

На правах рукописи



Гусев Олег Игоревич

**ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В РАМКАХ
НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ МОДЕЛЕЙ**

Специальность 05.13.18 —
«математическое моделирование численные методы и комплексы
программ»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Хакимзянов Гаяз Салимович

Официальные оппоненты: **Чухахин Александр Павлович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск,
заведующий лабораторией

Компаниец Лидия Алексеевна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФИЦ КНЦ СО РАН, г. Красноярск,
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск

Защита состоится 27 января 2017 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета ДМ003.046.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, пр. Академика Лаврентьева, 6, конференц-зал ИВТ СО РАН.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ИВТ СО РАН: <http://www.ict.nsc.ru/ru/structure/discouncil/gusev-oi-0>.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан ноября 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
ДМ003.046.01, к.ф.-м.н.

 Лебедев Александр Степанович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Освоение прибрежных территорий приводит к необходимости учёта возможности возникновения стихийных бедствий, таких как цунами. Исследованию этого явления посвящено множество работ, в основе большей части которых лежит численное моделирование. Решаются задачи цунамирайонирования, способствующие принятию решений по минимизации ущерба от вероятных событий, моделируются исторические, гипотетические и потенциально возможные цунами. В таких исследованиях зачастую приходится варьировать в некоторых пределах параметры задачи, что порождает большое количество расчётов. При этом размеры вычислительных областей и времена распространения волн могут быть достаточно велики, что делает затруднительным выполнение расчётов в рамках полных моделей гидродинамики, таких как уравнения Эйлера и Навье-Стокса. Поэтому, учитывая, что длина волн цунами, как правило, много больше глубины акватории, используются приближенные модели теории мелкой воды. Широкое применение получили модели мелкой воды первого приближения (SW-модели), не учитывающие частотную дисперсию волн. Однако, дисперсионные эффекты могут сказываться в задачах о цунами, когда волны проходят большие расстояния или имеют высокочастотные компоненты в своём профиле. При моделировании необходимо учитывать также эффекты нелинейности волн, если их амплитуда сравнима с глубиной акватории, а в крупномасштабных задачах эффекты «сферичности» и вращения Земли. Универсальными для решения задач, требующих учёта перечисленных выше эффектов, являются нелинейно-дисперсионные (НЛД-) модели мелкой воды на вращающейся сфере.

Сложность конструирования численных алгоритмов для НЛД-уравнений заключается в наличии смешанных производных третьего порядка от искомых функций. Несмотря на большое количество опубликованных работ по этой тематике, известные подходы не используют в полной мере богатый опыт построения численных алгоритмов для SW-модели и эллиптических уравнений. Более того, до настоящего исследования не было опубликовано работ с результатами численного моделирования поверхностных волн на вращающейся сфере в рамках полной НЛД-модели (NLD-модели), при выводе которой не используется предположение о малости амплитуды волн. Известные программные комплексы (TUNAMI-N2-NUS, GloBouss, FUNWAVE), предназначенные для решения задач о цунами с учётом частотной дисперсии волн в сферических координатах, основаны на слабо нелинейных дисперсионных (СНЛД-) уравнениях на неподвижном дне.

Целью настоящей работы является разработка эффективных численных алгоритмов и их программная реализация для расчёта образования и распростра-

нения поверхностных волн в рамках моделей, учитывающих нелинейность и частотную дисперсию волн, подвижность дна, сферичность и вращение Земли.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. разработать универсальный численный алгоритм решения систем полных и слабо нелинейных дисперсионных уравнений на подвижном дне в одномерном (когда искомые функции зависят от одной пространственной координаты) и двумерном (плановом) случаях. Провести теоретическое исследование свойств алгоритма;
2. разработать численный алгоритм решения систем НЛД-уравнений на вращающейся сфере;
3. выполнить программную реализацию разработанных алгоритмов, позволяющую проводить расчёты задач о распространении поверхностных волн и образовании их подводным оползнем в реалистичных акваториях;
4. на тестовых задачах провести верификацию предложенных алгоритмов и программных реализаций путём сравнения полученных численных решений с аналитическими, экспериментальными данными и расчётами других авторов;
5. исследовать границы применимости моделей и значимость таких эффектов как частотная дисперсия волн, сферичность и вращение Земли;
6. выполнить численное моделирование некоторых исторических и гипотетических цунами.

На защиту выносятся следующие результаты, соответствующие трём пунктам (3,4,5) паспорта специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам:

Пункт 3: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

1. Численные алгоритмы решения полных и слабо нелинейных дисперсионных уравнений, основанные на выделении равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления и системы уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью. Теоретическое исследование свойств алгоритмов, таких как устойчивость, численная дисперсия и диссипация.

Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

2. Комплексы программ, предназначенные для проведения вычислительных экспериментов по исследованию процессов образования и распространения поверхностных волн в реалистичных акваториях.

Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

3. Численные исследования процессов образования и распространения длинных поверхностных волн в идеализированных акваториях. Результаты сравнительного анализа расчётов на основе различных моделей мелкой воды, исследование границ применимости этих моделей.
4. Исследование влияния эффектов, связанных с учётом дисперсии волн, вращения Земли и ее сферичности в зависимости от формы начального возмущения свободной поверхности и дальности распространения волн.
5. Результаты численного моделирования образования волн гипотетическими подводными оползнями в Чёрном море. Исследование влияния начального положения и размеров оползня на картину течения и проявление дисперсионных эффектов при распространении этих волн.

Научная новизна:

1. Для систем полных и слабо нелинейных дисперсионных уравнений предложен универсальный способ выделения подзадачи для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления, в результате которого получается расширенная система, состоящая из равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей и системы уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью.
2. Разработаны численные алгоритмы для расширенных систем НЛД-уравнений на подвижном дне, основанные на итерационном методе последовательной верхней релаксации для эллиптического уравнения и конечно-разностной схеме типа предиктор-корректор для гиперболической системы.
3. Разработаны программные комплексы для расчётов в реалистичных акваториях задач о распространении и образовании волн подводными оползнями в рамках полных и слабо нелинейных дисперсионных моделей в одномерном, двумерном и сферическом случаях.

4. На основе численных экспериментов исследованы границы применимости новых слабо нелинейных дисперсионных моделей, имеющих уравнение баланса энергии.
5. Впервые получены численные решения полной НЛД-модели на вращающейся сфере. Исследована значимость эффектов сферичности, вращения Земли и частотной дисперсии в задачах о распространении поверхностных волн, образованных возмущениями свободной поверхности различной формы.

Практическая значимость. Разработанные численные алгоритмы и их программные реализации позволяют проводить расчёты сценариев распространения и образования цунами подводными оползнями, в которых значительное влияние могут оказывать нелинейность и частотная дисперсия волн, сферичность и вращение Земли. Результаты расчётов могут служить для оценки характеристик волн в исторических или потенциально возможных событиях, а также для составления карт цунамирайонирования. Сопоставления результатов, полученных по НЛД-модели и бездисперсионной модели мелкой воды, могут служить основанием для применения последней в случаях, когда различия между результатами малы.

Метод исследования. Для решения задач гидродинамики длинных волн используются методы математического моделирования, метод конечных разностей, интегро-интерполяционный метод, явные численные схемы решения гиперболических уравнений и итерационные методы для решения эллиптических уравнений.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается строгостью вывода используемых нелинейно-дисперсионных моделей и выполнением для них законов сохранения, строгим теоретическим обоснованием свойств предложенных численных алгоритмов, детальными сравнениями полученных численных решений с аналитическими, известными экспериментальными данными и расчётами других авторов по полным и приближенным гидродинамическим моделям со свободной границей.

Представление работы. Основные результаты работы докладывались на объединённом научном семинаре Института вычислительных технологий СО РАН, кафедры математического моделирования НГУ и кафедры вычислительных технологий НГТУ «Информационно-вычислительные технологии (численные методы механики сплошной среды)» № 11/16 17 мая 2016 г. под руководством академика РАН Ю. И. Шокина и д.ф.-м.н. В. М. Ковени, а также на 18-ти мероприятиях: Международные научные студенческие конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2009-2014); Всероссийские конференции молодых ученых по математическому моделированию и информаци-

онным технологиям (Новосибирск, 2012; Томск, 2013; Тюмень, 2014; Красноярск, 2015); Международная конференция «Математические и информационные технологии, MIT-2013» (Сербия, Врнячка Баня и Черногория, Будва, 2013); Расширенное заседание теоретического семинара «Нелинейные волны», посвященного памяти чл.-корр. РАН В. М. Тешукова (Новосибирск, 2014); Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Бийск, 2014); Международные конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики» (Новосибирск, 2014, 2015); Всероссийский семинар «Аналитические и численные методы длинноволновой гидродинамики» (Новосибирск, 2015); Всероссийская научная конференция с международным участием «Геодинамические процессы и природные катастрофы. Опыт Нефтегорска» (Южно-Сахалинск, 2015), European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (Crete Island, Greece, 2016).

Личный вклад. Автор принимал активное участие в формулировке задач для различных систем нелинейно-дисперсионных уравнений, выделении в них подзадач эллиптического и гиперболического типа, интерпретации полученных численных результатов. Программная реализация, теоретическое исследование свойств разработанных алгоритмов и проведение всех вычислительных экспериментов выполнено автором самостоятельно.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 28 работах, 8 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 14 — в тезисах докладов и 4 — в трудах международных и всероссийских конференций, 2 — свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ в Роспатенте.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 180 страниц с 50 рисунками и 3 таблицами. Список литературы содержит 176 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках настоящей диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулирована научная новизна.

Первая глава посвящена моделированию одномерных задач о распространении и образовании поверхностных волн подводным оползнем. В параграфе 1.1 описывается математическая постановка задачи и приводится ис-

ходная система NLD-уравнений в виде

$$H_t + (Hu)_x = 0, \quad (1)$$

$$u_t + uu_x + \frac{P_x}{H} = \frac{p_0}{H}h_x, \quad (2)$$

где $H(x,t) = h(x,t) + \eta(x,t)$ — полная глубина, u — горизонтальная составляющая вектора скорости, функции $z = \eta(x,t)$ и $z = -h(x,t)$ описывают свободную поверхность и положение подвижного дна соответственно, P — проинтегрированное по толщине слоя давление, p_0 — давление на дне,

$$P = \int_{-h}^{\eta} pdz = \frac{gH^2}{2} - \varphi, \quad p_0 = p|_{z=-h} = gH - \psi,$$

при этом g — ускорение свободного падения, φ, ψ — дисперсионные составляющие P и p_0 ,

$$\varphi = \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2}R_1 + HR_2,$$

$$R_1 = D(u_x) - u_x^2, \quad R_2 = D^2h, \quad D = \partial/\partial t + u\partial/\partial x.$$

Приводится способ выделения из исходной задачи двух подзадач: гиперболической системы уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью, в которую входит уравнение неразрывности (1) и уравнение движения

$$u_t + uu_x + gH_x = gh_x + \frac{\varphi_x - \psi h_x}{H}, \quad (3)$$

и ОДУ второго порядка для дисперсионной составляющей φ :

$$\left(\frac{4}{Hr} \varphi_x \right)_x - 6\varphi \left(\frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} + \left(\frac{h_x}{H^2 r} \right)_x \right) = F, \quad (4)$$

где

$$F = \left(g\eta_x + \frac{Rh_x}{r} \right)_x - \frac{6R}{Hr} + 2u_x^2,$$

$$R = -g\eta_x h_x + u^2 h_{xx} + B, \quad B = h_{tt} + 2uh_{xt}, \quad r = 4 + h_x^2.$$

Функция ψ записывается в следующем виде:

$$\psi = \frac{1}{r} \left(\frac{6\varphi}{H} + HR + \varphi_x h_x \right). \quad (5)$$

Важной особенностью уравнения (4) является то, что ни левая, ни правая его части не содержат производных по времени от искомым функций. Отметим, что при выводе этого уравнения никаких дополнительных предположений не делается, и полученная расширенная система (1), (3), (4), (5) эквивалентна исходной (1), (2).

Приведены примеры точных решений полных NLD-уравнений: равномерный поток, покой, вертикальный сдвиг и уединённая волна.

Выписаны уравнения СНЛД-моделей типа Буссинеска, выведенных с использованием (NLDD-модель) и без использования (NLDB-модель) предположения о малости деформаций дна, которые имеют согласованное с моделью Эйлера уравнение баланса энергии. Описан вывод уравнения для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления для этих моделей. Отметим, что при выводе этих моделей предполагается малость амплитуды волн относительно глубины акватории, т. е. малость параметра нелинейности $\alpha = \frac{a_0}{h_0}$, где a_0 и h_0 — характерные амплитуда волн и глубина акватории. В NLDD-модели выделяется подвижная составляющая функции дна, $h(x,t) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x,t)$, и дополнительно считается, что ε мало (порядка α).

Выведено аналитическое решение уравнений рассматриваемых СНЛД-моделей в виде уединённой волны над ровным дном. Показано, что профиль этого решения несколько круче, чем решение в виде уединённой волны для NLD-модели.

Параграф 1.2 посвящён описанию численного алгоритма для расширенной системы NLD-уравнений. Алгоритм решения ОДУ (4) для дисперсионной составляющей φ строится на основе интегро-интерполяционного метода и метода прогонки. Даны некоторые замечания о корректности метода прогонки и примеры с нарушением диагонального преобладания, когда функция батиметрии терпит разрыв, и его восстановления путём сглаживания этой функции. Гиперболическая система мелкой воды с модифицированной правой частью решается при помощи явной двухшаговой конечно-разностной схемы типа предиктор-корректор с TVD-ограничителями.

Алгоритм решения расширенной системы НЛД-уравнений следующий. Пусть на n -м слое по времени величины H_j^n и u_j^n известны. Сначала находится решение φ_j^n , при этом для вычисления всех необходимых коэффициентов используются известные значения H_j^n и u_j^n . Затем на основе разностного аналога формулы (5) вычисляется функция $\psi_{j+1/2}^n$. После этого на шаге предиктор определяются значения $H_{j+1/2}^*$ и $u_{j+1/2}^*$. Затем с использованием вычисленных величин $H_{j+1/2}^*$ и $u_{j+1/2}^*$ вновь решается задача для φ_j^* , решение которой используется для определения по формуле (5) величин $\psi_{j+1/2}^*$. На завершительном этапе корректор вычисляются H_j^{n+1} и u_j^{n+1} из уравнений в дивергентном виде, где в правых частях участвуют φ_j^* и $\psi_{j+1/2}^*$.

На аналоге предложенного алгоритма для линеаризованной системы уравнений на ровном дне выполнен анализ таких свойств численной схемы как устойчивость, численная дисперсия и диссипация. Установлено, что при определённом выборе числа Куранта численная дисперсия меньше физической на один порядок

по длинноволновому параметру $\mu = h_0/L_0$, где h_0 и L_0 — характерные глубина акватории и длина волны соответственно. Показано, что графики изменения фазы для множителя перехода предложенной конечно-разностной схемы и для операторов перехода, соответствующих линеаризованным NLD-модели и модели потенциальных течений, близки, когда глубина акватории хотя бы в четыре раза меньше длины волны.

Численное решение одномерных задач описано в параграфе 1.3. Проведены сравнения с аналитическими решениями NLD-и NLDB-уравнений в виде уединённой волны, которые продемонстрировали второй порядок аппроксимации численного алгоритма. В задаче о накате волны на вертикальную стенку проведены сравнения полученных численных решений с экспериментальными данными и расчётами других авторов, наблюдалось хорошее согласие расчётов по NLD-модели экспериментам.

Описан закон движения квазидеформируемого оползня по неровному склону под действием сил тяжести, плавучести, трения о дно и сопротивления воды. Детально исследована задача о сходе подводного оползня в водоёме с дном параболической формы. За базовые параметры в законе движения оползня были выбраны следующие значения: длина оползня $b = 200$ м, его толщина $T = 10$ м, заглубление $z_0 = -45$ м, угол трения $\theta_* = 5^\circ$. Показано (см. Рисунок 1, а), что при таких параметрах NLD-модель хорошо согласуется с моделью потенциальных течений (МПТ) — 3D-моделью в полной постановке, расчёты по которой можно считать эталонными в этом классе задач. В отличие от бездисперсионной SW-модели NLD-модель хорошо воспроизводит амплитуды и головной волны и дисперсионного «хвоста». При уменьшении длины оползня до $b = 50$ м NLD-модель может давать неточные решения, завышая значения амплитуд (Рисунок 1, б). Такой эффект вызван уменьшением длины образованных оползнем волн, моделирование которых следует проводить в рамках полных моделей гидродинамики. Подобные ограничения наблюдались при сравнении полученных численных решений NLD-модели с экспериментальными данными в задачах о движении твёрдых моделей оползня по плоскому откосу.

Установлено, что слабо нелинейная NLDB-модель хорошо согласуется с полной NLD-моделью в большом диапазоне параметров оползня, лишь при значительном увеличении его толщины завышая амплитуды волн в дисперсионном хвосте. Напротив, NLDD-модель даёт близкие к NLD-модели решения только при малых амплитудах оползня и значениях его ускорения (при увеличении угла трения θ_*), когда амплитуды образованных волн невелики и они вряд ли могут представлять серьёзную опасность объектам на берегах.

Во второй главе рассматриваются течения жидкости на плоскости (случай двух пространственных переменных, плановый случай). В параграфе 2.1 при-

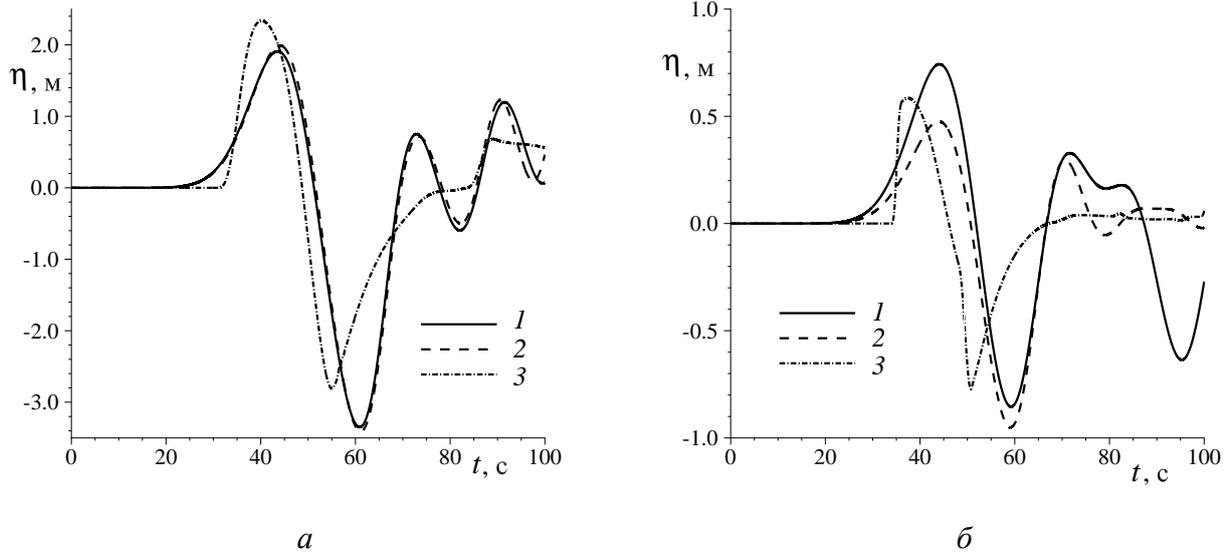


Рисунок 1 – Мареограммы на правом берегу водохранилища, полученные при длине оползня $b = 200$ м (а) и $b = 50$ м (б) в рамках NLD-модели (1), модели потенциальных течений жидкости (2) и SW-модели (3)

водятся исходные уравнения NLD-модели и способ выделения гиперболической системы

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla H = g\nabla h + \frac{\nabla\varphi - \psi\nabla h}{H}, \quad (7)$$

отличающейся от классических уравнений мелкой воды лишь модифицированной правой частью, и эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей φ проинтегрированного по глубине давления:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{(\nabla\varphi \cdot \nabla h) \nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left(\frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla h}{H^2 r} \right) \right) = F, \quad (8)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left(g\nabla\eta + \frac{R\nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{Hr} + 2(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - 2\nabla u \times \nabla v,$$

и приняты следующие обозначения:

$$R = -g\nabla\eta \cdot \nabla h + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla h) + B, \quad B = h_{tt} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla h_t), \quad r = 4 + |\nabla h|^2,$$

\mathbf{u} — осреднённая по глубине горизонтальная составляющая вектора скорости трехмерного течения, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = u_x + v_y$, $\nabla u \times \nabla v = u_x v_y - u_y v_x$. Для вычисления функции ψ используется формула

$$\psi = \frac{1}{r} \left(\frac{6\varphi}{H} + HR + \nabla\varphi \cdot \nabla h \right).$$

Установлена равномерная эллиптичность уравнения (8). Выписаны расширенные системы уравнений NLDB- и NLDD-моделей для планового случая.

На каждом шаге численной схемы поочерёдно решаются эллиптическая (8) и гиперболическая (6)–(7) подзадачи. Численный алгоритм для решения первой описан в параграфе 2.2. Алгоритм строится на равномерной прямоугольной сетке. Для решения задач с береговой линией сложной формы она аппроксимируется ломанными, звенья которой параллельны одной из осей координат. Разностные уравнения строятся с помощью интегро-интерполяционного метода. Приведён вывод соотношений как для внутренних, так и для граничных узлов. Полученная система разностных уравнений решается итерационным методом последовательной верхней релаксации.

В параграфе 2.3 представлен численный алгоритм для гиперболической системы (6)–(7), основанный на явной двухшаговой схеме типа предиктор-корректор. В алгоритме важную роль играют схемные параметры θ_k^q ($q = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$), надлежащий выбор которых гарантирует выполнение TVD-свойства при численном решении модельных скалярных уравнений. При определённых значениях этого параметра схема может переходить в противопоточную или схему Лакса-Вендроффа. Для сохранения состояния покоя жидкости при тривиальных начальных данных используется согласованная аппроксимация правых частей уравнений движения с левыми.

Результаты численного моделирования плановых задач изложены в параграфе 2.4. Проведены сравнения полученных численных решений по NLD- и SW-моделям с экспериментальными данными на задаче о сходе твёрдой модели оползня по плоскому склону. Сравнения показали хорошее соответствие решений NLD-модели эксперименту при движении оползня по мелководной части акватории и потерю адекватности модели при описании образования волн в глубоководной части. Подобные ограничения в применении NLD-модели отмечались в первой главе при решении одномерных задач и связаны с недостаточно большой длиной волн, порождённых оползнем, по отношению к глубине.

Для оценки работоспособности алгоритма в областях со сложной формой границ выполнены сравнения полученных численных решений NLD-модели с экспериментальными данными в задаче об обтекании волной конического острова. Получено хорошее качественное соответствие расчётов эксперименту, в частности, при моделировании распространения волны меньшей амплитуды максимальный заплеск наблюдался в ближней к начальному положению волны точке острова, а в случае большей амплитуды — в дальней. Отметим, что в расчётах не выполнялось моделирование наката волн на конус, а на некоторой глубине устанавливался вертикальный круговой цилиндр. Это упрощение привело к некоторым количественным различиям между расчётами и экспериментами.

Рассмотрено влияние частотной дисперсии в задаче о распространении волн в модельной акватории «корыто», где дно было равномерным в направлении Ox , а в направлении Oy описывалось кусочно-линейной функцией, аппроксимирующей распределение глубин около Курило-Камчатского желоба. В качестве источников выбирались идеализированные (гауссовы) возвышения с эффективной протяжённостью от 50 до 100 км и сейсмические источники с магнитудами $Mw = 7.8$ и $Mw = 9.0$. При идеализированных источниках дисперсия оказала значительное влияние только при меньшей протяжённости начального возмущения и большой дальности распространения волн. В случае сейсмических источников, полученных по поршневой модели Гусякова-Окады, было замечено, что влияние дисперсии существенно зависит от параметров землетрясения, которые определяют форму начального возвышения. В частности, при малых значениях заглубления гипоцентра в начальном возвышении образуется высокочастотный пик, который сильно подвержен влиянию дисперсии. В результате этого влияния даже при большей магнитуде ($Mw = 9.0$) пришедшая к берегу волна может потерять до 30% своей амплитуды. Напротив, при больших заглублениях гипоцентра относительные различия в результатах расчётов по NLD- и SW-моделям не превышают нескольких процентов.

Приведены некоторые результаты численного моделирования гипотетических подводных оползней в Чёрном море, параметры и положения которых были близки к историческому. Показано, что оползень $L1$, располагавшийся несколько выше по склону, имел большее начальное ускорение в сравнении с более заглублёнными оползнями $L2$ и $L3$ и сложную траекторию движения, заканчивающуюся

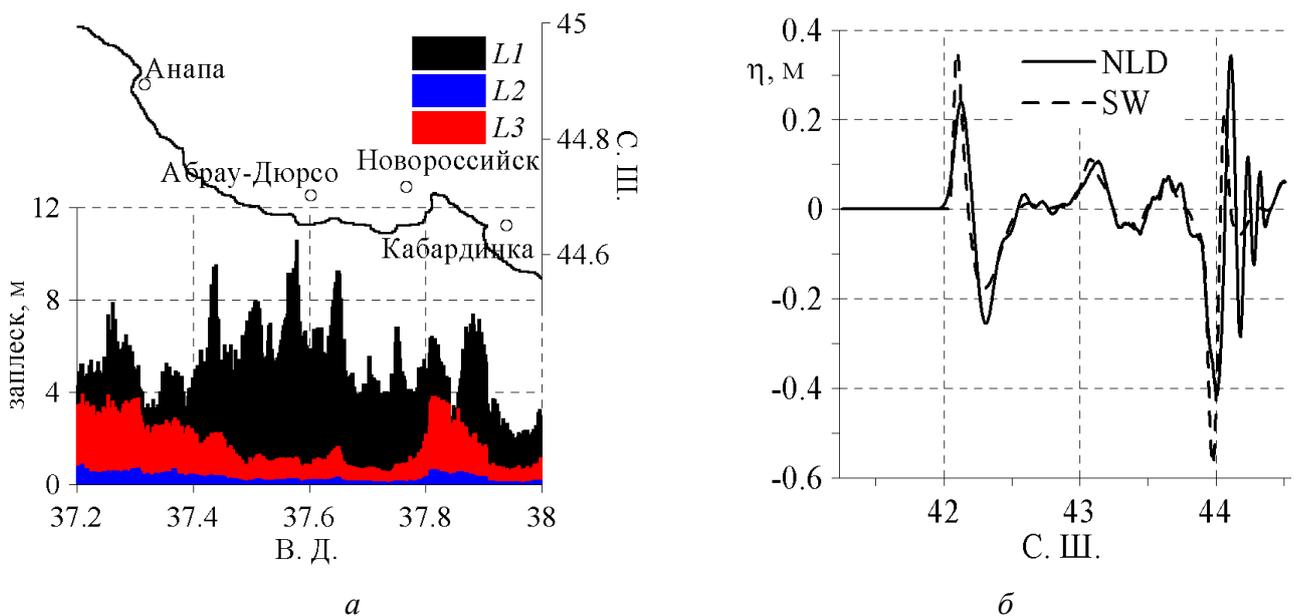


Рисунок 2 – *a* — распределение максимальных высот волн вдоль участка береговой линии; *б* — сечения свободных поверхностей, посчитанных по NLD- и SW-моделям при $t = 2000$ с

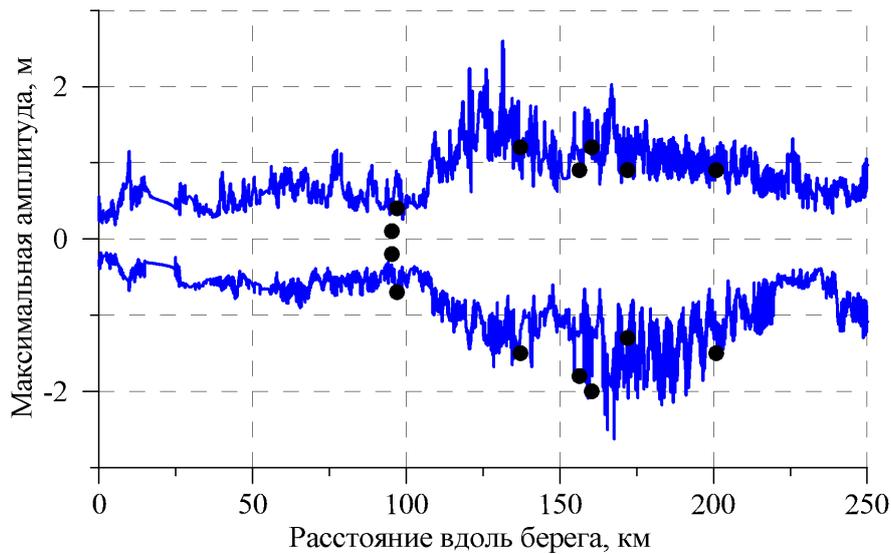


Рисунок 3 – Минимальные и максимальные колебания свободной поверхности на болгарском побережье за всё время расчёта. Синие линии — расчёт, круги — данные наблюдений

юся резкой остановкой. В результате он породил более высокие (см. Рисунок 2) волны (несмотря на то, что объём оползня $L3$ был в 4 раза больше, чем у оползней $L1$ и $L2$), которые были сильнее подвержены влиянию частотной дисперсии. Замечено, что при накате волн на берега вблизи начального положения оползня дисперсия сказывалась незначительно, а проявлялась при распространении волн по глубоководной части акватории.

Исследована гипотеза об оползневом механизме образования аномальных волн на побережье Болгарии 7-го мая 2007-го года. При численном моделировании сходов оползней с большим количеством (более 200) возможных начальных положений и различными соотношениями его размеров был найден вариант (см. Рисунок 3), который породил волны, близкие к имеющимся данным наблюдений по амплитуде и периоду.

Третья глава посвящена численному исследованию распространения длинных волн по вращающейся сфере. В параграфе 3.1 приводятся уравнения полной NLD-модели и описывается численный алгоритм для их решения. Указанные уравнения имеют вид:

$$(HR \sin \theta)_t + (Hu)_\lambda + (Hv \sin \theta)_\theta = 0,$$

$$\begin{aligned}
(HuR \sin \theta)_t + (Hu^2 + g\frac{H^2}{2})_\lambda + (Huv \sin \theta)_\theta &= gHh_\lambda - Huv \cos \theta - \\
&\quad - fvHR \sin \theta + \varphi_\lambda - \psi h_\lambda, \\
(HvR \sin \theta)_t + (Huv)_\lambda + \left[(Hv^2 + g\frac{H^2}{2}) \sin \theta \right]_\theta &= gHh_\theta \sin \theta + g\frac{H^2}{2} \cos \theta + \\
&\quad + Hu^2 \cos \theta + fuHR \sin \theta + (\varphi_\theta - \psi h_\theta) \sin \theta + \Omega^2 HR^2 \sin^2 \theta \cos \theta.
\end{aligned}$$

Здесь R — радиус сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси Oz неподвижной декартовой системы координат $Oxyz$, координатная плоскость Oxy которой совпадает с экваториальной плоскостью сферы. Для описания течения воды используется вращающаяся вместе со сферой система координат $O\lambda\theta r$, начало которой находится в центре сферы, при этом λ — долгота, отсчитываемая в направлении вращения от некоторого меридиана ($0 \leq \lambda < 2\pi$), θ — дополнение до широты ($\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$, где $\theta_0 = \text{const} > 0$ — малый угол, т. е. полюсы исключаются из рассмотрения), r — радиальная координата, отсчитываемая от центра сферы. Толщина слоя воды $H = \eta + h > 0$ предполагается малой по сравнению с R , поэтому сила притяжения $g = |\mathbf{g}|$ и плотность воды ρ принимаются постоянными во всем жидком слое, ограниченном снизу непроницаемым подвижным дном ($r = R - h(\lambda, \theta, t)$), а сверху — свободной поверхностью ($r = R + \eta(\lambda, \theta, t)$). Через u и v обозначены физические компоненты вектора скорости ($u = Rc^1 \sin \theta$, $v = Rc^2$, $c^1 = \dot{\lambda}$, $c^2 = \dot{\theta}$), $f = 2\Omega \cos \theta$ — параметр Кориолиса.

Дисперсионные добавки φ и ψ вычисляются по следующим формулам:

$$\varphi = \frac{H^3}{3}Q_1 + \frac{H^2}{2}Q_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2}Q_1 + HQ_2,$$

где $Q_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{c}) - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2$, $Q_2 = D^2h$, $\mathbf{c} = (c^1, c^2)$, $\nabla \cdot \mathbf{c} = c_\lambda^1 + \frac{1}{J}(Jc^2)_\theta$, $D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$, $\mathbf{c} \cdot \nabla = c^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} + c^2 \frac{\partial}{\partial \theta}$, $J = -R^2 \sin \theta$.

Если положить $\varphi = \psi = 0$, из NLD-модели получается бездисперсионная SW-модель мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере.

Приведён вывод равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей φ . Разностные уравнения, аппроксимирующие эллиптическую подзадачу, построены аналогично плановому случаю при помощи интегроинтерполяционного метода. Для их решения используется итерационный метод последовательной верхней релаксации. Гиперболическая система решается явной двухшаговой схемой типа предиктор-корректор.

На модельной задаче о распространении волн различной эффективной длины в акватории с постоянной глубиной исследовалось влияние сферичности Земли, центробежной силы и силы Кориолиса, а также частотной дисперсии волн.

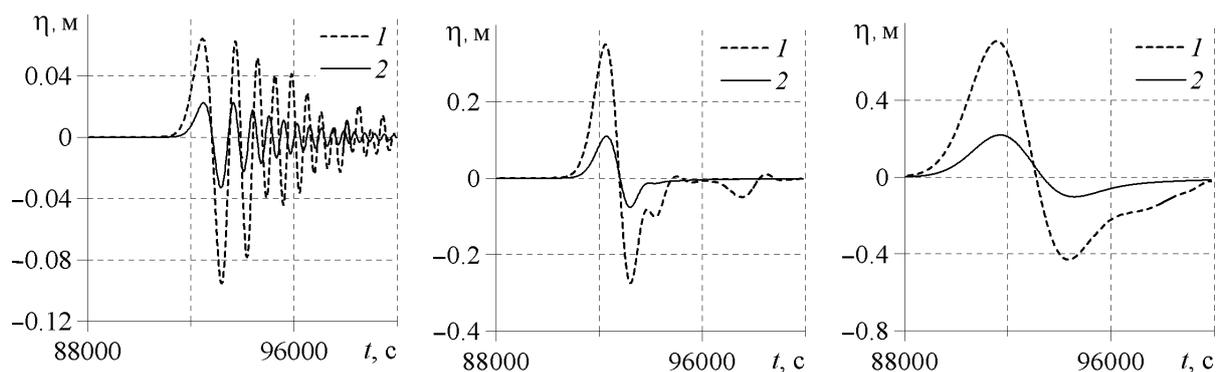


Рисунок 4 – Мареограммы, полученные в расчетах на основе сферической NLD-модели (1) и плановой (2) при различной эффективной протяженности начального возмущения

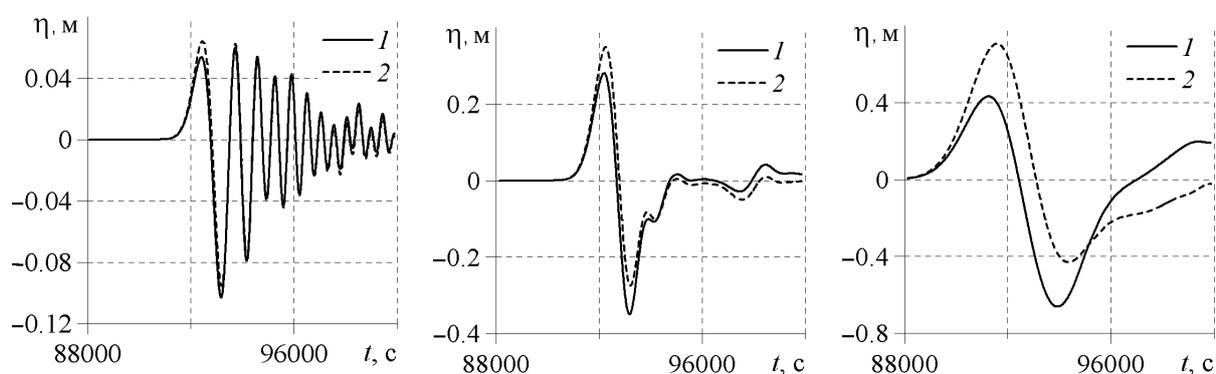


Рисунок 5 – Мареограммы, полученные в расчетах на основе сферической NLD-модели с учетом силы Кориолиса (1) и без учета (2) при различной эффективной протяженности начального возмущения

Во всех рассмотренных случаях центробежная сила не оказывала существенного влияния на процесс. Сферичность и вращение усиливали своё воздействие с ростом расстояния, пройденного волной, и эффективной протяженности источника. В масштабных задачах учёт этих эффектов может быть необходимым для адекватного описания процесса (см. Рисунки 4 и 5). Дисперсия проявлялась при менее протяжённых начальных возмущениях.

Проведены тестовые расчёты распространения «ближних» и «удалённых» от побережья РФ цунами в Тихом океане. В случае ближних источников дисперсия не оказала существенного влияния на картину максимальных заплесков на берег, и максимальные отличия между расчётами по NLD- и SW-моделям были зафиксированы на волнах, уходящих в океан. При удалённых источниках эти отличия могут достигать достаточно больших значений, при этом неровности дна могут изменять картину влияния частотной дисперсии на процесс распространения.

В **заключении** сформулированы основные результаты настоящей работы:

1. Для систем полных и слабо нелинейных дисперсионных уравнений предложен универсальный способ выделения подзадачи для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления, в результате которого получается расширенная система, состоящая из равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей и система уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью.
2. Разработаны численные алгоритмы для расширенных систем НЛД-уравнений, основанные на итерационном методе последовательной верхней релаксации для эллиптического уравнения и конечно-разностной схеме типа предиктор-корректор для гиперболической системы.
3. Разработаны программные комплексы, предназначенные для решения реалистичных задач о распространении поверхностных волн и образования их подводным оползнем с учётом нелинейности и дисперсии в одномерном, плановом и сферическом случаях.
4. При сравнении полученных численных решений полной NLD-модели с экспериментальными данными, расчётами других авторов по НЛД- и полным гидродинамическим моделям в ряде задач о распространении и образовании поверхностных волн оползнем продемонстрирована работоспособность алгоритма в широком классе задач о длинных поверхностных волнах и возможность использования его для решения реалистичных задач о цунами.
5. В задачах об образовании волн сходом подводного оползня исследованы границы применимости новых слабо нелинейных дисперсионных моделей NLDB и NLDD. Результаты расчётов по NLDB-модели и полной NLD-модели были близки при всех рассмотренных параметрах оползня, а по NLDD и NLD — только при медленном движении оползней с меньшей толщиной, когда образованные волны были малы.
6. Исследована значимость частотной дисперсии в ряде идеализированных и реалистичных задач о цунами. Наибольшее влияние дисперсии наблюдалось в задачах об образовании волн подводными оползнями, при малой протяжённости сейсмического источника или при наличии высокочастотных компонент в его форме, а также при больших дистанциях распространения волн. Замечена важная роль неровностей дна для картины влияния дисперсии.
7. В задачах о распространении по вращающейся сфере волн от источников разной эффективной протяжённости исследована значимость сферичности и вращения Земли. Показано, что влияние этих эффектов увеличивается с

протяжённостью источника и дальностью распространения волн, и их учёт может быть необходимым для адекватного описания процесса.

Основные публикации по теме работы.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

1. Гусев, О. И. Модуль расчета поверхностных волн NLDSW / О. И. Гусев. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015616422 от 09.06.2015 г.
2. Гусев, О. И. Модуль расчета поверхностных волн NLDSW_sphere / О. И. Гусев. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015616421 от 09.06.2015 г.

Публикации в периодических изданиях, рекомендованных ВАК:

3. Гусев, О. И. Об алгоритме расчёта поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне / О. И. Гусев // Вычисл. технологии. – 2012. – Т. 17, № 5. – С. 46–64.
4. Гусев, О. И. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище / О. И. Гусев, Н. Ю. Шокина, В. А. Кутергин, Г. С. Хакимзянов // Вычисл. технологии. – 2013. – Т. 18, № 5. – С. 74–90.
5. Шокин, Ю. И. Численное исследование дисперсионных волн, возникающих при движении подводного оползня / Ю. И. Шокин, С. А. Бейзель, О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, Н. Ю. Шокина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 121–133.
6. Гусев, О. И. Алгоритм расчета поверхностных волн над подвижным дном в рамках плановой нелинейно-дисперсионной модели / О. И. Гусев // Вычисл. технологии. – 2014. – Т. 9, № 6. – С. 19–40.
7. Khakimzyanov, G. S. Simulation of tsunami waves generated by submarine landslides in the Black Sea / G. S. Khakimzyanov, O. I. Gusev, S. A. Beisel, L. B. Chubarov, N. Yu. Shokina // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2015. – Vol. 30, No. 4. – P. 227–237.
8. Гусев, О. И. Численное моделирование распространения длинных поверхностных волн по вращающейся сфере в рамках полной нелинейно-дисперсионной модели / О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов // Вычисл. технологии. – 2015. – Т. 20, № 3. – С. 3–31.

9. Федотова, З. И. История развития и анализ численных методов решения нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики / З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов, О. И. Гусев // Вычисл. технологии. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 120–156.
10. Gusev, O. I. Tsunami dispersion sensitivity to seismic source parameters / O. I. Gusev, S. A. Beisel // Science of Tsunami Hazards. – 2016. – Vol. 35, No. 2. – P. 84–105.

Публикации в трудах международных и всероссийских конференций:

11. Гусев, О. И. Моделирование дисперсионных волн, генерируемых подводным оползнем в ограниченном водохранилище / О. И. Гусев, В. А. Кутергин, Г. С. Хакимзянов, Н. Ю. Шокина // Сборник трудов конференции «Математические и информационные технологии, МИТ-2013». – Врнячка Баня, Сербия и Будва, Черногория, 2013. – С. 275–284.
12. Бейзель, С. А. Оценка важности учета дисперсионных эффектов при численном моделировании распространения волн цунами в модельных и реальных акваториях / С. А. Бейзель, О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров // Сборник материалов Всероссийской научной конференции с международным участием «Геодинамические процессы и природные катастрофы. Опыт Нефтегорска». – Южно-Сахалинск, 2015. – Т. 1. – С. 251–255.
13. Гусев, О. И. Численное моделирование дисперсионных поверхностных волн на вращающейся сфере / О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов // Труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики — 2015», посвященной 90-летию со дня рождения академика Гурья Ивановича Марчука. – Новосибирск, 2015. – С. 210–216.
14. Fedotova, Z. I. New algorithm for numerical simulation of surface waves within the framework of the full nonlinear dispersive model / Z. I. Fedotova, O. I. Gusev, G. S. Khakimzyanov // Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, «ECCOMAS-2016». – Crete Island, Greece, 2016. – Vol. 1. – P. 1093–1103.