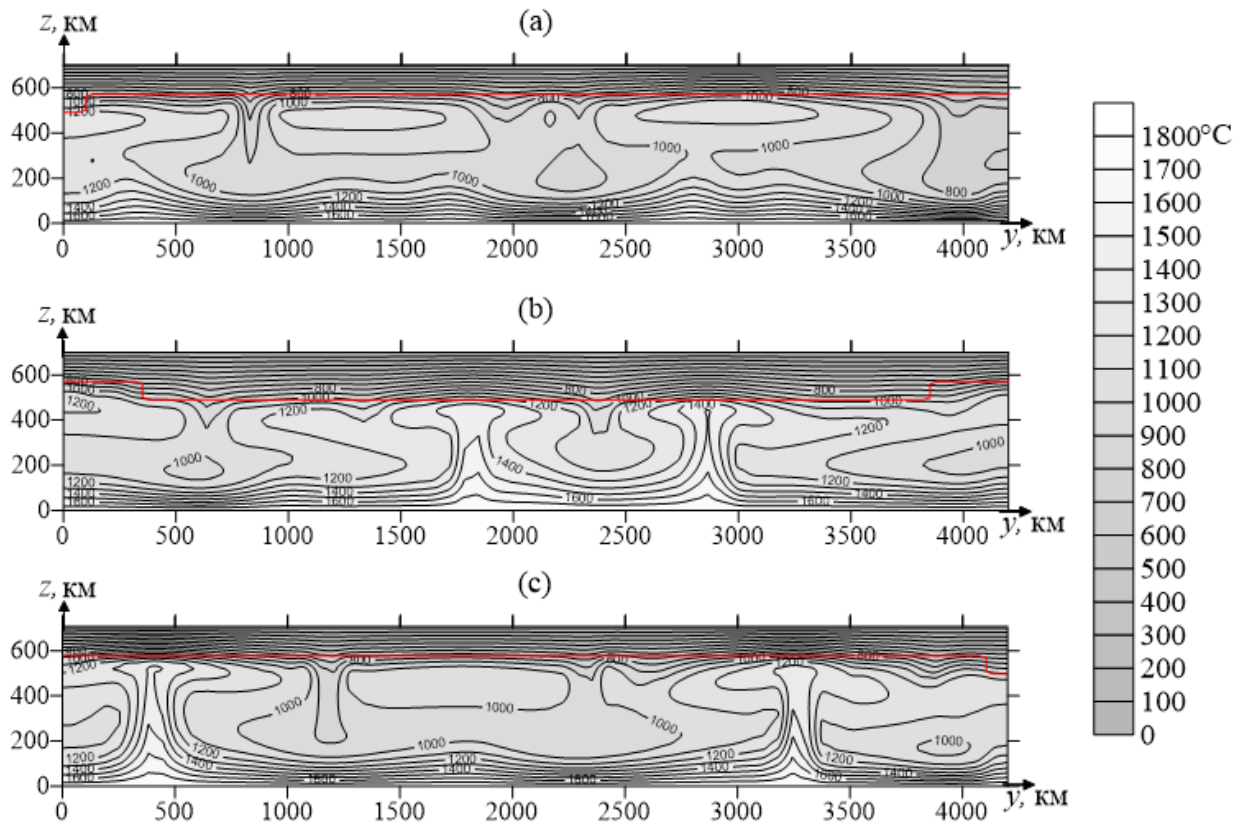


Рисунок 3.25 – Вертикальные (yz)-сечения поля температуры в модели конвекции под литосферой с протяжённым кратоном при $t = 2500$ млн лет. (a): $x = 1018,2$ км, (b): $x = 2100,0$ км, (c): $x = 3181,8$ км

3.4 Конвекция под континентальной литосферой с квадратным в плане кратоном

Сформулирована задача, аналогичная предыдущей, но с квадратным в плане кратоном, длина грани которого составила 2000 км. (Рисунок 3.26 – Рисунок 3.33).

Погруженная часть кратона превышала мощность окружающей литосферы на 80 километров, т.е. основание кратона находилось на двухсоткилометровой глубине, а литосферная плита имела толщину, равную 120 километров. На планете неоднородная литосфера со схожими геометрическими параметрами – Сибирская платформа, или Ангария, расположенная между Енисеем на западе и рекой Леной на востоке; между озером Байкал на юге и Енисей-Хатангской низменностью на севере. В географических координатах платформа находится в пределах 85-130 градусов восточной долготы и 50-75 градусов северной широты, что составляет около 2500 км по широте и долготе. В представленной задаче модельный кратон имеет сопоставимые размеры (Рисунок 3.26). Начальное распределение температурного поля было таким же, как и в случае протяжённого кратона, т.е. взято из модели с однородной литосферой при $t = 2500$ млн лет. Конвекция в этом случае уже практически стационарна (Рисунок 3.9, Рисунок 3.11). В момент времени, принятый за начальный (примерно 35 млн лет с момента внедрения кратона в стационарное течение, полученное в результате расчётов под равномерной литосферой (п. 0)) под кратоном в интервале глубин 200-300 км образовались три восходящих потока (Рисунок 3.27), основанием которых служит общий протяжённый поток, прослеживаемый на более низких горизонтах (Рисунок 3.28). На этих глубинах температура теплового потока оказалась выше средних значений на 250–300°C.

Примечательным фактом полученной пространственно-временной эволюции верхнемантийной конвекции под кратоном является формирование под его центральной частью нисходящих потоков с температурой 850–1000°C (Рисунок 3.27, Рисунок 3.29).

Эти потоки прослеживаются вплоть до пятисоткилометровой глубины (Рисунок 3.30,b). Температура в них на 100°C выше, чем в подобных нисходящих потоках вне кратона. Такая же картина наблюдается под кратоном и для восходящих потоков. Здесь же, под кратоном, замечена локализация ячеек по глубине: вне кратона вертикальный размер ячеек около 500 км, под кратоном – менее 400 км.

В представленной геодинамической модели стационарирование конвекции под литосферой с кратоном наступает примерно через $2 \cdot 10^9$ лет. Сравнение начальной (Рисунок 3.27) и полученной картины (Рисунок 3.32) конвективных течений показывает, что теперь непосредственно под модельным кратоном возникают два восходящих потока, разделённых вытянутым нисходящим течением.

Вычислительный эксперимент в целом показал, что эволюция трёхмерной конвекции под кратоном существенно отличается от двухмерного случая. Основное отличие заключается в том, что теперь под кратоном присутствуют как нисходящие, так и восходящие потоки. В двухмерных численных экспериментах под кратоном нисходящие потоки не наблюдались. Формировался только восходящий поток. Такое несоответствие объясняется самой природой конвекции, которая изначально трёхмерна и не может проявить себя в полной мере в двумерном приближении.

Появление нисходящих течений можно объяснить с помощью энергетических характеристик: в первом приближении понятно, что под достаточно обширными областями, такими, например, как в приведённом опыте, вся масса вещества не может быть устремлена к

подошве кратона — это энергетически не выгодно, - поэтому идёт дифференциация потоков на нисходящие и восходящие.

Из предыдущих работ ([108] – двумерная модель конвекции под кратоном и [110-114] – трёхмерные модели, результаты которых обсуждаются здесь), выявлено безусловное повышение средней температуры на 100°C под кратоном. Кроме того, было показано прямое воздействие на рельеф кратона конвективных течений, возникающих под ним; в случае восходящего мантийного потока рельеф кратона испытывает поднятие, в противном случае – понижение.

При сравнении карты рельефа Сибирской платформы (Рисунок 3.33) с температурным полем под модельным кратоном (Рисунок 3.32) можно заметить, что два региональных поднятия – Алданский щит с Патомским нагорьем на юге и плато Путорана на севере, разделённые низменностью Вилюйской синеклизы достаточно хорошо коррелируются с температурным полем на глубине 160 км, полученным в результате трёхмерного численного моделирования под модельным кратоном.

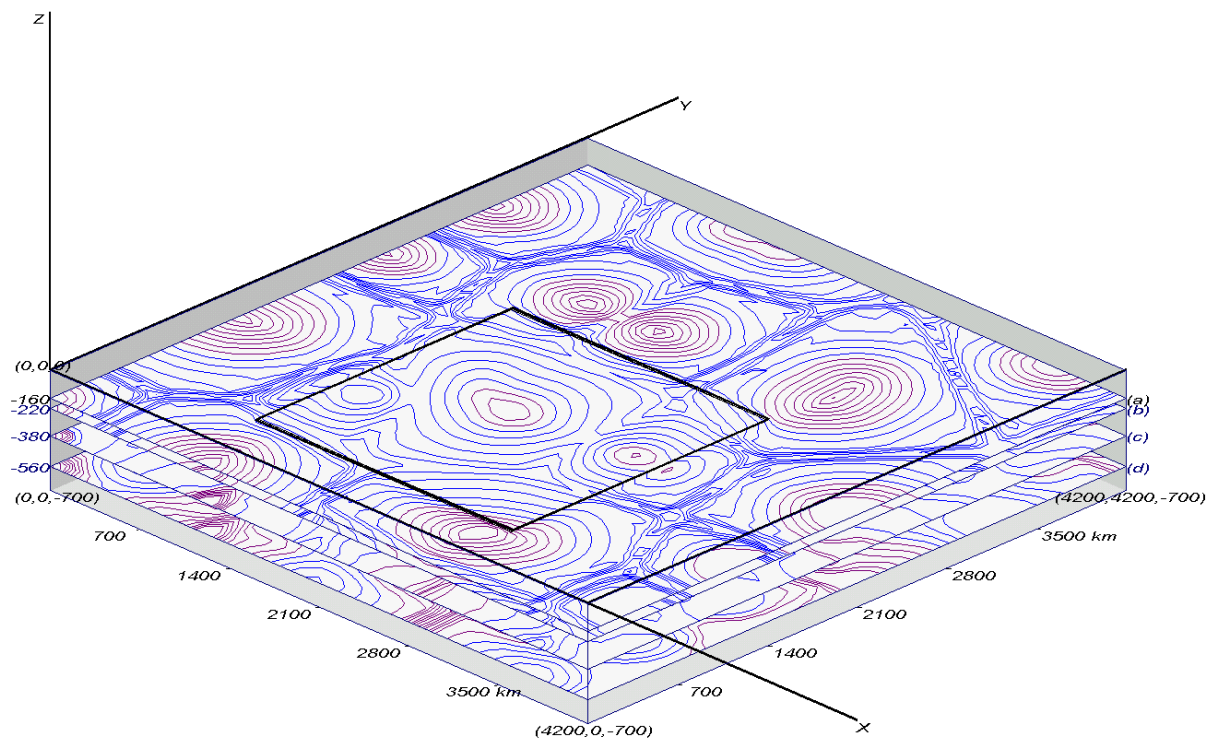


Рисунок 3.26 – Расположение горизонтальных слоёв температурного поля в модели конвекции под литосферной плитой с кратоном при $t = 0$ млн лет. (xy) -сечения на глубинах: (a): $z = 160$ км, (b): $z = 220$ км, (c): $z = 380$ км и (d): $z = 560$ км

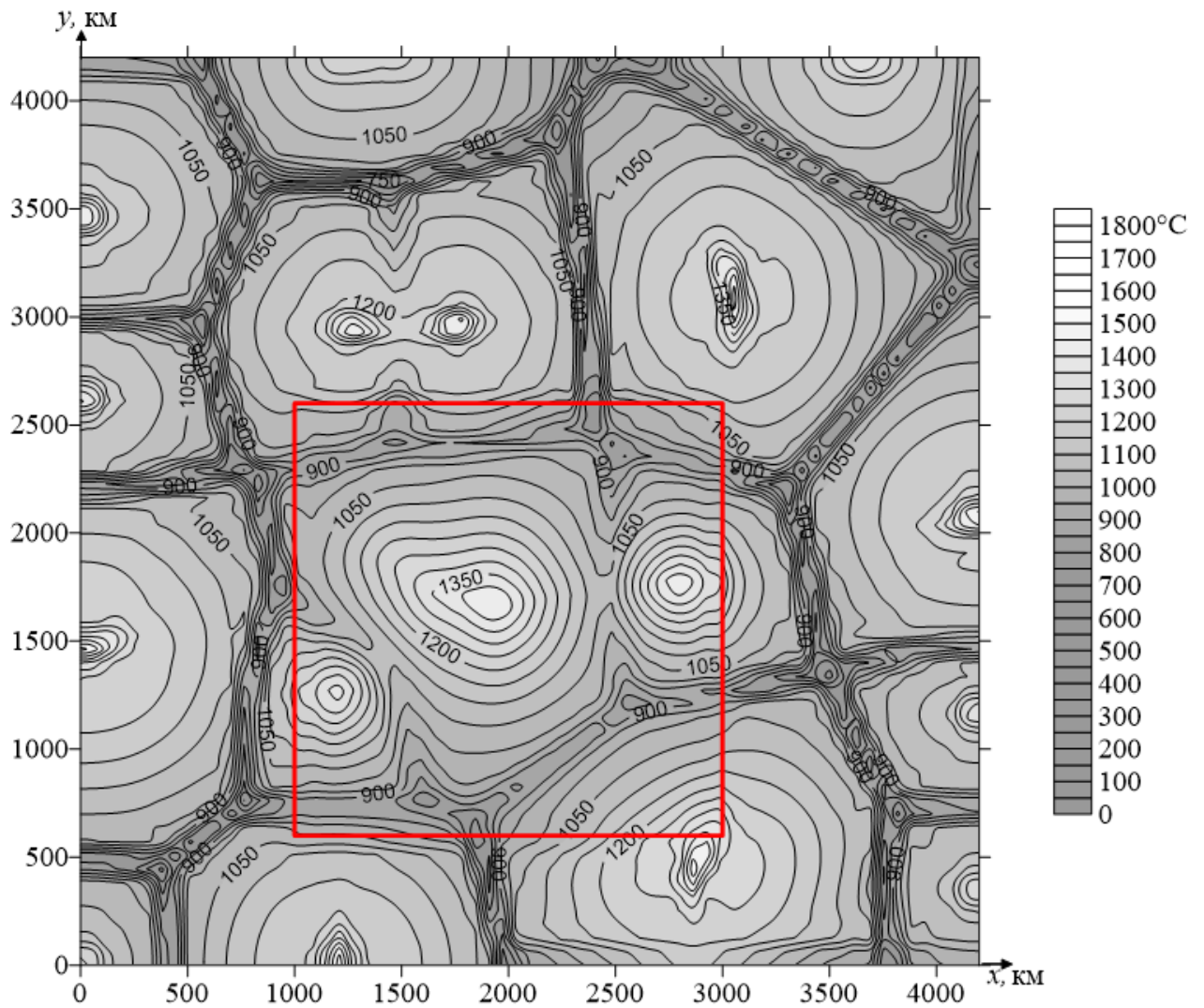


Рисунок 3.27 – Горизонтальное (xy)-сечение температурного поля на глубине 220 км в модели конвекции под литосферой с кратоном при $t = 0$ млн лет

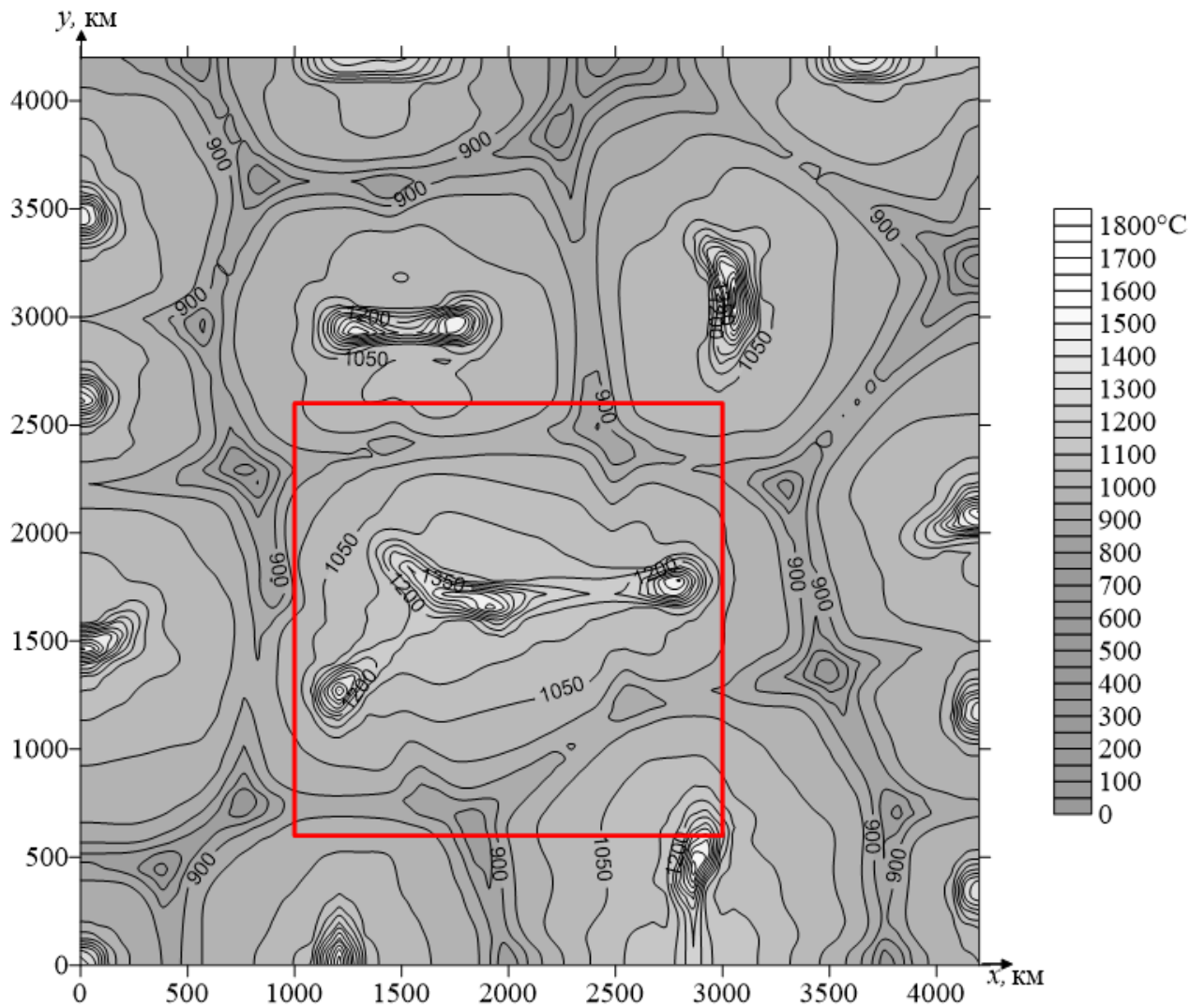


Рисунок 3.28 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры на глубине 380 км в модели конвекции под литосферой с кратоном при $t = 0$ млн лет

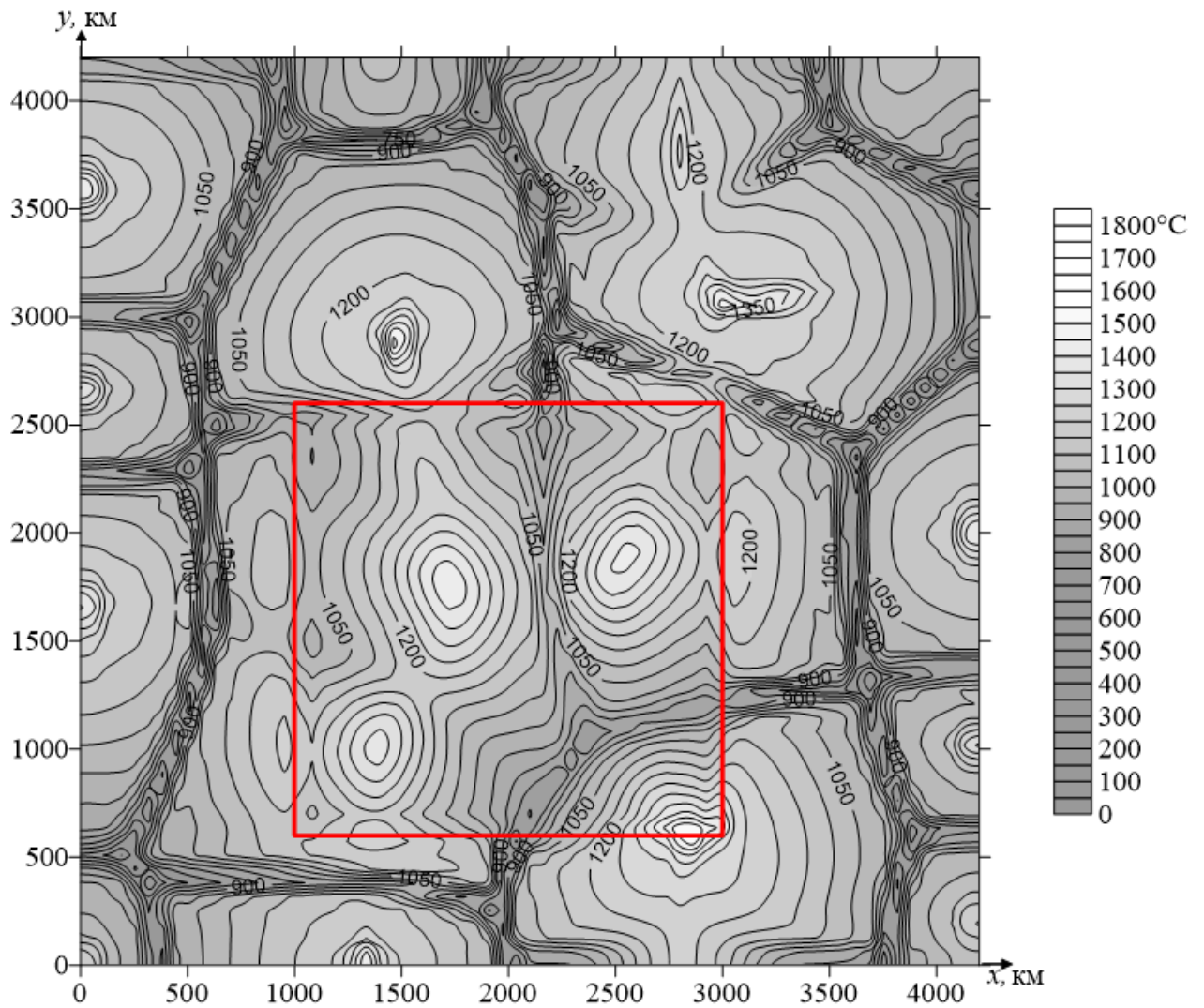


Рисунок 3.29 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры на глубине 220 км в модели конвекции под литосферой с кратоном при $t = 1875$ млн лет

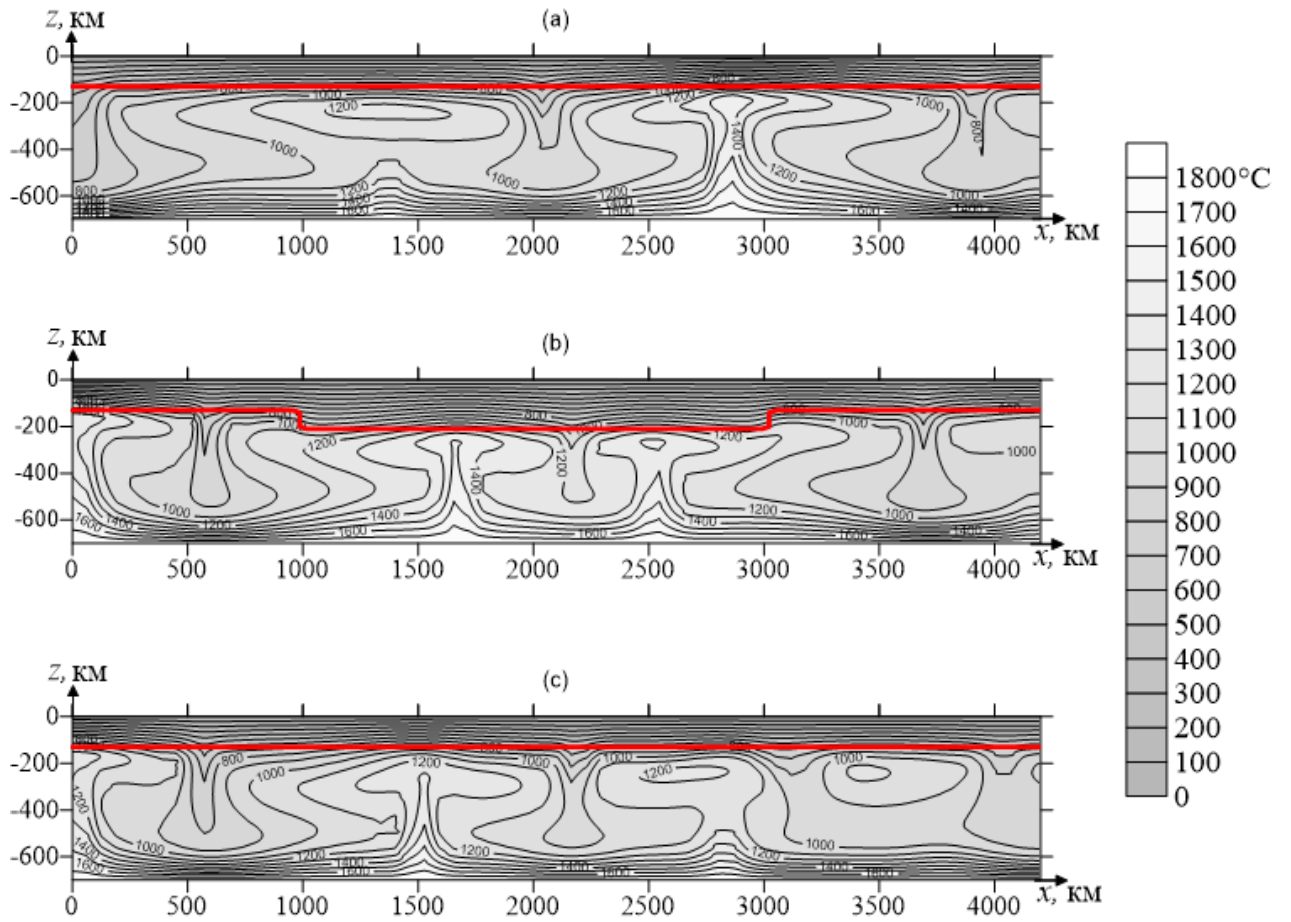


Рисунок 3.30 – Вертикальные (xz)-сечения поля температуры в модели конвекции под литосферой с кратоном при $t = 2500$ млн лет

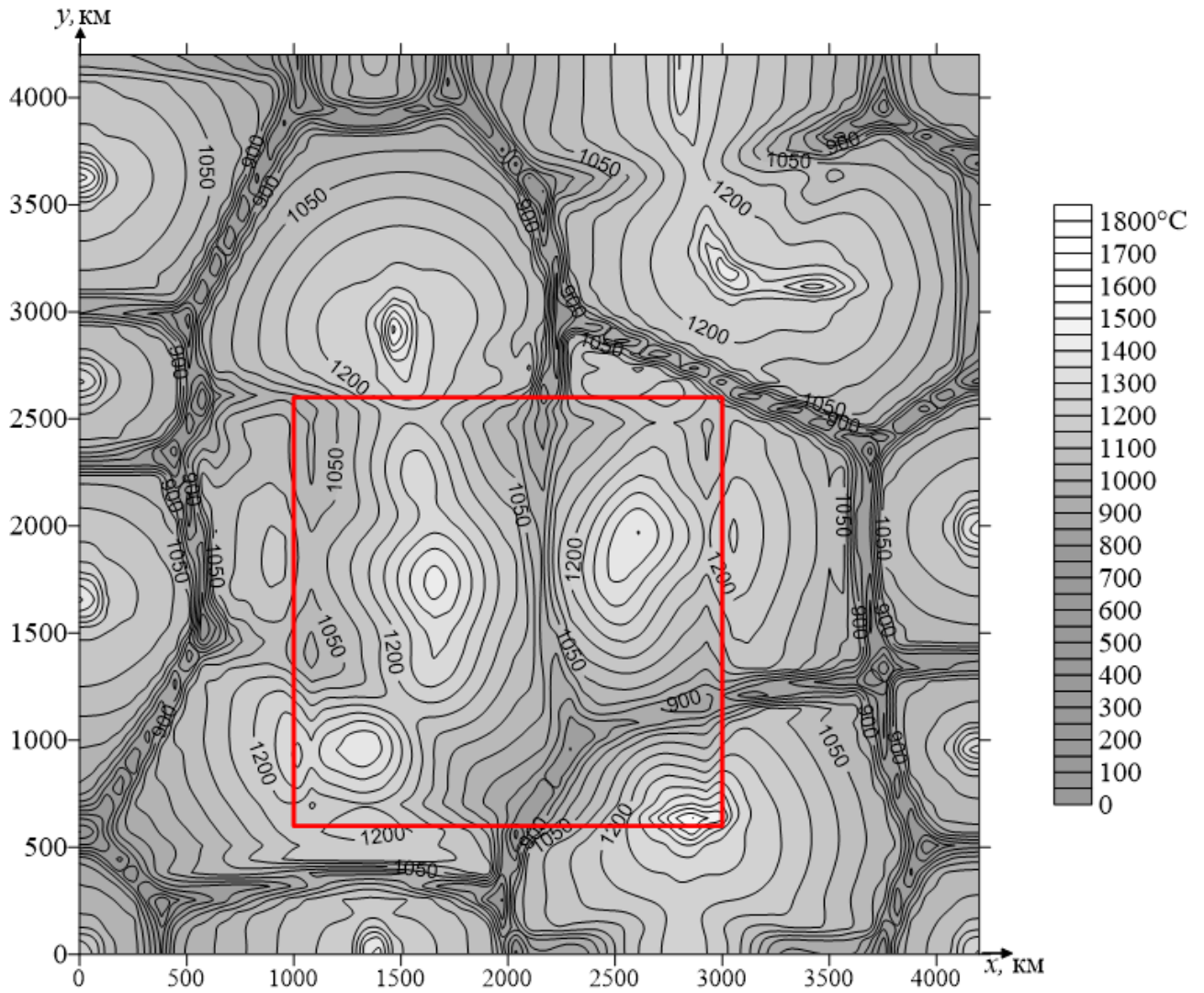


Рисунок 3.31 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры на глубине 220 км в модели конвекции под литосферой с кратоном при $t = 2500$ млн лет

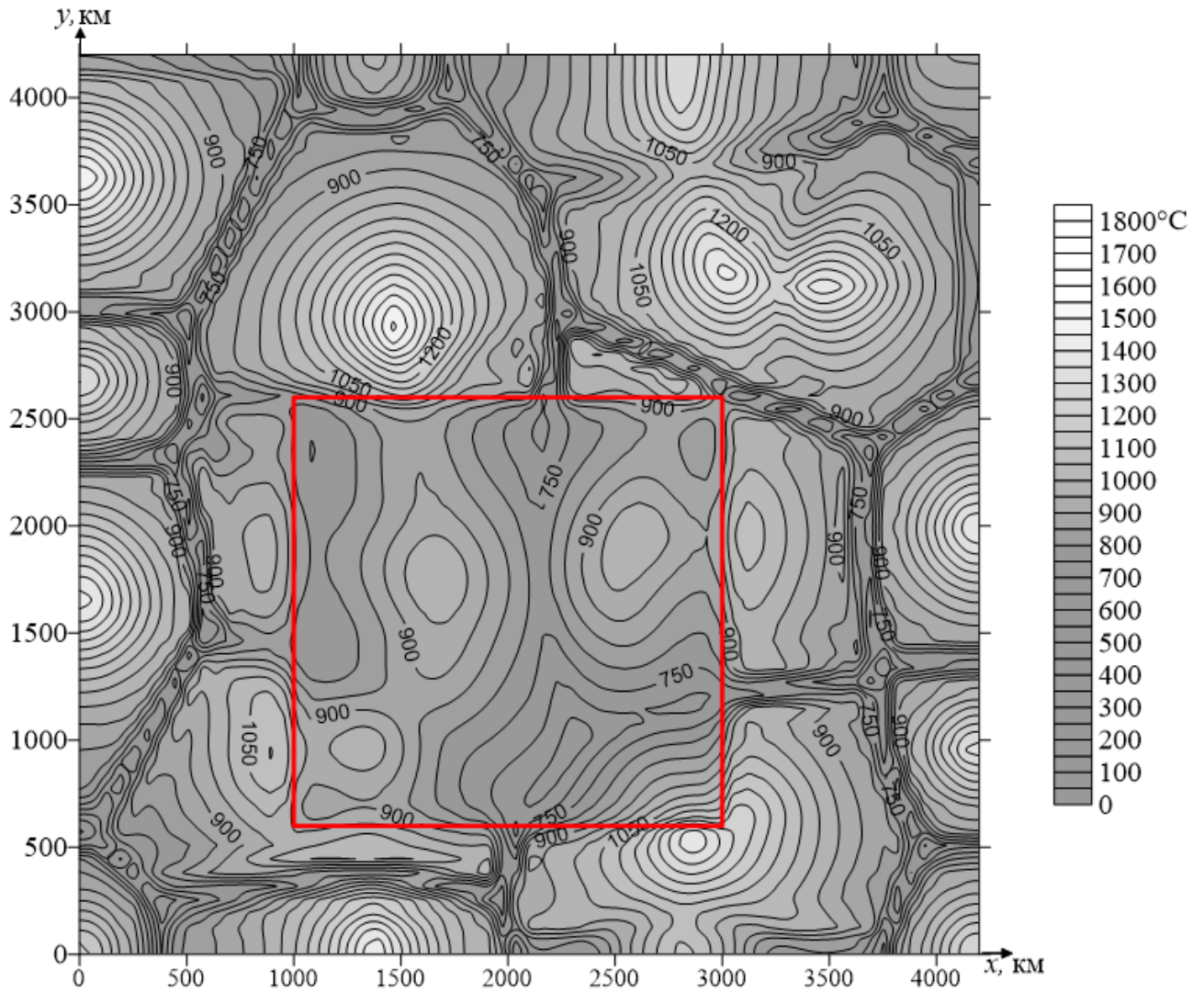


Рисунок 3.32 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры на глубине 160 км в модели конвекции под литосферой с кратоном при $t = 2500$ млн лет

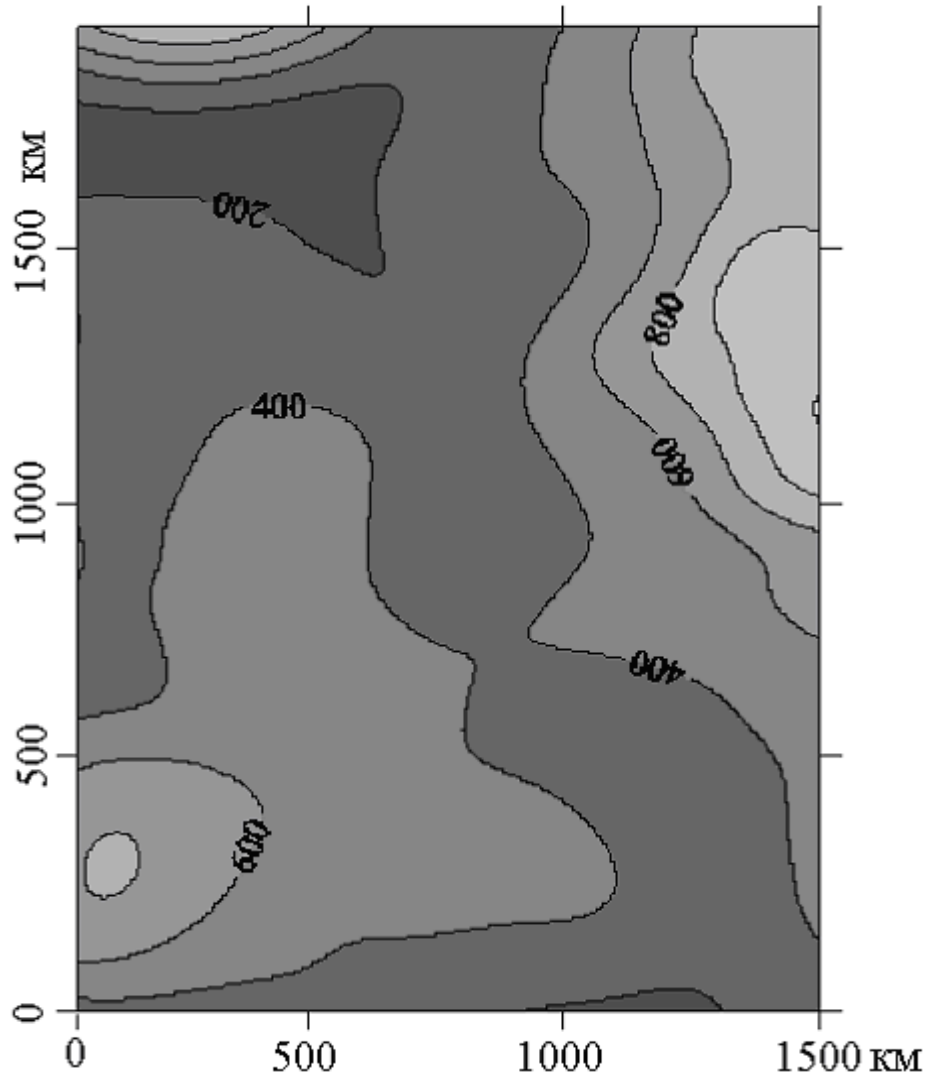


Рисунок 3.33 – Рельеф участка Сибирской платформы (в метрах) в районе Вилуйской синеклизы

3.5 Конвекция под литосферой с двумя кратонами

В следующей геодинамической модели в расчётной области были построены два прямоугольных в плане кратона. Такая модель отвечает геологической ситуации на платформах, где присутствуют локальные неоднородности континентальной литосферы. Примером могут служить выходы архейских пород на докембрийских платформах: Русской, Сибирской, Южно-Африканской и некоторых других. Взаимное расположение модельных кратонов представлено рисунками данного раздела (Рисунок 3.34 – Рисунок 3.49 и Рисунок 3.51 – Рисунок 3.53). Размеры ближнего (к началу координат) кратона 1000 на 1 400 километров; дальнего (или верхнего) - 1000 на 1000 километров. Мощность кратонов - 200 километров. Толщина кондуктивного слоя литосферы вне кратонов - 120 километров.

На рисунках (Рисунок 3.34 – Рисунок 3.38) изображены горизонтальные сечения поля температуры начальной структуры течения на разных глубинах. Снова, как и в случае одного кратона, обнаруживается эффект фокусировки восходящих конвективных потоков с глубиной.

При погружении кратонов в мантийную предварительно раскрученную жидкость, восходящий поток совпал с центром верхнего кратона, а под ближним кратоном два восходящих течения разделены нисходящим потоком, простирающимся с юго-востока на северо-запад.

Как изменялась со временем структура течений под модельными кратонами показывают ниже приведённые рисунки (Рисунок 3.34-Рисунок 3.49).

Отличительной особенностью эволюции структуры течения под литосферой с двумя кратонами является появление и развитие

мелкомасштабной моды конвекции. Вкратце эффект уже затрагивался при обсуждении конвективных течений под квадратным кратоном, здесь это явление будет рассмотрено подробнее.

На рисунках раздела (Рисунок 3.42 – Рисунок 3.48) показаны горизонтальные срезы поля температуры через 625 млн лет. На первом из них (Рисунок 3.42) достаточно хорошо заметны изменения структуры конвекции под кратонами. По периферии кратонов появились локальные нисходящие потоки; в приграничных к кратонам областях образовались локальные восходящие потоки. Температура в этих локальных нисходящих течениях 1200°C , что на 200°C ниже, чем в восходящих, расположенных по соседству. Под верхним кратоном нисходящие потоки формируют в угловых областях зоны неоднородности, а между ними с некоторым смещением вне зоны кратона формируется соответствующие локальные восходящие потоки.

Начало развития подобных локальных возмущений происходит уже через 200-220 млн лет после добавления в решение под равномерной литосферой модельных кратонов. Аналогичный ансамбль локальных нисходящих и восходящих потоков, существующий у бортов кратонов, наблюдался и для литосферы с квадратным кратоном (Рисунок 3.31). На следующих рисунках (Рисунок 3.45 – Рисунок 3.48), демонстрирующих вертикальные сечения температурного поля, эти возмущения проявляются в виде локальных погружений изотермы 1200°C .

Толщина слоя, с выраженной мелкомасштабной конвекцией менее 150 км, так как на горизонтальном сечении поля температуры на глубине 380 км, возмущения, связанные с этой модой конвекции, уже не наблюдаются (Рисунок 3.43). Этот эффект отсутствует и на более глубоких горизонтах расчётной области (Рисунок 3.44).

Со временем нисходящие локальные потоки окончательно оформляются. Так что после 1875 млн лет структура конвективных

течений не меняется (Рисунок 3.49). В этом случае под ближним кратоном наблюдаются пять локальных нисходящих потоков по периферии и два восходящих в центре. Под верхним кратоном по периферии наблюдается строгая периодичность восходящих и нисходящих потоков через 500 км.

Таким образом, к следующим принципиальным результатам трёхмерного численного моделирования теплогравитационной конвекции в верхней мантии под континентальной литосферой переменной мощности можно отнести выявленную мелкомасштабную моду конвекции непосредственно под литосферой на «астеносферном» уровне, на глубинах 200–350 км. Мелкомасштабная конвекция проявляется в форме вытянутых ячеек с горизонтальными размерами в 500 км между восходящим и нисходящим потоками и развивается по периферии кратонов.

Найденная в численных экспериментах мелкомасштабная мода конвекции может быть связана с геологическими причинами и проявлениями суперплюмов под плитами континентов.

С понятием «суперплюм» ряд исследователей связывают мантийные механизмы наиболее грандиозных геологических явлений. Это могут быть, например, крупномасштабные излияния платобазальтов или раскол суперконтинента [38, 201]. Следует обратить внимание на первый механизм.

В Пермско-Триасовую Эпоху, т.е. 240-250 млн лет назад, произошло событие, связанное именно с крупномасштабным излиянием платобазальтов, охватившее всю Сибирскую платформу и прилегающие области [42, 43].

Как показали результаты численного моделирования, восходящие мантийные потоки, возникающие под обширным кратоном, являются наиболее устойчивой модой конвективных течений в верхней мантии. Если допустить, что в эпоху массового излияния платобазальтов

продвижение Ангарии по планете происходило над огромным нижнемантийным плюмом, то температура нижней границы верхней мантии могла бы подняться на 200-400 °С. Участие нижнемантийного вещества в излияниях сейчас подтверждено геохимическими и изотопными исследованиями лав Сибири [132].

Этот сценарий приводит к более интенсивной конвекции непосредственно под Ангарией, а также и к пропорциональному росту температуры в восходящих потоках под кратоном и на его окраинах. В результате изотопного и геохимического анализа лав Тунгусских траппов обнаружено наличие нижнемантийного вещества [86].

В таком случае становится вполне обоснованным и вероятным то, что основные объёмы излияний связаны с центральными восходящими течениями под кратоном.

Объяснимыми становятся и проявления магматизма на периферии Ангарии. На юге платформы обнаружены проявления гранитного и бимодального магматизма: в Прибайкалье, на Алтае и восточной Туве, в Китае и Монголии. Излияния платобазальтов наблюдаются также на Таймыре и на Западно-Сибирской низменности (Рисунок 3.50).

Восходящий поток, сформировавшийся в виде классического «гриба», предполагает, что вдоль бортов кратона должны возникать нисходящие потоки с пониженной температурой и поэтому они уже не в состоянии породить здесь магматизм.

Подобная конвективная обстановка наблюдалась под правым кратоном изначально (см. Рисунок 3.36). С появлением в этих областях мелкомасштабной конвекции ситуация меняется. Интенсивные восходящие течения этой моды конвекции в состоянии доставить к подошве литосферы мантийное вещество с глубин в 300–350 км с температурой 1300-1400°С. При прохождении кратона над нижнемантийным плюмом температура течений возрастёт на 100-200°С.

Из результатов численного моделирования следует, что восходящие потоки мелкомасштабной моды конвекции образуются как, правило вне кратона, но в непосредственной близости от края кратона, где литосфера имеет мощность 120 км. В этих областях и возникает декомпрессионное плавление (сравните Рисунок 3.49 и Рисунок 3.50).

Таким образом, магматизм на периферии Сибирского кратона в эпоху Пермо-Триасового траппового излияния лав мог быть связан именно с мелкомасштабной конвекцией под Сибирским кратоном.

Чтобы прояснить ситуацию с возникновением мелкомасштабной моды конвекции, была поставлена геодинимическая задача, в которой течение рассчитывалось под двумя кратонами напрямую, без привлечения установившейся конвекции под равномерной литосферой.

Решение задачи конвекции в прямоугольном параллелепипеде (1.7) и $X = Y = 6$ с двумя кратонами, найденное на сетке $(66 \times 66 \times 36)$ при времени $t = 60 \cdot 6,25 = 375$ млн лет, было продолжено на сетке $(132 \times 132 \times 70)$ до $t = 700$ млн лет.

Из представленных ниже рисунков видно, что мелкомасштабная мода возникает на самых ранних этапах (300 и менее млн. лет) развития конвекции (Рисунок 3.51) и определяется разностью мощностей, т.е. теплоэкранирующим эффектом более мощной литосферы под кратонами. Расчёты показали, кроме того, независимость моды от шага сетки (Рисунок 3.53).

Рисунок 3.52 показывает сечения температурного поля под кратонами в плоскостях $y = 1500$ км и $x = 3000$ км, где можно видеть картину, аналогичную представленной на предыдущих сечениях (Рисунок 3.46 и Рисунок 3.48) и полученной в результате расчётов от предварительно «раскрученного» под ровной литосферой «начальной» конвекции. В обоих вариантах определяющими являются восходящие конвективные струи под кратонами с последующим обтеканием

кратонов. Следы этого процесса выражаются в виде мелкомасштабной моды конвекции на горизонтальных срезах (Рисунок 3.49, Рисунок 3.51, Рисунок 3.53).

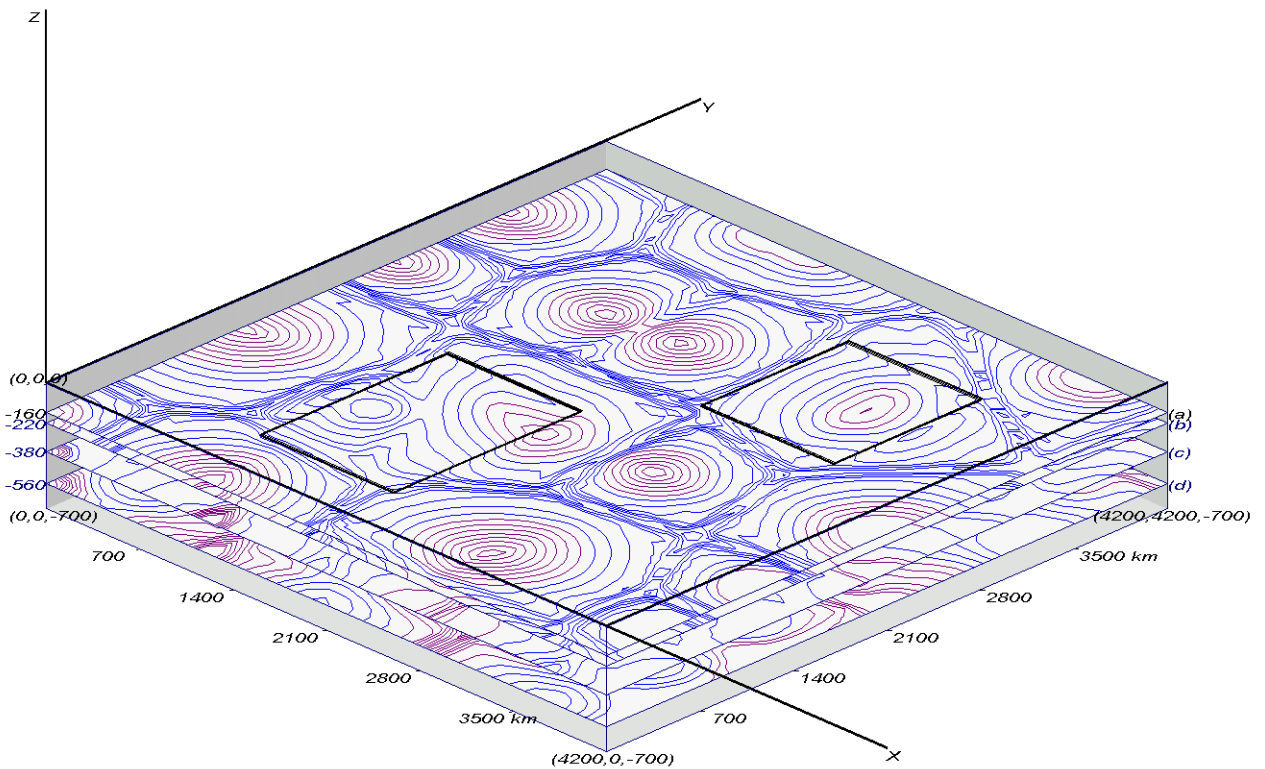


Рисунок 3.34 – Горизонтальные (xy)-сечения температурного поля на глубинах (а): $z = 160$ км, (б): $z = 220$ км, (с): $z = 380$ км и (д): $z = 560$ км в модели конвекции под литосферной плитой с двумя кратонами при $t = 0$ млн лет. Мощность кратонов составляет 200 км, окружающей литосферы – 120 км

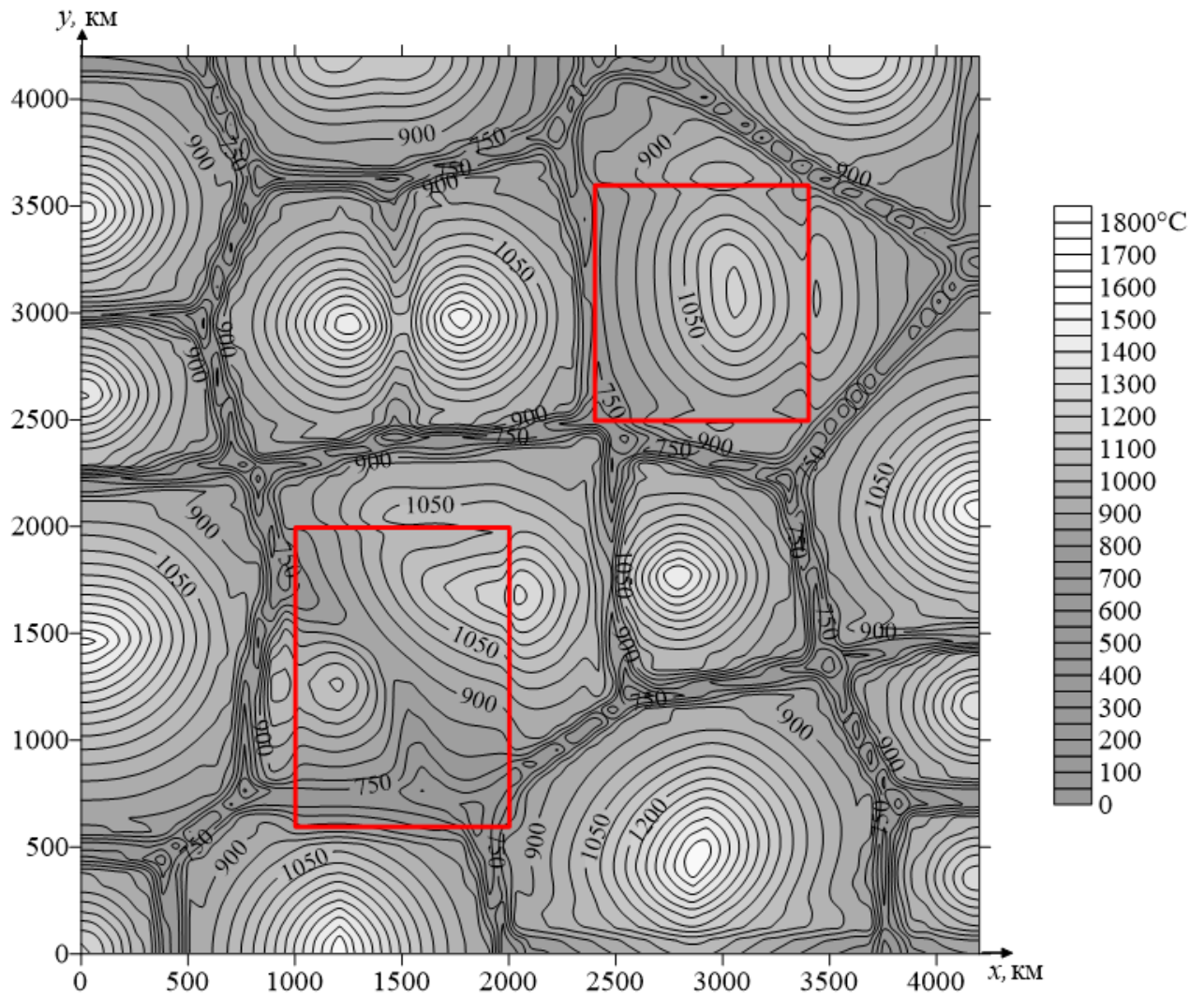


Рисунок 3.35 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 160$ километров в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами; $t = 0$ млн лет

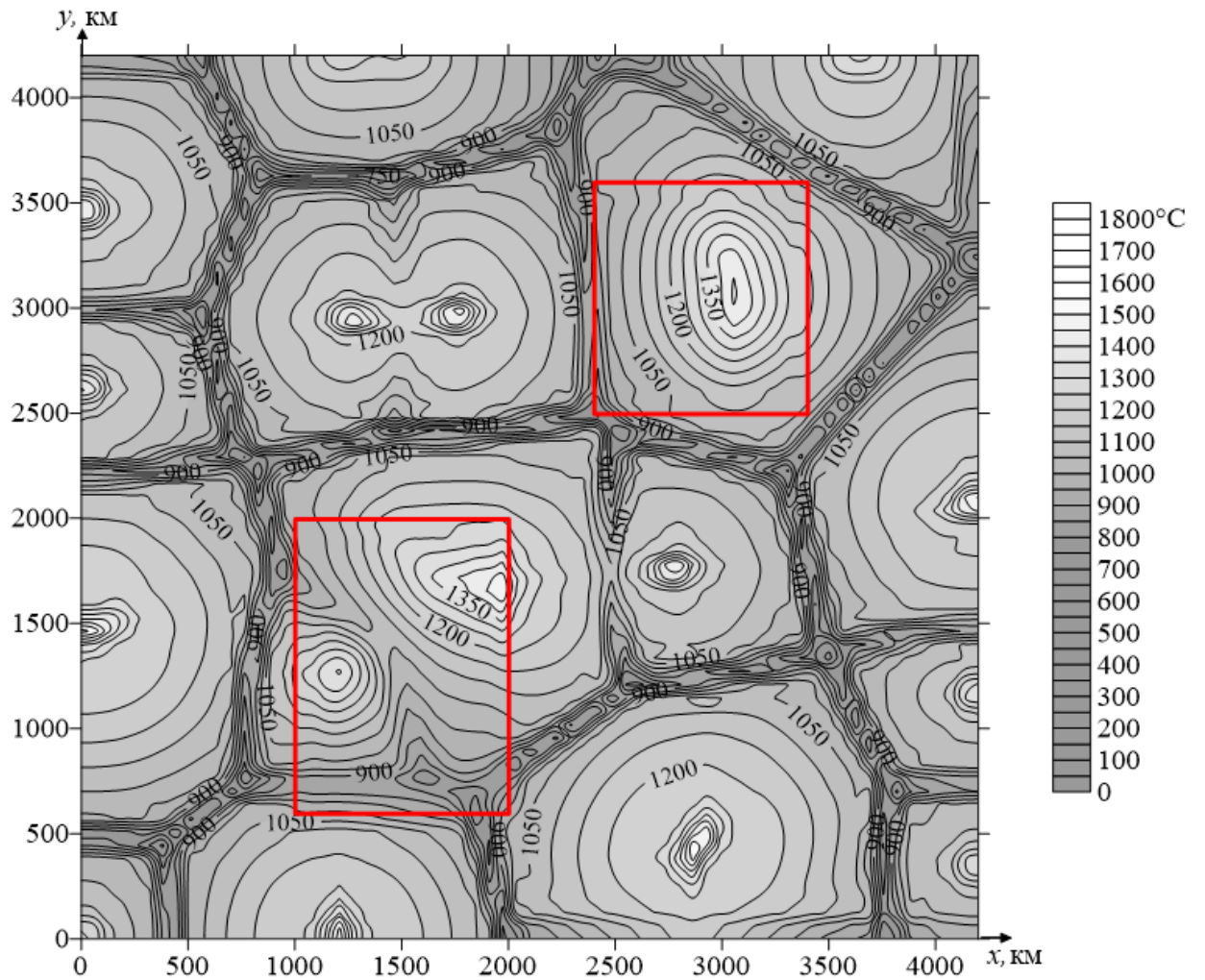


Рисунок 3.36 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 220$ километров в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами; $t = 0$ млн лет

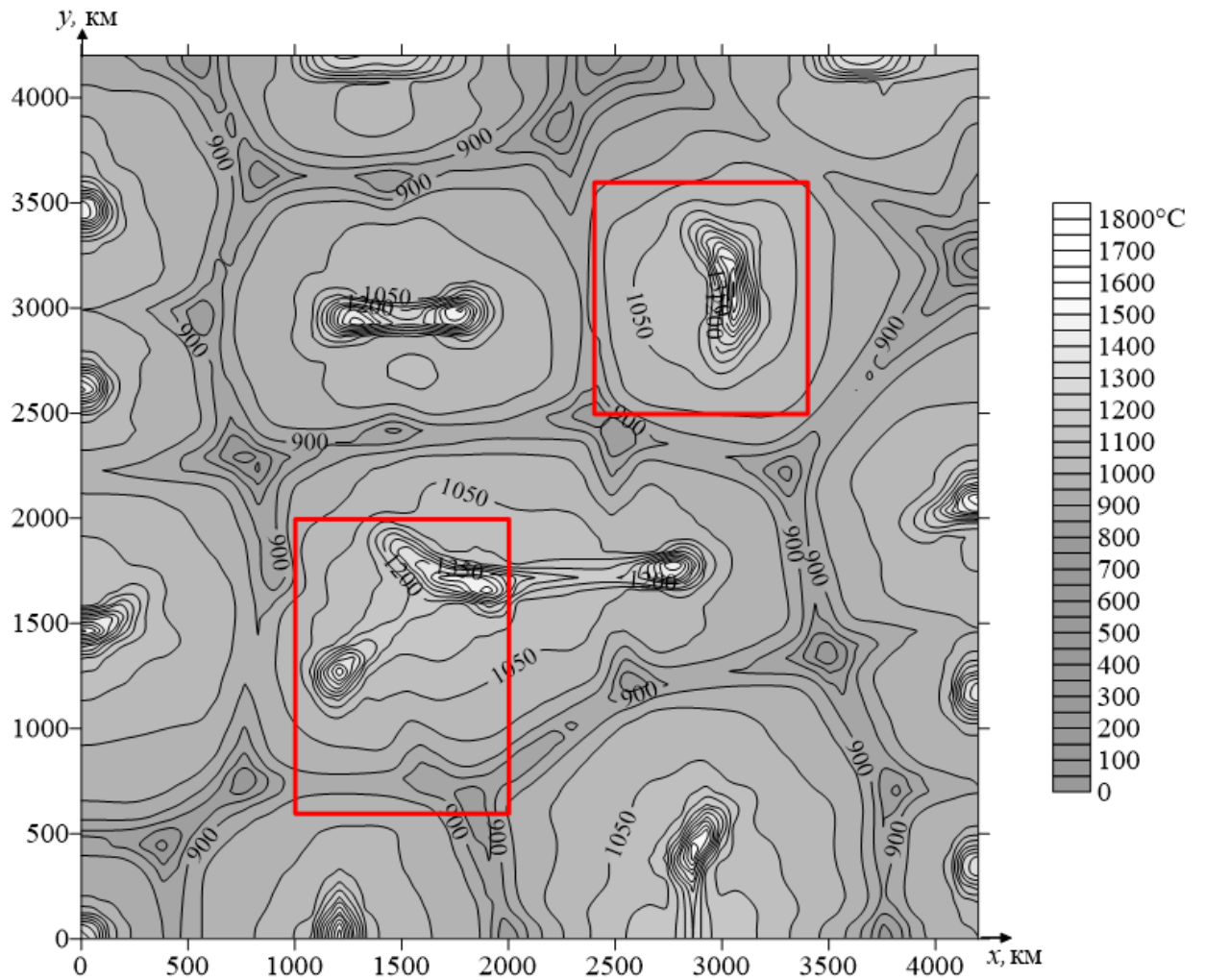


Рисунок 3.37 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 380$ километров в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами; $t = 0$ млн лет

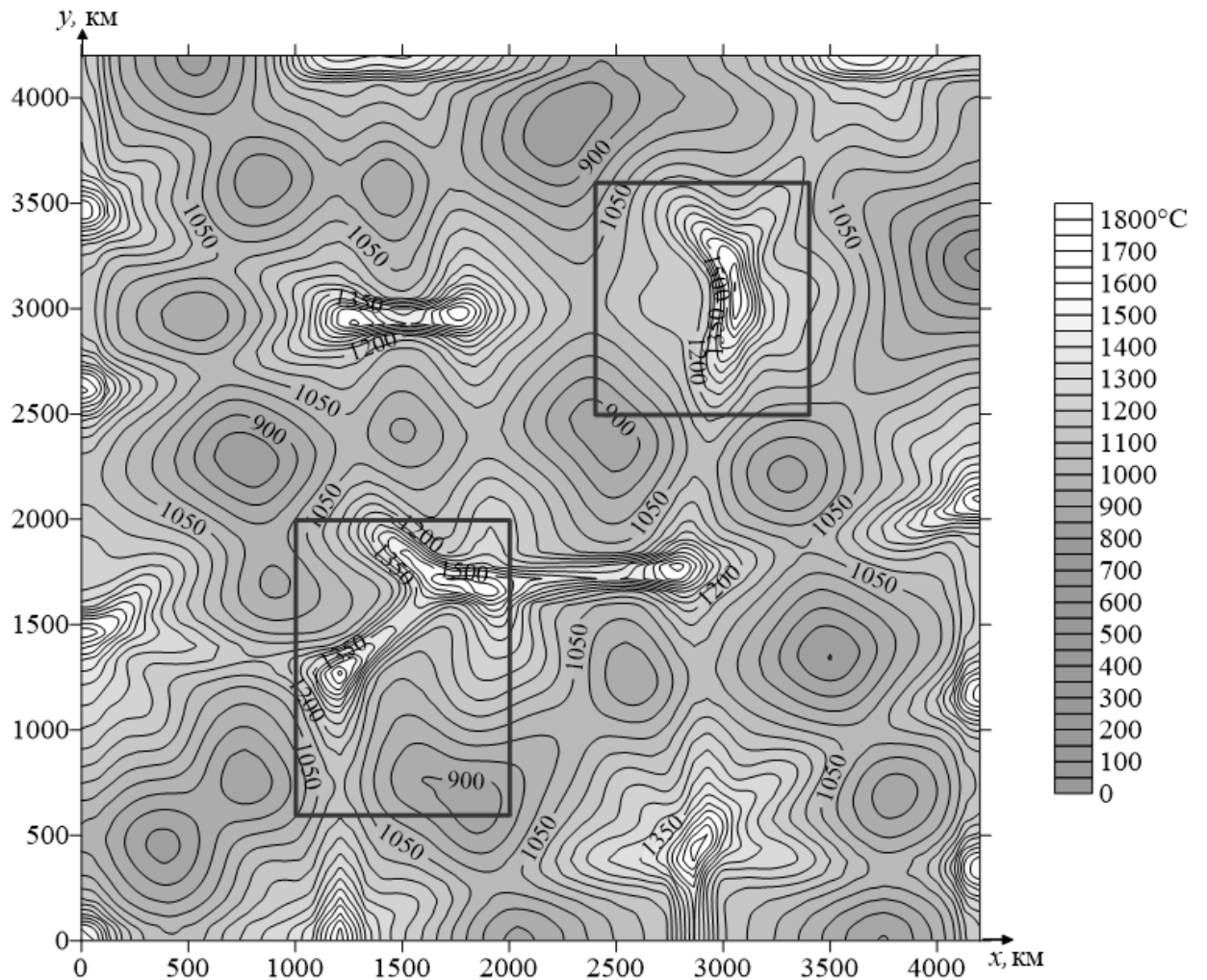


Рисунок 3.38 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 560$ километров в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами; $t = 0$ млн лет

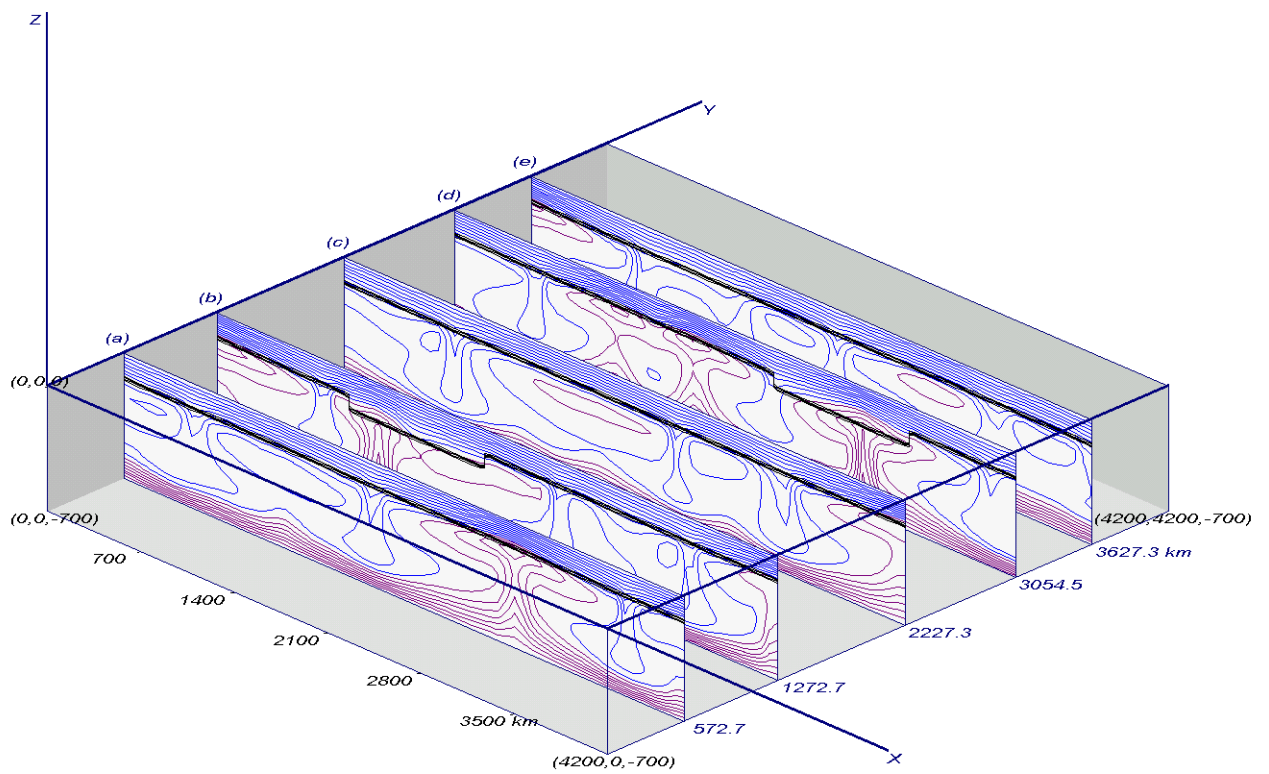


Рисунок 3.39 – Расположение в пространстве (xz) -сечений поля температуры в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами: (a): $y = 572,7$ км, (b): $y = 1272,7$ км, (c): $y = 2227,3$ км, $y = 3054,5$ км, $y = 3627,3$ км; $t = 0$ млн лет

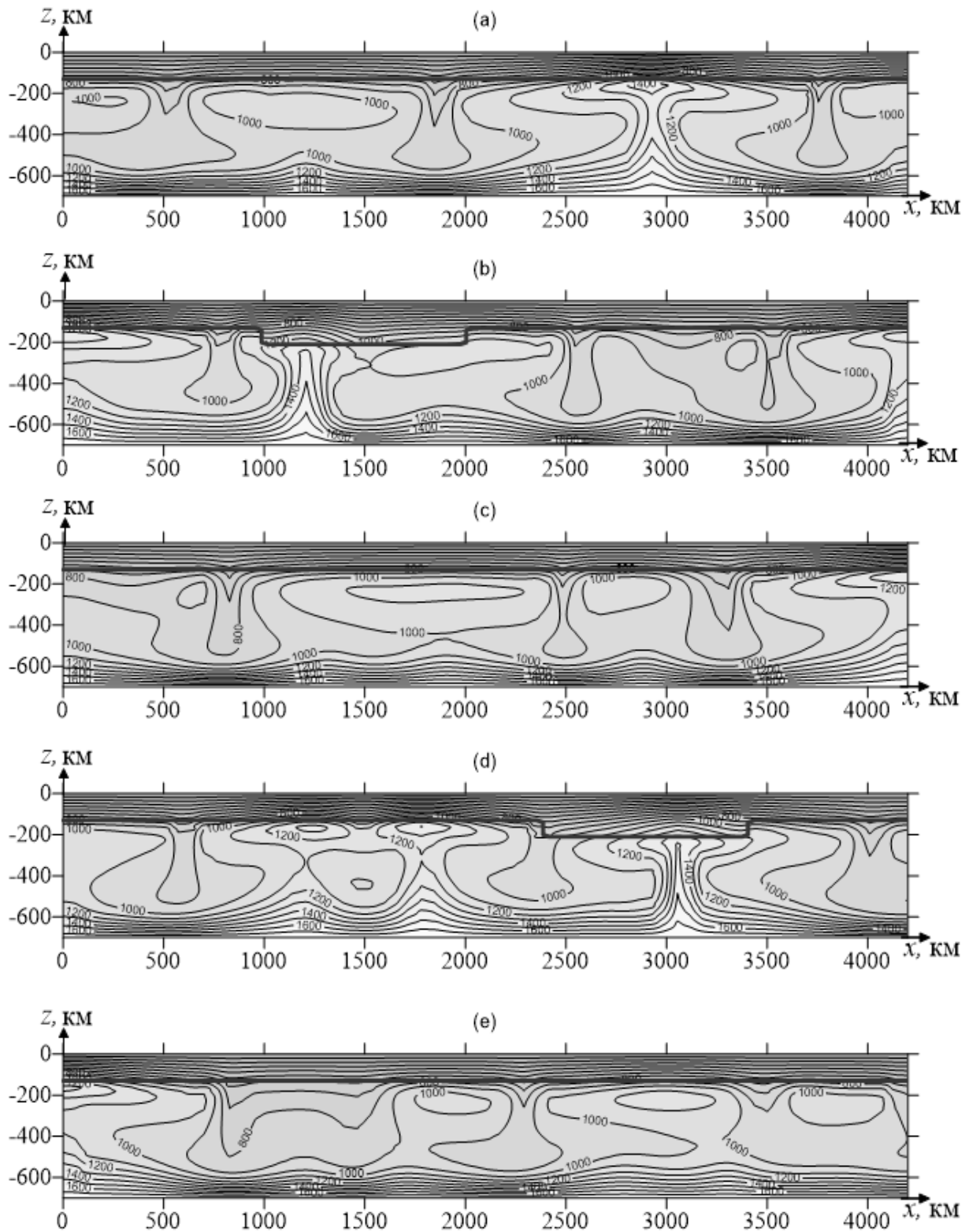


Рисунок 3.40 – Вертикальные (xz)-сечения поля температуры в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами: (a): $y = 572,7$ км, (b): $y = 1272,7$ км, (c): $y = 2227,3$ км, (d): $y = 3054,5$ км, (e): $y = 3627,3$ км; $t = 0$ млн лет

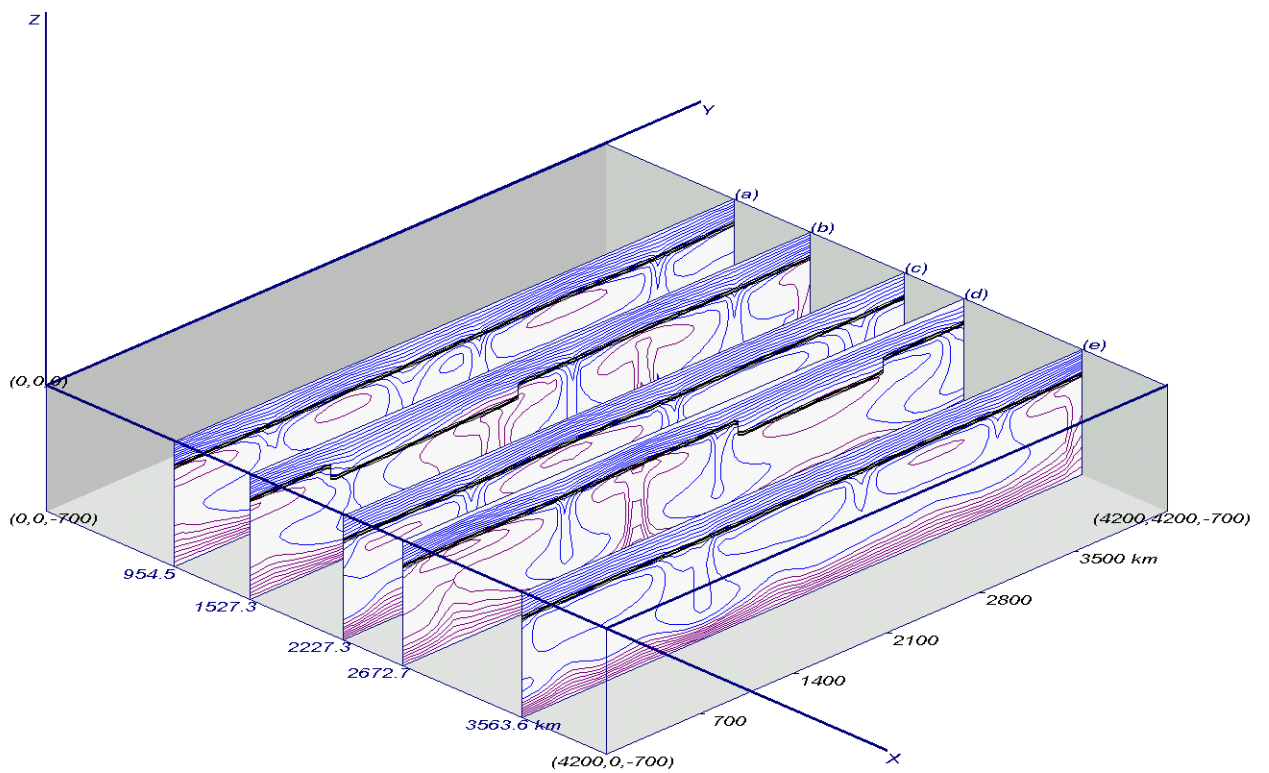


Рисунок 3.41 – Расположение в пространстве (yz) -сечений поля температуры под литосферой с двумя кратонами: (a): $x = 954,5$ км; (b): $x = 1527,3$ км; (c): $x = 2227,3$ км; (d): $x = 2672,7$ км; (e): $x = 3563,6$ км; $t = 0$ млн лет

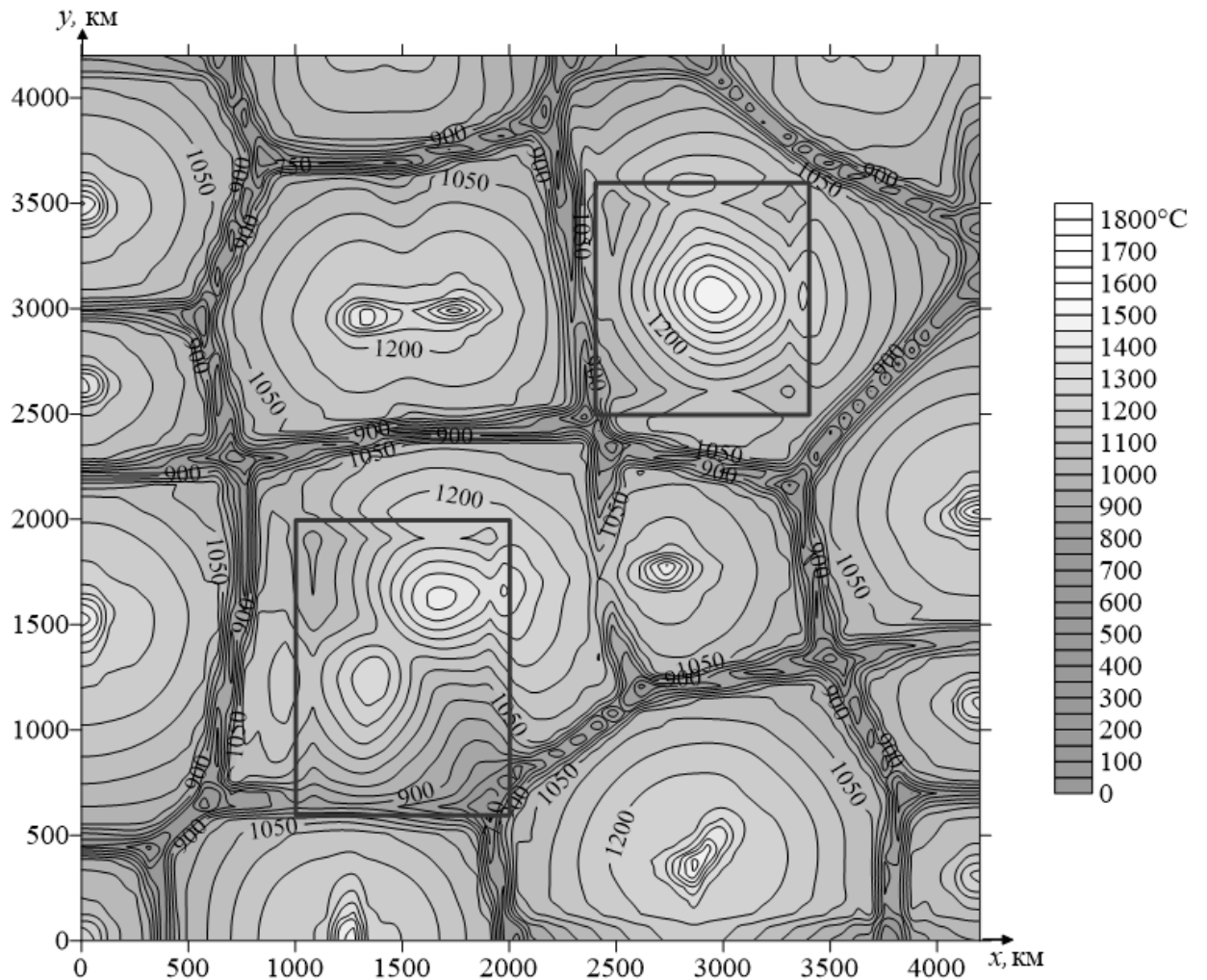


Рисунок 3.42 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 220$ км в модели конвекции под литосферой с двумя кронами; $t = 625$ млн лет

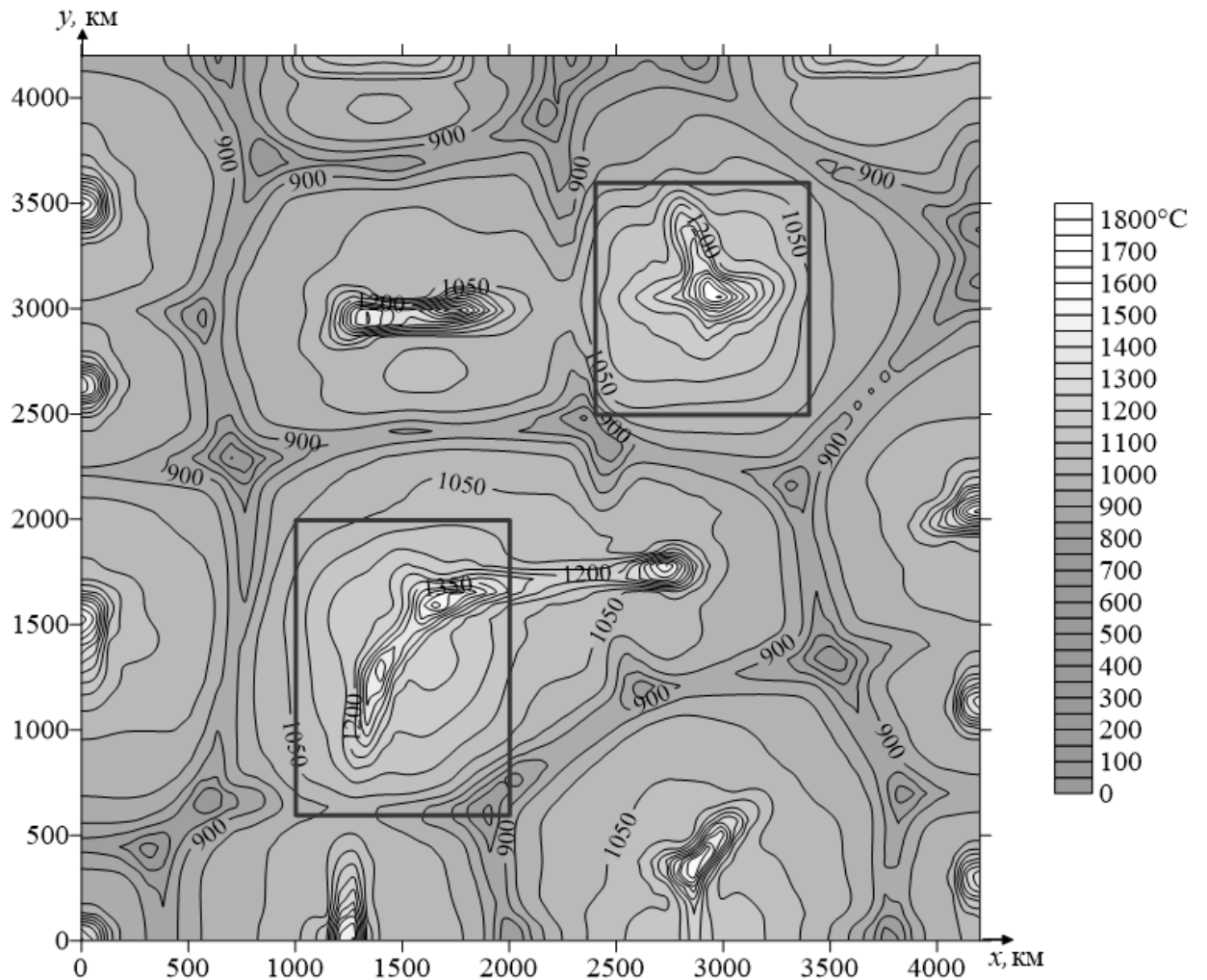


Рисунок 3.43 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 380$ километров в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами; $t = 625$ млн лет

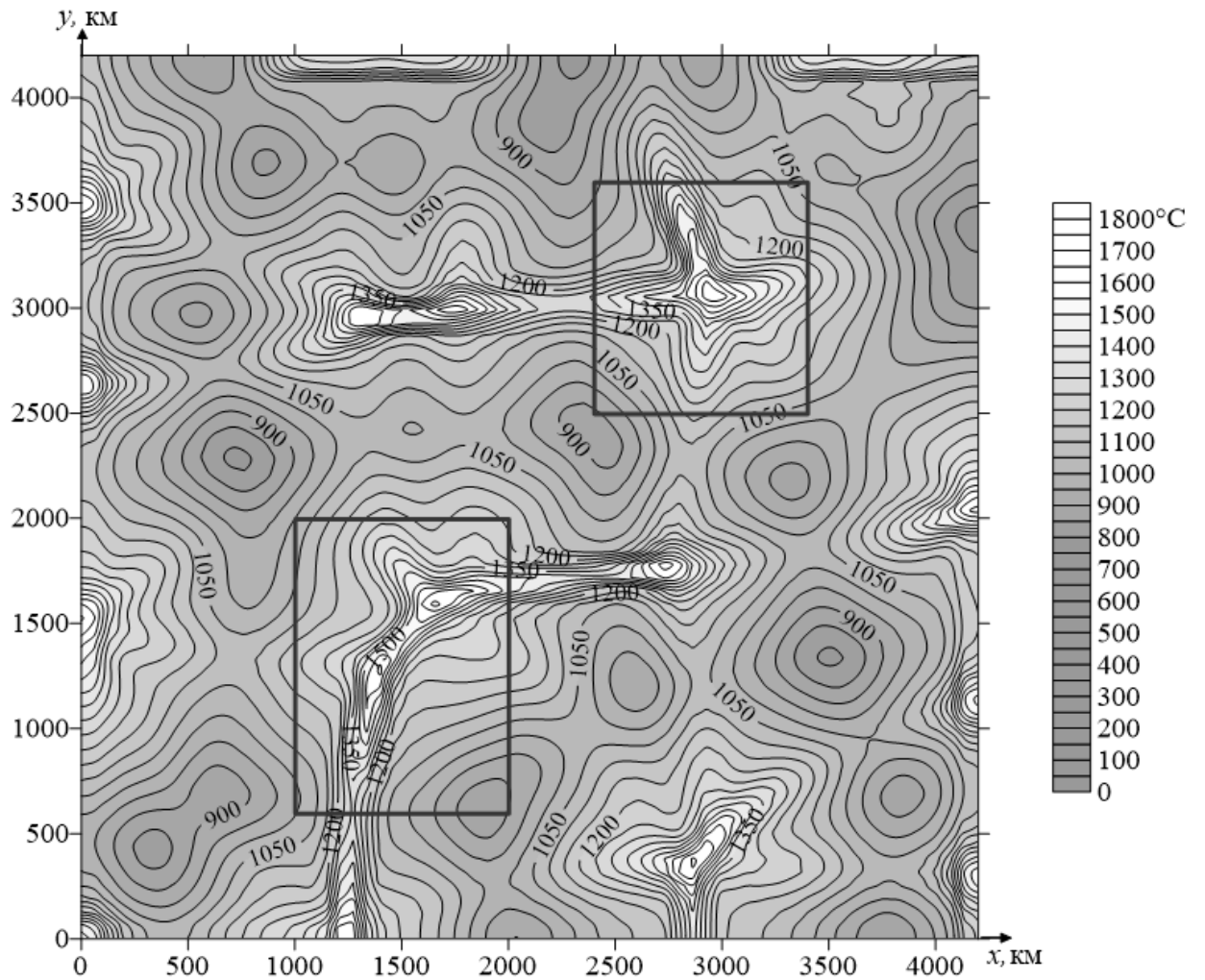


Рисунок 3.44 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 560$ километров в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами; $t = 625$ млн лет

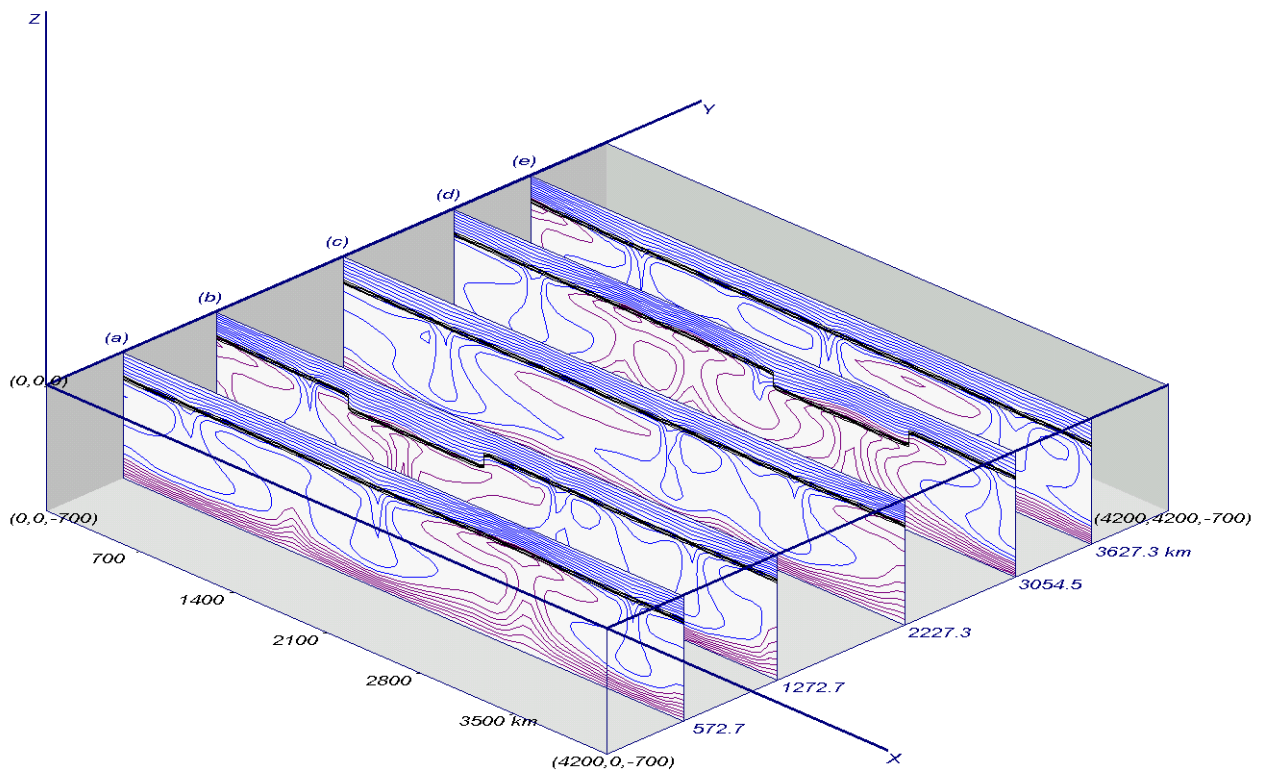


Рисунок 3.45 – Пространственное расположение сечений (xz) поля температуры под литосферой с двумя кратонами: (a): $y = 572,7$ км, (b): $y = 1272,7$ км, (c): $y = 2227,3$ км, (d): $y = 3054,5$ км, (e): $y = 3627,3$ км; $t = 625$ млн лет

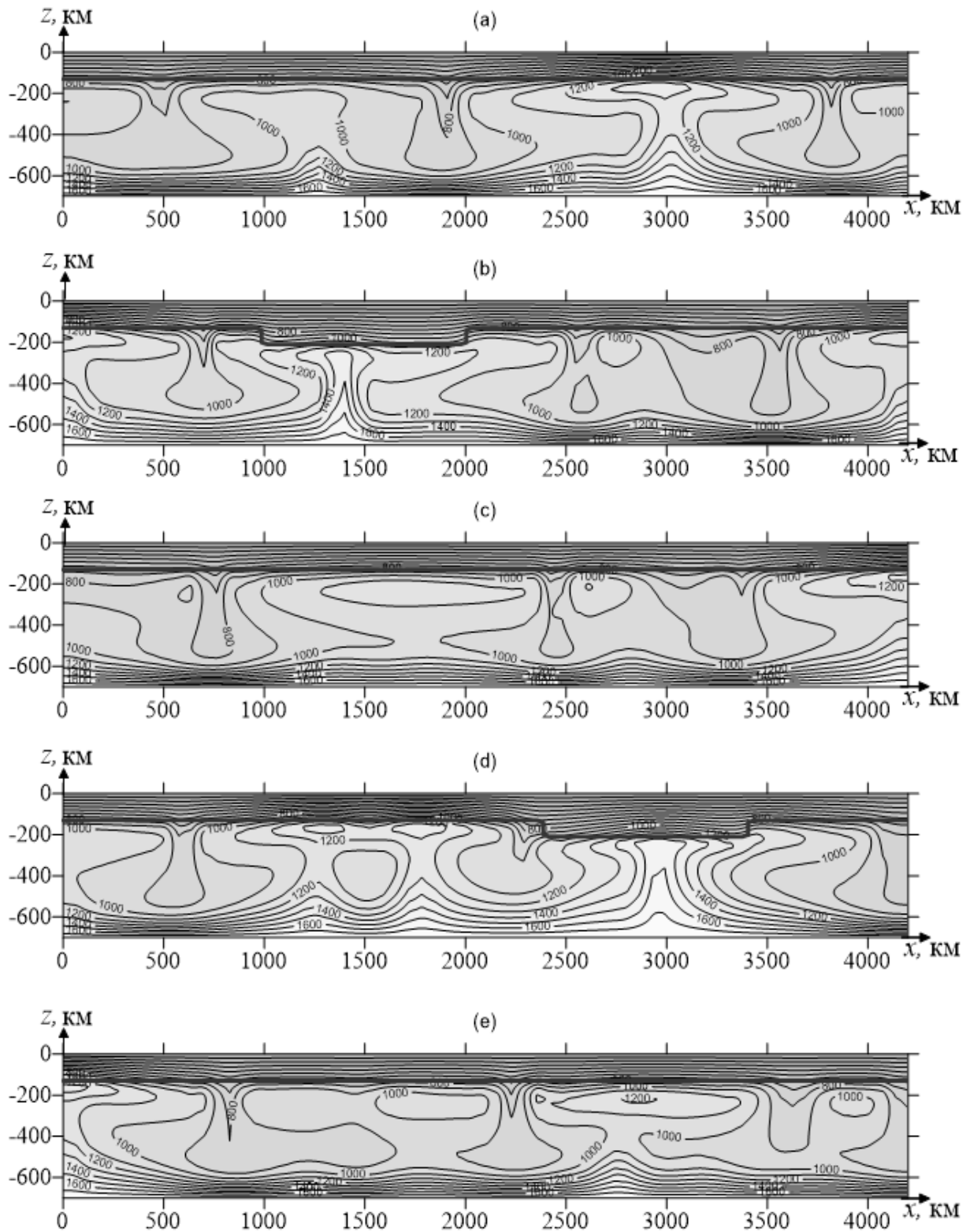


Рисунок 3.46 – Вертикальные (xz)-сечения поля температуры в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами: (a): $y = 572,7$ км; (b): $y = 1272,7$ км; (c): $y = 2227,3$ км; (d): $y = 3054,5$ км; (e): $y = 3627,3$ км; $t = 625$ млн лет

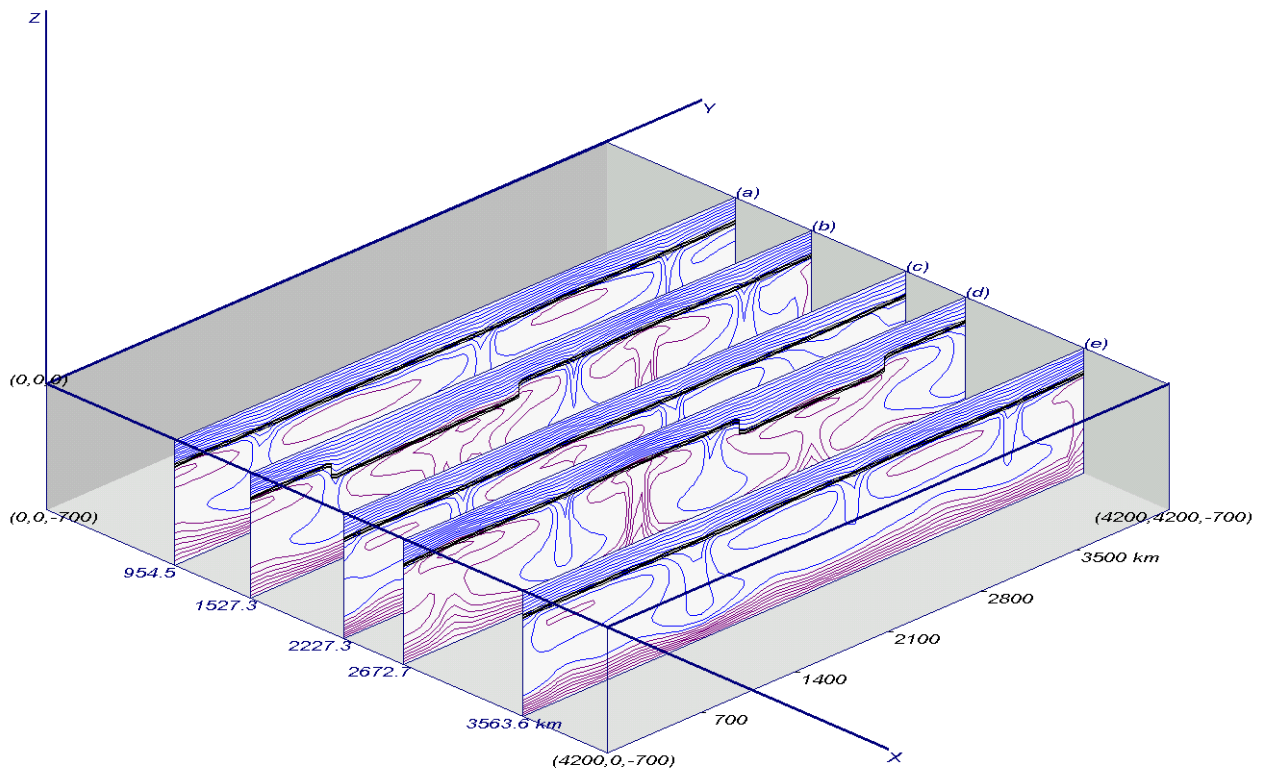


Рисунок 3.47 – Расположение в пространстве (yz)-сечений температурного поля под литосферой с двумя кратонами: (a): $x = 954,5$ км; (b): $x = 1527,3$ км; (c): $x = 2227,3$ км; (d): $x = 2672,7$ км; (e): $x = 3563,6$ км; $t = 625$ млн лет

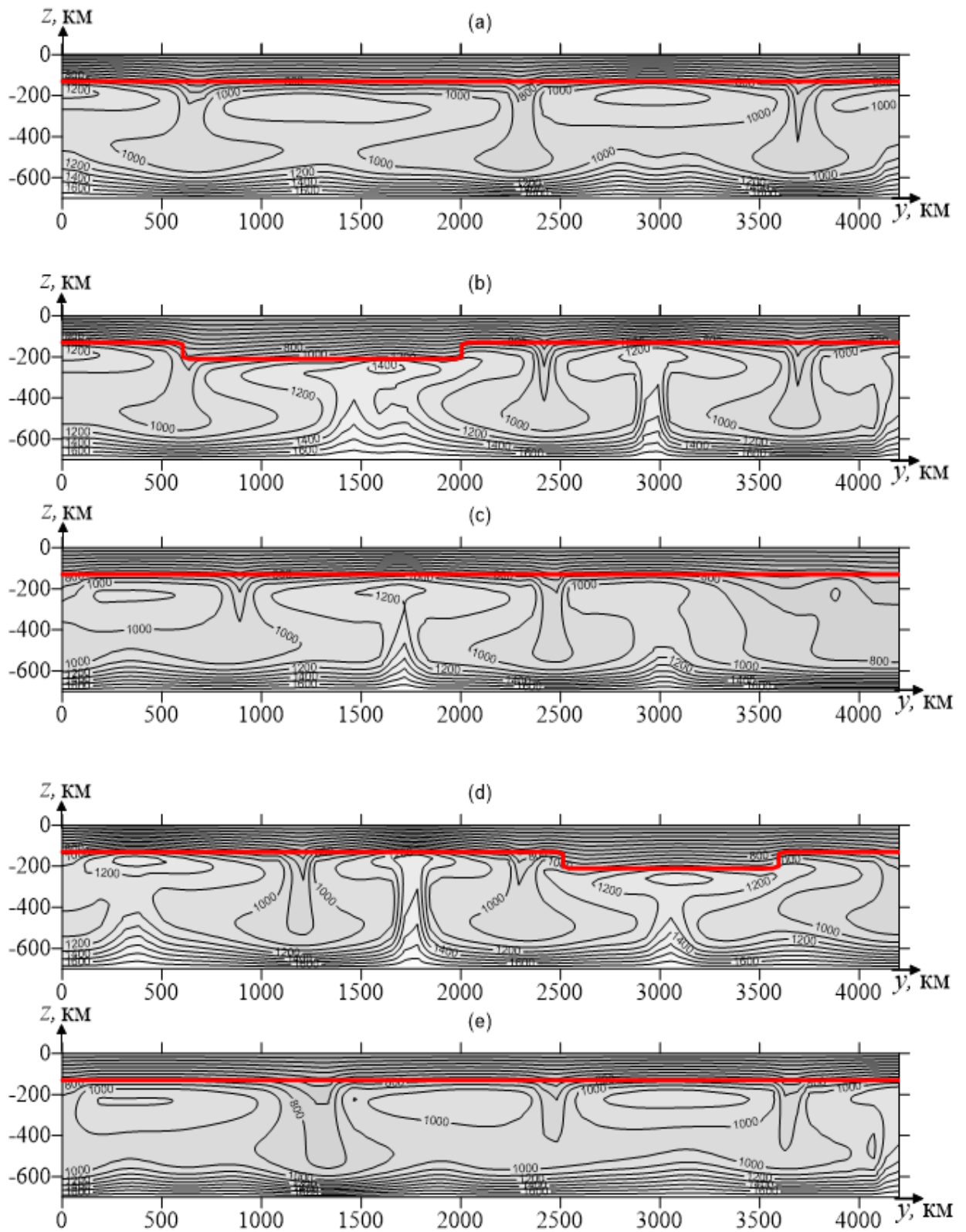


Рисунок 3.48 – Вертикальные (yz) -сечения поля температуры в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами: (a): $x = 954,5$ км; (b): $x = 1527,3$ км; (c): $x = 2227,3$ км; (d): $x = 2672,7$ км; (e): $x = 3563,6$ км; $t = 625$ млн лет

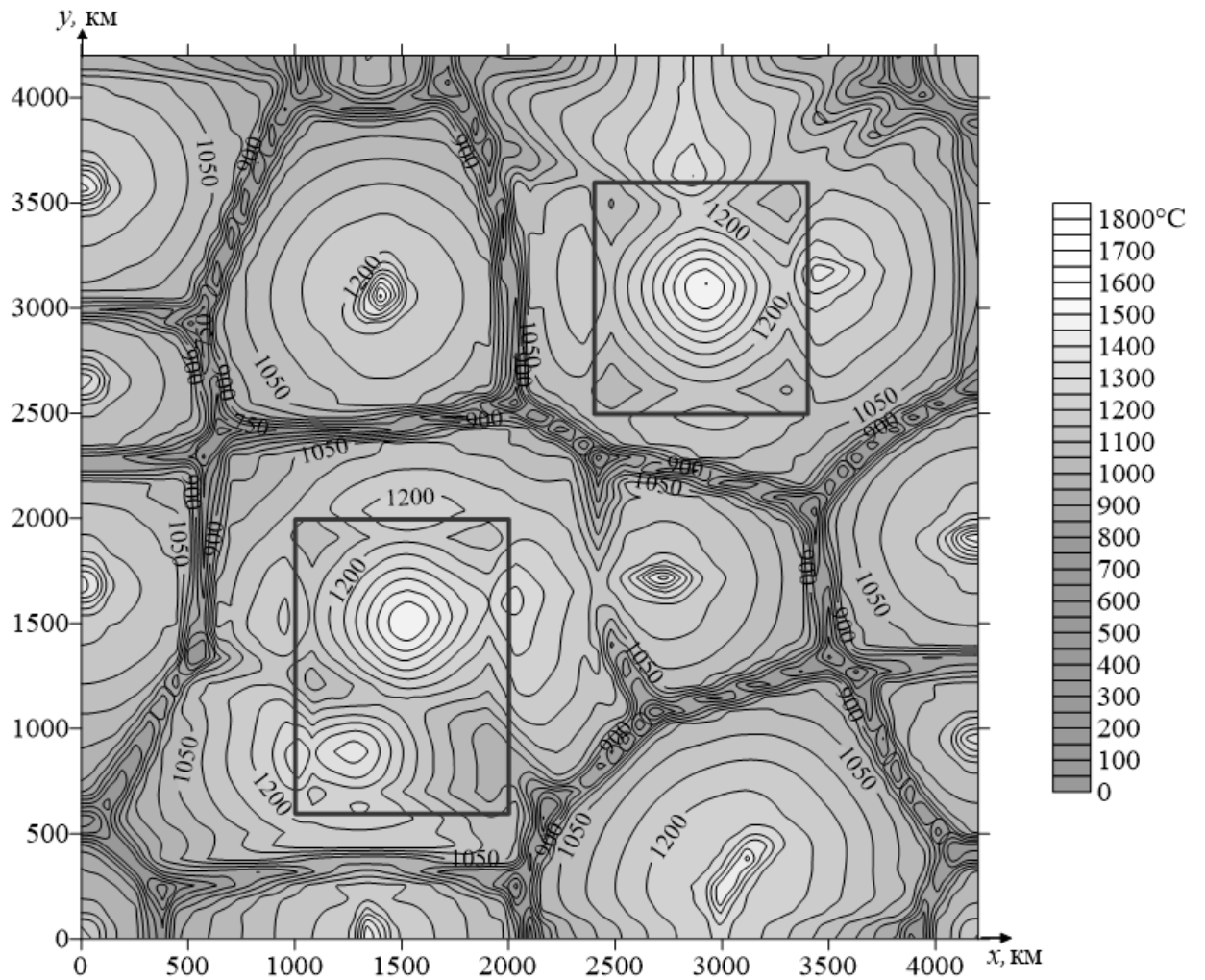


Рисунок 3.49 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 220$ км в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами; $t = 2500$ млн лет

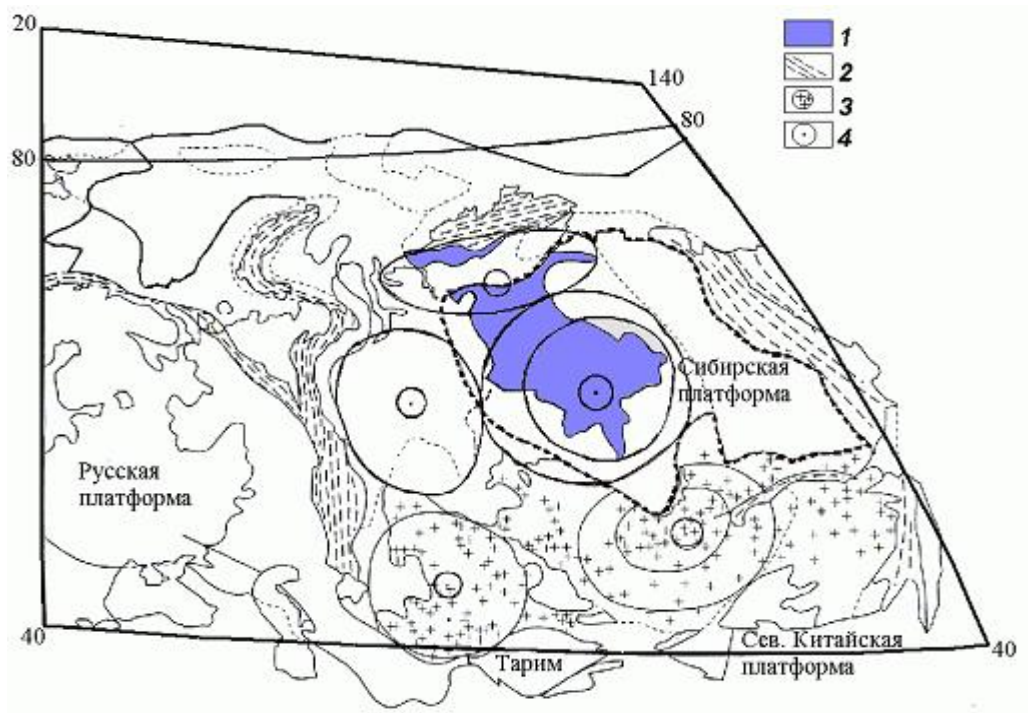


Рисунок 3.50 – Схематическое представление ареалов пермо-триасового магматизма в Евразии по [37]. 1 – траппы Сибирской платформы и Таймыра, образовавшиеся в результате воздействия центрального суперплюма на кратон; 2 – складчатые области; 3 – ареалы гранитного, щелочного и бимодального магматизма по периферии кратона; 4 – вероятные центры мантийных плюмов. Область простирается от 20° в.д. (восточной долготы) до 140° в.д. и от 40° с.ш. (сев. широты) до 85° с.ш.

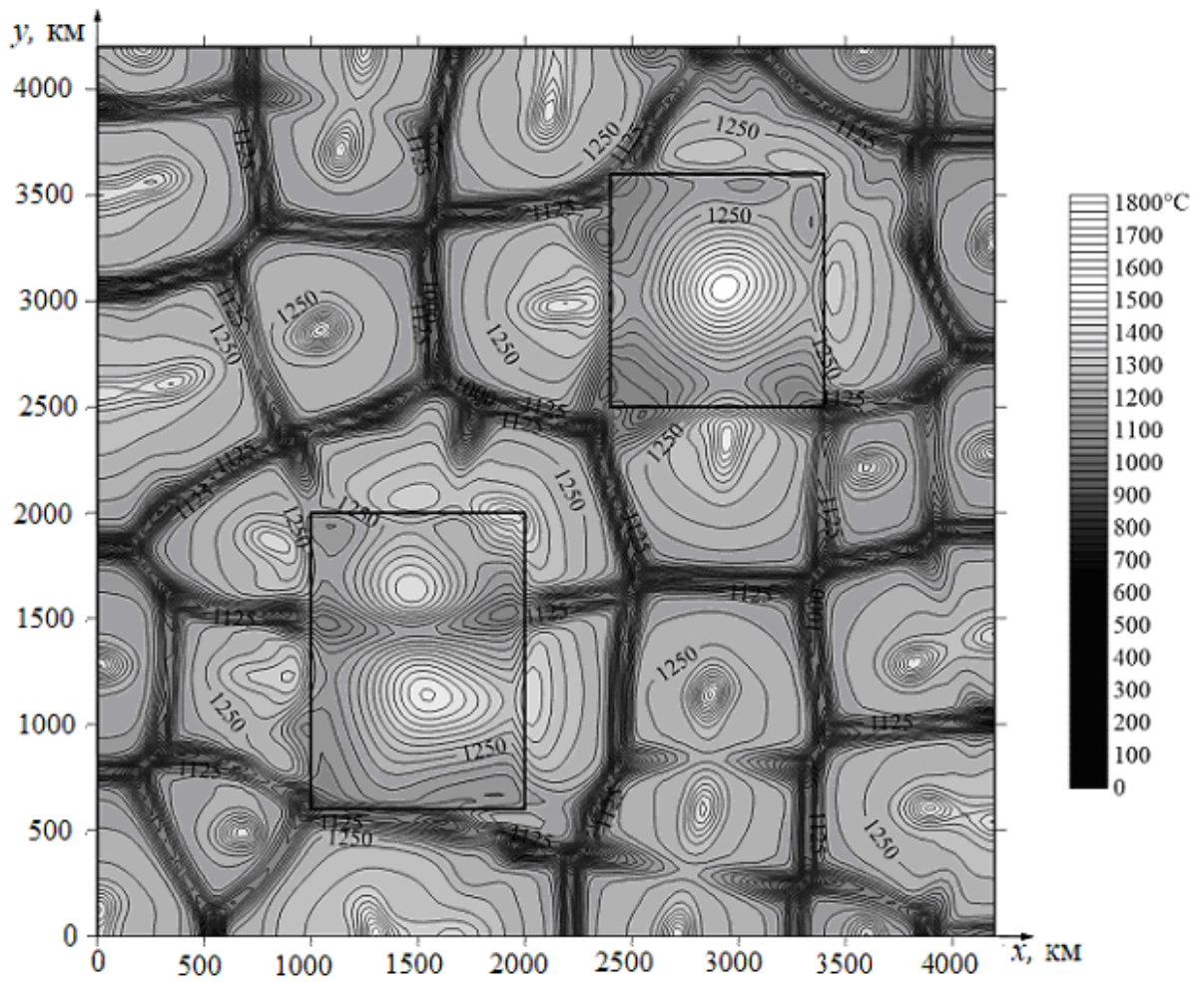


Рисунок 3.51 – Горизонтальное сечение температурного поля на глубине 220 км в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами при $t = 275$ млн лет

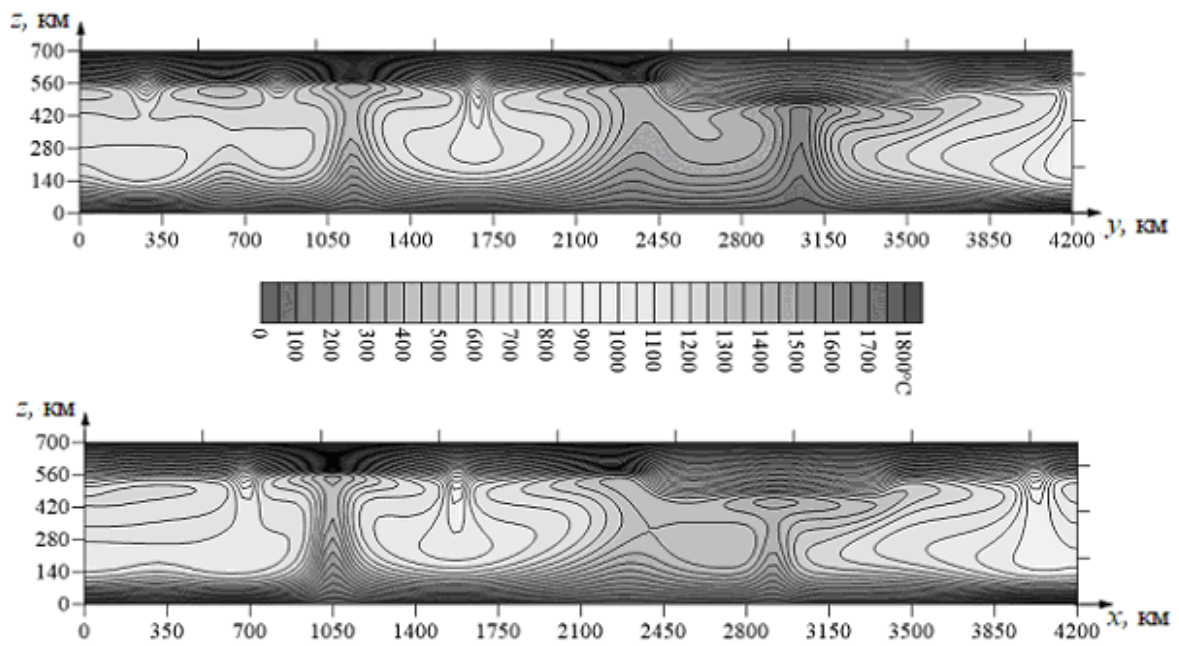


Рисунок 3.52 – Сечения поля температуры в плоскостях (yz) – верхний рисунок при $x = 3000$ км и (xz) – нижний рисунок при $y = 1500$ км) в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами при $t = 700$ млн лет

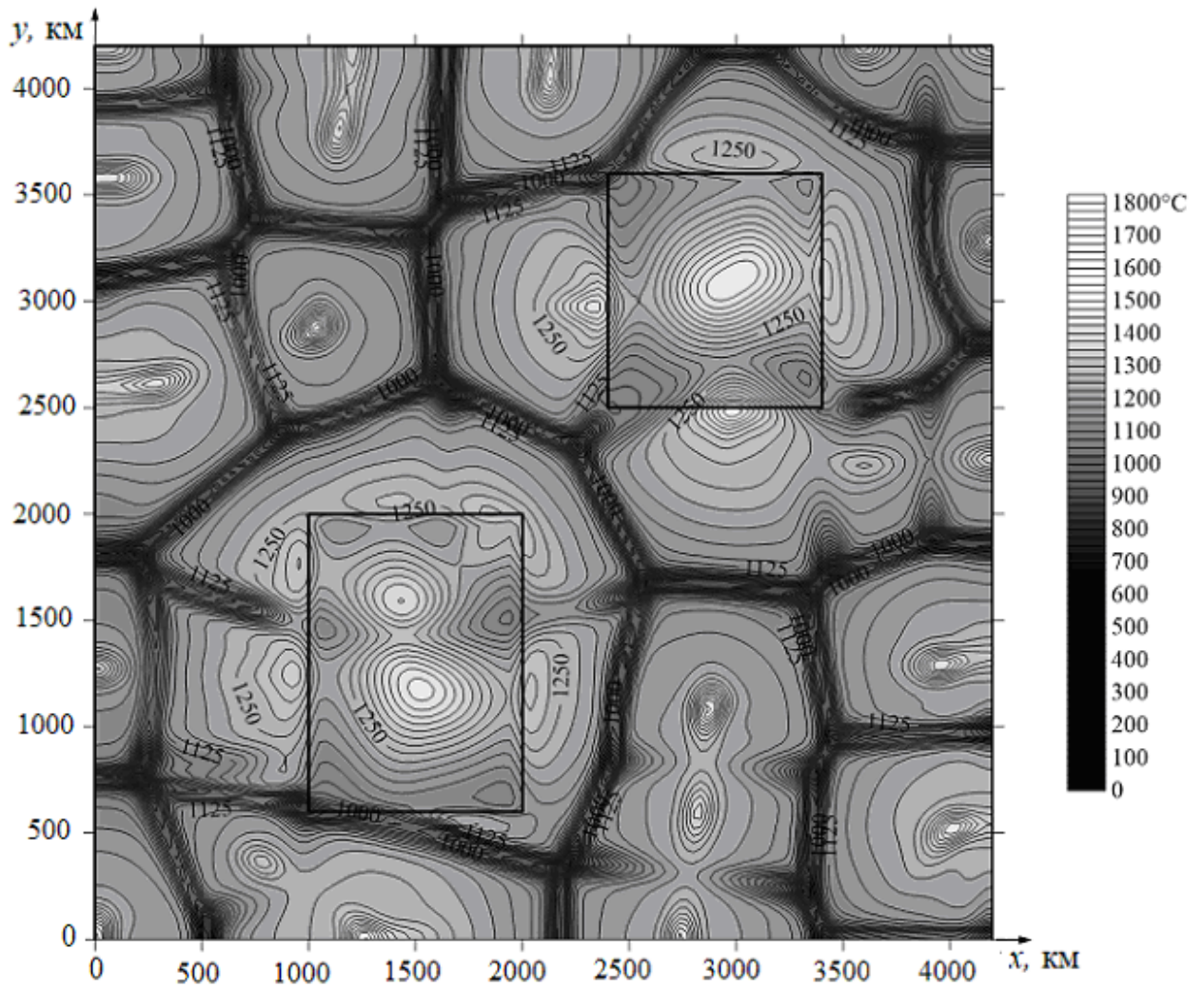


Рисунок 3.53 – Сечение поля температуры в плоскости (xy) на глубине 220 км в модели конвекции под литосферой с двумя кратонами при $t = 700$ млн лет

3.6 Моделирование конвекции под литосферой с ловушкой

Следующая геодинамическая модель представляет собой вычисление полей под литосферой, мощность которой составляет 200 километров (Рисунок 3.54). Всю область наискосок пересекает ловушка – утонение литосферной плиты до глубины 120 км. Ловушка моделируется полосой, ширина которой составляет тысячу километров и располагается геометрически так же, как и кратон в предыдущей модели (п. 3.2).

Области с тонкой литосферой можно наблюдать на всех континентах. На территории Евразийской плиты Центрально-Азиатский складчатый пояс как раз и представляет из себя ловушку, т.к. имеет глубину от 40 км до 90 км при средней мощности окружающей литосферной плиты в 135 км.

Порядок вычислений остаётся таким же, как и в предыдущих моделях. Для начала была найдена квазистационарная структура конвективных течений под равномерной литосферой мощностью в 200 км (Рисунок 3.54, Рисунок 3.55). Затем в эту структуру течения вводится ловушка - протяжённый участок тонкой литосферы. Расположение ловушки и начальное состояние мантийной конвекции показано на следующих десяти рисунках (Рисунок 3.56 – Рисунок 3.65). Уже по прошествии нескольких десятков млн лет начинают сказываться изменения, внесённые в решение новой геометрией расчётной области.

Определяющей тенденцией при эволюции конвективных течений под тонкой литосферой является формирование нисходящих потоков. Конвективный процесс выстраивает структуру потоков, способствующую наиболее эффективному выноса тепла. Сравнение (Рисунок 3.59 и Рисунок 3.61) показывает, что через 625 млн лет нисходящие конвективные потоки постепенно вытесняют восходящие в область с более мощной литосферой. Квазистационарное состояние для

модельной ловушки наступает через 2500 млн лет (Рисунок 3.66 – Рисунок 3.74). На глубинах 380 км и более пребывает охлаждённая область с температурой в пределах 1050-1100 °С под всей ловушкой (Рисунок 3.69, Рисунок 3.70). В астеносфере на глубинах 120-350 км, как и во всех представленных в данной главе моделях мелкомасштабная мода конвекции развивается в местах перепадов мощностей блоков, слагающих литосферную плиту. В данной обстановке – около бортов ловушки (Рисунок 3.67 и Рисунок 3.68). При этом, температура в нисходящих потоках не превышает 900°С, а в восходящих составляет величину порядка 1200°С. Развитие мелкомасштабных ячеек происходит в основном в плоскости, которая параллельна границе утонённой литосферы. Размеры таких ячеек находятся в пределах 400-600 км.

Характер конвективных течений в модели с ловушкой в форме полосы позволяет вернуться к обсуждению вопроса о правомерности применения двумерного моделирования под протяжёнными геологическими объектами.

Как в трёхмерном, так и в двумерном случае [106] под ловушкой в целом фиксируются нисходящие конвективные течения, но, вместе с тем, в трёхмерной численной модели мелкомасштабная мода конвекции проявляет себя в приграничных районах около бортов ловушки. Это оказывается принципиальным моментом при сравнении результатов численного моделирования с реальными геологическими структурами. Скорее всего двумерное моделирование вполне годится в качестве нулевого приближения при построениях динамических моделей мантийной конвекции под континентами, хотя бы потому, что не требует значительных вычислительных ресурсов. Таким образом, по-видимому, становится очевидным, что при исследовании конкретных геологических обстановок необходимо привлекать трёхмерное численное моделирование к трёхмерным модельным объектам.

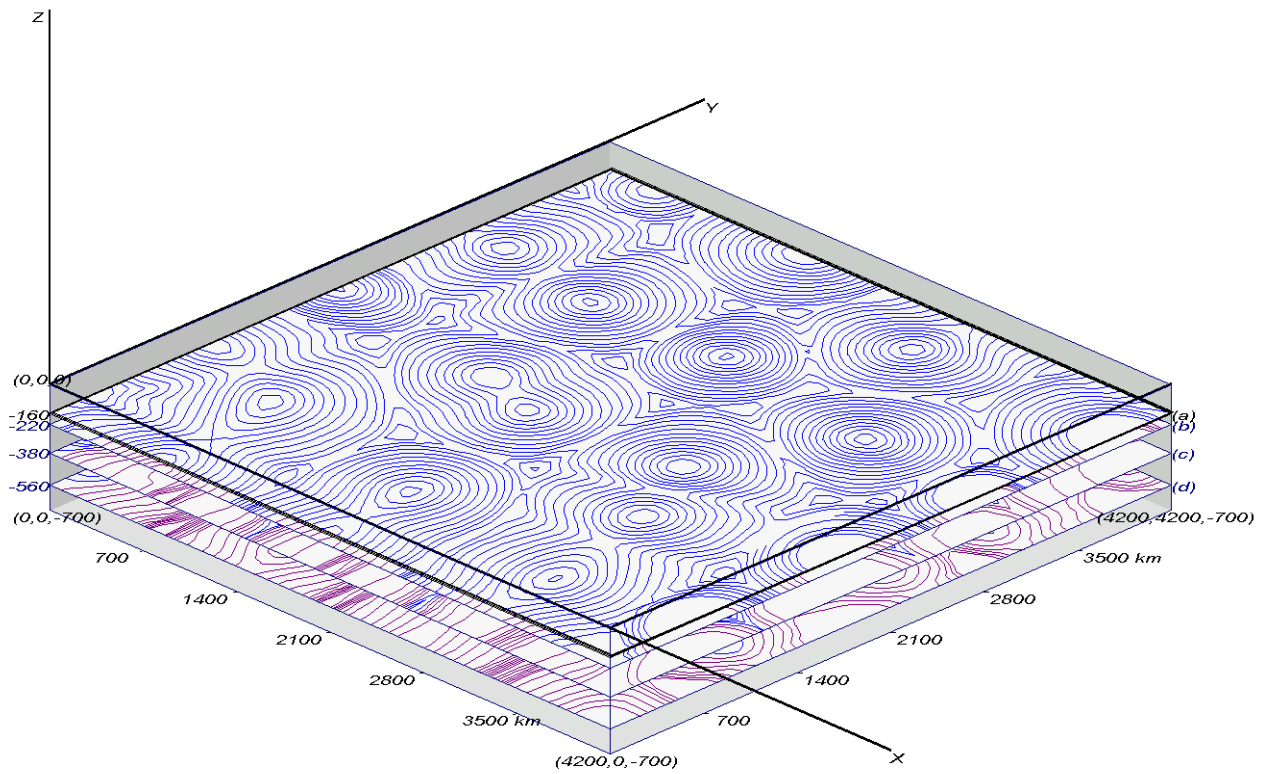


Рисунок 3.54 – Расположение горизонтальных (xy) -сечений температурного поля в модели конвекции под ровной двухсоткилометровой мощности литосферной плитой на глубинах (a): $z = 160$ км; (b): $z = 220$ км; (c): $z = 380$ км; (d): $z = 560$ км; $t = 2500$ млн лет

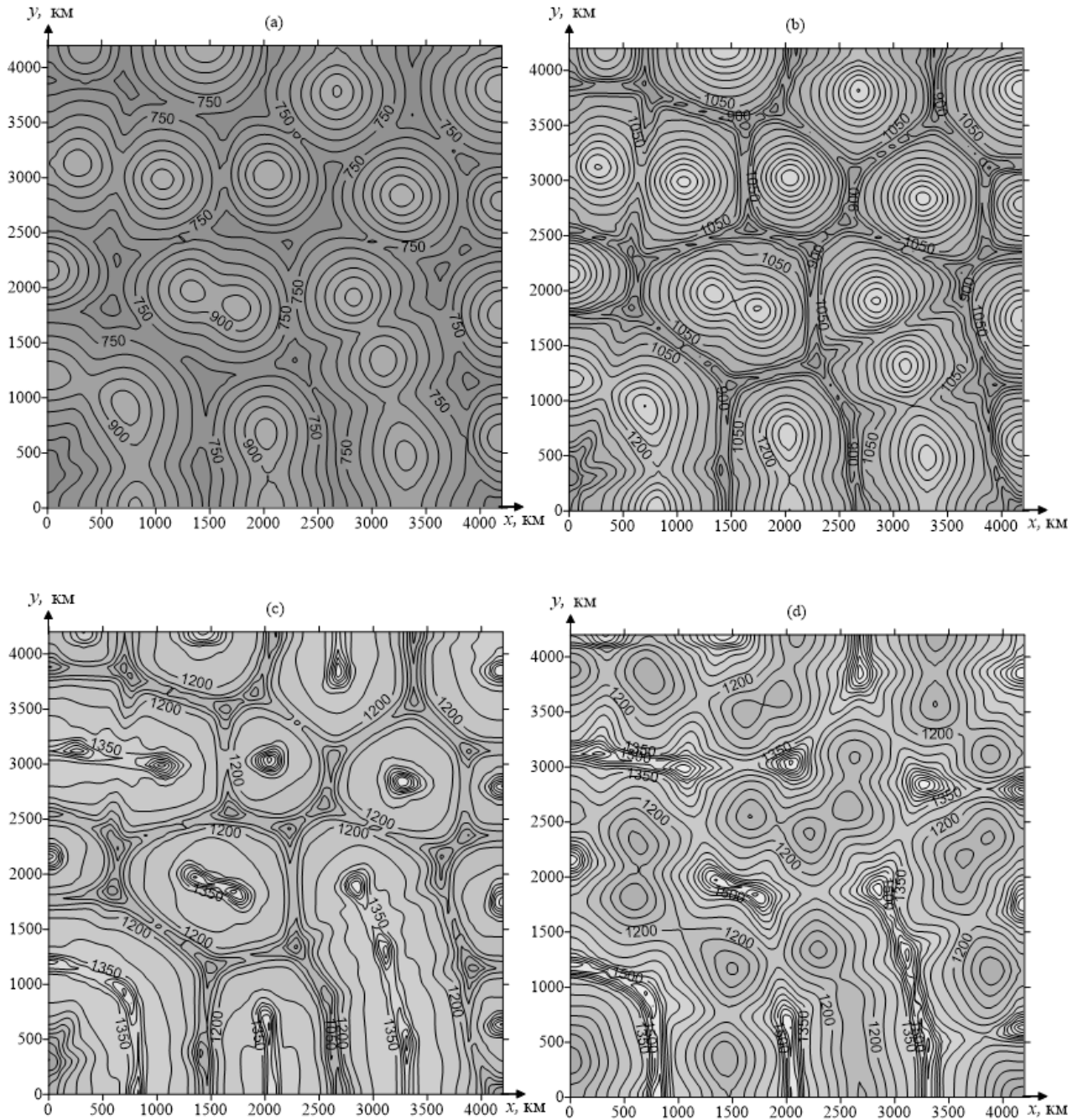


Рисунок 3.55 – Горизонтальные (xy)-сечения температурного поля в модели конвекции под ровной двухсоткилометровой мощностью литосферной плитой на глубинах (а): $z = 160$ км; (б): $z = 220$ км; (с): $z = 380$ км; (д): $z = 560$ км; $t = 2500$ млн лет

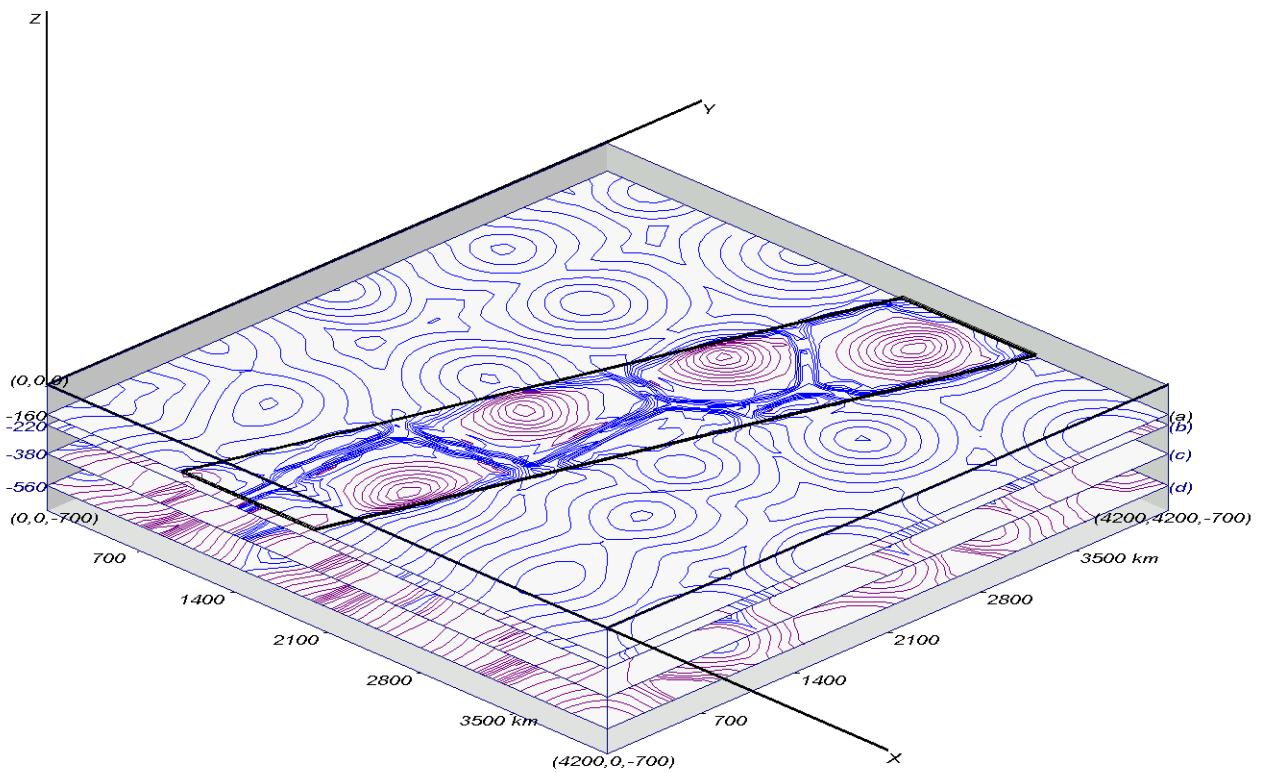


Рисунок 3.56 – Расположение горизонтальных (xy)-сечений в модели конвекции под литосферой с протяжённой ловушкой при $t = 0$ млн лет. Мощность литосферы под ловушкой составляет 120 км; толщина окружающей литосферы – 200 км. Сечения на глубинах 160-(a), 220-(b), 380-(c) и 560 км-(d)

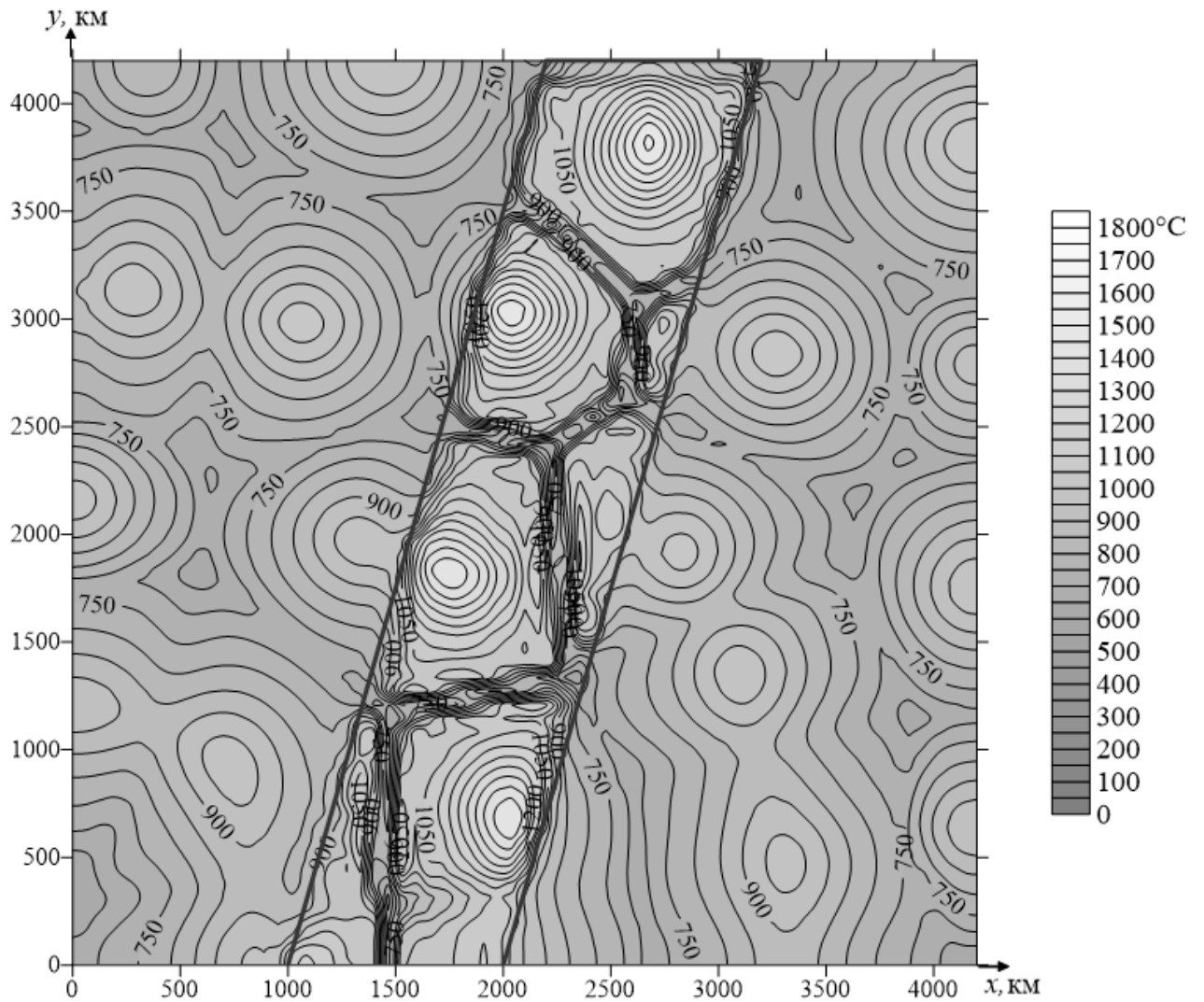


Рисунок 3.57 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 160$ км в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 0$ млн лет

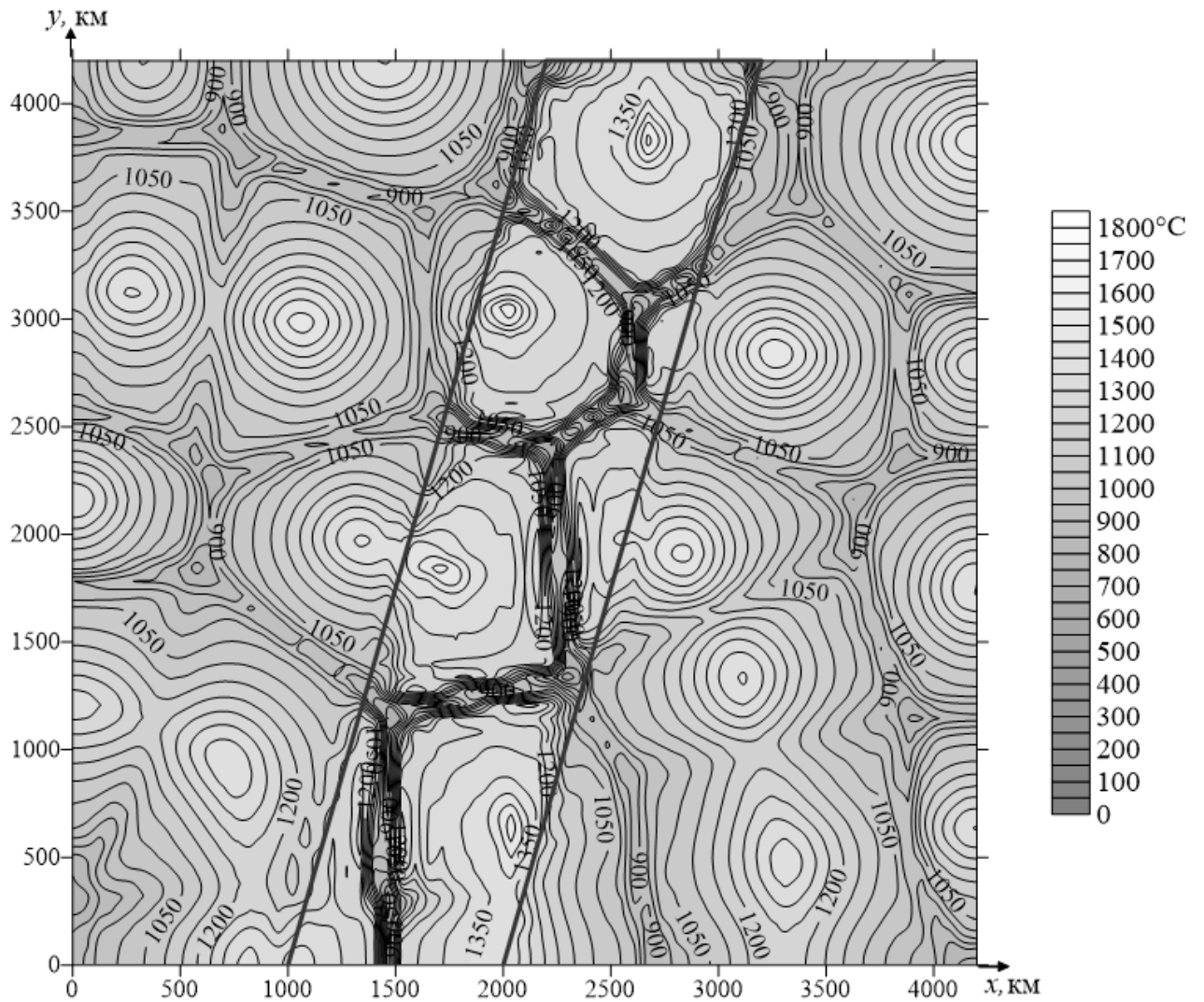


Рисунок 3.58 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 220$ км в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 0$ млн лет

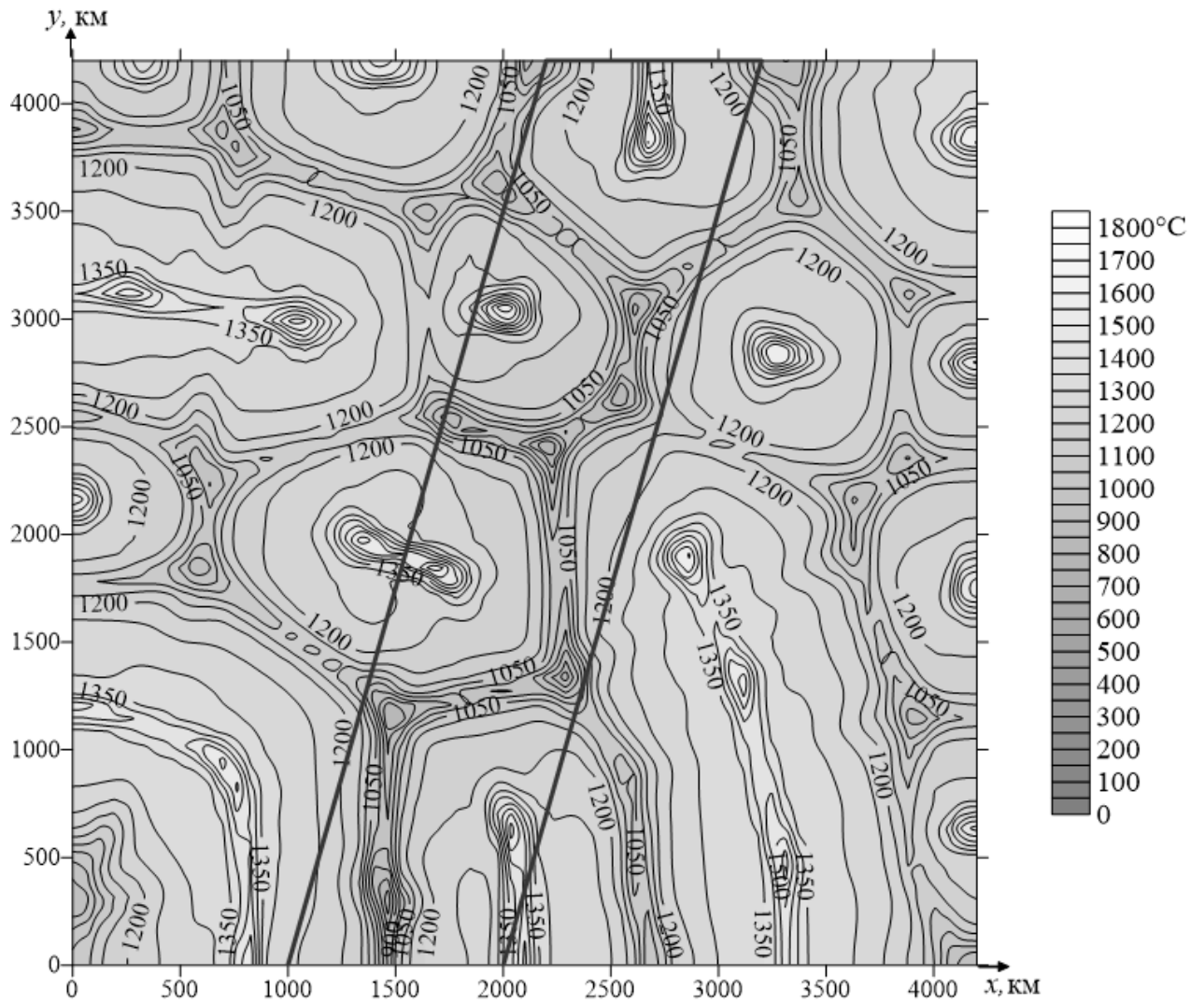


Рисунок 3.59 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 380$ км в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 0$ млн лет

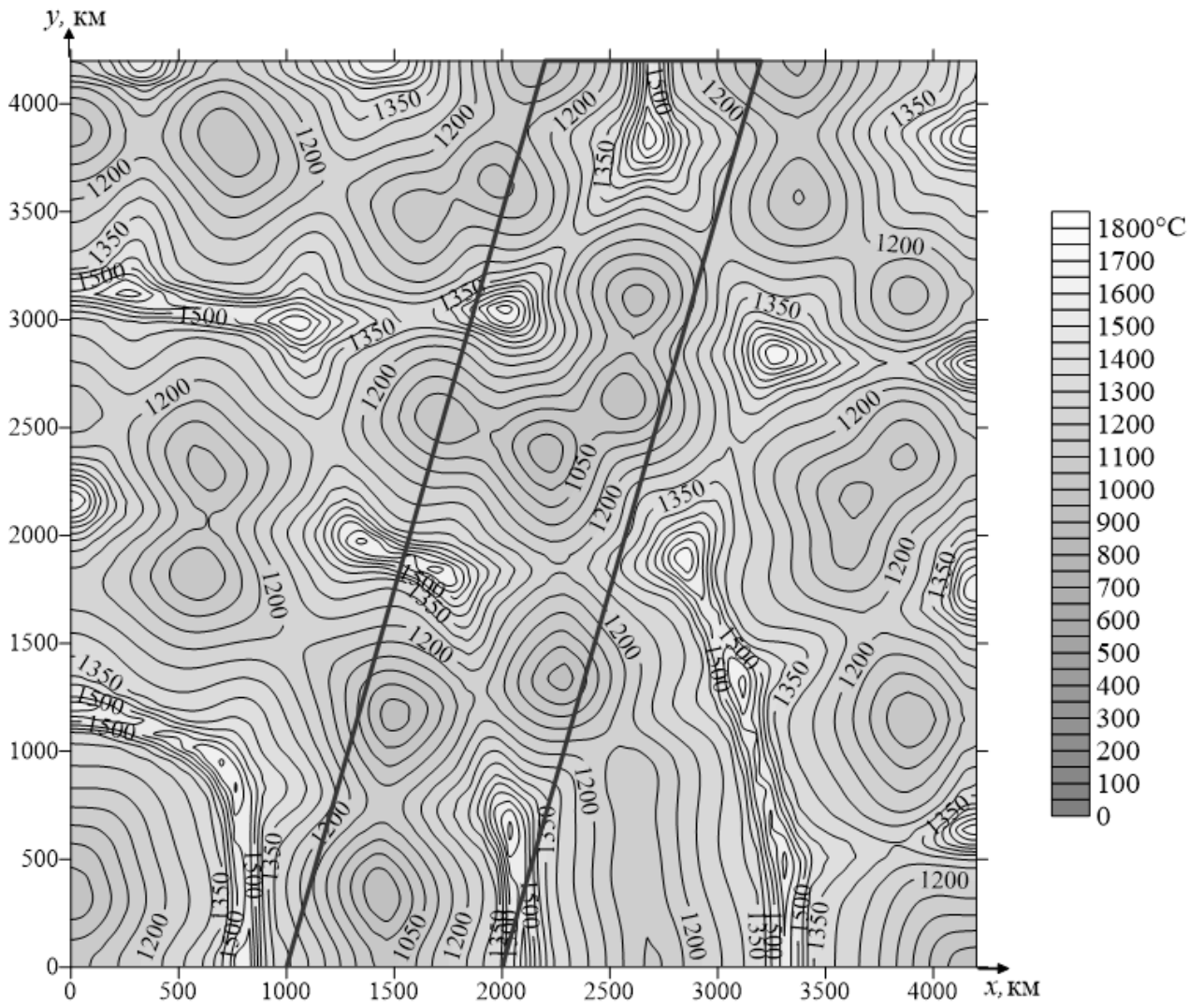


Рисунок 3.60 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 560$ км в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 0$ млн лет

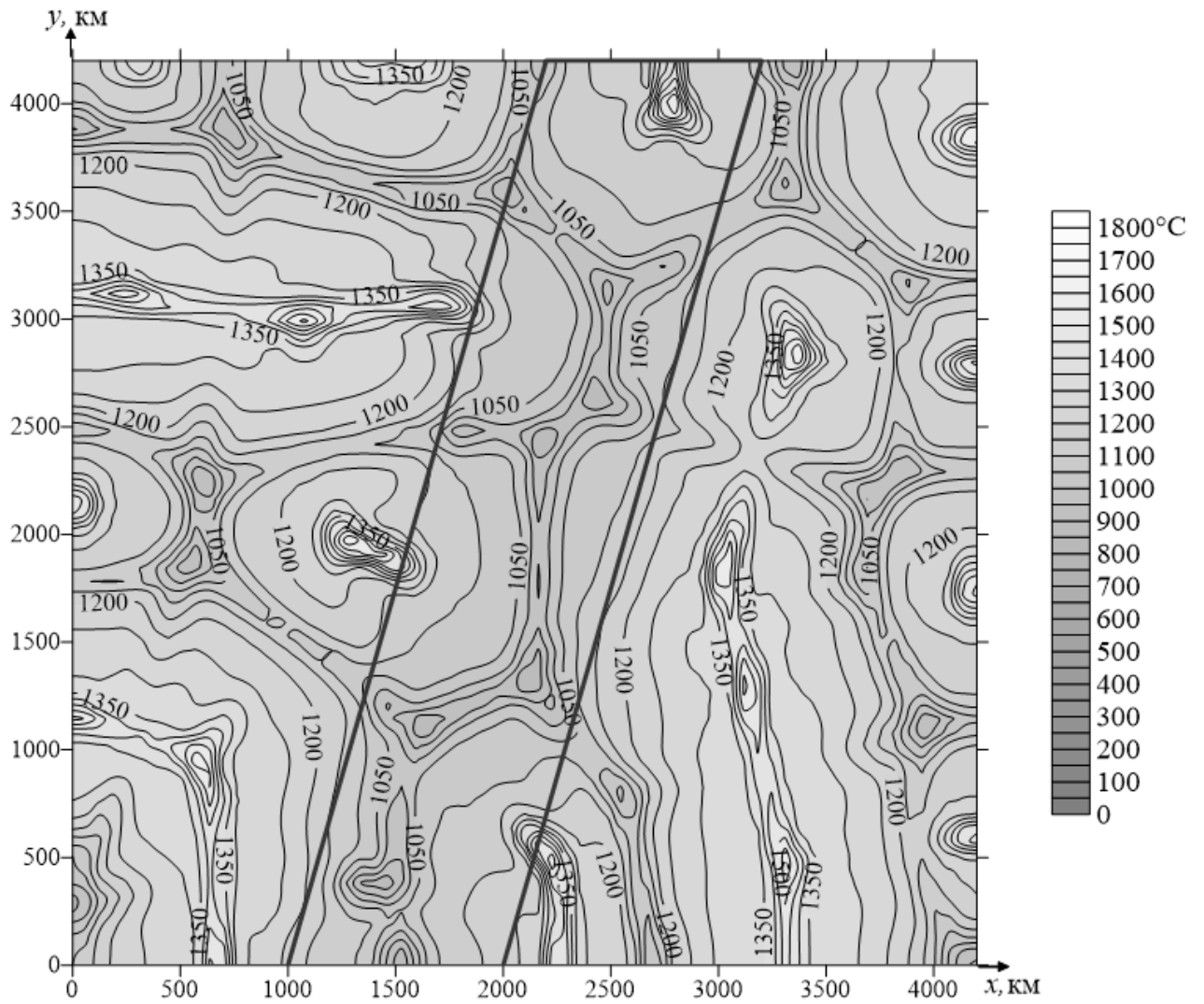


Рисунок 3.61 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры при $z = 380$ км в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 625$ млн лет

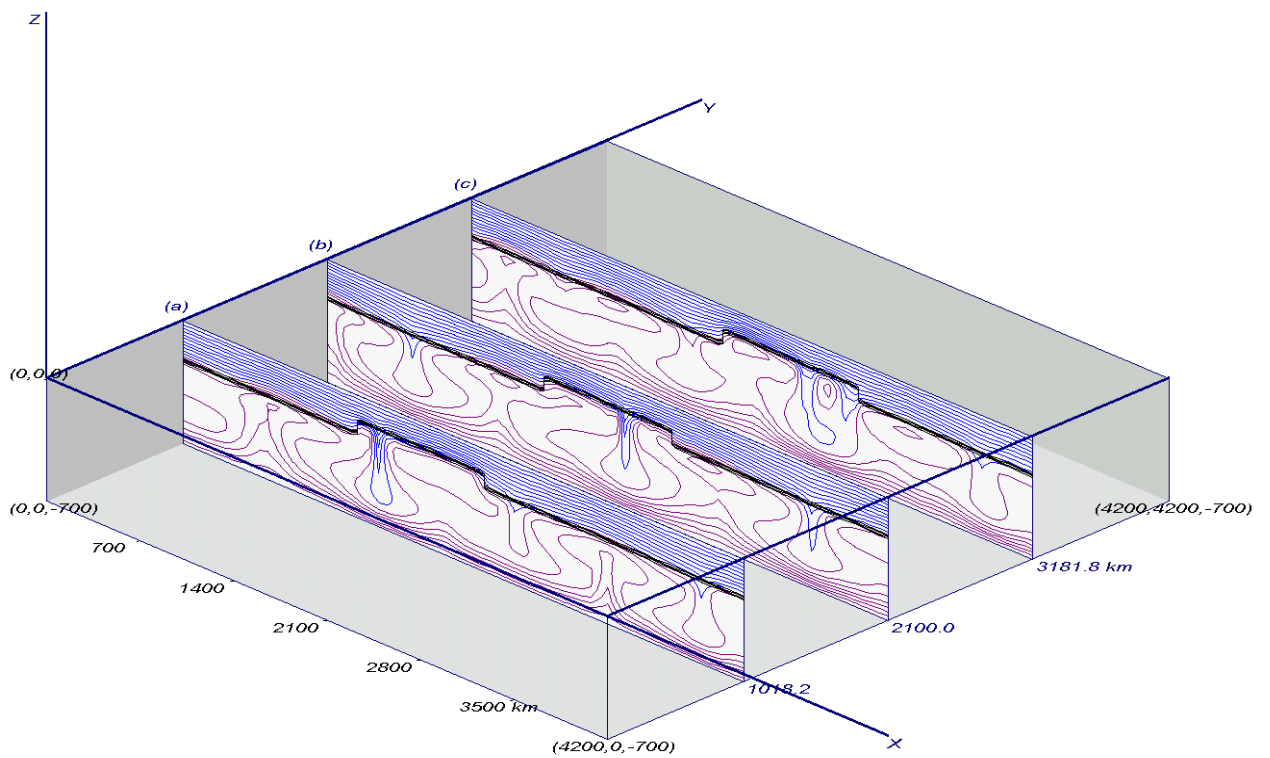


Рисунок 3.62 – Расположение вертикальных (xz)-сечений в модели конвекции под литосферой с ловушкой: (a): $y = 1018,2$ км, (b): $y = 2100,0$ км, (c): $y = 3181,8$ км; $t = 0$ млн лет

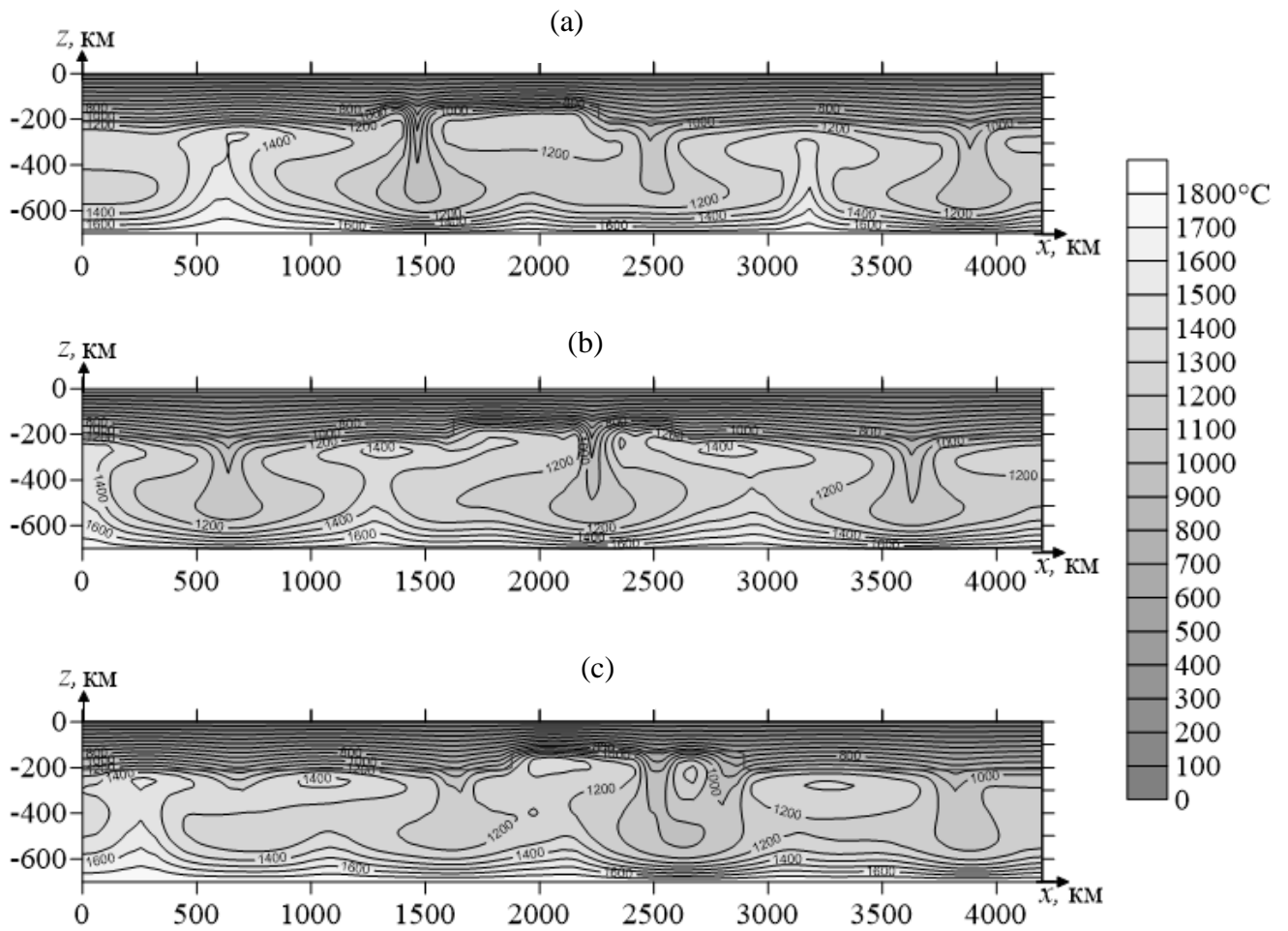


Рисунок 3.63 – Вертикальные (xz)-сечения в модели конвекции под литосферой с ловушкой:
 (a): $y = 1018,2$ км, (b): $y = 2100,0$ км, (c): $y = 3181,8$ км; $t = 0$ млн лет

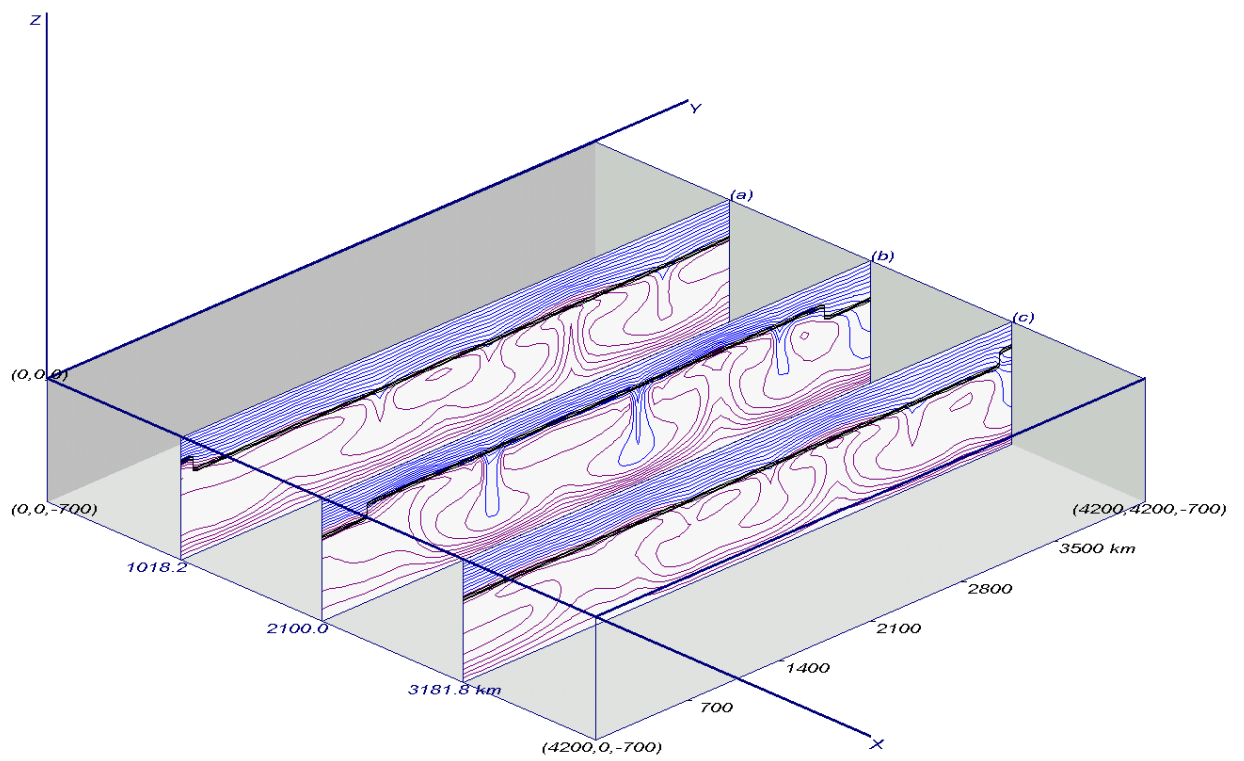


Рисунок 3.64 – Расположение вертикальных (yz)-сечений в модели конвекции под литосферой с ловушкой: (a): $x = 1018,2$ км, (b): $x = 2100,0$ км, (c): $x = 3181,8$ км; $t = 0$ млн лет

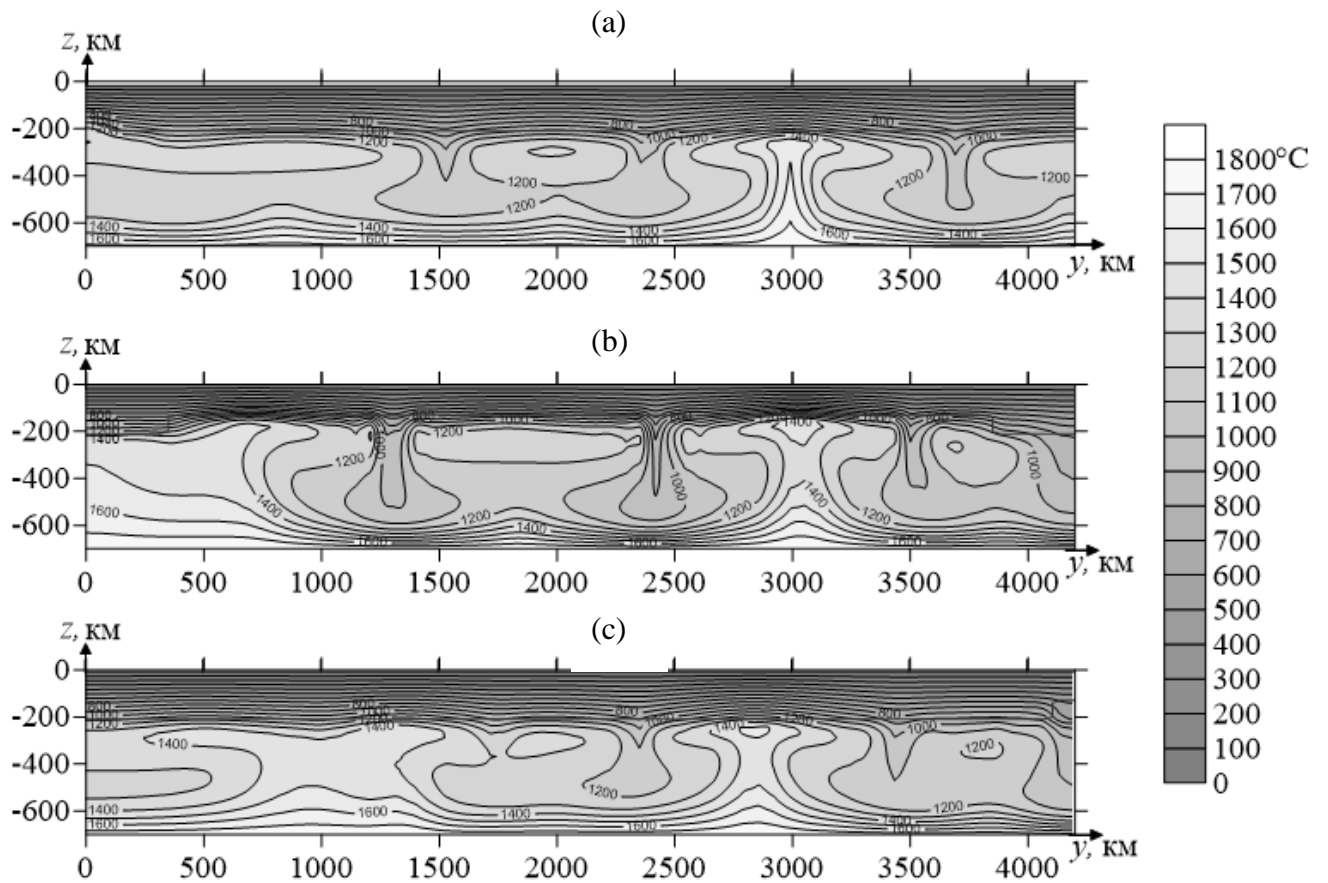


Рисунок 3.65 – Вертикальные (yz)-сечения в модели конвекции под литосферой с ловушкой:
 (a): $x = 1018,2$ км, (b): $x = 2100,0$ км, (c): $x = 3181,8$ км; $t = 0$ млн лет

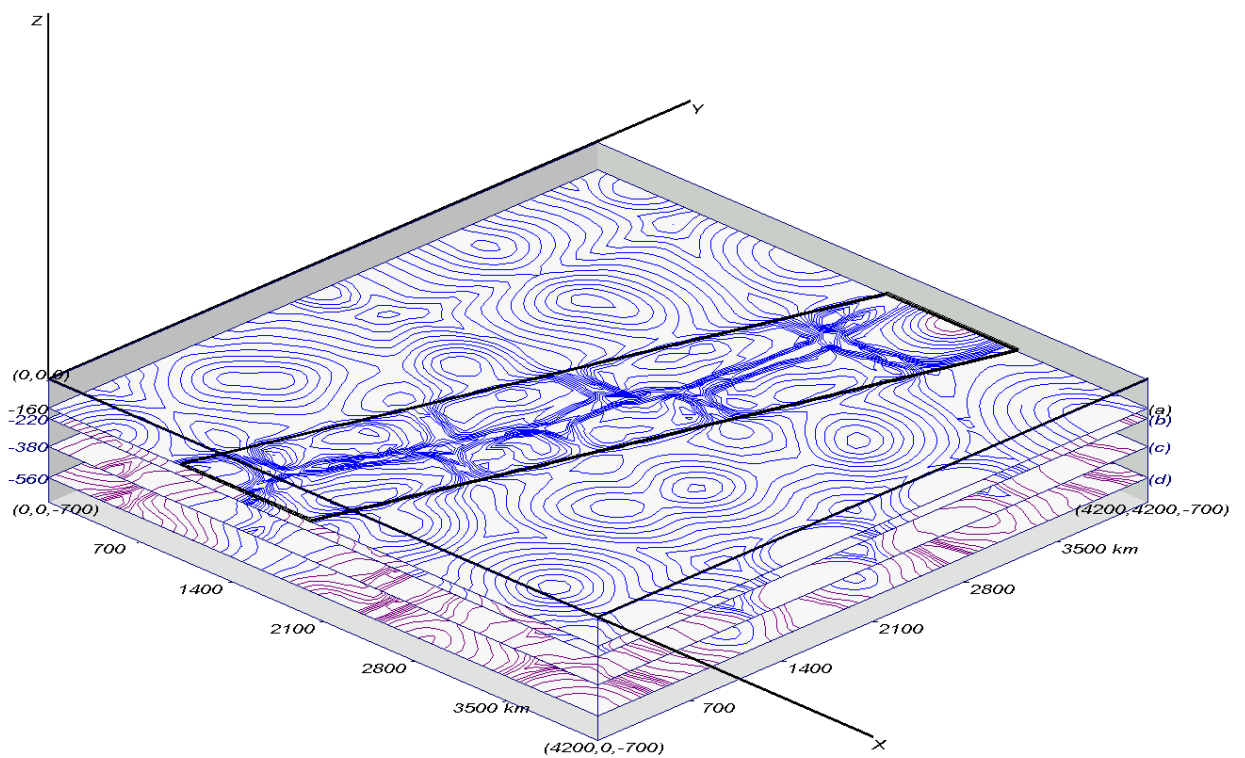


Рисунок 3.66 – Расположение горизонтальных (xy)-сечений температурного поля в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 2500$ млн лет. Сечения на глубинах (a): $z = 160$ км, (b): $z = 220$ км, (c): $z = 380$ км; (d): $z = 560$ км

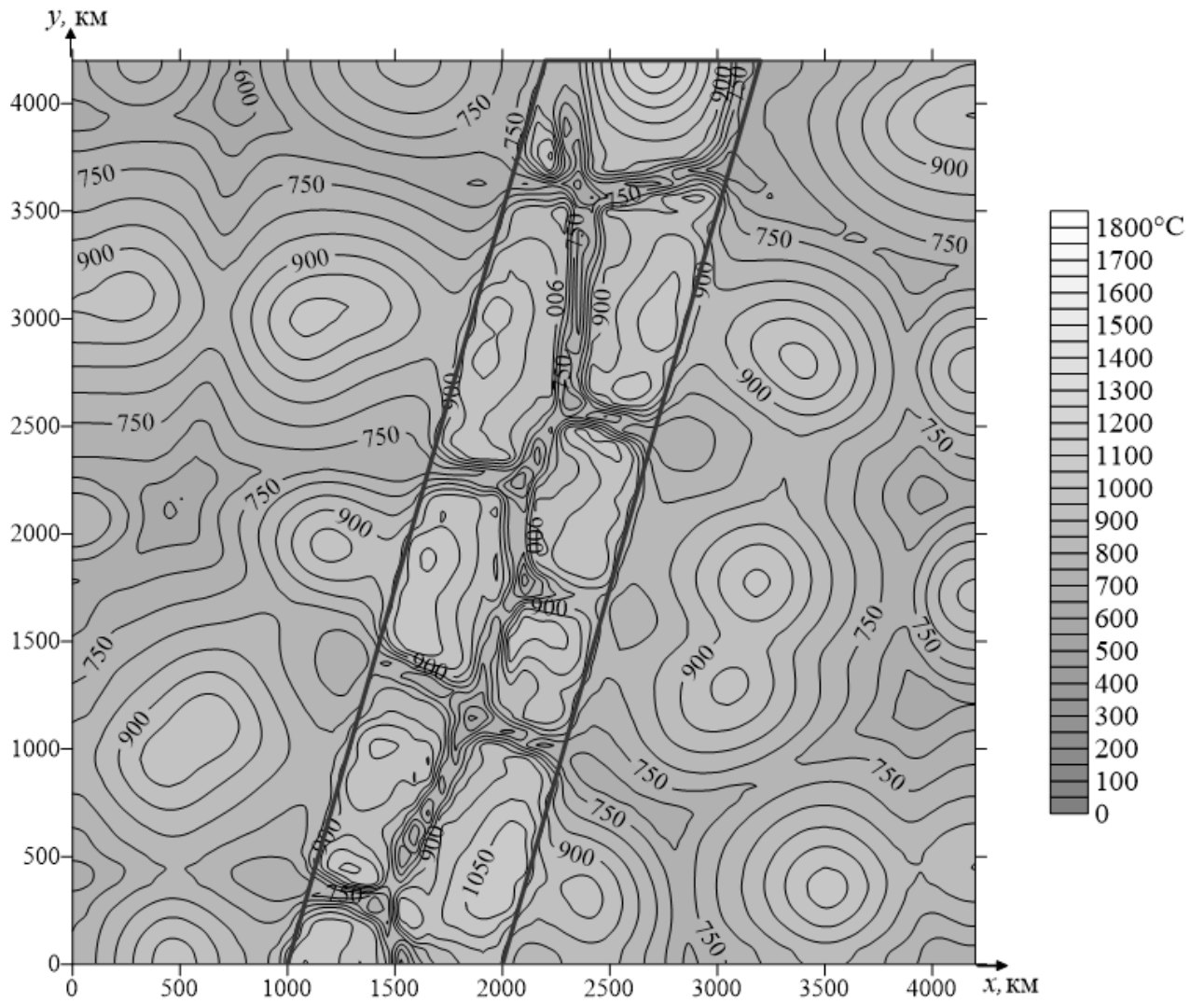


Рисунок 3.67 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры на глубине $z = 160$ км в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 2500$ млн лет

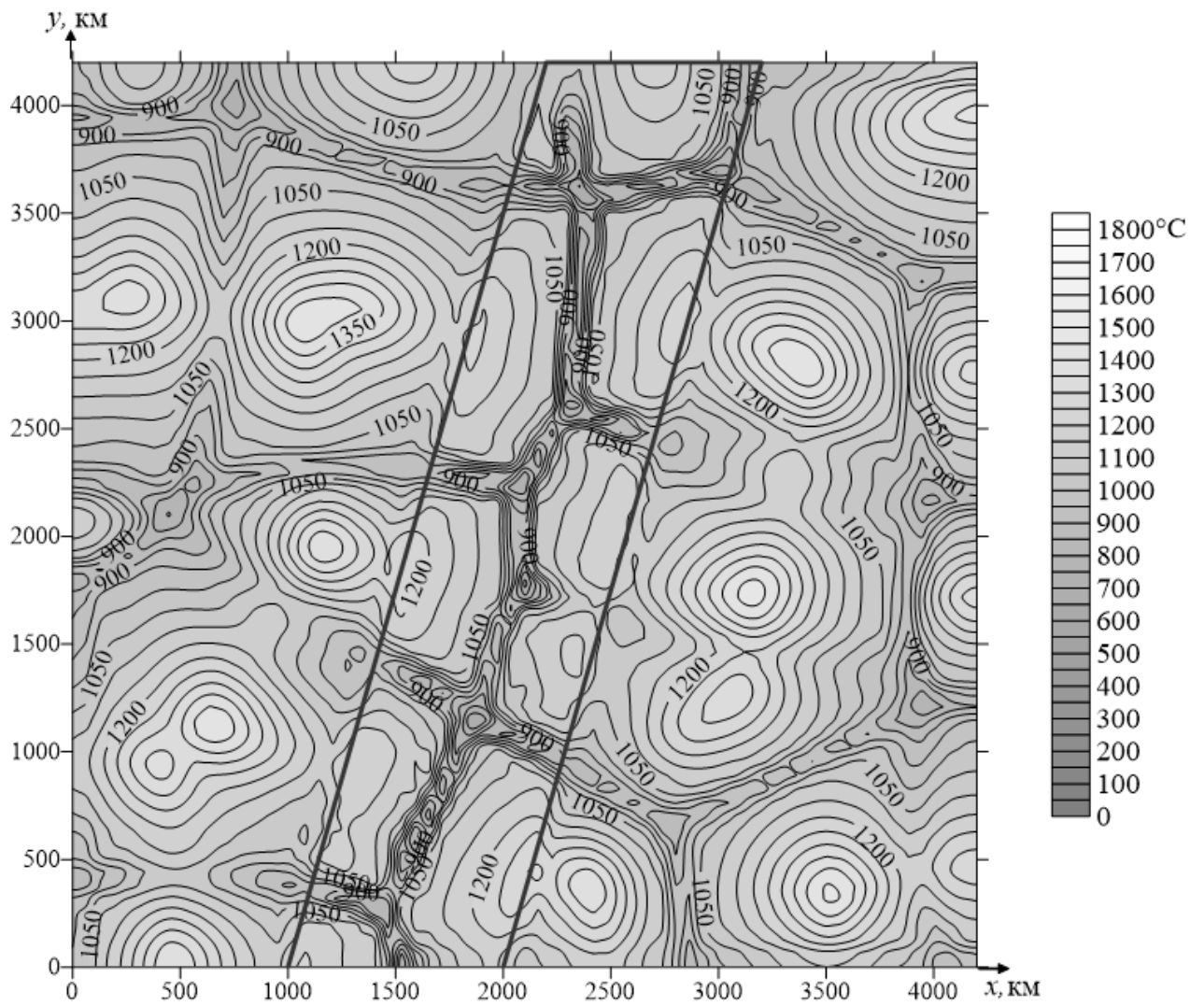


Рисунок 3.68 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры на глубине $z = 220$ км в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 2500$ млн лет

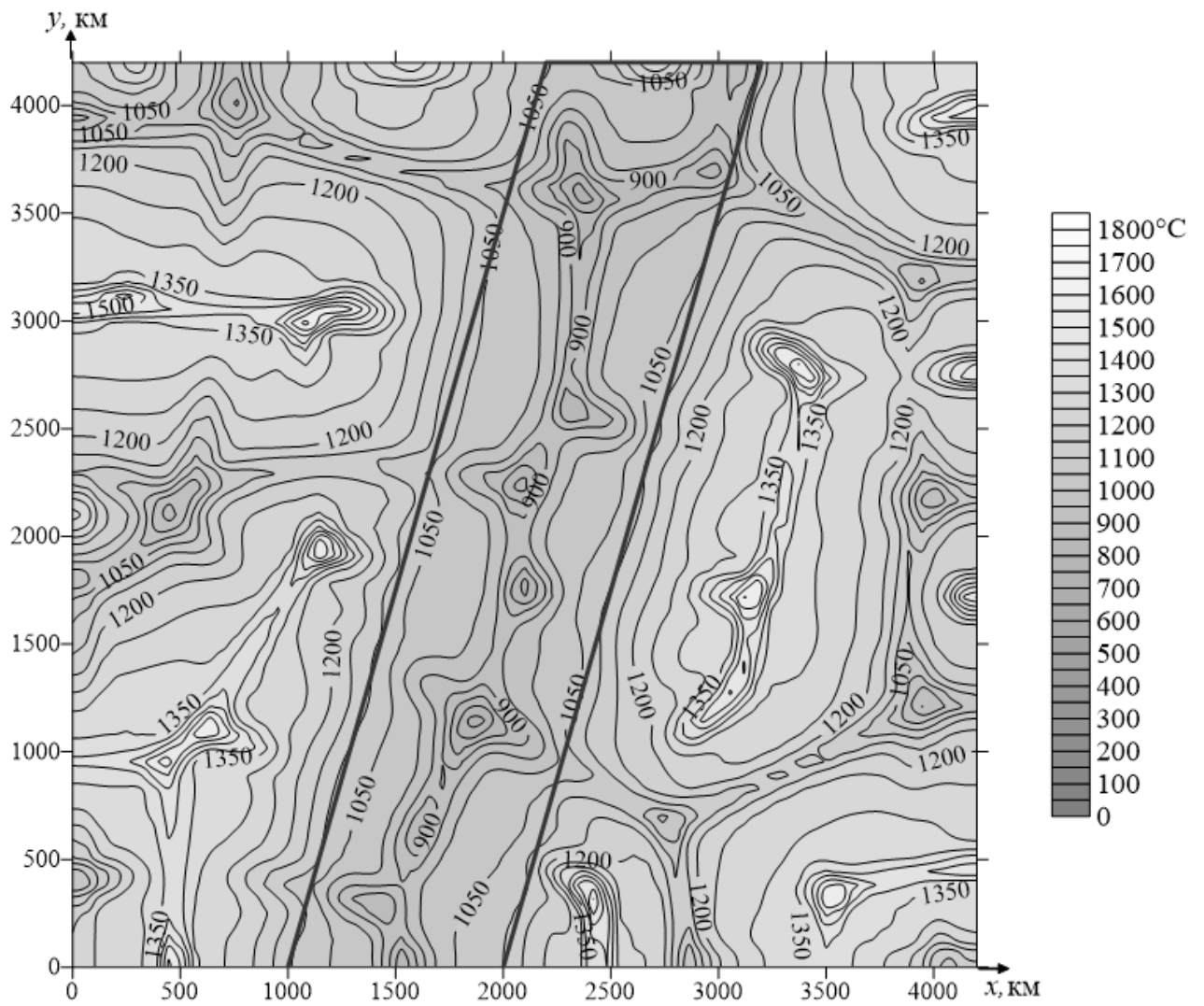


Рисунок 3.69 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры на глубине $z = 380$ км в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 2500$ млн лет

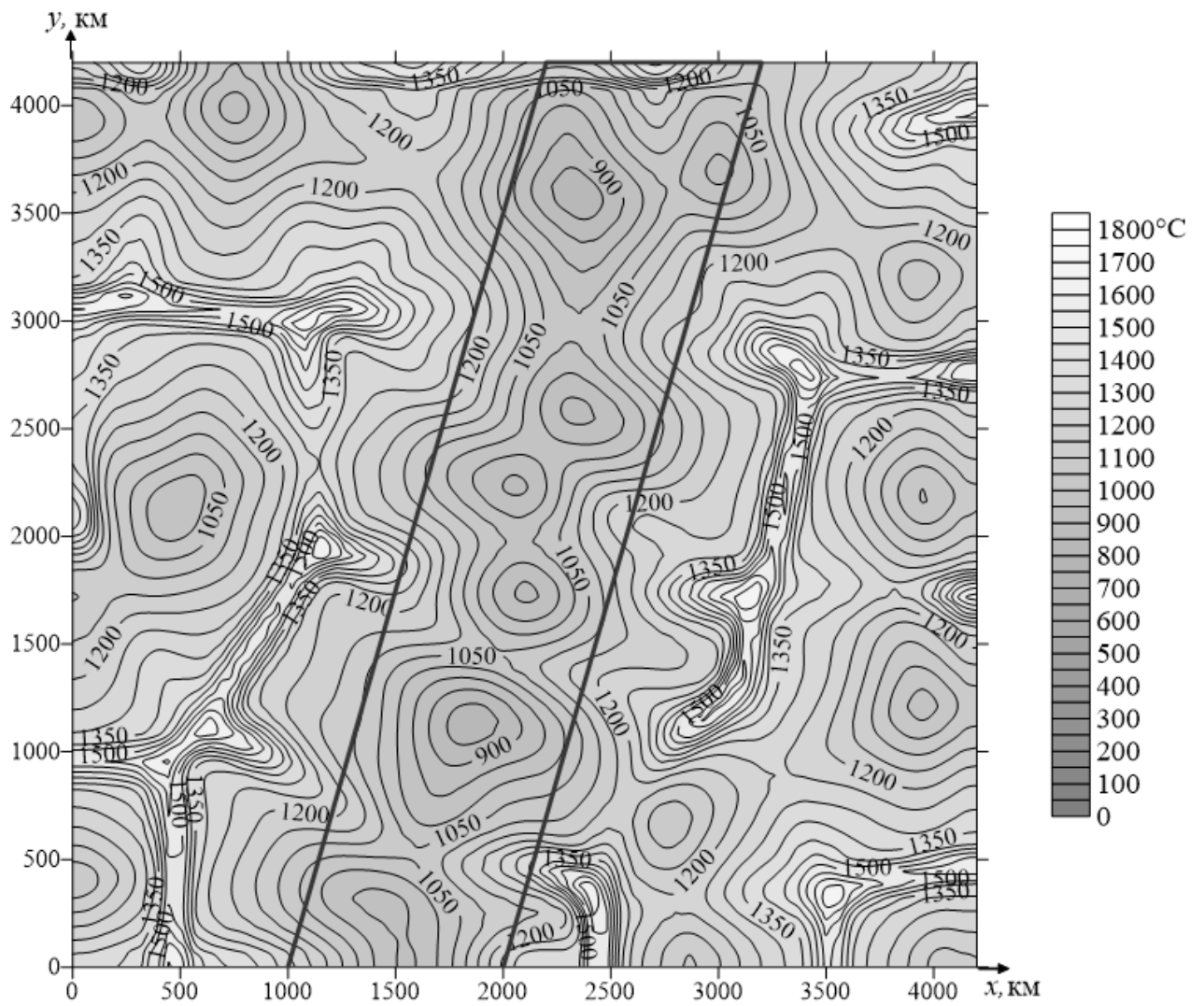


Рисунок 3.70 – Горизонтальное (xy)-сечение поля температуры на глубине $z = 560$ км в модели конвекции под литосферой с ловушкой при $t = 2500$ млн лет

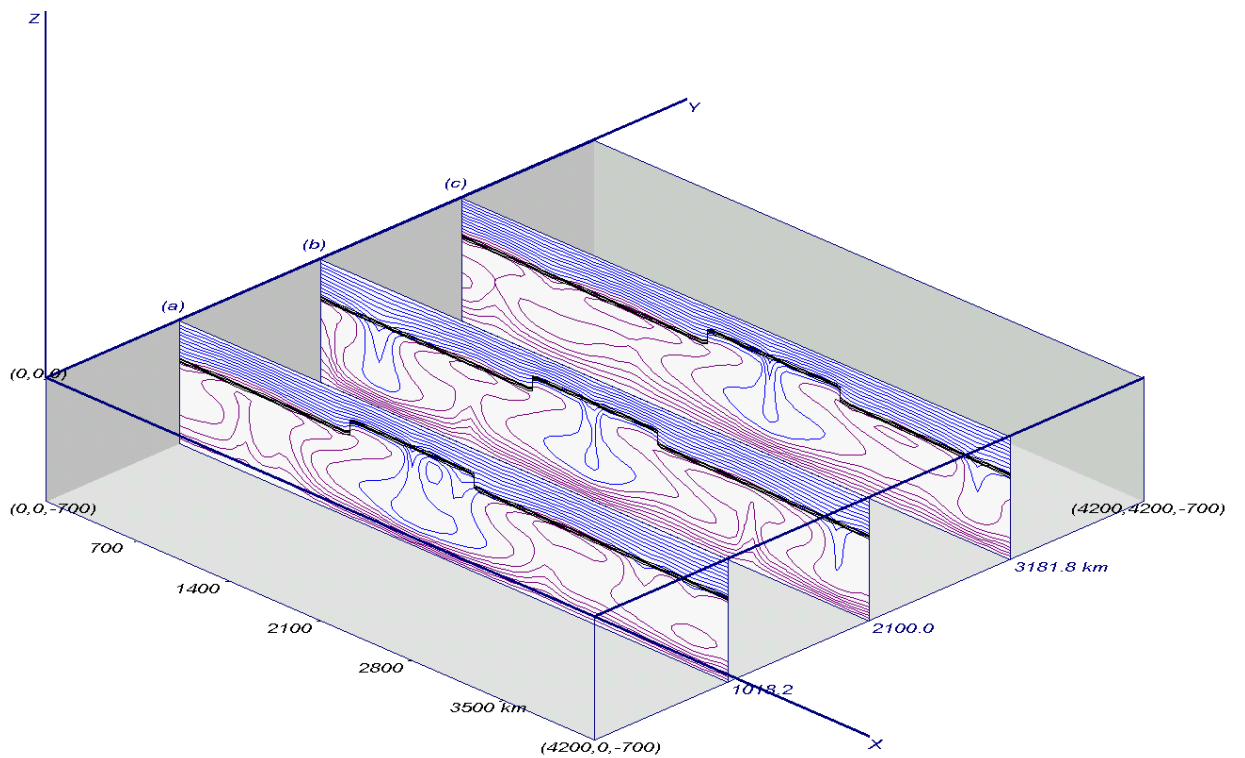


Рисунок 3.71 – Расположение вертикальных (xz)-сечений в модели конвекции под литосферой с ловушкой: (a): $y = 1018,2$ км, (b): $y = 2100,0$ км, (c): $y = 3181,8$ км; $t = 2500$ млн лет

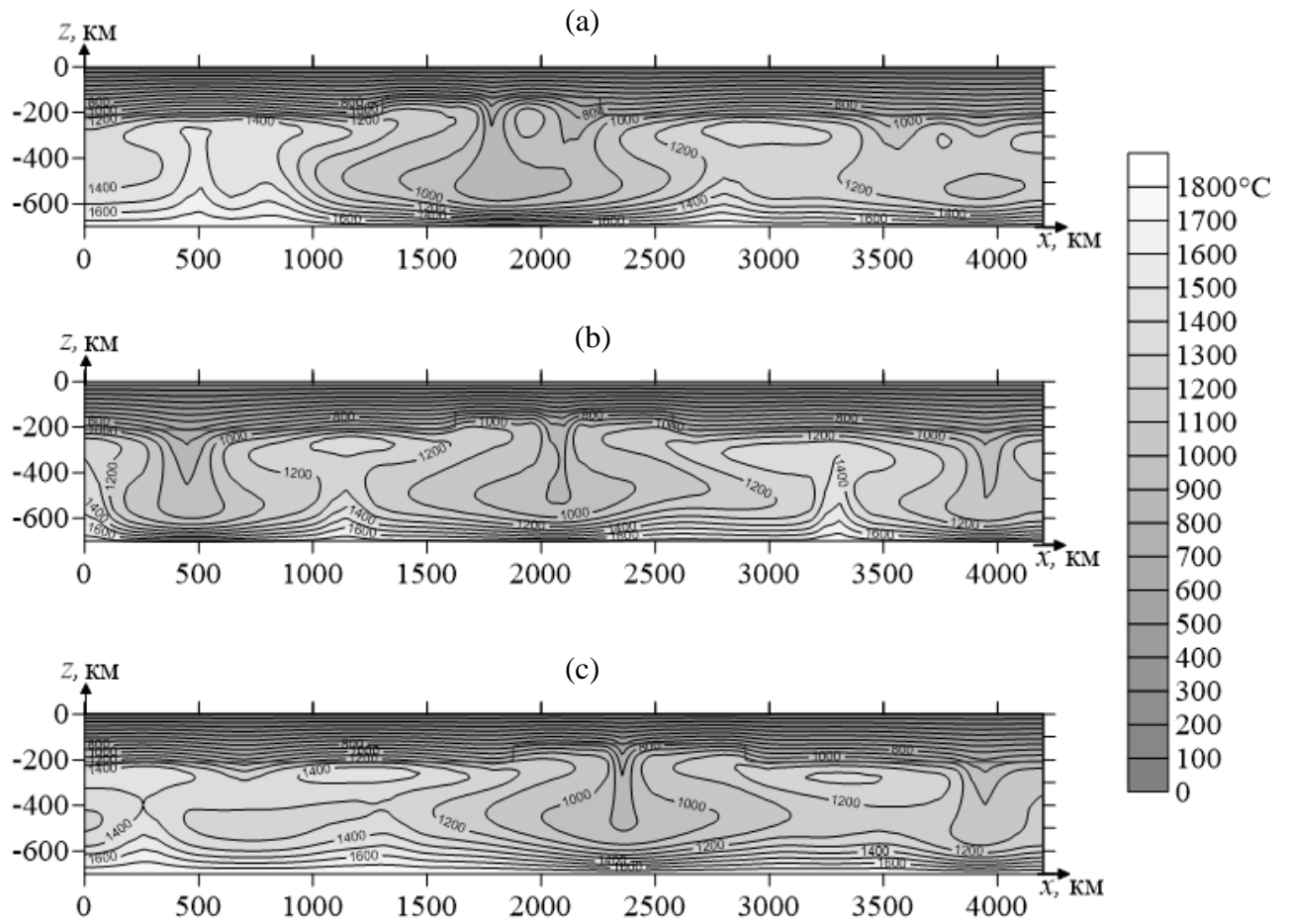


Рисунок 3.72 – Вертикальные (xz)-сечения в модели конвекции под литосферой с ловушкой:
 (a): $y = 1018,2$ км, (b): $y = 2100,0$ км, (c): $y = 3181,8$ км; $t = 2500$ млн лет

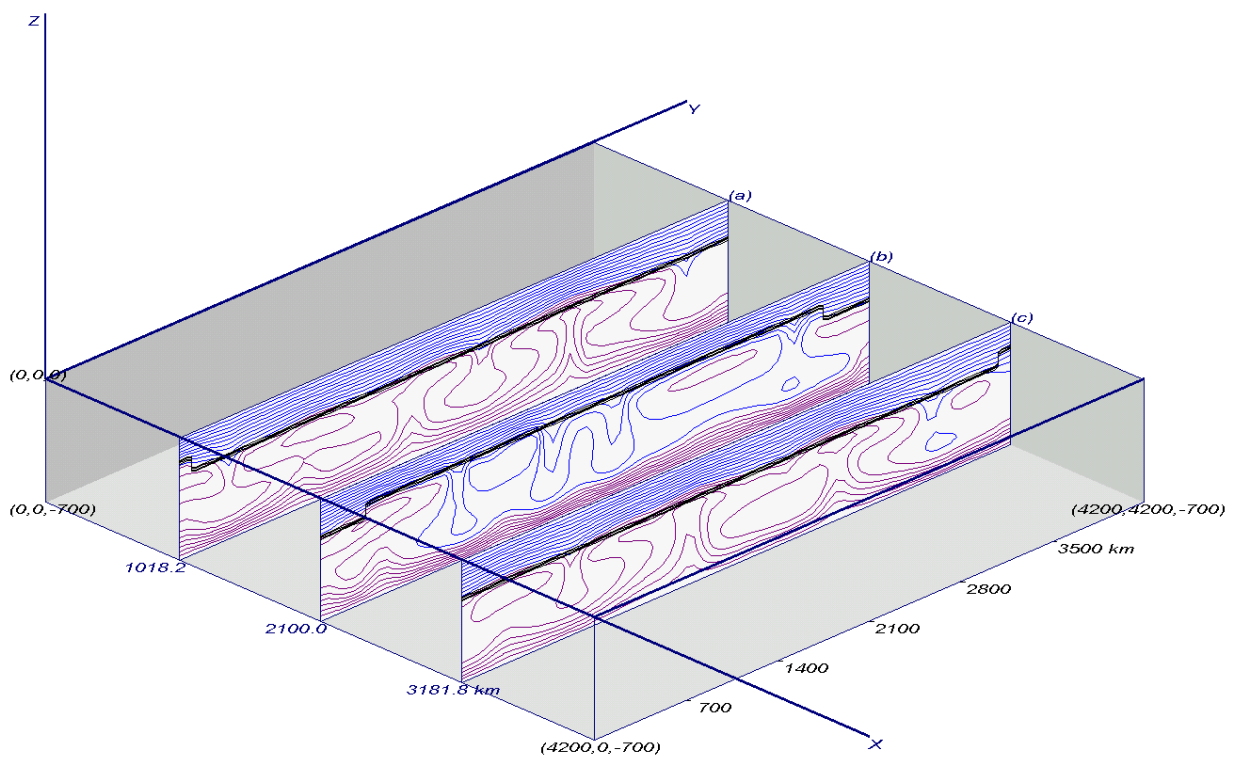


Рисунок 3.73 – Расположение вертикальных (yz)-сечений в модели конвекции под литосферой с ловушкой: (a): $x = 1018,2$ км, (b): $x = 2100,0$ км, (c): $x = 3181,8$ км; $t = 2500$ млн лет

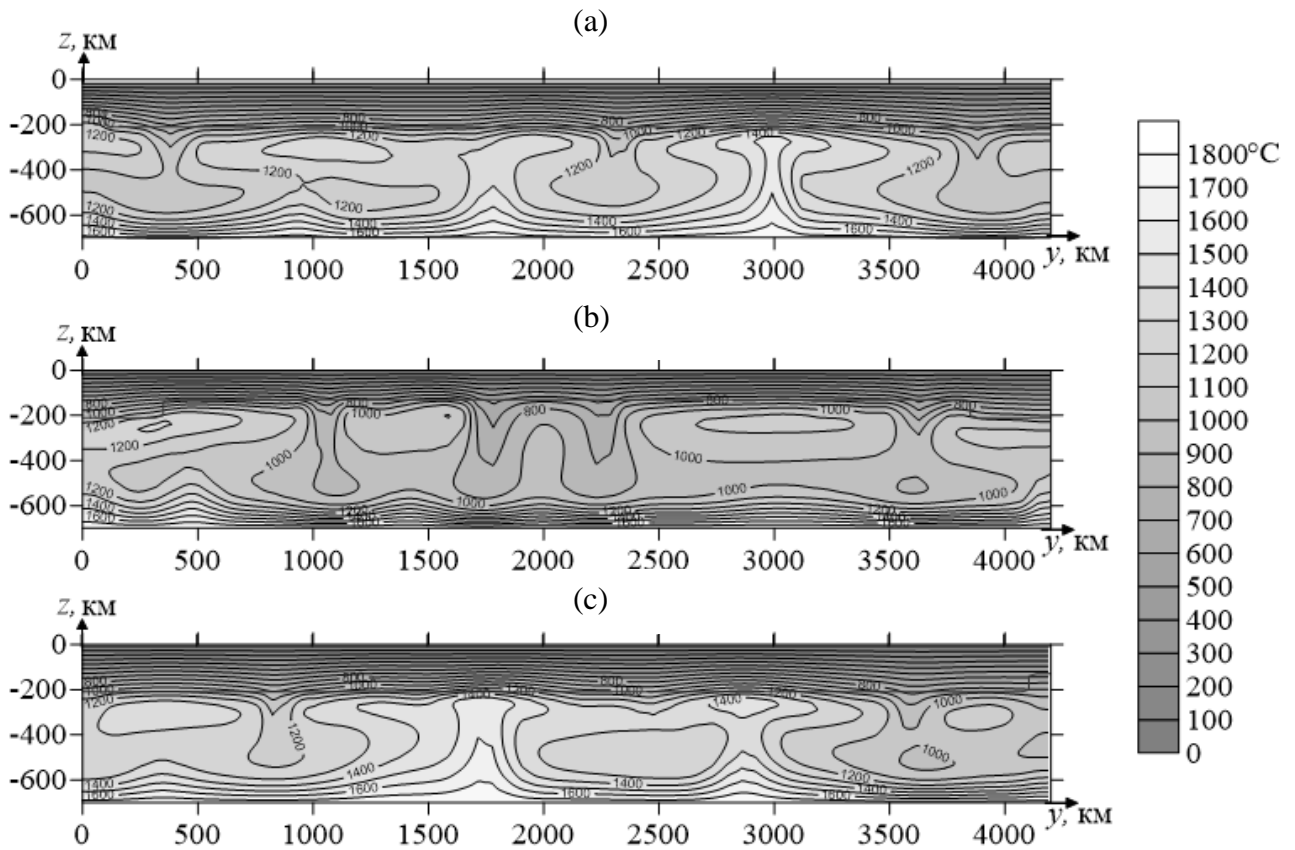


Рисунок 3.74 – Вертикальные (yz)-сечения в модели конвекции под литосферой с ловушкой:
 (a): $x = 1018,2$ км, (b): $x = 2100,0$ км, (c): $x = 3181,8$ км; $t = 2500$ млн лет

3.7 Численное моделирование конвекции под литосферой с симметричным расположением протяжённого кратона или ловушки

Данный раздел является дополнением к разделам 3.3 и 3.6.

В переменных ψ - ω выполнялись вычисления в постановке, приведённой в п. 1.3. с граничными условиями п. 1.4. Области расчётов были расширены по сравнению с предыдущими в X и Y направлениях в 1,5-2,6 раза.

Основные параметры задачи, алгоритмы решения и применённые методы [181], [115], [64] были такие как и в предыдущих разделах данной главы.

Геодинамическая задача первоначально ставилась в параллелепипеде размером $5600 \times 5600 \times 700$ км³.

Конвектирующая область перекрывалась сверху жёстким, недеформируемым кондуктивным слоем, моделирующим континентальную литосферу толщиной 140 км. Геологическая структура в литосфере была представлена полосой тысячекилометровой ширины и мощностью в 210 км, простирающейся через всю расчётную область в плоскости (x y) на 5600 км, параллельно оси y . В качестве краевых условий на боковых границах для температуры ставились условия симметрии, а для компонент вектора скорости - условия проскальзывания.

На подошве литосферного кондуктивного слоя задавались условия прилипания. Температура на поверхности литосферного слоя принималась равной 0°C.

На подошве верхней мантии, на глубине 700 км, ставились условия прилипания для компонент вектора скорости, а температура задавалась постоянной и равной 1800°C. Основные численные расчёты

проводились в параллелепипеде размером $5600 \times 5600 \times 700 \text{ км}^3$ на равномерной сетке с числом узлов $71 \times 71 \times 41$.

Дополнительно конвекция исследовалась в параллелепипедах с размерами

$$8400 \times 5600 \times 700 \text{ км}^3 \text{ (сетка - } 105 \times 71 \times 41);$$

$$2800 \times 11200 \times 700 \text{ км}^3 \text{ (сетка - } 36 \times 141 \times 41);$$

$$2800 \times 5600 \times 700 \text{ км}^3 \text{ (сетка - } 36 \times 71 \times 41).$$

В качестве начальных условий для температуры задавались условия вида

$$T(x,y,z,0) = \tilde{T}_0(x,y,z) = (1-z) + 0,05 (\cos(\pi x/X) + \cos(\pi y/Y)) \sin(\pi z),$$

а также условия вида

$$T(x,y,z,0) = \tilde{T}_0(x,y,z) = (1-z) + \text{RANDOM}()$$

с добавлением возмущения, равного $1/900$ (что соответствует 2°C) в случайно выбранных точках. Координаты точек вычислялись при помощи стандартной процедуры $\text{RANDOM}()$ поиска псевдослучайной последовательности чисел.

Как уже отмечалось, результатом двумерного моделирования мантийных процессов является объект, имеющий предполагаемое бесконечное простираие вдоль неучтённого направления (если обозначить область расчётов осями x и z , то именно вдоль оси y подразумевается бесконечное простираие), оправдывая это тем, что на планете существуют достаточно протяжённые структуры: срединно-океанические хребты, субдукционные зоны.

В поставленной задаче сделана попытка получить такие протяжённые структуры для континентальной неоднородной литосферной плиты, где в качестве направляющих для конвективных течений служат вертикальные плоскости модельного кратона (Рисунок 3.76, Рисунок 3.77) или ловушки (Рисунок 3.78).

В результате расчётов получено температурное поле из анализа которого видно, что и под кратоном (Рисунок 3.75) и вне его (Рисунок 3.76, Рисунок 3.77) структура течений не образует ни "горячих" стен, ни так называемых "валиковых" структур, присущих двумерным моделям и их интерпретаций.

Хорошо видно чередование восходящих и нисходящих потоков под кратоном (Рисунок 3.75): при $y \sim 1800$ км, $y \sim 2800$ км и $y \sim 3800$ км – восходящие потоки; при $y \sim 1000$ км, $y \sim 2250$ км, $y \sim 3250$ км и $y \sim 5000$ км – нисходящие. Аналогичная ситуация прослеживается и в модели под ловушкой (Рисунок 3.78).

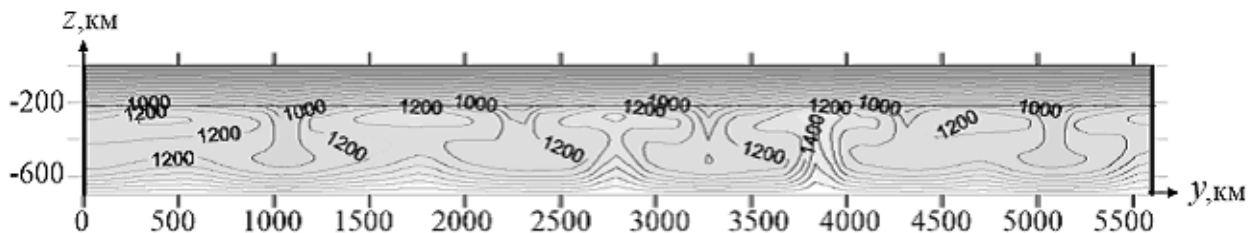


Рисунок 3.75 – Поле температуры в плоскости $x = 2800$ км в модели конвекции под литосферой под протяжённым кратоном при $t = 2500$ млн лет

Таким образом, в результате проведённого численного моделирования выясняется, что при тех параметрах задачи, которые соответствуют современным представлениям об условиях в верхней мантии Земли, конвективные течения имеют существенно трёхмерную структуру. По крайней мере, для континентальной литосферы можно считать неприемлемым применение двухмерного моделирования для изучения мантийной динамики планеты.

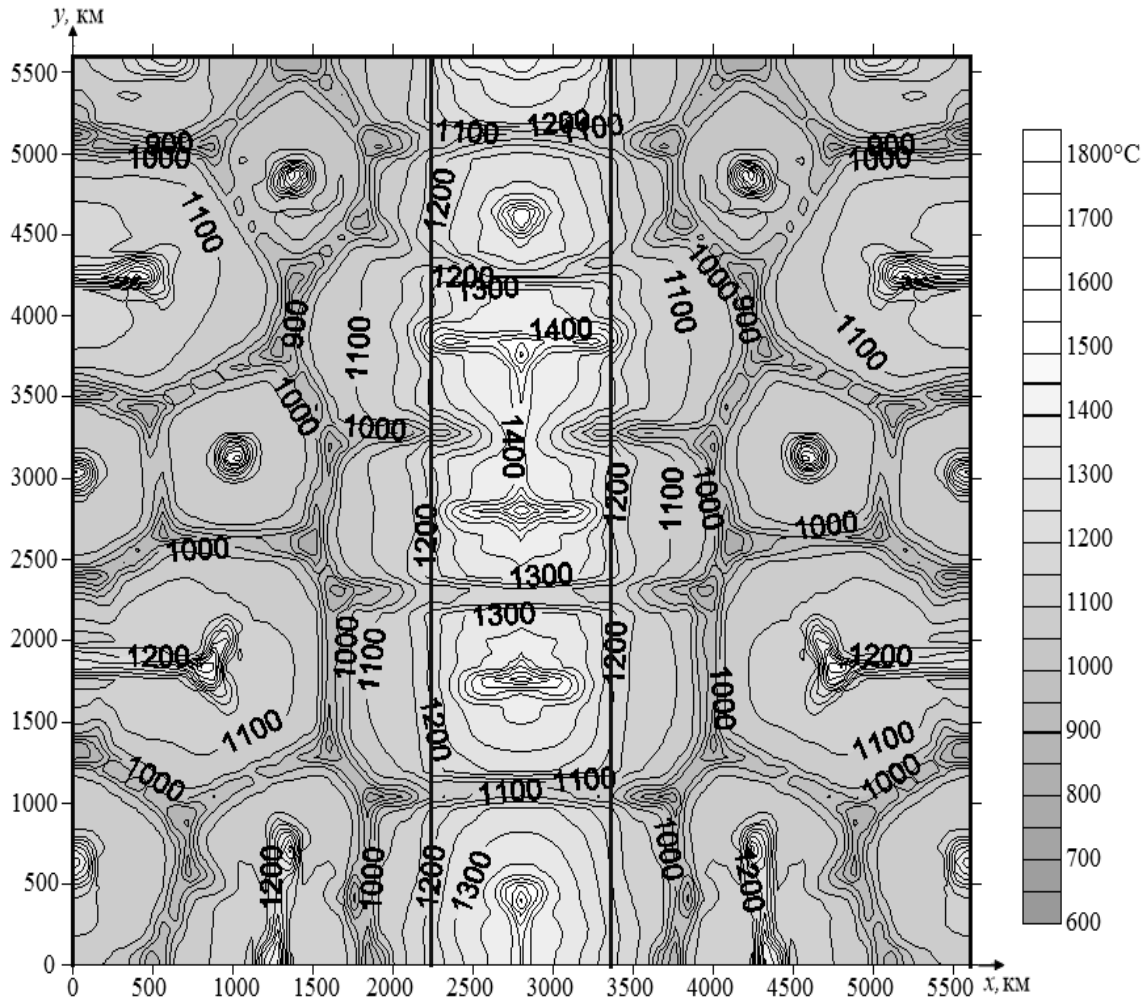


Рисунок 3.76 – Распределение температуры в горизонтальной плоскости на глубине 350 км в модели конвекции под литосферой с кратоном при $t = 2500$ млн лет

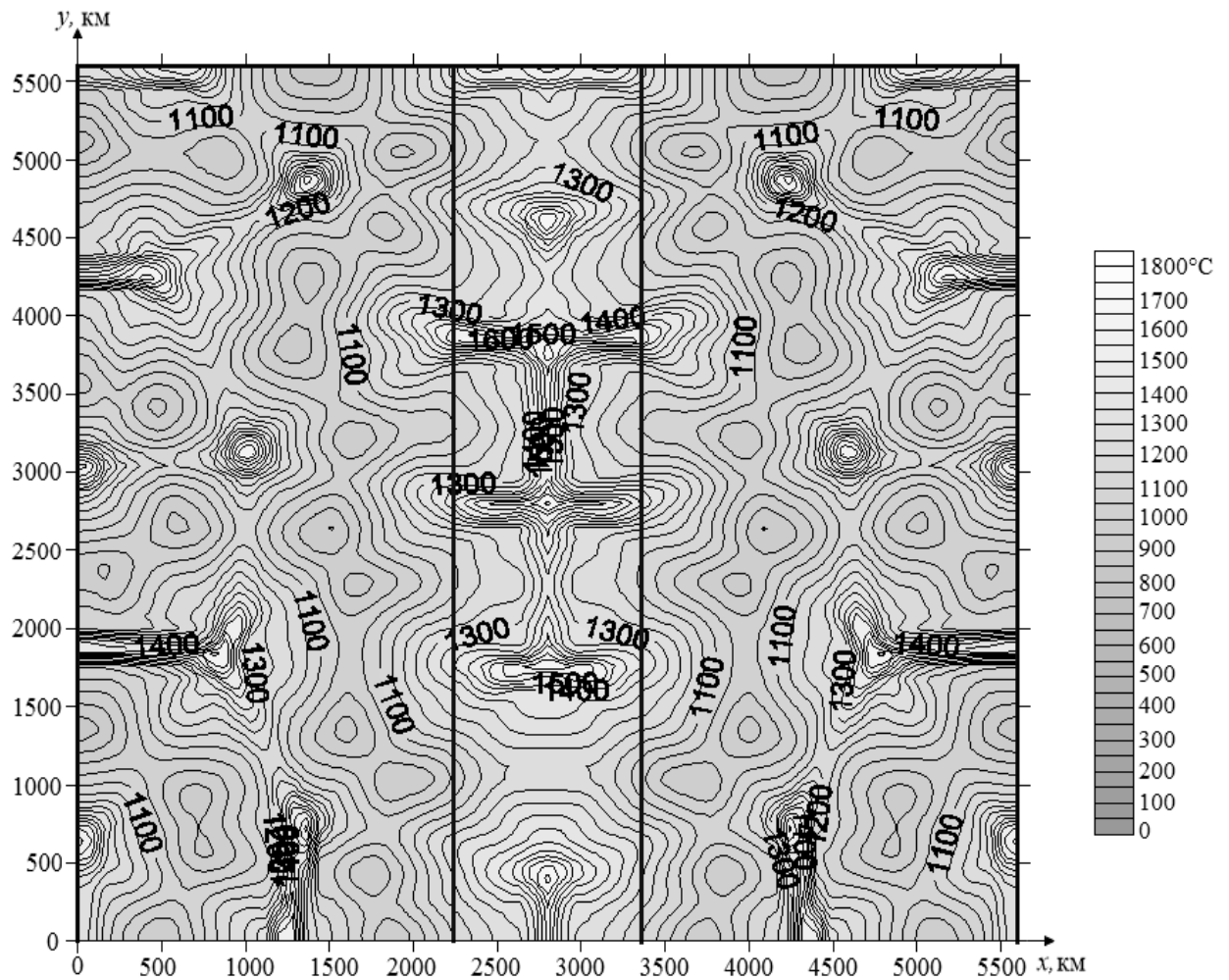


Рисунок 3.77 – Распределение температуры в горизонтальной плоскости на глубине 560 км в модели конвекции под литосферой с кратоном при $t = 2500$ млн лет

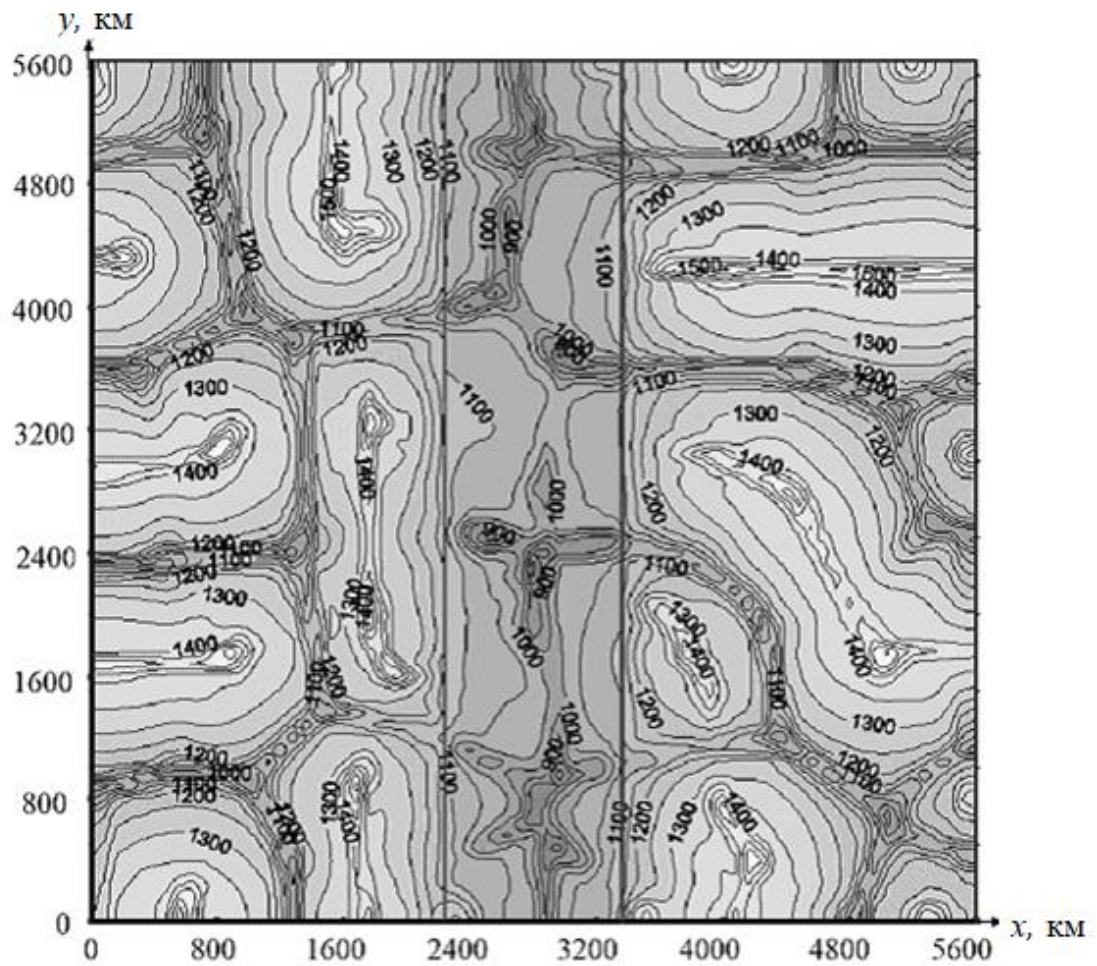


Рисунок 3.78 – Распределение температуры в горизонтальной плоскости на глубине 350 км в модели конвекции под литосферой с утонённой полосой (ловушка шириной 1120 км) при $t = 2500$ млн лет. Мощность литосферы под ловушкой – 70 км

3.8 Трёхмерное моделирование конвективных процессов под литосферой Центральной Азии

Продолжением работ по численному моделированию конвекции в верхней мантии Земли являются исследования, в которых рассматриваются существующие (а не модельные) структурные элементы континентальной литосферы.

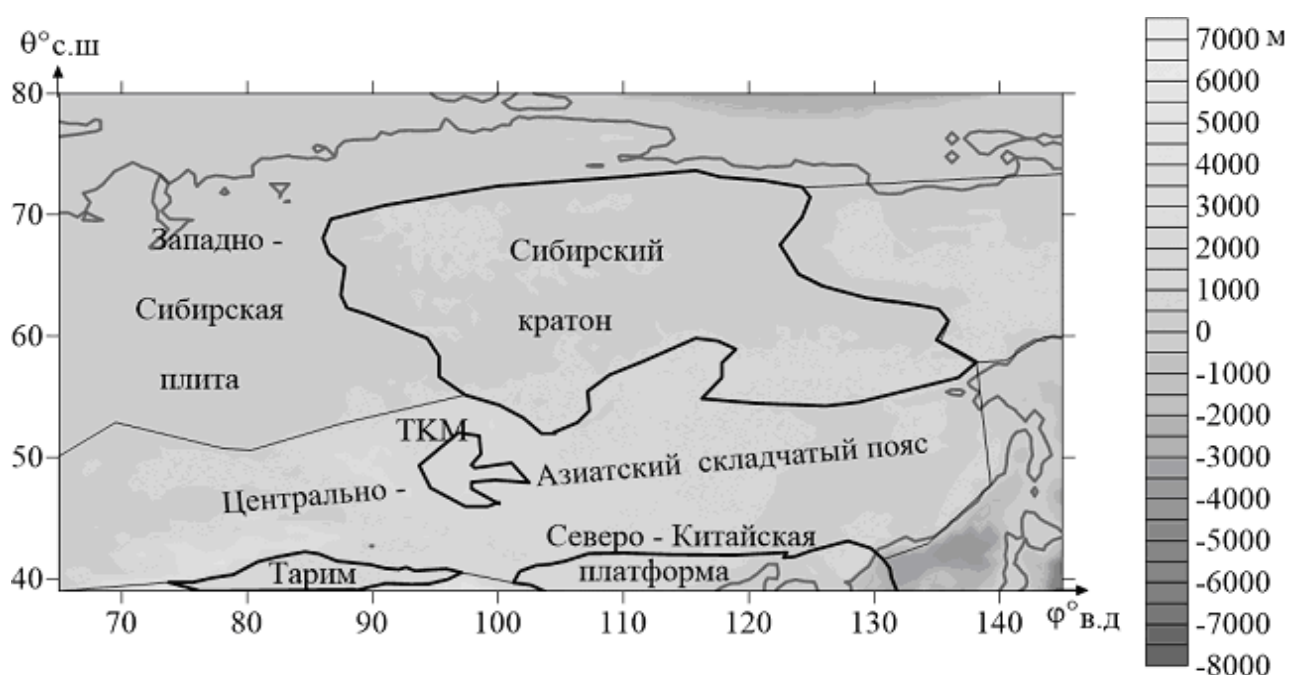


Рисунок 3.79 – Рельеф внутриконтинентальной области Центральной Азии. Чёрная сплошная линия - границы кратонов. (ТКМ - Тувинский комплекс микрократонов)

Положение мантийных неоднородностей в пространстве является одним из важнейших источников информации о современных процессах в недрах, определяющих тектонический режим территорий. На карте (Рисунок 3.79) представлена область исследования: Центральная Азия, состоящая из платформенных областей, таких как Западно–Сибирская плита, Ангария, Тувинский комплекс микрократонов, Тарим, Северо- и Южно-Китайский кратоны, центрально–азиатский складчатый пояс.

Значительные вариации мощности исследуемого литосферного блока оказывают значительное влияние на характер мантийных течений [36, 37, 111, 196] и имеют важное значение при проведении численного моделирования.

Методика проведения численного эксперимента полностью совпадает с методикой, использованной в предыдущих разделах. Применялся подход, с использованием системы уравнений в переменных ψ - ω в параллелепипеде (1.7) с аспектными соотношениями $X/Z=Y/Z=6$, на последовательности равномерных сеток ($66 \times 66 \times 35$), ($100 \times 100 \times 56$) и ($132 \times 132 \times 70$) ячеек с шагами по времени 5,00, 2,50 и 1,25 млн лет соответственно.

Элементы литосферы в расчётной области иллюстрирует Рисунок 3.80. В модели Сибирский кратон, как единая платформа мощностью 220 км, состоит из двух архейских кратонов, мощностью 320 км. В центр платформы, на западе, где наблюдаются наибольшие значения теплового потока, помещена модельная ловушка, где толщина литосферы на 40 километров меньше, чем мощность основной части Сибирского кратона.

При расстановке элементов литосферы в расчётную область были внесены линии географических меридианов и параллелей (Рисунок 3.81, Рисунок 3.82).

Расположение и размеры элементов, составляющих модельную литосферу, приближённо соответствуют географическим и геофизическим данным Центральной Азии [20].

Результаты расчётов и их анализ позволили сделать заключение о том, что как и в случае моделей (п. 3.4 и 3.5) с кратонами [110, 111, 114, 196, 197], реальные неоднородности Центральной Азии порождают структуры, аналогичные найденным в предыдущих моделях:

прослеживаются устойчивые восходящие потоки в виде плюмов и нисходящих течений и прогретых областей по периферии кратонов.

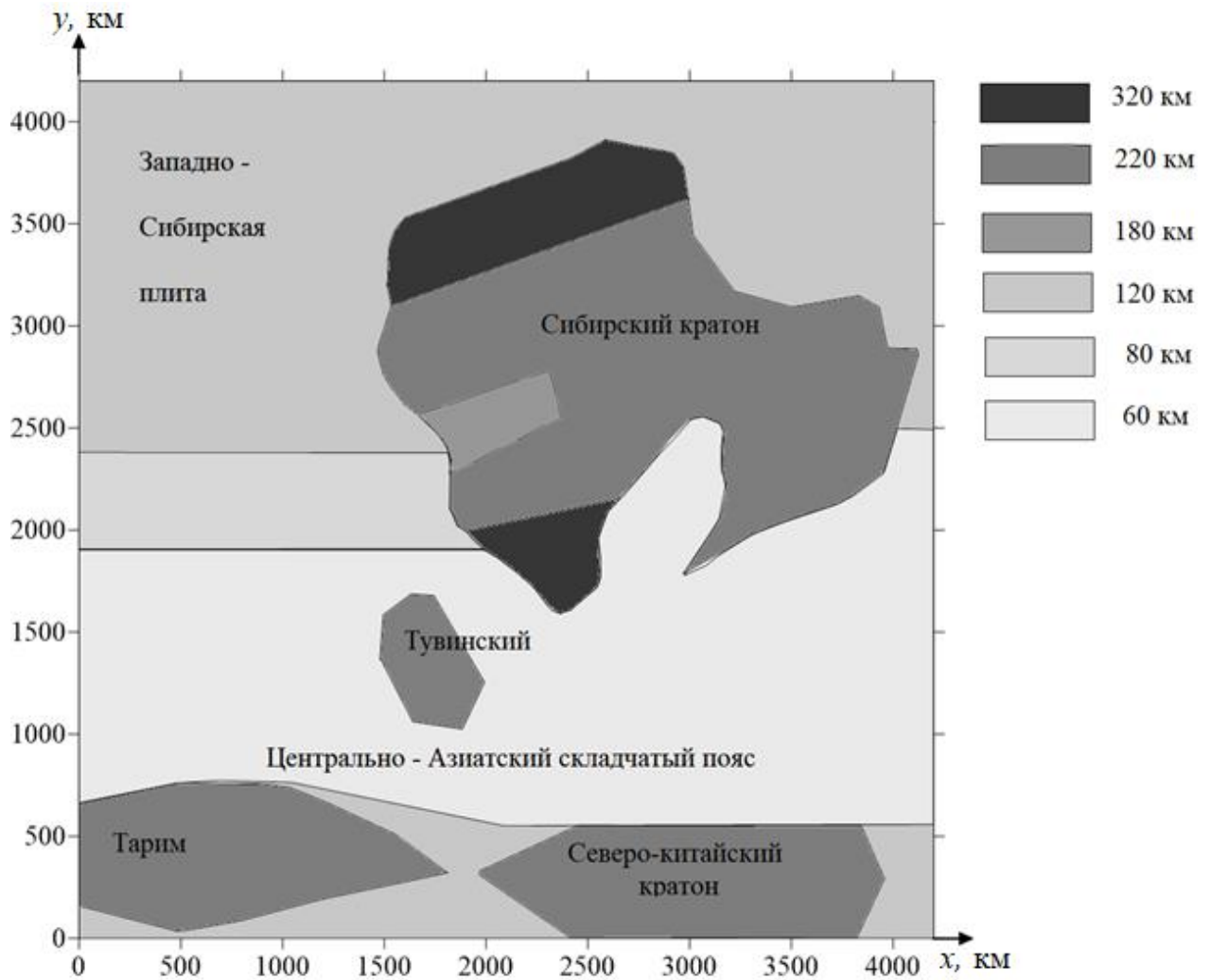


Рисунок 3.80 – Расположение элементов литосферы в расчётной области

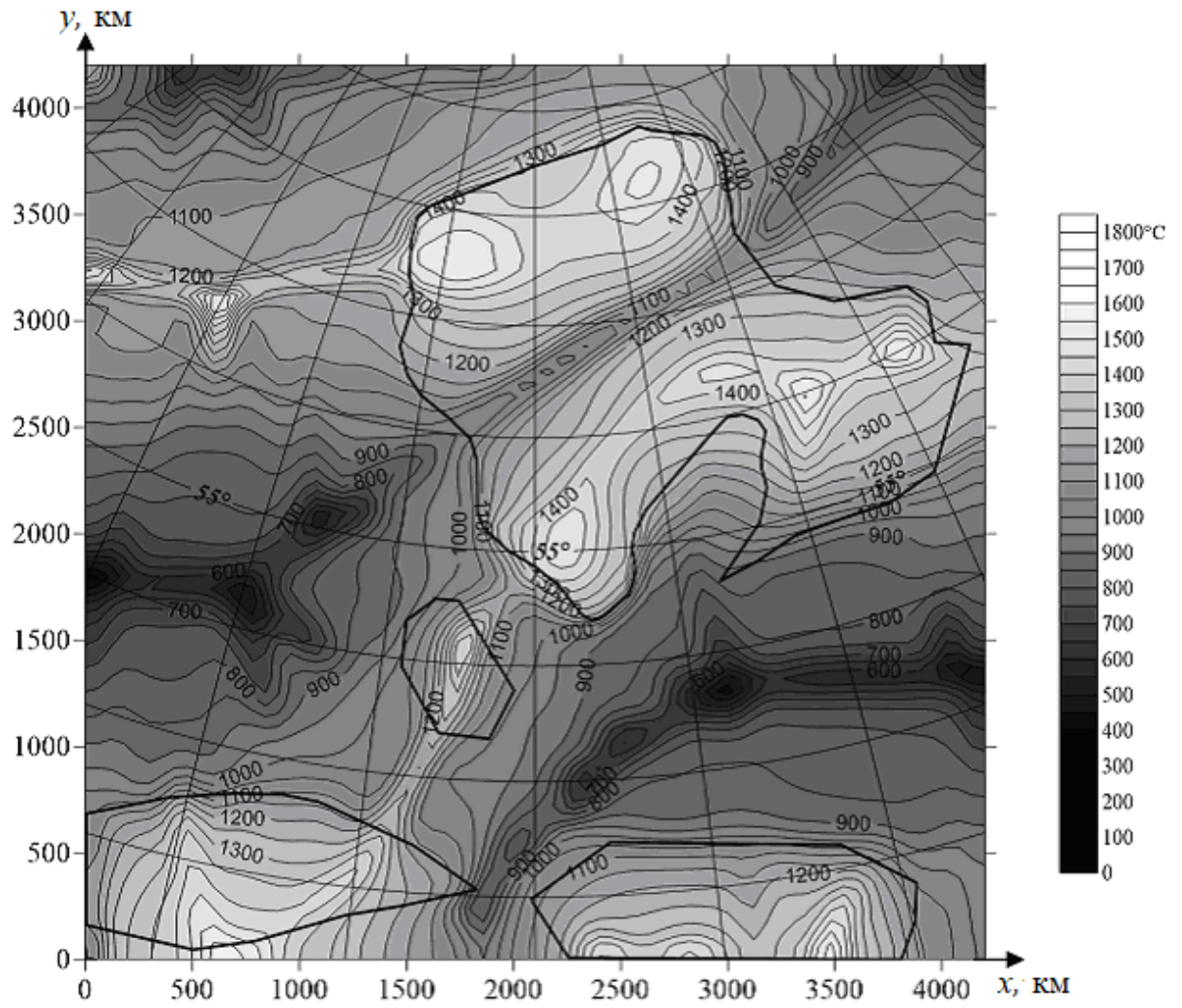


Рисунок 3.81 – Горизонтальное сечение температурного поля на глубине $z = 350$ км

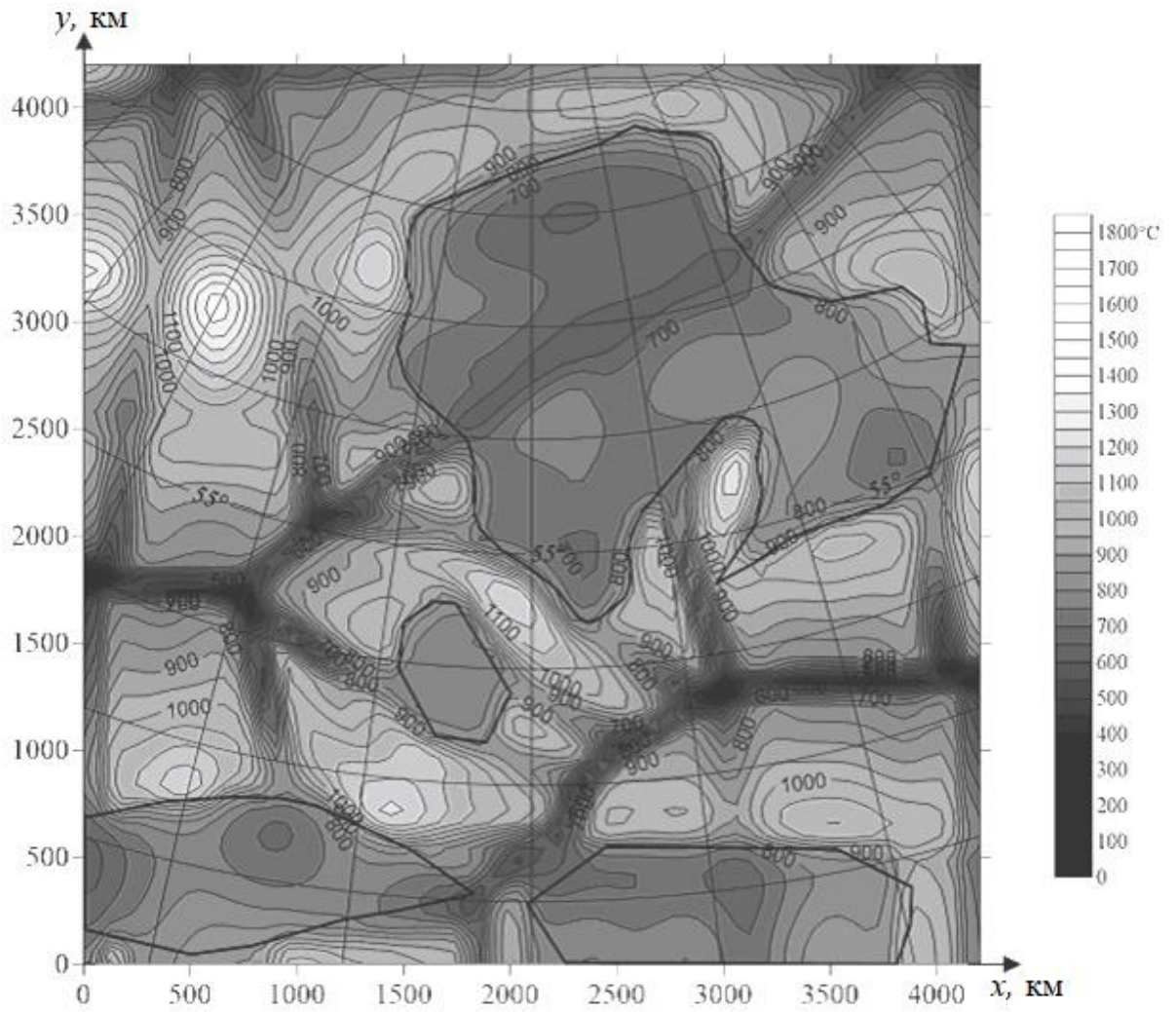


Рисунок 3.82 – Горизонтальное сечение температурного поля на глубине $z = 150$ км

О том, как зависит структура конвективных течений от вводимых в модель неоднородностей литосферных блоков, можно судить по предыдущим попыткам рассчитать течения под исследуемой областью. Например, в работе [114] для задачи конвекции в той же самой области была использована упрощённая геометрия литосферных элементов при постоянной глубине погружённых в мантию блоков.

В случае задания близкого к реальному рельефу (схема: Рисунок 3.80) нисходящий поток пересекает Сибирский кратон с запада на восток. Определяющим, по-видимому, стало то, что внутри кратона была внесена неоднородность, в виде ловушки мощностью 180 км, в то время как окружающая литосфера имеет мощность 220 км. Из расчётов под литосферой с ловушкой (п. 3.6), следует, что утонение порождает нисходящие конвективные потоки. Поэтому ловушка, построенная внутри Сибирской платформы, послужила направляющей для нисходящего потока. Конвективные течения «подстроились» под рельеф кратона.

Таким образом, если в модель внести более точные данные о рельефе литосферы, конвективные течения, полученные в результате применения развитого в диссертационной работе подхода, будут отвечать реальной геологической обстановке исследуемого района планеты.

Выводы

Основные результаты главы 3 сводятся к следующему.

1. Выполнено численное моделирование конвекции под литосферой переменной толщины в форме локализованных и/или протяжённых через всю расчётную область модельных кратонов и ловушек. Показано, что при числах Рэлея $\sim 10^5$ и выше, соответствующих современным представлениям о верхней мантии Земли, конвективные течения носят существенно трёхмерный характер, поэтому даже в случае протяжённых геологических структур двухмерный подход к моделированию мантийной динамики неприменим.

2. Принципиальный результат трёхмерного моделирования тепловой конвекции в верхней мантии под кратоном состоит в выявлении мелкомасштабной моды конвекции непосредственно под литосферой на «астеносферном» уровне глубин 200–350 км. Данная мода развивается по периферии кратона и может объяснить особенности режима траппового магматизма древних кратонов по их периферии.

3. Проведено численное моделирование конвекции под обширной областью Центральной Азии, включающей в себя Сибирскую платформу, Западно-Сибирскую плиту, Тувинский комплекс микрократонов, Тарим и часть Северо-Китайской плиты. Полученные результаты показали существенную зависимость конвективных течений от геометрии литосферных неоднородностей.

4. В численной модели конвекции в области южнее Сибирского Кратона и севернее Тарима и Северо-Китайской платформы (территориально – Центрально-Азиатский складчатый пояс) мощность литосферы в модели составила 60 км. В результате численного моделирования было получено, что в зоне ловушки, как правило,

преобладают нисходящие потоки холодного мантийного материала. В конкретной геологической обстановке, а именно, в случае взаимодействия четырёх кратонов, в самой ловушке также наблюдаются цепи классических нисходящих потоков. На глубине 350 км обнаруживается достаточно холодное (650-750°C) мантийное вещество. По результатам расчётов под территорией Западно-Сибирской плиты, где мощность литосферы составляет 120 км, температура комплекса нисходящих потоков в среднем на 100°C выше, чем под более тонкой литосферой в зоне ловушки.

Глава 4. Математическое моделирование конвекции в верхней мантии Земли в сферических переменных

Уравнения гидродинамики вязкой жидкости в криволинейных ортогональных координатах имеют вид [56, 61]:

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(H_2 H_3 v_1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(H_1 H_3 v_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(H_1 H_2 v_3)}{\partial x^3} \right) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{H_i} \frac{\partial p}{\partial x^i} = \rho \cdot F_i + \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} \sigma_{ik} \right) - \sigma_{kk} \frac{\partial \ln H_k}{\partial x^i} \right\}, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(H_2 H_3 v_1 T)}{\partial x^1} + \frac{\partial(H_1 H_3 v_2 T)}{\partial x^2} + \frac{\partial(H_1 H_2 v_3 T)}{\partial x^3} \right) = \\ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{H_3 H_2}{H_1} \frac{\partial T}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial x^3} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где H_i - коэффициенты Ламэ, $v_i \equiv v_{x^i}$ - компоненты вектора скорости \mathbf{V} , $(i, k = 1, 2, 3)$,

$$\text{Ra} = \text{Ra}_R = \alpha g_z \rho R^3 \Delta T / \eta_0 \chi, \quad \text{Ra}_d = \left(\frac{d}{R} \right)^3 \cdot \text{Ra},$$

величины Ra , Ra_R , Ra_d - числа Рэлея, R - радиус Земли, σ_{ik} определены формулами

$$\sigma_{ik} = \eta \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i H_k} \left[v_i \frac{\partial H_i}{\partial x^k} + v_k \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right] + 2 \delta_k^i \sum_{\lambda=1}^3 \frac{v_\lambda}{H_\lambda} \frac{\partial \ln H_i}{\partial x^\lambda} \right\}, \quad (4.4)$$

δ_k^i - символ Кронекера.

Для задачи в декартовой системе координат все коэффициенты Ламэ равны единице. В случае сферических координат:

$$H_1 = r \sin \theta, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1.$$

Безразмерные переменные вводятся следующим образом:

$$r = R \cdot r', \quad t = \frac{R^2}{\chi} t', \quad T = \Delta T \cdot T', \quad \eta = \eta_0 \eta', \quad p = \frac{\eta_0 \chi}{R^2} p', \quad \mathbf{V} = \frac{\chi}{R} \mathbf{V}'. \quad (4.5)$$

Из (4.1)-(4.3), учитывая, что $v_1 = V^\varphi$, $v_2 = V^\theta$, $v_3 = V^r$, следуют уравнения геодинамики вязкой несжимаемой жидкости в сферических координатах [9, 56, 59]:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(r \frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial (\sin \theta V^\theta)}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial (r^2 V^r)}{\partial r} \right) = 0; \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[2\eta r \left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} + \cos \theta V^\theta + \sin \theta V^r \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\eta r \sin^2 \theta \left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial V^\theta}{\partial \varphi} - \cos \theta \cdot V^\varphi \right) \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta r^3 \sin^2 \theta \left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V^r}{\partial \varphi} - V^\varphi \right) \right) \right] = r^2 \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\eta r}{\sin \theta} \left(\frac{\partial V^\theta}{\partial \varphi} + \sin \theta \frac{\partial V^\varphi}{\partial \theta} - \cos \theta V^\varphi \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2\eta r \sin \theta \left(\frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + V^r \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta r^3 \sin \theta \left(\frac{\partial V^\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V^r}{\partial \theta} - V^\theta \right) \right) \right] + \\ & + 2\eta r \cos \theta \left(\frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (r V^r)}{\partial r} \right) = r^2 \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\eta}{\sin \theta} \left(\frac{\partial V^r}{\partial \varphi} + \sin \theta \left(r \frac{\partial V^\varphi}{\partial r} - V^\varphi \right) \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\eta \sin \theta \left(\frac{\partial V^r}{\partial \theta} + \left(r \frac{\partial V^\theta}{\partial r} - V^\theta \right) \right) \right] + \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[2 \eta r^2 \sin \theta \left(\frac{\partial V^r}{\partial r} \right) \right] + 2 \eta r \sin \theta \frac{\partial V^r}{\partial r} = r^2 \sin \theta \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \text{Ra} \cdot T \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(r \frac{\partial}{\partial \varphi} (V^\varphi T) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V^\theta T) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V^r T) \right) = \\ = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

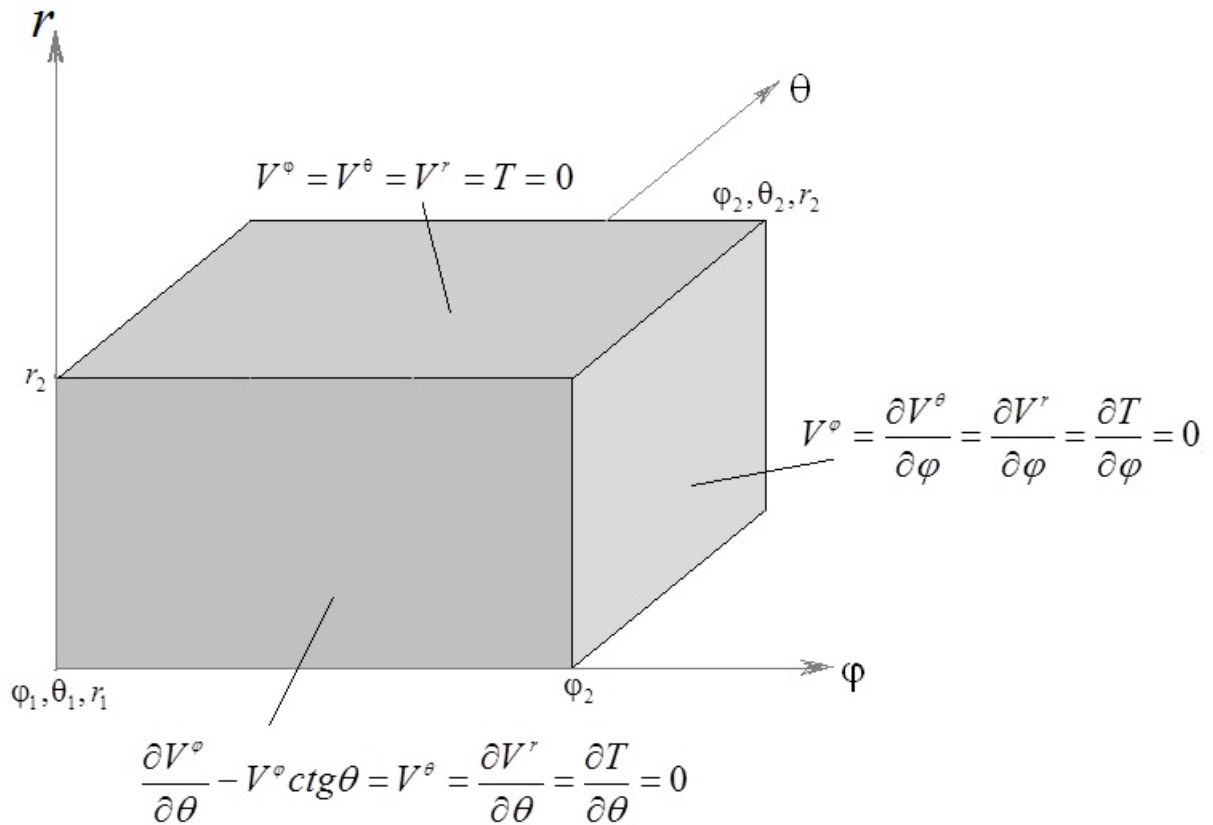


Рисунок 4.1 – Схематическое изображение расчётной области в сферических координатах

Тензор вязких напряжений определён формулами [57]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V^r}{r} + \frac{V^\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right); \\
 \sigma_{\theta\theta} &= 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \frac{V^r}{r} \right); \quad \sigma_{rr} = 2\eta \frac{\partial V^r}{\partial r}; \\
 \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V^r}{\partial \theta} + \frac{\partial V^\theta}{\partial r} - \frac{V^\theta}{r} \right); \\
 \sigma_{r\varphi} &= \eta \left(\frac{\partial V^\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V^r}{\partial \varphi} - \frac{V^\varphi}{r} \right); \\
 \sigma_{\theta\varphi} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V^\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial V^\varphi}{\partial \theta} - \frac{V^\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Рисунок 4.1 схематически представляет сферическую область

$$\Pi = [\varphi_1, \varphi_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2]. \tag{4.12}$$

Граничные условия следующие:

на поверхностях $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$; ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $r_1 \leq r \leq r_2$):

$$V^\varphi = \frac{\partial V^\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial V^r}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \tag{4.13}$$

на поверхностях $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$; ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $r_1 \leq r \leq r_2$):

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \theta} - V^\varphi \operatorname{ctg} \theta = V^\theta = \frac{\partial V^r}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0; \tag{4.14}$$

на поверхности $r = r_1$, ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$):

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = 0, \quad T = T_b, \tag{4.15}$$

на поверхности $r = r_2$, ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$):

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = T = 0.$$

В (4.15) безразмерное значение $T_b = 1$, (или равно 1800°C в размерных единицах). Как и в декартовой постановке, в начальный момент времени $t = t_0$ для температуры задаются начальные условия:

$$T(\varphi, \theta, r, t_0) = \tilde{T}_0(\varphi, \theta, r). \tag{4.16}$$

Необходимость учёта сферичности течения обусловлена формой Земли и большими горизонтальными размерами области

интегрирования. В частности, вопросы учёта сферичности обсуждаются в [40, 92, 96].

4.1 Метод и его численная реализация

Уравнения (4.6)-(4.10) с граничными условиями (4.13)-(4.15) интегрировались на каждом временном слое по схеме (2.12)-(2.14) при помощи метода стабилизирующей поправки [130], где на дробных шагах применялись скалярные трёхточечные прогонки. За основу был выбран метод искусственной сжимаемости [26, 71, 130].

Расчёты проводились и реализовывались по следующей схеме (сравните с п. 2.2).

Этап А

В начальный момент времени $t = t_0 = 0$, $m = 0$, задаются условия для температуры в сферической области из соотношения (4.16):

$$T^m(\varphi, \theta, r, t_0) = \tilde{T}_0(\varphi, \theta, r).$$

Причём $\tilde{T}_0(\varphi, \theta, r)$ вычисляется по линейной зависимости в слое от r' до r'' :

$$\tilde{T}_0 = \frac{T_2 - T_1}{r'' - r'}(r - r'') + T_2;$$

- 1). в верхнем 120-ти километровом слое:
от $T_1 = 0^\circ\text{C}$ при $r' = R = 6370$ км,
до $T_2 = 1200^\circ\text{C}$ при $r'' = R - 120$ км;
- 2). в нижнем слое: от 120-ти километровой отметки (r') до подошвы верхней мантии (r''):
от $T_1 = 1200^\circ\text{C}$ при $r' = R - 120$ км,
до $T_2 = \Delta T = 1800^\circ\text{C}$ при $r'' = (R - Z_{upmantle})$ км.

По формуле [110, 111]

$$\eta(\varphi, \theta, r, t) = \exp(b(1,89-r) - aT(\varphi, \theta, r, t)) \quad (4.17)$$

вычисляется поле вязкости $\eta^m = \exp(b(1,89-r) - a \cdot T^m)$. Константы a и b здесь и в (4.17) имеют те же числовые значения, что и в (2.16).

Этан В

Методом стабилизирующей поправки [130] ищется поле скорости $\mathbf{V}: u \equiv V^\varphi, v \equiv V^\theta, w \equiv V^r$ с учётом найденных полей T^m и η^m .

В.1 (4.7)

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\Delta\tau} &= L_\varphi(2\eta r L_\varphi u^{n+1/3}) + L_\theta(\eta r \sin^2 \theta L_\theta u^n) + \\ &+ L_r(\eta r^3 \sin^2 \theta L_r u^n) + \Phi_u^n, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\Delta\tau} = L_\theta(\eta r \sin^2 \theta L_\theta u^{n+2/3}) - L_\theta(\eta r \sin^2 \theta L_\theta u^n), \quad (4.19)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\Delta\tau} = L_r(\eta r^3 \sin^2 \theta L_r u^{n+1}) - L_r(\eta r^3 \sin^2 \theta L_r u^n); \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \Phi_u^n &= L_\varphi[2\eta r (\cos \theta \cdot v + \sin \theta \cdot w)]^n + L_\theta[\eta r \sin \theta (L_\varphi v - \cos \theta \cdot u)]^n + \\ &+ L_r\left[\eta r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} L_\varphi w - u\right)\right]^n - r^2 \sin \theta L_\varphi p^n. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь и ниже в выражениях:

$$L_\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_{\varphi\varphi} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_\theta \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad L_r \equiv \frac{\partial}{\partial r}.$$

В.2 (4.8)

$$\begin{aligned} \frac{v^{n+1/3} - v^n}{\Delta\tau} &= L_\theta(2r\eta \sin \theta L_\theta v^{n+1/3}) + (2r\eta \cos \theta L_\theta v^{n+1/3}) + \\ &+ L_\varphi\left(\frac{\eta r}{\sin \theta} L_\varphi v^n\right) + L_r(\eta r^3 \sin \theta L_r v^n) + \Phi_v^n, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\frac{v^{n+2/3} - v^{n+1/3}}{\Delta\tau} = L_\varphi\left(\frac{\eta r}{\sin \theta} L_\varphi v^{n+2/3}\right) - L_\varphi\left(\frac{\eta r}{\sin \theta} L_\varphi v^n\right), \quad (4.23)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+2/3}}{\Delta\tau} = L_r(\eta r^3 \sin \theta L_r v^{n+1}) - L_r(\eta r^3 \sin \theta L_r v^n); \quad (4.24)$$

$$\Phi_v^n = L_\varphi \left[\frac{\eta r}{\sin \theta} (\sin \theta \cdot L_\theta u - \cos \theta \cdot u) \right]^n + L_\theta [2 \eta r \sin \theta \cdot w]^n + \quad (4.25)$$

$$L_r [\eta r^2 \sin \theta (L_\theta w - v)]^n + 2 \eta r \cos \theta (L_r(r \cdot w))^n - r^2 \sin \theta L_\theta p^n.$$

B.3 (4.9)

$$\frac{w^{n+1/3} - w^n}{\Delta\tau} = L_r(2\eta r^2 \sin \theta L_r w^{n+1/3}) + (2\eta r \sin \theta L_r w^{n+1/3}) + \quad (4.26)$$

$$+ L_\varphi \left(\frac{\eta}{\sin \theta} L_\varphi w^n \right) + L_\theta (\eta \sin \theta L_\theta w^n) + \Phi_w^n,$$

$$\frac{w^{n+2/3} - w^{n+1/3}}{\Delta\tau} = L_\varphi \left(\frac{\eta}{\sin \theta} L_\varphi w^{n+2/3} \right) - L_\varphi \left(\frac{\eta}{\sin \theta} L_\varphi w^n \right), \quad (4.27)$$

$$\frac{w^{n+1} - w^{n+2/3}}{\Delta\tau} = L_\theta (\eta \sin \theta L_\theta w^{n+1}) - L_\theta (\eta \sin \theta L_\theta w^n); \quad (4.28)$$

$$\Phi_w^n = L_\varphi [\eta (r L_r u - u)]^n + L_\theta [\eta \sin \theta (r L_r v - v)]^n - r^2 \sin \theta (L_r p^n - \text{Ra} \cdot T^m). \quad (4.29)$$

Аппроксимация уравнений в приведённых выше схемах *B.1*, *B.2* и *B.3*, на примере *B.1* сводится к следующим шагам.

Первый дробный шаг (4.18) ($n+1/3$):

$$u^{n+1/3} - \Delta\tau L_\varphi (2\eta r L_\varphi u^{n+1/3}) = d^\varphi \equiv u^n + \Delta\tau \Lambda_\varphi, \quad (4.30)$$

где $\Lambda_\varphi = L_\theta (\eta r \sin^2 \theta L_\theta u^n) + L_r (\eta r^3 \sin^2 \theta L_r u^n) + \Phi_u^n$.

Входящие в (4.30) операторы перепишем следующим образом:

$$L_\varphi (2\eta r L_\varphi u^{n+1/3}) \cong \quad (4.31)$$

$$2r_k \frac{\eta_{i+1/2,j,k} (u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k})^{n+1/3} - \eta_{i-1/2,j,k} (u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k})^{n+1/3}}{h_\varphi^2},$$

$$L_\theta (\eta r \sin^2 \theta L_\theta u^n) \cong \quad (4.32)$$

$$r_k \frac{\eta_{i,j+1/2,k} (\sin^2 \theta)_{j+1/2} (u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k})^n - \eta_{i,j-1/2,k} (\sin^2 \theta)_{j-1/2} (u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k})^n}{h_\theta^2},$$

$$L_r (\eta r^3 \sin^2 \theta L_r u^n) \cong \quad (4.33)$$

$$(\sin^2 \theta)_j \frac{\eta_{i,j,k+1/2} \cdot r_{k+1/2} (u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k})^n - \eta_{i,j,k-1/2} \cdot r_{k-1/2} (u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1})^n}{h_r^2}.$$

Здесь и далее см.(2.28), а множители типа r_k и, например, $(\sin^2 \theta)_{j-1/2}$ в (4.32) означают выбор значений в точках с соответствующими индексами: $r_k = r_1 + h_r(k-1)$; $(\sin^2 \theta)_{j-1/2} = \sin^2(\theta_1 + h_\theta(j-3/2))$ (r_1 и θ_1 начальные значения вдоль соответствующих направлений в исследуемой области (4.12)).

Операторное уравнение (4.30) можно переписать в виде

$$u_{i,j,k}^{n+1/3} - \frac{2r_k \cdot \Delta\tau}{h_\phi^2} [\eta_{i+1/2,j,k} (u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k})^{n+1/3} - \eta_{i-1/2,j,k} (u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k})^{n+1/3}] = d_{i,j,k}^\phi, \quad (4.34)$$

которое преобразуется в разностное:

$$-a_{i,j,k}^\phi u_{i+1,j,k} + b_{i,j,k}^\phi u_i - c_{i,j,k}^\phi u_{i-1,j,k} = d_{i,j,k}^\phi. \quad (4.35)$$

Из (4.34) получаем коэффициенты для первого дробного шага (4.18) поиска решения уравнения (4.7):

$$a_{i,j,k}^\phi = \frac{2r_k \cdot \Delta\tau}{h_\phi^2} (\eta_{i+1/2,j,k}), \quad c_{i,j,k}^\phi = \frac{2r_k \cdot \Delta\tau}{h_\phi^2} (\eta_{i-1/2,j,k}), \quad b_{i,j,k}^\phi = 1 + a_{i,j,k}^\phi + c_{i,j,k}^\phi.$$

$d_{i,j,k}^\phi$ находим использованием выражений (4.32) и (4.33) в (4.30), а также учитывая сеточное представление Φ_u^n из (4.21):

$$\begin{aligned} (\Phi_u^n)_{i,j,k} \cong & \frac{[2\eta r(\cos \theta \cdot v + \sin \theta \cdot w)]_{i+1,j,k}^n - [2\eta r(\cos \theta \cdot v + \sin \theta \cdot w)]_{i-1,j,k}^n}{2h_\phi} + \\ & \frac{[\eta r \sin \theta (L_\phi v - \cos \theta \cdot u)]_{i,j+1,k}^n - [\eta r \sin \theta (L_\phi v - \cos \theta \cdot u)]_{i,j-1,k}^n}{2h_\theta} + \\ & + \frac{\left[\eta r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} L_\phi w - u \right) \right]_{i,j,k+1}^n - \left[\eta r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} L_\phi w - u \right) \right]_{i,j,k-1}^n}{2h_r} - f(p_{i,j,k}^n). \end{aligned}$$

Здесь $f(p_{i,j,k}^n) = (r^2)_k (\sin \theta)_j \frac{(p_{i+1,j,k} - p_{i-1,j,k})^n}{2h_\phi}$, $L_\phi w = \frac{(w_{i+1,j,k} - w_{i-1,j,k})}{2h_\phi}$.

Второй дробный шаг (4.19) ($n+2/3$):

$$u^{n+2/3} - \Delta\tau L_\theta (\eta r \sin^2 \theta L_\theta u^{n+2/3}) = d^\theta \equiv u^{n+1/3} - \Delta\tau L_\theta (\eta r \sin^2 \theta L_\theta u^n). \quad (4.36)$$

Операторное соотношение (4.36) преобразуется в разностное

$$u^{n+2/3} - \frac{\Delta\tau \cdot r_k}{h_\theta^2} \cdot \left[\eta_{i,j+1/2,k} (\sin^2 \theta)_{j+1/2} (u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k})^{n+2/3} - \right. \\ \left. - \eta_{i,j-1/2,k} (\sin^2 \theta)_{j-1/2} (u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k})^{n+2/3} \right] = d_{i,j,k}^\theta \quad (4.37)$$

для которого коэффициенты уравнения

$$-a_{i,j,k}^\theta u_{i,j+1,k} + b_{i,j,k}^\theta u_i - c_{i,j,k}^\theta u_{i,j-1,k} = d_{i,j,k}^\theta \quad (4.38)$$

следующие:

$$a_{i,j,k}^\theta = \frac{r_k \cdot \Delta\tau}{h_\theta^2} (\eta_{i,j+1/2,k}) \cdot (\sin^2 \theta)_{j+1/2}; \quad c_{i,j,k}^\theta = \frac{r_k \cdot \Delta\tau}{h_\theta^2} (\eta_{i-1/2,j,k}) \cdot (\sin^2 \theta)_{j-1/2}; \\ b_{i,j,k}^\theta = 1 + a_{i,j,k}^\theta + c_{i,j,k}^\theta;$$

$$d_{i,j,k}^\theta = u^{n+1/3} - \frac{r_k \cdot \Delta\tau}{h_\theta^2} \cdot \left[\eta_{i,j+1/2,k} (\sin^2 \theta)_{j+1/2} (u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k})^n - \right. \\ \left. - \eta_{i,j-1/2,k} (\sin^2 \theta)_{j-1/2} (u_{i,j,k} - u_{i,j-1,k})^n \right]. \quad (4.39)$$

Третий шаг (4.20) ($n+1$):

$$u^{n+1} - \Delta\tau L_r (\eta r^3 \sin^2 \theta L_r u^{n+1}) = d^r \equiv u^{n+2/3} - \Delta\tau L_r (\eta r^3 \sin^2 \theta L_r u^n) \quad (4.40)$$

Операторное выражение (4.40) преобразуется в разностное

$$u^{n+1} - \frac{\Delta\tau \cdot (\sin^2 \theta)_j}{h_r^2} \cdot \left[\eta_{i,j,k+1/2} \cdot (r^3)_{k+1/2} (u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k})^{n+2/3} - \right. \\ \left. - \eta_{i,j,k-1/2} \cdot (r^3)_{k-1/2} (u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1})^{n+2/3} \right] = d_{i,j,k}^r \quad (4.41)$$

для которого коэффициенты уравнения

$$-a_{i,j,k}^r u_{i,j,k+1} + b_{i,j,k}^r u_i - c_{i,j,k}^r u_{i,j,k-1} = d_{i,j,k}^r \quad (4.42)$$

следующие:

$$a_{i,j,k}^r = \frac{\Delta\tau \cdot (\sin^2 \theta)_j}{h_\theta^2} (\eta_{i,j,k+1/2}) \cdot (r^3)_{k+1/2}; \quad c_{i,j,k}^r = \frac{\Delta\tau \cdot (\sin^2 \theta)_j}{h_\theta^2} (\eta_{i,j,k-1/2}) \cdot (r^3)_{k-1/2}; \\ b_{i,j,k}^r = 1 + a_{i,j,k}^r + c_{i,j,k}^r.$$

Разностный аналог $d^r \cong d_{i,j,k}^r$:

$$d_{i,j,k}^r = u^{n+2/3} - \frac{\Delta\tau \cdot (\sin^2 \theta)_j}{h_r^2} \cdot \left[\eta_{i,j,k+1/2} \cdot (r^3)_{k+1/2} (u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k})^n - \right. \\ \left. - \eta_{i,j,k-1/2} \cdot (r^3)_{k-1/2} (u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1})^n \right]. \quad (4.43)$$

Правые части $d_{i,j,k}^\varphi$, $d_{i,j,k}^\theta$ и $d_{i,j,k}^r$ приведённых уравнений (4.35), (4.38) и (4.42) легко построить исходя из найденных коэффициентов разностных уравнений:

$$d_{i,j,k}^\varphi = u_{i,j,k}^n + a_{i,j,k}^\theta u_{i,j+1,k}^n + (1 - b_{i,j,k}^\theta) u_{i,j,k}^n + c_{i,j,k}^\theta u_{i,j-1,k}^n + \\ a_{i,j,k}^r u_{i,j,k+1}^n + (1 - b_{i,j,k}^r) u_{i,j,k}^n + c_{i,j,k}^r u_{i,j,k-1}^n; \\ d_{i,j,k}^\theta = u_{i,j,k}^{n+1/3} - (a_{i,j,k}^\theta u_{i,j+1,k}^n + (1 - b_{i,j,k}^\theta) u_{i,j,k}^n + c_{i,j,k}^\theta u_{i,j-1,k}^n); \\ d_{i,j,k}^r = u_{i,j,k}^{n+2/3} - (a_{i,j,k}^r u_{i,j,k+1}^n + (1 - b_{i,j,k}^r) u_{i,j,k}^n + c_{i,j,k}^r u_{i,j,k-1}^n).$$

В дальнейшем, по формулам прогонки [130] и с учётом разностных аналогов граничных условий задачи, вычисляется компонента скорости $u \equiv V^\varphi$.

Аналогично записываются и вычисляются компоненты скорости $v \equiv V^\theta$ из (4.22)-(4.25) и $w \equiv V^r$ из (4.26)-(4.29).

Этап Г

С использованием полученного поля скоростей вычислялось давление на $n+1$ -м шаге по фиктивному времени τ :

$$p^{n+1} = p^n - c^2 \Delta\tau \left(\frac{1}{r \sin \theta} L_\varphi u^{n+1} + \frac{1}{r \sin \theta} L_\theta (\sin \theta v^{n+1}) + \frac{1}{r^2} L_r (r^2 w^{n+1}) \right). \quad (4.44)$$

Параметр c^2 существенно влияет на устойчивость вычислительного процесса и должен быть согласован с ограничением на шаг по времени $\tau^n - \tau^{n-1} = \Delta\tau$ [80]: $\Delta\tau < h/c$. Существуют ограничения и на c^2 . Исходя из результатов численных экспериментов c^2 выбирается равным 25000.

Этапы **B** и **Г** повторяются до тех пор, пока не будет выполнено некоторое условие сходимости, аналогичное (2.45) и (2.46) из (п. 2.2).

Этап Д

Далее методом стабилизирующей поправки проводится интегрирование уравнения теплопереноса (4.10) на временном слое m по схеме, в которой компоненты вектора скорости внесены с $n+1$ -го слоя по фиктивному времени τ :

$$\begin{aligned} \frac{T^{m+1/3} - T^m}{\Delta t} = & \frac{L_{\varphi\varphi}(T^{m+1/3})}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{L_{\varphi}(u^{m,n+1} \cdot T^{m+1/3})}{r \sin \theta} + \\ & + \frac{L_{\theta}(\sin \theta L_{\theta} T^m)}{r^2 \sin \theta} - \frac{L_{\theta}(\sin \theta \cdot v^{m,n+1} \cdot T^m)}{r \sin \theta} + \\ & + \frac{L_r(r^2 L_r T^m)}{r^2} - \frac{L_r(r^2 \cdot w^{m,n+1} \cdot T^m)}{r^2}; \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{T^{m+2/3} - T^{m+1/3}}{\Delta t} = & \frac{L_{\theta}(\sin \theta L_{\theta} T^{m+2/3})}{r^2 \sin \theta} - \frac{L_{\theta}(\sin \theta \cdot v^{m,n+1} \cdot T^{m+2/3})}{r \sin \theta} - \\ & - \frac{L_{\theta}(\sin \theta L_{\theta} T^m)}{r^2 \sin \theta} + \frac{L_{\theta}(\sin \theta \cdot v^{m,n+1} \cdot T^m)}{r \sin \theta}; \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{T^{m+1} - T^{m+2/3}}{\Delta t} = & \frac{L_r(r^2 L_r T^{m+1})}{r^2} - \frac{L_r(r^2 \cdot w^{m,n+1} \cdot T^{m+1})}{r^2} - \\ & - \frac{L_r(r^2 L_r T^m)}{r^2} + \frac{L_r(r^2 \cdot w^{m,n+1} \cdot T^m)}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Преобразование выражений, предназначенных для вычисления температуры по схеме (4.45)-(4.47) также приводит к коэффициентам для разностных уравнений второго порядка.

Для первого дробного шага в схеме (4.45) имеем уравнение в операторной форме

$$\begin{aligned}
T^{m+1/3} - \Delta t \frac{L_{\varphi\varphi}(T^{m+1/3})}{r^2 \sin^2 \theta} + \Delta t \frac{L_{\varphi}(u^{m,n+1} \cdot T^{m+1/3})}{r \sin \theta} &= d_T^{\varphi}; \\
d_T^{\varphi} \equiv T^m + \Delta t \frac{L_{\theta}(\sin \theta L_{\theta} T^m)}{r^2 \sin \theta} - \\
- \Delta t \frac{L_{\theta}(\sin \theta \cdot v^{m,n+1} \cdot T^m)}{r \sin \theta} + \Delta t \frac{L_r(r^2 L_r T^m)}{r^2} - \Delta t \frac{L_r(r^2 \cdot w^{m,n+1} \cdot T^m)}{r^2}, &
\end{aligned} \tag{4.48}$$

которое преобразуется в разностное уравнение

$$-a_{T,i,j,k}^{\varphi} T_{i+1,j,k} + b_{T,i,j,k}^{\varphi} T_{i,j,k} - c_{T,i,j,k}^{\varphi} T_{i-1,j,k} = d_{T,i,j,k}^{\varphi} \tag{4.49}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
a_{T,i,j,k}^{\varphi} &= \frac{1}{(r^2)_k \cdot (\sin^2 \theta)_j} \cdot \frac{\Delta t}{h_{\varphi}^2} - \frac{u_{i+1,j,k}^{m,n+1}}{r_k \cdot \sin \theta_j} \cdot \frac{\Delta t}{2h_{\varphi}}; \\
c_{T,i,j,k}^{\varphi} &= \frac{1}{(r^2)_k \cdot (\sin^2 \theta)_j} \cdot \frac{\Delta t}{h_{\varphi}^2} + \frac{u_{i-1,j,k}^{m,n+1}}{r_k \cdot \sin \theta_j} \cdot \frac{\Delta t}{2h_{\varphi}}; \\
b_{T,i,j,k}^{\varphi} &= 1 + \frac{2}{(r^2)_k \cdot (\sin^2 \theta)_j} \cdot \frac{\Delta t}{h_{\varphi}^2}.
\end{aligned}$$

Для следующего уравнения (в схеме – (4.46))

$$\begin{aligned}
T^{m+2/3} - \Delta t \frac{L_{\theta}(\sin \theta L_{\theta} T^m)}{r^2 \sin \theta} + \Delta t \frac{L_{\theta}(\sin \theta \cdot v^{m,n+1} \cdot T^m)}{r \sin \theta} &= d_T^{\theta}; \\
d_T^{\theta} \equiv T^{m+1/3} - \Delta t \frac{L_{\theta}(\sin \theta L_{\theta} T^m)}{r^2 \sin \theta} + \Delta t \frac{L_{\theta}(\sin \theta \cdot v^{m,n+1} \cdot T^m)}{r \sin \theta} &
\end{aligned} \tag{4.50}$$

получим разностное выражение

$$-a_{T,i,j,k}^{\theta} T_{i,j+1,k} + b_{T,i,j,k}^{\theta} T_{i,j,k} - c_{T,i,j,k}^{\theta} T_{i,j-1,k} = d_{T,i,j,k}^{\theta} \tag{4.51}$$

с коэффициентами:

$$\begin{aligned}
a_{T,i,j,k}^{\theta} &= \frac{(\sin \theta)_{j+1/2}}{(r^2)_k \cdot (\sin \theta)_j} \cdot \frac{\Delta t}{h_{\theta}^2} - \frac{(\sin \theta)_{j+1} \cdot v_{i,j+1,k}^{m,n+1}}{r_k \cdot (\sin \theta)_j} \cdot \frac{\Delta t}{2h_{\theta}}; \\
c_{T,i,j,k}^{\theta} &= \frac{(\sin \theta)_{j-1/2}}{(r^2)_k \cdot (\sin \theta)_j} \cdot \frac{\Delta t}{h_{\theta}^2} + \frac{(\sin \theta)_{j-1} \cdot v_{i,j-1,k}^{m,n+1}}{r_k \cdot (\sin \theta)_j} \cdot \frac{\Delta t}{2h_{\theta}}; \\
b_{T,i,j,k}^{\theta} &= 1 + \frac{(\sin \theta)_{j+1/2} + (\sin \theta)_{j-1/2}}{(r^2)_k \cdot (\sin \theta)_j} \cdot \frac{\Delta t}{h_{\theta}^2}.
\end{aligned}$$

Для последнего шага в схеме – (4.47), из

$$T^{m+1} - \Delta t \frac{L_r(r^2 L_r T^{m+1})}{r^2} + \Delta t \frac{L_r(r^2 \cdot w^{m,n+1} \cdot T^m)}{r^2} = d_T^r; \quad (4.52)$$

$$d_T^r \equiv T^{m+2/3} - \Delta t \frac{L_r(r^2 L_r T^m)}{r^2} + \Delta t \frac{L_r(r^2 \cdot w^{m,n+1} \cdot T^m)}{r^2}$$

получим

$$-a_{T,i,j,k}^r T_{i,j,k+1} + b_{T,i,j,k}^r T_{i,j,k} - c_{T,i,j,k}^r T_{i,j,k-1} = d_{T,i,j,k}^r, \quad (4.53)$$

в котором коэффициенты будут такие:

$$a_{T,i,j,k}^r = \frac{(r^2)_{k+1/2}}{(r^2)_k} \cdot \frac{\Delta t}{h_r^2} - \frac{(r^2)_{k+1} w_{i,j,k+1}^{m,n+1}}{(r^2)_k} \cdot \frac{\Delta t}{2h_r};$$

$$c_{T,i,j,k}^r = \frac{(r^2)_{k-1/2}}{(r^2)_k} \cdot \frac{\Delta t}{h_r^2} + \frac{(r^2)_{k-1} w_{i,j,k-1}^{m,n+1}}{(r^2)_k} \cdot \frac{\Delta t}{2h_r};$$

$$b_{T,i,j,k}^r = 1 + \frac{(r^2)_{k+1/2} + (r^2)_{k-1/2}}{(r^2)_k} \cdot \frac{\Delta t}{h_r^2}.$$

Правые части $d_{T,i,j,k}^\theta$, $d_{T,i,j,k}^\theta$ и $d_{T,i,j,k}^r$ уравнений (4.49), (4.51) и (4.53) с учётом найденных коэффициентов разностных уравнений (4.51) и (4.53) будут следующими:

$$d_{T,i,j,k}^\theta = T_{i,j,k}^m + a_{T,i,j,k}^\theta T_{i,j+1,k}^m + (1 - b_{T,i,j,k}^\theta) T_{i,j,k}^m + c_{T,i,j,k}^\theta T_{i,j-1,k}^m +$$

$$a_{T,i,j,k}^r T_{i,j,k+1}^m + (1 - b_{T,i,j,k}^r) T_{i,j,k}^m + c_{T,i,j,k}^r T_{i,j,k-1}^m;$$

$$d_{T,i,j,k}^\theta = T_{i,j,k}^{m+1/3} - (a_{T,i,j,k}^\theta T_{i,j+1,k}^m + (1 - b_{T,i,j,k}^\theta) T_{i,j,k}^m + c_{T,i,j,k}^\theta T_{i,j-1,k}^m);$$

$$d_{T,i,j,k}^r = T_{i,j,k}^{m+2/3} - (a_{T,i,j,k}^r T_{i,j,k+1}^m + (1 - b_{T,i,j,k}^r) T_{i,j,k}^m + c_{T,i,j,k}^r T_{i,j,k-1}^m).$$

Вычисления продолжаются до некоторого значения $m = M = t_m$, обусловленного условиями задачи. Если $m < M$ процесс повторяется, т.е. возвращается на *Этап Б*, приведённой схемы с новым значением $m = m + 1$.

4.2 Комплекс программ: «Программа расчёта трёхмерной конвекции под континентальными плитами Земли в сферических координатах»

Разработан и оттестирован комплекс программ расчёта трёхмерной конвекции под континентальными плитами Земли неявным методом искусственной сжимаемости в сферических координатах Navie_Spherical_Coords/2017 [205].

Комплекс программ написан на алгоритмическом языке Фортран - 90 [69] с учётом применения на многопроцессорной ЭВМ [51]. Применена, в частности, численная реализация, приведённая в предыдущем пункте 4.1 для расчётов компонент вектора скорости, давления и температуры.

Ввиду того, что последующие вычисления предполагались на сетках порядка $1000 \times 1000 \times 100$ ячеек и более, комплекс программ Navie_Spherical_Coords/2017 изначально был ориентирован на MPI-технологии [51]. Программы были протестированы и запускаются на ЭВМ Сибирского суперкомпьютерного центра ИВМиМГ СО РАН под управлением:

Кластер НКС-1П:

Операционная система - CentOS 7.3.

Очередь заданий - SLURM (slurm 17.02.3).

Компиляторы - Intel Parallel Studio XE 2017 Update 4.

Гибридный кластер НКС-30Т + GPU:

Операционная система - Red Hat Enterprise Linux 5.4.

Очередь заданий - PBS Pro 11.1.

Компиляторы - Intel Cluster Studio XE, Intel Parallel Studio XE for OS Linux, Intel Composer XE 2013 for Linux (C/C++ Intel 64 Compiler XE

for Linux, Fortran Intel 64 Compiler XE for Linux, Intel Math Kernel Library 11.0, Intel Integrated, Performance Primitives 7.1, Intel Threading Building Blocks 4.1). MPI - Intel MPI Version 4.1, Intel Trace Analyzer&Collector Version 8.1.

Комплекс программ включает в себя основную программу, которая в собранном состоянии (т.е. после компиляции) занимает менее 900 килобайт. Набор из вспомогательных модулей занимает на диске не более 3-х мегабайт. Требования программ к оперативной памяти не превышают 4 Мбайт. Вспомогательные модули формируют временные массивы данных для каждого потока, суммарный объём которых находится в пределах 200 Мбайт. Для вывода данных необходимо до 100 Гбайт жёсткого диска.

4.3 Сравнительное численное моделирование трёхмерной конвекции с применением декартовой и сферической систем координат

Для контроля вычислений в сферических координатах возникает необходимость сравнения результатов, полученных в декартовых координатах в прямом параллелепипеде и результатов, полученных в Φ сферической области, приближённо эквивалентной декартовой области при тех же условиях и параметрах вычислительных процедур.

На начальном этапе численная модель тестировалась на аналитическом решении в виде аналитических выражений для вычисляемых полей температуры, компонент скорости и давления. Решались задачи Неймана и Дирихле для уравнения Пуассона, применительно к искомым полям.

Основываясь на решениях в декартовых координатах, были построены решения в сферических областях. Прямой параллелепипед

представлялся в виде сферической области, расположенной симметрично относительно экватора. Глубина слоя выбиралась достаточно «тонкой» (700 км). Длины по параллелям и меридианам не превышали радиуса Земли.

Постановка задачи моделирования конвекции под литосферой переменной мощности

Параметры (в системе СИ) для задачи сравнения выбирались общими для сферических и декартовых координат:

$$\begin{aligned} R &= 6370000\text{м}, d = 700000\text{м}, \Delta T = 1800^\circ\text{С}, \\ \chi &= 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{сек}, \alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{С}, \rho = 3300 \text{ кг/м}^3, \\ g_z &= 10 \text{ м/сек}^2, \eta_0 = 1,10871 \cdot 10^{21} \text{ кг/(м} \cdot \text{сек)}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Вязкость мантии в сферической области $\Pi = \{[0^\circ, 37,8^\circ] \times [-18,9^\circ, 18,9^\circ] \times [5870, 6370] \text{ км}\}$ задавалась в виде (4.18),

а вязкость в декартовом параллелепипеде $\Pi = \{[0, 4200] \times [0, 4200] \times [5870, 6370] \} \text{ км}^3$ – в форме (2.16). При $t = 0$ график (4.18) идентичен представленному (Рисунок 2.9). В (4.44) $\varepsilon^2 = 25000$, $\Delta \tau = \min(\Delta \varphi, \Delta \theta, \Delta r) / \varepsilon$.

Число Рэлея, полученное в результате применения (4.54): $Ra = Ra_R = 301\,428\,400$, ($Ra_d = 400\,000$). Начальное представление температурного поля для параллелепипеда задано так же, как и в п. 3.1 предыдущей главы.

Аналогично *Этапам А и Б* в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ задаются условия для температуры и вычисляется поле вязкости в сферическом секторе.

И в декартовой и в сферической области вычисления проводились по схеме (2.12)-(2.14) на сетке $(191 \times 171 \times 70)$ ячеек и с шагом по времени в один миллион лет. Задача в параллелепипеде решена при помощи комплекса программ [207], описание которого приводится в п. 2.5 второй главы. Решение в сферической области осуществлялось с применением программы из [205] (п. 4.2).

Область на сфере симметрично ориентирована вдоль линии экватора и максимально приближена по размерам и конфигурации к декартовой.

В литосферную плиту, мощность которой 160 км, включены: на юго-западе – кратон, мощностью 220 км; на северо-востоке – ловушка (80 км). Расположения и формы кратона и ловушки в обеих областях практически совпадают.

Рисунок 4.2 изображает «горизонтальные» сечения полей температуры на глубине $z = 220$ км (а) ($r = 220$ км (b)). Вычисления проводились в декартовой области (в параллелепипеде) и в области на сфере, протяжённость которой на экваторе и вдоль меридиана составляет 38° (или 4200 км), что совпадает с геометрическими характеристиками декартового прямоугольного параллелепипеда. Кратон в расчётной области определён координатами $(4^\circ, -14^\circ)$, $(14^\circ, -6^\circ)$, ловушка - координатами $(21^\circ, 2^\circ)$, $(30^\circ, 11^\circ)$. Размер кратона - (1100×880) км², ловушки - (990×990) км².

Расчёты в декартовых переменных на основе уравнений (1.4)-(1.6) и граничных условиях (1.8)-(1.10), (1.12)-(1.15) в (1.7) при $X = Y = 6$, $Z = 1$ представлены на рисунке слева (Рисунок 4.2).

В сферических переменных получены результаты, основанные на решении уравнений (4.6)-(4.10) и граничных условиях (4.13)-(4.15).

На всех гранях кратона и ловушки задавались условия прилипания:

$$\mathbf{V}=0.$$

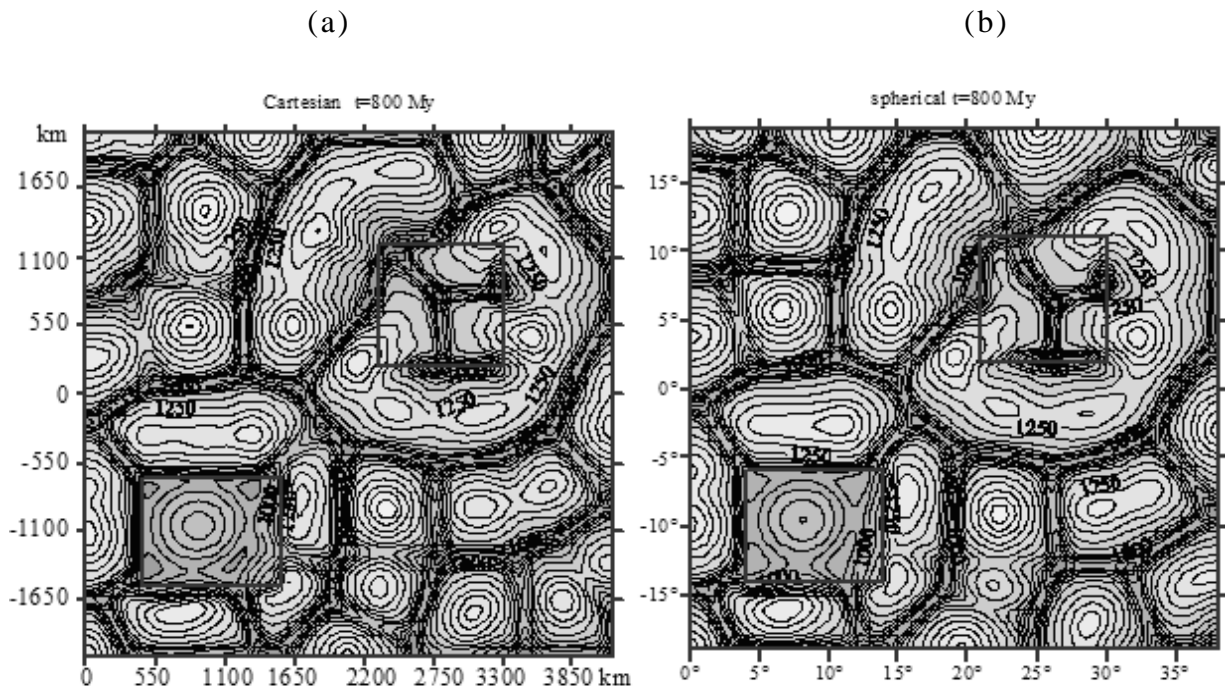


Рисунок 4.2 – Горизонтальные сечения температурных полей при на глубине $z = 220$ км (а) и $r = 220$ км (б). Слева – в параллелепипеде $(4200 \times 4200 \times 700)$ км³; справа – в сферической области; $t = 800$ млн лет

В зоне ловушки, ввиду повышенной теплоотдачи сформировались устойчивые нисходящие потоки, а под кратоном - восходящий поток. Кроме того, продемонстрирована сопоставимость полученных полей (Рисунок 4.2).

Выполненные в настоящей работе численные эксперименты обосновывают известный факт: в областях, указанных размеров (и не превышающих) в верхней мантии Земли конвективные процессы могут рассчитываться с применением декартовой системы координат.

Итак, моделирование конвекции в мантии Земли в приведённом примере модельной ситуации показали достаточно близкие результаты как в случае применения декартовых, так и в случае применения сферических координат. Как отмечалось ранее, численная модель в сферических переменных тестировалась на аналитических выражениях.

Таким образом, разработанный комплекс программ можно применять в дальнейших исследованиях.

4.4 Численное моделирование конвекции под литосферой Евразии

Обширный участок планеты – Евразийский материк состоит из многочисленных литосферных блоков. Конвективные процессы под ним являются предметом настоящего изучения.

Постановка задачи моделирования конвекции под континентом идентична постановке из предыдущего раздела для сферической области. Единственное отличие состоит в том, что для такой громадной территории необходимо гораздо больше сеточных узлов, что влечёт за собой построение задачи с распараллеливанием. Для этого привлекались MPI-технологии, которые являются составной частью комплексов программ, разработанных автором [205].

На представленной карте-схеме (Рисунок 4.3) изображена область моделирования конвекции в верхней мантии под Евразией с расположением элементов литосферы в расчётной области.

Численный эксперимент проводился в сферической области $0^\circ \leq \varphi \leq 145^\circ$, $20^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$, $5870 \text{ км} \leq r \leq 6370 \text{ км}$, на сетке $(576 \times 172 \times 71)$ точек. Шаг по времени составлял 1,0–2,5 млн лет.

В литосферную плиту континента, мощность которой повсеместно имеет значение в 120 км, включены платформы: Русская (на западе), Сибирская (на востоке); Тувинский комплекс микрократонов, находящийся к юго-западу от Ангарии, Тарим, Китайские – в юго-восточной области континента, Индийская плита, надвигающаяся на Евразию, Аравийская – в юго-западной части материка. Мощность всех перечисленных элементов литосферы составляет 220 км за исключением Аравийской плиты (в модели – 180 км) и Западно–

Сибирской платформы (120 км). В центральной части Евразии расположен Центрально-Азиатский складчатый пояс, мощность литосферы которого в нашей модели принимался равным 80 км, т.к. согласно геолого-геофизическим наблюдениям и оценкам [20] мощность литосферы в этом месте составляет 40-80 км.

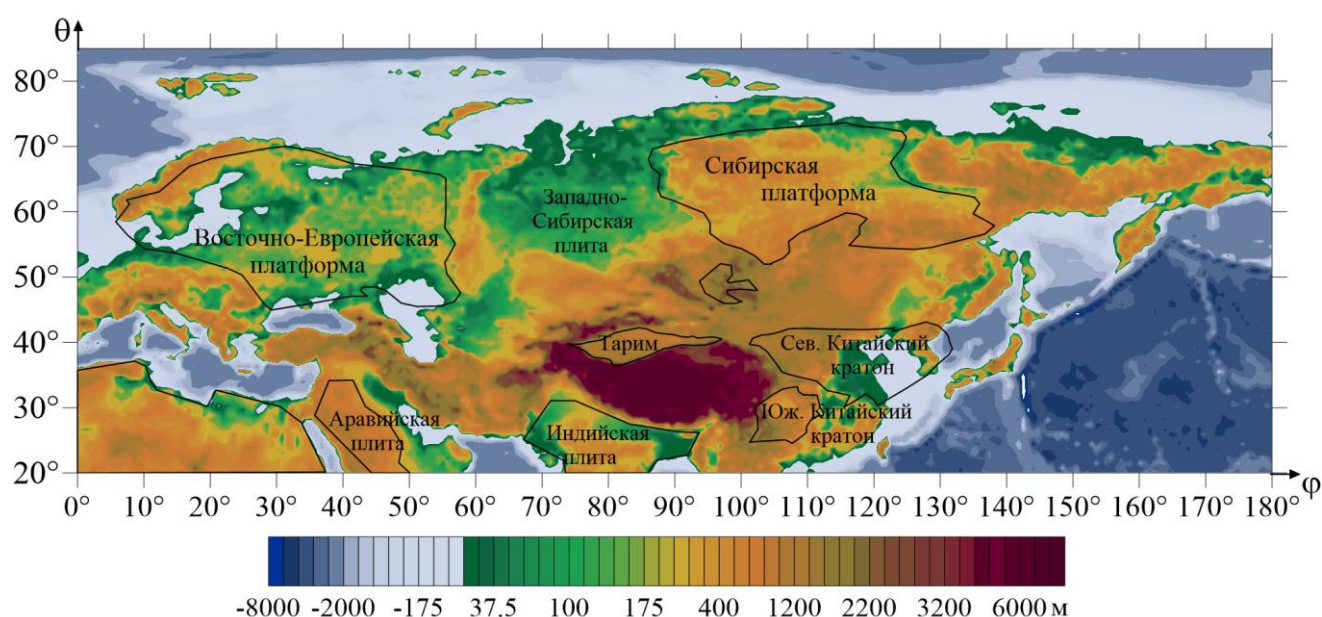


Рисунок 4.3 – Схема расчётной области и рельеф Евразии. Сплошными линиями выделены границы блоков с существенно различной мощностью литосферы

Расположение и конфигурация модельных элементов литосферы континента приближённо соответствуют реальным данным [20]. Плоская проекция представлена (Рисунок 4.3).

Погруженная часть каждого кратона представляет собой перевернутую усечённую пирамиду, верхнее основание которой и изображено на схеме (Рисунок 4.3).

Как показало моделирование, реальные кратоны Евразии порождают структуры, аналогичные тем, что были найдены в

результате расчётов под прямоугольными в плане модельными кратонами [111]. На сечениях поля температуры (Рисунок 4.4 –Рисунок 4.7) видны устойчивые восходящие потоки в виде плюмов уже при $t = 400$ млн лет; на рисунках, демонстрирующих конвекцию под двумя кратонами: при $t = 675$ и 700 млн лет (Рисунок 3.45 –Рисунок 3.49 и Рисунок 3.51 – Рисунок 3.53).

Замечены проявления мелкомасштабной моды конвекции в виде обтекания оснований кратонов и перенос горячего вещества астеносферы к верхним горизонтам (Рисунок 4.4, Рисунок 4.5).

Обнаружено повышение температуры в мантии под кратоном в среднем на 100°C .

Одним из очевидных следствий моделирования можно назвать тенденцию к подстройке мантийных течений под сложные формы рельефа кратонов, воздействие на характер конвективных течений градиентов мощности входящих в литосферу блоков.

Результаты численного моделирования показали, что в местах утонённой литосферы, где её мощность меньше фоновой (120 км), преобладают нисходящие течения. Прослеживая здесь значения температуры на глубине 320 км можно обнаружить довольно холодное (в среднем) мантийное вещество (Рисунок 4.7). В сравнении с температурными показателями под Западно-Сибирской плитой, мощность литосферы которой составляет 120 км, они (в среднем) на 100°C ниже и составляют от 800 до 900°C .

В частности, при рассмотрении областей, примыкающих к Сибирскому кратону, изучено влияние структуры литосферы на режим конвекции.

В работе [22] указывается на тот факт, что воздействие на конвективные течения в верхней мантии градиентов мощности литосферных блоков вполне можно связать с внутриконтинентальным

проявлением вулканизма [21] в некоторых районах Центральной Азии (Тува, Восточный Саян и прилегающие районы Монголии).

Согласно сейсмотомографическим данным в юго-западной оконечности Сибирского кратона наблюдается низкоскоростная аномалия верхней мантии, начиная непосредственно с минимальных для региональной томографии данного района глубин в 50 км. На глубинах свыше 200 км под восточной частью Центральной Монголии располагается меньшая по амплитуде отрицательная аномалия скоростей сейсмических волн, устойчивая вплоть до подошвы верхней мантии. К северу эта аномалия вытягивается в Прихубсугулье, в южные районы Тувы. В западной части исследуемого региона располагается поле повышенных скоростных характеристик, охватывающее западную половину Хангайского нагорья и далее Котловину Больших Озёр.

Верхние 250 км 3D модели аномалий скорости Р-волн использовались для оценки мощности литосферы изучаемого региона с помощью методики, описанной в работе [21]. На полученной карте мощностей в пределах западной части Хангайского нагорья, помимо Сибирского кратона, выделяется другой блок с утолщённой литосферой. Частично в его границы попадают территории Южно-Хангайского плато, Котловины Больших Озёр и Прихубсугулья. В таких границах этот блок соответствует очертанию Тувино-Монгольского массива, за исключением его северной части, наиболее раздробленной процессами кайнозойского рифтогенеза. Как показало проведённое тепло-гравитационное моделирование, мощная литосфера Сибирского кратона затрудняет вынос мантийного тепла, вследствие чего под ней возникает естественный локальный перегрев и происходит становление восходящего потока конвекции в верхней мантии под юго-западной частью кратона. Более того, в восточной части Центральной Монголии возникает парный ему восходящий поток. Положение этих восходящих потоков хорошо согласуется с распределением

отрицательных аномалий сейсмических скоростей, положением аномалий наблюденного гравитационного поля и распределением теплового потока. Можно предположить, что накапливающийся на подошве кратона разогретый материал по достижении некоторой критической массы смещается в обрамляющие его структуры. Такие “смещения”, в частности, фиксируются поведением низкоскоростной сейсмической аномалии в районе юго-западной оконечности Сибирского кратона: от глубоких срезов вплоть до минимальных для региональной томографии данного района глубин в 50 км, аномалия постепенно смещается в районы сложного неотектонического строения Восточного Саяна, Восточной Тувы, структурных ограничений Амурской плиты [62], включая Байкальскую рифтовую зону. Блоковая раздробленность этих зон, широкое развитие в них структур растяжения благоприятствуют развитию здесь процессов декомпрессионного плавления и становления очагов внутриплитного базальтового магматизма (особенно при дополнительном нагреве границы верхней и нижней мантии под утолщёнными литосферными блоками восходящим нижнемантийным потоком). Кроме того, недавно проведённые термодинамические расчёты фазовых диаграмм и оценки давлений по геобарометру Нимиса [173] показали, что давления кристаллизации клинопироксена из базальтов ареалов кайнозойского вулканизма исследуемой территории позволяют оценить глубину очагов магмогенерации в интервале 50-65 км. То есть, они тяготеют к мантийно-коревой границе, которая, по существующим оценкам [203], в районе Хангая находится на глубинах 45-55 км.

Тувино-Монгольский блок в силу своих ограниченных латеральных размеров не создаёт такого эффекта “перегрева”, но в значительной мере влияет на геометрические характеристики вертикального разреза верхнемантийного восходящего потока под Центральной Монголией.

Таким образом, возникновение конвективных течений в верхней мантии по причине различной мощности литосферных блоков можно рассматривать в качестве одной из основных геодинамических причин внутриконтинентального вулканизма рассмотренного сегмента Центральной Азии[21].

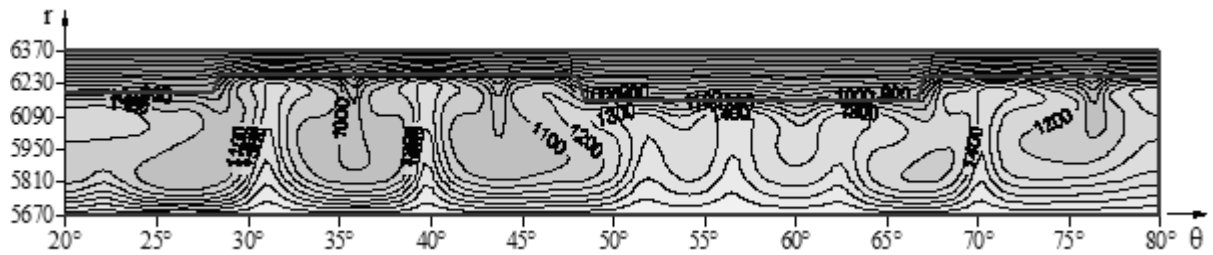


Рисунок 4.4 – Вертикальное ($r\theta$)-сечение поля температуры при $\varphi = 45^\circ$. Плоскость пересекает Аравийскую и Русскую плиты

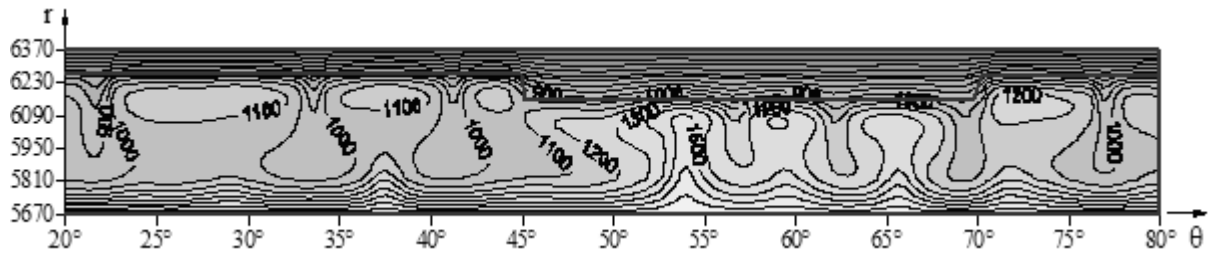


Рисунок 4.5 – Вертикальное ($r\theta$)-сечение температурного поля. $\varphi = 30^\circ$. Плоскость пересекает Восточно-Европейскую (Русскую) платформу

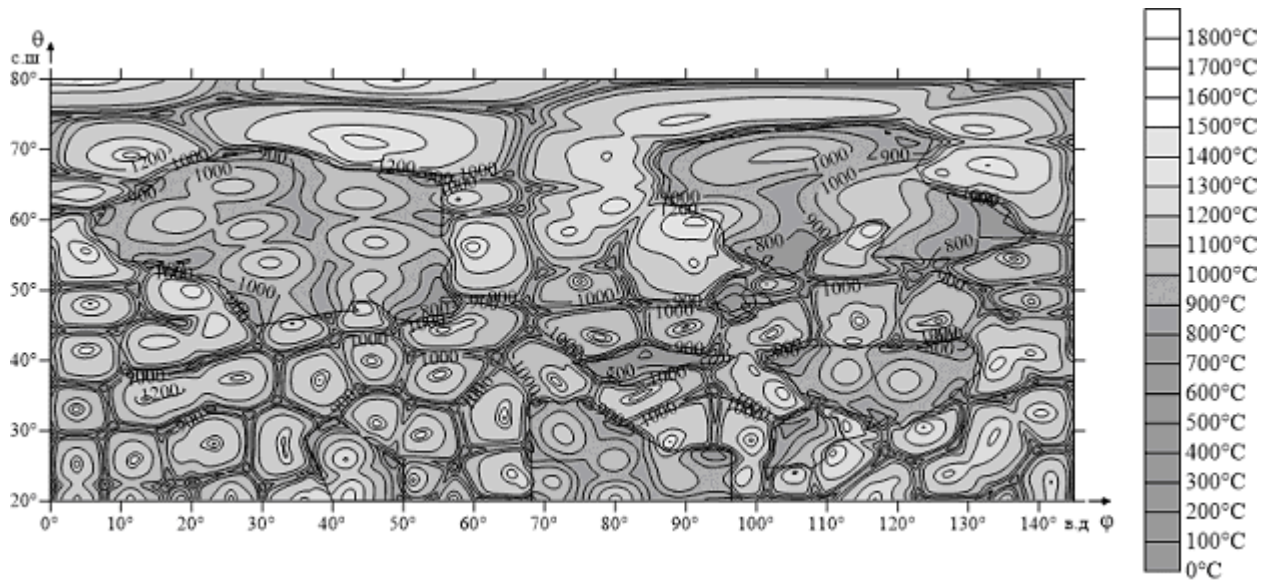


Рисунок 4.6 – Горизонтальное ($\phi\theta$)-сечение температурного поля; $r = 220$ км (от поверхности Земли), $t = 400$ млн лет

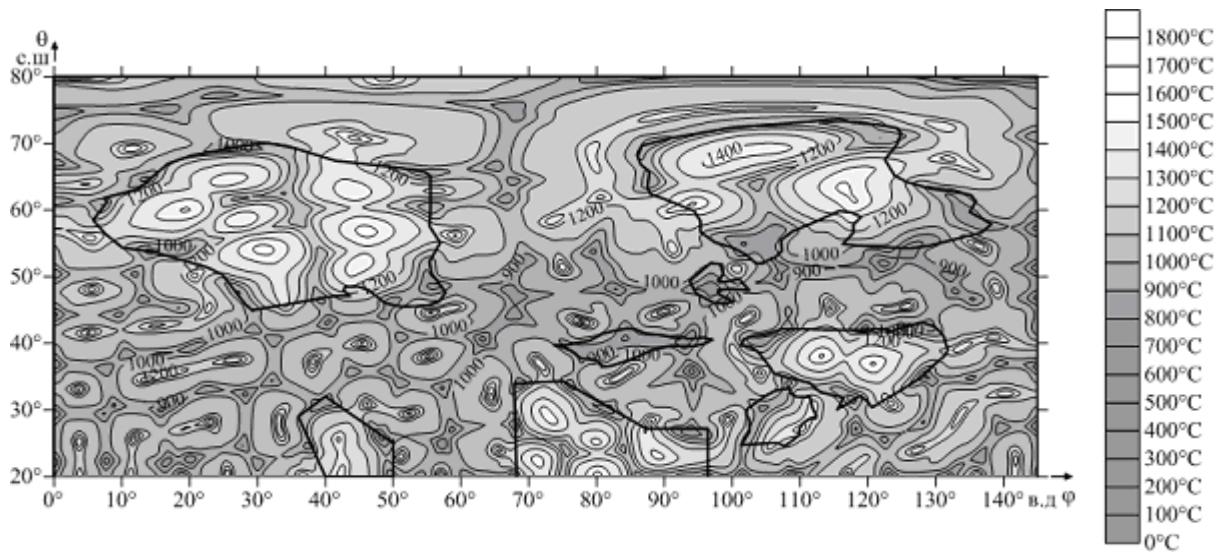


Рисунок 4.7 – Горизонтальное ($\phi\theta$)-сечение температурного поля; $r = 320$ км (от поверхности Земли), $t = 400$ млн лет

Дальнейшие уточнения контуров кратонов и их мощностей при числе Релея, равном 400 000, позволили получить следующие распределения температурного поля (Рисунок 4.12 – Рисунок 4.15), вычисленного на достаточно мелкой сетке – $(20 \times 20 \times 5)$ км³ (20 км вдоль экватора и меридианов; 5 км вдоль радиуса, т.е. $[0,18^\circ \times 0,18^\circ \times 5,00$ км]).

В новой постановке глубина расчётной области была сокращена до 670 километров (глубина залегания нижней границы верхней мантии в предыдущих модельных задачах выбиралась равной 700 км). Связано это с тем, что в настоящее время считается устоявшимся и общепринятым отбивать границу между верхней и нижней мантией именно на глубине 670 километров.

На востоке Сибирского кратона, в изгибе р. Лена мощность литосферы изменилась по сравнению со значением мощности предыдущей геодинамической модели со 120 км на 80 км. Основано такое изменение на том, что к востоку от реки Лена находится складчатый пояс – Верхоянская горная область, как продолжение Центрально-Азиатского складчатого пояса, который проходит южнее Ангарии, огибает её и восходит в район восточных границ кратона, т.е. в район Верхоянской горной провинции. Как правило, в таких местах литосфера тоньше средней (120 км) для континента. Вариации мощности могут находиться в пределах от 40 до 100 километров. В результате анализа сейсмотомографических данных [20-23] удалось выяснить, что в пределах соединения Сибирского кратона и Северо-Американской плиты мощность литосферы восточней кратона не более 80 километров. Вполне возможно, что именно в результате этих изменений «получилась» под кратоном депрессия (или впадина), напоминающая (или повторяющая) Вилуйскую синеклизу и Приверхоянский прогиб (Рисунок 4.8).

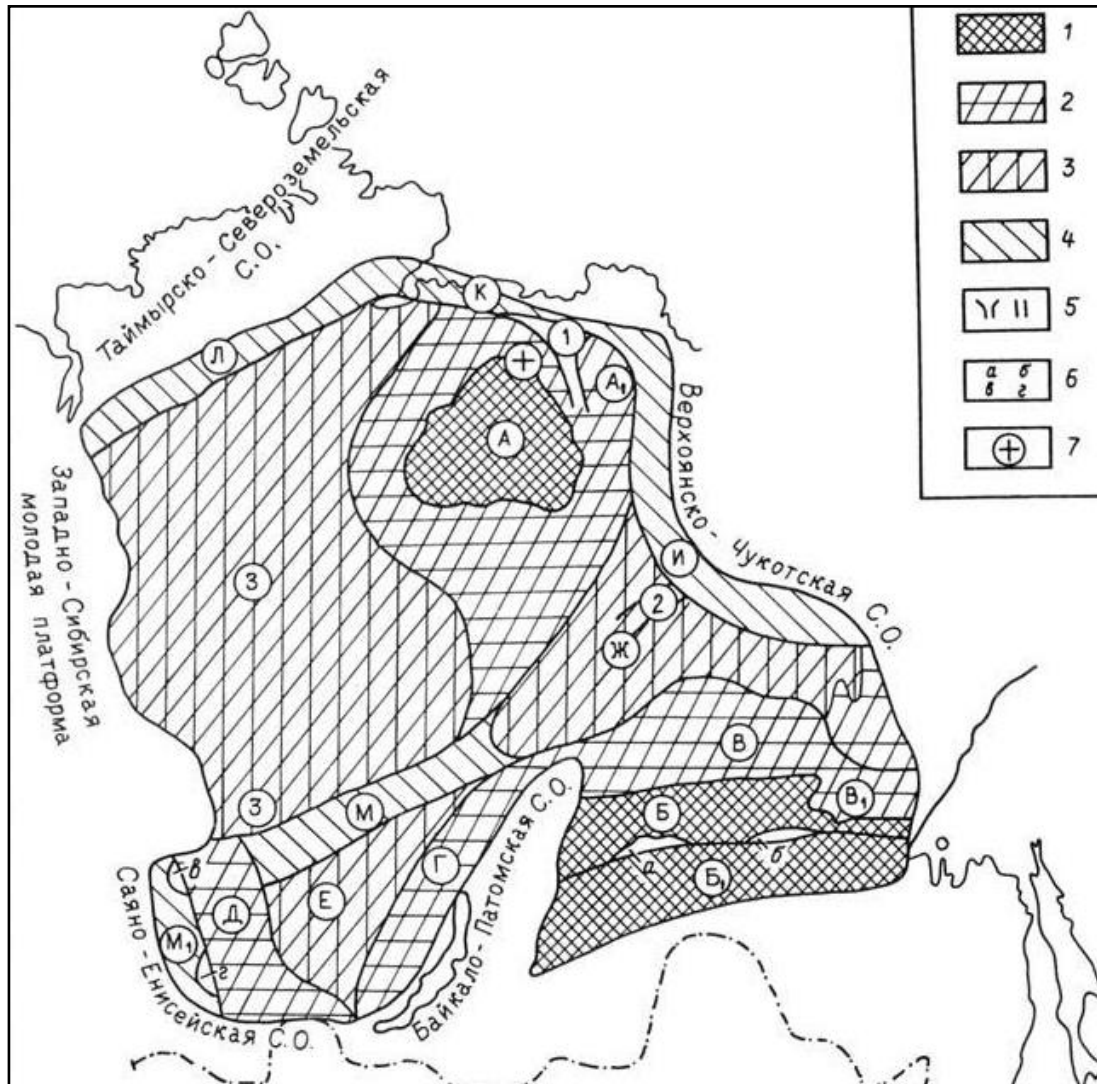


Рисунок 4.8 – Схема районирования Сибирской платформы [19]: 1 – шиты и поднятия: А – Анабарский, А1 – Оленекское, Б – Алданский, Б1 – Становая область; 2 – погружения склонов шитов и древних складчатых областей: В – Среднеленская моноклиза, В1 – Юдомо-Майская впадина, Г – Прибайкальская и Д – Приенисейская моноклизы; 3 – синеклизы: Е – Ангаро-Тасеевская, Ж – Вилюйская и З – Тунгусская; 4 – прогибы: И – Приверхоянский, К – Лено-Анабарский, Л – Хатанго-Пясинский (Енисей-Хатангский), М – Ангаро-Вилюйский, М1 – Присяянский; 5 – авлакогены (цифры в кружках): 1 – Уджинский, 2 – Вилюйский, 3 – Иркинеевский; 6 – впадины: а – Чульманская, б – Токинская, в – Рыбинская, г – Иркутская; 7 – Попигайская астроблема; С.О. – складчатая область

На Восточно-Европейской (Русской) платформе депрессия, порождённая нисходящим тепловым потоком, пересекает платформу с юга на север и повторяет Прикаспийскую низменность вместе с долиной, по которой текут реки Волга и Кама. Обозначенные на тектонической схеме буквами МС – Московская синеклиза (прогиб), а

буквами БС – Балтийская синеклиза вполне соответствуют нисходящим конвективным потокам, полученным в расчётах. Кроме того, возвышенности (антеклизы) Русской платформы (обозначенные на схеме буквами БА, ВУА и ВА) вполне можно связать с восходящими потоками (Рисунок 4.9, Рисунок 4.12).

Для уточнения результатов расчётов под Евразией выполнены вычисления полей около Сибирского кратона от 60° в.д. до 160° в.д. Область была расширена и в северном направлении, т.е. к полюсу, до 88° с.ш. (Рисунок 4.17 – Рисунок 4.19).

Вычисления проводились на более мелкой сетке – $(10 \times 10 \times 5)$ км³ (10 км вдоль экватора и меридианов; 5 км вдоль радиуса, т.е. $[0,09^\circ \times 0,09^\circ \times 5,00$ км]).

Как показывают сравнения температурных полей вблизи Сибирского кратона и под самим кратоном (Рисунок 4.12 и Рисунок 4.17); (Рисунок 4.13 и Рисунок 4.18); (Рисунок 4.16 и Рисунок 4.19), температурные поля в пересекающихся границах областей практически совпадают [127].

Многочисленные совпадения полученных полей с тектоническими особенностями не могут быть случайными. В связи с этим можно утверждать, что предложенный метод расчётов обладает достаточно хорошей предсказательной силой, а комплекс программ [205], его использующий, может быть рекомендован к применению с целью изучения геолого-геофизических обстановок на планете.

Таким образом, возвышенности и низменности Русской платформы согласованы с восходящими и нисходящими конвективными потоками.

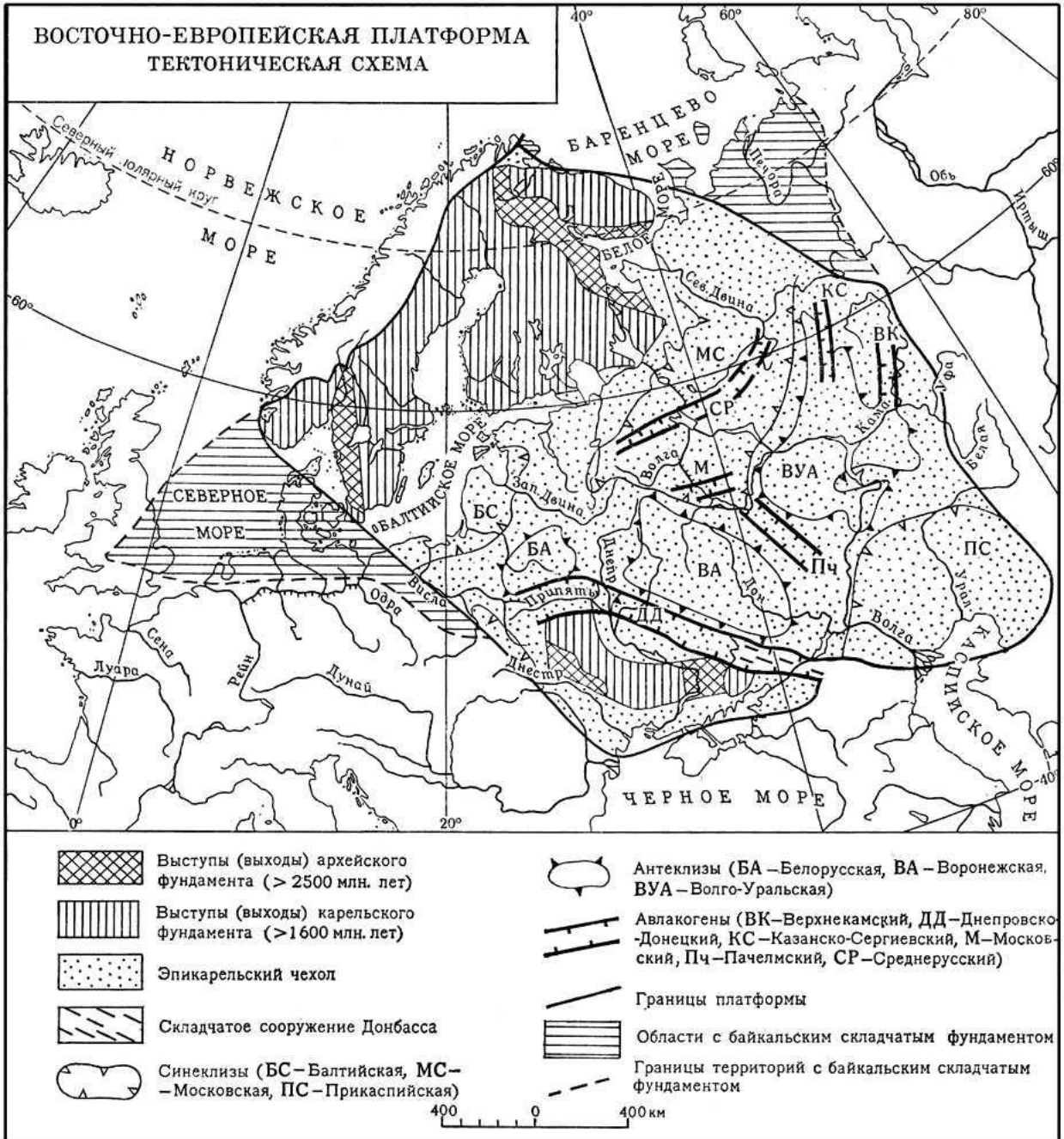


Рисунок 4.9 – Тектоническая схема восточно-европейской платформы [68]

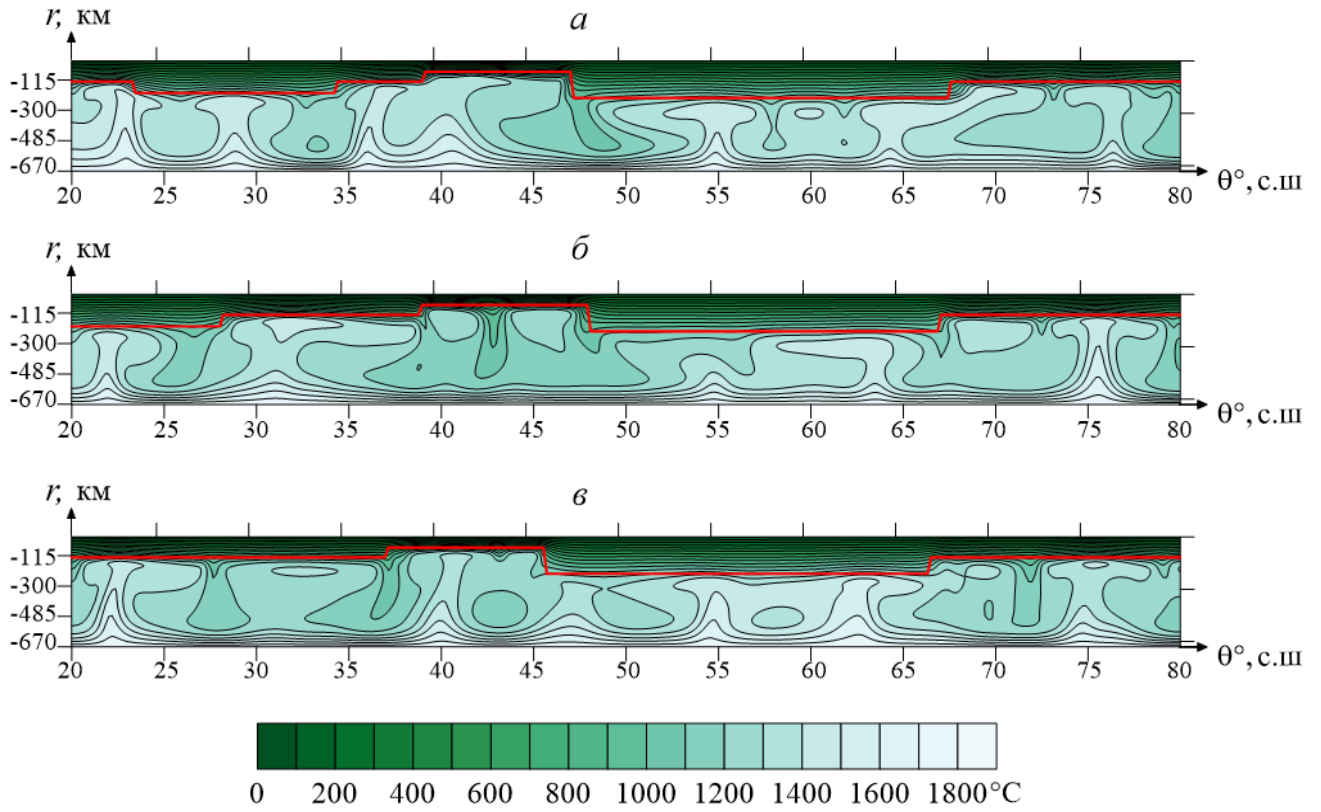


Рисунок 4.10 – Вертикальные ($r\theta$)-сечения Русской платформы: (*a*) - температурное поле в плоскости $\varphi = 40^\circ$; (*b*) - $\varphi = 45^\circ$; (*v*) - $\varphi = 50^\circ$, $t = 400$ млн лет. Шкала температур подходит для данного рисунка и для последующих (Рисунок 4.11 – Рисунок 4.16)

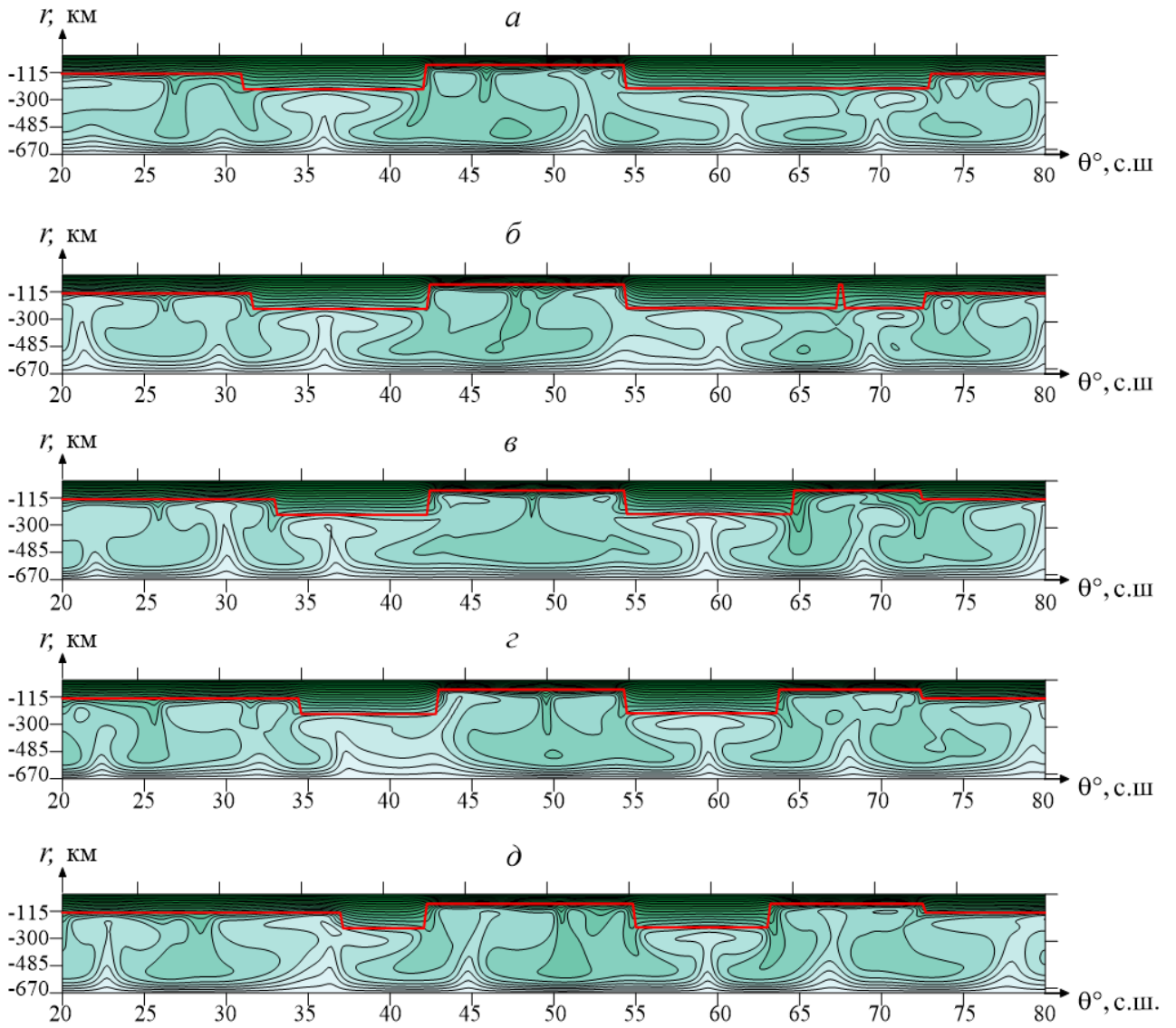


Рисунок 4.11 – Вертикальные $(r\theta)$ -сечение температурного поля (Ангария): (а) - температурное поле в плоскости $\varphi = 120^\circ$; (б) - $\varphi = 122^\circ$; (в) - $\varphi = 125^\circ$; (г) - $\varphi = 127^\circ$; (д) - в плоскости $\varphi = 130^\circ$; $t = 400$ млн лет

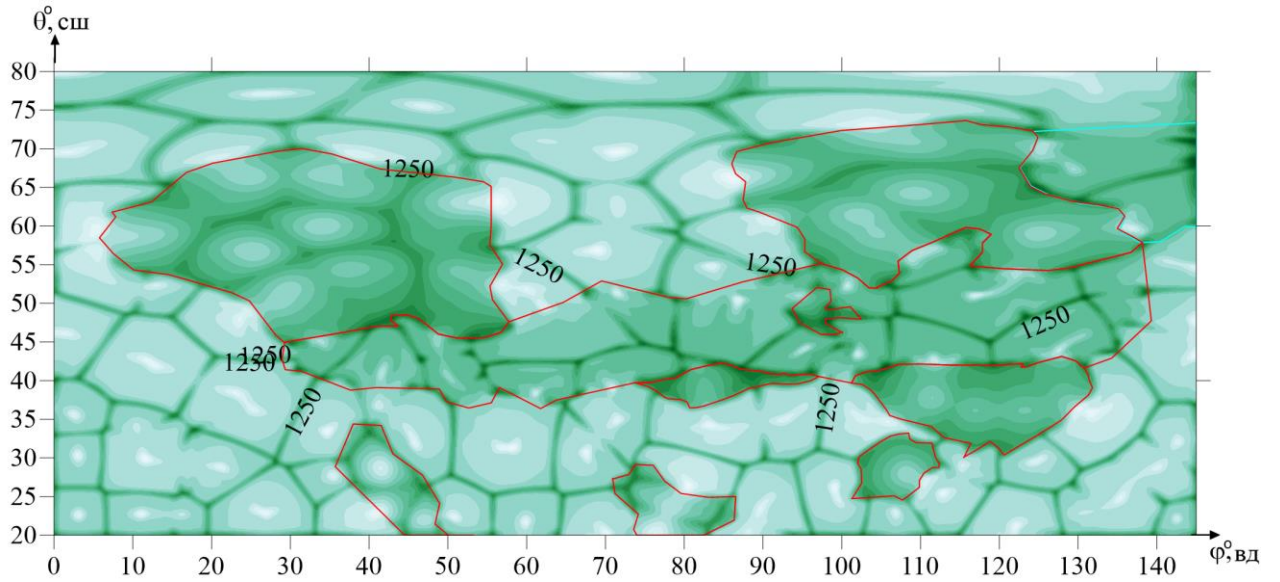


Рисунок 4.12 – Горизонтальное сечение поля температуры ($\varphi\theta$) при $r = 220$ км, $t = 400$ млн лет

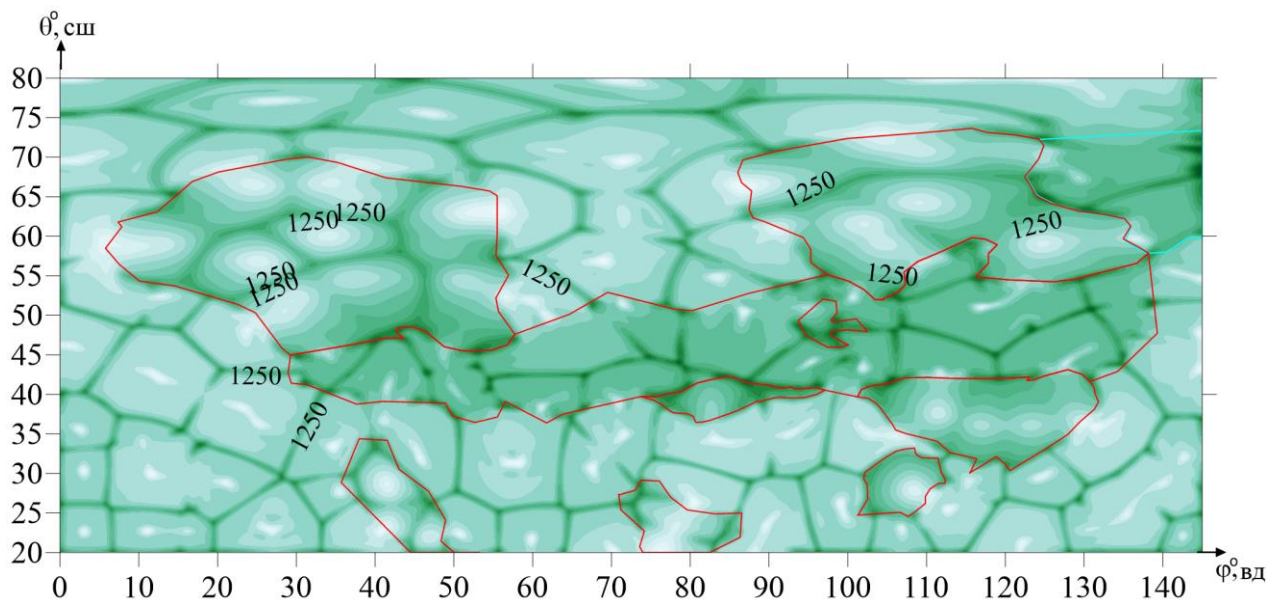


Рисунок 4.13 – Горизонтальное сечение поля температуры ($\varphi\theta$) при $r = 240$ км, $t = 400$ млн лет

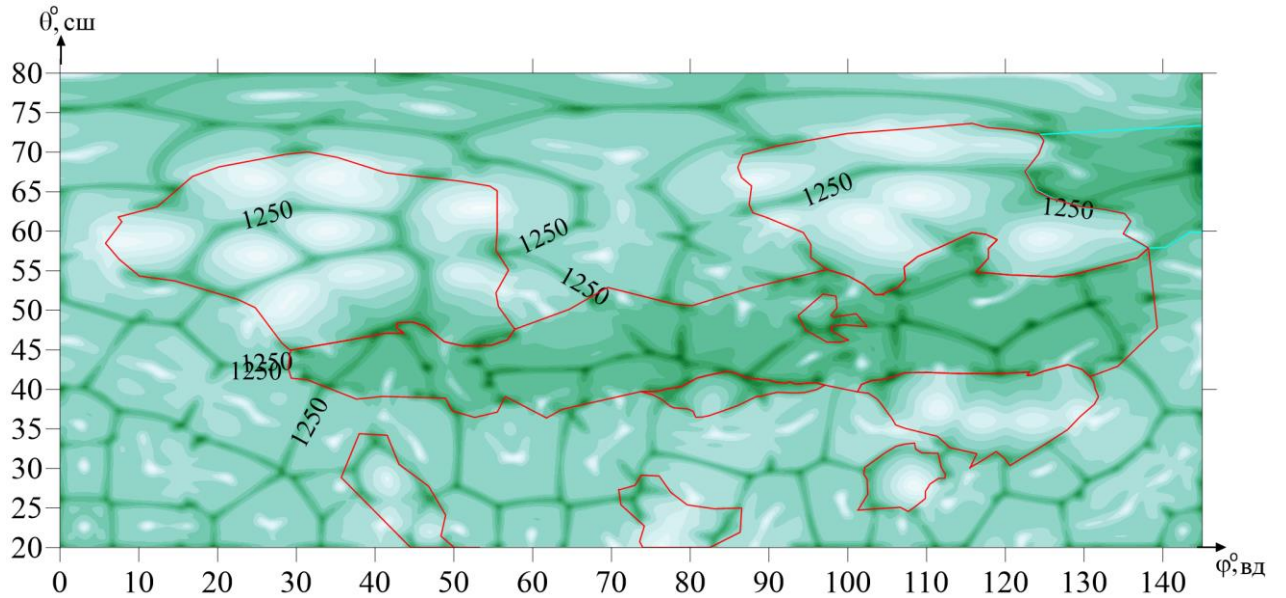


Рисунок 4.14 – Горизонтальное сечение поля температуры ($\varphi\theta$) при $r = 270$ км, $t = 400$ млн лет

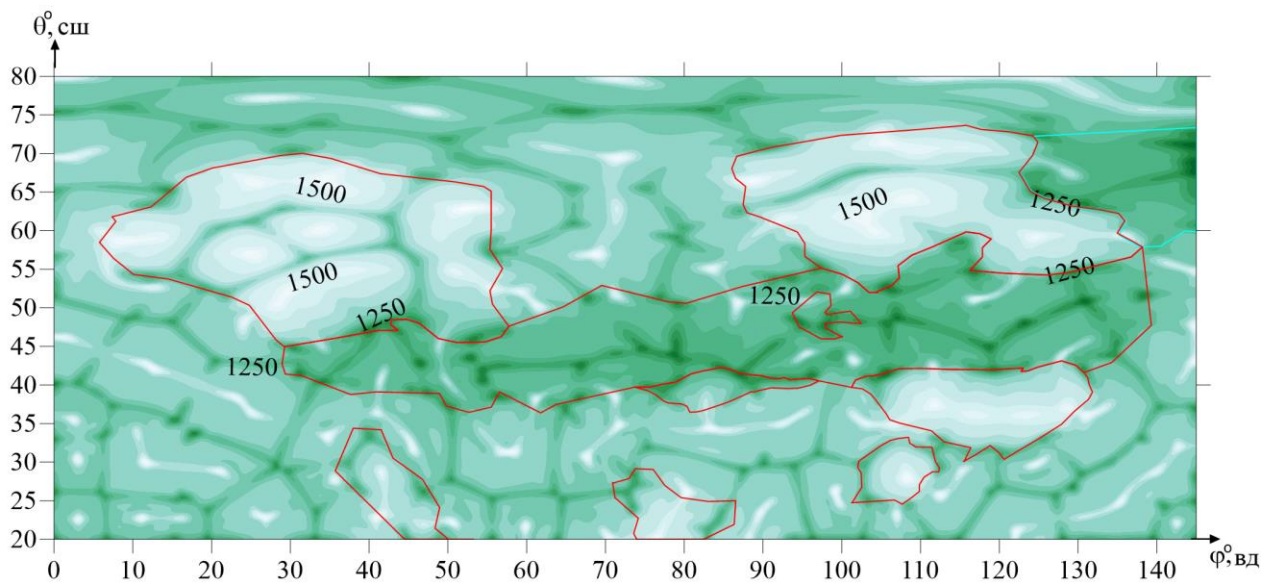


Рисунок 4.15 – Горизонтальное сечение поля температуры ($\varphi\theta$) при $r = 320$ км, $t = 400$ млн лет

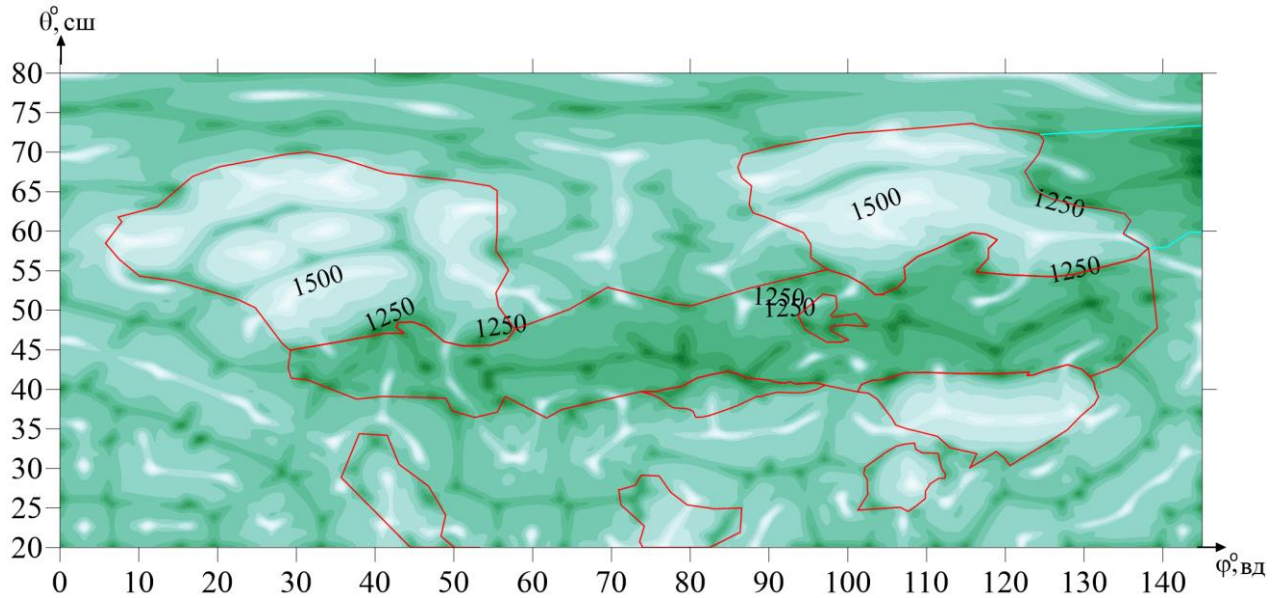


Рисунок 4.16 – Горизонтальное сечение поля температуры ($\varphi\theta$) при $r = 350$ км, $t = 400$ млн лет

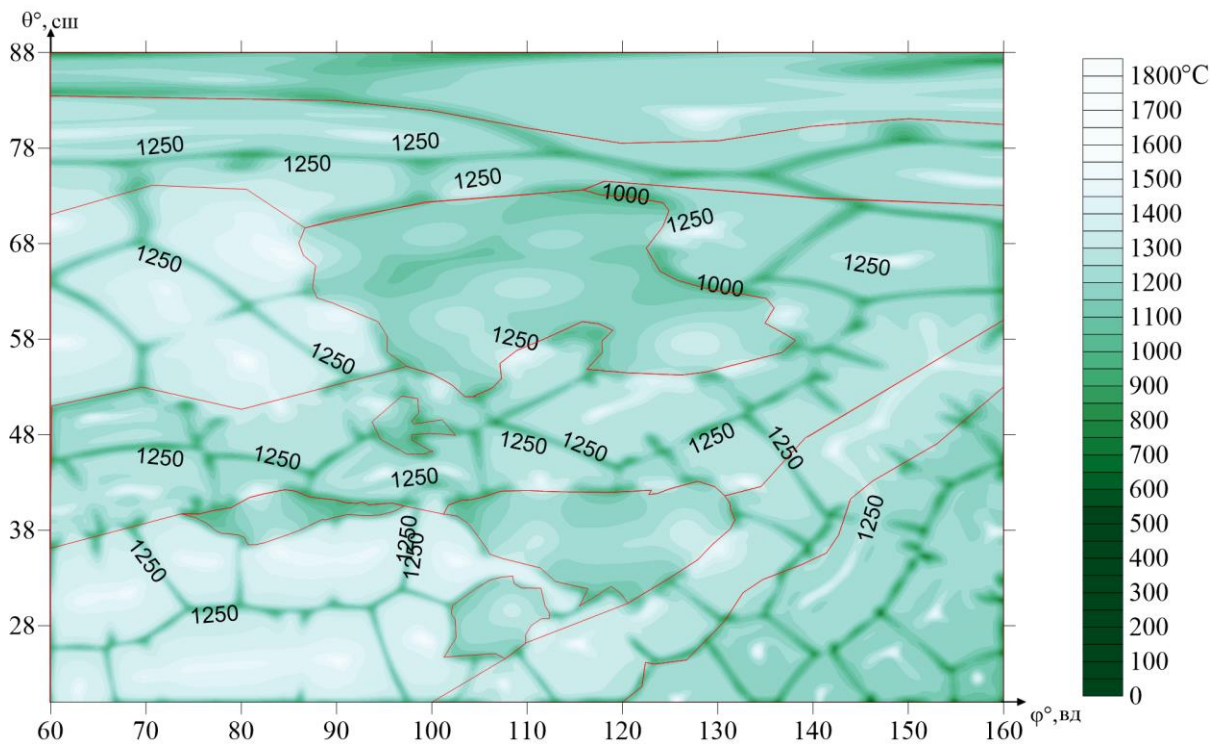


Рисунок 4.17 – Сибирская платформа и её окружение. Горизонтальное сечение поля температуры ($\varphi\theta$) при $r = 220$ км, $t = 400$ млн лет

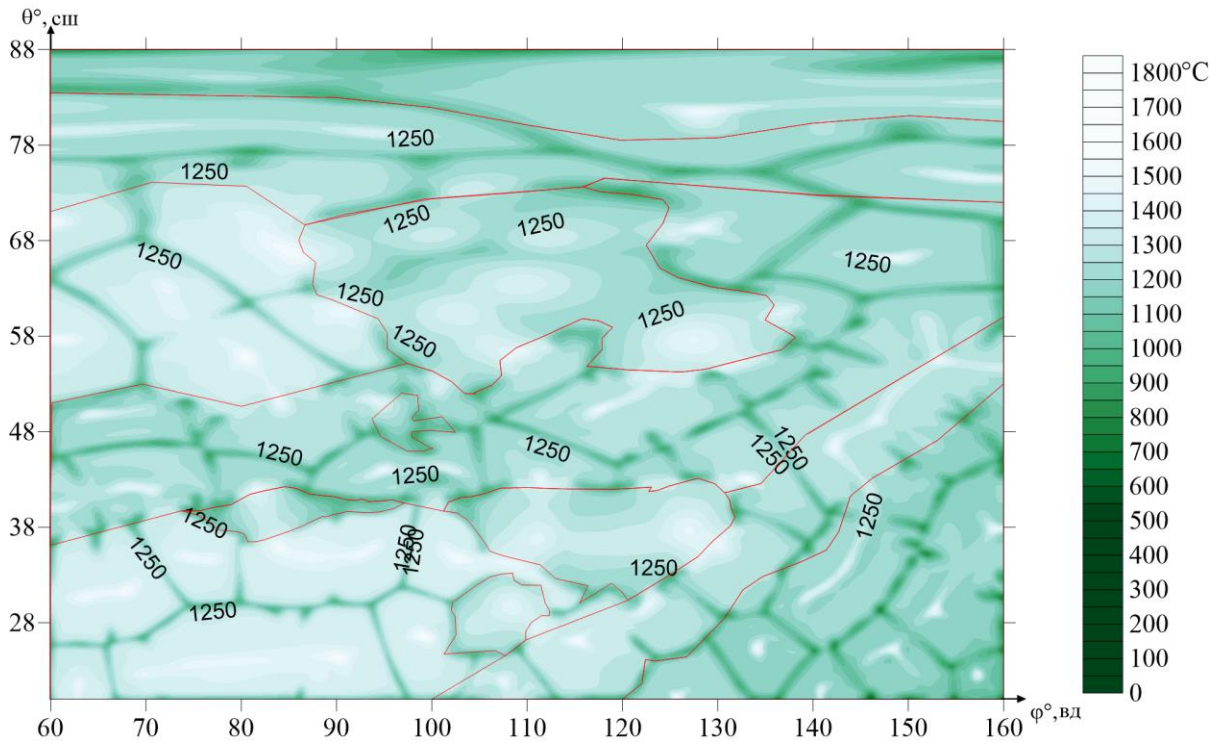


Рисунок 4.18 – Сибирская платформа. Горизонтальное сечение поля температуры ($\varphi\theta$) при $r = 240$ км, $t = 400$ млн лет

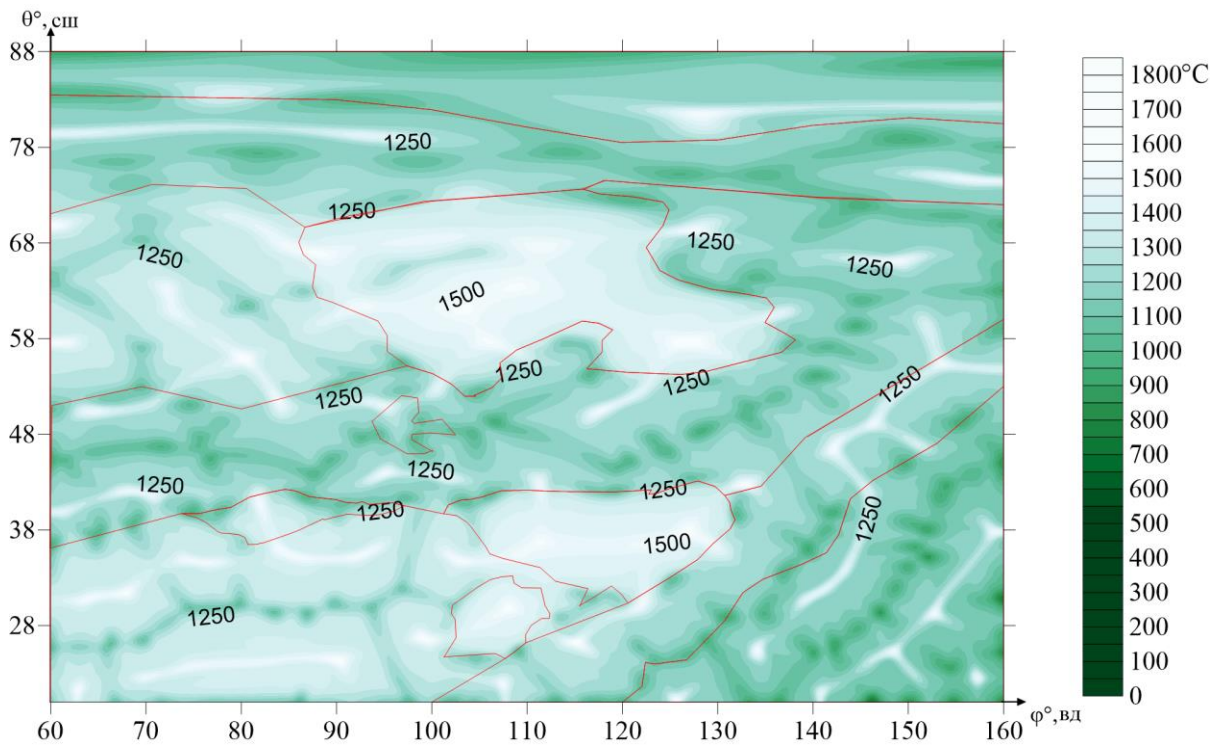


Рисунок 4.19 – Сибирский кратон и его окружение. Горизонтальное сечение поля температуры ($\varphi\theta$) при $r = 350$ км, $t = 400$ млн лет

Выводы

Основные результаты главы 4 сводятся к следующему.

1. С применением сферической системы координат построена численная модель конвекции под литосферой Евразии в близких к её реальным неоднородностям литосферы условиях. Алгоритм расчёта основан на разработанной неявной версии метода искусственной сжимаемости. Изучено влияние структуры литосферы на режим конвекции в области, примыкающей к Сибирскому кратону.

2. Показано, что мощная литосфера Сибирской платформы затрудняет вынос мантийного тепла. Благодаря этому обстоятельству под плитой возникает локальный перегрев, который способствует возникновению восходящего конвективного потока в верхней мантии под юго-западной частью кратона. В качестве баланса под восточной частью Центральной Монголии возникает парный ему (или компенсационный) восходящий поток. Положение этих восходящих потоков хорошо согласуется с распределением отрицательных аномалий сейсмических скоростей, положением аномалий наблюдаемого гравитационного поля и распределением теплового потока. Возникновение конвективных течений в верхней мантии по причине различной мощности литосферных блоков можно рассматривать в качестве одной из основных геодинамических причин внутриконтинентального вулканизма некоторых сегментов Евразии.

3. Возвышенности и низменности Русской платформы согласованы с восходящими и нисходящими конвективными потоками под ней, что следует из анализа результатов численного моделирования. Можно сделать вывод о том, что мощность и геометрия блоков литосферы оказывают заметное влияние на распределение конвективных течений в верхней мантии. Установившаяся структура течений значительно проявляется в осреднённом рельефе дневной поверхности платформенных областей, то есть больших по площади

территорий с литосферой увеличенной мощности, таких как Восточно-Европейская и Сибирская платформы.

Глава 5. Моделирование тепловой конвекции в верхней мантии Земли в зонах спрединга и субдукции

При численном моделировании конвекции в мантии Земли следует учитывать существенное различие между океанической и континентальной литосферой [6, 38, 59, 60]. Прежде всего, возраст океанической литосферы в современную эпоху не превышает 170 млн лет, в то время как возраст некоторых участков континентальной литосферы достигает 3700 млн лет. Мощность океанической литосферы, как правило, не более 100 км; архейские кратоны континентов достигают 350 км. Состав континентальной литосферы предполагает и обеспечивает среднюю плотность $2,3 \text{ г/см}^3$ [6, 59, 60, 82]. Океаническая литосфера по своему составу неотличима от верхней мантии и поэтому плотность океанической литосферы можно считать такой же, как и в подстилающей мантии, т.е. $3,0\text{-}3,3 \text{ г/см}^3$. Из вышесказанного, в частности, следует, что континентальная плита ни при каких обстоятельствах не может «утонуть» в мантии.

Исходя из этого, в численных моделях конвекции несжимаемой мантийной жидкости, основой которых являются уравнения импульса в геодинамическом и Обербека-Буссинеска приближениях, континентальная плита не может быть вовлечена в вычислительный процесс в качестве мантийной высоковязкой жидкости (как, например, предлагают Флейто и Йен [150, 151]), но может быть твёрдым телом, погружённым в жидкость, на границах которого ставятся условия непротекания (концепция Тычкова–Трубицына [85-88, 105, 107-114]). Температурное поле в погружённой плите вычисляется на основе уравнения кондуктивного переноса (конвективный перенос отсутствует).

Как известно, океанические плиты образуются в зонах *спрединга*, т.е. в местах раздвижения плит, где мантийная жидкость выходит к

поверхности, присоединяется к плите и становится её частью [36, 38, 39]. Такие границы, где происходит рождение новой океанической литосферы, называют *дивергентными* или *конструктивными* границами. По мере удаления от точки раздвижения плита охлаждается и утолщается. В результате охлаждения плита становится плотнее и тяжелее. В какой-то момент начинает образовываться гравитационно-неустойчивая «капля» с последующим отрывом от континентальной плиты. Этот процесс, называемый *субдукцией* приводит к образованию слэба - погружающейся в мантию части океанической литосферы.

Границы, где это происходит называют *конвергентными* или *деструктивными*. Литосферные плиты здесь погружаются в мантию и разрушаются, перерабатываются под воздействием возрастающих, по мере погружения, температуры и давления.

Моделирование процессов, связанных с конвективными течениями в области спрединга и субдукции можно проследить по публикациям многих авторов [17, 36, 38, 44, 45, 52, 53, 59, 60, 90]. В задаче, изучающийся в этой главе, предлагается упрощённая схематизированная геофизическая модель, в которой используются только непосредственно наблюдаемые данные, а именно: скорости расхождения плит (измерены практически для всех плит в зонах спрединга); мощности континентов; углы наклона континентальных окраин (методами сейсмической томографии и другими геофизическими методами эти данные определяются достаточно точно).

Ниже, в рамках задачи моделирования конвекции на основе уравнений (4.6)-(4.10), представлена численная модель субдукции, в которой океанические плиты представлялись, исходя из концепции Флейто-Йена [150, 151], сильновязкой жидкостью, а литосфера континентов моделировалась, согласно концепции Тычкова-Трубицына [85-88, 105, 107-114], твёрдым телом.

Дифференциальные уравнения (4.6) -(4.10), как и в случае задач предыдущей главы, интегрировались по схеме (2.17) -(2.14) метода искусственной сжимаемости при помощи схемы стабилизирующей поправки [130]. На каждом из дробных шагов применялись скалярные трёхточечные прогонки. Вязкость задавалась стандартной формулой (4.17).

Для построения модели на некотором участке поверхности Земли задавались известные из непосредственных наблюдений скорости расхождения литосферных океанических плит. Современные измерения в районах срединно-атлантического хребта дают оценку скоростей расхождения плит в пределах двух сантиметров в год [36, 39].

Именно такая скорость спрединга (раздвижения плит) задавалась при моделировании. В результате расчётов выяснилось, что в течение первых 5-8 млн лет формируется интенсивный восходящий поток, направленный в зону дивергентной границы, т.е. в область раздвижения плит. В области конвергентной границы, где соприкасаются океаническая и континентальная плиты, конвективные потоки, огибая континентальную литосферу, уходят под континент, порождая таким образом нисходящее конвективное течение, которое можно интерпретировать как погружающуюся в мантию плиту (слэб).

5.1 Влияние спрединга на формирование субдукции около удалённого континента

В узкой сферической области (Рисунок 5.1), расположенной вдоль экватора от Гринвича до 60° восточной долготы (длина – 60°) и от $2,5^\circ$ южной широты до $2,5^\circ$ северной, (ширина – 5°), при глубине в 2800

километров для всей мантии (700 км для верхней) на долготе $\varphi = \varphi_2 = 15^\circ$ моделируется спрединг (расхождение плит):

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

$$\varphi_1 = 0^\circ, \varphi_4 = 60^\circ, \quad \theta_1 = -2,5^\circ, \theta_2 = +2,5^\circ, \quad r_1 = 3570 \text{ км}, r_2 = 6370 \text{ км};$$

($r_1 = 5670 \text{ км}, r_2 = 6370 \text{ км}$ для верхней мантии).

Вдали от дивергентной границы, (на рисунке 5.1 – СОХ, т.е. Срединно–Океанический Хребет), начиная с 30° в.д. и до конца расчётной области расположен континент, протяжённость которого составляет 30° , а мощность – 220 километров.

Координаты континента на поверхности:

$$r = r_2, \quad \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad \varphi_3 = 30^\circ, \varphi_4 = 60^\circ.$$

Левая грань континента скошена под углом $\gamma = 45^\circ$.

Граничные условия в задаче ставились следующими.

На всех вертикальных границах для температуры были поставлены условия симметрии (адиабатическая стенка); для вектора скорости на $\Gamma_{\text{left}}, \Gamma_{\text{front}}, \Gamma_{\text{back}}$ поставлены условия проскальзывания, а на границе Γ_{right} – условия протекания:

$$\text{на границе } \Gamma_{\text{left}}: \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi = \varphi_1, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

$$V^\varphi = \frac{\partial V^\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial V^r}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\text{на границах } \Gamma_{\text{front}}, \Gamma_{\text{back}}: \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \Rightarrow$$

$$\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \theta} - V^\varphi \operatorname{ctg} \theta = V^\theta = \frac{\partial V^r}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

$$\text{на границе } \Gamma_{\text{right}}: \varphi = \varphi_4, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} = V^\theta = V^r = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

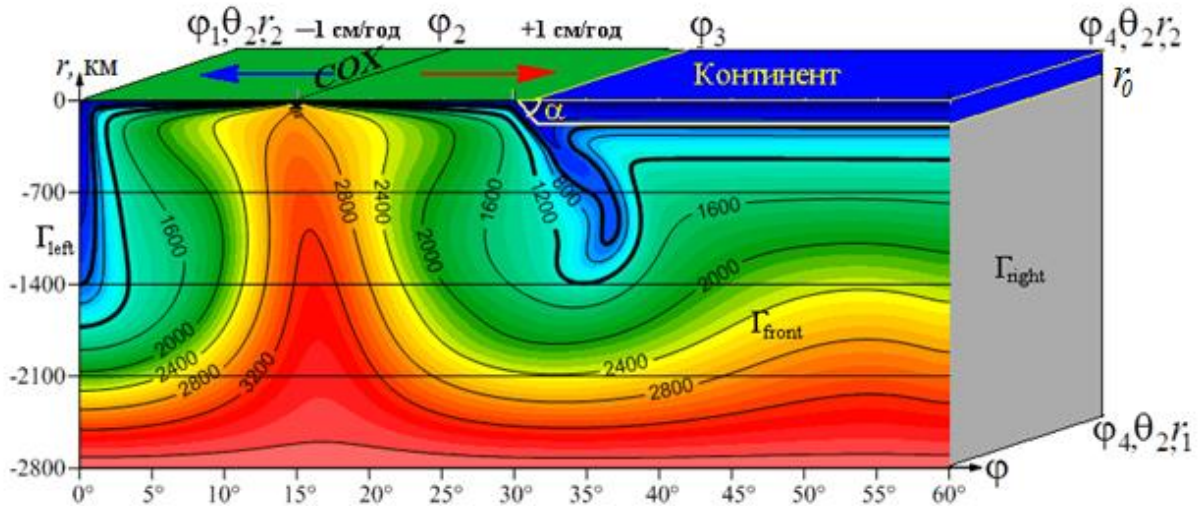


Рисунок 5.1 – Схема раздвижения литосферных плит со скоростью 2 см/год. Слева (15° в.д.) расположен срединно-океанический хребет (СОХ), справа – континент, мощность которого составляет 220 км; передовая часть континента скошена под углом $\alpha=45^\circ$. Шкала глубин характеризуется отсчётом от дневной поверхности: величина нулевой глубины соответствует расстоянию $r_2 = 6\,370$ км от центра Земли, величина глубины с отрицательным значением - 2 800 км соответствует $r_1 = 3\,570$ км.

В качестве граничного условия на оставшихся участках границы ставятся условия прилипания для компонент скорости:

а) под океанической литосферой:

$$V^\theta = V^r = 0, \quad r = r_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_3, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

$$V^\varphi = -u_0 = -1 \text{ см/год}, \quad r = r_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

$$V^\varphi = u_0 = +1 \text{ см/год}, \quad r = r_2, \quad \varphi_2 < \varphi < \varphi_3, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2;$$

б) на нижней горизонтальной границе расчётной области:

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = 0, \quad r = r_1, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2;$$

в) под континентом:

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = 0, \quad r = r_0, \quad \varphi_0 < \varphi \leq \varphi_4, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

где $\varphi'_0 = \varphi'_3 + (r_2 - r'_0) \cdot \text{ctg}(\gamma)$, $\varphi' = \pi \cdot \varphi / 180$, $r' = r/R$, φ_0 - координата вершины тупого угла (φ_0, θ, r_0) в фигуре континента,

r_0 - координата подошвы континентальной плиты, находящейся на 220-километровой глубине: $r_0 = 6150$ км (Рисунок 5.1);

г) на боковой границе континента, расположенной под углом α :

$$V^\theta = 0, V^\varphi = u_0 \cdot \cos \gamma, V^r = u_0 \cdot \sin \gamma;$$

$$r_0 \leq r < r_2, \quad \varphi_3 < \varphi \leq \varphi_0, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

д) на линии СОХ:

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = 0; \quad r = r_2, \quad \varphi = \varphi_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

е) на линии субдукции:

$$V^\varphi = 0,5 \cdot u_0, V^\theta = V^r = 0, \quad r = r_2, \quad \varphi = \varphi_3, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2.$$

Для температуры на верхней и нижней гранях поставлены условия Дирихле:

$$T = 0, \quad r = r_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

$$T = 1, \quad r = r_1, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2.$$

Безразмерное значение температуры (единица) на подошве области расчётов в случае верхней мантии соответствует 1800°C , а для всей мантии - 3700°C .

В качестве параметров задачи для верхней мантии привлекались их значения из (4.54); параметры для всей мантии полагались следующими:

$$\begin{aligned} R &= 6\,370\,000 \text{ м}, \quad d = 2\,800\,000 \text{ м}, \quad \Delta T = 3700^\circ\text{C}, \quad \chi = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \\ \alpha &= 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad \rho = 4000 \text{ кг/м}^3, \quad g_r = 10 \text{ м/с}^2, \quad \eta_0 = 3 \cdot 10^{22} \text{ кг/м}\cdot\text{с}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Вязкость задавалось с помощью стандартной формулы (4.17).

Первоначально задача решалась в верхней мантии Земли. На нижней границе расчётной области ($r = r_1 = 5670$ км) задавалась температура, равная 1800°C . Расчёты выполнялись на сетке с числом узлов $664 \times 11 \times 71$.

Рисунок 5.2 демонстрирует результаты моделирования спрединга и субдукции в верхней мантии Земли. Структура зоны субдукции получена в результате естественного процесса раздвигания плит и влияния геометрии континентальной плиты.

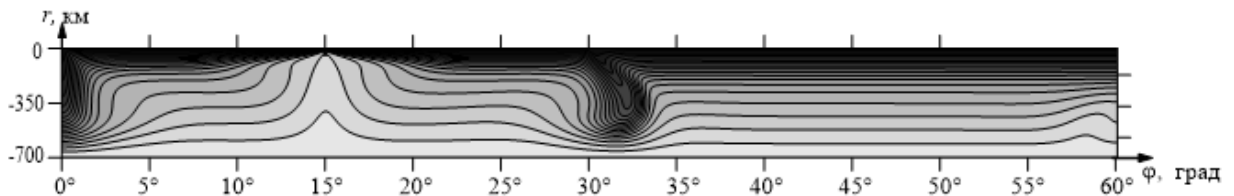


Рисунок 5.2 – Рассчитанное в верхней мантии Земли поле температуры в плоскости сечения $\theta_0 = 0,0^\circ$. Результаты расчётов для значения времени 70 млн лет. Линии равной температуры представлены с шагом 100°C .

Затенённая область (сгущение изотерм в пределах $\varphi_3 < \varphi < \varphi' = 35^\circ$ в центре фигуры) соответствует тонущей части океанической литосферной плиты (слэбу). Слэб в нашем случае представляет собой конвективный нисходящий поток мантийного вещества, температура которого заключена в пределах от 0°C до 1200°C .

Условия, поставленные в данном случае на подошве верхней мантии, не позволяют погружающемуся конвективному потоку проникнуть за пределы верхней мантии.

Далее задача решалась во всей мантии Земли. На ядро-мантийной границе ($r = 3570$ км) задавалась температура равная 3700°C . На верхней границе ($r = 6370$ км) температура равна 0°C . Расчёты выполнялись на сетке с числом узлов $334 \times 11 \times 141$. Математическая модель оставалась той же, что и для верхней мантии.

Слева на всех рисунках настоящего раздела (Рисунок 5.1 – Рисунок 5.4) шкала расстояний от дневной поверхности обозначена в километрах.

При расчётах течений во всей мантии слэб достигает границы между верхней и нижней мантиями примерно за 70 млн лет, т.е. со средней скоростью равной 1 см/год и равной заданной скорости раздвижения океанических плит. Распределение поля скорости свидетельствует о том, что слэб и плита на поверхности перемещаются как единое целое, т.е. как твёрдое тело (Рисунок 5.3).

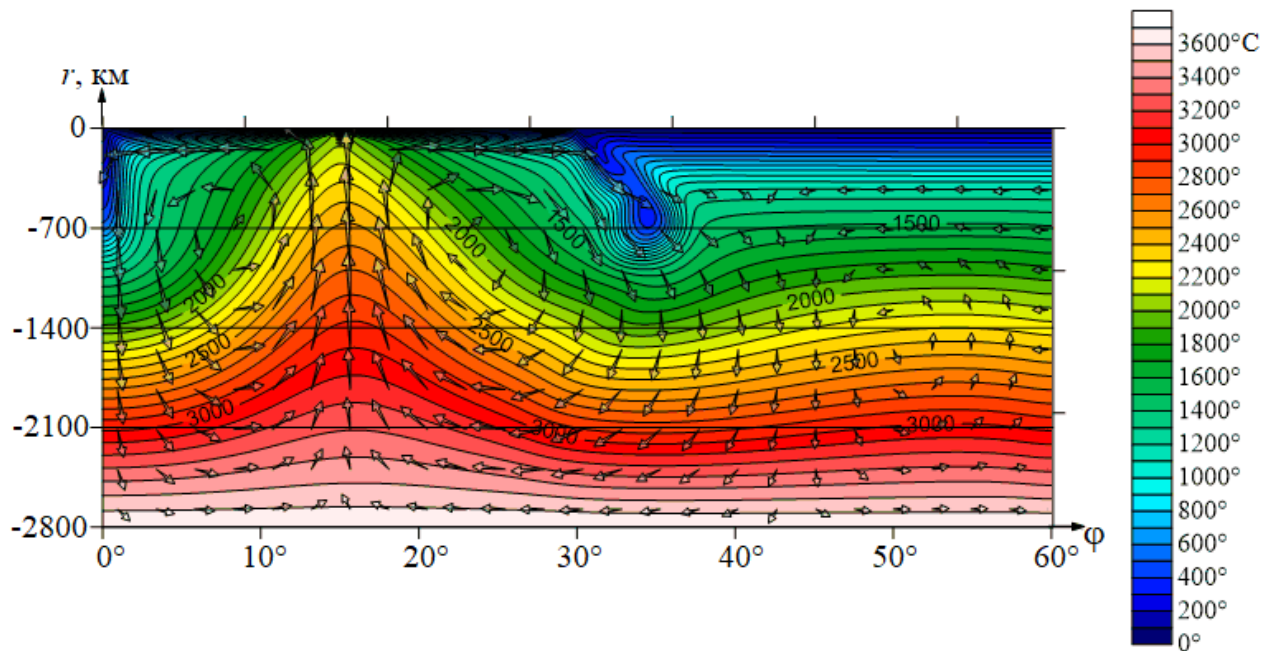


Рисунок 5.3 – Сечение ($r\phi$) поля температуры и вектора скорости (компоненты V_ϕ, V_r) в плоскости сечения $\theta_0 = 0^\circ$; $t = 70$ млн лет

Если характеризовать рассчитанную «горячую» границу слэба ($T=1200^\circ\text{C}$) [36,38,39], то можно видеть (Таблица 5.1), что за первые 70 млн лет эта изоповерхность опустилась с глубины в 100 км до глубины 800 км (средняя скорость опускания – 10 км/млн лет, Рисунок 5.3); в течение следующих 50 млн лет граница продвигается вглубь нижней мантии на 125 км (при этом значение средней скорости заглубления – 2,5 км за 1,0 млн лет), а к глубине 1300 км изоповерхность $T=1200^\circ\text{C}$ подошла через 120 млн лет, имея среднюю скорость – 3,125 км за 1,0

млн лет, т.е. слэб, за счёт конвекции внутри нижней мантии получает на этом участке некоторое ускорение (Рисунок 5.4,а).

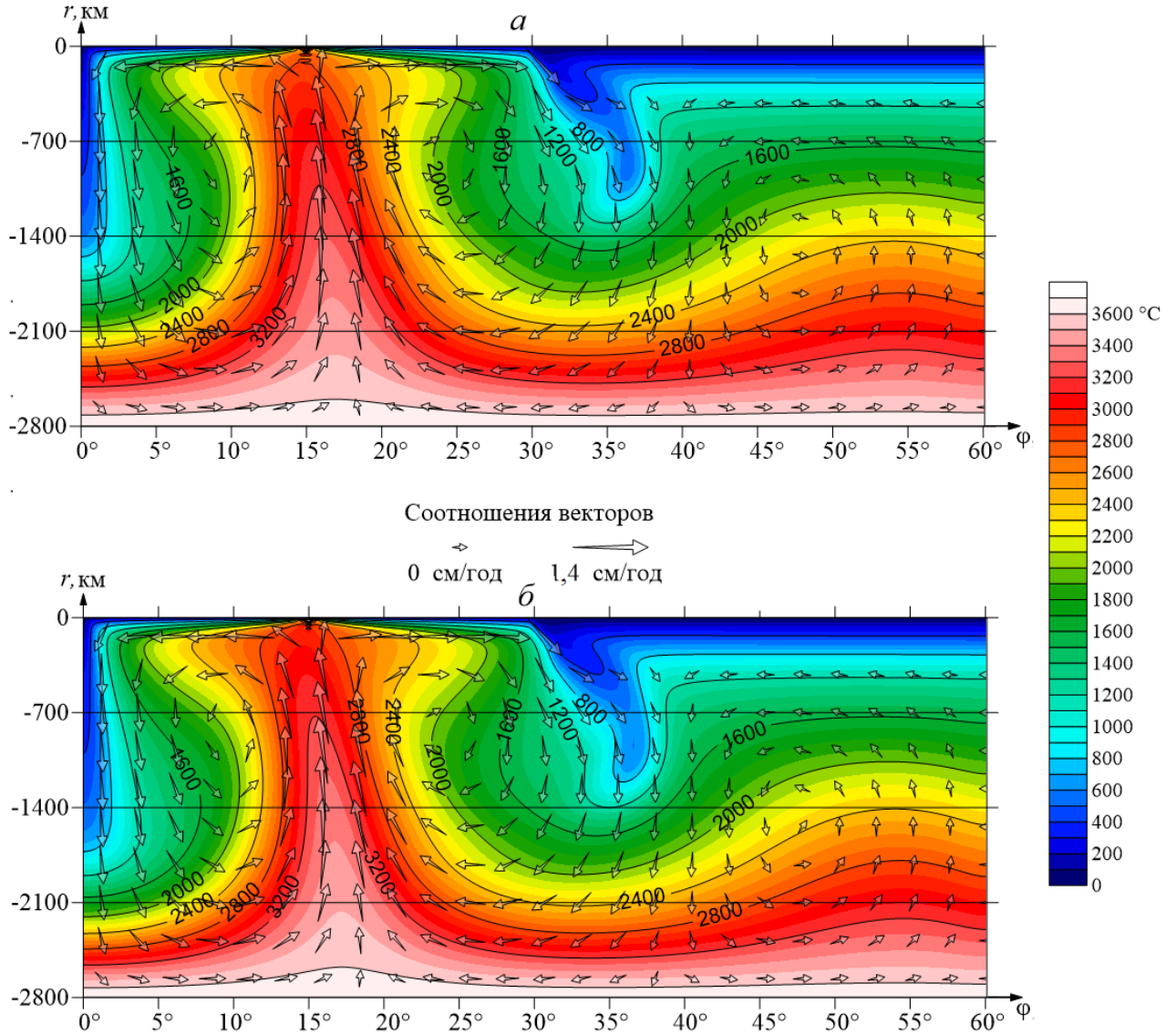


Рисунок 5.4 – Сечение ($r\phi$) поля температуры и вектора скорости (компоненты V_ϕ, V_r) в плоскости сечения $\theta_0 = 0^\circ$; (а) - $t = 240$ млн лет, (б) - $t = 270$ млн лет

Таблица 5.1 – Динамика заглубления изоповерхности $T = 1200^\circ\text{C}$

Глубина, км	800	925	1175	1300	1400
Время, млн лет	70	120	200	240	270
Скорость, см/год	1,000	0,250	0,312	0,312	0,331

Скорость заглубления возрастает до величины 3,333 км/млн лет, т.к. последующие 100 км изоповерхность «проходит» за 30 млн лет (Рисунок 5.4,б). Динамику изоповерхности 800°С иллюстрирует Таблица 5.2.

Таблица 5.2 – Динамика заглубления изоповерхности $T = 800^{\circ}\text{C}$

Глубина, км	700	825	1025	1125	1205
Время, млн лет	70	120	200	240	270
Скорость, см/год	1,00	0,25	0,25	0,25	0,27

5.2 Формирование субдукции вследствие надвига микроконтинента на пассивную океаническую литосферу

В качестве содержательного примера выполнено численное исследование модельной геологической ситуации, возникшей непосредственно с момента отрыва Южной Америки от Африки (примерно 100 млн лет назад) с последующим образованием ложа Атлантического океана до настоящего времени и далее, вплоть до события, когда присоединённая океаническая литосфера оторвётся от восточной окраины континента и начнёт погружение в мантию [6]. Рисунок 5.5 иллюстрирует модель данной ситуации, где океаническая плита, несущая материк с постоянной скоростью u_0 , надвигается на пассивную океаническую литосферу и подминает её, образуя субдукционную зону. Погружённая в астеносферу плита образует слэб, который огибает подошву континента и уходит под него.

Движение континента от СОХ сопровождается присоединением к континенту астеносферного вещества, которое, в свою очередь, формирует молодую океаническую литосферу.

По мере продвижения мощность приращённой океанической литосферы растёт, становясь всё более гравитационно-неустойчивой.

Численные расчёты позволили установить время отрыва от континентальной литосферы, приращённой к ней океанической плиты с образованием у границ континента новой субдукционной зоны (Рисунок 5.8,з). Теоретические оценки мощности океанической литосферы в зависимости от её возраста и оценка времени образования новой субдукционной зоны совпали с результатами численного эксперимента.

Получено «съедание» литосферы континентальной плиты, обусловленное перегревом нижней части подошвы континента, вызванным образованием (организацией) интенсивных высокотемпературных конвективных потоков.

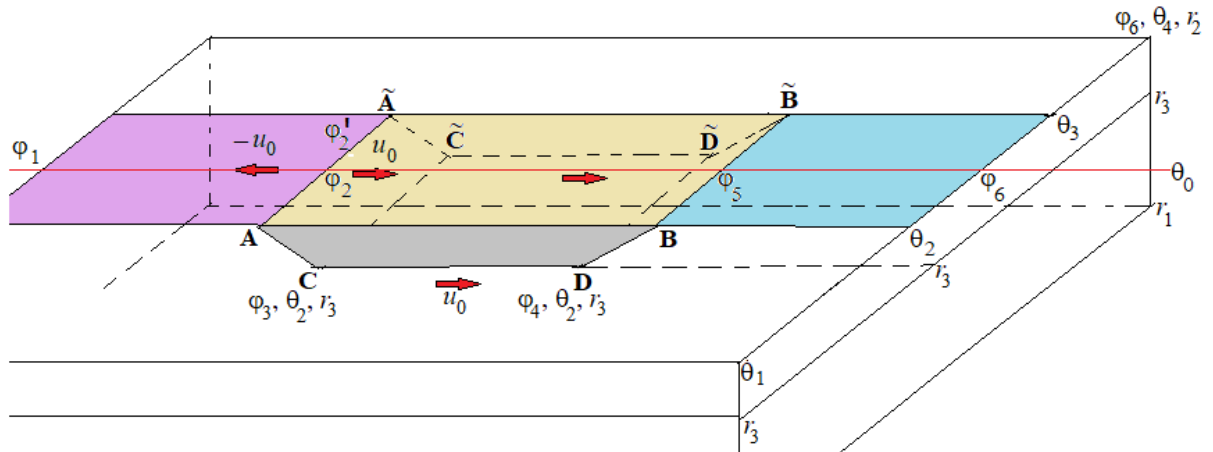


Рисунок 5.5 – Схема начального расположения движущегося континента. Угол $\angle CAB = \angle DBA \equiv \gamma = 35^\circ$. Пунктирные линии – невидимые. Стрелки указывают направления движения плит

При постановке задачи учитывалось следующее: в прямоугольный сферический параллелепипед $\Pi = [\varphi_1, \varphi_6] \times [\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2]$ (обозначения согласованы со схемой начального расположения движущегося континента (Рисунок 5.5)), заполненный мантийной жидкостью,

погружен континент. В этом случае для вектора скорости на всех гранях погруженного в мантию континента ставятся условия прилипания. На внутренних гранях континента, погруженных в мантию, граничные условия для температуры не предусмотрены.

Континент в начальный момент времени выделен точками (Рисунок 5.5): $A(\varphi_2, \theta_2, r_2)$, $B(\varphi_5, \theta_2, r_2)$, $D(\varphi_4, \theta_2, r_3)$, $C(\varphi_3, \theta_2, r_3)$ и $\tilde{A}(\varphi_2, \theta_3, r_2)$, $\tilde{B}(\varphi_5, \theta_3, r_2)$, $\tilde{D}(\varphi_4, \theta_3, r_3)$, $\tilde{C}(\varphi_3, \theta_3, r_3)$. Линия на рисунке $A\tilde{A}$ – это линия срединно-океанического хребта (СОХ), разделяющая плиты, от которой они расходятся в противоположных направлениях. Окончательно, на начальный момент времени, граничные условия следующие:

на поверхностях слева $\varphi = \varphi_1$ и справа $\varphi = \varphi_6$;

$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_4$, $r_1 \leq r \leq r_2$ – условия протекания:

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \varphi} = V^\theta = V^r = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad (5.2)$$

на фронтальной плоскости $\theta = \theta_1$ и в тылу $\theta = \theta_4$;

$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6$, $r_1 \leq r \leq r_2$ – скользкие условия:

$$\frac{\partial V^\varphi}{\partial \theta} - V^\varphi \operatorname{ctg} \theta = V^\theta = \frac{\partial V^r}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0; \quad (5.3)$$

на всей подошве верхней мантии при $r = r_1$,

$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_4$:

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = 0, \quad T = T_b, \quad (5.4)$$

на дневной поверхности при $r = r_2$:

перед континентом $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$,

за континентом $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6$, $\theta_3 \leq \theta \leq \theta_4$,

справа от континента $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_6$, $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$

скорости нулевые:

$$V^\varphi = V^\theta = V^r = T = 0; \quad (5.5)$$

на поверхности $r = r_2$, слева от СОХ $\varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2$, $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$

задано движение литосферной плиты

$$V^\varphi = -u_0; \quad V^\theta = V^r = T = 0; \quad (5.6)$$

на подошве континента $r = r_3$, $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4$, $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$

и на остальных его гранях: ACDB, A \tilde{A} \tilde{C} \tilde{C} , \tilde{A} \tilde{C} \tilde{D} \tilde{B} , DB \tilde{B} \tilde{D} :

$$V^\varphi = +u_0; \quad V^\theta = V^r = 0. \quad (5.7)$$

Исключения для ACDB, A \tilde{A} \tilde{C} \tilde{C} и \tilde{A} \tilde{C} \tilde{D} \tilde{B} : на линии A \tilde{A} при $t = 0$ скорости нулевые: $V^\varphi = V^\theta = V^r = T = 0$. Как только континент сдвинется, слева от него образуется полоса $r = r_2$, $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi'_2$, $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ приращённой океанической литосферы ($\varphi_2 = \varphi'_2$ при $t = 0$). В этом случае и до конца продвижения плиты граничные условия между COX и кромкой континента на поверхности $r = r_2$, $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi'_2$, $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ (см. Рисунок 5.6) такие как и в (5.7): $V^\varphi = +u_0$; $V^\theta = V^r = 0$ (и на линии A \tilde{A} , "ушедшей" от COX, $V^\varphi = +u_0$; $V^\theta = V^r = 0$. На самой линии COX, которая остаётся неподвижной: $V^\varphi = V^\theta = V^r = T = 0$.

В (5.4) температура T_b – соответствует единице в безразмерных и 1800°C – в размерных величинах.

Для полной постановки задачи необходимо в момент времени $t = t_0 = 0$ поставить для температуры начальные условия:

$$T(\varphi, \theta, r, t_0) = \tilde{T}_0(\varphi, \theta, r). \quad (5.8)$$

Для дальнейшего описания условий задачи, перейдём временно к географическим координатам и к размерным величинам.

При решении задачи начальное распределение температуры вычислялось по линейной зависимости:

от $T_1 = 0^\circ\text{C}$ при $r' = R$, до $T_2 = 1200^\circ\text{C}$ при $r'' = R - 120$ км;

от $T_1 = 1200^\circ\text{C}$ при $r' = R - 120$ км, до $T_2 = \Delta T = 1800^\circ\text{C}$

при $r'' = R - 700$ км.

С целью численного анализа процесса формирования субдукции вследствие надвига континента на пассивную океаническую литосферу

рассматривалась следующая модельная геодинамическая задача, приближённо соответствующая изложенной в начале раздела геологической ситуации.

В верхней мантии Земли в узкой области вдоль экватора ($\theta_0=0^\circ$)

$$\begin{aligned} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_6, \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_4, \quad r_1 \leq r \leq r_2); \\ \varphi_1 = 0^\circ, \varphi_6 = 35^\circ; \quad \theta_1 = -5^\circ, \theta_2 = +5^\circ; \\ r_1 = 5670 \text{ км}, r_2 = R = 6370 \text{ км}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

моделируется спрединг. Правее оси спрединга ($\varphi_2=5.70^\circ$) располагается континент, протяжённость которого на поверхности $\Lambda_c = \varphi_5 - \varphi_2 = 8,60^\circ$. Континент характеризуется мощностью $S = 210$ км ($r_L = R - S = 6160$ км = r_3). Левая и правая грани континентальной плиты скошены под углом $\gamma = 35^\circ$ к горизонту.

От срединно-океанического хребта (СОХ) (линия на схеме (Рисунок 5.5)) континент начинает движение в восточном направлении со скоростью $u_0 = 2$ см/год. Плита, расположенная слева от СОХ, начинает движение в противоположном направлении с такой же скоростью -2 см/год. Пассивная океаническая литосфера, на которую наезжает континент, заключена в пределах $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_6$.

Географические координаты континента:

$$\begin{aligned} r = r_2, \quad \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_5, \quad \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3, \quad \varphi_2 = 5,70^\circ, \quad \varphi_5 = 14,30^\circ; \\ r = r_3 = r_L, \quad \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3, \quad \varphi_3 = \varphi_2 + \tilde{S}, \quad \varphi_4 = \varphi_5 - \tilde{S}; \\ \tilde{S} = \frac{S}{R} \frac{1}{\operatorname{tg}(\gamma)} \frac{180}{\pi}, \quad \theta_2 = -3^\circ, \quad \theta_3 = 3^\circ. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для проведения вычислений возвращаемся к безразмерной формулировке, применяем граничные условия (5.2)-(5.7) с учётом вышеупомянутых исключений.

Динамика конвекции в окрестности зоны спрединга иллюстрируется изолиниями температурного поля (Рисунок 5.6 – Рисунок 5.8). Результаты численных экспериментов показывают, что надвигающийся континент подминает под себя океаническую

литосферу, порождая тем самым слэб, уходящий в глубокие горизонты верхней мантии.

На планете, согласно геофизическим данным [6], возраст океанической литосферы не превышает 166 млн лет. Кроме того, существует теоретическая оценка предельного возраста океанической литосферы, равная примерно 150 млн лет [6].

В интервале времен от 50 до 100 млн лет можно наблюдать зарождение «тяжелой капли» (Рисунок 5.7, Рисунок 5.8, *а-в*), которая впоследствии оторвется от кромки континента и образует слэб не позднее 166 млн лет с начала процесса раздвижения плит. В данном численном эксперименте отрыв «тяжелой капли» в точности совпал по времени с теоретической оценкой (Рисунок 5.8, *г*).

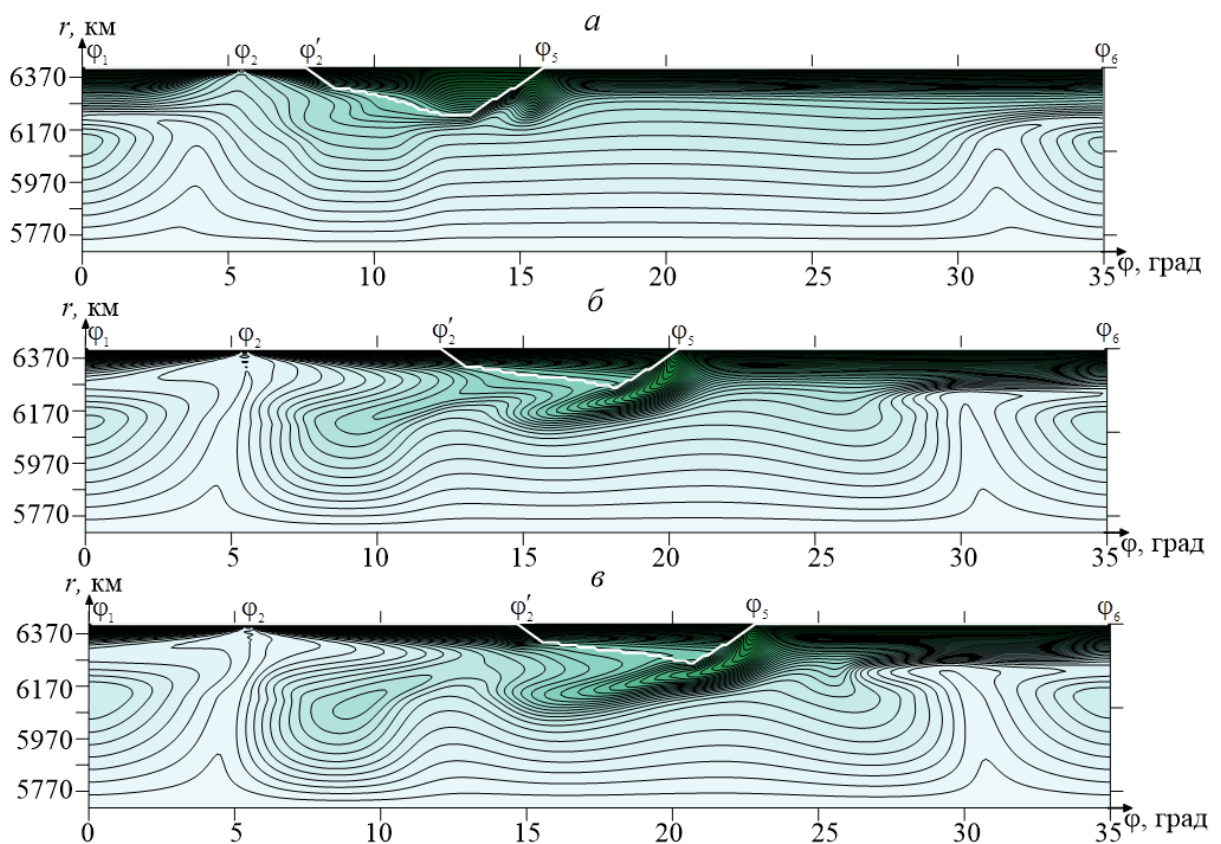


Рисунок 5.6— Изолинии поля температуры, иллюстрирующие эволюцию конвекции под литосферой в плоскости сечения $\theta_0 = 0,0^\circ$: *а* – 11,0 млн лет, *б* – 35,2 млн лет, *в* – 48,4 млн лет. Движущийся континент обозначен сплошной светлой линией в пределах от φ'_2 до φ_5

Во введении говорилось о концепции Тычкова–Трубицына [92, 111], согласно которой континентальная литосфера рассматривается как твёрдое тело. Такой подход применялся в работе с участием автора [126]. В настоящих расчётах в процессе численных экспериментов в зависимости от температуры конвективных потоков, омывающих континент, учитывалось изменение геометрии континентальной литосферы. А именно: при превышении температуры плиты более чем на 100 градусов в сравнении с изотермой 1200°C перегретое вещество континента приобретает свойства жидкости и вовлекается в конвективный процесс [105, 169].

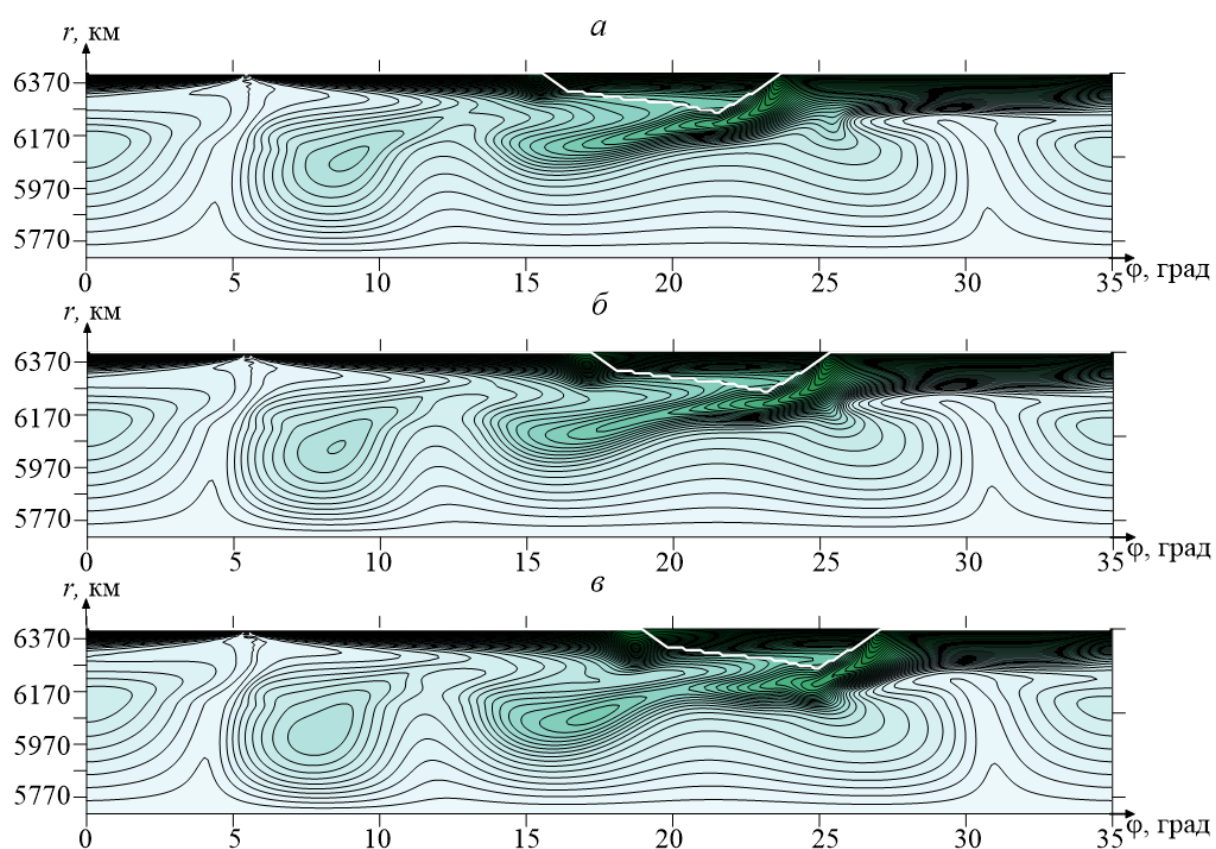


Рисунок 5.7 – Изолинии поля температуры, иллюстрирующие эволюцию конвекции под литосферой в плоскости сечения $\theta_0 = 0,0^{\circ}$: *a* – 52,8 млн лет, *б* – 61,6 млн лет, *в* – 70,4 млн лет. Движущийся континент обозначен сплошной светлой линией

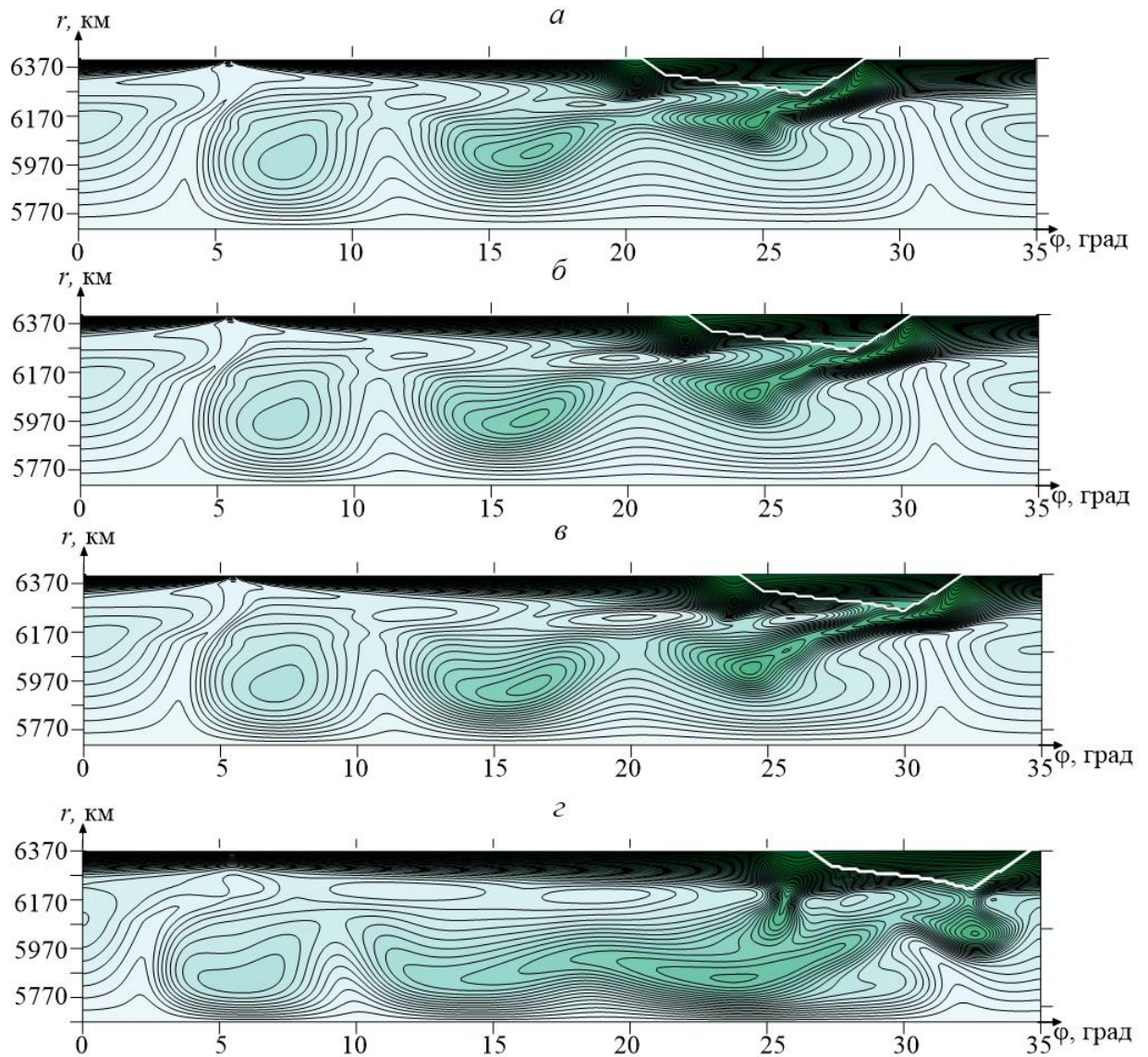


Рисунок 5.8 – Изолинии поля температуры, иллюстрирующие эволюцию конвекции под литосферой в плоскости сечения $\theta_0 = 0,0^\circ$: *a* – 79,2 млн лет, *б* – 88,0 млн лет, *в* – 96,8 млн лет, *г* – 150,0 млн лет. Движущийся континент обозначен сплошной светлой линией

Для проверки полученных результатов была решена задача, аналогичная поставленной в данном разделе, с границами области интегрирования (5.9), (5.10), но с удлинённой в направлении оси φ областью ($\varphi_6 = 47,50^\circ$) и с более протяжённым континентом ($\varphi_2 = 3,00^\circ$, $\varphi_5 = 18,67^\circ$; см. Рисунок 5.5 и, для сравнения, Рисунок 5.9,*a*).

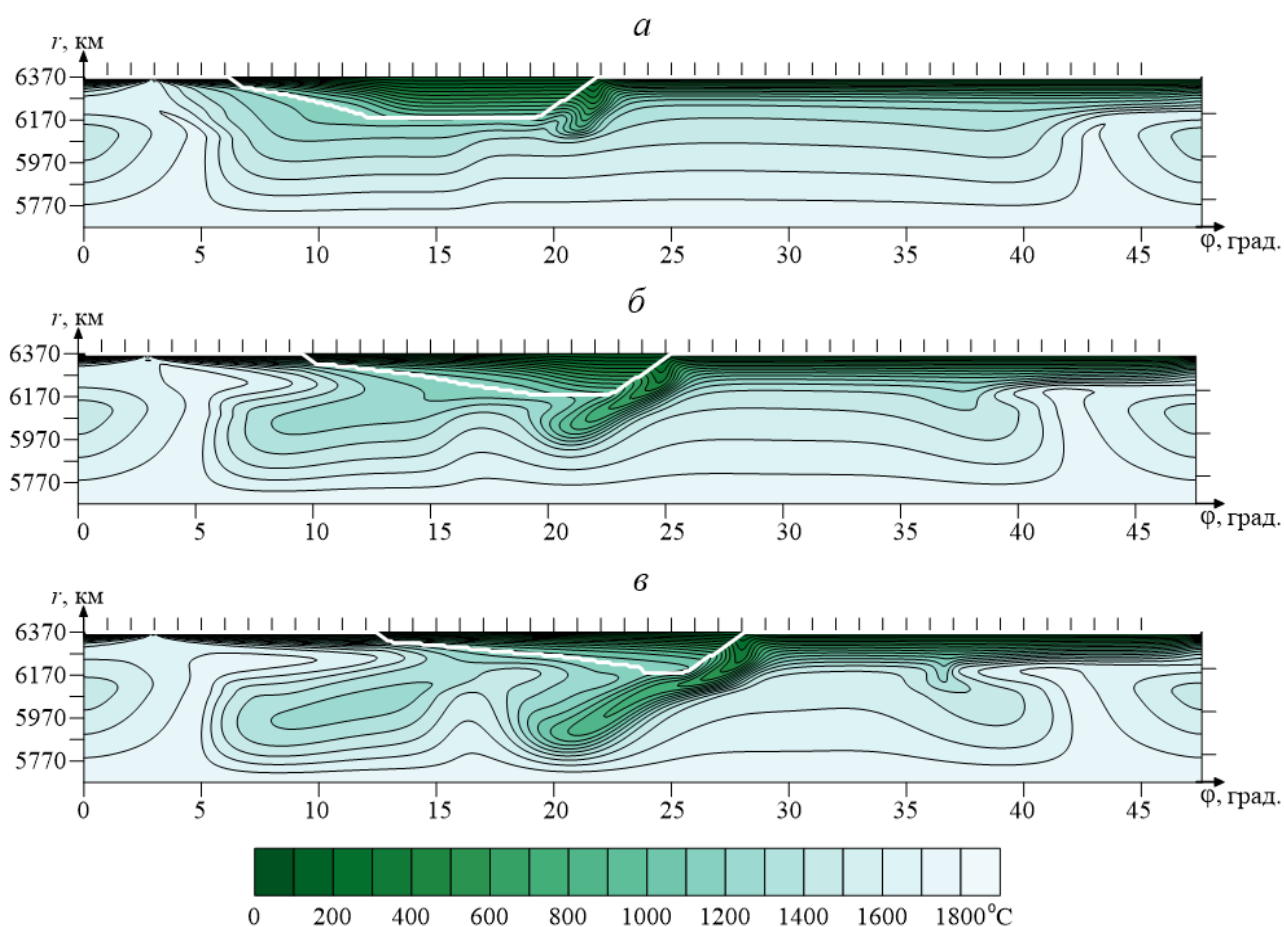


Рисунок 5.9 – Эволюция процесса надвига континента на океанскую плиту. Изолинии температуры в плоскости сечения $\theta_0 = 0,0^\circ$; (*a*): при $t = 17$ млн лет, (*б*): при $t = 35$ млн лет, (*в*): при $t = 52$ млн лет. Континент обозначен сплошной светлой линией

Рисунок 5.9,*a* иллюстрирует начало, а Рисунок 5.11,*в* – конец процесса, рассматриваемого в этой задаче.

Полученные результаты позволяют сравнить протекание процессов при других геометрических характеристиках. Как и в первом варианте, наддвиг континента на океаническую литосферу порождает слэб, уходящий под континент; прослеживается возникновение «холодной» капли.

Наблюдение за перемещением слэба позволяет вычислить скорость его перемещения внутри мантии. Передняя часть слэба пересекает 20-градусную отметку: Рисунок 5.9,*б* – 35 млн лет; Рисунок

5.10,в – 105 млн лет и достигает 15-ти градусной отметки, а на отметке 121 млн лет (Рисунок 5.11,в) передовая кромка находится на рубеже в 12° . Таким образом, получаем скорость движения порядка 7,25-7,90 км/млн лет. Этот факт объясняет повсеместное ускорение движение субдуцирующих плит в случае, когда к движению в зонах спрединга прибавляется конвективный вклад, увлекающий погружённую часть плит.

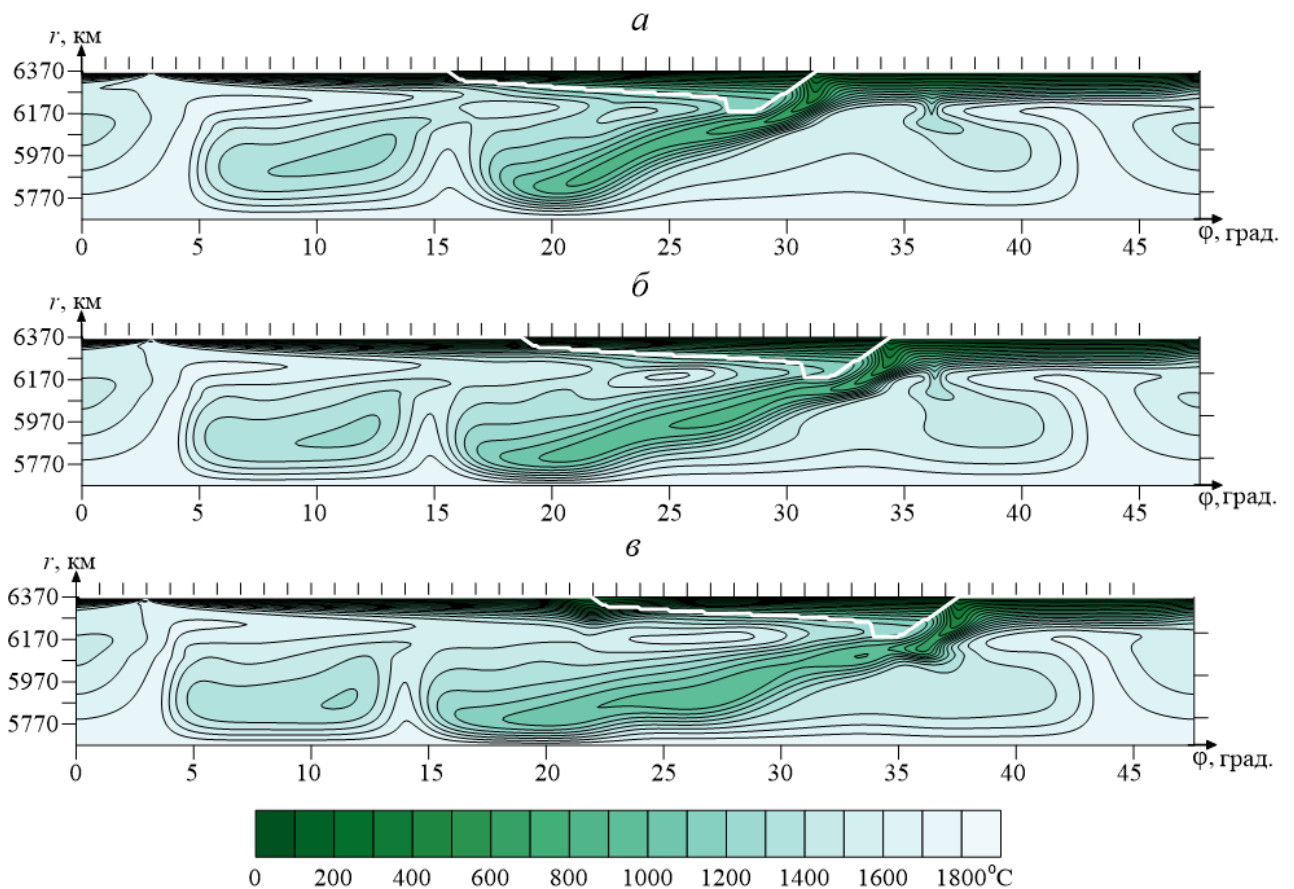


Рисунок 5.10 – Эволюция процесса надвига континента на океанскую плиту. Изолинии температуры в плоскости сечения $\theta_0 = 0,0^\circ$; (*a*): при $t = 69$ млн лет, (*б*): при $t = 87$ млн лет, (*в*): при $t = 104$ млн лет. Континент обозначен сплошной светлой линией

Именно поэтому срединно-атлантическое перемещение составляет «всего» 2-4 см/год, где отрыв приращённой к континентальной плите океанической плиты ещё не произошёл, а спрединг и субдукция, к

примеру, Тихоокеанской, Филиппинской, Наска и других плит ускорены внутримантийной конвекцией вплоть до 12 см/год.

В случае модельной задачи скорость относительного движения пассивной плиты составляло 0 см/год. В результате надвига скорость только глубокомантийной части возросла до 0,75 см/год.

При моделировании следует, по-видимому, учитывать это обстоятельство, прибавляя полученную скорость к условиям для плиты, которая подвергается надвигу. Это значительно ускорит процесс: скорость погружения возрастет.

Предлагаемая математическая модель формирования слэба может быть использована для расчетов конкретных объектов и геологических обстановок на планете.

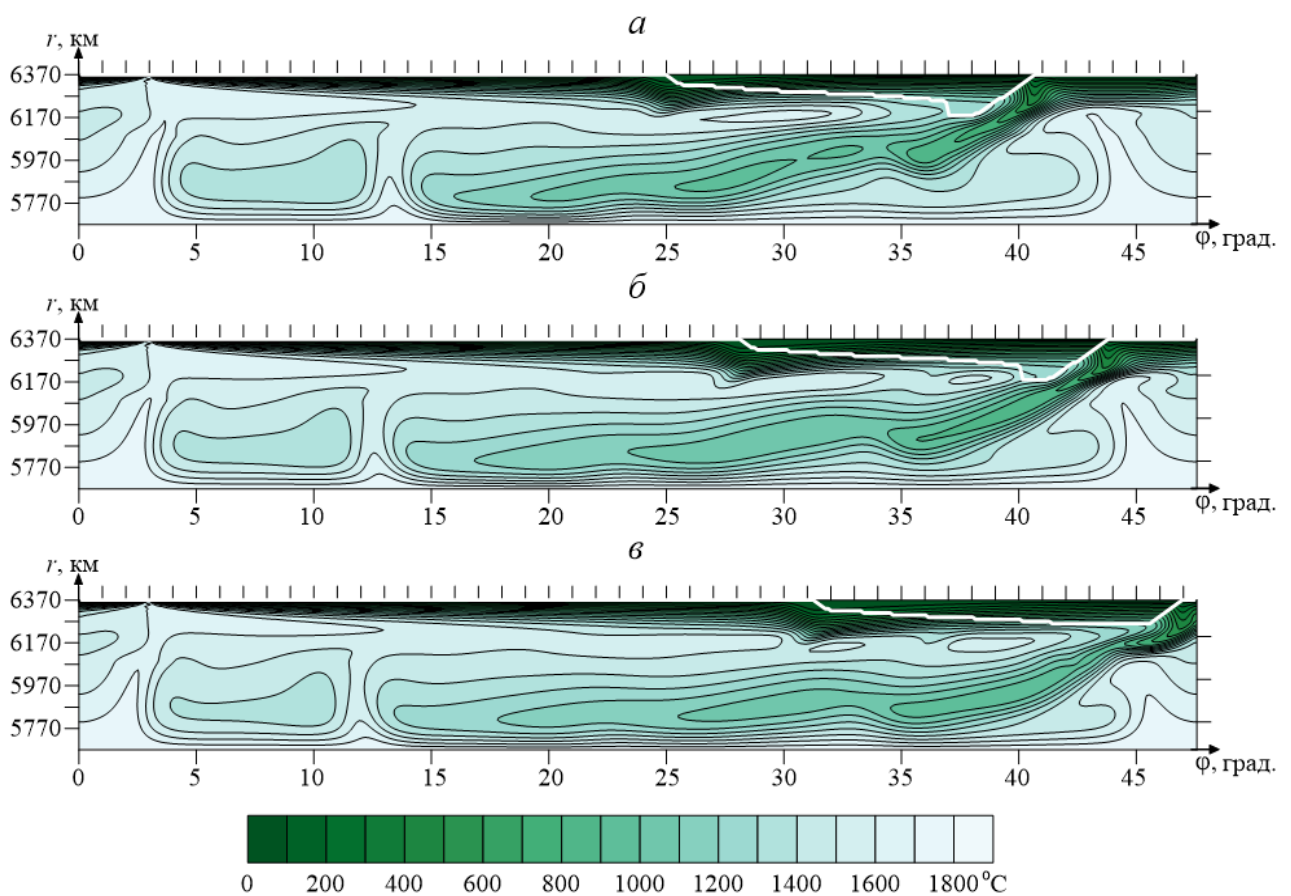


Рисунок 5.11 – Эволюция процесса надвига континента на океанскую плиту. Изолинии температуры в плоскости сечения $\theta_0 = 0,0^\circ$; (*a*): при $t = 121$ млн лет, (*б*): при $t = 139$ млн лет, (*в*): при $t = 156$ млн лет. Континент обозначен сплошной светлой линией

Выводы

Основные результаты главы 5 сводятся к следующему.

1. С применением разработанной неявной реализации метода искусственной сжимаемости построены численные модели спрединга и субдукции в сферической системе координат. Представлены результаты численного моделирования трёхмерной конвекции под океанической литосферой в зонах раздвижения плит (спрединг) и формирования слэба (субдукция) под континентальной литосферой. Указан механизм возникновения погружающихся холодных гравитационно-неустойчивых областей океанической литосферы под воздействием архимедовых сил. Получены тепловые аномалии, имеющие вид слэбов, погруженных в мантию.

2. В условиях надвига континента на пассивную океаническую литосферу получены тепловые аномалии, имеющие вид тяжёлой гравитационно-неустойчивой холодной «капли», возникновение и отрыв которой от кромки континента по времени хорошо согласуется с теоретическими оценками отрыва приращённого в процессе спрединга мантийного материала с образованием слэба, погружающегося в мантию.

Общие выводы

1. Построены на основе методов расщепления методы решения задач конвекции в верхней мантии Земли и разработаны:

- численная модель трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением естественных переменных и неявного метода расщепления по пространственным переменным с коррекцией давления (в декартовых и сферических координатах);
- численная модель трёхмерной конвекции в мантии Земли с использованием естественных переменных и неявной реализации метода искусственной сжимаемости (в декартовых и сферических координатах);
- численная модель трёхмерной конвекции в верхней мантии Земли, с применением переменных «векторный потенциал-завихренность» (в декартовых координатах).

Впервые в рассматриваемом классе задач успешно применены метод последовательности сеток и экстраполяция по Ричардсону, позволившие существенно повысить эффективность численных моделей. Разработаны комплексы программ и выполнено детальное тестирование построенных численных моделей.

2. Осуществлено численное моделирование конвекции под континентальной плитой переменной мощности. Продемонстрирован существенно трёхмерный характер течения. Применение двумерного моделирования для изучения и понимания мантийной динамики неприемлемо даже для протяжённых структур.

3. Принципиальный результат трёхмерного моделирования тепловой конвекции в верхней мантии под кратонами состоит в выявлении мелкомасштабной моды конвекции непосредственно под литосферой на «астеносферном» уровне глубин 200-350 км. Данная мода развивается по периферии кратонов и учёт её влияния может объяснить особенности режима траппового магматизма древних

кратонов по их периферии.

4. Проведено математическое моделирование конвекции под литосферой Евразии в сферических координатах в естественных переменных с применением неявной реализации метода искусственной сжимаемости. Показано, что мощная литосфера Сибирского кратона сдерживает вынос мантийного тепла, вследствие чего под ней создаётся естественный локальный перегрев и формируется восходящий поток конвекции в верхней мантии под юго-западной частью кратона. В восточной части Центральной Монголии формируется парный ему восходящий поток. Положение этих восходящих потоков согласуется с распределением отрицательных аномалий сейсмических скоростей, положением аномалий наблюдаемого гравитационного поля и распределением теплового потока. Возвышенности и низменности Русской платформы согласованы с восходящими и нисходящими конвективными потоками под ней.

5. Построены численные модели спрединга и субдукции. Представлены результаты численного моделирования трёхмерной конвекции под океанической литосферой в зонах раздвижения плит (спрединг) и формирования слэба (субдукция) под континентальной литосферой. Указан механизм возникновения погружающихся холодных гравитационно-неустойчивых областей океанической литосферы под воздействием архимедовых сил. Получены тепловые аномалии, имеющие вид слэбов, погруженных в мантию.

6. В условиях надвига континента на пассивную океаническую литосферу получены тепловые аномалии, имеющие вид тяжёлой гравитационно-неустойчивой холодной «капли», возникновение и отрыв которой от кромки континента по времени хорошо согласуется с теоретическими оценками отрыва приращённого в процессе спрединга мантийного материала с образованием слэба, погружающегося в мантию.

Литература

1. Алексеев, А.С. Численный метод определения структуры верхней мантии Земли / А.С. Алексеев, М.М. Лаврентьев, Р.Г. Мухометов [и др.] // Математические проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. –1971. –Вып.2. –С.143-165.
2. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. –М.: Мир, 1990. –Т.1,2. –728 с.
3. Андреев, В.К. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В.К. Андреев, О.В. Капцов, В.В. Пухначёв, А.А. Родионов. –Новосибирск: Наука: Сибирская издательская фирма, 1994. –319 с.
4. Антонов, П.В. Экспериментальные и численные исследования нестационарных плавучих струй / П.В. Антонов, В.А. Арбузов, В.С. Бердников [и др.] // Автометрия. –2012. –Т.48, №3. –С.90-100.
5. Антонцев, С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. –Изд-во «Наука». Сибирское отделение. Новосибирск, 1983. –319 с.
6. Аплонов, С.В. Геодинамика: Учебник – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2001. –360 с.
7. Арбузов, В.А. Оптическая диагностика структуры и эволюции плавучих струй в сильновязкой жидкости / В.А. Арбузов, Э.В. Арбузов, В.С. Бердников [и др.] // Автометрия. –2014. –Т.50, №5. –С.47-55.
8. Артюшков, Е.В. Механизмы образования сверхглубоких прогибов: Северо-Баренцевская впадина. Перспективы нефтегазоносности / Е.В. Артюшков, И.В. Беляев, Г.С. Казанин [и др.] // Геология и геофизика. –2014. –Т.55, №5-6. –С.821–846.
9. Арфкен, Г. Математические методы в физике / Г. Арфкен. –М.: Атомиздат, 1970. –712 с.

10. Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский. –М.: Наука, 1984. –520 с.
11. Бердников, В.С. Гидродинамика и теплообмен при вытягивании кристаллов из расплавов. Часть 2: численные исследования режима свободной конвекции / В.С. Бердников // Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. –2008. –№3. –С.4-17.
12. Бердников, В.С. Тепловизионные исследования ламинарно-турбулентного перехода в Рэлей-Бенаровской конвекции / В.С. Бердников, В.А. Гришков, К.Ю. Ковалевский, В.А. Марков // Автометрия. –2012. –Т.48, №3. –С.111-120.
13. Бердников, В.С. Влияние режимов теплоотдачи на поля температуры и термических напряжений в монокристаллах / В.С. Бердников, К.А. Митин // Известия РАН. Серия Физическая. –2016. –Т.80, №1. –С.75–80.
14. Берковский, Б.М. Разностные методы исследования задач теплообмена / Б.М. Берковский, Е.Ф. Ноготов. –Минск: Наука и техника, 1976. –144 с.
15. Берковский, Б.М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б.М. Берковский, В.К. Полевиков. –Минск: «Университетское», 1988. –167 с.
16. Бессонов, О.А. Пространственные эффекты конвекции в расплавах: концентрационные неоднородности, возникновение несимметрии и колебаний / О.А. Бессонов, В.А. Брайловская, В.И. Полежаев // Известия РАН. Механика жидкости и газа. –1997. – №3. –С.74-82.
17. Бобров, А.М. Вязкие напряжения и рельеф окраин континента, вызванные его движением (изотермическая модель) / А.М. Бобров, В.П. Трубицын // Физика Земли. –2001. –№12. –С.30-39.

18. Бобров, А.М. Времена перестроек структуры мантийных течений под континентами / А.М. Бобров, В.П. Трубицын // Физика Земли. –1995. –№7. –С.5-13.
19. Богоявленская, О.В. Геология СССР / О.В. Богоявленская, В.Н. Пучков, М.В. Фёдоров. –М.: Недра, 1991. –240 с.
20. Бушенкова, Н.А. Неоднородности верхней мантии и современная структура литосферы центральной Сибири по данным сейсмотомографии на отражённых волнах: Автореферат дисс. канд. геол.-минер. наук. – Новосибирск, 2004. –20 с.
21. Бушенкова, Н.А. Структура верхней мантии и кайнозойский вулканизм Центральной Монголии / Н.А. Бушенкова, Е.В. Деев, Г.С. Дягилев, А.А. Гибшер // ДАН. –2008. –Т.418, №3. –С.378-382.
22. Бушенкова, Н.А. Влияние структуры литосферы на режим верхнемантийной конвекции, кайнозойский вулканизм Тувы, Восточного Саяна и прилегающих районов Монголии / Н.А. Бушенкова, И.Ю. Кулаков, В.В. Червов, Е.В. Деев // Современные проблемы геодинамики и геоэкологии внутриконтинентальных орогенов. К 75- летию со дня рождения Ю.А. Трапезникова. В 2-х томах. Т.1: Тез. докл. 5 Международного симпоз. (г. Бишкек, 19-24 июня 2011). – Бишкек: НС РАН, 2011. –С.243-245.
23. Бушенкова, Н.А. Субмеридиональная пограничная зона в Азии: сейсмичность, структура литосферы и распределение конвективных потоков в верхней мантии / Н.А. Бушенкова, О.А. Кучай, В.В. Червов // Геодинамика и тектонофизика. –2018. –Т.9, №3. –С.1007-1023.
24. Вазов, В. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных / В. Вазов, Дж. Форсайт. –М.: Изд- во иностранной литературы, 1963. –486 с.
25. Владимиров, А.Г. Пермский магматизм и деформации литосферы Алтая как следствие термических процессов в земной коре и мантии /

А.Г. Владимиров, Н.Н. Крук, В.В. Червов [и др.] // Геология и геофизика. –2008. –Т.49, №7. –С.621-637.

26. Владимирова, Н.Н. Численный расчёт симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости / Н.Н. Владимирова, Б.Г. Кузнецов, Н.Н. Яненко // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. –Новосибирск: Наука, 1966. –С.186-192.

27. Воеводин, А.Ф. Устойчивость и реализация неявных схем для уравнений Стокса / А.Ф. Воеводин // ЖВМ и МФ. –1993. –Т.33, №1. –С.119-130.

28. Воеводин, А.Ф. Проблемы вычислительной математики / А.Ф. Воеводин, В.В. Остапенко, Ю.В. Пивоваров, С.М. Шугрин. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1995. –154 с.

29. Воеводин, А.Ф. Численный метод решения начально-краевых задач для уравнений Навье–Стокса в замкнутых областях на основе метода расщепления / А.Ф. Воеводин, Т.В. Юшкова // Сибирский журнал вычислительной математики. –1999. –Т.2, №4. –С.321-332.

30. Воеводин, А.Ф. Метод расчёта вязких течений в замкнутых областях / А.Ф. Воеводин, Т.В. Протопопова // Сиб. журнал индустриальной математики. –2001. –Т.4, №1. –С.29-37.

31. Воеводин, А.Ф. Метод расщепления по физическим процессам для расчёта задач конвекции / А.Ф. Воеводин, О.Н. Гончарова // Математическое моделирование. –2001. –Т.13, №5. –С.90-96.

32. Гончарова, О.Н. Разрешимость нестационарной задачи для уравнений свободной конвекции / О.Н. Гончарова // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. АН СССР. СО. Ин-т гидродинамики, 1990. –Вып. 97. –С.22-28.

33. Грязнов, В.Л. Исследование некоторых разностных схем и аппроксимаций граничных условий для численного решения уравнений

- тепловой гравитационной конвекции / В.Л. Грязнов, В.И. Полежаев // Препринт Института проблем механики АН СССР, 1974. –№40. –70 с.
34. Даниленко, А.Ю. Неявный метод для расчёта нестационарных движений вязкой жидкости / А.Ю. Даниленко, А.И. Толстых // Численные методы динамики вязкой жидкости. –Новосибирск. –1983. –С.110-114.
35. Даниленко, А.Ю. О неявном алгоритме расчёта течений однородной и неоднородной жидкости / А.Ю. Даниленко, В.И. Костин, А.И. Толстых. – М.: ВЦ АН СССР, 1985. –30 с.
36. Добрецов, Н.Л. Глубинная геодинамика / Н.Л. Добрецов, А.Г. Кирдяшкин. – Новосибирск: Издательство СО РАН, РИЦ ОИГГМ, 1994. –299 с.
37. Добрецов, Н.Л. Пермо-триасовый магматизм и осадконакопление в Евразии как отражение суперплюма / Н.Л. Добрецов // ДАН. –1997. –Т.354. –С.220-223.
38. Добрецов, Н.Л. Глубинная геодинамика, 2-е издание. / Н.Л. Добрецов, А.Г. Кирдяшкин, А.А. Кирдяшкин. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2001. –409 с.
39. Добрецов, Н.Л. Основы тектоники и геодинамики / Н.Л. Добрецов. –Новосибирск: НГУ, ИГМ СО РАН, 2011. –491 с.
40. Дядьков, П.Г. Численное моделирование напряжённо-деформированного состояния и его изменений в литосфере центральной Азии / П.Г. Дядьков, Л.А. Назаров, Л.А. Назарова // В книге «Актуальные вопросы современной геодинамики Центральной Азии». Новосибирск. Изд-во СО РАН, 2005. –С.233-252.
41. Дядьков, П.Г. Трёхмерная модель литосферы Земли: методология построения и первые численные эксперименты / П.Г. Дядьков, Л.А. Назаров, Л.А. Назарова // Физическая мезомеханика. –2006. –Т.9, №1. –С.73-76.

42. Зоненшайн, Л.П. Глобальная тектоника, магматизм и металлогения / Л.П. Зоненшайн, М.И. Кузьмин, В.М. Моралев. –М.: Недра, 1976. –231 с.
43. Зоненшайн, Л.П. Внутриплитовый вулканизм и его значение для понимания процессов в мантии Земли / Л.П. Зоненшайн, М.И. Кузьмин // Геотектоника. –1983. –№1. –С.28-45.
44. Кирдяшкин, А.А. Влияние скорости движения океанической литосферы на свободно-конвективные течения в астеносфере под срединно-океаническим хребтом / А.А. Кирдяшкин, А.Г. Кирдяшкин // Физика Земли. –2008. –№4. –С.35-47.
45. Кирдяшкин, А.А. Экспериментальное и теоретическое моделирование тепловой и гидродинамической структуры субдуцирующей плиты / А.А. Кирдяшкин, А.Г. Кирдяшкин // Геотектоника. –2013. –№3. –С.31-42.
46. Кирдяшкин, А.А. Силы, действующие на субдуцирующую океаническую плиту / А.А. Кирдяшкин, А.Г. Кирдяшкин // Геотектоника. –2014. –№1. –С. 62-76.
47. Кобельков, Г.М. Решение задачи о стационарной свободной конвекции / Г.М. Кобельков Г.М. // ДАН СССР. –1980, –Т.255, №2. – С. 277-282.
48. Ковеня, В.М. Об одном алгоритме решения уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости / В.М. Ковеня // Вычислительные технологии. –2006. –Т.11, №2. –С.39-51.
49. Ковеня, В.М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики / В.М. Ковеня. –Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. –280 с.
50. Коновалов, А.Н. Численное решение задачи теории упругости / А.Н. Коновалов. – Лекции для студентов НГУ. –Новосибирск, 1968. –127 с.

51. Корнеев, В.Д. Параллельное программирование в MPI. / В.Д. Корнеев. –Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2002. – 215 с.
52. Коробейников, С.Н. Компьютерное моделирование поддвига и субдукции при столкновении плит / С.Н. Коробейников, В.В. Ревердатто, О.П. Полянский [и др.] // Сиб. журн. вычисл. матем. –2009. –Т.12, №1. –С.71-90.
53. Коробейников, С.Н. О влиянии выбора реологического закона на результаты компьютерного моделирования субдукции плит / С.Н. Коробейников, В.В. Ревердатто, О.П. Полянский [и др.] // Сиб. журн. вычисл. матем. –2011. –Т.14, №1. –С.71-90.
54. Коробицына, Ж.Л. Численное моделирование взаимодействия тепловых конвективных течений в мантии Земли и континентальной литосферы с учётом фазового перехода / Ж.Л. Коробицына, С.А. Тычков // Вычислительные технологии: Сборник научных трудов. –1995. –Т.4, №13. –С.212-223.
55. Коробицына, Ж.Л. Численное моделирование процессов тепло- и массопереноса с учётом фазового перехода в геодинамике / Ж.Л. Коробицына, С.А. Тычков // Журнал вычислительной математики и математической физики. –1997. –Т.37, №6. –С.733-741.
56. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. –М.: Наука, 1965. –427 с.
57. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. –М.: Наука, 1986. –736 с.
58. Лисейкин, В.Д. Технология построения разностных сеток / В.Д. Лисейкин, Ю.И. Шокин, И.А. Васева, Ю.В. Лиханова. – Новосибирск: Наука, 2009. –414 с.
59. Лобковский, Л.И. Геодинамика зон спрединга, субдукции и двухъярусная тектоника плит / Л.И. Лобковский. –М.: Наука, 1988. – 251 с.

60. Лобковский, Л.И. Современные проблемы геотектоники и геодинамики / Л.И. Лобковский, А.М. Никишин, В.Е. Хаин. –М.: Научный Мир, 2004. –612 с.
61. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. –736 с.
62. Малышев, Ю.Ф. Глубинное строение структур ограничения Амурской литосферной плиты / Ю.Ф. Малышев, В.Я. Подгорный, Б.Ф. Шевченко [и др.] // Тихоокеанская геология. –2007. –Т.26, №2. –С.3-17.
63. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. –М.: Наука, 1977. –456 с.
64. Марчук, Г.И. Повышение точности решения разностных схем / Г.И. Марчук, В.В. Шайдуров. –М.: Наука, 1979. –319 с.
65. Марчук, Г.И. Методы расщепления / Г.И. Марчук. –М.: Наука, 1988. –263 с.
66. Монин, А.С. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть I / А.С. Монин, А.М. Яглом. –М.: Наука, 1965. –641 с.
67. Мошкин, Н.П. Тестирование некоторых численных моделей конвективных течений применительно к задачам геодинамики / Н.П. Мошкин, Е.В. Рычкова, С.А. Тычков, Г.Г. Черных // Вычислительные технологии: Сборник научных трудов. –1995. –Т.4, №13. –С.224-231.
68. Наливкин, Д.В. Геология СССР / Д.В. Наливкин. –Москва, 1962. – 810 с.
69. Немнюгин, С.А. Современный фортран. Самоучитель / С.А. Немнюгин, О.Л. Стесик. –СПб.: Издательство «БХВ-Петербург», 2004. –496 с.

70. Пасконов, В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. – М.: Наука, 1984. –286 с.
71. Пейре, Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т.Д. Тейлор. –Ленинград: Гидрометеиздат, 1986. –351 с.
72. Пирсон, К.Е. Численный метод для задач вязкого потока / К.Е. Пирсон // Механика. М.: Мир. –1965. –№6. –С.65-77.
73. Полежаев, В.И. Метод расчёта граничных условий для уравнений Навье–Стокса в переменных вихрь, функция тока / В.И. Полежаев, В.Л. Грязнов // ДАН СССР. –1974. –Т.219, №2. –С.301-304.
74. Полежаев, В.И. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Вerezуб [и др.]. –М.: Наука, 1987. –274 с.
75. Роуч, Х. Вычислительная гидродинамика / Х. Роуч. –М.: Мир, 1980. –618 с.
76. Рыков, В.В. Численное моделирование трёхмерной мантийной конвекции и тектоника литосферных плит / В.В. Рыков, В.П. Трубицын // Вычислительная сейсмология. –1994. –Вып. 26. –С.94-102.
77. Рыков, В.В. Трёхмерная модель мантийной конвекции с движущимися континентами / В.В. Рыков, В.П. Трубицын // Вычислительная сейсмология. –1994. –Вып. 27. –С.21-41.
78. Рычкова, Е.В. Численная модель тепловой конвекции в верхней мантии Земли под литосферой континентов / Е.В. Рычкова, С.А. Тычков // Вычислительные технологии. –1997. –Т.2, №5.–С.66-81.
79. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. –М.: Наука, 1977. –657 с.
80. Тарунин, Е.Л. Метод последовательности сеток для задач свободной конвекции // Журн. Вычисл. математики и мат. физики. –1975. –Т.15, №2. –С. 436-445.

81. Тарунин, Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции / Е.Л. Тарунин. –Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1990. –228 с.
82. Тёркот, Д. Геодинамика: Геологические приложения физики сплошных сред / Д. Тёркот, Дж. Шуберт. –М.: Мир, 1985. –730 с.
83. Толстых, А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики / А.И. Толстых. –М.: Наука, 1990. – 230 с.
84. Том, А. Числовые расчёты полей в технике и физике / А. Том, К. Эйплт. –М.–Л.: Энергия, 1964. –206 с.
85. Трубицын, В.П. Конвекция под континентами и океанами / В.П. Трубицын, А.С. Фрадков // Физика Земли. –1985. –№7. –С.3-14.
86. Трубицын, В.П. Тепловое и механическое взаимодействие мантии с континентальной литосферой / В.П. Трубицын, Ю.Ф. Белавина, В.В. Рыков // Физика Земли. –1993. –№11. –С.3-15.
87. Трубицын, В.П. Влияние континентальной литосферы на структуру мантийной тепловой конвекции / В.П. Трубицын, А.М. Бобров, В.В. Кубышкин // Физика Земли. –1993. –№5. –С.3-11.
88. Трубицын, В.П. Тепловая конвекция в мантии с переменной вязкостью и континентальной плитой конечных размеров / В.П. Трубицын, Ю.Ф. Белавина, В.В. Рыков // Физика Земли. –1994. – №7. –С.5-17.
89. Трубицын, В.П. Конвекция и распределение вязкости в мантии / В.П. Трубицын, В.В. Рыков, А.П. Трубицын // Физика Земли. –1997. – №3. –С.3-10.
90. Трубицын, В.П. Механизм формирования наклонных зон субдукции / В.П. Трубицын, В.В. Рыков // Физика Земли. –1997. – №6. –С.3-14.
91. Трубицын, В.П. Фазовые переходы, сжимаемость, тепловое расширение, теплоёмкость и адиабатическая температура в мантии / В.П. Трубицын // Физика Земли. –2000. –№2. –С.3-16.

92. Трубицын, В.П. Основы тектоники плавающих континентов / В.П. Трубицын // Физика Земли. –2000. –№9. –С. 4-40.
93. Трубицын, В.П. Влияние низковязкой астеносферы на мантийные течения / В.П. Трубицын, А.А. Баранов, А.Н. Евсеев [и др.] // Физика Земли. –2006. –№12. –С.11-19.
94. Трубицын, В.П. О спектральном методе решения уравнения Стокса / В.П. Трубицын, И.Е. Рогожина, М.К. Кабан // Физика Земли. –2008. –№1. –С.23-30.
95. Трубицын, В.П. Структура конвекции при различной ширине зон фазовых переходов / В.П. Трубицын, А.Н. Евсеев, А.А. Баранов, А.П. Трубицын // Физика Земли. –2008. –№8. –С.3-14.
96. Трубицын, В.П. Сейсмическая томография и дрейф континентов / В.П. Трубицын // Физика Земли. –2008. –№11. –С.3-19.
97. Трубицын, В.П. Уравнения тепловой конвекции для вязкой сжимаемой мантии Земли с фазовыми переходами / В.П. Трубицын // Физика Земли. –2008. –№12. –С.83-91.
98. Трубицын, В.П. Реологические модели мантийной конвекции, воспроизводящие разделение литосферы на плиты / В.П. Трубицын, Е.В. Харыбин // Физика Земли. –2010. –№4. –С.3-8.
99. Трубицын, В.П. Природа границы между верхней и нижней мантией и её влияние на конвекцию / В.П. Трубицын // Физика Земли. –2010. –№6. –С.3-18.
100. Трубицын, В.П. Перемещения хребтов и зон субдукции в моделях мантийной конвекции с литосферными плитами / В.П. Трубицын // Физика Земли. –2010. –№10. –С.5-14.
101. Трубицын, В.П. Реология мантии и тектоника океанических литосферных плит / В.П. Трубицын // Физика Земли. –2012. – №6. –С. 3-22.

102. Трубицын, В.П. Структура конвекции в сферической мантии с внутренними источниками тепла / В.П. Трубицын, А.Н. Евсеев, М.Н. Евсеев, А.В. Евсеева // Физика Земли. –2013. –№5. –С.65-73.
103. Трубицын, В.П. Структура тепловой конвекции и геотермы под континентом и океаном / В.П. Трубицын // Физика Земли. –2013. – №5. –С.74-80.
104. Трубицын, В.П. Изгибные деформации плит в модели сильных субдукционных землетрясений / В.П. Трубицын // Физика Земли. –2012. –№2. –С.3-13.
105. Тычков, С.А. Конвекция в мантии и динамика платформенных областей / С.А. Тычков. –Новосибирск: Наука СО, 1984. –97 с.
106. Тычков, С.А. Взаимодействие плюма и тепловой конвекции в верхней мантии под континентом / С.А. Тычков, Е.В. Рычкова, А.Н. Василевский // Геология и геофизика. –1998. –Т.39, №4. –С.311- 341.
107. Тычков, С.А. Эволюция плюма под континентальной литосферой с резкими вариациями толщины / С.А. Тычков, А.Н. Василевский, Е.В. Рычкова // Геология и геофизика. –1999. –Т.40, №8. –С.1182-1196.
108. Тычков, С.А. Тепловая конвекция в верхней мантии континентов и её эффект в геофизических полях / С.А. Тычков, Е.В. Рычкова, А.Н. Василевский, В.В. Червов // Геология и геофизика. –1999. –Т.40, №9. –С.1275-1290.
109. Тычков, С.А. Тепловая конвекция в верхней мантии Земли под литосферой переменной мощности / С.А. Тычков, Е.В. Рычкова, А.Н. Василевский // Физика Земли. –1999. –№5. –С.3-14.
110. Тычков, С.А. О численном моделировании тепловой конвекции в мантии Земли / С.А. Тычков, В.В. Червов, Г.Г. Черных // ДАН. –2005. –Т.402, №2. –С.248-254.

111. Тычков, С.А. Численная модель трёхмерной конвекции в верхней мантии Земли / С.А. Тычков, В.В. Червов, Г.Г. Черных // Физика Земли. –2005. –№5. –С.48-64.
112. Тычков, С.А. Численная модель трёхмерной конвекции в мантии Земли / С.А. Тычков, В.В. Червов, Г.Г. Черных // Вычислительные технологии. Специальный Выпуск, посвящённый 85-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. –2006. –Т.11, часть 2. –С.45-52.
113. Тычков, С.А. Трёхмерное моделирование конвекции в верхней мантии Земли под неоднородной континентальной литосферой / С.А. Тычков, В.В. Червов, Г.Г. Черных // Int. Conf. «Fluxes and Structures in Fluids». St. Petersburg. –2007. –С.296-297.
114. Тычков, С.А. Трёхмерное моделирование конвекции под кратонами Центральной Азии / С.А. Тычков, В.В. Червов, Г.Г. Черных // Вычислительные технологии. Специальный выпуск 4: Труды V Совещания российско-казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям. –2007. –Т.12. –С.85-95.
115. Федоренко, Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса / Р.П. Федоренко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. –1964. –Т.4, №3. –С.559-564.
116. Федорюк, М.В. Характеристики течений несжимаемой жидкости в гравитационном поле / М.В. Федорюк // Мат. сборник. –1988. – 137(179), №4(12). –С.483–499.
117. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. –М.: Мир, 1991. –Т.1,2. –1054 с.
118. Червов, В.В. Сравнение некоторых аппроксимаций конвективных членов в уравнении теплопереноса для задачи конвекции в мантии Земли / В.В. Червов // Вычислительные технологии: Сборник научных трудов. –1995. –Т.4, №13. –С.295-305.

119. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерных задач конвекции в мантии Земли с применением завихренности и векторного потенциала / В.В. Червов // Вычислительные технологии. –2002. –Т.7, №1. –С.114-125.
120. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерных задач конвекции в мантии Земли с применением последовательности сеток / В.В. Червов // Вычислительные технологии. –2002. –Т.7, №3. –С. 85- 92.
121. Червов, В.В. Трёхмерное моделирование конвективных процессов в мантии Земли: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 05.13.18 / Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. –Новосибирск, 2004. –184 с.
122. Червов, В.В. Трёхмерное моделирование конвективных процессов в мантии Земли: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 05.13.18 / Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. – Новосибирск, 2004. –19 с.
123. Червов, В.В. Моделирование трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам / В.В. Червов // Вычислительные технологии. –2006. –Т.11, №4. –С.73-86.
124. Червов, В.В. Моделирование трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода слабой сжимаемости / В.В. Червов // Вычислительные технологии. –2009. –Т.14, №3. –С.86- 92.
125. Червов, В.В. Численное моделирование трёхмерной конвекции под кратонами Центральной Азии / В.В. Червов, А.В. Червов, Г.Г. Черных // Вычислительные технологии. –2009. –Т.14, №5. –С.114- 121.

126. Червов, В.В. Численное моделирование трехмерной конвекции в верхней мантии Земли под литосферой Евразии / В.В. Червов, Г.Г. Черных, Н.А. Бушенкова, И.Ю. Кулаков // Вычислительные технологии. –2014. –Т.19, №5. –С.101-114.
127. Червов, В.В. Тектонические прогибы на Восточно-Европейской и Сибирской платформах: численное моделирование конвекции под Евразийским континентом / В.В. Червов, Н.А. Бушенкова, Г.Г. Черных // Геодинамика и тектонофизика. –2021.–Т.12, №1.–С.84-99. <https://doi.org/10.5800/GT-2021-12-1-0514>
128. Черный, С.Г. Численное моделирование течений в турбомашинах / С.Г. Черный, Д.В. Чирков, В.Н. Лапин [и др.]. –Новосибирск: Наука, 2006. –202 с.
129. Юдович, В.И. О конвекции сильно вязкой нетеплопроводной жидкости / В.И. Юдович // Математ. сборник. –2007. –Т.198, №1. – С.127-158.
130. Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1967. –195 с.
131. Aziz, K. Numerical solution of the three- dimensional equations of motion for laminar natural convection / K. Aziz, J.D. Hellums // Phys. Fluids. –1967. –Vol.10, No.2. –P.314-324.
132. Basu, A.R. High ^3He plume origin and temporal-spatial evolution of the Siberian flood basalts / A.R. Basu, R.J. Poreda, P.R. Renne [et al.] // Science. –1995. –Vol.269. –P.822-825.
133. Bercovici, D. Three-dimensional spherical models of convection in the Earth's mantle / D. Bercovici, G. Schubert, G.A. Glatzmaier // Science. –1989. –Vol.244, No.4907. –P.950-955.
134. Blankenbach, B. A benchmark comparison for mantle convection codes / B. Blankenbach, F. Busse, U. Christensen [et al.] // Geophys. J.Int. –1989. –Vol.98, No.1. –P.23-38.

135. Busse, F.H. Square-pattern convection in fluids with strongly temperature-dependent viscosity / F.H. Busse, H. Frick // Journal of Fluid Mech. –1985. –Vol.150. –P.451-465.
136. Busse, F.H. 3D Convection at infinite Prandtl number in Cartesian geometry – a benchmark comparison / F.H. Busse, U. Christensen, R. Clever [et al.] // Geophysical and Astrophysical of Fluid Dynamics. – 1993. –Vol.75. –P.39-59.
137. Chernykh, G.G., Comparison of some numerical algorithms for two-dimensional convection of fluid with nonlinear viscosity / G.G. Chernykh, N.P. Moshkin, E.V. Rychkova, S.A. Tychkov // Proceedings of 8th international conference on the methods of Aerophysical research. Novosibirsk. –1996. –Part I. –P.79-84.
138. Chervov, V.V. Numerical Modeling of 3D Convection in the Upper Mantle of the Earth beneath Lithosphere of Central Asia / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. –2012. –Vol.21, No.1. –P.78-89.
139. Chervov, V.V. Numerical Modeling of Three-Dimensional Convection in the Upper Mantle of the Earth beneath Eurasia Lithosphere / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. –2014. –Vol.23, No.2. –P.105-111.
140. Chervov, V.V. Numerical Modeling of Convection in the Zone of Spreading and Subduction / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. –2019. –Vol.28, No.1. –P.14-25.
141. Chervov, V.V. Flow in Subduction Zone Against Bevel Angle of Leading Edge of Continent Overthrusting on Passive Oceanic Lithosphere / V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Journal of Engineering Thermophysics. –2020. – Vol.29, No.3. –P.460-466
142. Chorin, A.J. A Numerical method for solving incompressible viscous flow problem. / A.J. Chorin // J. Comp. Phys. –1967. –Vol.2. –P.12-26.

143. Christensen, U. Convection with pressure- and temperature-dependent non-Newtonian rheology / U. Christensen // *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* – 1984. –Vol.77. –P.343-384.
144. Christensen, U. 3-D convection with variable viscosity / U. Christensen, H. Hager // *Geophys. J. Int.* –1991. Vol.104. –P.213-226.
145. Condie, K.C. Episodic continental growth models: afterthoughts and extensions / K.C. Condie // *Tectonophys.* –2000. –Vol.322. –P.153-162.
146. Cserepes, L. Three dimensional infinite Prandtl number convection in one and two layers with implications for the Earth gravity field / L. Cserepes, M. Rabinowicz, C. Rosemberg-Borot // *J. Geophys. Res.* – 1988. –Vol.43.–P.12009-12025.
147. Dennis, S.C.R. Finite-difference methods for calculating steady incompressible flows in three dimensions / S.C.R. Dennis, D.B. Ingham, R.N. Cook // *Journal of Computational Physics.* –1979. –Vol.33. –P.325-339.
148. Doin, M. Mantle convection and stability of depleted and undepleted continental lithosphere / M. Doin, L. Fleitout, U. Christensen // *J. Geophys. Res.* –1997. –Vol.102. –P.2771-2787.
149. Dubuffet, F. Multiple-scales in mantle convection / F. Dubuffet, M. Rabinowicz, M. Monnereau // *Earth Planet. Sci. Lett.* –2000. –Vol.178. –P.351-366.
150. Fleitout, L. Secondary convection and the growth of the oceanic lithosphere / L. Fleitout, D.A. Yuen // *Physics of the Earth and Planetary Interiors.* –1984. –Vol.36. –P.181-212.
151. Fleitout, L. Steady state, secondary convection beneath lithospheric plates with temperature- and pressure- dependent viscosity / L. Fleitout, D.A. Yuen // *J. Geophys. Res.* –1984. –Vol.89, No.B11. –P.9227-9244.
152. Glatzmaier, G.A. Numerical simulations of mantle convection: Time-dependent, three-dimensional, compressible, spherical shell /

- G.A. Glatzmaier // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. –1988. –Vol.43. – P.223-264.
153. Guillou, L. On the effect of continents on mantle convection / L. Guillou, C. Jaupart // J. Geophys. Res. –1995. –Vol.100. – P.24217-24238.
154. Gurnis, M. Large-scale mantle convection and the aggregation and dispersal of supercontinents / M. Gurnis // Nature. –1988. –No.332. – P.695-699.
155. Hager B.H. Subducted slabs and the Geoid: constraints on mantle rheology and flow / B.H. Hager // J. Geophys. Res. –1984. –Vol.89. – P.6003-6015.
156. Hansen, U. Time-dependent thermal convection – a possible explanation for a multi-scale flow in the Earth's mantle / U. Hansen, A. Ebel // Geophysical Journal. –1988. –Vol.94, No.2. –P.181-191
157. Heinrich, J.C. An upwind finite element scheme for two-dimensional convective equation / J.C. Heinrich, P.S. Huyakorn, O.C. Zienkiewicz // Int. J. Numer. Method. Eng. –1977. –Vol.11. –P.131-143.
158. Hewitt, J.M. Large aspect ratio cells in two-dimensional thermal convection / J.M. Hewitt, D.P. McKenzie, N.O. Weiss //Earth Planet Sci. Lett. –1980. –Vol.51. –P.370-380.
159. Honda, S. The timescales of plume generation caused by continental aggregation / S. Honda, M. Yoshida, S. Ootorii, Y. Iwase // Earth Planet. Sci. Lett. –2000. –Vol.176. –P.31-43.
160. Houseman, G.A. Convective instability of a thickened boundary layer and its relevance for the thermal evolution of continental convergent belts / G.A. Houseman, D.P. McKenzie, P. Molnar // J. Geophys. Res. –1981. – Vol.86, No.B7. –P.6115-6132.
161. Houston, M.H. ADI solution of free convection in a variable viscosity fluid / M.H. Houston, De Dremaecker J.Cl. // J. of Computational Physics. –1974. –Vol.16. –P.221-239.

162. Jarvis, G.T. Mantle convection as a boundary layer phenomenon / G.T. Jarvis, W.R. Peltier // *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* –1982. –Vol.68. – P.389-427.
163. Karato, S. Rheology of the upper mantle: A synthesis. / S. Karato, P. Wu // *Science*. –1993. –Vol.260. –P.771-778.
164. Koulakov, I. Slab interactions in the Taiwan region based on the P- and S- velocity distributions in the upper mantle / I. Koulakov, Y.-M. Wu, H.-H. Huang [et al.] // *Journal of Asian Earth Sciences*. –2013. –Vol.79. – P.53-64.
165. Lenardic, A. On the head flow variation from Archean cratons to Proterozoic mobile belts / A. Lenardic // *J. Geophys. Res.* –1997. –Vol.102. – P.709-721.
166. Lowman, J.P. Mantle convection flow reversals due to continental collisions / J.P. Lowman, G.T. Jarvis // *J. Geophys. Res.* –1993. –Vol.20. – P.2087-2090.
167. Machetel, P. Three-dimensional convection in spherical shells / P. Machetel, M. Rabinowicz, P. Bernadet // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* –1986. –Vol.37. –P.57-84.
168. McKenzie, D. Speculation on the thermal and tectonic history of the Earth / D. McKenzie, N. Weiss // *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* –1975. – Vol.42, No.1. –P.131-174.
169. McKenzie, D. The generation and compaction of partial molten rock / D. McKenzie // *J. Petrology*. –1984. –Vol.25. –P.713-765.
170. Megnin, C. Imaging 3-D spherical convection models: What can seismic tomography tell us about mantle dynamics? / C. Megnin, H- P. Bunge, B. Romanowicz, M.A. Richards // *Geophysical research letters*. –1997. Vol.24, No.11, –P.1299-1302.
171. Moore, D.R. Two-dimensional Rayleigh-Benard convection / D.R. Moore, N.O. Weiss // *Journal of Fluid Mech.* –1973. –Vol.58, No.2. – P.289-312.

172. Nakakuki, T. The interaction of plumes with the transition zone under continents and oceans / T. Nakakuki, D.A. Yuen, S. Honda // *Earth Planet. Sci. Lett.* –1997. –Vol.146. –P.379-391.
173. Nimis, P. Clinopyroxene geobarometry of magmatic rocks. Part 2. Structural geobarometers for basic to acid, tholeiitic and mildly alkaline magmatic systems / P. Numis // *Contrib. Mineral. Petrol.* –1999. –Vol.135. –P.62-74.
174. Ogawa, M. Numerical simulations of three-dimensional thermal convection in a fluid with strongly temperature dependent viscosity / M. Ogawa, G. Schubert, A. Zebib // *Journal of Fluid Mech.* –1991. –Vol.233. –P.299-328.
175. Olson, P. The large-scale structure of convection in the Earth's mantle / P. Olson, P.G. Silver, R.W. Carlson // *Nature.* –1990. –No.344. –P.209-215.
176. Olson, P. Mantle convection with spherical effects / P. Olson // *J. Geophys. Res.* –1981. –Vol.86. –P.4881-4890.
177. Peaceman, D.W. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations / D.W. Peaceman, H.H. Rachford // *Journ. Soc. Industr. Appl. Math.* –1955. –Vol.3, No.1. –P.28-41.
178. Rabinowicz, M. Three-dimensional models of mantle flow across a low- viscosity zone: implications for hotspot dynamics / M. Rabinowicz, G. Ceuleneer, M. Monnereau, C. Rosemberg // *Earth and planetary science letter.* –1990. –Vol.99. –P.170-184.
179. Rabinowicz, M. Three-dimensional mantle flow beneath mid - ocean ridges / M. Rabinowicz, S. Rouzo, J.C. Sempere // *J. Geophys. Res.* –1993. –Vol.98, No.B5. –P.7851-7869.
180. Ratcliff, J.T. Transitions in thermal convection with strongly variable viscosity / J.T. Ratcliff, P.J. Tackley, G. Schubert, A. Zebib // *Phys. Earth Planet. Inter.* –1997. –Vol.102. –P.201-212.

181. Richter, F. Finite–amplitude convection through a phase boundary / F. Richter // *J. Geoph. Roy. Astr. Soc.* –1973. –Vol.35. –P.265-276.
182. Richter, F. On some consequence and possible causes of layered mantle convection / F. Richter, D.P. Mckenzie // *J. Geophys. Res.* –1981. – Vol.86. –P.6133-6142.
183. Ritsema, J. Upper mantle seismic velocity structure beneath Tanzania, east Africa: implication for the stability of craton lithosphere / J. Ritsema, A.A. Nyblade, T.J. Owens [et al.] // *J. Geophys. Res.* –1998. –Vol.103. – P.21201-21213.
184. Ritzwoller, M.H. Eurasian surface wave tomography: group velocities / M.H. Ritzwoller, AL. Levshin // *J. Geophys. Res.* –1998. –Vol.103. – P.4839-4878.
185. Sandiford, D. Improving subduction interface implementation in dynamic numerical models / D. Sandiford, L. Moresi // *Solid Earth*. 2019. No.10, P.969–985.
186. Schmeling, H. The influence of second-scale convection on the thickness of continental lithosphere and crust / H. Schmeling, G. Marquart // *Tectonophysics*. –1991. –Vol.189. –P.281-306.
187. Schmeling, H. Mantle flow and evolution of the lithosphere / H. Schmeling, G. Marquart // *Phys. Earth Planet. Inter.* –1993. –Vol.79. – P.241-267.
188. Simons, F.J. The deep structure of the Australian continent from surface wave tomography / F.J. Simons, A. Zeihuis, R.D. van der Hilst // *Lithos*. –1999. –Vol.48. –P.17-43.
189. Solheim, L.P. Mantle phase transitions and layered convection / L.P. Solheim, W.R. Peltier // *Canadian Journal of Earth Sciences*. –1993. – Vol.30. –P.881-892.
190. Spalding, D.B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives / D.B. Spalding // *Int. J. Numer. Math. Eng.* –1973. –Vol.4, No.4. –P.551-559.

191. Tackley, P.J. Effects of strongly variable viscosity on three-dimensional compressible convection in planetary mantles / P.J. Tackley // J. Geophys. Res. –1996. –Vol.101. –P.3311-3332.
192. Tackley, P.J. Self-consistent generation of tectonic plates in three-dimensional mantle convection / P.J. Tackley // Earth and Planetary Science Letters. –1998. –Vol.157, Iss.1-2. –P.9-22.
193. Torrance, K.E. Thermal convection with large viscosity variations / K.E. Torrance, D.L. Turcotte // J. Fluid Mech. –1971. –Vol.47. Part 1. – P.113-125.
194. Travis, B. The transition from two-dimensional to three-dimensional planform in infinite Prandtl number thermal convection / B. Travis, P. Olson, G. Schubert // J. Fluid Mech. –1990. –Vol.216. –P.71-91.
195. Trubitsyn, V.P. A 3D numerical model of the Wilson cycle / V.P. Trubitsyn, V.V. Rykov // J. Geodynam. –1996. –Vol.20. –P.63-75.
196. Tychkov, S.A. A numerical model of three-dimensional convection / S.A. Tychkov, V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Izvestiya, Physics of Solid Earth, –2005. –Vol.41, No.5. –P.383-398.
197. Tychkov, S.A. Numerical Modeling of Thermal Convection in the Earth's Mantle / S.A. Tychkov, V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Doklady Earth Sciences. –2005. –Vol.402, No.4. –P.596-601.
198. Tychkov, S.A. A 3D numerical model for the Earth's mantle convection / S.A. Tychkov, V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Bull. Nov. Comp. Center. Comp. Science. –2005. No.22. –P.91-97.
199. Tychkov, S.A. Numerical modeling of 3D convection in the Earth mantle / S.A. Tychkov, V.V. Chervov, G.G. Chernykh // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. –2005. –Vol.20, No.5. –P.483-500.
200. Van der Lee, S. Upper mantle S velocity structure of North America / S. Van der Lee, G. Nolet // J. Geophys. Res. –1997. –Vol.102, No.B10. – P.22815-22838.

201. White, R. Magmatism at rift zones: the generation of volcanic continental margins and flood basalts / R. White, D. McKenzie // J. Geophys. Res. –1989. –Vol.94. –P.7685-7729.
202. Widmer-Schmidrig, R. Free oscillations illuminate the mantle / R. Widmer-Schmidrig // Nature. –1999. –Vol.398. –P.292-293.
203. Zorin, Yu.A. Structure of the lithosphere of the Mongolian-Siberian mountainous province / Yu.A. Zorin, M.R. Novoselova, E.Kh. Turutanov, V.M. Kozhevnikov // Journal of Geodynamics. –1990. –Vol.11, No.4. – P.327–342.

**Свидетельства о государственной регистрации
программ для ЭВМ**

204. Червов, В.В. Программа расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли в переменных «завихренность-векторный потенциал» с вязкостью, зависящей от давления и температуры «PSIOMEGA/2015» / В.В. Червов // Свид. о гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2018610212 от 09.01.2018 г. (Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам).
205. Червов, В.В. Программа расчёта трёхмерной конвекции под континентальными плитами Земли в сферических координатах «Navie_Spherical_Coords/2017» / В.В. Червов // Свид. о гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2018616280 от 28.05.2018 г. (Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам).
206. Червов, В.В., Черных, Г.Г. Программа моделирования трёхмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам «Mantle_RFP/2018» / В.В. Червов, Г.Г. Черных // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2018660074 от 16.08.2018 г.

(Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам).

207. Червов, В.В. Программа расчёта трёхмерной конвекции в мантии Земли неявным методом искусственной сжимаемости в декартовой системе координат «Mantle_IS/2019» / В.В. Червов // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2019664642 от 11.11.2019 г. (Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам).