

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Гусев Олег Игоревич

**ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН  
В РАМКАХ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ МОДЕЛЕЙ**

Специальность 05.13.18 —

«математическое моделирование численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Хакимянов Г.С.

Новосибирск — 2016

# Оглавление

Введение . . . . .	5
<b>1 ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В РАМКАХ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1 Одномерные нелинейно-дисперсионные уравнения на нестационарном дне . . . . .	20
1.1.1 Одномерные нелинейно-дисперсионные уравнения . . . . .	21
1.1.2 Выделение подзадачи для $\varphi$ в системе НЛД-уравнений . . . . .	22
1.1.3 Точные решения полных НЛД-уравнений . . . . .	23
1.1.4 Слабо нелинейные дисперсионные уравнения мелкой воды . . . . .	28
1.1.5 СНЛД-уравнения мелкой воды в случае малых деформаций дна . . . . .	29
1.1.6 Точное решение СНЛД-уравнений . . . . .	31
1.1.7 О коэффициентах уравнения (1.15) . . . . .	34
1.1.8 Краевые условия для одномерных задач . . . . .	35
1.2 Конечно-разностная схема и алгоритм решения разностной задачи . . . . .	36
1.2.1 Разностные уравнения для функции $\varphi$ во внутренних узлах . . . . .	37
1.2.2 Аппроксимация краевых условий непротекания . . . . .	39
1.2.3 О корректности метода прогонки . . . . .	40
1.2.4 Дивергентная и недивергентная форма записи НЛД-уравнений . . . . .	44
1.2.5 Схема предиктор–корректор . . . . .	45
1.2.6 Алгоритм решения полной задачи . . . . .	48
1.2.7 Свойства конечно-разностной схемы для линеаризованной системы . . . . .	49
1.3 Численное моделирование одномерных задач . . . . .	56
1.3.1 Особенности программной реализации для расчёта одномерных задач . . . . .	56
1.3.2 Распространение уединенной волны . . . . .	57
1.3.3 Накат уединенной волны на вертикальную стенку . . . . .	59
1.3.4 Закон движения одномерного оползня . . . . .	60
1.3.5 Оползень в модельном водоеме с дном параболической формы . . . . .	64
1.3.6 Сравнение с экспериментальными данными для оползней на плоском откосе . . . . .	68
1.3.7 Сравнение с результатами расчётов других авторов по НЛД-моделям . . . . .	70
1.4 Заключение по Главе 1 . . . . .	72

<b>2</b>	<b>ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В РАМКАХ ПЛАНОВЫХ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .</b>	<b>75</b>
2.1	Плановые нелинейно-дисперсионные уравнения на нестационарном дне . . . . .	76
2.1.1	Плановые уравнения NLD-модели . . . . .	76
2.1.2	Выделение эллиптической подзадачи в плановых НЛД-уравнениях . . . . .	78
2.1.3	Равномерная эллиптичность уравнения (2.15) . . . . .	79
2.1.4	Плановые СНЛД-уравнения мелкой воды . . . . .	80
2.2	Разностные уравнения для эллиптической подзадачи . . . . .	81
2.2.1	Описание вычислительной области . . . . .	81
2.2.2	Краевые условия . . . . .	82
2.2.3	Аппроксимация уравнения для $\varphi$ во внутренних узлах . . . . .	83
2.2.4	Краевые условия для $\varphi$ на непроницаемых границах . . . . .	87
2.2.5	Неотражающие краевые условия . . . . .	89
2.3	Схема предиктор-корректор для гиперболической части . . . . .	89
2.3.1	Уравнения для векторов потоков . . . . .	90
2.3.2	Шаг предиктор . . . . .	91
2.3.3	Шаг корректор . . . . .	94
2.4	Численное моделирование плановых задач . . . . .	94
2.4.1	Особенности программной реализации . . . . .	95
2.4.2	Распространение волн над ровным дном . . . . .	96
2.4.3	Закон движения двумерного оползня . . . . .	97
2.4.4	Движение твердого оползня по прямолинейному склону . . . . .	100
2.4.5	Сход подводного оползня в модельном участке реки . . . . .	102
2.4.6	Взаимодействие волны с цилиндрическим островом . . . . .	104
2.4.7	Распространение волн в модельной акватории “корыто” . . . . .	106
2.4.8	Гипотетические оползневые цунами в Черном море . . . . .	113
2.4.9	Цунами 2007-го года на болгарском побережье . . . . .	117
2.5	Заключение по Главе 2 . . . . .	122
<b>3</b>	<b>РАСЧЕТ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЕ В РАМКАХ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .</b>	<b>125</b>
3.1	Численный алгоритм для нелинейно-дисперсионной модели на вращающейся сфере . . . . .	126
3.1.1	Уравнения моделей мелкой воды на вращающейся сфере . . . . .	126
3.1.2	Начальные и граничные условия . . . . .	128
3.1.3	Выделение двух подзадач в уравнениях на вращающейся сфере . . . . .	129
3.1.4	Некоторые особенности уравнения (3.36) для $\varphi$ . . . . .	135
3.1.5	Численный алгоритм для расширенной системы на вращающейся сфере . . . . .	137
3.2	Численное моделирование распространения волн по вращающейся сфере . . . . .	140
3.2.1	Описание модельной задачи в акватории с постоянной глубиной . . . . .	141

3.2.2	Влияние центробежной силы . . . . .	142
3.2.3	Влияние сферичности . . . . .	143
3.2.4	Влияние силы Кориолиса . . . . .	144
3.2.5	Дисперсионные эффекты . . . . .	146
3.2.6	Некоторые расчёты цунами в Тихом океане . . . . .	150
3.3	Заключение по Главе 3 . . . . .	154
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>156</b>
	<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . .</b>	<b>159</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>160</b>
	<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>176</b>
	<b>Список таблиц . . . . .</b>	<b>180</b>

# Введение

Диссертационная работа посвящена разработке численных алгоритмов, основанных на нелинейно-дисперсионных моделях, для решения задач о длинных поперечных волнах.

**Актуальность темы исследований.** В природных и гидротехнических бассейнах часто встречаются движения жидкости, в которых горизонтальные компоненты вектора скорости преобладают над вертикальной составляющей. Это могут быть как крупномасштабные движения на поверхности океана, так и длинноволновые течения в прибрежных морях, искусственных водохранилищах, мелких озерах и т.д. Случается, что такие движения жидкости приобретают характер стихийных катастроф и приносят много бедствий на освоенные людьми побережья акваторий (наводнения, цунами). Повторяемость и закономерность такого рода событий поставили перед человечеством задачу их изучения. В настоящее время сформировался научный подход, имеющий конечной целью минимизацию ущерба при возможных неизбежных катастрофах, что необходимо заложить в проекты по освоению соответствующих прилегающих к водным бассейнам территорий. Наиболее плодотворные методы исследования основаны на обработке натурных данных, лабораторных (экспериментальных) исследованиях и математическом моделировании.

О роли современного математического моделирования (ММ) физических явлений, характеризующихся зависимостью от большого количества разноплановых параметров, сказано немало, и некоторые его преимущества по сравнению с другими научными подходами на сегодняшний день неоспоримы. Успех ММ обеспечен методологией вычислительного эксперимента (ВЭ), технологическая цепочка которого связывает изучаемый физический процесс и непосредственный расчет характеристик течения, а его циклическая форма позволяет уточнять и совершенствовать описание природного явления, используя весь предыдущий опыт и накопленное знание.

Одним из наиболее важных звеньев ВЭ является разработка математической модели, адекватной исследуемому физическому процессу. Расчёты по 3D-моделям, таким как уравнения Навье-Стокса, Эйлера, модель потенциальных течений (МПТ) [62, 110, 128], требуют больших вычислительных ресурсов, поэтому они, как правило, применяются для моделирования “одномерных” течений, равномерных в одном из горизонтальных направлений [31, 59, 60, 86, 89, 111, 113], либо для моделирования начальной стадии образования волн [108, 109, 138] с последующей передачей посчитанных величин в качестве начальных данных для упрощённых моделей. Применение таких моделей для расчётов возможных событий затруднительно, так как зачастую требуется варьировать в некоторых пределах параметры задачи, что порождает большое количество вычислений.

Более того, вычислительные области и время распространения волн могут быть велики (например, при трансокеанических цунами).

В случае моделирования поверхностных волн, распространяющихся на “мелкой воде”, когда характерная глубина акватории много меньше длин распространяющихся волн, расчеты можно сделать более эффективными, если перейти к приближенным моделям. В методологическом плане здесь работает принцип максимальной простоты, известный как “бритва Оккама”: “напрасно пытаться сделать посредством большего то, что может быть сделано посредством меньшего”. Расчёты по приближенным [70] моделям выполняются за значительно меньшее время, причем общая картина возникающих волновых режимов может удовлетворительно описываться даже с помощью простейших их вариантов.

Во многих практических задачах применяются классические (бездисперсионные) нелинейные или линейные модели мелкой воды (SW-модели), например, реализованные в комплексах TUNAMI [36, 124], MOST [162, 166] и MGC [158]. Выбор бездисперсионных уравнений обоснован для большого класса задач, однако, при наличии высокочастотных компонент в профиле волны или при больших расстояниях распространения существенную роль начинает играть частотная дисперсия [146].

Наиболее распространенным способом получения длинноволновых приближений для уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости является разложение основных гидродинамических параметров по степеням вертикальной координаты или длинноволнового параметра, определяемого отношением средней глубины водной акватории к характерной длине волны. Эти методы являются весьма формальными. Построенные с их помощью системы нелинейно-дисперсионных (НЛД-) уравнений получили обоснование только в частных случаях (см., например, теоремы о сходимости, корректности и устойчивости [3, 45, 80, 133]). Тем не менее широкий класс НЛД-моделей активно применяется при решении прикладных задач о распространении и накате длинных поверхностных волн.

Разнообразие НЛД-моделей обуславливается по большей части различной степенью учёта нелинейно-дисперсионных слагаемых, а также выбором искоемых функций. Модели, при выводе которых предполагается малость амплитуды волн относительно глубины, будем называть слабо нелинейными дисперсионными (СНЛД-) моделями (а также слабодисперсионными, моделями типа Буссинеска). В этих моделях считается, что параметр нелинейности,  $\alpha = \frac{a_0}{h_0}$ , имеет тот же порядок малости, что и параметр дисперсии  $\mu$  в квадрате,

$$\alpha = O(\mu^2).$$

Здесь  $\mu = \frac{h_0}{L_0}$ , а  $a_0$ ,  $L_0$ ,  $h_0$  — характерные амплитуда, длина волны и глубина водоёма соответственно. Используя это предположение, в уравнениях моделей отбрасываются все или часть слагаемых порядка  $O(\alpha\mu^2)$ . Модели, выведенные без этого предположения, будем называть полными НЛД-моделями (полностью нелинейными) [1, 2, 34, 107, 142, 172]. В них учитываются все слагаемые порядка  $O(\mu^2)$ . В качестве искоемых функций, как правило, выбирается отклонение свободной

поверхности от невозмущённого состояния жидкости и горизонтальная скорость, каким-либо образом связанная с вектором скорости в трёхмерной модели.

Один из примечательных подходов заключается в выводе уравнений для осреднённого по глубине вектора скорости трёхмерного течения, так как уравнение неразрывности в этом случае имеет простой вид и выражает собой закон сохранения массы несжимаемой жидкости. Этот подход был использован при выводе одномерной СНЛД-модели Перегринна [150], а позже модель была обобщена [151] для планового случая (искомые функции зависят от двух пространственных переменных) и для подвижного дна [30]. Полные плановые НЛД-уравнения Грина-Нагди (Серре-Грина-Нагди) для осреднённой по глубине скорости были получены [107] без использования предположения о потенциальности течения и разложения функций в ряд по параметру дисперсии. Несколько позже была получена [34] полная НЛД-модель Железняк-Пелиновского с использованием предположения о потенциальности. Несмотря на различия исходных ограничений при выводе этих моделей, показано [56, 99], что полученные системы уравнений эквивалентны. В статье [54] даётся вывод этих уравнений при менее ограничительных предположениях и выполнен анализ условий, при которых получается эквивалентная система.

С начала 1990-х годов стали популярны модели с так называемым улучшенным дисперсионным соотношением. Одним из способов вывода таких моделей является добавление в исходную НЛД-систему (например, Перегринна) слагаемых определённого порядка малости в длинноволновом приближении с некоторым коэффициентом, надлежащий выбор которого приближает дисперсионное соотношение линеаризованной системы к соотношению в линейной модели трёхмерного течения. Впервые такой подход был использован со СНЛД-моделью Перегринна в исследованиях [144, 145], а позже [82] и с моделью Грина-Нагди. Закон изменения энергии в модифицированных моделях выполняется только вплоть до некоторого порядка по параметру дисперсии.

Другой способ получения моделей с улучшенным дисперсионным соотношением — специальный выбор искомого вектора скорости. Впервые этот принцип предложен в работе Нвогу [148], его суть заключается в том, что искомый вектор горизонтальной скорости есть вектор скорости трёхмерного течения на некоторой глубине  $z_\alpha$ . Нвогу в своей работе вывел СНЛД-модель, а вывод её полностью нелинейного аналога был опубликован [172] спустя два года (модель Вея-Кирби). Распространение этой модели на случай подвижного дна было выполнено в работе [141] (модель Лайнетта-Лью). Последние две модели были реализованы в программных комплексах FUNWAVE [155, 156] и COULWAVE [141, 142] соответственно и обрели широкую популярность у исследователей цунами [90, 108, 109, 112, 123, 125, 163, 170].

Несмотря на улучшенное в линейном приближении дисперсионное соотношение полученные модели имеют ряд недостатков. Уравнение изменения энергии этих моделей не согласовано с исходной трёхмерной моделью. Эта согласованность означает, что, если в уравнении энергии трёхмерной модели использовать те же предположения, что и при выводе приближенной модели, полученное уравнение должно совпадать с уравнением энергии приближенной модели. Заметим, что полная НЛД-модель Грина-Нагди (Железняк-Пелиновского) обладает этим свойством, в то время как СНЛД-модель Перегринна — нет.

В статье [139] рассматривался вопрос об устойчивости некоторых НЛД-моделей, в том числе модели Перегринна и Нвогу, в задачах с неровным дном, и сделан вывод, что уравнения Перегринна (классические уравнения типа Буссинеска с осреднённой по глубине скоростью) “кажутся совершенно устойчивыми”, в то время как во всех остальных рассмотренных моделях проявлялись неустойчивые моды. Соответственно, модели, полученные на основе подхода Нвогу, тоже могут быть неустойчивы по начальным данным на неровном дне. Примером такого ограничения может служить работа [137], в которой при помощи комплекса COULWAVE проводилось моделирование распространения волн, образованных гипотетическим сходом оползня во фьорде. Были выполнены сравнения с экспериментальными данными [134], полученными в модели этого фьорда с масштабом 1:500. Из-за неустойчивостей в численном методе авторы не смогли использовать достаточно подробные сетки, что, в частности, привело к неудовлетворительному соответствию результатов расчётов эксперименту. В программном комплексе FUNWAVE версии 1.0 во избежание появления высокочастотных быстрорастущих волн в одномерном случае на каждом шаге по времени использовался численный алгоритм фильтрации всех искомым функций (сглаживания) по 9-ти соседним узлам сетки. В двумерном случае, чтобы не применять аналогичную фильтрацию по 81-ому узлу, использовалась одномерная фильтрация сначала в одном направлении, затем в другом.

Отметим, что модели с улучшенным дисперсионным соотношением адекватней описывают умеренно длинные волны в линейном случае [82, 144, 148], но в реальных задачах могут не давать ощутимых преимуществ по сравнению с классическими моделями (с осреднённой скоростью) [106, 137, 138]. Более того, в задачах с подвижным дном они могут давать даже худшие результаты [69, 72, 157]. По описанным выше причинам в настоящей работе модели с улучшенным дисперсионным соотношением не рассматриваются, а численные алгоритмы строятся для моделей с осреднённой по глубине скоростью.

После катастрофического цунами в Индийском океане в 2004-ом году были опубликованы работы [90, 105, 147], в которых отмечалась важность для адекватного моделирования таких масштабных событий учёта эффектов частотной дисперсии, сферичности и вращения Земли. Для моделирования оползневых процессов необходимо также учитывать подвижность дна. Эти выводы послужили стимулом для разработки НЛД-моделей на вращающейся сфере с учётом подвижности дна.

Откликом на новые запросы появился ряд работ с 2010-го года [57, 97, 100], в которых получены НЛД-уравнения мелкой воды с учетом подвижного дна на вращающейся притягивающей сфере. При выводе этих моделей не используется предположение о потенциальности течения. Построены новые уравнения типа Буссинеска для слабо нелинейных волн над подвижным дном. Особенностью всех полученных НЛД-моделей является баланс полной энергии. Важным обстоятельством является согласованность уравнений баланса энергии исходной и приближенных моделей по порядку используемой длинноволновой аппроксимации. Установлена связь между уравнениями НЛД-моделей на сфере и аналогичными уравнениями плановых НЛД-моделей. Важно, что новые модели типа Буссинеска выгодно отличаются от известных в литературе тем, что обладают



адекватными физике законами изменения импульса и энергии, а также инвариантны относительно преобразования Галилея (в плановом случае).

Разработанный подход осуществляет иерархическую преемственность в классе моделей мелкой воды и соответствующих численных алгоритмов в зависимости от доминирующих масштабов и геометрии моделируемого волнового процесса, что находится в согласии с принцип соответствия Бора: математическая модель, учитывающая новый эффект, при уменьшении этого эффекта должна переходить в ранее известную модель.

Одним из главных достоинств построенных НЛД-моделей является лаконичная форма записи как определяющих уравнений, так и вытекающих из них уравнений баланса, которые в случае неподвижного дна переходят в консервативные законы сохранения. За лаконичностью кроется и более серьезное преимущество, состоящее в том, что полученный внешний вид НЛД-моделей имеет аналогию с уравнениями Эйлера для сжимаемого газа (как и в классической теории мелкой воды), что позволяет применять для проведения расчетов богатый арсенал существующих вычислительных алгоритмов. Несмотря на это, численная реализация этих моделей была выполнена почти через пять лет в рамках настоящей работы [27].

До вывода [97] полной НЛД-модели на вращающейся сфере в некоторых работах использовались СНЛД-модели в сферических координатах с учётом силы Кориолиса. Разработана [91] модификация программного комплекса TUNAMI под названием TUNAMI-N2-NUS, в которой учитываются такие эффекты как трение о дно, приливы, сферичность, сила Кориолиса и дисперсия. Использовались СНЛД-уравнения типа Перегринна на сфере с учётом силы Кориолиса, при этом, как и в исследовании [122], выделялось эллиптическое уравнение для функции корректора давления. Отмечается, что в используемом конечно-разностном алгоритме для устойчивости необходимо существенное ограничение на шаг сетки — он должен быть как минимум в полтора раза больше глубины. Влияние учёта упомянутых выше эффектов исследовалось на задаче о цунами в Индийском океане декабря 2004-го года. Вычислительная область при этом включала в себя Бенгальский залив, но имела протяжённость не более  $40^\circ$  в каждом из направлений. Показано, что учёт сферичности изменяет максимальную амплитуду вплоть до 30%, а сила Кориолиса до 15%. Приливы и донное трение могут также повлиять на картину распространения волн по мелководью. Заметим, что для расчётов цунами в Тихом океане вычислительная область может быть в 15 раз больше по площади, что увеличивает важность учёта таких эффектов как дисперсия волн, сферичность и вращение Земли.

В работе [138] для моделирования распространения волн, образованных гипотетическим сходом оползня у острова Ла Пальма, использовалась СНЛД-модель [145] в географических координатах с учётом силы Кориолиса. Конечно-разностный алгоритм строился на разнесённой сетке по пространству и времени, при этом для решения уравнения движения использовался итерационный метод. Этот подход реализован в программном комплексе GloBouss. Отмечается, что одним из достоинств метода является отсутствие необходимости сглаживания искомым функций. Программный комплекс GloBouss использовался в ряде работ по изучению распространения волн цунами и роли частотной дисперсии в этом процессе [106, 137, 138, 140]. Главным ограничением в при-

менении этой модели является предположение о малости амплитуды, что не позволяет адекватно моделировать выход воды на мелководье. Также в модели не заложена возможность движения дна, что не позволяет моделировать образование волн оползнями. Тем не менее, расчёты таких цунами проводились [138] с использованием других комплексов, по которым рассчитывался процесс образования волн до какого-то момента, затем полученные результаты служили начальными данными для GloBouss. Отметим, что, в отличие от FUNWAVE, комплекс GloBouss не является открытым программным обеспечением.

После появления первой полной НЛД-модели на вращающейся сфере [97] в работе [131] в 2013-ом году была выведена полная НЛД-модель в сферических координатах с учётом силы Кориолиса с улучшенным дисперсионным соотношением, в качестве искомой скорости которой была выбрана скорость трёхмерного течения на некоторой глубине (подход Нвогу). Произведено упрощение модели на случай слабой нелинейности (приближение Буссинеска), для которой и строился численный алгоритм. Для решения система записывалась в дивергентной форме, после чего применялись схемы MUSCL-TVD и Рунге-Кутта четвертого и третьего порядка аппроксимации соответственно. Исследовано влияние дисперсии волн и силы Кориолиса на распространение начального возмущения над ровным дном. Показано, что дисперсия значительно влияла на картину течения, особенно при более компактных начальных возмущениях или при больших временах распространения, в то время как учёт силы Кориолиса не привёл к большим изменениям волновых профилей в рассмотренных задачах. Проведено моделирование события Тохоку 2011-го года на двухминутной сетке, при этом наблюдалось неплохое соответствие с измеренными данными за исключением коротких волн, зафиксированных мареографами DART, особенно вблизи источника. Таким образом расчёты не опровергают гипотезу [108] о том, что в цунами свой вклад мог внести сход подводного оползня. Частотная дисперсия как уменьшала, так и увеличивала максимальные зафиксированные волны вплоть до 60% в зависимости от точки фиксирования. Сила Кориолиса оказалась значительно слабее, изменяя максимальную амплитуду лишь до 5%, что идёт несколько в разрез с выводами из работы [91]. Опубликованные работы с расчётами в рамках полной НЛД-модели, выведенной в этой статье, автору не известны.

Натурные и экспериментальные данные, помимо самостоятельного содержания важной информации о процессе, могут использоваться для валидации математических моделей. Сравнения численных решений с натурными данными проводятся в большинстве работ, описываемых исторические события (см., например, [91, 106, 114, 122]). В некоторых работах исследуются оползневые цунами [74, 119, 125, 152, 168] или при анализе натурных данных делается вывод об участии оползня в событии [43, 108, 120, 152, 160, 163]. Сложности моделирования исторических цунами заключаются в восстановлении сейсмического источника [109, 112, 121, 162] и необходимости использования подробных вычислительных сеток. В случае оползневых цунами задача, как правило, стоит в определении гипотетического положения оползня, его размеров и параметров в законе движения для максимального соответствия натурным данным.

Напротив, в лабораторных исследованиях, фиксируются основные параметры течения в ключевых точках, что позволяет воспроизвести его с достаточной точностью в вычислительном экс-

перименте. Поэтому в настоящей работе акцент сделан именно на сравнения с экспериментальными данными. На текущий момент проведено достаточно много экспериментальных исследований, посвящённых различным аспектам образования и распространения поверхностных волн. В частности, рассматривались задачи о взаимодействии уединённой волны с вертикальным препятствием [33, 35, 42], накате волны на плоский склон [123, 143], взаимодействии волны с подводным препятствием [154] или коническим островом [83] и образовании волн оползнем. Оползни в лабораторных исследованиях представляются, как правило, либо твёрдым телом, движущимся по плоскому склону [31, 86, 95, 113, 136, 171], либо грудой дробинки [169].

При численном моделировании образования волн оползнями последние представляются твёрдым телом [31, 86, 113, 136, 149, 171], жидкостью, отличающейся от воды плотностью и другими параметрами [77, 104, 126, 153, 169, 171], или совокупностью смежных блоков [152, 164], которые могут менять свою длину и ширину во время движения и взаимодействовать, двигаясь под действием силы гравитации, трения и сопротивления среды. В работах [65, 79, 129] был выведен закон движения одномерного квазидеформируемого оползня по криволинейному склону под действием сил тяжести, плавучести, трения о дно и сопротивления воды. Оползень представлял собой квазидеформируемое тело, которое меняет свою форму в зависимости от неровностей дна, а на плоских склонах ведёт себя как твёрдое тело. Распространение этого закона движения на двумерный случай выполнено в [5, 78]. В этих работах проведено моделирование сходов подводных оползней в различных акваториях и с разными параметрами в рамках SW-модели, показана важность учёта криволинейности склона и исследована зависимость высоты образованных волн от параметров оползня и его закона движения. Этот закон движения используется для исследования оползневых цунами в настоящей работе.

**Целью** настоящей работы является разработка эффективных численных алгоритмов и их программная реализация для расчёта образования и распространения поверхностных волн в рамках моделей, учитывающих нелинейность и частотную дисперсию волн, подвижность дна, сферичность и вращение Земли.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. разработать универсальный численный алгоритм решения систем полных и слабо нелинейных дисперсионных уравнений на подвижном дне в одномерном (когда искомые функции зависят от одной пространственной координаты) и двумерном (плановом) случаях. Провести теоретическое исследование свойств алгоритма;
2. разработать численный алгоритм решения систем НЛД-уравнений на вращающейся сфере;
3. выполнить программную реализацию разработанных алгоритмов, позволяющую проводить расчёты задач о распространении поверхностных волн и образовании их подводным оползнем в реальных акваториях;

4. на тестовых задачах провести верификацию предложенных алгоритмов и программных реализаций путём сравнения полученных численных решений с аналитическими, экспериментальными данными и расчётами других авторов;
5. исследовать границы применимости моделей и важность учёта таких эффектов как частотная дисперсия волн, сферичность и вращение Земли;
6. выполнить моделирование некоторых исторических и потенциально возможных цунами.

**На защиту выносятся** следующие результаты, соответствующие трём пунктам (3,4,5) паспорта специальности 05.13.18 — “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ” по физико-математическим наукам:

*Пункт 3: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.*

1. Численные алгоритмы решения полных и слабо нелинейных дисперсионных уравнений, основанные на выделении равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления и системы уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью. Теоретическое исследование свойств алгоритма, таких как устойчивость, численная дисперсия и диссипация.

*Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.*

2. Программные комплексы, предназначенные для проведения вычислительных экспериментов по исследованию процессов образования и распространения поверхностных волн в реальных акваториях.

*Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.*

3. Численные исследования процессов образования и распространения длинных поверхностных волн в идеализированных акваториях. Результаты сравнительного анализа расчетов на основе различных моделей мелкой воды, исследование границ применимости этих моделей.
4. Исследование влияния эффектов, связанных с учётом дисперсии волн, вращения Земли и ее сферичности в зависимости от формы начального возмущения свободной поверхности и дальности распространения волн.
5. Результаты численного моделирования образования волн гипотетическими подводными оползнями в Чёрном море. Исследование влияния начального положения и размеров оползня на картину течения и проявление дисперсионных эффектов при распространении этих волн.

**Научная новизна:**

1. Предложен универсальный для систем полных и слабо нелинейных дисперсионных уравнений способ выделения подзадачи для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления, в результате которого получается расширенная система, состоящая из равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей и системы уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью.
2. Разработаны численные алгоритмы для расширенных систем НЛД-уравнений на подвижном дне, основанные на итерационном методе последовательной верхней релаксации для эллиптического уравнения и конечно-разностной схеме типа предиктор-корректор для гиперболической системы.
3. Разработаны программные комплексы для расчётов в реальных акваториях задач о распространении и образовании волн подводными оползнями в рамках полных и слабо нелинейных дисперсионных моделей в одномерном, двумерном и сферическом случаях.
4. На основе численных экспериментов исследованы границы применимости новых слабо нелинейных дисперсионных моделей, имеющих уравнение баланса энергии.
5. Впервые получены численные решения полной НЛД-модели на вращающейся сфере. Исследована важность учёта сферичности, вращения Земли и частотной дисперсии в задачах о распространении поверхностных волн, образованных возмущениями свободной поверхности различной формы.

**Практическая значимость.** Разработанные численные алгоритмы и их программные реализации позволяют проводить расчёты сценариев распространения и образования цунами подводными оползнями, в которых значительное влияние могут оказывать нелинейность и частотная дисперсия волн, сферичность и вращение Земли. Результаты расчётов могут служить для оценки характеристик волн в исторических или потенциально возможных событиях, а также для составления карт цунамирайонирования. Сопоставления результатов, полученных по НЛД-модели и бездисперсионной модели мелкой воды, могут служить основанием для применения последней в случаях, когда различия между ними малы.

**Метод исследования.** Для решения задач гидродинамики длинных волн используются методы математического моделирования, метод конечных разностей, интегро-интерполяционный метод, явные численные схемы решения гиперболических уравнений и итерационные методы для решения эллиптических уравнений.

**Достоверность** изложенных в работе результатов обеспечивается строгостью вывода используемых нелинейно-дисперсионных моделей и выполнением для них законов сохранения, строгим теоретическим обоснованием свойств предложенных численных алгоритмов, детальными сравнениями полученных численных решений с аналитическими, известными экспериментальными данными и расчётами других авторов по полным и приближенным гидродинамическим моделям со свободной границей.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на 18-ти мероприятиях:

- Международные научные студенческие конференции “Студент и научно-технический прогресс” (Новосибирск, 2009-2014);
- Всероссийские конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2012; Томск, 2013; Тюмень, 2014; Красноярск, 2015);
- Международная конференция “Математические и информационные технологии, МИТ-2013” (Сербия, Врнячка Баня и Черногория, Будва, 2013);
- Расширенное заседание теоретического семинара “Нелинейные волны”, посвященного памяти чл.-корр. РАН В. М. Тешукова (Новосибирск, 2014);
- Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения” (Бийск, 2014);
- Международные конференции “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики” (Новосибирск, 2014, 2015);
- Всероссийский семинар “Аналитические и численные методы длинноволновой гидродинамики” (Новосибирск, 2015);
- Всероссийская научная конференция с международным участием “Геодинамические процессы и природные катастрофы. Опыт Нефтегорска” (Южно-Сахалинск, 2015).

**Личный вклад.** Автор принимал активное участие в формулировке задач для различных систем нелинейно-дисперсионных уравнений, выделении в них подзадач эллиптического и гиперболического типа, интерпретации полученных численных результатов. Программная реализация, теоретическое исследование свойств разработанных алгоритмов и проведение всех вычислительных экспериментов выполнено автором самостоятельно.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены опубликованы в 27-ти работах, 8 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [8, 14, 20, 27, 55, 68, 116, 127], 14 — в тезисах докладов [9] – [12], [15, 18, 19] [21] – [24], [26, 115] и 3 — в трудах [4, 13, 25] международных и всероссийских конференций, 2 — свидетельства государственной регистрации программ для ЭВМ в Роспатенте [16, 17].

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 180 страниц с 50 рисунками и 3 таблицами. Список литературы содержит 176 наименований.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках настоящей диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена моделированию одномерных задач о распространении и образовании поверхностных волн подводным оползнем. В параграфе 1.1 описывается математическая постановка задачи и приводится система полных НЛД-уравнений на подвижном дне (NLD-модель). Предлагается один из способов выделения в этой системе гиперболической системы уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью и ОДУ второго порядка для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления (функции  $\varphi$ ). Выписываются известные точные решения полных NLD-уравнений, в том числе в виде уединённой волны.

Приводятся уравнения слабо нелинейных моделей типа Буссинеска (NLDB-) и её модификация для случая малых деформаций дна (NLDD-), имеющих согласованное с трёхмерной моделью уравнение баланса энергии. В этих моделях также выделяется гиперболическая система и ОДУ второго порядка для дисперсионной составляющей  $\varphi$ . Выводится аналитическое решение уравнений слабо нелинейных моделей в виде уединённой волны. Показывается, что профиль этого решения несколько круче, чем в полной НЛД-модели.

Исследуются достаточные условия для корректности краевой задачи для дисперсионной составляющей  $\varphi$  в NLD-модели.

Параграф 1.2 посвящён описанию численного алгоритма для расширенной системы NLD-уравнений. Алгоритм решения ОДУ для дисперсионной составляющей  $\varphi$  строится на основе интегро-интерполяционного метода и метода прогонки. Гиперболическая система мелкой воды с модифицированной правой частью решается при помощи явной двушаговой конечно-разностной схемы типа предиктор-корректор с TVD-ограничителями. Даются некоторые замечания о корректности метода прогонки и примеры с нарушением диагонального преобладания и его восстановления путём сглаживания функции батиметрии. На аналоге предложенного алгоритма для линеаризованной системы уравнений с постоянным дном выполняется анализ таких свойств схемы как устойчивость, численная дисперсия и диссипация. Демонстрируется, что разработанный алгоритм может хорошо воспроизводить дисперсионные свойства волн, когда глубина акватории хотя бы в четыре раза меньше длины волны.

Модельные одномерные задачи описываются в параграфе 1.3. Проводятся сравнения с точными решениями NLD-и NLDB-уравнений в виде уединённой волны, показывается второй порядок аппроксимации численного алгоритма. В задаче о накате волны на вертикальную стенку проводятся сравнения полученных численных решений с экспериментальными данными и расчётами других авторов, демонстрируется хорошее согласие расчётов по NLD-модели эксперименту.

Описывается закон движения квазидеформируемого оползня по неровному склону под действием сил тяжести, плавучести, трения о дно и сопротивления воды. Детально исследуется задача о сходе подводного оползня в водоёме с дном параболической формы. Показывается, что при достаточно длинном оползне NLD-модель хорошо согласуется с моделью потенциальных течений (расчёты по которой служили эталоном для моделей мелкой воды), в отличие от SW-модели воспроизводя амплитуды головной волны и дисперсионного “хвоста”. При уменьшении длины оползня NLD-модель может терять адекватность и завышать значения амплитуд. Это происходит из-за уменьшения длины образованных волн, моделирование которых следует проводить в рам-

ках полных моделей гидродинамики. Аналогичные выводы делаются при сравнении полученных численных решений NLD-модели с экспериментальными данными в задачах о движении твёрдых моделей оползня по плоскому откосу.

Показывается, что слабо нелинейная NLDB-модель хорошо согласуется с полной NLD-моделью в большом диапазоне параметров оползня, лишь при значительном увеличении его толщины завышая амплитуды волн в дисперсионном хвосте. Напротив, NLDD-модель даёт близкие решения только при малых амплитудах оползня и скорости его перемещения, когда образованные волны вряд ли могут представлять серьёзную опасность объектам на берегах.

Во второй главе рассматриваются течения жидкости на плоскости (случай двух пространственных переменных в моделях приближении мелкой воды, плановые уравнения). В параграфе 2.1 приводятся исходные уравнения NLD-модели на подвижном дне и один из способов выделения в них гиперболической системы, отличающейся от классических уравнений мелкой воды лишь модифицированной правой частью, и скалярного уравнения в частных производных для дисперсионной составляющей  $\varphi$  проинтегрированного по глубине давления. Доказывается равномерная эллиптичность уравнения для  $\varphi$  при положительной полной глубине. Выписываются уравнения расширенных систем уравнений NLDB- и NLDD-моделей для планового случая.

Параграф 2.2 посвящён описанию численного алгоритма для эллиптической подзадачи. Алгоритм строится на равномерной прямоугольной сетке. Для решения задач с береговой линией сложной формы она аппроксимируется ломанными, звенья которой параллельны одной из осей координат. Разностные уравнения строятся с помощью интегро-интерполяционного метода. Приводится вывод соотношений как для внутренних, так и для граничных узлов. Полученная система разностных уравнений решается итерационным методом последовательной верхней релаксации.

В параграфе 2.3 приводится численный алгоритм для гиперболической системы, основанный на явной двухшаговой конечно-разностной схеме типа предиктор-корректор. В алгоритме важную роль играют схемные параметры, надлежащий выбор которых гарантирует выполнение TVD-свойства для численного решения модельных скалярных уравнений. При определённых значениях этого параметра схема может переходить в противопоточную или схему Лакса-Вендроффа.

Результаты численного моделирования тестовых задач в плоской геометрии излагается в параграфе 2.4. Исследуется влияние частотной дисперсии на процесс распространения волн различной эффективной длины над ровным дном. В качестве идеализированных источников выбираются “гауссовы шапки” разной эффективной протяжённости. Показывается высокая значимость дисперсии в случае источников меньшей протяжённости.

Проводятся сравнения полученных численных решений по NLD- и SW-моделям с экспериментальными данными на задаче о сходе твёрдой модели оползня по плоскому склону. Сравнения показали хорошее соответствие решений NLD-модели эксперименту при движении оползня по мелководной части области и потерю адекватности модели при описании образования волн в глубоководной части. Подобные ограничения связаны с малой длиной оползня по отношению к его заглужению.



Исследуется влияние ширины оползня на амплитуды образованных волн в задаче о сходе подводного оползня в модельном участке реки. Выявляется пропорциональный ширине оползня рост амплитуды большинства волн. При этом значительно отличаются картины распределения максимальных амплитуд вдоль берегов.

Для оценки работоспособности алгоритма в областях со сложной формой границ выполняются сравнения полученных численных решений NLD-модели с экспериментальными данными в задаче об обтекании волной цилиндрического острова. Показывается хорошее качественное соответствие расчётов эксперименту, в частности, при моделировании распространения волны меньшей амплитуды максимальный заплеск наблюдался в ближней к начальному положению волны точке острова, а в случае большей амплитуды — в дальней.

Рассматривается влияние частотной дисперсии в задаче о распространении волн в модельной акватории “корыто”, где дно равномерно в направлении  $Ox$ , а в направлении  $Oy$  описывается кусочно-линейной функцией, аппроксимирующей распределение глубин около Курило-Камчатского желоба. В качестве источников выбираются “гауссовы шапки” с различной эффективной протяжённостью и “реальные” очаги с разными параметрами. На модельных источниках демонстрируется, влияние дисперсии зависит от протяжённости источника и пройденного волной расстояния. В случае реальных сейсмических очагов, полученных по поршневой модели Гусякова-Окады [28], делается вывод, что влияние дисперсии существенно зависит от параметров землетрясения, которые определяют форму начального возвышения.

Приводятся некоторые результаты численного моделирования гипотетических подводных оползней в Чёрном море, параметры и положения которых были близки к историческому [37]. Показывается, что оползень, располагавшийся несколько выше по склону, имел большее начальное ускорение и сложную траекторию движения, заканчивающуюся резкой остановкой. В результате чего он порождал более высокие и короткие волны, которые были сильнее подвержены влиянию частотной дисперсии. Отмечается, что при накате волн на берега вблизи начального положения оползня дисперсия сказывалась незначительно, а изменяла картину течения при распространении волн по глубоководной части акватории.

Исследуется гипотеза об оползневом механизме образования аномальных волн на болгарском побережье 7-го мая 2007-го года. Рассматривается более 200 начальных возможных положений оползня и предлагается вариант с наилучшим совпадением с данными наблюдений.

**Третья глава** посвящена численному исследованию распространения длинных волн в океане с учётом сферичности и вращения Земли. В параграфе 3.1 приводятся уравнения полной NLD-модели Федотовой-Хакимзянова [57] на вращающейся сфере с учётом подвижности дна. Обсуждается постановка начальных данных в сферическом случае. Проводится один из способов выделения в модели гиперболической системы классических уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью и скалярного уравнения для дисперсионной составляющей  $\varphi$  проинтегрированного по глубине давления.

Разностные уравнения, аппроксимирующие эллиптическую задачу, строятся при помощи интегро-интерполяционного метода. Для их решения используется итерационный метод после-

довательной верхней релаксации. Гиперболическая система решается явной двушаговой схемой типа предиктор-корректор.

На модельной задаче о распространении волн разной длины в акватории с постоянной глубиной исследуется влияние сферичности Земли, центробежной силы и силы Кориолиса, а также частотной дисперсии. Во всех рассмотренных случаях центробежная сила не оказывала существенного влияния на процесс. Сферичность и вращение усиливали своё воздействие с ростом расстояния, пройденного волной, и эффективной протяжённости источника. В масштабных задачах учёт этих эффектов необходим для адекватного описания процесса. Дисперсия проявлялась на более компактных начальных возмущениях. Приводится формула для быстрой оценки значимости дисперсии в зависимости от длины волны, пройденного ею расстояния и глубины акватории.

Проводятся тестовые расчёты распространения “ближних” и “удалённых” от побережья РФ цунами в Тихом океане. В случае ближних источников дисперсия не оказала существенного влияния на картину максимальных заплесков на берег, и максимальные отличия между расчётами по NLD- и SW-моделям были зафиксированы на волнах, уходящих в океан. При удалённых очагах эти отличия могут достигать достаточно больших значений, и из-за неровностей дна сложно предсказать картину влияния частотной дисперсии на процесс распространения.

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

## Глава 1

# ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В РАМКАХ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

При выводе приближенных моделей мелкой воды, их анализе и разработке численных алгоритмов в первую очередь, как правило, рассматривается случай одной пространственной переменной (одномерный случай), когда течение равномерно по одному из горизонтальных направлений (см., например, [82, 144, 150]). Это позволяет значительно упростить выкладки и получить необходимую информацию о свойствах модели и численного алгоритма, провести сравнения полученных численных решений с аналитическими и экспериментальными данными на соответствующих задачах. Одномерные расчёты также используются для анализа реальных событий, когда необходимо применение очень подробных вычислительных сеток [122]. Заметим при этом, что не все модели [173] и численные алгоритмы [151] легко переносятся на двумерный случай.

В настоящей Главе рассматриваются одномерные полные и слабо нелинейные дисперсионные уравнения мелкой воды второго приближения на подвижном дне. В параграфе 1.1 описывается постановка задачи, выписываются уравнения моделей. Предлагается выделение в исходных системах уравнений ОДУ для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления и гиперболической системы мелкой воды с модифицированной правой частью. Далее иногда будем называть такое выделение расщеплением на гиперболическую и эллиптическую часть, однако, отметим, что оно имеет мало общего, например, с методом расщепления по физическим факторам. Делаются некоторые замечания о корректности задачи. Выписываются аналитические решения в виде уединённой волны на ровном дне для полных и слабо нелинейных уравнений.

Параграф 1.2 посвящён описанию численного алгоритма для расширенных систем НЛД-уравнений. Делаются замечания о корректности метода и исследуются его свойства в упрощённой постановке.

В параграфе 1.3 приводятся результаты численного моделирования одномерных задач. На сравнении с аналитическими решениями, экспериментальными данными и расчётами по трёхмерным моделям исследуются порядок аппроксимации метода, границы применимости моделей и важность учёта частотной дисперсии волн.

## **1.1. Одномерные нелинейно-дисперсионные уравнения на нестационарном дне**

В сравнении с построением численного алгоритма для исходных НЛД-уравнений [94, 151] перспективным выглядит подход, основанный на расщеплении системы на несколько частей путём ввода новых переменных. Так, например, в статьях [38, 132] рассматриваются разностные схемы, основанные на расщеплении систем одномерных полных НЛД-уравнений Грина-Нагди [96, 107] и Алешкова [1], а также слабо нелинейных уравнений Перегринна [151] и Дорфмана-Яговдика [30]. Отмечается возможность выделения в модели Грина-Нагди гиперболической и эллиптической частей. В модели Грина-Нагди при этом все производные по времени от функции свободной поверхности в правой части уравнения движения исключаются при помощи уравнения неразрывности, что делает её более громоздкой. Подобное исключение использовалось и в публикации [174]. В работе [103] схемы с расщеплением рассматриваются для одномерных моделей Железняк-Пелиновского [34], Перегринна и Бонна-Смита [81]. Представлены расщепления как с потерей, так и с сохранением гиперболичности. В монографии [41] гиперболичность дисперсионной модели сохраняется при помощи введения функции дефицита давления на дно и параметра, соответствующего выбору масштаба осреднения.

В работах [62, 75] описано расщепление системы двумерных полных НЛД-уравнений Железняк-Пелиновского на гиперболическую систему и эллиптическое уравнение. При этом дно считалось неподвижным. В настоящем параграфе исследуются системы полных одномерных НЛД-уравнений на подвижном дне и предлагается способ выделения ОДУ второго порядка для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления и гиперболической системы классических уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью. Выбор исходных уравнений обосновывается во Введении. К аналогичному виду приводятся новые СНЛД-уравнения [14, 98], которые имеют согласованное с трёхмерной моделью уравнение баланса энергии. Предлагается вывод аналитического решения в виде уединённой волны на ровном дне для расширенных систем полных и слабо нелинейных уравнений. Делаются некоторые замечания о корректности задачи для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления.

### 1.1.1. Одномерные нелинейно-дисперсионные уравнения

Пусть слой несжимаемой жидкости ограничен снизу подвижным дном, заданным функцией  $z = -h(x, t)$ , а сверху — свободной границей, описываемой функцией  $z = \eta(x, t)$ , где  $t$  — время,  $x, z$  — координаты точки в декартовой системе координат  $Oxz$ , ось  $Oz$  которой направлена вертикально вверх, а ось  $Ox$  совпадает с невозмущенной свободной поверхностью.

Искомыми величинами являются полная глубина слоя жидкости  $H = \eta + h > 0$  и осреднённая по глубине скорость  $u$ , из чего следует, что уравнение неразрывности приближенной модели принимает следующий вид:

$$H_t + (Hu)_x = 0. \quad (1.1)$$

В отличие от модели мелкой воды первого приближения, в НЛД-модели имеет место [99] квадратичная зависимость давления  $p$  от вертикальной координаты:

$$p = g \left[ H - (z + h) \right] - \left[ \left( H - (z + h) \right) R_2 + \left( \frac{H^2}{2} - \frac{(z + h)^2}{2} \right) R_1 \right], \quad (1.2)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,

$$R_1 = D(u_x) - u_x^2, \quad R_2 = D^2 h, \quad (1.3)$$

$D$  — оператор полной производной,  $D = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$ . Если через  $P$  обозначить проинтегрированное по толщине слоя давление (1.2), а через  $p_0$  — давление на дне,

$$P = \int_{-h}^{\eta} p dz = \frac{gH^2}{2} - \varphi, \quad p_0 = p \Big|_{z=-h} = gH - \psi, \quad (1.4)$$

то уравнение движения НЛД-модели примет следующий вид [54]:

$$u_t + uu_x + \frac{P_x}{H} = \frac{p_0}{H} h_x, \quad (1.5)$$

при этом  $\varphi, \psi$  — дисперсионные составляющие  $P$  и  $p_0$ ,

$$\varphi = \frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2} R_1 + H R_2. \quad (1.6)$$

Для контроля вычислений можно использовать закон изменения полной энергии  $E$  в НЛД-модели [54]

$$(HE)_t + \left[ uH \left( E + \frac{P}{H} \right) \right]_x = -p_0 h_t, \quad (1.7)$$

где

$$E = \frac{u^2}{2} + \frac{H^2}{6} u_x^2 + \frac{H}{2} u_x D h + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H - 2h)}{2}. \quad (1.8)$$

В случае стационарного дна ( $h_t \equiv 0$ ) уравнение изменения энергии (1.7) принимает дивергентный вид и выражает собой закон сохранения полной энергии.

### 1.1.2. Выделение подзадачи для $\varphi$ в системе НЛД-уравнений

Форма записи уравнения движения (1.5) в терминах скорость–давление позволяет заметить аналогию с неоднородным уравнением движения для течения идеального газа. В газовой же динамике (а также в гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости) для численного решения часто используется подход с выделением задачи определения давления в качестве одной из “простых задач”. В НЛД-модели гидростатическая составляющая проинтегрированного давления вычисляется через полную глубину слоя жидкости, поэтому “простую задачу” сформулируем только для дисперсионной составляющей  $\varphi$ .

Уравнение движения (1.5) можно записать в виде

$$Du = -g\eta_x + \frac{\varphi_x - \psi h_x}{H}. \quad (1.9)$$

Оказывается, что функция  $\psi$  выражается через новую переменную  $\varphi$  и исходные зависимые переменные  $H$  и  $u$ . В самом деле, из определений (1.6) получаем, что

$$\psi = \frac{3\varphi}{2H} + \frac{H}{4}R_2. \quad (1.10)$$

Если подставить в это уравнение правую часть выражения для  $R_2$

$$R_2 = Du h_x + u^2 h_{xx} + B \quad (1.11)$$

и ускорение  $Du$  заменить правой частью уравнения (1.9), то после приведения подобных приходим к формуле

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{H} + HR + \varphi_x h_x \right), \quad (1.12)$$

где

$$R = -g\eta_x h_x + u^2 h_{xx} + B, \quad B = h_{tt} + 2uh_{xt}, \quad r = 4 + h_x^2.$$

Уравнение для  $\varphi$  получается аналогично тому, как была выведена формула (1.12) для функции  $\psi$ . Из выражений (1.6) следует, что

$$\varphi = \frac{H^3}{12}R_1 + \frac{H}{2}\psi, \quad (1.13)$$

при этом

$$R_1 = (Du)_x - 2u_x^2. \quad (1.14)$$

Подставляя в формулу (1.13) выражения (1.12), (1.14) и используя в (1.14) формулу (1.9), получаем следующее уравнение для новой зависимой переменной  $\varphi$ :

$$\left(\frac{4}{Hr}\varphi_x\right)_x - 6\varphi\left(\frac{2}{H^3}\frac{r-3}{r} + \left(\frac{h_x}{H^2r}\right)_x\right) = F, \quad (1.15)$$

где

$$F = \left(g\eta_x + \frac{Rh_x}{r}\right)_x - \frac{6R}{Hr} + 2u_x^2.$$

Итак, расширенная система НЛД-уравнений (NLD-модель) состоит из уравнения неразрывности (1.1), уравнения движения

$$u_t + uu_x + gH_x = gh_x + \frac{\varphi_x - \psi h_x}{H} \quad (1.16)$$

и уравнения (1.15) относительно дисперсионной составляющей  $\varphi$  проинтегрированного по глубине давления, при этом функция  $\psi$  вычисляется по формуле (1.12). Для численной реализации может быть полезна запись уравнения движения с дивергентной формой записи левой части:

$$(Hu)_t + (Hu^2)_x + g\left(\frac{H^2}{2}\right)_x = gHh_x + \varphi_x - \psi h_x, \quad (1.17)$$

В случае ровного дна это уравнение принимает консервативный вид.

Отметим, что в отличие от подхода, предложенного в [62], в настоящей работе гиперболическая часть (1.16) полностью совпадает с классическими уравнениями мелкой воды, если в (1.16) пренебречь дисперсионными слагаемыми. В [62] получалась иная гиперболическая система с кратными собственными значениями. Кроме того, предложенное здесь выделение двух “простых” подзадач позволяет выполнять расчеты для подвижного дна. В [62] расщепление системы уравнений было выполнено только для неподвижного дна. И, наконец, рассмотренное здесь расщепление позволяет решать как одномерные, так и двумерные (плановые) задачи для НЛД-уравнений, в отличие от работы [62], в которой расщепление и алгоритмы расчета были разными для одномерных и двумерных задач.

### 1.1.3. Точные решения полных НЛД-уравнений

Приведем некоторые решения выписанной системы уравнений, которые могут оказаться полезными при тестировании численных алгоритмов. В случае горизонтального неподвижного дна

$$h(x, t) = h_0 = \text{const} \quad (1.18)$$

система уравнений (1.1), (1.15), (1.16) имеет решение “равномерный поток”:

$$u = u_0 = \text{const}, \quad \eta = 0, \quad H = h_0, \quad \varphi = 0. \quad (1.19)$$

Для неровного неподвижного дна

$$h(x, t) = h_0(x) \quad (1.20)$$

существует решение “покой”:

$$u = 0, \quad \eta = 0, \quad H = h_0(x), \quad \varphi = 0, \quad (1.21)$$

а для подвижного дна

$$h(x, t) = h_0(x) + \beta t \quad (1.22)$$

– “вертикальный сдвиг”:

$$u = 0, \quad \eta = \beta t, \quad H = h_0(x), \quad \varphi = 0. \quad (1.23)$$

В случае горизонтального дна (1.18) уравнения (1.1), (1.17) и (1.15) принимают более простой вид

$$H_t + (Hu)_x = 0, \quad (1.24)$$

$$(Hu)_t + \left( Hu^2 + g \frac{H^2}{2} \right)_x = \varphi_x, \quad (1.25)$$

$$\left( \frac{\varphi_x}{H} \right)_x - \frac{3}{H^3} \varphi = g\eta_{xx} + 2u_x^2 \quad (1.26)$$

и имеют решение “уединенная волна”:

$$\eta(x, t) = a_0 \operatorname{ch}^{-2} \left( \frac{\sqrt{3a_0g}}{2h_0U_0} (x - x_0 - U_0t) \right), \quad H(x, t) = h_0 + \eta(x, t), \quad (1.27)$$

$$u(x, t) = U_0 \frac{\eta(x, t)}{H(x, t)}, \quad (1.28)$$

$$\varphi(x, t) = g \frac{H^2(x, t) - h_0^2}{2} - h_0 U_0^2 \frac{\eta(x, t)}{H(x, t)}, \quad (1.29)$$

где  $U_0 = \sqrt{g(h_0 + a_0)}$  – скорость перемещения волны,  $a_0$  – ее амплитуда,  $x = x_0$  – положение вершины волны при  $t = 0$ .

Выделение подзадачи для дисперсионной составляющей давления позволяет использовать новый способ вывода формул точного решения (1.27)–(1.29), применимый для получения точного решения не только полных НЛД-уравнений, но и СНЛД-уравнений мелкой воды. Решение уравнений (1.24)–(1.26) будем искать в виде уединенной волны  $z = \eta(x, t)$  вида

$$\eta(x, t) = \eta_0(\xi), \quad \xi = x - U_0t, \quad (1.30)$$

распространяющейся над горизонтальным дном  $z = -h_0 = \operatorname{const} < 0$  с постоянной скоростью  $U_0 > 0$ . Функция  $z = \eta_0(x)$  описывает форму начальной волны (при  $t = 0$ ) с высотой  $a_0 = \eta_0(x_0)$ . Будем предполагать, что функция  $z = \eta_0(x)$  является дважды непрерывно дифференцируемой и



удовлетворяет следующим условиям:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_0(x) > 0 & \text{при } -\infty < x < \infty, \\ \lim \eta_0(x) = 0 & \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \\ \lim \eta'_0(x) = 0 & \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \\ \eta'_0 > 0 & \text{при } x < x_0, \\ \eta'_0 < 0 & \text{при } x > x_0, \\ \eta'_0 = 0 & \text{при } x = x_0, \end{array} \right. \quad (1.31)$$

где  $\eta'_0 = d\eta_0/d\xi$ . Форма начальной волны  $\eta_0(x)$  и скорость перемещения волны  $U_0 > 0$  подлежат определению. Скорость течения будем искать в виде функции, связанной с возвышением формулой (1.28).

В силу равенств

$$H_t = \eta_t = -U_0\eta'_0, \quad uH = U_0\eta, \quad (Hu)_x = U_0\eta_x = U_0\eta'_0 \quad (1.32)$$

уравнение неразрывности (1.24) будет выполняться при произвольном значении параметра  $U_0$ , а уравнение движения (1.25) можно переписать в виде

$$(U_0\eta)_t + \left( Hu^2 + g\frac{H^2}{2} - \varphi \right)_x = 0,$$

или, с учетом того, что  $\eta_t = -U_0\eta_x$ , следующим образом:

$$\left( -U_0^2\eta + Hu^2 + g\frac{H^2}{2} - \varphi \right)_x = 0. \quad (1.33)$$

Следовательно,

$$-U_0^2\eta + Hu^2 + g\frac{H^2}{2} - \varphi = f(t),$$

где  $f(t)$  – произвольная функция от времени. Это равенство выполняется при всех значениях  $x$ , поэтому естественно предположить, что оно останется верным и при предельном переходе для  $x \rightarrow \pm\infty$ . Считая, что на бесконечности функция  $\varphi$  равна нулю, учитывая формулу (1.28) и второе из предположений (1.31), получаем равенство

$$-U_0^2\eta + Hu^2 + g\frac{H^2}{2} - \varphi = g\frac{h_0^2}{2},$$

что приводит к следующему выражению функции  $\varphi$  через возвышение свободной границы

$$\varphi = g\frac{H^2 - h_0^2}{2} + Hu^2 - U_0^2\eta = g\frac{H^2 - h_0^2}{2} - h_0U_0^2\frac{\eta}{H}.$$

Таким образом, формула (1.29) справедлива, причем для произвольного значения параметра  $U_0$ .

Для нахождения функции  $\eta$  подставим выражение (1.29) в уравнение (1.26) и учтем равенства

$$\varphi_x = gH\eta_x - U_0^2 h_0^2 \frac{\eta_x}{H^2}, \quad \frac{\varphi_x}{H} = g\eta_x - U_0^2 h_0^2 \frac{\eta_x}{H^3}, \quad \left(\frac{\varphi_x}{H}\right)_x = g\eta_{xx} - U_0^2 h_0^2 \frac{\eta_{xx}}{H^3} + 3U_0^2 h_0^2 \frac{\eta_x^2}{H^4},$$

$$u_x = U_0 h_0 \frac{\eta_x}{H^2}, \quad u_x^2 = U_0^2 h_0^2 \frac{\eta_x^2}{H^4}.$$

Тогда уравнение (1.26) можно переписать в виде уравнения относительно неизвестной функции  $\eta$ :

$$-U_0^2 h_0^2 \frac{\eta_{xx}}{H^3} + 3U_0^2 h_0^2 \frac{\eta_x^2}{H^4} - \frac{3}{H^3} \left( g \frac{H^2 - h_0^2}{2} - U_0^2 h_0 \frac{\eta}{H} \right) - 2U_0^2 h_0^2 \frac{\eta_x^2}{H^4} = 0,$$

которое можно преобразовать к виду

$$\frac{U_0^2 h_0^2}{H^3} \left( \frac{\eta_x^2}{H} - \eta_{xx} \right) = \frac{3}{H^3} \left( g \frac{H^2 - h_0^2}{2} - U_0^2 h_0 \frac{\eta}{H} \right).$$

Используя равенство  $\eta = H - h_0$ , перепишем последнее уравнение в виде уравнения относительно полной глубины  $H$ :

$$HH_{xx} - H_x^2 = -\frac{3g(H - h_0)}{2U_0^2 h_0^2} \left( H^2 + h_0 H - \frac{2U_0^2 h_0}{g} \right). \quad (1.34)$$

В силу равенства (1.30) получаем, что  $H(x, t) = h_0 + \eta_0(\xi)$ , т. е.

$$H(x, t) = H_0(\xi), \quad (1.35)$$

где  $H_0(x) = h_0 + \eta_0(x)$  – полная глубина слоя жидкости в начальный момент времени,  $h_0 < H_0(x) \leq h_0 + a_0$ . Кроме того,  $H_x(x, t) = dH_0(\xi)/d\xi \equiv H'_0$ ,  $H_{xx} = H''_0$ , поэтому уравнение (1.34) может рассматриваться как уравнение относительно начальной полной глубины  $H_0(x)$ :

$$H_0 H''_0 - (H'_0)^2 = -\frac{3g(H_0 - h_0)}{2U_0^2 h_0^2} \left( H_0^2 + h_0 H_0 - \frac{2U_0^2 h_0}{g} \right) \equiv G(H_0). \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Его решение можно найти с помощью двух подстановок. При использовании подстановки  $p(H_0) = H'_0$  и учете равенства  $H''_0 = pp'$ , где  $p' = dp/dH_0$ , приходим к нелинейному уравнению первого порядка

$$H_0 pp' - p^2 = G(H_0), \quad (1.37)$$

которое при подстановке  $v(H_0) = p^2(H_0)$  и учете равенства  $v' = 2pp'$  преобразуется к линейному уравнению

$$v' - \frac{2}{H_0} v = \frac{2}{H_0} G(H_0) \equiv -\frac{3g(H_0 - h_0)}{U_0^2 h_0^2 H_0} \left( H_0^2 + h_0 H_0 - \frac{2U_0^2 h_0}{g} \right) \quad (1.38)$$

относительно функции  $v(H_0)$ , определенной на отрезке  $[h_0, h_0 + a_0]$ . Начальное условие для этого уравнения определяется третьим из предположений (1.31):

$$v|_{H_0=h_0} = 0. \quad (1.39)$$

Легко проверить, что решением линейной задачи (1.38), (1.39) является кубическая функция

$$v(H_0) = -\frac{3g}{U_0^2 h_0^2} (H_0 - h_0)^2 \left( H_0 - \frac{U_0^2}{g} \right). \quad (1.40)$$

Учитывая связь  $H'_0 = \pm\sqrt{v}$ , получаем два уравнения для нахождения начальной полной глубины

$$H'_0 = \pm \frac{\sqrt{3g}}{U_0 h_0} (H_0 - h_0) \sqrt{\frac{U_0^2}{g} - H_0}, \quad (1.41)$$

причем в силу четвертого и пятого условий (1.31) уравнение со знаком плюс решается на интервале  $(-\infty, x_0]$  с условием

$$H_0|_{x=x_0} = h_0 + a_0, \quad (1.42)$$

а со знаком минус – на  $[x_0, \infty)$  с тем же условием (1.42). Кроме того, шестое из предположений (1.31) приводит к равенству

$$H'_0|_{x=x_0} = 0,$$

подставляя которое в уравнение (1.41) и учитывая условие (1.42), получаем, что скорость распространения уединенной волны определяется формулой

$$U_0 = \sqrt{g(a_0 + h_0)}. \quad (1.43)$$

Найдем решение уравнения (1.41) со знаком плюс. Учитывая условие (1.42), получаем равенство

$$\int_{H_0}^{h_0+a_0} \frac{d\zeta}{(\zeta - h_0)\sqrt{U_0^2/g - \zeta}} = \int_x^{x_0} \frac{\sqrt{3g}}{U_0 h_0} dx = \frac{\sqrt{3g}}{U_0 h_0} (x_0 - x).$$

Преобразуем левую часть этого равенства, используя в интеграле замену переменной  $\mu = \sqrt{U_0^2/g - \zeta}$  и выражение (1.43) для скорости волны:

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{U_0^2/g - H_0}}^0 \frac{-2d\mu}{a_0 - \mu^2} &= -\frac{1}{\sqrt{a_0}} \int_{\sqrt{U_0^2/g - H_0}}^0 \left( \frac{1}{\sqrt{a_0} - \mu} + \frac{1}{\sqrt{a_0} + \mu} \right) d\mu = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{a_0}} \ln \left( \frac{\sqrt{a_0} + \mu}{\sqrt{a_0} - \mu} \right) \Big|_{\sqrt{U_0^2/g - H_0}}^0 = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \ln \frac{\sqrt{a_0} + \sqrt{U_0^2/g - H_0}}{\sqrt{a_0} - \sqrt{U_0^2/g - H_0}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\sqrt{a_0} + \sqrt{U_0^2/g - H_0}}{\sqrt{a_0} - \sqrt{U_0^2/g - H_0}} = e^{-2\beta(x-x_0)}, \quad (1.44)$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt{3a_0g}}{2h_0U_0}. \quad (1.45)$$

Из (1.44) получаем, что

$$\sqrt{\frac{U_0^2}{g} - H_0(x)} = -\sqrt{a_0} \frac{1 - e^{-2\beta(x-x_0)}}{1 + e^{-2\beta(x-x_0)}} = -\sqrt{a_0} \operatorname{th}\left(\beta(x-x_0)\right),$$

поэтому

$$H_0(x) = \frac{U_0^2}{g} - a_0 \left[1 - \operatorname{ch}^{-2}\left(\beta(x-x_0)\right)\right] = h_0 + a_0 \operatorname{ch}^{-2}\left(\beta(x-x_0)\right).$$

Отсюда получаем формулу для начального возвышения

$$\eta_0(x) = a_0 \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{\sqrt{3a_0g}}{2h_0U_0}(x-x_0)\right), \quad x \leq x_0 \quad (1.46)$$

и с учетом равенства (1.30) форму волны (1.27) при  $t > 0$ .

Эта же начальная функция (1.46) на интервале  $[x_0, \infty)$  удовлетворяет начальному условию (1.42) и уравнению (1.41) со знаком минус. Таким образом, функции (1.27)–(1.29) являются решением системы полных НЛД-уравнений (1.24)–(1.26).

#### 1.1.4. Слабо нелинейные дисперсионные уравнения мелкой воды

При выводе НЛД-уравнений (1.1), (1.5) предположение о малости амплитуды волн не использовалось. В СНЛД-модели типа Буссинеска (NLDB-модели) [98] имеем систему уравнений (1.1), (1.5) с модифицированными функциями  $P$  и  $p_0$ :

$$P = \frac{gH^2}{2} - \left(\frac{Hh}{3}D(hu_x) + \frac{Hh}{2}D^2h\right), \quad p_0 = gH - \left(\frac{H}{2}D(hu_x) + HD^2h\right). \quad (1.47)$$

Далее поступаем также, как в случае полной НЛД-модели: записываем уравнение движения в виде (1.16) и конструируем уравнение для зависимой переменной  $\varphi$ . В рассматриваемом случае формулы (1.6) принимают другой вид

$$\varphi = \frac{Hh}{3}D(hu_x) + \frac{Hh}{2}D^2h, \quad \psi = \frac{H}{2}D(hu_x) + HD^2h, \quad (1.48)$$

что приводит к изменению выражений (1.10), (1.13)

$$\psi = \frac{3\varphi}{2h} + \frac{H}{4}D^2h, \quad \varphi = \frac{Hh}{12}D(hu_x) + \frac{h}{2}\psi \quad (1.49)$$

и небольшой коррекции формулы (1.12):

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{h} + HR + \varphi_x h_x \right). \quad (1.50)$$

С учетом этого выражения, формулы (1.9), а также равенства

$$D(hu_x) = (Dh)(u_x) + h((Du)_x - u_x^2) \quad (1.51)$$

приходим к уравнению вида (1.15) для дополнительной зависимой переменной  $\varphi$ :

$$\left( \frac{4}{Hr} \varphi_x \right)_x - 6\varphi \left( \frac{2}{Hh^2} \frac{r-3}{r} + \left( \frac{h_x}{Hhr} \right)_x \right) = F, \quad (1.52)$$

где

$$F = \left( g\eta_x + \frac{Rh_x}{r} \right)_x - \frac{6R}{hr} + u_x^2 - u_x \frac{Dh}{h}.$$

Таким образом, структура уравнений полной NLD-модели сохраняется и в случае слабо нелинейной NLDB-модели, для которой мы имеем систему уравнений гиперболического типа (1.1), (1.17) и скалярное уравнение для  $\varphi$  (1.52). Поэтому описанный ниже алгоритм численного решения полных NLD-уравнений используется и для решения задач в рамках NLDB-модели.

Для горизонтального дна (1.18) изменится только последнее из уравнений (1.24)–(1.26):

$$H_t + (Hu)_x = 0, \quad (Hu)_t + \left( Hu^2 + g \frac{H^2}{2} \right)_x = \varphi_x, \quad \left( \frac{\varphi_x}{H} \right)_x - \frac{3}{Hh_0^2} \varphi = g\eta_{xx} + u_x^2. \quad (1.53)$$

### 1.1.5. СНЛД-уравнения мелкой воды в случае малых деформаций дна

Уравнения слабо нелинейных течений над слабо деформируемым дном получаются [101] из уравнений NLDB-модели при дополнительном предположении о слабой изменчивости дна во времени:  $h(x, t) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x, t)$ , где  $\varepsilon$  – малое число [30]. В этой модели (NLDD-модели) уравнение движения (1.5) принимает следующий вид:

$$u_t + uu_x + \frac{(HP)_x}{H} = g(h - h_0)_x + \frac{p_0}{H} h_{0,x},$$

где

$$P = \frac{gH^2}{2} - \left( \frac{Hh_0}{3} D(h_0 u_x) + \frac{Hh_0}{2} D^2 h_0 \right), \quad p_0 = gH - \left( \frac{H}{2} D(h_0 u_x) + HD^2 h_0 \right). \quad (1.54)$$

Из (1.54) следует, что формулы для функций  $\varphi$  и  $\psi$  в случае слабо деформируемого дна получаются из (1.48) простой заменой  $h$  на  $h_0$ :

$$\varphi = \frac{Hh_0}{3} D(h_0 u_x) + \frac{Hh_0}{2} D^2 h_0, \quad \psi = \frac{H}{2} D(h_0 u_x) + HD^2 h_0. \quad (1.55)$$

Подставляя в формулу (1.51) функцию  $h_0$  и используя уравнение движения, переписанное в виде

$$u_t + uu_x + g\eta_x = \frac{\varphi_x - \psi h_{0,x}}{H}, \quad (1.56)$$

получаем следующее выражение для величины  $\psi$ :

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{h_0} + HR + \varphi_x h_{0,x} \right), \quad (1.57)$$

где

$$R = -g\eta_x h_{0,x} + u^2 h_{0,xx}, \quad r = 4 + h_{0,x}^2.$$

Таким образом, в NLDD-модели уравнение неразрывности (1.1) остается прежним, уравнение движения принимает вид

$$(Hu)_t + (Hu^2)_x + g \left( \frac{H^2}{2} \right)_x = gHh_x + \varphi_x - \psi h_{0,x}, \quad (1.58)$$

а уравнение для  $\varphi$  преобразуется к следующему виду:

$$\left( \frac{4}{Hr} \varphi_x \right)_x - 6\varphi \left( \frac{2}{Hh_0^2} \frac{r-3}{r} + \left( \frac{h_{0,x}}{Hh_0 r} \right)_x \right) = F, \quad (1.59)$$

где

$$F = \left( g\eta_x + \frac{Rh_{0,x}}{r} \right)_x - \frac{6R}{h_0 r} + u_x^2 - u_x \frac{Dh_0}{h_0}, \quad \psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{h_0} + HR + \varphi_x h_{0,x} \right), \quad (1.60)$$

Отметим, что в формуле (1.60) выражение  $Dh_0$  можно заменить на  $uh_{0,x}$ , поскольку функция  $h_0(x)$  от времени не зависит, однако мы сохранили прежнее обозначение  $Dh_0$ , чтобы подчеркнуть единообразие форм записи уравнений всех рассматриваемых здесь НЛД-моделей и возможность использования для них единого подхода к построению численных алгоритмов.

Очевидно, в случае неподвижного дна, в частности, неподвижного горизонтального дна, NLDB и NLDD-модели совпадают.

Главными особенностями двух используемых в настоящей работе СНЛД-моделей являются наличие у них адекватных физике законов изменения энергии [98] и дивергентная форма записи левых частей всех уравнений. Таким образом, упрощенные модели сохраняют важные физические свойства полной NLD-модели, которая, в свою очередь, наследует эти свойства у трехмерной модели гидродинамики. Это обстоятельство выгодно отличает используемые в настоящей работе слабо нелинейные модели от других хорошо известных моделей типа Буссинеска (например, [30, 92, 151]).

### 1.1.6. Точное решение СНЛД-уравнений

Получим точное решение системы одномерных СНЛД-уравнений мелкой воды (1.53) в случае горизонтального дна. Как и в случае полных НЛД-уравнений, будем искать решение в виде уединенной волны вида (1.30), предполагая выполненными условия (1.31) и используя соотношение (1.28), связывающее скорость течения с возвышением свободной границы. Как и в п. 1.1.3 легко проверить справедливость формулы (1.29). Но теперь вместо (1.34) имеем следующее уравнение для определения полной глубины:

$$HH_{xx} - 2H_x^2 = -\frac{3gH^2(H - h_0)}{2U_0^2h_0^4} \left( H^2 + h_0H - \frac{2U_0^2h_0}{g} \right), \quad (1.61)$$

которое сводится к линейному уравнению первого порядка

$$v' - \frac{4}{H_0}v = -\frac{3gH_0(H_0 - h_0)}{U_0^2h_0^4} \left( H_0^2 + h_0H_0 - \frac{2U_0^2h_0}{g} \right), \quad (1.62)$$

аналогичному (1.38). Решением уравнения (1.62) при начальном условии (1.39) является полином пятой степени от  $H_0$ :

$$v(H_0) = -\frac{3g}{U_0^2h_0^4} H_0^2 (H_0 - h_0)^2 \left( H_0 - \frac{U_0^2}{g} \right). \quad (1.63)$$

Отсюда следует, что для определения начальной полной глубины в NLDB-модели мы будем иметь вместо (1.41) следующее уравнение:

$$H'_0 = \pm \frac{\sqrt{3g}}{U_0h_0^2} H_0 (H_0 - h_0) \sqrt{\frac{U_0^2}{g} - H_0}, \quad (1.64)$$

из которого, в частности, получается та же формула (1.43) для скорости распространения уединенной волны, что и для полных НЛД-уравнений.

Найдем решение уравнения (1.64) со знаком плюс при  $x \leq x_0$ , удовлетворяющее начальному условию (1.42). Интегрирование уравнения (1.64) приводит к следующему равенству:

$$\int_{H_0}^{h_0+a_0} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - h_0)\sqrt{U_0^2/g - \zeta}} = \frac{\sqrt{3g}}{U_0h_0^2} (x_0 - x). \quad (1.65)$$

Используя в интеграле замену переменной  $\mu = \sqrt{U_0^2/g - \zeta}$ , преобразуем левую часть равенства (1.65):

$$\int_{\sqrt{U_0^2/g - H_0}}^0 \frac{-2d\mu}{(a_0 + h_0 - \mu^2)(a_0 - \mu^2)} = \frac{2}{h_0} \int_{\sqrt{U_0^2/g - H_0}}^0 \left( \frac{1}{a_0 + h_0 - \mu^2} - \frac{1}{a_0 - \mu^2} \right) d\mu =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{h_0} \left[ \frac{1}{2\sqrt{a_0+h_0}} \ln \left( \frac{\sqrt{a_0+h_0}+\mu}{\sqrt{a_0+h_0}-\mu} \right) - \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \ln \left( \frac{\sqrt{a_0}+\mu}{\sqrt{a_0}-\mu} \right) \right] \Big|_{\sqrt{U_0^2/g-H_0}}^0 = \\
&= \frac{1}{h_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{a_0+h_0}} \ln \left( \frac{\sqrt{a_0+h_0}-z}{\sqrt{a_0+h_0}+z} \right) - \frac{1}{\sqrt{a_0}} \ln \left( \frac{\sqrt{a_0}-z}{\sqrt{a_0}+z} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{h_0} \ln \frac{\left( \frac{\sqrt{a_0+h_0}-z}{\sqrt{a_0+h_0}+z} \right)^{1/\sqrt{a_0+h_0}}}{\left( \frac{\sqrt{a_0}-z}{\sqrt{a_0}+z} \right)^{1/\sqrt{a_0}}},
\end{aligned}$$

где

$$z = \sqrt{a_0+h_0-H_0}, \quad 0 \leq z < \sqrt{a_0}. \quad (1.66)$$

Следовательно, уравнение (1.65) можно записать в следующем виде:

$$\left( \frac{\sqrt{a_0+h_0}-z}{\sqrt{a_0+h_0}+z} \right)^{1/\sqrt{a_0+h_0}} = e^{\frac{\sqrt{3g}}{U_0 h_0}(x_0-x)} \left( \frac{\sqrt{a_0}-z}{\sqrt{a_0}+z} \right)^{1/\sqrt{a_0}},$$

или

$$F(z) \equiv e^{-\beta|x-x_0|} \left( \frac{\sqrt{a_0+h_0}-z}{\sqrt{a_0+h_0}+z} \right)^{\sqrt{\frac{a_0}{a_0+h_0}}} - \frac{\sqrt{a_0}-z}{\sqrt{a_0}+z} = 0, \quad (1.67)$$

где

$$\beta = \frac{\sqrt{3a_0g}}{h_0 U_0}.$$

Нетрудно проверить, что уравнение (1.64) со знаком минус, решение которого ищется при  $x \geq x_0$ , также сводится к нелинейному уравнению (1.67).

Покажем, что при каждом фиксированном  $x$  уравнение (1.67) имеет единственный корень  $z(x)$ . При  $x = x_0$  корнем является  $z = 0$ . Поэтому далее рассмотрим случай  $x \neq 0$  и исследуем поведение функции  $F(z)$  на отрезке  $[0, \sqrt{a_0}]$ . Легко убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$F(0) = e^{-\beta|x-x_0|} - 1 < 0, \quad F(\sqrt{a_0}) = e^{-\beta|x-x_0|} \left( \frac{\sqrt{a_0+h_0}-\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_0+h_0}+\sqrt{a_0}} \right)^{\sqrt{\frac{a_0}{a_0+h_0}}} > 0, \quad (1.68)$$

поэтому для существования единственного корня достаточно убедиться, что на указанном отрезке функция  $F(z)$  является строго монотонно возрастающей функцией, т. е.

$$F'(z) = -\frac{2\sqrt{a_0}}{(\sqrt{a_0+h_0}+z)^2} e^{-\beta|x-x_0|} \left( \frac{\sqrt{a_0+h_0}-z}{\sqrt{a_0+h_0}+z} \right)^{\sqrt{\frac{a_0}{a_0+h_0}}-1} + \frac{2\sqrt{a_0}}{(\sqrt{a_0}+z)^2} > 0.$$

Для выполнения же последнего неравенства достаточно, чтобы

$$-\frac{1}{(\sqrt{a_0+h_0}+z)^2} \left( \frac{\sqrt{a_0+h_0}-z}{\sqrt{a_0+h_0}+z} \right)^{\sqrt{\frac{a_0}{a_0+h_0}}-1} + \frac{1}{(\sqrt{a_0}+z)^2} > 0, \quad \forall z \in [0, \sqrt{a_0}],$$



или

$$Q(z) \equiv \left( \frac{\sqrt{a_0} + z}{\sqrt{a_0 + h_0} + z} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{a_0 + h_0} - z}{\sqrt{a_0 + h_0} + z} \right)^{\sqrt{\frac{a_0}{a_0 + h_0}} - 1} < 1, \quad \forall z \in [0, \sqrt{a_0}]. \quad (1.69)$$

Функция  $Q(z)$  является монотонно возрастающей на отрезке  $[0, \sqrt{a_0}]$ , поэтому для выполнения неравенства (1.69) достаточно, чтобы оно выполнялось на правом конце этого отрезка  $z = \sqrt{a_0}$ :

$$\left( \frac{2\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_0 + h_0} + \sqrt{a_0}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{a_0 + h_0} - \sqrt{a_0}}{\sqrt{a_0 + h_0} + \sqrt{a_0}} \right)^{\sqrt{\frac{a_0}{a_0 + h_0}} - 1} < 1. \quad (1.70)$$

Используя обозначение

$$\gamma = \sqrt{\frac{a_0}{a_0 + h_0}}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (1.71)$$

перепишем неравенство (1.70) в более компактном виде

$$P(\gamma) \equiv \left( \frac{2\gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \left( \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right)^{1 - \gamma} < 1. \quad (1.72)$$

График функции (1.72) изображен на Рисунке 1.1, *а*.

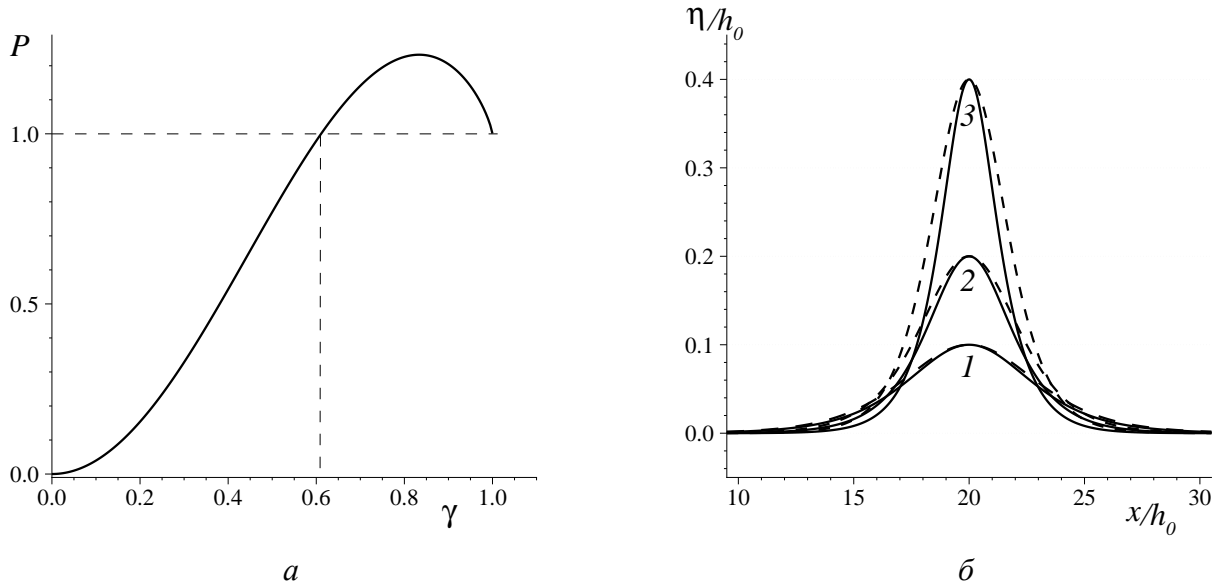


Рисунок 1.1 – Графики функции (1.72) (*а*) и точного решения (*б*) полных НЛД-уравнений (штриховые линии) и слабо нелинейных уравнений NLDB-модели (сплошные линии) при  $a_0/h_0 = 0.1$  (1); 0.2 (2); 0.4 (3)

Слабо нелинейные уравнения мелкой воды получены в предположении малости амплитуды волны  $a_0$ , поэтому и неравенство (1.72) должно выполняться лишь для некоторого диапазона малых амплитуд. Пусть, например,  $a_0/h_0 \leq 9/16 = 0.5625$ . Тогда  $\gamma \leq 0.6$ , поэтому

$$P(\gamma) \leq P(0.6) = \frac{9}{16} \sqrt[5]{16} \approx 0.98 < 1, \quad \forall \gamma \in [0, 0.6].$$

Таким образом, условие  $a_0/h_0 \leq 0.5625$  является достаточным для того, чтобы функция  $F(z)$  была строго монотонно возрастающей, что в силу неравенств (1.68) гарантирует существование единственного корня  $z(x)$  уравнения (1.67) для каждого  $x$ . Возвышение свободной границы определяется по найденному  $z(x)$  с помощью формулы

$$\eta_0(x) = a_0 - z^2(x), \quad (1.73)$$

вытекающей из (1.66). На Рисунке 1.1, б изображены графики начального возвышения, отнесенного к глубине бассейна, для уединенной волны NLDB-модели. Видно, что при малых амплитудах  $a_0$  отличие от профилей уединенной волны полной NLD-модели незначительно, однако с ростом амплитуды наблюдается заметное различие, в частности, в NLDB-модели передний и задний фронты волны круче, чем в уединенной волне полной NLD-модели.

### 1.1.7. О коэффициентах уравнения (1.15)

Запишем уравнение для  $\varphi$  (1.15) одномерной NLD-модели в более компактном виде

$$(k\varphi_x)_x - k_0\varphi = F, \quad (1.74)$$

в котором

$$k = \frac{4}{Hr}, \quad k_0 = 6\frac{\partial k_{01}}{\partial x} + 12k_{00}, \quad k_{01} = \frac{h_x}{H^2r}, \quad k_{00} = \frac{r-3}{H^3r}.$$

Мы предполагаем, что полная глубина  $H$  всюду положительна, а дно описывается функцией  $z = -h(x, t)$  с ограниченной производной  $|h_x| < C$ , поэтому коэффициент  $k$  удовлетворяет оценке

$$\frac{1}{H} \frac{4}{4+C^2} \leq k \leq \frac{1}{H}.$$

Рассмотрим теперь коэффициент  $k_0$  при  $\varphi$  в уравнении (1.74):

$$k_0 = 6 \left[ \left( \frac{h_x}{H^2r} \right)_x + \frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} \right] = \frac{6}{H^3r^2} \left[ h_{xx}H(4-h_x^2) + 2(4+h_x^2)(1-h_x\eta_x) \right]. \quad (1.75)$$

Если дно горизонтальное ( $h \equiv h_0$ ), то

$$k_0 = \frac{3}{H^3} > 0. \quad (1.76)$$

Для плоского откоса  $h = \alpha x + \beta$  имеем

$$k_0 = \frac{12}{H^3(4+\alpha^2)}(1-\alpha\eta_x).$$

Поэтому  $k_0 > 0$ , если выполнено условие

$$\alpha\eta_x < 1, \quad (1.77)$$

т. е. коэффициент  $k_0$  будет положительным, если волна не имеет слишком крутых фронтов. На пологих откосах условие (1.77) будет заведомо выполняться для волн с плавно меняющимся профилем.

Пусть теперь дно задается произвольной гладкой функцией  $y = -h(x, t)$ , при этом  $|h_x| < 2$ . Тогда достаточным условием для положительности коэффициента  $k_0$  будет выполнение неравенства

$$h_x\eta_x < 1 + h_{xx}H \frac{4 - h_x^2}{2(4 + h_x^2)}. \quad (1.78)$$

Положительность коэффициента  $k_0$  приводит к корректности постановок [51] соответствующих краевых задач.

### 1.1.8. Краевые условия для одномерных задач

Будем считать, что решение необходимо найти на отрезке  $\Omega_x = [0, L_x]$  оси  $Ox$ . В случае, когда область  $\Omega_x$  ограничена вертикальными стенками, в краевых точках  $x = 0$  и  $x = L_x$  ставится условие непротекания жидкости:

$$u|_{x=0; x=L_x} = 0. \quad (1.79)$$

Из этих условий следует

$$Du|_{x=0; x=L_x} = 0, \quad (1.80)$$

и, если предположить, что влияние дисперсии волн около границ мало, из уравнения (1.16) можно вывести дополнительное условие для функции  $\eta$ :

$$\eta_x|_{x=0; x=L_x} = 0. \quad (1.81)$$

Для вывода краевого условия для  $\varphi$  подставим выражение для  $\psi$  (1.12) в уравнение движения (1.16) и используем условие (1.79). После элементарных преобразований получим

$$\frac{4}{Hr}\varphi_x - \frac{6h_x}{H^2r}\varphi = h_x \frac{R}{r} + g\eta_x \Big|_{x=0; x=L_x}, \quad (1.82)$$

что в точности есть

$$k\varphi_x - 6k_{01}\varphi = h_x \frac{R}{r} + g\eta_x \Big|_{x=0; x=L_x}. \quad (1.83)$$

Для корректности постановки потребуем, чтобы коэффициент  $k_{01}$  при  $\varphi$  в условиях (1.83) имел вполне определенный знак [49, 51], а именно, чтобы он был неотрицательным в граничной точке

$x = 0$  и неположительным при  $x = L_x$ . Эти условия эквивалентны неравенствам

$$h_x(0, t) \geq 0, \quad h_x(L_x, t) \leq 0. \quad (1.84)$$

В качестве неотражающих краевых условий для гиперболической части (1.1), (1.17) и уравнения (1.15) будем использовать уравнения типа Зомерфельда:

$$\begin{aligned} \eta_t \pm \sqrt{gh}\eta_x &= 0, \\ u_t \pm \sqrt{gh}u_x &= 0, \\ \varphi_t \pm \sqrt{gh}\varphi_x &= 0, \end{aligned} \quad (1.85)$$

где знак “+” выбирается на правой границе, а “−” — на левой. При этом считается, что дно в окрестности границ постоянное.

## 1.2. Конечно-разностная схема и алгоритм решения разностной задачи

Изучению свойств численных алгоритмов для НЛД-моделей посвящено не так много работ. В работах [52, 102] показано, как можно согласовать дисперсионные свойства разностных схем и аппроксимируемых ими НЛД-уравнений. В статьях [39, 132] дан обзор известных численных алгоритмов, основанных на расщеплении систем НЛД-уравнений, и выполнен диссипативный и дисперсионный анализ используемых конечно-разностных схем. Статья [94] посвящена исследованию разностных схем для RLW-уравнения (Regularised Long Wave equation), в частности, рассматривается вопрос об устойчивости алгоритмов. Аппроксимация и устойчивость алгоритмов для некоторых СНЛД-моделей исследованы в работе [88]. Анализ устойчивости некоторых разностных алгоритмов для расширенных систем НЛД-уравнений выполнен в исследовании [103]. В отличие от многих других работ в статье [139] устойчивость алгоритмов для НЛД-моделей рассматривалась в случае неровного дна.

В отличие от НЛД-моделей алгоритмы для классической SW-модели мелкой воды хорошо изучены и широко применяются [6, 53, 87, 117, 158]. Так, например, в статье [71] представлена явная двушаговая разностная схема типа предиктор-корректор для уравнений мелкой воды. Важными параметрами схемы являются TVD-ограничители  $\theta^h$ , в зависимости от выбора которых указанная схема может стать эквивалентна, например, противопоточной схеме или схеме Лакса-Вендроффа. Показано, что при специальном выборе этого параметра на основе анализа дифференциального приближения схема сохраняет стационарный гидравлический скачок, а её обобщение на случай подвижной сетки также сохраняет и движущийся. Дальнейшее развитие метода можно проследить, например, в работах [64, 159]. В [84] отмечается, что свойства алгоритмов для НЛД-моделей сильно зависят от решателя гиперболической части.

В настоящем параграфе численный алгоритм для решения одномерных полных НЛД-уравнений строится на выделении [14, 20] в исходной модели гиперболической системы классических уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью и ОДУ второго порядка для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления по глубине (см. §1.1). Описывается аппроксимация ОДУ для дисперсионной составляющей давления при помощи интегро-интерполяционного метода, при этом получившаяся разностная задача решается методом прогонки. Даются некоторые замечания о корректности и устойчивости метода. Демонстрируется конечно-разностная схема типа предиктор-корректор для гиперболической системы, основанная на идеях из работы [71], а также алгоритм решения всей задачи. В упрощённой постановке исследуются свойства конечно-разностного алгоритма, такие как устойчивость, дисперсия и диссипация.

### 1.2.1. Разностные уравнения для функции $\varphi$ во внутренних узлах

Пусть  $\bar{h}$  — шаг равномерной сетки  $\bar{\Omega}_h$  с узлами  $x_j$ , покрывающей отрезок  $\Omega = [0, L]$ , т. е.  $\bar{h} = L/N$ ,  $x_j = j\bar{h}$ ,  $j = 0, \dots, N$ . Разностную схему для эллиптического уравнения (1.15) построим интегро-интерполяционным методом.

Для получения разностных уравнений во внутренних узлах  $x_j$  ( $j = 1, \dots, N - 1$ ) возьмем элементарную ячейку сетки  $\omega_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  с центром  $x_j$ , где  $x_{j\pm 1/2} = x_j \pm \bar{h}/2$ , и проинтегрируем уравнение (1.15) по этой ячейке:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (k\varphi_x)_x dx - 6 \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (k_{01})_x \varphi dx - 12 \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} k_{00} \varphi dx = \\ & = 2 \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_x^2 dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right)_x dx - 6 \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{R}{Hr} dx. \end{aligned} \quad (1.86)$$

В зависимости от выбора аппроксимационных формул для входящих в равенство (1.86) производных и интегралов будут получаться те или иные разностные уравнения. Здесь будем использовать следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (k\varphi_x)_x dx \sim (k\varphi_x)_{j+1/2} - (k\varphi_x)_{j-1/2}, \\ & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (k_{01})_x \varphi dx \sim (k_{01,j+1/2} - k_{01,j-1/2}) \varphi_j, \end{aligned}$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} k_{00} \varphi dx \sim \frac{\bar{h}}{2} [k_{00,j+1/2} + k_{00,j-1/2}] \varphi_j,$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left( \frac{h_x R}{r} + g \eta_x \right)_x dx \sim \left( \frac{h_x R}{r} + g \eta_x \right)_{j+1/2} - \left( \frac{h_x R}{r} + g \eta_x \right)_{j-1/2},$$

$$6 \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{R}{Hr} dx \sim 3\bar{h} \left( \frac{R_{j+1/2}}{H_{j+1/2} r_{j+1/2}} + \frac{R_{j-1/2}}{H_{j-1/2} r_{j-1/2}} \right),$$

где

$$\varphi_{x,j+1/2} = \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{\bar{h}}, \quad k_{j+1/2} = \frac{4}{(Hr)_{j+1/2}}, \quad r_{j+1/2} = 4 + h_{x,j+1/2}^2,$$

$$k_{01,j+1/2} = \frac{h_{x,j+1/2}}{(H^2 r)_{j+1/2}}, \quad k_{00,j+1/2} = \frac{r_{j+1/2} - 3}{(H^3 r)_{j+1/2}}, \quad h_{x,j+1/2} = \frac{h_{j+1} - h_j}{\bar{h}},$$

$$R_{j+1/2} = \left( \frac{u^2 h_{xx} + B - \eta_x h_x}{r} \right)_{j+1/2},$$

$$h_{xx,j+1/2} = \begin{cases} \frac{h_{j+2} - h_{j+1} - h_j + h_{j-1}}{2\bar{h}^2}, & j = 1, \dots, N-2, \\ \frac{h_{j+1} - 2h_{j+1/2} + h_j}{\bar{h}^2}, & j = 0, j = N-1, \end{cases}$$

$$B_{j+1/2} = (h_{tt} + 2uh_{xt})_{j+1/2}, \quad h_{tt,j+1/2} = \frac{h_{tt,j+1} + h_{tt,j}}{2},$$

$$h_{tt,j} = \frac{h_j^{n+1} - 2h_j^n + h_j^{n-1}}{\tau^2}, \quad n \geq 1, \quad (1.87)$$

$$h_{xt,j+1/2} = \frac{h_{x,j+1/2}^{n+1} - h_{x,j+1/2}^n}{\tau},$$

$\tau$  — шаг по времени. Отметим, что функция  $\varphi$  будет вычисляться на каждом шаге по времени дважды, при этом в качестве величин  $\eta$ ,  $H$ ,  $u$  при первом вычислении берутся параметры течения с  $n$ -го слоя по времени в целых узлах, а при втором — с промежуточного в полуцелых. В первом случае применяются формулы

$$2 \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_x^2 dx \sim \bar{h} [u_{x,j+1/2}^2 + u_{x,j-1/2}^2],$$

$$\eta_{j+1/2} = \frac{\eta_{j+1} + \eta_j}{2}, \quad H_{j+1/2} = \frac{H_{j+1} + H_j}{2}, \quad u_{j+1/2} = \frac{u_{j+1} + u_j}{2}.$$

$$u_{x,j+1/2} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\bar{h}}, \quad \eta_{x,j+1/2} = \frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{\bar{h}},$$

а во втором

$$2 \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_x^2 dx \sim 2\bar{h} [u_{x,j}]^2,$$

$$\eta_j = \frac{\eta_{j+1/2} + \eta_{j-1/2}}{2}, \quad H_j = \frac{H_{j+1/2} + H_{j-1/2}}{2}, \quad u_j = \frac{u_{j+1/2} + u_{j-1/2}}{2}.$$

$$u_{x,j} = \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\bar{h}}, \quad \eta_{x,j} = \frac{\eta_{j+1/2} - \eta_{j-1/2}}{\bar{h}}.$$

При использовании выписанных аппроксимаций интегральное соотношение (1.86) превращается в разностное уравнение

$$a_j \varphi_{j-1} - c_j \varphi_j + b_j \varphi_{j+1} = d_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (1.88)$$

где

$$a_j = k_{j-1/2} > 0, \quad b_j = k_{j+1/2} > 0, \quad (1.89)$$

$$c_j = a_j + b_j + 6\bar{h} \left[ k_{01,j+1/2} - k_{01,j-1/2} + \bar{h} (k_{00,j+1/2} + k_{00,j-1/2}) \right], \quad (1.90)$$

$$d_j = \left( u_{x,j+1/2}^2 + u_{x,j-1/2}^2 \right) \bar{h}^2 + \bar{h} \left[ \left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right)_{j+1/2} - \left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right)_{j-1/2} \right] -$$

$$- 3\bar{h}^2 \left( \frac{R_{j+1/2}}{H_{j+1/2} r_{j+1/2}} + \frac{R_{j-1/2}}{H_{j-1/2} r_{j-1/2}} \right).$$

### 1.2.2. Аппроксимация краевых условий непротекания

Аппроксимируем теперь краевое условие третьего рода (1.83) в граничной точке  $x = 0$ . Для этого возьмем элементарную ячейку  $\omega_0 = [0, \bar{h}/2]$ , примыкающую к левой границе области. На этой ячейке аналог интегрального соотношения (1.86) запишется как

$$\underbrace{(k\varphi_x)}_{(\bar{h}/2)} - \underbrace{(k\varphi_x)}_{(0)} - 6k_{01}(\bar{h}/2)\varphi(0) + 6k_{01}(0)\varphi(0) - 12 \int_0^{\bar{h}/2} k_{00} \varphi dx =$$

$$= 2 \int_0^{\bar{h}/2} u_x^2 dx + \left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right) (\bar{h}/2) - \left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right) (0) - 6 \int_0^{\bar{h}/2} \frac{R}{Hr} dx, \quad (1.91)$$

Учитывая здесь краевое условие (1.83), получаем, что подчеркнутые члены взаимно уничтожаются, поэтому, используя описанные выше аппроксимации, получаем следующую дискретную форму соотношения (1.91):

$$k_{j+1/2} \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{\bar{h}} - 6k_{01,j+1/2} \varphi_j - 12k_{00,j+1/2} \varphi_j \frac{\bar{h}}{2} =$$

$$= 2u_{x,j+1/2}^2 \frac{\bar{h}}{2} + \left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right)_{j+1/2} - 6 \frac{R_{j+1/2}}{H_{j+1/2} r_{j+1/2}} \frac{\bar{h}}{2},$$

при этом  $j = 0$ . Умножая это равенство на  $\bar{h}$ , получаем разностное уравнение при  $j = 0$ :

$$-c_j \varphi_j + b_j \varphi_{j+1} = d_j, \quad j = 0, \quad (1.92)$$

где

$$b_j = k_{j+1/2} > 0, \quad c_j = b_j + 6\bar{h} \left[ k_{01,j+1/2} + \bar{h} k_{00,j+1/2} \right], \quad (1.93)$$

$$d_j = u_{x,j+1/2}^2 \bar{h}^2 + \bar{h} \left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right)_{j+1/2} - 3\bar{h}^2 \frac{R_{j+1/2}}{H_{j+1/2} r_{j+1/2}}.$$

Аналогично получается разностное уравнение в самом правом сеточном узле с номером  $j = N$ . Для этого используется ячейка  $\omega_N = [L - \bar{h}/2, L]$  и аналог соотношения (1.91) для этой ячейки

$$\begin{aligned} & \underline{(k\varphi_x)}(L) - \underline{(k\varphi_x)}(L - \bar{h}/2) - \underline{6k_{01}(L)\varphi(L)} + \underline{6k_{01}(L - \bar{h}/2)\varphi(L)} - 12 \int_{L-\bar{h}/2}^L k_{00}\varphi dx = \\ & = 2 \int_{L-\bar{h}/2}^L u_x^2 dx + \underline{\left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right)(L)} - \underline{\left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right)(L - \bar{h}/2)} - 6 \int_{L-\bar{h}/2}^L \frac{R}{Hr} dx. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Подчеркнутые слагаемые также взаимно сокращаются ввиду краевого условия (1.83), в результате чего получается следующее разностное уравнение:

$$a_j \varphi_{j-1} - c_j \varphi_j = d_j, \quad j = N, \quad (1.95)$$

где

$$a_j = k_{j-1/2} > 0, \quad c_j = a_j + 6\bar{h} \left[ -k_{01,j-1/2} + \bar{h} k_{00,j-1/2} \right], \quad (1.96)$$

$$d_j = u_{x,j-1/2}^2 \bar{h}^2 - \bar{h} \left( \frac{h_x R}{r} + g\eta_x \right)_{j-1/2} - 3\bar{h}^2 \frac{R_{j-1/2}}{H_{j-1/2} r_{j-1/2}}.$$

Таким образом, получена система из  $(N + 1)$  линейных уравнений (1.88), (1.92), (1.95) относительно  $(N + 1)$  неизвестных  $\varphi_j$ ,  $j = 0, \dots, N$ . Для поиска решения этой системы будем использовать метод прогонки.

### 1.2.3. О корректности метода прогонки

Для корректности и устойчивости метода прогонки, применяемого для решения разностной задачи (1.88), (1.92) и (1.95) достаточно [49], чтобы коэффициенты задачи удовлетворяли следу-



ЮЩИМ СООТНОШЕНИЯМ:

$$c_0 \neq 0, \quad c_N \neq 0, \quad a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (1.97)$$

$$|c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (1.98)$$

$$|c_0| \geq |b_0|, \quad |c_N| \geq |a_N|, \quad (1.99)$$

причем хотя бы в одном из неравенств — (1.98) или (1.99) — выполняется строгое неравенство.

Ввиду условий (1.84) будут выполняться неравенства

$$k_{01,1/2} \geq 0, \quad k_{01,N-1/2} \leq 0.$$

Поскольку всегда  $k_{00,j+1/2} > 0$ , то из формул (1.93), (1.96) следует, что

$$c_0 > b_0 > 0, \quad c_N > a_N > 0, \quad (1.100)$$

т. е. неравенства (1.99) являются строгими. Неравенства (1.100), (1.89) свидетельствуют о том, что условия (1.97) также выполняются.

Теперь рассмотрим условия (1.98), которые с учетом формулы (1.90) и положительности коэффициентов  $a_j, b_j$  записываются как

$$|c_j| = \left| a_j + b_j + 6\bar{h} \left[ k_{01,j+1/2} - k_{01,j-1/2} + \bar{h} \left( k_{00,j+1/2} + k_{00,j-1/2} \right) \right] \right| \geq a_j + b_j. \quad (1.101)$$

Если дно ровное, то  $k_{01} \equiv 0$ , поэтому  $c_j > a_j + b_j > 0$ , т. е. неравенства (1.98) являются строгими.

В случае неровного дна для выполнения неравенства (1.101) достаточно потребовать, чтобы выражение в квадратной скобке было неотрицательным:

$$k_{01,j+1/2} - k_{01,j-1/2} + \bar{h} \left( k_{00,j+1/2} + k_{00,j-1/2} \right) \geq 0. \quad (1.102)$$

Для плоского откоса  $h(x) = \alpha x + h_0$  ( $\alpha \neq 0$ ) левая часть этого неравенства принимает вид

$$\begin{aligned} & k_{01,j+1/2} - k_{01,j-1/2} + \bar{h} \left( k_{00,j+1/2} + k_{00,j-1/2} \right) = \\ & = \frac{\alpha}{4 + \alpha^2} \left( \frac{1}{H_{j+1/2}^2} - \frac{1}{H_{j-1/2}^2} \right) + \bar{h} \frac{1 + \alpha^2}{4 + \alpha^2} \left( \frac{1}{H_{j+1/2}^3} + \frac{1}{H_{j-1/2}^3} \right) = \frac{H_{j-1/2} + H_{j+1/2}}{(4 + \alpha^2) H_{j-1/2}^2 H_{j+1/2}^2} \times \\ & \times \left\{ \alpha \left( H_{j-1/2} - H_{j+1/2} \right) + \bar{h} (1 + \alpha^2) \frac{H_{j-1/2}^2 - H_{j-1/2} H_{j+1/2} + H_{j+1/2}^2}{H_{j-1/2} H_{j+1/2}} \right\}. \end{aligned}$$

Знак этого выражения определяется знаком выражения в фигурных скобках:

$$\begin{aligned} & \alpha (H_{j-1/2} - H_{j+1/2}) + \bar{h}(1 + \alpha^2) \left( \frac{H_{j-1/2}}{H_{j+1/2}} - 1 + \frac{H_{j+1/2}}{H_{j-1/2}} \right) \geq \\ & \geq \alpha \left( -\bar{h}\eta_{x,j} + \alpha(x_j - \frac{\bar{h}}{2}) + h_0 - \alpha(x_j + \frac{\bar{h}}{2}) - h_0 \right) + \bar{h}(1 + \alpha^2) = \bar{h}(1 - \alpha\eta_{x,j}), \end{aligned}$$

где

$$\eta_{x,j} = \frac{\eta_{j+1/2} - \eta_{j-1/2}}{\bar{h}}.$$

Таким образом, в случае плоского откоса для выполнения условия (1.101) достаточно потребовать, чтобы в каждом узле выполнялось неравенство

$$\alpha\eta_{x,j} \leq 1,$$

которое можно считать дискретным аналогом полученного ранее условия (1.77) и которое будет всегда выполняться для пологих волн, в частности, в состоянии покоя жидкости с невозмущенной свободной границей.

К сожалению, выписанное неравенство (1.102) выполняется не для любого профиля дна. Рассмотрим простейший

**Пример 1** (о нарушении условия диагонального преобладания). Пусть дно задается функцией  $y = -h(x)$ , где

$$h(x) = \begin{cases} \alpha x + h_0, & 0 \leq x \leq x_0, \\ 1, & x_0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (1.103)$$

где  $0 < x_0 < L$ ,  $0 < h_0 < 1$ ,  $\alpha = \frac{1-h_0}{x_0} > 0$ , т. е. дно представляет собой плоский откос, сопрягающийся в точке  $x_0$  с горизонтальной плоскостью.

Предположим, что точка сопряжения  $x_0$  совпадает с узлом сетки, имеющим номер  $j_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} k_{01,j_0+1/2} &= 0, & k_{01,j_0-1/2} &= \frac{\alpha}{4 + \alpha^2} \frac{1}{H_{j_0-1/2}^2}, \\ k_{00,j_0+1/2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{H_{j_0+1/2}^3}, & k_{00,j_0-1/2} &= \frac{1 + \alpha^2}{4 + \alpha^2} \frac{1}{H_{j_0-1/2}^3} \end{aligned}$$

и условие (1.102) примет вид

$$-\frac{\alpha}{4 + \alpha^2} \frac{1}{H_{j_0-1/2}^2} + \bar{h} \left( \frac{1}{4} \frac{1}{H_{j_0+1/2}^3} + \frac{1 + \alpha^2}{4 + \alpha^2} \frac{1}{H_{j_0-1/2}^3} \right) \geq 0. \quad (1.104)$$

Нам достаточно показать, что неравенство (1.104) нарушается хотя бы в одном частном случае. В качестве такого частного случая рассмотрим состояние покоя жидкости, когда  $\eta_{j+1/2} \equiv 0$  или,

по-другому,  $H_{j+1/2} = h_{j+1/2}$ . При этом предположении получаем, что

$$H_{j_0+1/2} = 1, \quad H_{j_0-1/2} = h_{j_0-1/2} = \alpha \left( x_0 - \frac{\bar{h}}{2} \right) + h_0 = 1 - \alpha \frac{\bar{h}}{2} < 1$$

и неравенство (1.104) запишется как

$$\frac{1}{4 + \alpha^2} \frac{1}{(1 - \alpha\bar{h}/2)^2} \left[ -\alpha + \bar{h} \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha\bar{h}/2} \right] + \frac{\bar{h}}{4} \geq 0.$$

Для малых значений шагов  $\bar{h}$  это неравенство можно переписать следующим образом:

$$\frac{1 + \alpha\bar{h} + O(\bar{h}^2)}{4 + \alpha^2} \left[ -\alpha + \bar{h}(1 + \alpha^2) + O(\bar{h}^2) \right] + \frac{\bar{h}}{4} \geq 0$$

или

$$\bar{h} \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4 + \alpha^2} \right] + O(\bar{h}^2) \geq \frac{\alpha}{4 + \alpha^2}.$$

Ясно, что при малых  $\bar{h}$  это неравенство выполняться не будет (правая часть положительна, а левая стремится к нулю при  $\bar{h} \rightarrow 0$ ).

Причина нарушения условия (1.102) кроется в том, что функция  $h(x)$ , заданная формулой (1.103) не является гладкой: в точке  $x_0$  первая производная этой функции терпит разрыв первого рода. Пусть теперь функция  $h(x)$  является достаточно гладкой. Можно ли ожидать выполнения условия (1.102) в этом случае?

Для гладких функций условие (1.102) можно переписать в следующем виде

$$h_{xx}H(4 - h_x^2) + 2(4 + h_x^2)(1 - h_x\eta_x) + O(\bar{h}) \geq 0.$$

Пренебрегая здесь членом порядка  $O(\bar{h})$ , приходим к условию вида (1.78) с нестрогим неравенством. Рассматривая затем только состояние покоя жидкости, получаем ограничение на форму дна:

$$h_{xx} \geq -2 \frac{4 + h_x^2}{h(x)(4 - h_x^2)}. \quad (1.105)$$

В силу неравенства

$$2 \frac{4 + h_x^2}{h(x)(4 - h_x^2)} \geq \frac{2}{h_{\max}},$$

где  $h_{\max} > 0$  — максимальное значений функции  $h(x)$ , приходим к выводу о том, что для выполнения неравенства (1.105) достаточно потребовать, чтобы

$$h_{xx} \geq -\frac{2}{h_{\max}}. \quad (1.106)$$

Выполнение условия (1.106) достигается путем сглаживания функции  $y = -h(x)$  в окрестности точек, в которых происходит потеря гладкости этой функции.

**Пример 2** (о выполнении условия (1.106) для гладких функций). Сгладим кусочно-линейную функцию (1.103) в окрестности точки  $x_0$  с помощью параболы:

$$h(x) = \begin{cases} \alpha x + h_0, & 0 \leq x \leq x_l, \\ -a(x - x_*)^2 + 1, & x_l \leq x \leq x_*, \\ 1, & x_* \leq x \leq L, \end{cases} \quad (1.107)$$

где

$$x_0 < x_* < 2x_0 < L, \quad x_l = \frac{1 - h_0 - \alpha x_*/2}{\alpha/2}, \quad a = \frac{\alpha}{2(x_* - x_l)} > 0,$$

$x_*$  — точка сопряжения параболы с горизонтальным участком дна,  $x_l$  — с плоским откосом,  $0 < x_l < x_0$ .

В рассматриваемом примере  $h_{\max} = 1$ , поэтому чтобы неравенство (1.106) выполнялось на участке сглаживания, необходимо выполнение неравенства  $a \leq 1$  или

$$\alpha \leq 2(x_* - x_l) = 4x_* - \frac{4(1 - h_0)}{\alpha},$$

т. е.  $4x_* \geq \alpha + 4x_0$ . Таким образом, достаточно выбрать

$$x_* \geq x_0 + \frac{\alpha}{4}. \quad (1.108)$$

**Замечание.** Неравенство (1.106) получено на основе изучения дифференциального аналога условия (1.102), причем в предположении, что  $\eta \equiv 0$ . При численном решении задач необходимо использовать условие (1.106) с некоторым запасом, например, в виде  $h_{xx} \geq -2/h_{\max} + \delta_s 0$ , где параметр  $\delta_s > 0$  подбирается экспериментальным путем. Для примера 2 это означает, что точку  $x_*$  следует выбирать по формуле  $x_* = x_0 + \mu_s \alpha/4$  с экспериментально подбираемым параметром  $\mu_s > 1$ .

#### 1.2.4. Дивергентная и недивергентная форма записи НЛД-уравнений

Рассмотрим разностную схему для системы уравнений гиперболического типа (1.1), (1.17) с дивергентной левой частью, записанной в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad (1.109)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + gH^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gHh_x + \varphi_x - \psi h_x \end{pmatrix}.$$

Эта система отличается от системы уравнений мелкой воды первого приближения только правой частью.

Недивергентная форма уравнений (1.109) имеет такой вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad (1.110)$$

где  $\mathcal{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{U}$  — матрица Якоби

$$\mathcal{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gH & 2u \end{pmatrix}, \quad (1.111)$$

собственные значения  $\lambda_{1,2}$  которой вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gH}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gH}$$

или

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u + c, \quad (1.112)$$

где  $c = \sqrt{gH}$ .

Выпишем также уравнение для вектора потоков  $\mathbf{f}$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathcal{A} \mathbf{G}. \quad (1.113)$$

Оно получается в результате умножения уравнения (1.109) на матрицу  $\mathcal{A}$ .

### 1.2.5. Схема предиктор–корректор

Пусть на  $n$ -м слое по времени вектор решения  $\mathbf{U}_j^n$  известен и является сеточной функцией, определенной в целочисленных узлах. В настоящем пункте будем считать, что функции  $\varphi$  и  $\psi$  известны, причем сеточная функция  $\varphi$  определена в узлах с целочисленными индексами, а  $\psi$  — в полужелтых узлах. Рассматриваемая здесь схема является двухшаговой. На этапе предиктор вычисляются потоки  $\mathbf{f}_{j+1/2}^*$  с помощью разностной схемы, аппроксимирующей уравнение (1.113):

$$\frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{f}_{j+1}^n + \mathbf{f}_j^n)}{\tau/2} + \left( \mathcal{R} \mathcal{D} \Lambda (\Lambda \mathcal{L} \mathbf{U}_x - \mathcal{L} \mathbf{G}) \right)_{j+1/2}^n = 0, \quad (1.114)$$

при этом  $j = 0, \dots, N - 1$ ,  $\mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}(\mathbf{U}_j^n)$ ,

$$\mathbf{U}_{x,j+1/2}^n = \frac{\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_j^n}{\bar{h}}. \quad (1.115)$$

Эта схема отличается от схемы [71] правой частью

$$\mathbf{G}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ G_{j+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad G_{j+1/2}^n = \varphi_{x,j+1/2}^n + (gH_{j+1/2}^n - \psi_{j+1/2}^n) h_{x,j+1/2}^n, \quad (1.116)$$

где

$$H_{j+1/2}^n = \frac{H_j^n + H_{j+1}^n}{2}, \quad \varphi_{x,j+1/2}^n = \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\bar{h}}, \quad h_{x,j+1/2}^n = \frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{\bar{h}}. \quad (1.117)$$

Поясним смысл обозначений, использованных в записи уравнения (1.114). Матрица (1.111) аппроксимируется в центре ячейки  $x_{j+1/2}$  матрицей

$$\mathcal{A}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_j^n u_{j+1}^n + gH_{j+1/2}^n & 2u_{j+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad (1.118)$$

где

$$u_{j+1/2}^n = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}.$$

Собственные значения матрицы (1.118) вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = \lambda_{1,j+1/2}^n = u_{j+1/2}^n - \sqrt{\left(u_{j+1/2}^n\right)^2 - u_j^n u_{j+1}^n + gH_{j+1/2}^n}; \quad (1.119)$$

$$\lambda_2 = \lambda_{2,j+1/2}^n = u_{j+1/2}^n + \sqrt{\left(u_{j+1/2}^n\right)^2 - u_j^n u_{j+1}^n + gH_{j+1/2}^n}. \quad (1.120)$$

Векторы

$$\mathbf{R}_{1,j+1/2}^n = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{2,j+1/2}^n = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

являются ее правыми собственными векторами, соответствующими собственным значениям (1.119) и (1.120), а векторы

$$\mathbf{L}_{1,j+1/2}^n = \frac{4}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{L}_{2,j+1/2}^n = \frac{4}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \quad (1.122)$$

— левыми.

С помощью этих векторов генерируются две матрицы: строками матрицы  $\mathcal{L}$  являются нормированные левые собственные векторы  $\mathbf{L}_k$  ( $k = 1, 2$ ), а нормированные правые собственные векторы  $\mathbf{R}_k$  являются столбцами матрицы  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{L}_{j+1/2}^n = \frac{4}{(\lambda_{2,j+1/2}^n - \lambda_{1,j+1/2}^n)^2} \begin{pmatrix} -\lambda_{2,j+1/2}^n & 1 \\ -\lambda_{1,j+1/2}^n & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.123)$$

$$\mathcal{R}_{j+1/2}^n = \frac{\lambda_{2,j+1/2}^n - \lambda_{1,j+1/2}^n}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda_{1,j+1/2}^n & \lambda_{2,j+1/2}^n \end{pmatrix}. \quad (1.124)$$

Диагональная матрица  $\Lambda$  из уравнения (1.114) взята из разложения матрицы (1.118)

$$\mathcal{A}_{j+1/2}^n = (\mathcal{R}\Lambda\mathcal{L})_{j+1/2}^n$$

и имеет вид

$$\Lambda_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} \lambda_{1,j+1/2}^n & 0 \\ 0 & \lambda_{2,j+1/2}^n \end{pmatrix}. \quad (1.125)$$

Другая диагональная матрица  $\mathcal{D}$  определена формулой

$$\mathcal{D}_{j+1/2}^n = \begin{pmatrix} 1 + \theta_{j+1/2}^1 & 0 \\ 0 & 1 + \theta_{j+1/2}^2 \end{pmatrix}, \quad (1.126)$$

при этом функции  $\theta_{j+1/2}^k$  ( $k = 1, 2$ ) заданы по формуле

$$\theta_{j+1/2}^k = \begin{cases} 0 & \text{при } \left| \tilde{g}_{j+1/2}^k \right| \leq \left| \tilde{g}_{j+1/2-s}^k \right|, \\ & \tilde{g}_{j+1/2}^k \cdot \tilde{g}_{j+1/2-s}^k \geq 0, \\ \theta_0^k \frac{\tilde{g}_{j+1/2}^k - \tilde{g}_{j+1/2-s}^k}{\tilde{g}_{j+1/2}^k} & \text{при } \left| \tilde{g}_{j+1/2}^k \right| > \left| \tilde{g}_{j+1/2-s}^k \right|, \\ & \tilde{g}_{j+1/2}^k \cdot \tilde{g}_{j+1/2-s}^k \geq 0, \\ \theta_0^k & \text{при } \tilde{g}_{j+1/2}^k \cdot \tilde{g}_{j+1/2-s}^k < 0, \end{cases} \quad (1.127)$$

в которой

$$s = \begin{cases} \text{sgn } \lambda_{1,j+1/2}^n & \text{при } k = 1, \\ \text{sgn } \lambda_{2,j+1/2}^n & \text{при } k = 2, \end{cases}$$

$$\tilde{g}_{j+1/2}^k = |\lambda_{k,j+1/2}^n| (1 - \kappa |\lambda_{k,j+1/2}^n|) p_{k,j+1/2}^n, \quad \theta_0^k = \frac{1 - \alpha |\lambda_{k,j+1/2}^n|}{\kappa |\lambda_{k,j+1/2}^n|},$$

$\kappa = \tau/\bar{h}$ ,  $p_k$  ( $k = 1, 2$ ) — компоненты вектора  $\mathbf{P}_{j+1/2}^n = \mathcal{L}_{j+1/2}^n \mathbf{U}_{x,j+1/2}^n$ .

Заметим, что для вычисления  $\varphi^*$  требуются не значения векторов потоков, а искомым функций  $H^*$  и  $u^*$ . Эти значения можно либо восстановить из полученных решений для векторов потоков, либо решая дополнительное уравнение

$$\frac{\mathbf{U}_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\mathbf{U}_{j+1}^n + \mathbf{U}_j^n)}{\tau/2} + \left( \mathcal{R}\mathcal{D}\Lambda\mathcal{L}\mathbf{U}_x - \mathbf{G} \right)_{j+1/2}^n = 0. \quad (1.128)$$

На втором шаге — шаге корректор — находятся величины  $U_j^{n+1}$  на  $(n+1)$ -ом слое по времени. Для этого используется аппроксимация дивергентной системы (1.109)

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + \frac{f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*}{\bar{h}} = G_j^*, \quad (1.129)$$

где  $j = 1, \dots, N-1$ ,

$$G_j^* = \begin{pmatrix} 0 \\ G_j^* \end{pmatrix}, \quad G_j^* = \varphi_{x,j}^* + (gH_j^* - \psi_j^*) h_{x,j}^*, \quad (1.130)$$

$$\varphi_{x,j}^* = \frac{\varphi_{j+1}^* - \varphi_{j-1}^*}{2\bar{h}}, \quad h_{x,j}^* = \frac{h_{j+1}^* - h_{j-1}^*}{2\bar{h}},$$

$$h_j^* = \frac{h_j^n + h_j^{n+1}}{2}, \quad \psi_j^* = \frac{\psi_{j+1/2}^* + \psi_{j-1/2}^*}{2}.$$

### 1.2.6. Алгоритм решения полной задачи

Пусть на  $n$ -м слое по времени величины  $U_j^n$  ( $j = 0, \dots, N$ ) известны. Для вычисления  $U_j^{n+1}$  ( $j = 0, \dots, N$ ) на  $(n+1)$ -м слое по времени выполняется следующая последовательность действий.

1. Сначала находится решение  $\varphi_j^n$  ( $j = 0, \dots, N$ ) задачи (1.88), (1.92), (1.95), при этом для вычисления всех необходимых коэффициентов используются известные значения  $U_j^n$ . Затем на основе разностного аналога формулы (1.12) вычисляется функция  $\psi_{j+1/2}^n$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ) в полуцелых узлах.
2. После этого из уравнения (1.114) определяется вектор потоков  $f_{j+1/2}^*$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ) и вектор решения  $U_{j+1/2}^*$  в полуцелых узлах.
3. Затем с использованием вычисленных величин  $U_{j+1/2}^*$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ) вновь решается задача (1.88), (1.92), (1.95). Ее решение  $\varphi_j^*$  ( $j = 0, \dots, N$ ) используется для определения по формуле (1.12) величин  $\psi_{j+1/2}^*$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ).
4. На завершительном этапе во внутренних узлах вычисляется вектор решения  $U_j^{n+1}$  ( $j = 1, \dots, N-1$ ) из уравнений (1.129), в правых частях которых участвуют значения  $\varphi_j^*$  и  $\psi_{j+1/2}^*$ .

Недостающие значения  $U_0^{n+1}$  и  $U_N^{n+1}$  в граничных узлах вычисляются при аппроксимации краевых условий (1.79), (1.81), (1.83) или (1.85) с первым порядком. В случае вертикальных стенок используются формулы

$$u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = 0, \quad (1.131)$$

$$\eta_0^{n+1} = \eta_1^{n+1}, \quad \eta_N^{n+1} = \eta_{N-1}^{n+1}, \quad (1.132)$$



а для неотражающих условий — уравнения

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} - \sqrt{gh_0} \frac{u_1^n - u_0^n}{\bar{h}} = 0, \quad \frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\tau} + \sqrt{gh_N} \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\bar{h}} = 0, \quad (1.133)$$

$$\frac{\eta_0^{n+1} - \eta_0^n}{\tau} - \sqrt{gh_0} \frac{\eta_1^n - \eta_0^n}{\bar{h}} = 0, \quad \frac{\eta_N^{n+1} - \eta_N^n}{\tau} + \sqrt{gh_N} \frac{\eta_N^n - \eta_{N-1}^n}{\bar{h}} = 0. \quad (1.134)$$

### 1.2.7. Свойства конечно-разностной схемы для линеаризованной системы

Для исследования таких свойств конечно-разностной схемы (КРС) как устойчивость, диссипация и дисперсия зачастую используют различные упрощения исходной постановки. Таким образом можно получить представление об ограничениях на применение алгоритма в более сложных задачах. Здесь будем рассматривать линеаризованные уравнения на ровном дне

$$\eta_t + h_0 u_x = 0, \quad (1.135)$$

$$u_t + g\eta_x = \nu u_{xxt}, \quad (1.136)$$

после выделения уравнения для дисперсионной составляющей  $\varphi$  из которых получается система

$$\eta_t + h_0 u_x = 0, \quad (1.137)$$

$$u_t + g\eta_x = \frac{\varphi_x}{h_0}, \quad (1.138)$$

$$\varphi_{xx} - \frac{\varphi}{\nu} = c_0^2 \eta_{xx}, \quad (1.139)$$

где  $c_0 = \sqrt{gh_0}$ ,  $\nu = h_0^2/3$ ,  $h_0$  — постоянная глубина,  $h \equiv h_0$ . Все указанные свойства позволяет исследовать анализ элементарных решений вида

$$\eta(x, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kx)}, \quad u(x, t) = U_0 e^{-i(\omega t - kx)}, \quad \varphi(x, t) = \Phi_0 e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (1.140)$$

Здесь и далее в этом пункте введены следующие обозначения:  $E_0, U_0, \Phi_0$  — амплитуды,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны,  $\omega$  — частота, функцию  $\theta = \omega t - kx$  называют фазой. Для решений вида (1.140) легко выписать оператор (или множитель) перехода со слоя времени  $t$  на слой  $t + \tau$ , с помощью которого удастся описать свойства как разностной схемы, так и аппроксимируемой ею системы дифференциальных уравнений. Подставляя решения вида (1.140) в систему (1.137) – (1.139), получаем оператор перехода

$$\bar{\Omega} = \frac{\eta(x, t + \tau)}{\eta(x, t)} = e^{-i\omega\tau} = |\bar{\Omega}| e^{-i\Phi}, \quad (1.141)$$

где  $|\bar{\Omega}| = 1$ ,  $\Phi = \arg \bar{\Omega} = -\omega\tau$ ,

$$\omega(k) = \pm \frac{c_0 k}{\sqrt{1 + \nu k^2}}. \quad (1.142)$$

Выражение (1.142) называют дисперсионным соотношением. Для разностной схемы имеются аналогичные определения. Подстановка гармоник (1.140) в разностную схему, аппроксимирующую систему уравнений, позволяет выписать уравнение для множителя перехода с  $n$ -ого слоя по времени на  $n + 1$ :

$$\rho = \frac{\eta(x_j, t^n + \tau)}{\eta(x_j, t^n)} = e^{-i\omega\tau} = |\rho|e^{-i\phi}. \quad (1.143)$$

Как и в случае дифференциального уравнения, можно найти выражение  $\omega = \omega(k)$ . Естественно, зависимость  $\omega(k)$  будет отличаться от (1.142).

Множитель перехода  $\rho$  будем рассматривать как функцию от  $\xi = k\bar{h}$ ,  $\xi < \pi$ . Устойчивость и аппроксимация КРС определяются через свойства функции  $\rho(\xi)$ . Выражение  $\chi = |\bar{\Omega}| - |\rho| = 1 - |\rho|$  будем называть диссипацией КРС, а выражение  $\Delta\phi = \Phi - \phi = \arg \bar{\Omega} - \arg \rho$  — фазовой ошибкой (терминология из книги [73]) или численной дисперсией. Поведение этих величин дает дополнительную информацию о КРС.

Рассмотрим подробно КРС для системы (1.137) – (1.139), шаги которой можно записать в следующем виде:

$$\frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\bar{h}^2} - \frac{\varphi_j^n}{\nu} = c_0^2 \frac{\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + \eta_{j-1}^n}{\bar{h}^2}, \quad (1.144)$$

$$\frac{\eta_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\eta_{j+1}^n + \eta_j^n)}{\tau^*} + h_0 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\bar{h}} = 0, \quad (1.145)$$

$$\frac{u_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\tau^*} + g \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_j^n}{\bar{h}} = \frac{1}{h_0} \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\bar{h}}, \quad (1.146)$$

$$\frac{\varphi_{j+3/2}^* - 2\varphi_{j+1/2}^* + \varphi_{j-1/2}^*}{\bar{h}^2} - \frac{\varphi_{j+1/2}^*}{\nu} = c_0^2 \frac{\eta_{j+3/2}^* - 2\eta_{j+1/2}^* + \eta_{j-1/2}^*}{\bar{h}^2}, \quad (1.147)$$

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\tau} + h_0 \frac{u_{j+1/2}^* - u_{j-1/2}^*}{\bar{h}} = 0, \quad (1.148)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + g \frac{\eta_{j+1/2}^* - \eta_{j-1/2}^*}{\bar{h}} = \frac{1}{h_0} \frac{\varphi_{j+1/2}^* - \varphi_{j-1/2}^*}{\bar{h}}, \quad (1.149)$$

где  $\tau^* = \tau T/2 = \tau(1 + \theta)/2$ ,  $T = 1 + \theta$ . Для упрощения записей далее в этом пункте индекс  $n$  будет опущен. Используя соотношения (1.145)–(1.146) исключим из уравнений (1.147)–(1.149) функции  $\eta^*$  и  $u^*$ :

$$\frac{\varphi_{j+3/2}^* - 2\varphi_{j+1/2}^* + \varphi_{j-1/2}^*}{\bar{h}^2} - \frac{\varphi_{j+1/2}^*}{\nu} = \frac{c_0^2}{\bar{h}^2} \left[ \frac{1}{2}(\eta_{j+2} - \eta_{j+1} - \eta_j + \eta_{j-1}) - \right. \\ \left. - \kappa^* h_0 (u_{j+2} - 3u_{j+1} + 3u_j - u_{j-1}) \right], \quad (1.150)$$

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j}{\tau} + \frac{h_0}{\bar{h}} \left[ \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_{j-1}) - \kappa^* g (\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}) + \right. \\ \left. + \frac{\kappa^*}{h_0} (\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) \right] = 0, \quad (1.151)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j}{\tau} + \frac{g}{\hbar} \left[ \frac{1}{2} (\eta_{j+1} - \eta_{j-1}) - \kappa^* h_0 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) \right] = \\ = \frac{1}{h_0} \frac{\varphi_{j+1/2}^* - \varphi_{j-1/2}^*}{\hbar}, \end{aligned} \quad (1.152)$$

где  $\kappa^* = \tau^*/\hbar$ . Подстановка решения в виде гармонических функций

$$\eta_j^n = E_0 \rho^n e^{ij\xi}, \quad u_j^n = U_0 \rho^n e^{ij\xi}, \quad \varphi_j^n = \Phi_0 \rho^n e^{ij\xi}, \quad \varphi_j^* = \Phi_0^* \rho^n e^{ij\xi},$$

в (1.144) и (1.150) даёт соответственно

$$\Phi_0 = \frac{c_0^2 E_0}{P} 4z, \quad P = R + 4z, \quad R = \frac{\hbar^2}{\nu}, \quad z = \sin^2 \frac{\xi}{2}, \quad (1.153)$$

и

$$\Phi_0^* = \frac{2c_0^2}{P} \sin \frac{\xi}{2} \left[ E_0 \sin \xi - iU_0 \kappa^* h_0 4z \right], \quad (1.154)$$

и после подстановки этих выражений в (1.151), (1.152) получается система уравнений для  $(E_0, U_0)^T$ :

$$E_0(\rho - 1 + 2C^2 T z M) + U_0(i\kappa h_0 \sin \xi) = 0, \quad (1.155)$$

$$E_0(i\kappa g \sin \xi M) + U_0(\rho - 1 + 2C^2 T z M) = 0, \quad (1.156)$$

где  $M = R/P \leq 1$ , а  $\kappa = \tau/\hbar$ . Приравнявая определитель этой системы к нулю, получим следующее уравнение для  $\rho$ :

$$\rho^2 - 2\rho(1 - 2C^2 T z M) + 1 - 4C^2 T z M + 4C^4 T^2 z^2 M^2 + 4C^2 z M - 4C^2 z^2 M = 0, \quad (1.157)$$

при этом его дискриминант

$$\begin{aligned} D &= (1 - 2C^2 T z M)^2 - 1 + 4C^2 T z M - 4C^4 T^2 z^2 M^2 - 4C^2 z M + 4C^2 z^2 M = \\ &= -4C^2 z M(1 - z), \end{aligned} \quad (1.158)$$

неположителен. Тогда условие  $|\rho|^2 \leq 1$  можно записать как

$$1 - 4C^2 T z M + 4C^4 T^2 z^2 M^2 + 4C^2 z M - 4C^2 z^2 M \leq 1, \quad (1.159)$$

или

$$4C^2 z M \left[ 1 - T + z(C^2 T^2 M - 1) \right] \leq 0. \quad (1.160)$$

При  $z = 0$  это неравенство выполняется, а иначе разделим на  $4C^2 z M > 0$  и используем оценку  $M \leq 1$ :

$$1 - T + z(C^2 T^2 M - 1) \leq 1 - T + z(C^2 T^2 - 1) \leq 0. \quad (1.161)$$

Достаточными условиями для выполнения последнего неравенства будут

$$C^2T \leq 1, \quad T \geq 1,$$

откуда следует

$$\sqrt{gh_0} \frac{\tau}{\bar{h}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}, \quad \theta \geq 0. \quad (1.162)$$

Заметим, что аналогичные условия получаются при исследовании устойчивости такой схемы для бездисперсионной модели мелкой воды, которая получается, полагая в системе (1.137) – (1.139)  $\varphi \equiv 0$ . Т. е. добавление дисперсионной части не ухудшило устойчивость этого численного метода в линейном случае на ровном дне.

Для реализации может быть удобнее определять функцию  $\varphi^*$  не в полуцелых узлах, а в целых. В этом случае шаги схемы (1.147) – (1.149) можно переписать как

$$\frac{\varphi_{j+1}^* - 2\varphi_j^* + \varphi_{j-1}^*}{\bar{h}^2} - \frac{\varphi_j^*}{\nu} = c_0^2 \frac{\eta_{j+3/2}^* - \eta_{j+1/2}^* - \eta_{j-1/2}^* + \eta_{j-3/2}^*}{2\bar{h}^2}, \quad (1.163)$$

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\tau} + h_0 \frac{u_{j+1/2}^* - u_{j-1/2}^*}{\bar{h}} = 0, \quad (1.164)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + g \frac{\eta_{j+1/2}^* - \eta_{j-1/2}^*}{\bar{h}} = \frac{1}{h_0} \frac{\varphi_{j+1}^* - \varphi_{j-1}^*}{2\bar{h}}. \quad (1.165)$$

Тогда уравнение для  $\rho$  запишется следующим образом:

$$\rho^2 - 2\rho(1 - C^2Tz(M + N)) + 1 - 2C^2Tz(M + N) + 4C^4T^2z^2MN + 4C^2zN - 4C^2z^2N = 0, \quad (1.166)$$

где  $N = \frac{R + 4z^2}{P}$ . Можно показать, что теперь для выполнения  $|\rho| \leq 1$  условия (1.162) не будут достаточными, но они становятся таковыми, если, например, дополнительно потребовать

$$\theta \geq 4/R = 4\nu/\bar{h}^2. \quad (1.167)$$

Если положить  $\theta = 0$ , то для устойчивости такой схемы достаточными условиями будут

$$C \leq 1, \quad R \geq 1/2, \quad (1.168)$$

что ограничивает шаг по пространству снизу,  $\bar{h} \geq h_0/\sqrt{6}$ . На практике при использовании очень подробных сеток для устойчивости счёта достаточно сглаживать функции  $\varphi$  и  $\varphi^*$  на каждом шаге по времени. При этом возможно подобрать такой минимальный параметр сглаживания, что эта процедура не будет значительно влиять на решение задачи. Отметим, что с подобным условием сталкивались авторы [122] и [91] при численном решении расширенной системы с эллиптическим уравнением, но в схеме из этих работ оказывается более жёсткое ограничение,  $\bar{h} \geq 1.5h_0$ .

Рассмотрим теперь фазовые ошибки и диссипацию предложенных КРС. Так как множитель перехода  $\rho$  схемы (1.144)–(1.149) для линеаризованной расширенной системы находится из уравнения (1.157), то

$$\rho = 1 - 2C^2TzM \pm i\sqrt{4C^2zM(1-z)} = a \pm ib. \quad (1.169)$$

Тогда

$$\phi = \arg \rho = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \left( \pm \frac{C \sin \xi \sqrt{M}}{1 - 2C^2TzM} \right). \quad (1.170)$$

Рассмотрим значения  $\xi$ , лежащие в окрестности нуля, что соответствует длинным волнам. Для асимптотической оценки  $\phi$  воспользуемся следующими разложениями Маклорена:

$$\sin \xi = \xi - \frac{\xi^3}{3!} + O(\xi^4),$$

$$\arctan \xi = \xi - \frac{\xi^3}{3} + O(\xi^4),$$

$$(1 + \xi)^{-1} = 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + O(\xi^4),$$

$$\sin^2 \xi = \xi^2 + O(\xi^4), \quad \sin^2 \frac{\xi}{2} = \frac{\xi^2}{4} + O(\xi^4),$$

из чего следует

$$M = \frac{R}{R + 4z} = \frac{1}{1 + 4 \sin^2 \frac{\xi}{2} / R} = \frac{1}{1 + \xi^2 / R + O(\xi^4 / R)} = 1 - \xi^2 / R + O(\mu^4),$$

$$\sqrt{M} = \sqrt{1 - \xi^2 / R + O(\mu^4)} = 1 - \frac{\xi^2}{2R} + O(\mu^4),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - 2C^2TzM} &= \frac{1}{1 - C^2T\xi^2/2(1 - \xi^2/R + O(\mu^4))} = \\ &= \frac{1}{1 - C^2T\xi^2/2 + O(\mu^2\xi^2, \xi^4)} \end{aligned}$$

где  $\mu$  — параметр дисперсии (в НЛД-моделях мелкой воды второго приближения отбрасываются слагаемые  $O(\mu^4)$ ). При этом

$$\mu^2 = \frac{h_0^2}{\lambda^2} = \frac{k^2 h_0^2}{(2\pi)^2} = \frac{\xi^2}{R} \frac{3}{(2\pi)^2},$$

то есть можно считать, что  $\xi$  того же порядка малости, что и  $\mu$ . Тогда  $\phi$  для указанной схемы будет вычисляться следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \pm C\xi \left(1 - \frac{\xi^2}{6}\right) \left(1 - \frac{\xi^2}{2R}\right) \left(1 + \frac{C^2T\xi^2}{2}\right) + O(\mu^4) = \\ &= \pm C\xi \left(1 + \xi^2 \left(\frac{C^2T}{2} - \frac{1}{2R} - \frac{1}{6}\right)\right) + O(\mu^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi &= \arctan \frac{b}{a} = \frac{b}{a} - \frac{1}{3} \left( \frac{b}{a} \right)^3 + O\left( \left( \frac{b}{a} \right)^5 \right) = \\
&= \pm C\xi \left( 1 + \xi^2 \left( \frac{C^2 T}{2} - \frac{1}{2R} - \frac{1}{6} \right) \right) - \frac{1}{3} (\pm C\xi)^3 + O(\mu^4) = \\
&= \pm C\xi \left( 1 + \xi^2 \left( \frac{C^2(3T-2)-1}{6} - \frac{1}{2R} \right) \right) + O(\mu^4).
\end{aligned}$$

Для системы линеаризованных уравнений (1.137) – (1.139) справедливо

$$\Phi = -\omega\tau = \pm\tau \frac{c_0 k}{\sqrt{1+\nu k^2}} = \pm\tau \frac{c_0 \xi}{\sqrt{1+\xi^2/R}} = \pm C\xi \left( 1 - \frac{\xi^2}{2R} \right) + O(\mu^4),$$

что приводит к следующему выражению для фазовой ошибки

$$\Delta\phi = \Phi - \phi = \pm C \frac{\xi^3}{6} (C^2(3T-2) - 1) + O(\mu^4).$$

Заметим, что схемная ошибка имеет тот же порядок по  $\xi$  и  $\mu$  что и “физическая” дисперсия, когда

$$C^2(3T-2) - 1 \neq 0.$$

В этих случаях, для того, чтобы “физическая” дисперсия преобладала над численной, необходимо потребовать

$$C \frac{\xi^3}{6} |C^2(3T-2) - 1| \ll C \frac{\xi^3}{2R},$$

что эквивалентно условию для шага сетки

$$\bar{h} \ll \frac{h_0}{\sqrt{|C^2(3T-2) - 1|}}.$$

В частном случае, когда  $T = 1$  и  $C = 1$  схемная ошибка как минимум на один порядок по  $\xi$  меньше “физической” дисперсии и может считаться малой при описании длинных волн. Для этого случая приведём графики изменения абсолютных значений фаз в зависимости от  $\xi$  (Рисунок 1.2) в рассматриваемой схеме  $|\phi|$ , в линеаризованных NLD-модели  $|\Phi|$  и модели потенциальных течений  $|\Phi_{PF}|$ , где

$$|\Phi_{PF}| = C \sqrt{\frac{\xi}{\delta} \tanh(\xi\delta)}$$

при этом  $\delta = h_0/\bar{h}$ . В таких обозначениях  $R = 3/\delta^2$  и, следовательно,

$$|\phi| = \arctan \left( \frac{C \sin \xi / \sqrt{1 + 4/3\delta^2 \sin^2 \xi/2}}{1 - 2C^2 T / (1 + 4/3\delta^2 \sin^2 \xi/2)} \right),$$

$$|\Phi| = \frac{C\xi}{\sqrt{1 + \xi^2\delta^2/3}}.$$

Для изображения на графике выберем значение параметра  $\delta = 2$ , то есть шаг сетки  $\bar{h}$  в 2 раза меньше глубины  $h_0$ . Как видно на из рисунка, при малых значениях  $\xi$ , почти до  $\pi/4$ , все три гра-

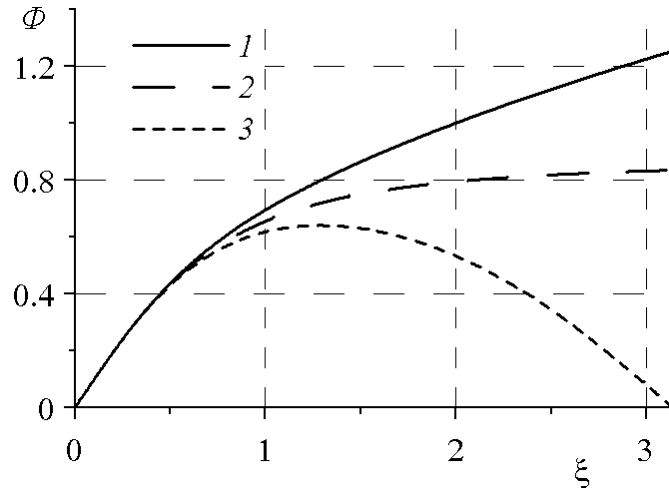


Рисунок 1.2 – Абсолютные значений фаз в зависимости от  $\xi$ : 1 – в линеаризованной модели потенциальных течений, 2 – в NLD-модели, 3 – в КРС (1.144)–(1.149)

фика практически совпадают. Это говорит о том, что NLD-модель адекватно описывает процесс распространения длинных волн, а предложенная КРС может использоваться в качестве численного алгоритма. При бóльших значениях  $\xi$  NLD-модель занижает абсолютные значения фазы, а КРС увеличивает это занижение. Заметим, что условие  $\xi \leq \pi/4$  при  $\delta = 2$  говорит о том, что длина волны больше глубины акватории хотя бы в четыре раза.

Исследуем диссипацию схемы (1.144)–(1.149):

$$|\chi| = 1 - |\rho| = 1 - \sqrt{1 - 4C^2zM(1 - T + C^2T^2zM - z)}.$$

Так как

$$4C^2zM = C^2\xi^2 + O(\mu^4),$$

после разложения  $|\rho|$  в ряд получим

$$|\chi| = \frac{C^2}{2}\xi^2\beta + O(\mu^4\beta),$$

где  $\beta = 1 - T + C^2T^2zM - z$ . В случае  $T \neq 1$   $\beta$  будет порядка  $O(1)$ , следовательно, диссипация  $|\chi|$  — порядка  $O(\mu^2)$ . При  $T = 1$  имеем

$$\beta = z(C^2M - 1) = (\xi^2/4 + O(\mu^4))(C^2M - 1) = (\xi^2/4 + O(\mu^4))(C^2(1 - \xi^2/R) - 1).$$

Таким образом, если  $C^2 \neq 1$ , то  $\beta$  — порядка  $O(\mu^2)$  и  $|\chi|$  — порядка  $O(\mu^4)$ . Если же  $C^2 = 1$ , то  $\beta$  — порядка  $O(\mu^4)$ , а  $|\chi|$  — порядка  $O(\mu^6)$ .

Заметим, что в схеме (1.144)–(1.146), (1.163)–(1.165) с вычислением  $\varphi^*$  в целых узлах при малых  $\xi$  дискриминант уравнения (1.166) для множителя перехода отрицательный, а коэффициенты

$a$  и  $b$  в его представлении в виде комплексного числа отличаются от вышеописанных на слагаемые порядка  $O(\mu^6)$ . Поэтому выведенные оценки численной дисперсии и диссипации будут справедливы и для этой схемы.

### 1.3. Численное моделирование одномерных задач

К настоящему времени достаточно много работ проведено по экспериментальному моделированию одномерных задач о взаимодействии волн с препятствиями (например, [35], [42]) и образованию волн недеформируемыми подводными оползнями, движущимися по плоскому откосу [31, 113]. Некоторые задачи моделировались в рамках полных гидродинамических моделей [62], [113], [69]. Эти экспериментальные данные и расчёты по полным моделям гидродинамики могут служить для верификации приближенных моделей и исследованию границ их применимости.

В настоящем параграфе будут представлены результаты численного моделирования одномерных задач, когда течение равномерно по одному из горизонтальных направлений. В задаче о распространении уединённой волны над ровным дном проводятся сравнения с аналитическими решениями для NLD- и NLDB-моделей, демонстрируется порядок аппроксимации используемой разностной схемы. Результаты расчётов по NLD- и SW-моделям будут сопоставляться с экспериментальными данными [35] и [42] в задаче о накате волны различной амплитуды на вертикальную стенку. В задаче о сходе подводного оползня по плоскому откосу и в водоёме с дном параболической формы даются некоторые замечания о важности учёта дисперсии волн, границах применимости описанных выше моделей, а также полученные решения по NLD-модели сравниваются с расчётами других авторов по НЛД-моделям.

#### 1.3.1. Особенности программной реализации для расчёта одномерных задач

Для расчёта модельных одномерных задач о распространении поверхностных волн и генерации их сходом подводного оползня разработан программный комплекс, включающий в себя реализацию численных алгоритмов для полной NLD-модели, слабо нелинейных дисперсионных моделей NLDB и NLDD, а также для классической модели мелкой воды. Программный комплекс состоит из:

- препроцессора, в котором происходит инициализация задачи, определение начальных данных в зависимости от входных параметров и вывод массивов с начальными данными в файлы, подготовленные для визуализации в программах Tecplot, Grapher и gnuplot;
- процессора, где в зависимости от входных параметров выбирается математическая модель и тип граничных условий и проводится расчёт;
- постпроцессора, в котором происходит вывод результатов расчёта в файлы.

В комплексе нет собственных средств визуализации результатов, поскольку функционала специализированных программ, таких как Tecplot, Grapher и gnuplot оказалось вполне достаточно. При



этом из-за простоты форматов входных данных для этих программ реализация процедур вывода в файл не вызвала ощутимых трудностей.

Разработанный программный комплекс обладает следующими особенностями:

- написан на языке программирования Fortran;
- имеет модульную структуру;
- кроссплатформенность (использовались компиляторы Intel и GCC в Windows и Unix системах);
- адаптивность (простота добавления новых расчётных модулей и сценариев расчёта);
- полное определение проведённых расчётов файлом входных параметров (для повторения считавшихся ранее задач достаточно указать соответствующие параметры в файле, не изменяя код программы).

Некоторые компоненты программного кода для одномерных задач стали основой для программ, предназначенных для расчётов двумерных (плановых) и “сферических” (на вращающейся сфере) задач, которые были зарегистрированы Федеральной службой по интеллектуальной собственности (Роспатентом) [16, 17].

### 1.3.2. Распространение уединенной волны

В §1.1 было показано, что в случае ровного дна система уравнений NLD-модели (1.24)–(1.26) имеет точное решение (1.27)–(1.29) в виде уединенной волны. Проведём сравнение полученных численных расчётов с аналитическим решением на модельной задаче о распространении уединённой волны.

Для расчёта был выбран бассейн длиной  $L = 15000$  м с глубиной  $h_0 = 100$  м. Вершина волны высотой  $a_0 = 10$  м располагалась в точке  $x_0 = 12500$  м (рис. 1.3). Волна двигалась влево до момента времени  $t = 250$  с.

Отметим, что аналитическое решение (1.27)–(1.29) является решением задачи Коши, но не точным решением краевой задачи с условиями (1.79), (1.81), (1.83). Поэтому сравнение численного решения с аналитическим имеет смысл только вдали от границ области.

Из рис. 1.3 видно, что численное решение для  $N = 400$  хорошо соответствует аналитическому. При этом максимальное отклонение свободной поверхности от точного решения (1.27),

$$E(N) = \|\eta^{exact} - \eta^N\|_{C[0,L]}, \quad (1.171)$$

составило  $E(400) = 0.1137$  м. Здесь за  $\eta^N$  обозначено численное решение, полученное при расчёте с количеством узлов сетки  $N + 1$ . Значения  $E(N)$  на последовательности сеток и отношения  $E(N/2)/E(N)$  представлены в таблице 1.1.

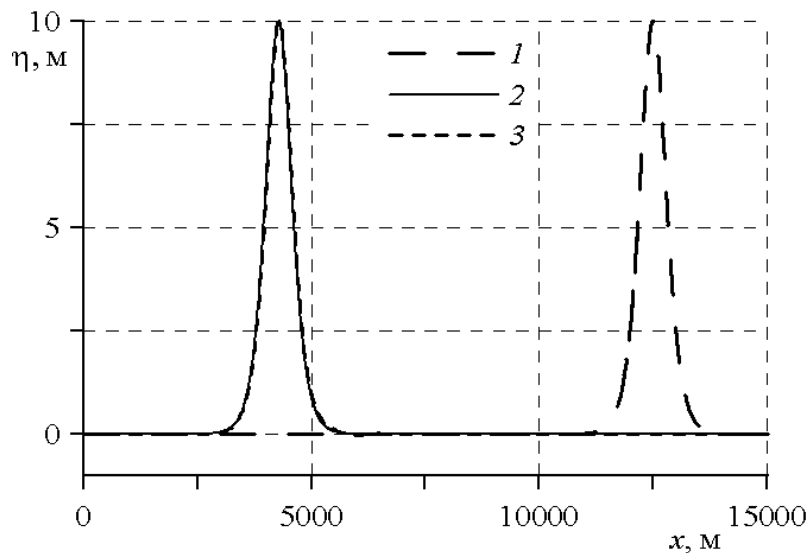


Рисунок 1.3 – Профили свободной поверхности: 1 — в начальный момент времени; 2, 3 — при  $t = 250$  с; 2 — аналитическое решение (1.27)–(1.29), 3 — численное решение при  $N = 400$

Таблица 1.1 – Максимальные отклонения  $E(N)$  и отношения  $E(N/2)/E(N)$

$N$	$E(N)$	$E(N/2)/E(N)$
200	0.4967	–
400	0.1137	4.37
800	$2.715 \cdot 10^{-2}$	4.19
1600	$6.641 \cdot 10^{-3}$	4.09

Как видно из таблицы, при измельчении шага сетки в два раза максимальное отклонение  $E$  от точного решения уменьшается приблизительно в 4 раза, таким образом, показан второй порядок аппроксимации разностной схемы.

Проведём сравнение полученных решений по полной NLD-модели и представленной слабо нелинейной NLDB-модели (1.1), (1.17), (1.52). В качестве начальных данных в первом случае будем использовать аналитическое решение для NLD-модели (1.27)–(1.29), а во втором — для NLDB-модели (1.73). Численные решения получены при  $N = 1600$ , остальные параметры задачи идентичны тем, что использовались в настоящем пункте. Свободные поверхности в конечный момент времени  $t = 250$  с показаны на рис. 1.4. Видно, что в первом случае NLD-модель сохраняет начальную форму, а NLDB-модель завышает амплитуду головной волны и генерирует за ней цуг из волн малой амплитуды. Во втором же случае, NLD-модель генерирует цуг и занижает амплитуду головной волны относительно NLDB-модели, в расчёте по которой форма волны практически не менялась со временем. Таким образом, было проверено, что при задании начальных данных для аналитического решения NLDB-модели в расчётах по ней сохраняется первоначальная форма волны, а NLD-модель занижает амплитуду головной волны. В обратном случае NLDB-модель завышает амплитуду. Это говорит о влиянии формы начального возмущения на результаты рас-

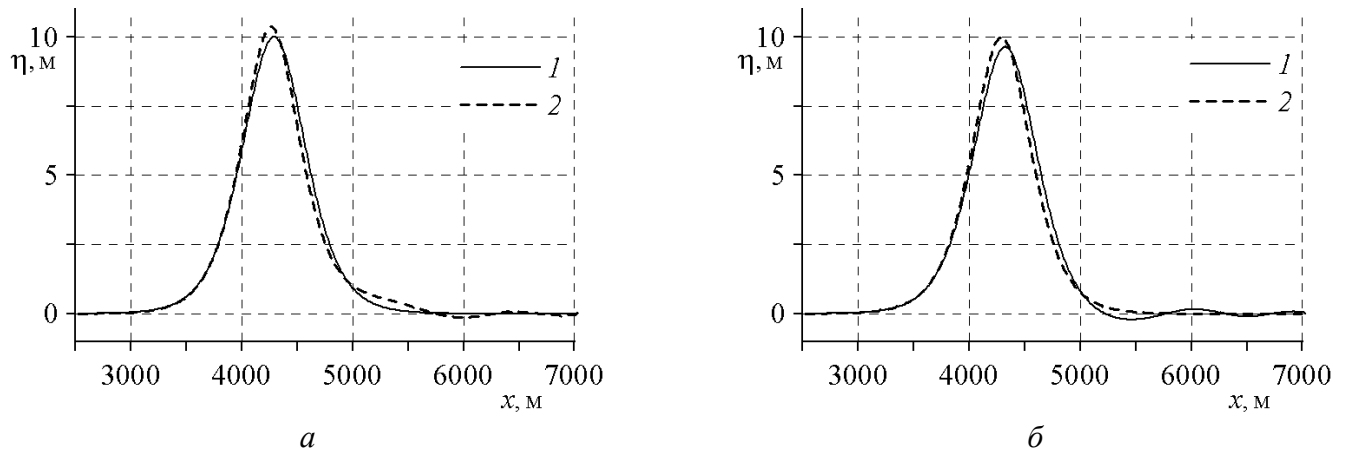


Рисунок 1.4 – Профили свободной поверхности в момент времени  $t = 250$  с при начальных данных для аналитического решения NLD-модели (а) и NLDB-модели (б): 1 – численное решение по NLD-модели, 2 – по NLDB-модели

чётов по разным моделям. Отметим, что в обоих случаях слабо нелинейная NLDB-модель давала бóльшую амплитуду головной волны.

### 1.3.3. Накат уединенной волны на вертикальную стенку

Рассмотрим задачу о накате уединенной волны на вертикальную преграду. Пусть в центре области с параметрами  $L = 3000$  м и  $h_0 = 100$  м в начальный момент времени располагается волна вида (1.27)–(1.29), которая при  $t > 0$  движется влево, совершает накат на левую вертикальную стенку, отражается от нее и после отражения движется вправо. На Рисунке 1.5 изображены профили волны в конечный момент времени  $t = 96$  с для амплитуд  $a_0 = 10$  и  $a_0 = 50$  метров. Заметим, что при откате волны с амплитудой 10 м форма профиля почти сохраняется, а с увеличением амплитуды картина течения усложняется: головная волна немного понижается, а за ней появляется дисперсионный “хвост” из волн малой амплитуды. Такой эффект при использовании SW-модели не наблюдается (результаты не представлены).

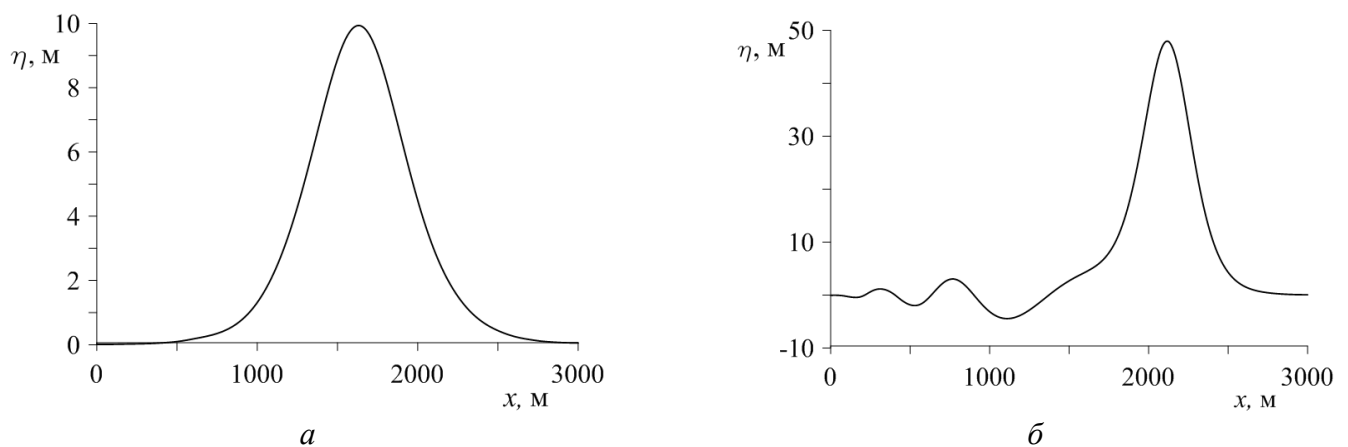


Рисунок 1.5 – Профили свободной поверхности после отката:  $a_0 = 10$  м (а);  $a_0 = 50$  м (б)

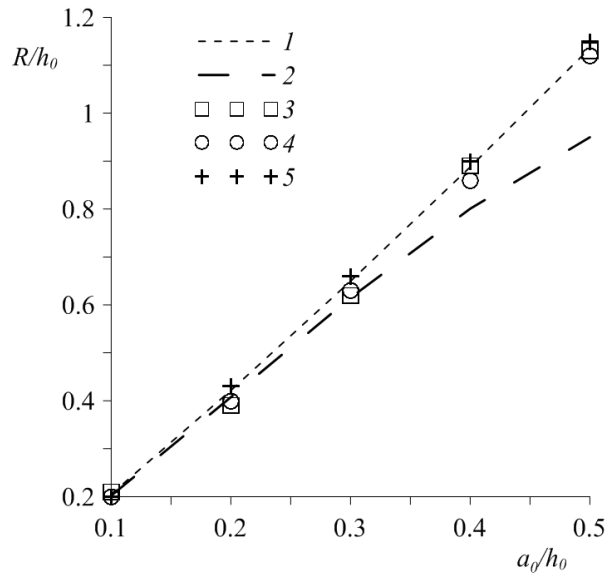


Рисунок 1.6 – Зависимость относительного максимального заплеска на стенке от начальной амплитуды уединенной волны: 1 – NLD-модель настоящей работы; 2 – SW-модель; экспериментальные данные [35] (3) и [42] (4); 5 – НЛД-модель из работы [33]

На Рисунке 1.6 для разных амплитуд  $a_0$  приведено сравнение полученного по NLD-модели максимального заплеска  $R$  на стенку с экспериментальными данными [35, 42], расчетами по НЛД-модели из работы [33] и по SW-модели. Видно, что при малых амплитудах ( $a/h_0 \leq 0.3$ ) NLD- и SW-модели дают достаточно хорошее соответствие с экспериментами, но при больших амплитудах SW-модель существенно занижает величину максимального заплеска. Эти отличия результатов SW-модели при больших амплитудах волн могут быть вызваны тем, что используемые начальные данные не являются для неё решением уравнений в виде уединённой волны.

### 1.3.4. Закон движения одномерного оползня

Приведём краткий вывод [129] закона движения оползня по неровному склону в одномерном случае.

При выводе уравнения движения оползень будем отождествлять с материальной точкой, движущейся по искривленной поверхности, однако в качестве силы, действующей на эту точку, используем интегральную сумму сил, действующих на элементарные объемы оползня. Таким образом, при расчете сил учитываются форма оползня и его расположение на неровном склоне. Выделим в уравнении, описывающем батиметрию, подвижную и неподвижную часть:

$$z = -h(x, t) = h_{bt}(x) + h_{sl}(x, t).$$

Будем считать, что в каждый момент времени положение оползня определяется некоторой точкой  $\mathbf{x}_c(t) = (x_c(t), z_c(t))$ , скользящей вдоль неровного дна  $h_{bt}$  согласно закону движения материальной точки по плоской кривой:

$$M\ddot{x}_c = F_x, \quad M\ddot{z}_c = F_z, \quad (1.172)$$

при этом  $z_c(t) = h_{bt}(x_c(t))$ ,  $x_c(0) = x_c^0 \in D_0$ ,  $z_c(0) = z_c^0 = h_{bt}(x_c^0)$ ,  $F_x, F_z$  — компоненты вектора силы  $\mathbf{F}$ ;  $M$  — масса оползня вместе с присоединенной массой воды. Далее будем предполагать, что при  $t > 0$  поверхность оползня описывается функцией  $z = h_{bt}(x) + h_{sl}(x, t)$ , где

$$h_{sl}(x, t) = h_{sl}^0(x + x_c^0 - x_c(t)). \quad (1.173)$$

Таким образом, функция  $h_{sl}(x, t)$  является финитной и ее носитель  $D_t$  полностью определяется носителем функции  $h_{sl}^0$  и положением точки  $\mathbf{x}_c(t)$ :

$$D_t = \left\{ x : x + x_c^0 - x_c(t) \in D_0 \right\} = (x_l(t), x_r(t)),$$

$$x_l(t) = x_l^0 + x_c(t) - x_c^0, \quad x_r(t) = x_r^0 + x_c(t) - x_c^0.$$

Из уравнений (1.172) несвободного движения материальной точки по плоской кривой следует уравнение относительно горизонтальной компоненты  $u = \dot{x}_c$  вектора скорости  $\mathbf{v}_c(t)$  движения точки  $\mathbf{x}_c(t)$ :

$$M \frac{d}{dt} (g_{11} u) = \frac{M}{2} g_{11}' u^2 + F_\tau \sqrt{g_{11}}. \quad (1.174)$$

Здесь  $g_{11} = 1 + (h_{bt}')^2$ ;  $h_{bt}' = dh_{bt}/dx$ ;  $g_{11}' = dg_{11}/dx$ ;  $F_\tau = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}$ ;  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор, касательный к кривой  $h_{bt}$ ,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \begin{pmatrix} 1 \\ h_{bt}' \end{pmatrix},$$

$M = (\rho_{sl} + C_w \rho_w) V$ ;  $\rho_w$  — плотность воды;  $\rho_{sl}$  — плотность оползня ( $\rho_{sl} > \rho_w$ );  $C_w$  — коэффициент присоединенной массы;  $V = W S_0$  — объем оползня;  $S_0$  — площадь поперечного сечения оползня плоскостью  $xOz$ :

$$S_0 = \int_{D_t} h_{sl}(x, t) dx = \int_{D_t} h_{sl}^0(x + x_c^0 - x_c(t)) dx = \int_{D_0} h_{sl}^0(x) dx = \text{const},$$

$W$  — размер оползня в направлении, перпендикулярном этой плоскости.

Поясним, какая величина в уравнении (1.174) выбирается в качестве силы  $F_\tau$ , действующей на материальную точку  $\mathbf{x}_c(t)$ . В вертикальном направлении на каждый элемент оползня с площадью горизонтального сечения  $W dx$  действуют силы тяжести и плавучести (выталкивающая сила воды):

$$\mathbf{f}_g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_g(x) \end{pmatrix}, \quad (1.175)$$

где  $x \in D_t$ ,

$$f_g(x) = -g (\rho_{sl} - \rho_w) h_{sl}(x, t) W dx. \quad (1.176)$$

Вычислим проекцию  $f_{g,\tau} = \mathbf{f}_g \cdot \boldsymbol{\tau}$  силы  $\mathbf{f}_g$  на направление касательного вектора  $\boldsymbol{\tau}$  и проинтегрируем полученное выражение по носителю  $D_t$  функции  $h_{sl}$ . В результате определим вклад в  $F_\tau$  сил

тяжести и плавучести:

$$F_{g,\tau}(t) = -(\rho_{sl} - \rho_w) W g \int_{D_t} h_{sl}(x, t) \frac{h'_{bt}(x)}{\sqrt{g_{11}(x)}} dx. \quad (1.177)$$

Сила сопротивления воды  $F_r$ , способствующая торможению оползня, направлена против его движения. Как и в работе [171], будем полагать, что величина  $f_r = |F_r|$  этой силы пропорциональна наибольшей площади  $\Pi = TW$  сечения оползня вертикальной плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ :

$$f_r = \frac{1}{2} C_d \rho_w \Pi v_c^2,$$

где  $C_d$  — коэффициент сопротивления воды;  $v_c^2 = |\mathbf{v}_c|^2 = g_{11} u^2$ . С учетом направления движения для величины  $F_{r,\tau} = \mathbf{F}_r \cdot \boldsymbol{\tau}$  имеем следующее выражение:

$$F_{r,\tau} = -\sigma f_r = -\frac{1}{2} \sigma C_d \rho_w T W v_c^2 \quad (1.178)$$

( $\sigma = \text{sgn } u$ ;  $T$  — максимальная толщина оползня).

Для того чтобы вычислить силу трения, вновь рассмотрим элементарный объем оползня с площадью сечения  $W dx$  и массой  $m = \rho_{sl} h_{sl}(x, t) W dx$ . Для этого объема силу трения будем определять по нормальной составляющей силы реакции  $N$ , действующей на выделенный элемент со стороны дна. Вычислим величину  $N$ , полагая, что элементарный объем движется согласно уравнениям вида (1.172)

$$m \ddot{x}_c = f_x, \quad m \ddot{z}_c = f_z, \quad (1.179)$$

или

$$m \frac{du}{dt} = f_x, \quad m \frac{d}{dt} (u h'_{bt}) = f_z. \quad (1.180)$$

Умножим первое из уравнений (1.180) на  $-h'_{bt}$  и сложим его со вторым уравнением (1.180)

$$-m h'_{bt} \frac{du}{dt} + m \frac{d}{dt} (u h'_{bt}) = f_n \sqrt{g_{11}}. \quad (1.181)$$

Здесь  $f_n = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к кривой  $h_{bt}$ ,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \begin{pmatrix} -h'_{bt} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_z \end{pmatrix}. \quad (1.182)$$

После простых преобразований уравнение (1.181) принимает вид

$$m \frac{h''_{bt}}{(g_{11})^{3/2}} v_c^2 = f_n. \quad (1.183)$$

Для элементарного объема оползня величина  $f_n$  представляет собой сумму из нормальной составляющей  $\mathbf{f}_g \cdot \mathbf{n}$  силы (1.175) и нормальной составляющей силы реакции  $N$ , действующей на

этот объем со стороны дна. Сила трения определяется по формуле  $f_{fr} = C_{fr}N$ , где  $C_{fr} = \operatorname{tg} \theta_*$  — коэффициент трения скольжения;  $\theta_* > 0$  — угол трения. Тогда из формул (1.183), (1.175), (1.176), (1.182) получаем выражение

$$f_{fr} = C_{fr} (f_n - \mathbf{f}_g \cdot \mathbf{n}) = C_{fr} h_{sl} W \left( \rho_{sl} \frac{h_{bt}''}{(g_{11})^{3/2}} v_c^2 + \frac{g(\rho_{sl} - \rho_w)}{\sqrt{g_{11}}} \right) dx. \quad (1.184)$$

Вектор силы трения  $\mathbf{F}_{fr}(t)$ , параллельный вектору скорости и направленный противоположно направлению движению, определим интегрированием элементарных сил (1.184) по интервалу  $D_t$ . Зная силу  $\mathbf{F}_{fr}$ , можно определить ее проекцию на направление касательного вектора  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$F_{fr,\tau} = -\sigma C_{fr} W \left( g(\rho_{sl} - \rho_w) \int_{D_t} h_{sl}(x, t) \frac{1}{\sqrt{g_{11}(x)}} dx + \rho_{sl} v_c^2 \int_{D_t} h_{sl}(x, t) \frac{h_{bt}''}{(g_{11})^{3/2}} dx \right). \quad (1.185)$$

Сумма компонент (1.177), (1.178), (1.185) принимается в качестве величины  $F_\tau$ , входящей в правую часть уравнения (1.174).

Пусть  $\theta(x) = -\operatorname{arctg} h_{bt}'(x)$  — локальный угол наклона дна  $h_{bt}$ . Тогда

$$\sin \theta(x) = -\frac{h_{bt}'(x)}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \cos \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$$

и уравнение (1.174) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} (g_{11}u) = \frac{g_{11}'}{2} u^2 + \left[ (\gamma - 1) g (I_1 - \sigma C_{fr} I_2) - \sigma \left( \gamma C_{fr} I_3 + \frac{C_d}{2} T \right) v_c^2 \right] \frac{\sqrt{g_{11}}}{(\gamma + C_w) S_0}, \quad (1.186)$$

где  $\gamma = \rho_{sl}/\rho_w > 1$ ,

$$I_1 = \int_{D_t} h_{sl}(x, t) \sin \theta(x) dx, \quad I_2 = \int_{D_t} h_{sl}(x, t) \cos \theta(x) dx, \quad I_3 = \int_{D_t} h_{sl}(x, t) K(x) dx,$$

$K(x)$  — знакоопределенная кривизна плоской кривой  $h_{bt}$ :

$$K(x) = \frac{h_{bt}''(x)}{[1 + (h_{bt}'(x))^2]^{3/2}} = \frac{h_{bt}''(x)}{(g_{11}(x))^{3/2}}.$$

Используя начальные данные

$$x_c(0) = x_c^0, \quad u(0) = 0 \quad (1.187)$$

и учитывая обозначения  $u = \dot{x}_c$ , из нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (1.186) находим абсциссу  $x_c(t)$  движущейся точки  $x_c(t)$ , что позволяет по формуле (1.173) определить форму поверхности оползня и, следовательно, определить в каждый момент времени нижнюю подвижную границу жидкости.

Для криволинейного профиля дна приближенное решение задачи (1.186), (1.187) можно найти, используя методы численного интегрирования.

В каждый момент остановки необходимо проверять критерий возможности дальнейшего движения оползня

$$|I_1| > C_{fr} I_2, \quad (1.188)$$

который означает, что величина касательной составляющей равнодействующей сил тяжести и плавучести больше силы трения. Условие (1.188) необходимо проверять и в начальный момент времени. Если оно не выполняется, то оползневая масса не сдвинется с места.

### 1.3.5. Оползень в модельном водоеме с дном параболической формы

Рассмотрим задачу о накате волн, образованных подводным оползнем, на берег водохранилища, форма дна которого задавалась дугой параболы (см. Рисунок 1.7)

$$z = h_{bl}(x) = (h_w - h_\xi) \left( \frac{x}{\xi} - 1 \right)^2 + h_\xi, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (1.189)$$

где  $h_\xi$  — максимальная глубина водоема,  $h_w$  — глубина в точке  $x = 0$ . В расчете использовались следующие значения параметров, определяющих форму дна:  $h_\xi = -100$  м,  $h_w = -10$  м,  $\xi = 500$  м,  $L = 1000$  м. С боков (в точках  $x = 0$  и  $x = L$ ) водоем был ограничен вертикальными непроницаемыми стенками с глубиной около них, равной  $h_w$ .

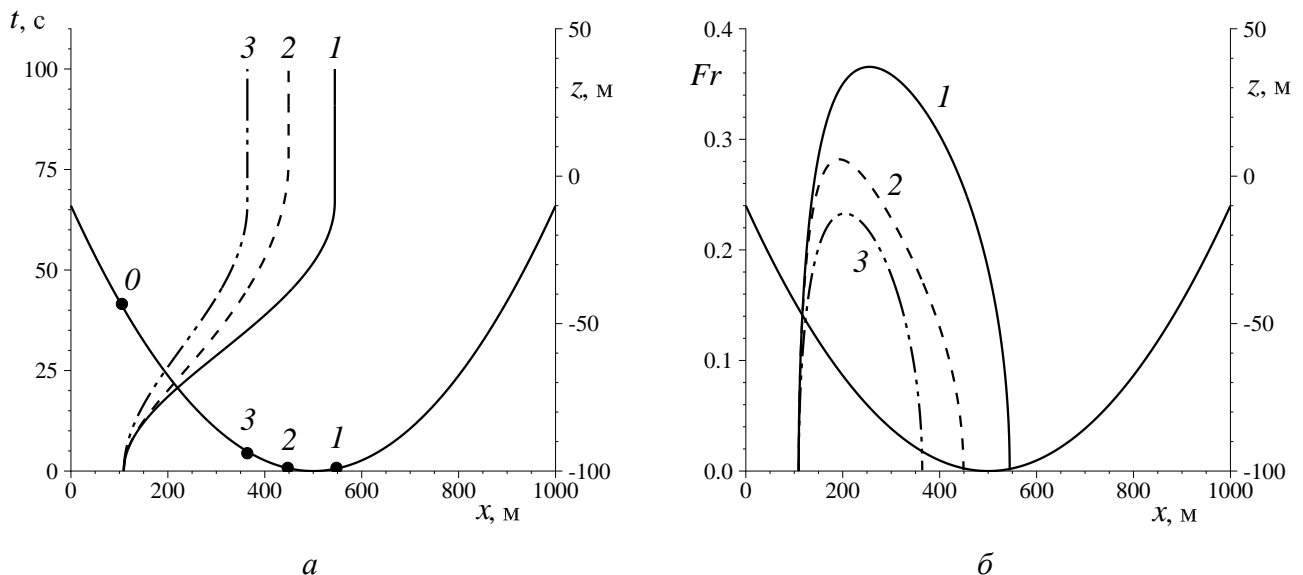


Рисунок 1.7 – Движение оползня по неровному дну параболической формы. График функции  $x = x(t)$  (а) и график зависимости числа Фруда  $Fr$  от координаты  $x(t)$  (б) при значениях параметров (1.190) (1); при  $b = 50$  м (2); при  $T = 1$  м,  $\theta_* = 10^\circ$  (3)



В вычислительных экспериментах за базовые параметры оползня и его движения принимались следующие значения:

$$T = 10 \text{ м}, b = 200 \text{ м}, \gamma = 2, C_w = 1, \theta_* = 5^\circ, C_d = 1, z_0 = -45 \text{ м}. \quad (1.190)$$

Использовалась следующая форма оползня:

$$h_{sl}(x) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi(x-x_0)}{b}\right) \right], & |x-x_0| \leq b/2, \\ 0, & |x-x_0| > b/2, \end{cases} \quad (1.191)$$

где  $x_0$  — абсцисса вершины оползня при  $t = 0$ . Соответственно,  $z_0 = h_{bt}(x_0)$ . При  $z_0 = -45$  м получаем

$$x_0 = \xi \left( 1 - \sqrt{\frac{z_0 - h_\xi}{h_w - h_\xi}} \right) \approx 109.13 \text{ м}.$$

График функции  $x = x(t)$  изображен на Рисунке 1.7, *a* (линия 1). Видно, что при значениях параметров (1.190) оползень, начав движение из исходного положения, обозначенного на профиле дна кружочком 0 и пройдя точку  $x = \xi$  наибольшей глубины, поднимается по инерции на небольшую высоту противоположного склона и останавливается в положении, отмеченном кружочком 1. При этом движение оползня происходит с докритическими скоростями (см. линию 1 на Рисунке 1.7, *b*, изображающую зависимость локального числа Фруда  $Fr(x) = \dot{x}/\sqrt{g|h_{bt}(x)|}$  от координаты  $x = x(t)$ ).

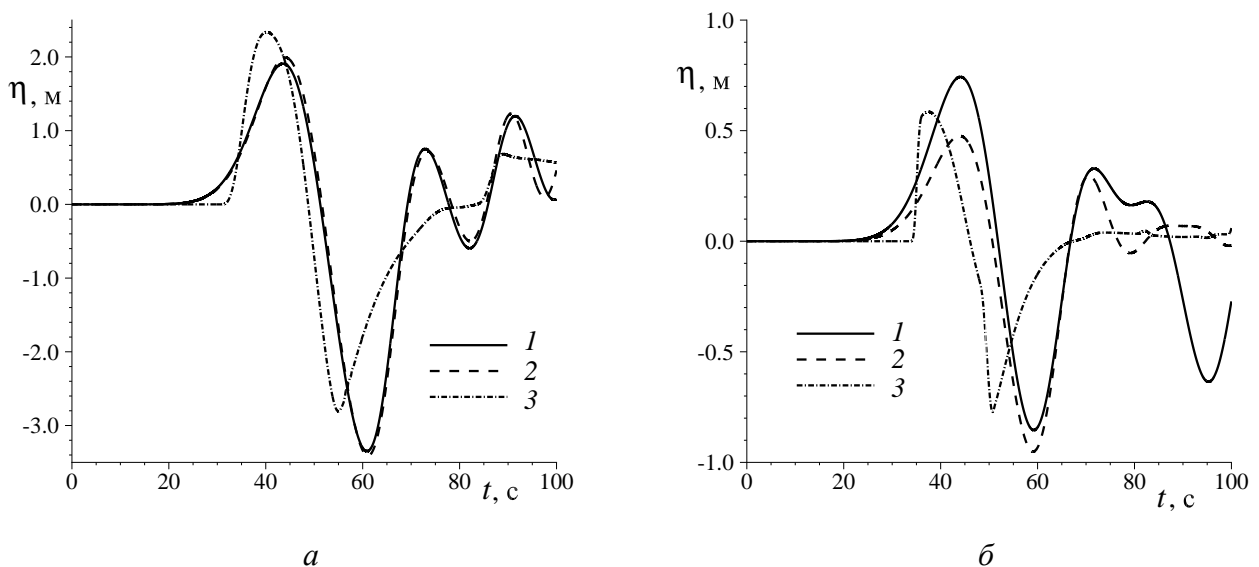


Рисунок 1.8 – Мареограммы на правом берегу водохранилища, полученные при  $b = 200$  м (*a*) и  $b = 50$  м (*b*) в рамках NLD-модели (1), модели потенциальных течений жидкости (2) и бездисперсионной модели мелкой воды (3)

Для выяснения влияния дисперсии на картину генерируемых волн и оценки границ применимости приближенных моделей были выполнены расчеты на основе модели плоскопараллельных

потенциальных течений со свободной границей [59, 60], NLD- и SW-моделей [63]. В отсутствие экспериментальных данных в качестве “эталонных” служили результаты, полученные по модели потенциальных течений, в которой учитываются вертикальные перемещения воды и нет ограничений на длину волны.

Из Рисунка 1.8, *a* видно, что для значений параметров (1.190) модель потенциальных течений и NLD-модель дают очень близкие результаты. При уменьшении длины оползня падает скорость его движения, дальность распространения (см. линии 2 на Рисунке 1.7) и генерируются более короткие поверхностные волны, которые уже не так хорошо описываются в рамках NLD-модели и тогда различие результатов становится значительным (см. Рисунок 1.8, *б*). Таким образом, длина оползня существенно влияет на адекватность численных результатов, получаемых на основе NLD-модели. Эта модель может быть получена из уравнений Эйлера в предположении [54], что можно пренебречь всеми членами, имеющими порядок малости  $O(\mu^4)$ , где  $\mu$  — параметр дисперсии, равный отношению характерных значений вертикального и горизонтального масштабов явления. В [113] полагалось, что  $\mu = |z_0|/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны. Поскольку при использовании модели потенциальных течений и NLD-модели возникают системы диспергирующих волн с разными длинами, то определить характерное значение  $\lambda$  затруднительно. С другой стороны, общим для всех моделей является формирование над движущимся оползнем сопровождающей его отрицательной волны (“впадины”), длина  $\lambda$  которой сопоставима с протяженностью оползня в горизонтальном направлении, т. е. с  $b$ . Если параметр дисперсии мерить по длине этой волны, то в соответствии с рисунками 1.8, *a* и *б* можно сделать вывод о том, что при  $\mu^4 = 0.002563$  NLD-модель дает хорошие результаты, а для  $\mu^4 = 0.6561$  — менее удовлетворительные. В отличие от NLD-модели бездисперсионная модель мелкой воды дает бóльшую скорость распространения волн, которые по прошествии некоторого времени формируют одиночную волну, многократно меняющую направление своего распространения при отражениях от противоположных берегов водоема. Таким образом, сравнение с результатами расчетов по “эталонной” модели показывает, что учет дисперсии волн приводит к более точному воспроизведению волновой картины, возникающей при движении оползня.

На Рисунке 1.9 дано сравнение профилей свободной границы, полученных на основе NLD- и NLDB-моделей. Последняя выведена [98] в предположении, что  $\alpha = O(\mu^2)$  и в NLD-модели можно пренебречь некоторыми членами порядка  $O(\alpha\mu^2)$ , где  $\alpha$  — параметр нелинейности. Графики на левом рисунке соответствуют базовым значениям параметров (1.190), на правом — при удвоенной высоте оползня. Отметим, что для оползня (1.191) закон его движения не меняется [65] при изменении высоты  $T$ , поэтому при разных высотах  $T$  траектории движения оползня и графики локального числа Фруда изображаются одними и теми же линиями  $I$  на рисунках 1.7. Однако амплитуда генерируемых волн существенно зависит от параметра  $T$ , возрастая при его увеличении [129]. Из Рисунка 1.9, *a* видно, что для значений параметров (1.190) NLDB-модель дает в рассматриваемой задаче практически неотличимые от полной NLD-модели результаты. При увеличении высоты оползня амплитуда генерируемых волн растет и различия в рассчитанных по этим моделям профилях свободной границы увеличиваются (см. Рисунок 1.9, *б*). Таким образом,

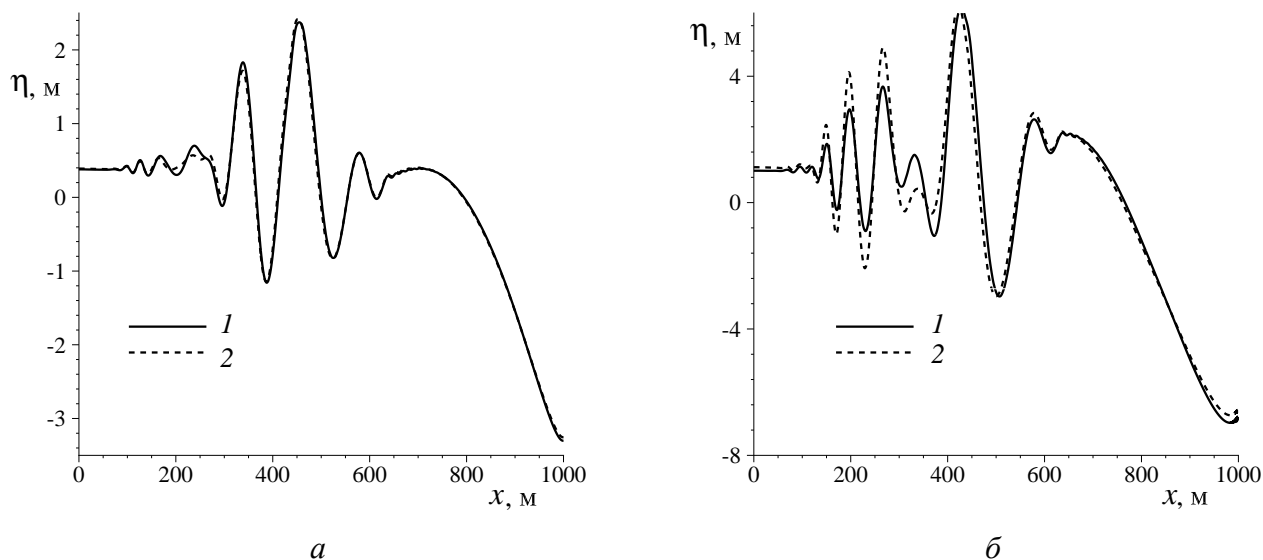


Рисунок 1.9 – Профили свободной границы в момент времени  $t = 60$  с, полученные при  $T = 10$  м (а) и  $T = 20$  м (б) в рамках NLD-модели (1) и NLDB-модели (2)

для поверхностных волн умеренной амплитуды использование слабо нелинейной NLDB-модели может оказаться вполне оправданным, поскольку разработанный для этой модели численный алгоритм может затрачивать меньше времени на расчёт из-за понижения степени нелинейности в некоторых членах уравнения (1.52) по сравнению с уравнением (1.15) для NLD-модели.

Результаты, полученные на основе NLDD-модели для параметров (1.190), сильно отличаются от тех, что получены по NLD-модели (см. Рисунок 1.10, а). Хорошее соответствие наблюдается только при условии действительно слабой деформации дна, что видно по мареограммам на Рисунке 1.10, б, полученным при  $T = 1$  м и угле трения  $\theta_* = 10^\circ$ . Для этих параметров оползень имеет малую высоту, движется медленнее (см. линии 3 на Рисунке 1.7), проходит небольшое расстояние по склону (точка остановки изображена кружочком 3 на Рисунке 1.7, а) и генерирует волны небольшой амплитуды.

Аналогичные выводы относительно областей применимости трех рассмотренных здесь НЛД-моделей получены при решении задачи исследования величин заплесков на плотину ГЭС. В этой задаче дно модельного водоема имело параболическую форму в месте начального расположения оползня и являлось горизонтальным в окрестности плотины.

Кроме того, проведенные вычислительные эксперименты подтвердили выводы работы [79] о том, что криволинейность склона оказывает существенное влияние на движение оползня и, как следствие, на величины максимальных заплесков волн на берег.

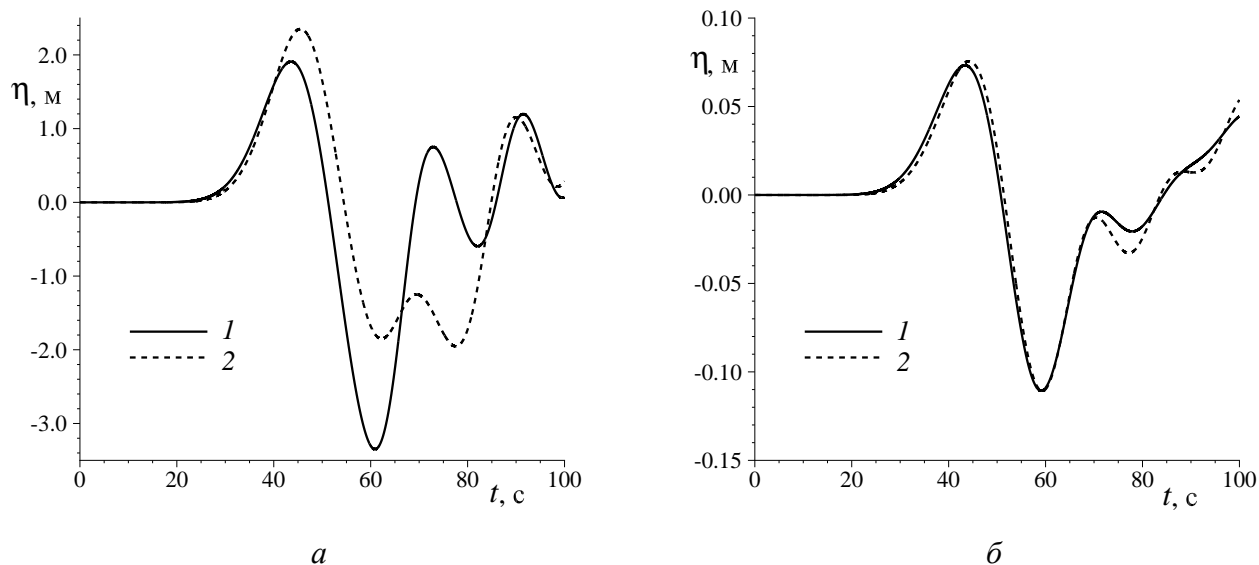


Рисунок 1.10 – Мареограммы на правом берегу водохранилища, полученные при  $T = 10$  м,  $\theta_* = 5^\circ$  (а) и  $T = 1$  м,  $\theta_* = 10^\circ$  (б) в рамках NLD-модели (1) и NLDD-модели (2)

### 1.3.6. Сравнение с экспериментальными данными для оползней на плоском откосе

В лабораторных исследованиях, описанных в [31], подводный оползень имитировался движением по плоскому откосу полностью погруженного в воду твердого тела с объемной плотностью  $1900 \text{ кг/м}^3$ . В продольном сечении форма тела была полуэллиптической с большой и малой полуосями эллипса равными 25 см и 5 см соответственно. Плоский откос сопрягался справа с горизонтальным участком дна.

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных было выполнено для разных углов наклона  $\theta$  плоского откоса. Здесь мы ограничимся описанием некоторых результатов только одного эксперимента, проведенного для случая, когда откос был ограничен слева вертикальной непроницаемой стенкой, т. е. рельеф дна описывался формулой

$$h_{bt}(x) = \begin{cases} h_w - x \tan \theta & \text{при } 0 \leq x \leq \xi, \\ h_\xi & \text{при } \xi \leq x \leq L, \end{cases} \quad (1.192)$$

где  $h_w$  — глубина около левой стенки (в точке  $x = 0$ ),  $\xi = (h_w - h_\xi) / \tan \theta$  — абсцисса основания склона, при этом использовались следующие значения параметров:

$$h_\xi = -0.9 \text{ м}, \quad h_w = -0.043 \text{ м}, \quad \theta = 15^\circ.$$

Тогда горизонтальный участок начинается в точке  $\xi = 3.198$  м. В расчетах правая граница области решения представляла собой непроницаемую стенку и устанавливалась на удалении  $L = 9.7$  м, достаточном для того, чтобы отраженные от нее волны не успевали до конца расчета достичь наклонного участка.

В экспериментах модель оползня, начав движение из точки с абсциссой  $x_0 = 0.40$  м и пройдя по откосу расстояние в 2.2 м, мгновенно останавливалась в момент времени 2.7 с. В расчетах мы использовали иную форму оползня нежели в экспериментах [31]. Связано это было с известным фактом [58], что все НЛД-модели весьма чувствительны к гладкости функции (1.3.4), задающей форму подвижного дна, а для полуэллипса функция (1.3.4) имеет неограниченные первые производные по  $x$  в точках пересечения его поверхности с неподвижным фрагментом дна (1.192). Поэтому численные эксперименты проводились для оползня (1.191) с гладкой поверхностью, причем с той же высотой и площадью продольного сечения, что и в лабораторном эксперименте. Такой же прием применялся, например, в работе [113] при сравнении численных результатов с экспериментальными данными, причем в указанной работе полуэллипс заменялся нефизичным бесконечно длинным “оползнем” с поверхностью, описываемой бесконечно дифференцируемой функцией. Это позволяло избегать появления высокочастотных колебаний, порождаемых разрывами производных функции (1.3.4). Кроме того, в наших численных экспериментах использовалось еще и сглаживание кусочно-линейного дна (1.192) посредством замены его в небольшой окрестности точки  $x = \xi$  на дугу параболы.

В [31] отмечается, что характерные размеры бассейна допускали пренебрежение трением “оползня” о поверхность склона и сопротивлением воды. Тем не менее, в численных расчетах мы учитывали эти эффекты с тем, чтобы траектории движения оползня по возможности лучше совпадали с экспериментальными. С учетом вышесказанного, при численном моделировании использовались следующие значения параметров, определяющих движение оползня согласно уравнению из работы [129]:

$$T = 0.05 \text{ м}, b = 0.785 \text{ м}, \gamma = 1.9, C_w = 0.6, \theta_* = 1^\circ, C_d = 1, z_0 = -0.15 \text{ м}. \quad (1.193)$$

Отметим, что для плоского откоса уравнение движения оползня [129] принимает более простой вид, чем в случае криволинейного склона, и записывается в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, приведенного в [113].

В экспериментах [31] параметры волн фиксировались волномерами, установленными в четырех точках. На Рисунке 1.11 приведены графики изменения поверхности воды в двух из этих четырех точек. Если не брать во внимание фазовый сдвиг, то видно, что полная NLD-модель удовлетворительно описывает большее число волн, проходящих через точки замера, чем бездисперсионная модель мелкой воды. Вместе с тем, при уходе оползня на глубину точность расчетов по NLD-модели понижается.

На Рисунке 1.12, *a* демонстрируется сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными из работы [113], в которой аналогично [31] исследовались закономерности волнообразования при движении твердой модели оползня по плоскому откосу (1.192) с тем же углом наклона  $\theta = 15^\circ$ , но с другими значениями двух параметров:  $h_\xi = -1.05$  м,  $h_w = 0$  м. Модель оползня также имела полуэллиптическую форму с полуосями 50 см и 5.2 см. В расчетах использовалась

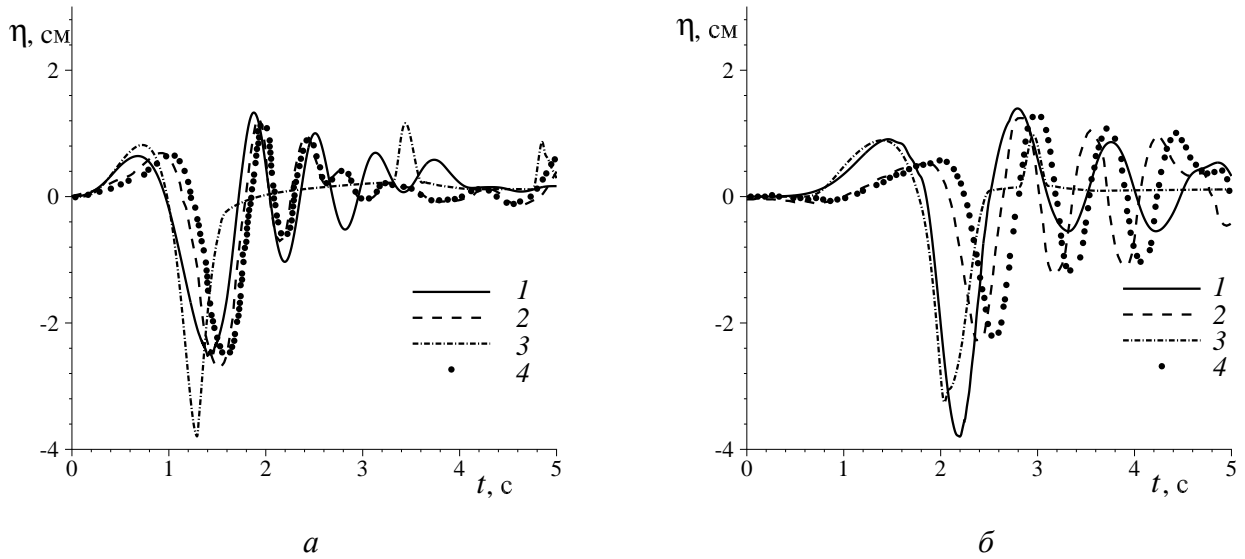


Рисунок 1.11 – Мареограммы в точках  $x = 0.9$  м (а) и  $x = 1.9$  м (б), полученные в рамках NLD-модели (1), модели потенциальных течений жидкости (2), модели мелкой воды (3) и в лабораторных экспериментах [31] (4)

гладкая форма оползня (1.191), а вместо значений параметров (1.193) брались следующие:

$$T = 0.052 \text{ м}, b = 1.57 \text{ м}, \gamma = 1.806, C_w = 1, \theta_* = 0^\circ, C_d = 1.0, z_0 = -0.309 \text{ м}. \quad (1.194)$$

Видно, что волна повышения и следующая за ней волна понижения очень хорошо описываются в рамках NLD-модели, лучше, чем при использовании бездисперсионных уравнений мелкой воды. Для значений параметров (1.194) слабо нелинейная NLDB-модель также дает удовлетворительные результаты (см. Рисунок 1.12, б) в отличие от упрощенной NLDD-модели, которая для рассматриваемых значений параметров дает результаты, уступающие по точности даже тем, что дает бездисперсионная модель.

### 1.3.7. Сравнение с результатами расчётов других авторов по НЛД-моделям

Проведём расчёты образования волн движением подводного оползня по плоскому откосу с параметрами, выбранными в работах [69, 72, 157] за основу. Модельная акватория состояла из плоского откоса с углом наклона  $\theta = 6^\circ$ , сопрягающегося с горизонтальным дном на глубине  $h_0 = 2.3$ . По аналогии с указанными работами значения параметров задачи приводятся в безразмерном виде. Оползень задавался формулой

$$h_{sl}(x, t) = T \frac{\left[ 1 + \tanh\left(\frac{x - x_c(t)}{S} + b\right) \right] \left[ 1 - \tanh\left(\frac{x - x_c(t)}{S} - b\right) \right]}{[1 + \tanh(b)]^2}, \quad (1.195)$$

при этом были выбраны следующие параметры:  $T = 0.05$  — максимальная толщина,  $S = 0.5 \cos \theta$  — параметр, характеризующий крутизну оползня,  $b = 1$  — расстояние между двумя

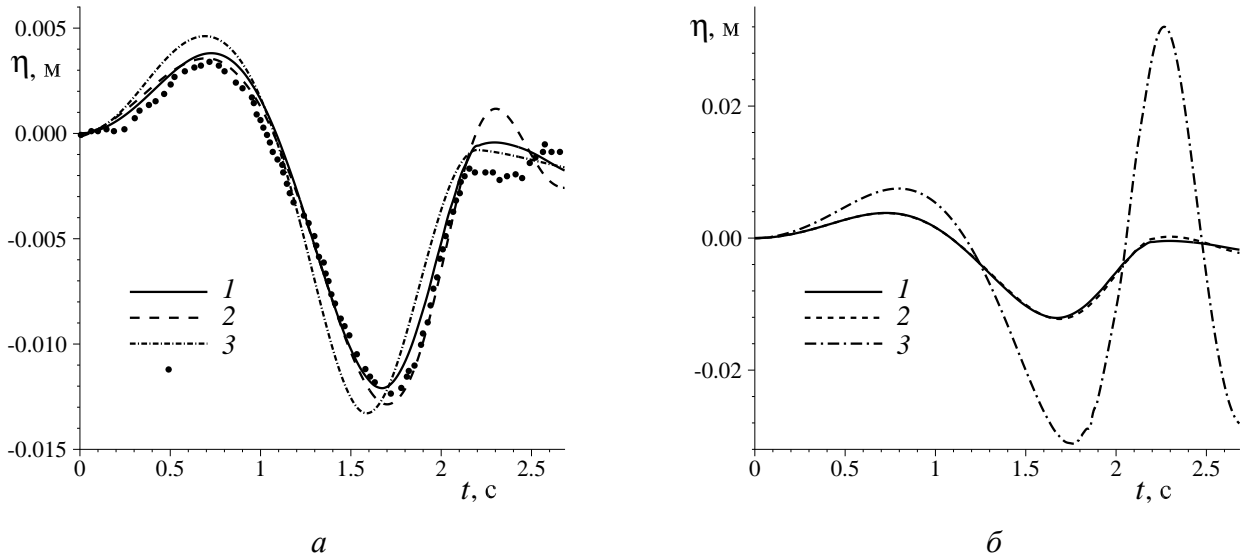


Рисунок 1.12 – Мареограммы в точке  $x = 1.775$  м. *а*: NLD-модель (1), модель потенциальных течений жидкости (2), модель мелкой воды (3), лабораторный эксперимент [113] (4); *б*: NLD-модель (1), NLDB-модель (2), NLDD-модель (3)

точками перегиба кривой, задающей поверхность оползня,  $x_c(t)$  — абсцисса центра оползня. В начальный момент времени оползень располагался на глубине  $z_0 = -0.25$ , что соответствует абсциссе  $x_c(0) \approx 2.38$ . В вычислительной области устанавливалась вертикальная стенка при  $x = 1$ , а на границе  $x = 41$  ставились условия свободного прохода волн. Авторами [69] отмечается, что наибольший интерес при сравнении результатов расчётов по различным моделям представляет мареограф  $M_6$  с координатой  $x = 12.38$ , поэтому здесь будем рассматривать только записи этого мареографа.

Закон движения оползня определялся по следующим формулам. До времени  $t_1 = 11.96$  оползень двигался равноускоренно,  $x_c(t) = x_c(0) + a_0 t^2 / 2$ , при этом  $a_0 = 0.3g \sin \theta$ , затем с постоянной скоростью  $u_{term} = 1.16\sqrt{bg \sin \theta}$  до момента времени  $t_{stop} = 30$  по закону  $x_c(t) = x_c(0) + u_{term}(t - t_1) + a_0 t_1^2 / 2$ , после чего оползень моментально останавливался. Заметим, что величина  $g$  авторами полагалась равной единице.

На Рисунке 1.13 представлены мареограммы, полученные в расчётах по НЛД-моделям, в сравнении с полной гидродинамической моделью. Рисунки *а* и *б* при этом взяты из [69], а графики расчётов по модели Перегринна и полной гидродинамической модели в *в* и *г* построены по оцифрованным значениям.

Сравнивая графики результатов, полученных по NLD-модели и слабо нелинейной модели Перегринна, можно сделать вывод, что первые волны хорошо описываются обеими моделями, но NLD-модель точнее воспроизводит волны, пришедшие к мареографу после  $t = 35$ . Однослойная модель Лью-Лайнетта показала наихудшее совпадение среди всех рассмотренных здесь моделей, поэтому можно сказать, что в этом классе задач модели с улучшенным дисперсионным соотношением (подход Нвогу) не только не дают преимуществ, но и могут давать худшие результаты

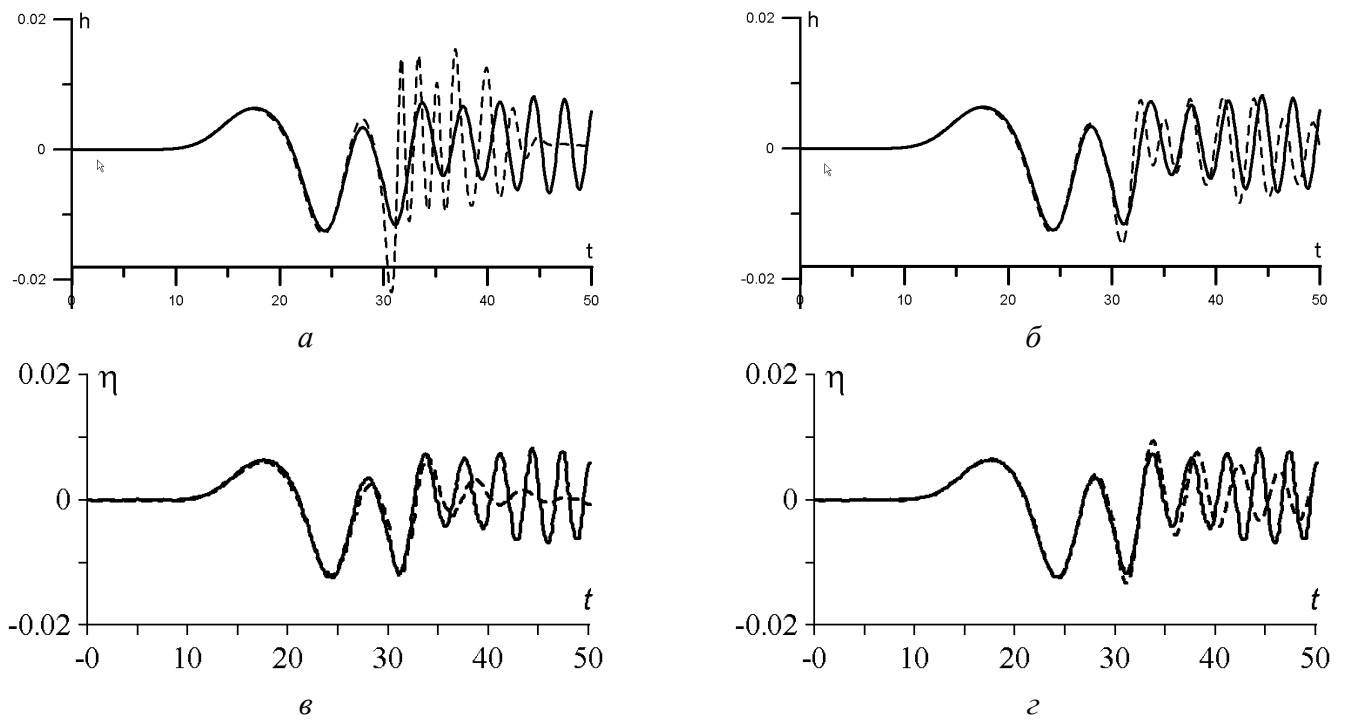


Рисунок 1.13 – Мареограммы  $M_6$ , полученные в расчётах по НЛД-моделям (пунктир) в сравнении с расчётом [69] по полной гидродинамической модели (сплошная линия):  $a$ ,  $b$  и  $c$  — расчёты из [69, 72, 157] по однослойной и двухслойной модели Лью-Лайнетта и модели Перегринна соответственно,  $z$  — расчёт по настоящей NLD-модели

по сравнению с моделями с осреднённой по глубине скоростью. Однако, её двухслойная модификация была достаточно близка к полной гидродинамической модели. Это может говорить об эффективности многослойного подхода и перспективе применения его в задачах, где однослойная модель теряет адекватность.

## 1.4. Заключение по Главе 1

Настоящая Глава посвящена разработке новых численных алгоритмов для одномерных систем НЛД-уравнений на подвижном дне.

В параграфе 1.1 описана постановка задачи, представлено выделение в системе полных НЛД-уравнений второго приближения на подвижном дне гиперболической системы классических уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью и ОДУ второго порядка для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления по глубине. Аналогичный подход продемонстрирован для двух слабо нелинейных моделей NLDB и NLDD, имеющих согласованное с трёхмерной моделью уравнение баланса энергии, при этом структура уравнений этих СНЛД-моделей остаётся такой же, как и в случае полной NLD-модели. Это позволило использовать единый принцип построения численных алгоритмов для всех представленных моделей. Более того, в следующих главах будет показано, что такой подход можно использовать для НЛД-моделей на плоскости (плановых) и на вращающейся сфере, при этом уравнение для дисперсионной составляющей в этих случаях оказывается равномерно эллиптическим.



Предложен вывод аналитического решения в виде уединённой волны для расширенных систем полных и слабо нелинейных дисперсионных уравнений. Показано, что фронт волны у аналитического решения NLDB-модели круче, чем у NLD, при этом отличия между ними возрастают с отношением амплитуды волны к глубине бассейна.

Установлено, что для корректности поставленной задачи для дисперсионной составляющей достаточно, чтобы дно было ровным, либо, в случае плоского откоса, чтобы волна не имела крутых фронтов.

Параграф 1.2 посвящён описанию численного алгоритма для расширенной системы полных одномерных НЛД-уравнений на подвижном дне. ОДУ второго порядка для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления по глубине аппроксимировалось при помощи интегрирующего метода, при этом получившаяся разностная задача решалась методом прогонки. Выведены некоторые ограничения для достаточного условия корректности и устойчивости метода. Рассмотрены два примера, в первом из которых это условие нарушалось из-за разрыва первой производной функции батиметрии, а во втором — оно восстанавливалось благодаря сглаживанию этой функции.

Разработана конечно-разностная схема типа предиктор-корректор для гиперболической системы, на шаге предиктор которой аппроксимируются вектора потоков в полуцелых узлах, а на шаге корректор — основные функции в целых. В схеме важную роль играет TVD-ограничитель  $\theta$ , который выбирается из соображений о сохранении монотонности решения. При определённом выборе этого ограничителя представленная схема может переходить в противопоточную или схему типа Лакса-Вендроффа. Отметим, что ОДУ для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления по глубине решается перед каждым шагом схемы для гиперболической системы. Рассмотрен вопрос об устойчивости, диссипации и численной дисперсии схем для расширенной системы линеаризованных уравнений на ровном дне.

Параграф 1.3 посвящён численному моделированию одномерных задач о длинных поверхностных волнах. При сравнении численного решения NLD-модели с аналитическим на задаче о распространении уединённой волны над ровным дном продемонстрирован второй порядок аппроксимации используемой разностной схемы. Также проверено, что NLDB-модель сохраняет со временем форму начального возвышения в виде уединённой волны, заданного по формуле (1.73).

В задаче о накате волны на вертикальную стенку сравнения с экспериментальными данными показали, что NLD-модель адекватно описывает процесс для всех рассмотренных начальных амплитуд волн, а SW-модель начинает занижать максимальный заплеск при больших амплитудах.

В задаче о сходе подводного оползня по плоскому откосу полученные решения сравнивались с экспериментальными данными [31], [113]. Показано, что при движении оползня по мелководной части NLD-модель хорошо описывает процесс образования и распространения волн, в отличие от SW-модели точнее воспроизводя амплитуду головной волны и дисперсионный “хвост”, однако, при выходе оползня на глубоководные участки наблюдается превышение амплитуд. При этом расчёты по NLDB-модели были очень близки к NLD-модели, а NLDD-модель неадекватно описывала процесс.

Сопоставления результатов NLD-модели с расчётами [69, 72, 157] по модели потенциальных течений, слабо нелинейной модели Перегринна [151], однослойной [141] и двухслойной [142] модели Лью-Лайнетта показали, что NLD-модель и модель Перегринна хорошо описывают первые волны, но NLD-модель лучше воспроизводит дисперсионный “хвост”. Однослойная модель Лью-Лайнетта сильно завышала амплитуды волн, поэтому можно говорить о неэффективности моделей на основе подхода Нвогу в этом классе задач. Тем не менее, двухслойная её модификация была достаточно близка к полной гидродинамической модели, из чего можно сделать вывод об эффективности многослойного подхода для задач, в которых однослойная модель теряет адекватность.

В модельной акватории с дном параболической формы образование волн подводным оползнем исследовалось в рамках моделей NLD, SW, NLDB, NLDD, а также по модели потенциальных течений [62], которая считалась эталонной для рассмотренного класса задач. Сравнения результатов расчётов показали, что, когда оползень достаточно длинный, расчёты по NLD-модели очень близки к расчётам по модели потенциальных течений, однако, уменьшение длины оползня может привести к потере её адекватности. NLDB-модель хорошо согласуется с NLD-моделью, но при увеличении толщины оползня и, соответственно, амплитуды волн может завышать их значение. Модель NLDD близка к NLD только при очень малых значениях толщины оползня и скорости его движения, когда образованные им волны вряд ли могут представлять опасность.

## Глава 2

# ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В РАМКАХ ПЛАНОВЫХ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Большая часть работ по изучению цунами выполнена при помощи плановых (двумерных) приближенных моделей без учёта сферичности Земли, поскольку этот эффект сказывается при очень длительном распространении длинных волн в океане. В сравнении с одномерным случаем, плановые расчёты требуют гораздо больших вычислительных ресурсов. Так, например, использование реализаций полных НЛД-моделей в комплексах FUNWAVE [155, 156] и COULWAVE [141, 142] на достаточно подробных сетках затруднительно на персональном компьютере. Комплекс GloBouss [138] затрачивает меньше ресурсов, но в его основе лежит СНЛД-модель типа Буссинеска на неподвижном дне, что ограничивает возможность его применения.

В настоящей Главе рассматриваются плановые полные и слабо нелинейные дисперсионные уравнения мелкой воды второго приближения на подвижном дне. В параграфе 2.1 описывается постановка задачи, выписываются уравнения моделей. Предлагается выделение в исходных системах уравнений скалярного уравнения для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления и гиперболической системы мелкой воды с модифицированной правой частью. Доказывается равномерная эллиптичность уравнения для дисперсионной составляющей.

Параграф 2.2 посвящён описанию численного алгоритма для равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей. Рассматривается аппроксимация краевых условий. Численный алгоритм для гиперболической системы излагается в параграфе 2.3.

В параграфе 2.4 приводятся результаты численного моделирования плановых задач. Путём сравнения полученных решений по NLD- и SW-моделям исследуется важность частотной дис-

персии в задачах на ровном дне и при моделировании образования волн оползнем. В сравнении с экспериментальными данными проверяется работоспособность алгоритма в областях со сложной формой границ. Исследуется важность учёта дисперсии на некоторых задачах в идеализированных и реальных акваториях.

## 2.1. Плановые нелинейно-дисперсионные уравнения на нестационарном дне

Во многих работах предпринимаются попытки строить численные алгоритмы для НЛД-уравнений не на прямой аппроксимации исходных уравнений, а для модифицированных систем. Так, например, в работах [130, 155] системы полных НЛД-уравнений записываются в дивергентной форме с правой частью для использования TVD-метода. В статье [82] при реализации численного алгоритма для системы уравнений Грина-Нагди [107] предлагается поочерёдно решать классические SW-уравнения с исходными НЛД-уравнениями без некоторых слагаемых. В работе [176] также решалась SW-система, а негидростатическая часть давления восстанавливалась из трёхмерного уравнения неразрывности. В исследовании [39] рассматриваются разностные схемы, основанные на расщеплении систем полных НЛД-уравнений Грина-Нагди и Алешкова [1], а также слабо нелинейных уравнений Перегринна [151]. В модели Грина-Нагди при этом все производные по времени от функции свободной поверхности в правой части уравнения движения исключаются при помощи уравнения неразрывности, что делает запись достаточно громоздкой. При этом отмечается возможность разбиения систем Грина-Нагди и Алешкова на эллиптическую и гиперболическую части.

В работах [62, 75] описано расщепление системы двумерных полных НЛД-уравнений Железняк-Пелиновского на стационарном дне на гиперболическую систему и эллиптическое уравнение. В настоящем параграфе описывается иное выделение [8] двух “простых” подзадач в системах полных двумерных НЛД-уравнений на подвижном дне: скалярного уравнения второго порядка для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления и гиперболической системы классических уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью. Доказывается равномерная эллиптичность уравнения для дисперсионной составляющей. Аналогичное расщепление используется для новых слабо нелинейных уравнений [14, 98], которые имеют согласованное с трёхмерной моделью уравнение баланса энергии.

### 2.1.1. Плановые уравнения NLD-модели

Пусть слой несжимаемой жидкости ограничен снизу подвижным дном, заданным функцией  $z = -h(x, y, t)$ , а сверху — свободной границей, описываемой функцией  $z = \eta(x, y, t)$ , где  $t$  — время,  $x, y, z$  — координаты точки в декартовой системе координат  $Oxyz$ , ось  $Oz$  которой направ-

лена вертикально вверх, а координатная плоскость  $Oxy$  совпадает с невозмущенной свободной поверхностью.

В приближенных моделях мелкой воды искомыми величинами обычно являются полная глубина слоя жидкости  $H = \eta + h > 0$  и вектор скорости  $\mathbf{u} = (u, v)$ , связанный каким-либо образом с вектором скорости трехмерного течения. Если в качестве  $\mathbf{u}$  использовать осредненную по глубине горизонтальную составляющую вектора скорости трехмерного течения, то уравнение неразрывности приближенной модели принимает следующий вид:

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = u_x + v_y$ .

В отличие от модели мелкой воды первого приближения, в НЛД-модели имеет место [99] квадратичная зависимость давления  $p$  от вертикальной координаты:

$$p = g \left[ H - (z + h) \right] - \left[ \left( H - (z + h) \right) R_2 + \left( \frac{H^2}{2} - \frac{(z + h)^2}{2} \right) R_1 \right], \quad (2.2)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,

$$R_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2, \quad R_2 = D^2 h, \quad (2.3)$$

$D$  — оператор полной производной,  $D = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ . Если через  $P$  обозначить проинтегрированное по толщине слоя давление (2.2), а через  $p_0$  — давление на дне,

$$P = \int_{-h}^{\eta} p dz = \frac{gH^2}{2} - \varphi, \quad p_0 = p \Big|_{z=-h} = gH - \psi, \quad (2.4)$$

то уравнение движения НЛД-модели примет следующий вид [54]:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla P}{H} = \frac{p_0}{H} \nabla h, \quad (2.5)$$

при этом  $\varphi, \psi$  — дисперсионные составляющие  $P$  и  $p_0$ ,

$$\varphi = \frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2} R_1 + H R_2. \quad (2.6)$$

Для контроля вычислений можно использовать закон изменения полной энергии  $E$  в НЛД-модели [54]

$$(HE)_t + \nabla \cdot \left[ \mathbf{u} H \left( E + \frac{P}{H} \right) \right] = -p_0 h_t, \quad (2.7)$$

где

$$E = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{H^2}{6} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{H}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) D h + \frac{(Dh)^2}{2} + \frac{g(H - 2h)}{2}. \quad (2.8)$$

В случае стационарного дна ( $h_t \equiv 0$ ) уравнение изменения энергии (2.7) принимает дивергентный вид и выражает собой закон сохранения полной энергии.

### 2.1.2. Выделение эллиптической подзадачи в плановых НЛД-уравнениях

Аналогично одномерному случаю, описанному в §1.1, выведем уравнение для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления  $\varphi$ .

Уравнение движения (2.5) можно записать в виде

$$D\mathbf{u} = -g\nabla\eta + \frac{\nabla\varphi - \psi\nabla h}{H}, \quad (2.9)$$

где  $D\mathbf{u} = (Du, Dv)$ . Оказывается, что функция  $\psi$  выражается через новую переменную  $\varphi$  и исходные зависимые переменные  $H$  и  $\mathbf{u}$ . В самом деле, из определений (2.6) получаем, что

$$\psi = \frac{3\varphi}{2H} + \frac{H}{4}R_2. \quad (2.10)$$

Если подставить сюда правую часть выражения для  $R_2$

$$R_2 = D\mathbf{u} \cdot \nabla h + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla h) + B \quad (2.11)$$

и вектор ускорения  $D\mathbf{u}$  заменить правой частью уравнения (2.9), то после приведения подобных приходим к формуле

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{H} + HR + \nabla\varphi \cdot \nabla h \right), \quad (2.12)$$

где

$$R = -g\nabla\eta \cdot \nabla h + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla h) + B, \quad B = h_{tt} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla h_t), \quad r = 4 + |\nabla h|^2.$$

Уравнение для  $\varphi$  получается аналогично тому, как была выведена формула (2.12) для функции  $\psi$ . Из выражений (2.6) следует, что

$$\varphi = \frac{H^3}{12}R_1 + \frac{H}{2}\psi, \quad (2.13)$$

при этом

$$R_1 = \nabla \cdot (D\mathbf{u}) - 2(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\nabla u \times \nabla v. \quad (2.14)$$

В последней формуле использована бинарная операция для двумерных векторов, обозначенная так же, как операция векторного произведения трехмерных векторов. Результатом действия этой операции на векторы  $\nabla u$ ,  $\nabla v$  будет скаляр, определяемый по формуле  $\nabla u \times \nabla v = u_x v_y - u_y v_x$ . Подставляя в формулу (2.13) выражения (2.12), (2.14) и используя в (2.14) формулу (2.9), получаем

следующее уравнение для новой зависимой переменной  $\varphi$ :

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \varphi}{H} - \frac{(\nabla \varphi \cdot \nabla h) \nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left( \frac{\nabla h}{H^2 r} \right) \right) = F, \quad (2.15)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left( g \nabla \eta + \frac{R \nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{Hr} + 2(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - 2\nabla u \times \nabla v.$$

Итак, расширенная система НЛД-уравнений (NLD-модель) состоит из уравнения неразрывности (2.1), уравнения движения

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla H = g \nabla h + \frac{\nabla \varphi - \psi \nabla h}{H} \quad (2.16)$$

и уравнения (2.15) относительно дисперсионной составляющей  $\varphi$  проинтегрированного по глубине давления, при этом функция  $\psi$  вычисляется по формуле (2.12). Для численной реализации может быть полезна запись уравнения движения с дивергентной формой записи левой части:

$$(H\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}\mathbf{u}) + g \nabla \frac{H^2}{2} = gH \nabla h + \nabla \varphi - \psi \nabla h, \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{u}\mathbf{u}$  — тензорное произведение вектора  $\mathbf{u}$  на себя. В случае ровного дна это уравнение принимает консервативный вид.

### 2.1.3. Равномерная эллиптичность уравнения (2.15)

Выпишем слагаемые со старшими производными от  $\varphi$  в уравнении (2.15):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \varphi}{H} - \frac{(\nabla \varphi \cdot \nabla h) \nabla h}{Hr} \right) &= \left( \frac{\varphi_x}{H} \right)_x + \left( \frac{\varphi_y}{H} \right)_y - \left( \frac{h_x^2 \varphi_x + h_x h_y \varphi_y}{Hr} \right)_x - \\ &- \left( \frac{h_x h_y \varphi_x + h_y^2 \varphi_y}{Hr} \right)_y = \frac{\varphi_{xx}}{H} + \frac{\varphi_{yy}}{H} - \frac{1}{Hr} (h_x^2 \varphi_{xx} + h_y^2 \varphi_{yy} + 2h_x h_y \varphi_{xy}) + \dots = \\ &a\varphi_{xx} + c\varphi_{yy} - 2b\varphi_{xy} + \dots, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\bar{a} = \frac{1}{H} \left( 1 - \frac{h_x^2}{r} \right)$ ,  $\bar{b} = \frac{h_x h_y}{Hr}$ ,  $\bar{c} = \frac{1}{H} \left( 1 - \frac{h_y^2}{r} \right)$ . Уравнение такого вида называется равномерно эллиптическим, если  $\exists \bar{\alpha} > 0$ , такое что  $\forall \bar{\xi}, \bar{\eta} \in R$  выполняется неравенство

$$\bar{a}\bar{\xi}^2 - 2\bar{b}\bar{\xi}\bar{\eta} + \bar{c}\bar{\eta}^2 \geq \bar{\alpha}(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2) \quad (2.19)$$

Применяя формулу  $h_x^2 \bar{\eta}^2 + h_y^2 \bar{\xi}^2 \geq 2h_x h_y \bar{\xi} \bar{\eta}$ , получаем

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \bar{\xi}^2 - 2\bar{b} \bar{\xi} \bar{\eta} + \bar{c} \bar{\eta}^2 &= \frac{1}{H} \left[ \left(1 - \frac{h_x^2}{r}\right) \bar{\xi}^2 - \frac{2}{r} h_x h_y \bar{\xi} \bar{\eta} + \left(1 - \frac{h_y^2}{r}\right) \bar{\eta}^2 \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{H} \left[ \left(1 - \frac{h_x^2}{r}\right) \bar{\xi}^2 - \frac{1}{r} (h_x^2 \bar{\xi}^2 + h_y^2 \bar{\eta}^2) + \left(1 - \frac{h_y^2}{r}\right) \bar{\eta}^2 \right] = \frac{4}{Hr} (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Считая, что функции  $H$  и  $|\nabla h|$  ограничены,  $0 < H \leq \bar{M}$ ,  $|\nabla h| \leq \bar{N}$ , можно выписать искомое выражение для  $\bar{\alpha}$ :

$$\bar{\alpha} = \frac{4}{\bar{M}(4 + \bar{N})}. \quad (2.21)$$

Таким образом, при указанных предположениях уравнение (2.15) для функции  $\varphi$  является равномерно эллиптическим.

#### 2.1.4. Плановые СНЛД-уравнения мелкой воды

Выпишем уравнения слабо нелинейных моделей в плановом случае. Расширенная система для NLDB-модели [98] состоит из уравнений (2.1), (2.17), а также

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{h} + HR + \nabla \varphi \cdot \nabla h \right), \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \varphi}{H} - \frac{(\nabla \varphi \cdot \nabla h) \nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{Hh^2} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left( \frac{\nabla h}{Hhr} \right) \right) = F, \quad (2.23)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left( g \nabla \eta + \frac{R \nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{hr} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{Dh}{h} - 2(u_x v_y - u_y v_x),$$

а для модели NLDD над слабо деформируемым дном — из (2.1) и уравнений

$$(H\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}\mathbf{u}) + g \nabla \frac{H^2}{2} = gH \nabla h + \nabla \varphi - \psi \nabla h_0, \quad (2.24)$$

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{h_0} + HR + \nabla \varphi \cdot \nabla h_0 \right), \quad (2.25)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \varphi}{H} - \frac{(\nabla \varphi \cdot \nabla h_0) \nabla h_0}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{Hh_0^2} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left( \frac{\nabla h_0}{Hh_0 r} \right) \right) = F, \quad (2.26)$$

где

$$R = -g \nabla \eta \cdot \nabla h_0 + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla h_0), \quad r = 4 + |\nabla h_0|^2,$$

$$F = \nabla \cdot \left( g \nabla \eta + \frac{R \nabla h_0}{r} \right) - \frac{6R}{h_0 r} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{Dh_0}{h_0} - 2(u_x v_y - u_y v_x).$$

Единообразная форма записи уравнений всех рассматриваемых здесь НЛД-моделей даёт возможность использования для них единого подхода к построению численных алгоритмов. В виду этого далее демонстрируется построение алгоритма только для полной НЛД-модели.



## 2.2. Разностные уравнения для эллиптической подзадачи

Выделение в исходной НЛД-системе равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления и гиперболической системы уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью позволяет на каждом временном шаге решать поочередно эти задачи, используя при этом большой опыт в разработке численных методов для эллиптических уравнений и SW-модели.

В настоящем параграфе описывается численный алгоритм решения эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей, основанный на интегро-интерполяционном методе и методе последовательной верхней релаксации. Показываются особенности аппроксимаций в случае областей со сложной формой границ. Описываются особенности использования граничных условий непротекания и свободного прохода волн.

### 2.2.1. Описание вычислительной области

В практических задачах, связанных с изучением волн цунами, область течения ограничена береговой линией весьма сложной формы. Использование регулярных криволинейных сеток, адаптирующихся к геометрии такой “изрезанной” границы, связано с большими алгоритмическими трудностями, в частности, с необходимостью использования многоблочных криволинейных сеток и их адаптацией к каждой конкретной задаче. Более универсальными, хотя, возможно, и менее точными, являются алгоритмы расчета на прямоугольных равномерных сетках.

Предположим, что область решения  $\Omega$  содержится в некотором прямоугольнике  $[0, L_1] \times [0, L_2]$ , который покрыт прямоугольной равномерной сеткой с узлами  $\mathbf{x}_j$  ( $j = (j_1, j_2)$ ,  $j_1 = 0, \dots, N_1$ ,  $j_2 = 0, \dots, N_2$ ) и шагами  $\bar{h}_1 = L_1/N_1$ ,  $\bar{h}_2 = L_2/N_2$  в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Далее предполагается, что все криволинейные участки границы  $\Gamma$  аппроксимированы ломаными, звенья которых параллельны осям координат и проходят по координатным линиям сетки. Для модифицированной границы и области, ограниченной этой модифицированной границей, будем использовать прежние обозначения  $\Gamma$  и  $\Omega$  соответственно. Расчетная сетка  $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$  состоит из внутренних узлов  $\mathbf{x}_j \in \Omega_h \subset \Omega$  и граничных  $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h \subset \Gamma$ . Множество узлов сетки разбивается в соответствии с их типом на непересекающиеся классы. Внутренним узлам приписан тип 0, узлы  $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h$  могут иметь тип с 1-го по 12-й в зависимости от того, как два звена ломаной, представляющей границу  $\Gamma$ , стыкуются в этом узле. Например, если оба звена параллельны оси  $Oy$  и внешняя нормаль к ним направлена против направления оси  $Ox$ , то такие узлы имеют тип 1, если по направлению этой оси – тип 3. Для угловых узлов, в которых стыкуются два звена, одно из которых параллельно оси  $Ox$ , а другое –  $Oy$ , при этом звенья образуют между собой прямой внутренний (по отношению к  $\Omega$ ) угол, типы узлов могут быть равными 5, 6, 7, 8, а для внешних прямых углов – 9, 10, 11, 12 (см. рис. 2.1, б).

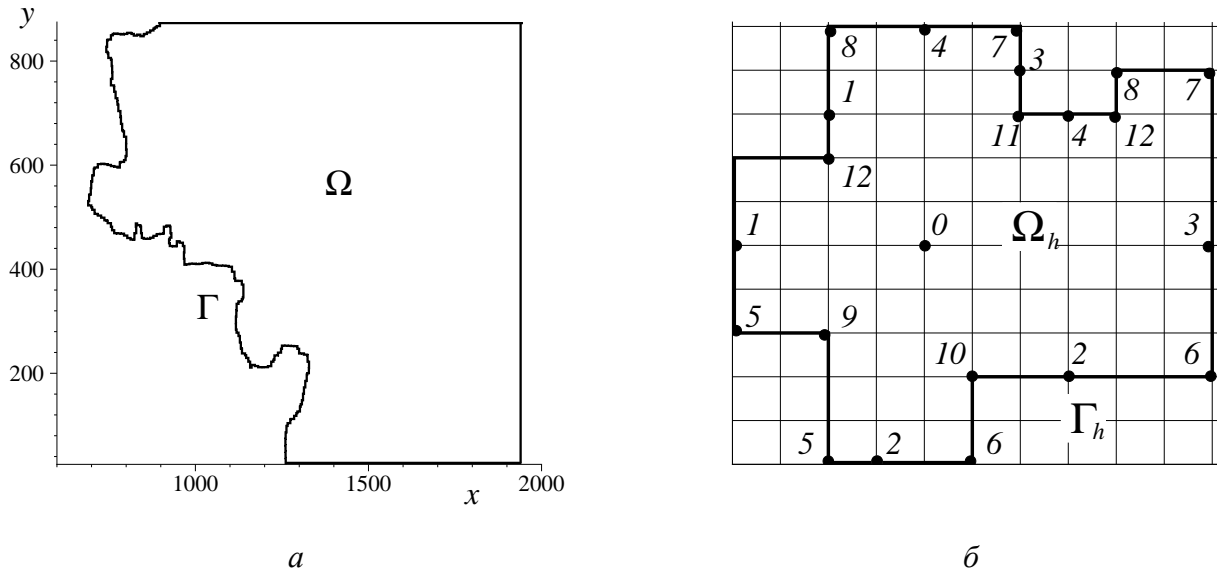


Рисунок 2.1 – Область течения  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ , состоящей из ломаных, звенья которых параллельны осям координат (а), и типы узлов расчетной сетки (б)

### 2.2.2. Краевые условия

В случае вертикальной стенки ставится условие непротекания

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \quad (2.27)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к  $\Gamma$ . Учитывая предположение о кусочной линейности границы, можно вывести уравнение

$$D\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.28)$$

Далее предполагая, как и в п. 1.1.8, что влияние дисперсии около границ пренебрежимо мало, из (2.16) получаем условие для  $\eta$ :

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (2.29)$$

Для вывода краевого условия для  $\varphi$  подставим выражение для  $\psi$  (2.12) в уравнение (2.9) и скалярно умножим его на  $\mathbf{n}$ . Учитывая (2.28), получим

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} \frac{H \nabla h \cdot \nabla \varphi + 6\varphi}{Hr} \right|_{\Gamma} = H \left( \frac{\partial h}{\partial n} \frac{R}{r} + g \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma}. \quad (2.30)$$

Для неотражающих границ используются краевые условия типа Зоммерфельда

$$\eta_t + \sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0, \quad (2.31)$$

$$\varphi_t + \sqrt{gh} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

и дополнительное условие

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0, \quad (2.32)$$

где  $u_\tau$  и  $u_n$  — касательная и нормальная компоненты вектора  $\mathbf{u}$  к границе  $\Gamma$ .

### 2.2.3. Аппроксимация уравнения для $\varphi$ во внутренних узлах

Для сокращения изложения перепишем уравнение (2.15) в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial y} - k_0 \varphi = F, \quad (2.33)$$

где введены обозначения

$$\Phi^1 = k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \Phi^2 = k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (2.34)$$

$$k_{11} = \frac{4 + h_y^2}{Hr}, \quad k_{12} = -\frac{h_x h_y}{Hr}, \quad k_{22} = \frac{4 + h_x^2}{Hr}, \quad (2.35)$$

$$k_0 = 6 \left( \frac{\partial k_{01}}{\partial x} + \frac{\partial k_{02}}{\partial y} \right) + 12k_{00}, \quad k_{01} = \frac{h_x}{H^2 r}, \quad k_{02} = \frac{h_y}{H^2 r}, \quad k_{00} = \frac{r - 3}{H^3 r}, \quad (2.36)$$

$$F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{6R}{Hr} + 2L,$$

$$f_1 = g\eta_x + \frac{R}{r} h_x, \quad f_2 = g\eta_y + \frac{R}{r} h_y, \quad L = (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - (u_x v_y - u_y v_x). \quad (2.37)$$

Разностную схему для задачи (2.33), (2.30) построим с помощью интегро-интерполяционного метода [62]. Пусть  $\mathbf{x}_j \in \Omega_h$  — внутренний узел расчетной сетки. Тогда он является общей вершиной четырех соседних ячеек. Обозначим через  $ABCD$  контур прямоугольника с вершинами в центрах этих ячеек (см. Рисунок 2.2, а). Интегрируя уравнение (2.33) по выбранному контуру и применяя формулу Грина, получаем

$$\int_{BC} \Phi^1 dy - \int_{AD} \Phi^1 dy + \int_{DC} \Phi^2 dx - \int_{AB} \Phi^2 dx = \iint_{ABCD} k_0 \varphi dx dy + \iint_{ABCD} F dx dy. \quad (2.38)$$

Для приближенного вычисления интегралов по сторонам контура будем использовать квадратурную формулу трапеций. Для примера выпишем результат для первого интеграла из (2.38):

$$\begin{aligned}
\int_{BC} \Phi^1 dy &\approx \frac{\Phi^1(B) + \Phi^1(C)}{2} \bar{h}_2 = \\
&= \frac{\bar{h}_2}{2} \left( k_{11}(B) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(B) + k_{12}(B) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(B) + k_{11}(C) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(C) + k_{12}(C) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(C) \right) \approx \\
&\approx \frac{\bar{h}_2}{2} \left( k_{11}(B) \frac{\varphi_3 + \varphi_6 - \varphi_0 - \varphi_2}{2\bar{h}_1} + k_{12}(B) \frac{\varphi_3 + \varphi_0 - \varphi_6 - \varphi_2}{2\bar{h}_2} + \right. \\
&\quad \left. + k_{11}(C) \frac{\varphi_3 + \varphi_7 - \varphi_0 - \varphi_4}{2\bar{h}_1} + k_{12}(C) \frac{\varphi_4 + \varphi_7 - \varphi_0 - \varphi_3}{2\bar{h}_2} \right).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Здесь использована стандартная локальная нумерация (см. Рисунок 2.2, *a*) узлов, соседних с  $x_j$ . Предполагается, что коэффициенты  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{00}$ ,  $k_{01}$ ,  $k_{02}$ , а также выражения  $R$  и  $r$  вычисляются в центрах ячеек. При этом в центрах ячеек первые производные по  $x$  и  $y$ , встречающиеся в указанных коэффициентах и правой части уравнения (2.33), аппроксимируются по формулам, аналогичным разностным производным от функции  $\varphi$  в (2.39), например,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(C) \approx \frac{u_3 + u_7 - u_0 - u_4}{2\bar{h}_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(C) \approx \frac{u_4 + u_7 - u_0 - u_3}{2\bar{h}_2}. \tag{2.40}$$

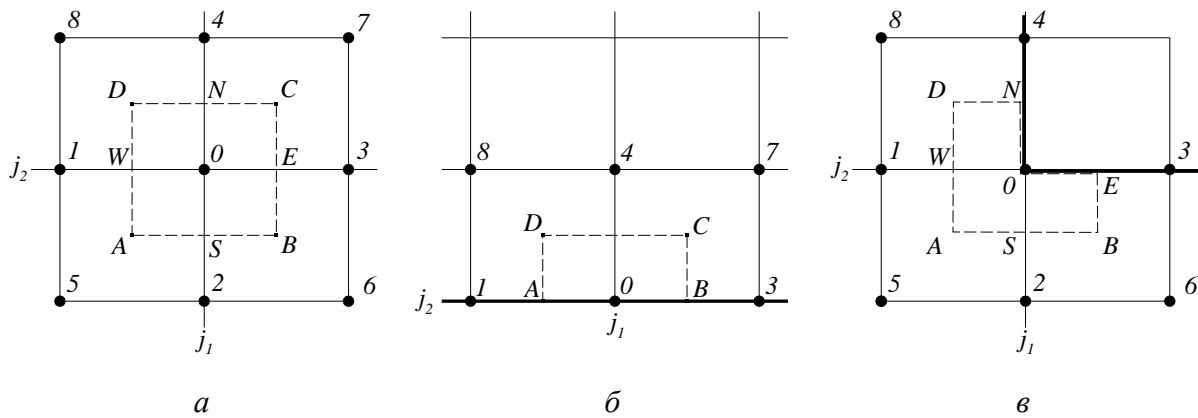


Рисунок 2.2 – Контур интегрирования и шаблон разностного уравнения для  $\varphi$  во внутреннем узле (*a*); граничном узле типа 2 (*б*) и 11 (*в*)

Теперь выпишем подобные аппроксимации для двойных интегралов в (2.33), где также применяются формулы Грина и трапеций:

$$\begin{aligned}
\iint_{ABCD} k_0 \varphi dx dy &= \iint_{ABCD} \left[ 6 \left( \frac{\partial k_{01}}{\partial x} + \frac{\partial k_{02}}{\partial y} \right) + 12k_{00} \right] \varphi dx dy \approx \\
&\approx 6\varphi_0 \left( \int_{BC} k_{01} dy - \int_{AD} k_{01} dy + \int_{DC} k_{02} dx - \int_{AB} k_{02} dx \right) + 12\varphi_0 \iint_{ABCD} k_{00} dx dy \approx \\
&\approx 6\varphi_0 \left( \frac{k_{01}(B) + k_{01}(C)}{2} \bar{h}_2 - \frac{k_{01}(A) + k_{01}(D)}{2} \bar{h}_2 + \frac{k_{02}(C) + k_{02}(D)}{2} \bar{h}_1 - \right. \\
&\left. - \frac{k_{02}(A) + k_{02}(B)}{2} \bar{h}_1 \right) + 3\varphi_0 [k_{00}(A) + k_{00}(B) + k_{00}(C) + k_{00}(D)] \bar{h}_1 \bar{h}_2 = S_0,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{ABCD} F dx dy &= \int_{BC} f_1 dy - \int_{AD} f_1 dy + \int_{DC} f_2 dx - \int_{AB} f_2 dx - 6 \iint_{ABCD} \frac{R}{Hr} dx dy + \\
&+ 2 \iint_{ABCD} L dx dy \approx \frac{\bar{h}_2}{2} (f_1(B) + f_1(C)) - \frac{\bar{h}_2}{2} (f_1(A) + f_1(D)) + \\
&+ \frac{\bar{h}_1}{2} (f_2(D) + f_2(C)) - \frac{\bar{h}_1}{2} (f_2(A) + f_2(B)) - \\
&- \frac{3}{2} \bar{h}_1 \bar{h}_2 \left( \frac{R}{Hr}(A) + \frac{R}{Hr}(B) + \frac{R}{Hr}(C) + \frac{R}{Hr}(D) \right) + 2 \iint_{ABCD} L dx dy.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Последний интеграл вычисляется по-разному в зависимости от того, перед каким этапом решения гиперболической части – предиктором или корректором – определяется дисперсионная составляющая давления. Перед предиктором для вычисления разностных производных от компонент скорости, заданных в целых узлах, используются формулы вида (2.40), с помощью которых выражение для  $L$  определяется в центрах ячеек сетки и полагается

$$\iint_{ABCD} L dx dy \approx \frac{\bar{h}_1 \bar{h}_2}{4} (L(A) + L(B) + L(C) + L(D)). \tag{2.43}$$

При повторном вычислении функции  $\varphi$ , т.е. перед выполнением корректора, используются компоненты скорости и полная глубина, определенные в центрах ячеек сетки после исполнения шага предиктор для гиперболической части расширенной системы. В этом случае применяется

следующая аппроксимация:

$$\begin{aligned}
 \iint_{ABCD} L dx dy &\approx \\
 &\approx \bar{h}_1 \bar{h}_2 \left( \frac{u(B) + u(C) - u(A) - u(D)}{2\bar{h}_1} + \frac{v(D) + v(C) - v(A) - v(B)}{2\bar{h}_2} \right)^2 - \\
 &\quad - \bar{h}_1 \bar{h}_2 \left( \frac{u(B) + u(C) - u(A) - u(D)}{2\bar{h}_1} \cdot \frac{v(D) + v(C) - v(A) - v(B)}{2\bar{h}_2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{u(D) + u(C) - u(A) - u(B)}{2\bar{h}_2} \cdot \frac{v(B) + v(C) - v(A) - v(D)}{2\bar{h}_1} \right).
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Таблица 2.1 – Коэффициенты разностного уравнения (2.45)

Тип узла	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$
0	$\beta_A + \beta_D$	$-\beta_A - \beta_B$	$\beta_B + \beta_C$	$-\beta_C - \beta_D$	$\gamma_A^1$	$\gamma_B^2$	$\gamma_C^1$	$\gamma_D^2$
1	<b>0</b>	$-\beta_B$	$\beta_B + \beta_C$	$-\beta_C$	<b>0</b>	$\gamma_B^2$	$\gamma_C^1$	<b>0</b>
2	$\beta_D$	<b>0</b>	$\beta_C$	$-\beta_C - \beta_D$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\gamma_C^1$	$\gamma_D^2$
3	$\beta_A + \beta_D$	$-\beta_A$	<b>0</b>	$-\beta_D$	$\gamma_A^1$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\gamma_D^2$
4	$\beta_A$	$-\beta_A - \beta_B$	$\beta_B$	<b>0</b>	$\gamma_A^1$	$\gamma_B^2$	<b>0</b>	<b>0</b>
5	<b>0</b>	<b>0</b>	$\beta_C$	$-\beta_C$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\gamma_C^1$	<b>0</b>
6	$\beta_D$	<b>0</b>	<b>0</b>	$-\beta_D$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	$\gamma_D^2$
7	$\beta_A$	$-\beta_A$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\gamma_A^1$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
8	<b>0</b>	$-\beta_B$	$\beta_B$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\gamma_B^2$	<b>0</b>	<b>0</b>
9	$\beta_D$	$-\beta_B$	$\beta_B + \beta_C$	$-\beta_C - \beta_D$	<b>0</b>	$\gamma_B^2$	$\gamma_C^1$	$\gamma_D^2$
10	$\beta_A + \beta_D$	$-\beta_A$	$\beta_C$	$-\beta_C - \beta_D$	$\gamma_A^1$	<b>0</b>	$\gamma_C^1$	$\gamma_D^2$
11	$\beta_A + \beta_D$	$-\beta_A - \beta_B$	$\beta_B$	$-\beta_D$	$\gamma_A^1$	$\gamma_B^2$	<b>0</b>	$\gamma_D^2$
12	$\beta_A$	$-\beta_A - \beta_B$	$\beta_B + \beta_C$	$-\beta_C$	$\gamma_A^1$	$\gamma_B^2$	$\gamma_C^1$	<b>0</b>

Таким образом, в каждом внутреннем узле  $x_j \in \Omega_h$  для сеточной функции  $\varphi$  получается 9-точечное разностное уравнение вида

$$\left( \sum_{i=0}^8 \alpha_i \varphi_i \right)_j = P_j \tag{2.45}$$

с правой частью, определяемой аппроксимацией (2.42), при этом

$$\alpha_0 = - \sum_{i=1}^8 \alpha_i - k_0 S,$$

$S$  — площадь ячейки  $ABCD$ , а для вычисления коэффициентов  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) используются формулы из первой строки таблицы 2.1, записанные с использованием обозначений

$$\beta = \frac{\bar{h}_2}{4\bar{h}_1} k_{11} - \frac{\bar{h}_1}{4\bar{h}_2} k_{22}, \quad \gamma^1 = \frac{\bar{h}_2}{4\bar{h}_1} k_{11} + \frac{\bar{h}_1}{4\bar{h}_2} k_{22} + \frac{1}{2} k_{12}, \quad \gamma^2 = \frac{\bar{h}_2}{4\bar{h}_1} k_{11} + \frac{\bar{h}_1}{4\bar{h}_2} k_{22} - \frac{1}{2} k_{12}.$$

### 2.2.4. Краевые условия для $\varphi$ на непроницаемых границах

Теперь покажем особенности вычисления коэффициентов и правой части уравнения (2.45) для граничных узлов, при этом будем предполагать, что дно вблизи суши является неподвижным. Для примера выберем узел  $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h$  типа 2, т. е. рассмотрим случай, когда два звена ломаной, представляющей границу  $\Gamma$ , стыкуются в рассматриваемом узле, имеющем локальный номер 0, и оба лежат на одной и той же горизонтальной координатной линии сетки с номером  $j_2$ , причем область течения располагается выше этого участка границы (см. Рисунок 2.2, б). Выберем контур интегрирования — прямоугольник  $ABCD$  — так, чтобы две его вершины  $A$  и  $B$  находились в серединах смежных звеньев границы, а вершины  $C$  и  $D$  — в центрах приграничных ячеек с общей вершиной  $\mathbf{x}_j$ . Интегрируя уравнение (2.33) по выбранному контуру, получим такое же соотношение (2.38), однако аппроксимационные формулы для некоторых интегралов будут отличаться от тех, что использовались при вычислении интегралов для внутренних узлов. Так, для интегралов из левой части (2.38) будем применять следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned} \int_{BC} \Phi^1 dy - \int_{AD} \Phi^1 dy + \int_{DC} \Phi^2 dx - \int_{AB} \Phi^2 dx &\approx \\ &\approx \frac{\bar{h}_2}{2} \Phi^1(C) - \frac{\bar{h}_2}{2} \Phi^1(D) + \frac{\bar{h}_1}{2} (\Phi^2(C) + \Phi^2(D)) - \bar{h}_1 \Phi^2(0), \end{aligned} \quad (2.46)$$

где величины  $\Phi^1$ ,  $\Phi^2$  в центрах ячеек вычисляются аналогично (2.39). Что касается величины  $\Phi^2(0)$ , которую надо определить в граничном узле  $\mathbf{x}_j$ , то, как будет показано ниже, никаких аппроксимаций для нее строить не нужно, поскольку она сокращается с другими членами уравнения в силу заданного краевого условия (2.30).

Приведем теперь аналоги формул (2.41), (2.42) в том же граничном узле  $\mathbf{x}_j$ :

$$\begin{aligned} \iint_{ABCD} k_0 \varphi dx dy &\approx 6\varphi_0 \left( \int_{BC} k_{01} dy - \int_{AD} k_{01} dy + \int_{DC} k_{02} dx - \int_{AB} k_{02} dx \right) + \\ + 12\varphi_0 \iint_{ABCD} k_{00} dx dy &\approx 6\varphi_0 \left( k_{01}(C) \frac{\bar{h}_2}{2} - k_{01}(D) \frac{\bar{h}_2}{2} + \frac{k_{02}(C) + k_{02}(D)}{2} \bar{h}_1 - \right. \\ - k_{02}(0) \bar{h}_1 &\left. \right) + 12\varphi_0 \frac{k_{00}(C) + k_{00}(D)}{2} \frac{\bar{h}_1 \bar{h}_2}{2} = 3\varphi_0 \left( [k_{01}(C) - k_{01}(D)] \bar{h}_2 + \right. \\ + [k_{02}(C) + k_{02}(D)] \bar{h}_1 &+ [k_{00}(C) + k_{00}(D)] \bar{h}_1 \bar{h}_2 \left. \right) - \underline{6\varphi_0 k_{02}(0) \bar{h}_1}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \iint_{ABCD} F dx dy &\approx f_1(C) \frac{\bar{h}_2}{2} - f_1(D) \frac{\bar{h}_2}{2} + \frac{f_2(C) + f_2(D)}{2} \bar{h}_1 - \underline{\bar{h}_1 f_2(0)} - \\ - \frac{3}{2} \bar{h}_1 \bar{h}_2 &\left( \frac{R}{Hr}(C) + \frac{R}{Hr}(D) \right) + 2 \iint_{ABCD} L dx dy. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Краевое условие (2.30) для узлов типа 2 принимает следующий вид:

$$\varphi_y - h_y \left( \frac{h_x \varphi_x + h_y \varphi_y}{r} + \frac{6}{Hr} \varphi \right) = H \left( g\eta_y + \frac{R}{r} h_y \right),$$

поэтому с учетом обозначений (2.34)–(2.37) его можно переписать как

$$\Phi^2 = 6k_{02}\varphi + f_2. \quad (2.49)$$

Подставив формулы (2.46)–(2.48) в уравнение (2.38) и приняв во внимание краевое условие (2.49), убеждаемся, что подчеркнутые слагаемые в формулах (2.46)–(2.48) взаимно сокращаются. Таким образом, при использовании интегро-интерполяционного метода не требуется аппроксимировать краевое условие (2.49) конечными разностями, поскольку оно учитывается в граничных узлах в точной форме при вычислении интегралов по сторонам контура интегрирования, лежащим на границе расчетной области.

Применение интегро-интерполяционного метода для граничных узлов типа 2 приводит к разностному уравнению на 6-точечном шаблоне, изображенном на Рисунке 2.2, б. Для рассматриваемого граничного узла шаблон не содержит узлов, имеющих номера 5, 2 и 6 в шаблоне внутреннего узла (см. Рисунок 2.2, а). Тем не менее, формально мы можем записать разностное уравнение для граничного узла типа 2 в виде 9-точечного уравнения (2.45), положив коэффициенты  $\alpha_5$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_6$  равными нулю. Формулы для вычисления коэффициентов уравнения (2.45) в граничных узлах типа 2 приведены в третьей строке таблицы 2.1.

Аналогично получаются разностные уравнения в граничных узлах других типов, при этом должны выбираться контуры интегрирования, соответствующие типам узлов. Пример контура интегрирования для узлов типа 11 показан штриховой линией на Рисунке 2.2, в. Для этих узлов разностное уравнение является 8-точечным и не содержит в своем шаблоне узла с номером 7 из 9-точечного шаблона внутреннего узла. В таблицу 2.1 сведены формулы для вычисления коэффициентов уравнения (2.45) для узлов сетки всех возможных типов.

Отметим, что система сеточных уравнений вида (2.45) содержит уравнения для всех узлов  $x_j \in \bar{\Omega}_h$ . Матрица этой системы является симметричной. Выбирая аналогично [75] гильбертово пространство сеточных функций можно показать, что разностный оператор, соответствующий системе уравнений (2.45) является самосопряженным, причем и в случае неровного подвижного дна. В [75] аналогичный результат получен только для ровного горизонтального дна. Кроме того, в случае прямоугольной области  $\Omega$  можно показать, что оператор разностной задачи для дисперсионной составляющей давления является положительно определенным, если всюду в области выполняется неравенство  $k_0 > 0$ . Аналогичный результат в случае ровного горизонтального дна был установлен ранее в [75].

Полученная система уравнений (2.45) решается итерационным методом. В общем случае область  $\Omega$  имеет сложную форму границы (см. Рисунок 2.2, б). Кроме того, она может быть многосвязной (см. Рисунок 2.10, а). Поэтому для итерационного решения системы уравнений (2.45) был



выбран метод последовательной верхней релаксации, легко реализуемый для областей сложной конфигурации.

### 2.2.5. Неотражающие краевые условия

Как и в предыдущем пункте, рассмотрим неотражающие условия на примере узла  $x_j \in \Gamma_h$  типа 1. В этом случае вектор нормали  $\mathbf{n}$  будет параллелен оси  $Ox$  и направлен в обратную сторону, поэтому условия (2.31), (2.32) переписуются как

$$\begin{aligned}\eta_t - \sqrt{gh}\eta_x &= 0, \\ u_t - \sqrt{gh}u_x &= 0, \\ v_x &= 0.\end{aligned}\tag{2.50}$$

$$\varphi_t - \sqrt{gh}\varphi_x = 0.\tag{2.51}$$

Эти уравнения будем аппроксимировать явно с первым порядком. С учетом предположения о ровности дна около неотражающих границ выпишем разностные аналоги (2.50) для искомых функций  $H$ ,  $u$  и  $v$ :

$$\begin{aligned}\frac{H_j^{n+1} - H_j^n}{\tau} - \sqrt{gh_j} \frac{H_{j_1+1, j_2}^n - H_j^n}{\bar{h}_1} &= 0, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \sqrt{gh_j} \frac{u_{j_1+1, j_2}^n - u_j^n}{\bar{h}_1} &= 0, \\ v_j^{n+1} &= v_{j_1+1, j_2}^{n+1}.\end{aligned}\tag{2.52}$$

В качестве численного алгоритма для гиперболической части используется двушаговая схема типа предиктор-корректор, поэтому на каждом временном шаге функцию  $\varphi$  на границе будем вычислять дважды: перед предиктором вычисляется  $\varphi^n|_{\Gamma}$  из уравнения

$$\frac{\varphi_j^n - \varphi_j^*}{\tau/2} - \sqrt{gh_j} \frac{\varphi_{j_1+1, j_2}^* - \varphi_j^*}{\bar{h}_1} = 0,\tag{2.53}$$

а перед корректором вычисляется  $\varphi^*|_{\Gamma}$  из уравнения

$$\frac{\varphi_j^* - \varphi_j^n}{\tau/2} - \sqrt{gh_j} \frac{\varphi_{j_1+1, j_2}^n - \varphi_j^n}{\bar{h}_1} = 0.\tag{2.54}$$

## 2.3. Схема предиктор-корректор для гиперболической части

В рамках предложенного подхода с выделением в исходной NLD-системе гиперболической системы мелкой воды с модифицированной правой частью она может решаться аналогом любого из разработанных для SW-модели методов. В настоящем параграфе предлагается хорошо зарекомендовавший себя численный алгоритм решения системы, основанный на явной двушаговой схеме

типа предиктор-корректор с TVD-ограничителями, являющейся распространением схемы из работы [71] на двумерный случай. При специальном выборе ограничителей предложенная схема может перейти в схему типа Лакса-Вендроффа или противопоточную.

### 2.3.1. Уравнения для векторов потоков

Запишем систему уравнений NLD-модели (2.1), (2.17) в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial y} = \mathbf{G}, \quad (2.55)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ gHh_x + \varphi_x - \psi h_x \\ gHh_y + \varphi_y - \psi h_y \end{pmatrix},$$

а  $\mathbf{f}^q$  (индекс  $q$  здесь и далее в этом параграфе принимает значения 1, 2) — вектора потоков,

$$\mathbf{f}^1 = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + gH^2/2 \\ Huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^2 = \begin{pmatrix} Hu \\ Huv \\ Hv^2 + gH^2/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда недивергентная форма уравнений примет следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathcal{A}^1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathcal{A}^2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{G}. \quad (2.56)$$

где  $\mathcal{A}^q = \frac{\partial \mathbf{f}^q}{\partial \mathbf{U}}$  — матрицы Якоби,

$$\mathcal{A}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gH & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gH & 0 & 2v \end{pmatrix},$$

а их собственные числа вычисляются по формулам

$$\lambda_1^1 = u - \sqrt{gH}, \quad \lambda_2^1 = u, \quad \lambda_3^1 = u + \sqrt{gH}$$

$$\lambda_1^2 = v - \sqrt{gH}, \quad \lambda_2^2 = v, \quad \lambda_3^2 = v + \sqrt{gH}.$$

Введем матрицы  $\mathcal{L}^q$  и  $\mathcal{R}^q$  таким образом, что строками  $\mathcal{L}^q$  будут левые собственные вектора, а столбцами  $\mathcal{R}^q$  — правые собственные вектора матриц  $\mathcal{A}^q$ :

$$\mathcal{L}^1 = \frac{1}{c_1} \begin{pmatrix} -\lambda_3^1 & 1 & 0 \\ v & 0 & -1 \\ -\lambda_1^1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^1 = \frac{c_1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\lambda_1^1 & 0 & \lambda_3^1 \\ -v & \lambda_1^1 - \lambda_3^1 & v \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}^2 = \frac{1}{c_2} \begin{pmatrix} -\lambda_3^2 & 0 & 1 \\ u & -1 & 0 \\ -\lambda_1^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^2 = \frac{c_2}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -u & \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & u \\ -\lambda_1^2 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

где  $c_1 = \frac{\lambda_3^1 - \lambda_1^1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{\lambda_3^2 - \lambda_1^2}{2}$ . Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{L}^q \mathcal{R}^q = \mathcal{R}^q \mathcal{L}^q = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}^q \mathcal{A}^q \mathcal{R}^q = \Lambda^q = \begin{pmatrix} \lambda_1^q & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^q & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^q \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}^q = \mathcal{R}^q \Lambda^q \mathcal{L}^q, \quad (\mathcal{A}^q)^2 = \mathcal{R}^q (\Lambda^q)^2 \mathcal{L}^q.$$

Уравнения для векторов потоков  $\mathbf{f}^q$  получаются из (2.55) домножением слева на матрицы  $\mathcal{A}^q$ :

$$\frac{\partial \mathbf{f}^q}{\partial t} + \mathcal{A}^q \left( \frac{\partial \mathbf{f}^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial y} - \mathbf{G} \right) = 0. \quad (2.57)$$

В качестве численного алгоритма для гиперболической части будем использовать явную двухшаговую разностную схему типа предиктор-корректор.

### 2.3.2. Шаг предиктор

На первом шаге разностной схемы вычисляются вектора потоков  $\mathbf{f}^q$  в центрах вычислительных ячеек, в качестве примера выберем точку  $C$ , расположение которой показано на Рисунке 2.3. Далее в этом пункте в нижних индексах будет указываться название точки, в которой вычисляется функция, соответствующее шаблону на Рисунке 2.3. Значения основных функций  $H$ ,  $u$  и  $v$  с предыдущего ( $n$ -ого) временного шага известны в целых узлах, поэтому в центрах ячеек и на серединах отрезков применяется осреднение:

$$H_C = \frac{H_0 + H_3 + H_4 + H_7}{4}, \quad H_E = \frac{H_0 + H_3}{2},$$

$$H_{NE} = \frac{H_3 + H_7}{2}, \quad H_{EN} = \frac{H_4 + H_7}{2}, \quad \text{и т.д.}$$

Матрицы  $\mathcal{A}^q$  аппроксимировались таким образом, чтобы условия

$$\mathbf{f}_C^1 = (\mathcal{A}^1 \mathbf{U}_x)_C, \quad \mathbf{f}_C^2 = (\mathcal{A}^2 \mathbf{U}_y)_C$$

выполнялись на разностном уровне. Это возможно при

$$\mathcal{A}_C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u_{NE}v_{NE} + gH_C & 2u_C & 0 \\ -\frac{u_N v_{NE} + u_{NE} v_N}{2} & v_C & u_C \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{u_E v_{EN} + u_{EN} v_E}{2} & v_C & u_C \\ -v_E v_{EN} + gH_C & 0 & 2v_C \end{pmatrix},$$

тогда матрицы  $\mathcal{L}_C^q$  и  $\mathcal{R}_C^q$  будут вычисляться по следующим формулам:

$$\mathcal{L}_C^1 = \frac{1}{c_{1,C}^2} \begin{pmatrix} -\lambda_{3,C}^1 & 1 & 0 \\ v_C - \frac{\delta_C^1 u_C}{c_{1,C}^2} & \frac{\delta_C^1}{c_{1,C}^2} & -1 \\ -\lambda_{1,C}^1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_C^2 = \frac{1}{c_{2,C}^2} \begin{pmatrix} -\lambda_{3,C}^2 & 0 & 1 \\ u_C - \frac{\delta_C^2 v_C}{c_{2,C}^2} & -1 & \frac{\delta_C^2}{c_{2,C}^2} \\ -\lambda_{1,C}^2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_C^1 = \frac{c_{1,C}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\lambda_{1,C}^1 & 0 & \lambda_{3,C}^1 \\ -v_C + \frac{\delta_C^1}{c_{1,C}} & \lambda_{1,C}^1 - \lambda_{3,C}^1 & v_C + \frac{\delta_C^1}{c_{1,C}} \end{pmatrix},$$

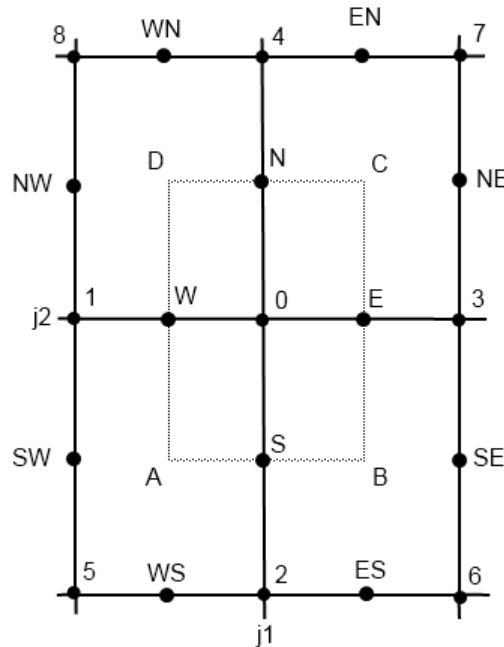


Рисунок 2.3 – Обозначения узлов и вспомогательных точек в шаблоне

$$\mathcal{R}_C^2 = \frac{c_{2,C}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -u_C + \frac{\delta_C^2}{c_{2,C}} & \lambda_{1,C}^2 - \lambda_{3,C}^2 & u_C + \frac{\delta_C^2}{c_{2,C}} \\ -\lambda_{1,C}^2 & 0 & \lambda_{3,C}^2 \end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_{1,C}^1 = u_C - \sqrt{u_C^2 - u_N u_{NE} + g H_C}, \quad \lambda_{2,C}^1 = u_C, \quad \lambda_{3,C}^1 = u_C + \sqrt{u_C^2 - u_N u_{NE} + g H_C},$$

$$\lambda_{1,C}^2 = v_C - \sqrt{v_C^2 - v_E v_{EN} + g H_C}, \quad \lambda_{2,C}^2 = v_C, \quad \lambda_{3,C}^2 = v_C + \sqrt{v_C^2 - v_E v_{EN} + g H_C},$$

$$c_{1,C} = \frac{\lambda_{3,C}^1 - \lambda_{1,C}^1}{2}, \quad c_{2,C} = \frac{\lambda_{3,C}^2 - \lambda_{1,C}^2}{2}$$

$$\delta_C^1 = \frac{u_N v_N - u_{NE} v_{NE}}{2} - \frac{u_N + u_{NE}}{2} \cdot \frac{v_N + v_{NE}}{2}, \quad \delta_C^2 = \frac{u_E v_E - u_{EN} v_{EN}}{2} - \frac{u_E + u_{EN}}{2} \cdot \frac{v_E + v_{EN}}{2}.$$

В таких обозначениях предикторные уравнения для потоков  $\mathbf{f}^1$  и  $\mathbf{f}^2$  будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\mathbf{f}_C^{q,*} - \mathbf{f}_C^{q,n}}{\tau/2} + \left[ \mathcal{R}^q \mathcal{D}^q \Lambda^q \mathcal{L}^q \left( \frac{\partial \mathbf{f}^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial y} - \mathbf{G} \right) \right]_C = 0. \quad (2.58)$$

Здесь

$$\mathcal{D}_C^q = \begin{pmatrix} 1 + \theta_{1,C}^q & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \theta_{2,C}^q & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \theta_{3,C}^q \end{pmatrix},$$

$$\theta_{k,C}^1 = \begin{cases} 0 & \text{при } |\tilde{g}_{k,C}^1| \leq \left| \tilde{g}_{k,j_1+1/2-s_1,j_2+1/2}^1 \right|, \\ & \tilde{g}_{k,C}^1 \cdot \tilde{g}_{k,j_1+1/2-s_1,j_2+1/2}^1 \geq 0, \\ \theta_{k,0}^1 \frac{\tilde{g}_{k,C}^1 - \tilde{g}_{k,j_1+1/2-s_1,j_2+1/2}^1}{\tilde{g}_{k,C}^1} & \text{при } |\tilde{g}_{k,C}^1| > \left| \tilde{g}_{k,j_1+1/2-s_1,j_2+1/2}^1 \right|, \\ & \tilde{g}_{k,C}^1 \cdot \tilde{g}_{k,j_1+1/2-s_1,j_2+1/2}^1 \geq 0, \\ \theta_{k,0}^1 & \text{при } \tilde{g}_{k,C}^1 \cdot \tilde{g}_{k,j_1+1/2-s_1,j_2+1/2}^1 < 0, \end{cases}$$

$$\theta_{k,C}^2 = \begin{cases} 0 & \text{при } |\tilde{g}_{k,C}^2| \leq \left| \tilde{g}_{k,j_1+1/2,j_2+1/2-s_2}^2 \right|, \\ & \tilde{g}_{k,C}^2 \cdot \tilde{g}_{k,j_1+1/2,j_2+1/2-s_2}^2 \geq 0, \\ \theta_{k,0}^2 \frac{\tilde{g}_{k,C}^2 - \tilde{g}_{k,j_1+1/2,j_2+1/2-s_2}^2}{\tilde{g}_{k,C}^2} & \text{при } |\tilde{g}_{k,C}^2| > \left| \tilde{g}_{k,j_1+1/2,j_2+1/2-s_2}^2 \right|, \\ & \tilde{g}_{k,C}^2 \cdot \tilde{g}_{k,j_1+1/2,j_2+1/2-s_2}^2 \geq 0, \\ \theta_{k,0}^2 & \text{при } \tilde{g}_{k,C}^2 \cdot \tilde{g}_{k,j_1+1/2,j_2+1/2-s_2}^2 < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{g}_{k,C}^q = |\lambda_{k,C}^q| (1 - \kappa^q |\lambda_{k,C}^q|) p_{k,C}^q, \quad \theta_{k,0}^q = \frac{1}{\kappa^q |\lambda_{k,C}^q|} - 1, \quad \kappa^q = \frac{\tau}{h_q},$$

$p_{k,C}^q$  — компоненты векторов  $\mathbf{P}_C^q$ , где  $\mathbf{P}_C^1 = \mathcal{L}_C^1 \mathbf{U}_{x,C}$ ,  $\mathbf{P}_C^2 = \mathcal{L}_C^2 \mathbf{U}_{y,C}$ ,

$$s_q = \begin{cases} \text{sign}(\lambda_{1,C}^q) & \text{при } k = 1, \\ \text{sign}(\lambda_{2,C}^q) & \text{при } k = 2, \\ \text{sign}(\lambda_{3,C}^q) & \text{при } k = 3. \end{cases}$$

### 2.3.3. Шаг корректор

После вычисления значений векторов потоков  $\mathbf{f}^1$  и  $\mathbf{f}^2$  в центрах ячеек, определяются функции  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$ , и основные функции  $H$ ,  $u$  и  $v$  во внутренних узлах из уравнения

$$\frac{\mathbf{U}_0^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \frac{f_C^{1,*} + f_B^{1,*} - f_A^{1,*} - f_D^{1,*}}{2\bar{h}_1} + \frac{f_C^{2,*} + f_D^{2,*} - f_A^{2,*} - f_B^{2,*}}{2\bar{h}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ G_{2,N}^* + G_{2,S}^* \\ G_{3,E}^* + G_{3,W}^* \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Аппроксимация правой части уравнения (2.59) подобрана таким образом, чтобы схема сохраняла состояние покоя жидкости при неподвижном дне.

Отметим, что описанная схема в случае  $\theta_{k,C}^q = 0$  эквивалентна схеме Лакса-Вендроффа, а при  $\theta_{k,C}^q = \theta_{k,0}^q$  — противопоточной схеме первого порядка аппроксимации. Полагая функции  $\varphi$  и  $\psi$  равными нулю, получается алгоритм для решения классических уравнений мелкой воды первого приближения.

На границах области значения функций  $H$ ,  $u$  и  $v$  вычисляются из краевых условий. В случае вертикальных стенок уравнения (2.27), (2.29), (2.32) аппроксимируются с первым порядком, например, для узла типа 1 при помощи формул

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= 0, \\ \eta_j^{n+1} &= \eta_{j_1-1,j_2}^{n+1}, \\ v_j^{n+1} &= v_{j_1-1,j_2}^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Для неотражающих границ используются условия типа Зоммерфельда (2.50), которые для указанных выше узлов аппроксимировались при помощи соотношений (2.52).

## 2.4. Численное моделирование плановых задач

В параграфе описаны результаты численного моделирования двумерных задач в идеализированных и реальных акваториях. В задаче о распространении волн над ровным исследуется влияние дисперсионных эффектов в зависимости от длины волны и пройденного волной расстояния. Делаются некоторые замечания о границах применимости модели при сравнении с экспериментальными данными о сходе твёрдой модели оползня из работы [95], а также демонстрируется влияние ширины оползня на амплитуду образованных волн. Работоспособность алгоритма в областях с

границами сложной формы проверяется в задаче о взаимодействии волны с островом при сравнении с экспериментами из статьи [83]. В модельной акватории “корыто”, аппроксимирующей Курило-Камчатский желоб, исследуется влияние дисперсии в зависимости от формы источника и его удалённости. В задаче о сходе гипотетического оползня [37] в Чёрном море анализируется влияние его начального положения и объёма на образованные волны, а также важность учёта дисперсии в задаче. Исследуется гипотеза об оползневом механизме образования аномальных волн на болгарском побережье 7-го мая 2007-го года.

### 2.4.1. Особенности программной реализации

Для расчёта идеализированных и реальных сценариев распространения поверхностных волн и генерации их сходом подводного оползня в двумерном (плановом) и “сферическом” (на вращающейся сфере, см. Главу 3) разработаны программные комплексы, включающие в себя реализацию численных алгоритмов для полной NLD-модели, слабо нелинейных дисперсионных моделей NLDB и NLDD, а также для классической модели мелкой воды. Программный комплекс состоит из препроцессора, процессора и постпроцессора.

В препроцессоре возможны три варианта инициализации задачи: модельная, в которой начальные данные для функций батиметрии, свободной поверхности и горизонтальных скоростей задаются аналитически (функциями); “реальная”, когда эти начальные данные задаются входными файлами в формате Surfer GRD; и смешанная, когда только функция батиметрии задаётся входным файлом, а остальные данные — аналитически. В препроцессоре используются средства программного комплекса MGC [67]. В модуле реальной и смешанной инициализации реализована процедура коррекции батиметрии, в которой можно провести её сглаживание с заданным параметром и/или модификацию в местах с “узкими” проливами, когда между двумя “сухими” узлами (с отрицательной глубиной) находятся всего один или два “мокрых” узла. В модуле модельной инициализации выбирается один из ранее считавшихся сценариев, происходит вывод начальных данных в файлы.

В процессоре реализованы численные алгоритмы для различных моделей мелкой воды. В зависимости от входных параметров выбирается модель и тип каждой из четырёх границ, для которых могут применяться условия непротекания или свободного выхода волн. Все параметры численных методов также задаются во входном файле.

В постпроцессоре может происходить вывод результатов расчёта в файлы формата Surfer GRD, а также для Tecplot, Grapher и gnuplot. В этой части также используются средства MGC [67]. Отметим, что в разработанных комплексах нет собственных средств для визуализации результатов расчётов, поскольку функционала указанных специализированных программ оказалось вполне достаточно.

Разработанные программные комплексы обладают следующими особенностями:

- написаны на языке программирования Fortran;

- имеют модульную структуру;
- кроссплатформенность (использовались компиляторы Intel и GCC в Windows и Unix системах);
- адаптивность (простота добавления новых расчётных модулей и сценариев расчёта);
- полное определение проведённых расчётов файлом входных параметров (для повторения считавшихся ранее задач достаточно указать соответствующие параметры в файле, не изменяя код программы).

Компоненты программных комплексов для плановых и сферических задач, содержащие реализацию численных методов для NLD-моделей, были зарегистрированы Федеральной службой по интеллектуальной собственности (Роспатентом) [16, 17].

### 2.4.2. Распространение волн над ровным дном

Для начала рассмотрим задачу распространения волн над ровным дном, вызванных начальным возмущением свободной поверхности вида

$$\eta(x, y, 0) = a_0 e^{-w[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]}, \quad (2.61)$$

где  $a_0$  — высота возмущения,  $(x_0, y_0)$  — координаты центра возмущения,  $w$  — параметр, влияющий на эффективную протяженность. В качестве акватории выбран квадратный бассейн со сторонами  $L_1 = L_2 = 10$  км и глубиной  $h_0 = 100$  м. На всех границах ставились неотражающие краевые условия. Начальное возмущение располагалось по центру бассейна,  $x_0 = y_0 = 5$  км, и имело высоту  $a_0 = 10$  м. Параметр  $w$  принимал значения  $w = 2.5 \cdot 10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  и  $5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-2}$ , что соответствует эффективной протяженности, приблизительно равной 3000, 1500 и 750 м (см. Рисунок 2.4, а).

На Рисунке 2.4 (б) представлен профиль свободной поверхности, вычисленной по NLD-модели при  $w = 10^{-5} \text{ м}^{-2}$ , в момент времени  $t = 140$  с. Заметим, что картина волн симметрична относительно центра области (более точно это было проверено при сравнении соответствующих мареограмм), следовательно, построенный численный алгоритм сохранил изначальную симметрию задачи. Также видно, что за основной волной образуется цуг второстепенных волн меньшей амплитуды. Такая картина характерна только для моделей, учитывающих дисперсию волн, и не раз наблюдалась в экспериментах. При этом, как отмечалось, например, в работе [131], влияние дисперсии зависит от эффективной протяженности начального возмущения. Для проверки этого свойства на Рисунке 2.5 приведены мареограммы в точке (0 км, 5 км), полученные в расчетах по NLD- и SW-моделям для параметров  $w = 2.5 \cdot 10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  и  $5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-2}$ . Как и предполагалось, при очень протяженных начальных возмущениях дисперсия волн не оказывает значительного влияния за рассмотренное время распространения, но при более коротких волнах учет нелинейно-



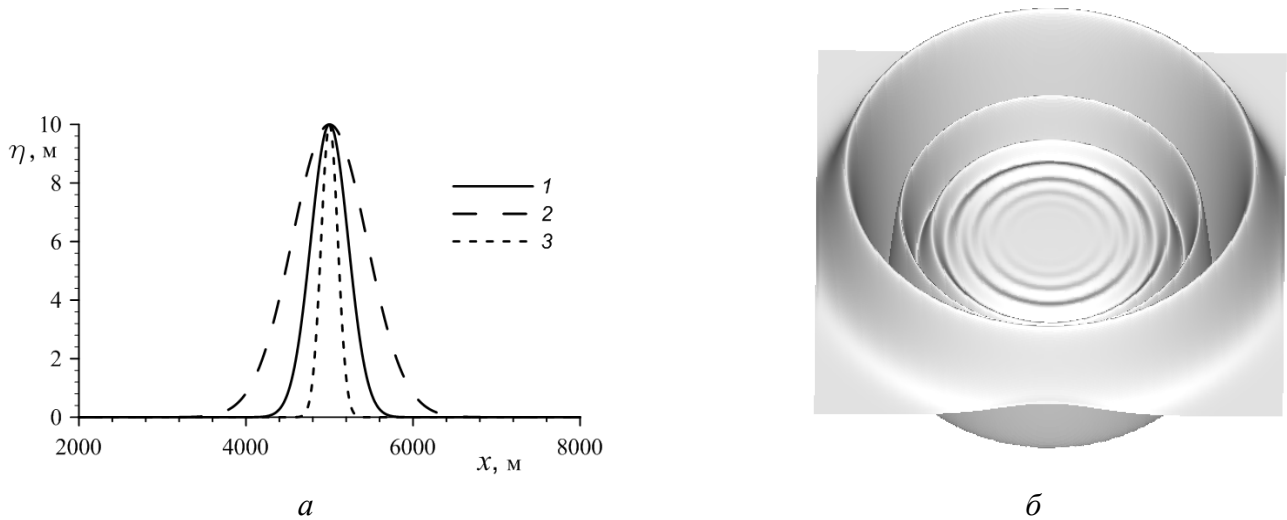


Рисунок 2.4 – *a* – сечение  $y = y_0$  начальной свободной поверхности при  $w = 10^{-5} \text{ м}^{-2}$  (1);  $2.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-2}$  (2);  $5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-2}$  (3); *b* – свободная поверхность в момент времени  $t = 140 \text{ с}$  в расчете по NLD-модели при  $w = 10^{-5} \text{ м}^{-2}$

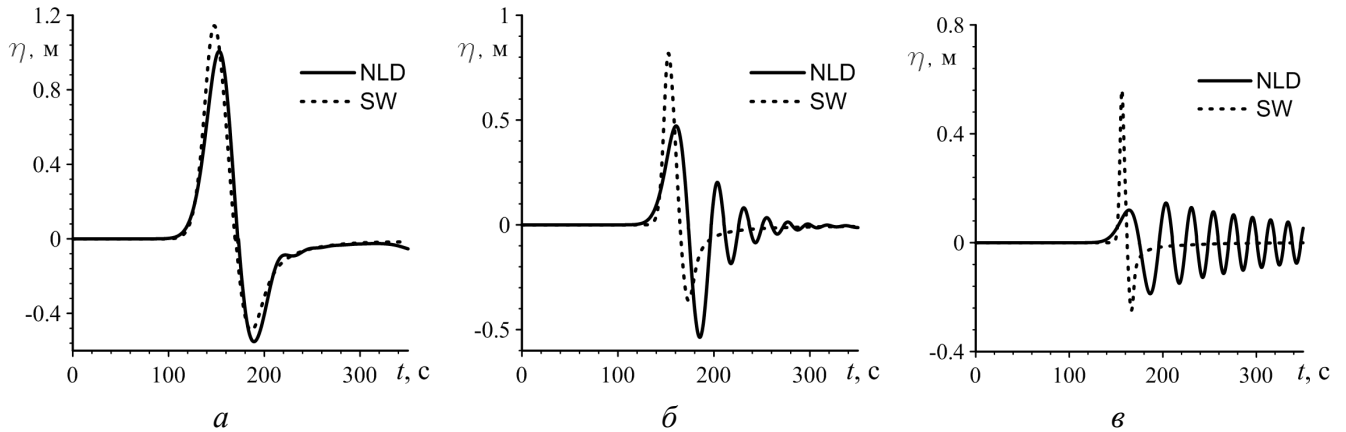


Рисунок 2.5 – Мареограммы в точке (0 км, 5 км), полученные в расчетах по NLD- и SW-моделям для разной эффективной ширины начального возмущения:  $w = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-2}$  — (а),  $w = 10^{-5} \text{ м}^{-2}$  — (б),  $w = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-2}$  — (в). Сплошные линии — результаты расчетов по NLD-модели, пунктирные — SW-модели мелкой воды

дисперсионных свойств может быть решающим для адекватного воспроизведения картины течения.

### 2.4.3. Закон движения двумерного оползня

В пункте приводится краткое описание закона движения оползня [5] под действием сил тяжести, плавучести, трения о дно и сопротивления воды.

Представим функцию  $z = -h(x, y, t)$  в виде суммы двух, первая из которых  $z = h_{\text{дн}}(x, y)$  задает неподвижное дно, а вторая  $z = h_{\text{сл}}(x, y, t)$  — верхнюю границу движущегося оползня. Используемая здесь модель движения оползня базируется на предположении о том, что в каждый момент времени его положение определяется точкой  $\mathbf{x}_c(t) = (x_c(t), y_c(t), z_c(t))$ , скользящей по неподвижному дну согласно закону несвободного движения материальной точки по криволиней-

ной поверхности. Связь между положениями оползня и точки  $\mathbf{x}_c(t)$  понимается так, что если в начальный момент времени  $t = 0$  оползень покоится, функция  $z = h_{sl}^0(x, y)$  с конечным носителем  $\mathcal{D}_0$  задает его начальную форму и точка  $\mathbf{x}_c(0)$  имеет координаты  $x_c(0) = x_c^0, y_c(0) = y_c^0, z_c(0) = z_c^0 = h_{bt}(x_c^0, y_c^0)$ , причем  $(x_c^0, y_c^0) \in \mathcal{D}_0$ , то при  $t > 0$  поверхность оползня задается функцией

$$h_{sl}(x, y, t) = h_{sl}^0(x + x_c^0 - x_c(t), y + y_c^0 - y_c(t)), \quad (2.62)$$

носителем которой является множество

$$\mathcal{D}_t = \left\{ (x, y) \mid (x + x_c^0 - x_c(t), y + y_c^0 - y_c(t)) \in \mathcal{D}_0 \right\}. \quad (2.63)$$

Таким образом, в каждый момент времени  $t$  оползень располагается на склоне так, что его проекция на плоскость  $z = 0$  совпадает с множеством  $\mathcal{D}_t$ , а из формулы (2.63) следует, что все точки оползня имеют одну и ту же мгновенную горизонтальную составляющую вектора скорости. Однако в вертикальном направлении различные точки оползня могут двигаться с разными скоростями, и площадь его соприкосновения с дном может меняться со временем: на крутых участках он вытягивается, на пологих — становится короче (вдоль склона), что в некоторой степени отражает реальную ситуацию. Таким образом, при движении оползня его поверхность деформируется в соответствии с встречающимися неровностями дна, поэтому можно сказать, что для реального оползня нами используется модель квазидеформируемого тела. Легко показать, что для такой модели объем оползня  $V$  не меняется со временем, т.е.

$$V = \iint_{\mathcal{D}_t} h_{sl}(x, y, t) dx dy = \iint_{\mathcal{D}_0} h_{sl}^0(x, y) dx dy = \text{const.}$$

В случае плоского откоса для всех точек оползня одинаковы не только горизонтальные компоненты скорости, но и вертикальные, т. е. оползень будет двигаться по плоскому откосу как твердое тело.

Силами, определяющими движение оползня, являются силы тяжести, плавучести, трения о дно и сопротивления воды. При вычислении первых трех учитывается форма оползня и его расположение на склоне. Каждая из сил определяется как интегральная сумма сил, действующих на элементарные объемы оползня. Сила сопротивления воды вычисляется по максимальной площади  $\Pi$  сечения оползня вертикальной плоскостью, перпендикулярной горизонтальной составляющей вектора скорости  $\mathbf{v}_c$  точки  $\mathbf{x}_c(t)$ . С учетом сделанных предположений, получаем следующие уравнения движения оползня (точки  $\mathbf{x}_c(t)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dv_\alpha}{dt} = & \frac{R_\alpha}{2} + \left[ (\gamma - 1) g (I_{1,\alpha} - \sigma_\alpha C_{fr} I_2) - \right. \\ & \left. - \sigma_\alpha \left( \gamma C_{fr} (u^2 I_{3,11} + 2uv I_{3,12} + v^2 I_{3,22}) + \frac{C_d}{2} \Pi v_c^2 \right) \right] \frac{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}{(\gamma + C_w) V}, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.64)$$

где  $\gamma = \rho_{sl}/\rho_w > 1$ ,  $\rho_w$  — плотность воды,  $\rho_{sl}$  — плотность оползня,  $C_w$ ,  $C_{fr}$ ,  $C_d$  — коэффициенты присоединенной массы, трения и сопротивления воды соответственно,  $C_{fr} = \tan \theta_*$ ,  $\theta_*$  — угол трения,

$$\sigma_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}v_c}}, \quad R_\alpha = (g_{11})_{x^\alpha} u^2 + 2(g_{12})_{x^\alpha} uv + (g_{22})_{x^\alpha} v^2.$$

Здесь использованы новые обозначения для декартовых координат  $x = x^1$ ,  $y = x^2$ , через  $u$  и  $v$  обозначены горизонтальные составляющие вектора  $\mathbf{v}_c = (\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c)^T$ , при этом

$$z_c(t) = h_{bt}(x_c(t), y_c(t)), \quad \dot{z}_c = u \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} + v \frac{\partial h_{bt}}{\partial y},$$

$v_c = |\mathbf{v}_c| = \sqrt{g_{11}u^2 + 2g_{12}uv + g_{22}v^2}$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  — первые две ковариантные компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}_c$ , связанные с декартовыми компонентами с помощью формул

$$v_1 = g_{11}u + g_{12}v, \quad v_2 = g_{21}u + g_{22}v,$$

$g_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) — ковариантные компоненты метрического тензора поверхности дна,

$$g_{11} = 1 + \left( \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} \right)^2, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} \cdot \frac{\partial h_{bt}}{\partial y}, \quad g_{22} = 1 + \left( \frac{\partial h_{bt}}{\partial y} \right)^2.$$

Кроме того,

$$I_{1,\alpha} = - \iint_{\mathcal{D}_t} \frac{h_{sl}(x, y, t)}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}(x, y)}} \frac{\partial h_{bt}}{\partial x^\alpha}(x, y) dx dy, \quad I_2 = \iint_{\mathcal{D}_t} \frac{h_{sl}(x, y, t)}{\sqrt{G(x, y)}} dx dy > 0,$$

$$I_{3,\alpha\beta} = \iint_{\mathcal{D}_t} \frac{h_{sl}(x, y, t)}{\sqrt{G(x, y)}} \frac{\partial^2 h_{bt}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}(x, y) dx dy, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \neq 0.$$

Итак, для определения положения нижней границы жидкости из системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (2.64) с использованием начальных данных  $v_1(0) = v_2(0) = 0$  находятся ковариантные компоненты скорости  $v_\alpha$  и по формулам  $u = g^{11}v_1 + g^{12}v_2$ ,  $v = g^{21}v_1 + g^{22}v_2$ , где  $g^{11} = g_{22}/G$ ,  $g^{12} = g^{21} = -g_{12}/G$ ,  $g^{22} = g_{11}/G$ , определяются декартовы компоненты скорости  $u$ ,  $v$ . Далее решается задача

$$\frac{dx_c}{dt} = u, \quad \frac{dy_c}{dt} = v; \quad x_c(0) = x_c^0, \quad y_c(0) = y_c^0,$$

и вычисляются координаты  $x_c(t)$ ,  $y_c(t)$  движущейся точки  $\mathbf{x}_c(t)$ , что позволяет определить в каждый момент времени нижнюю подвижную границу жидкости  $z = -h(x, y, t)$ . Эти вычисления проводятся до момента остановки оползня, т. е. до того, как значение  $v_c$  обратится в нуль.

#### 2.4.4. Движение твердого оползня по прямолинейному склону

Проведем сравнение численных решений с экспериментальными данными из работы [95]. Серия экспериментов была выполнена в бассейне, наполненном до глубины  $h_0 = 1.5$  м, длиной  $L_1 = 30$  м и шириной  $L_2 = 3.7$  м. В принятых в настоящей статье обозначениях на левой стенке при  $x = 0$  м невозмущенная свободная поверхность сопрягалась с плоским склоном, образующим с ней угол в  $15^\circ$ . В качестве модели оползня использовалось твердое тело из алюминия гладкой формы, массой 16 кг, толщиной  $T = 0.082$  м, длиной  $b = 0.395$  м и шириной  $w = 0.68$  м. При таких параметрах объем оползня получился  $V = 6.57 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>, а его плотность  $\rho = 2.45 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. В начальный момент времени оползень находился на заглублении  $d$  — расстоянии от невозмущенной свободной поверхности до вершины профиля оползня, которое определяло абсциссу начального положения  $x_c^0$ . Ордината же всегда была выбрана равной  $y_c^0 = 1.85$  м. В экспериментах менялся параметр  $d$ , здесь мы будем рассматривать только значения  $d = 0.061$  м и  $d = 0.189$  м — два предельных случая, для которых приведены графики мареограмм. Для таких заглублений абсцисса начального положения получалась соответственно  $x_c^0 \approx 0.522$  м и  $x_c^0 \approx 1$  м. Четыре мареографа располагались следующим образом: первый выставлялся над вершиной оползня  $(x_c^0, y_c^0)$ , а остальные устанавливались одинаково для всех экспериментов и имели координаты (1.469 м, 2.2 м), (1.929 м, 1.85 м) и (1.929 м, 2.385 м).

Для численного моделирования использовалась следующая форма оползня:

$$h_{sl}^0(x, y) = \begin{cases} \frac{T}{4} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi(x-x_c^0)}{b_x} \right) \right] \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi(y-y_c^0)}{b_y} \right) \right], & \begin{cases} |x - x_c^0| \leq b_x/2 \\ |y - y_c^0| \leq b_y/2; \end{cases} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (2.65)$$

где толщина  $T$  была такой же как и в эксперименте, а длины  $b_x$  и  $b_y$  вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно выбирались так, чтобы сохранялись объем оползня и соотношение  $b_x/b_y = b/w$ :  $b_x = 0.431$  м,  $b_y = 0.743$  м. В статье [95] приводятся вычисленные значения параметров закона движения оползня по плоскому склону:

$$\begin{aligned} C_w &= 0.607, C_d = 0.473 \text{ при } d = 0.61; \\ C_w &= 0.582, C_d = 0.353 \text{ при } d = 0.189. \end{aligned}$$

При этом его трением о дно склона пренебрегалось. Для визуального сходства графиков движения оползня вдоль склона в настоящей работе вводилось “искусственное” трение:  $\theta^* = 1.7^\circ$  при  $d = 0.061$  м и  $\theta^* = 1.2^\circ$  при  $d = 0.189$  м.

На Рисунке 2.6 представлены записи двух первых мареографов для  $d = 0.061$  м, полученные в эксперименте и расчетах по NLD- и SW-моделям. На первой мареограмме (Рисунок 2.6, а) видно, что обе модели качественно хорошо согласуются с экспериментом, но NLD-модель значительно лучше описывает амплитуду основной впадины. На записях второго мареографа (Рисунок 2.6, б) можно заметить, что SW-модель удовлетворительно описывает только первое возвышение и впа-

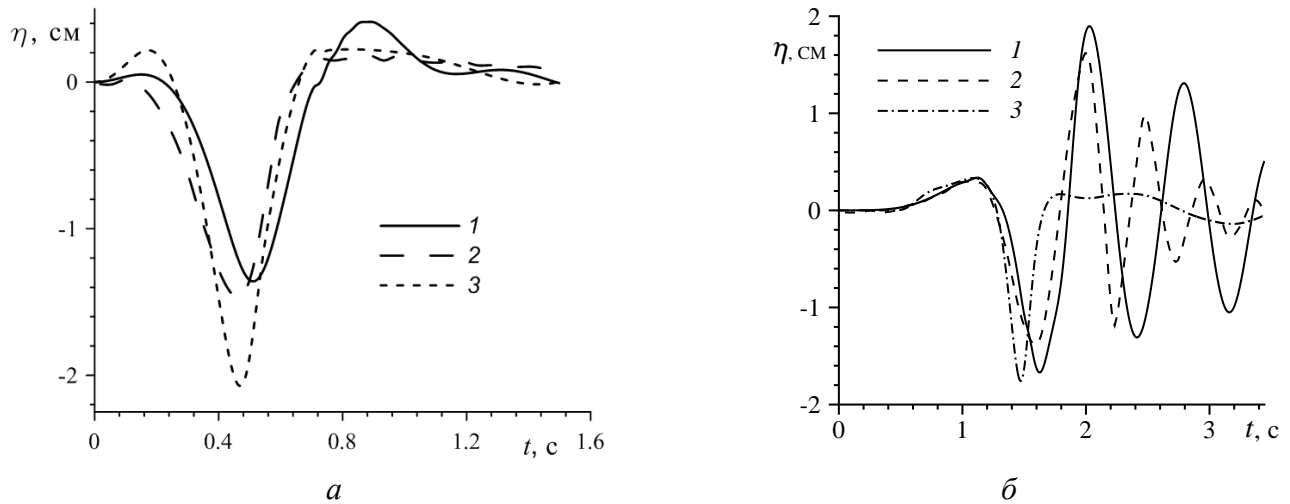


Рисунок 2.6 – Записи первого (а) и второго (б) мареографов при  $d = 0.061$  м: 1 — в расчете по NLD-модели; 2 — в эксперименте; 3 — в расчете по SW-модели

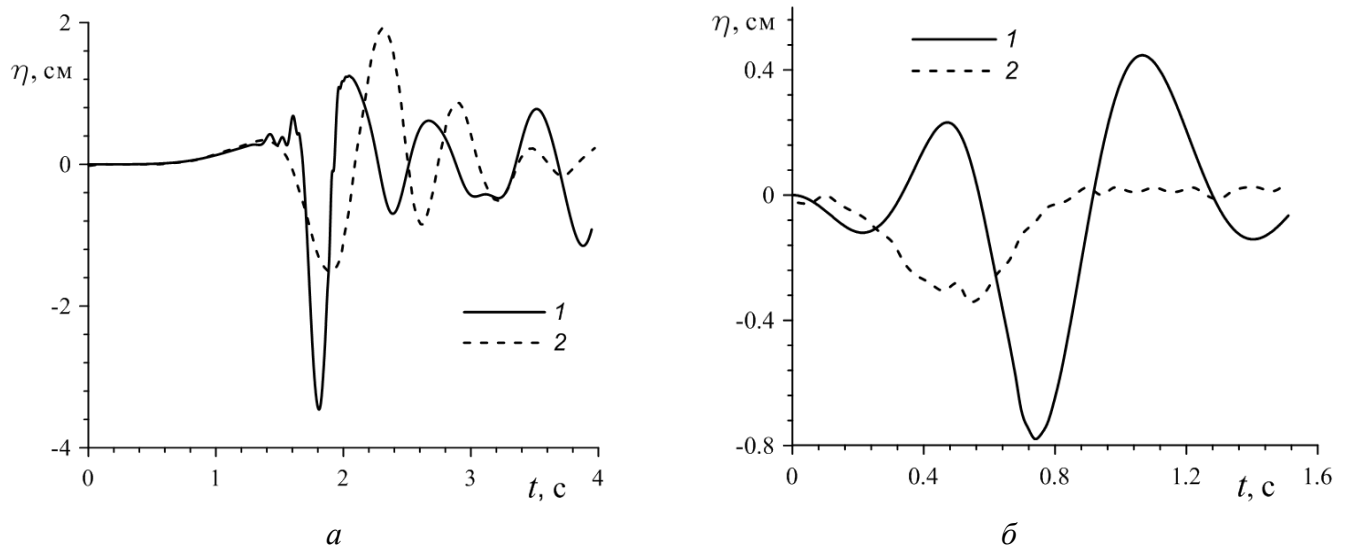


Рисунок 2.7 – Записи третьего мареографа при  $d = 0.061$  м (а) и первого при  $d = 0.189$  м (б) : 1 — в расчетах по NLD-модели; 2 — в экспериментах

дину, идущую за ним, а далее сильно упрощает картину течения. Напротив, NLD-модель неплохо согласуется с экспериментом и после первой впадины, особенно при описании волны самой большой амплитуды, следующей сразу за ней. Однако, стоит отметить некоторое преувеличение амплитуды второстепенных волн и их длины с течением времени. Это можно объяснить тем, что оползень в это время уже двигался по более глубокой части склона, где модели мелкой воды могут терять адекватность.

Для проверки этого предположения рассмотрим записи третьего мареографа при  $d = 0.061$  м, располагавшегося в более глубокой части склона, чем первые два (Рисунок 2.7, а). Видно, что амплитуды волн в расчете по NLD-модели значительно отличаются от амплитуд в эксперименте, несмотря на качественную схожесть волновых картин. В случае  $d = 0.189$  м, когда оползень стартует из более глубокого места, даже в первом мареографе (Рисунок 2.7, б), располагающимся

над начальным положением, отличия расчетов NLD-модели от эксперимента достаточно велики. Было проверено, что для остальных мареографов наблюдалась такая же картина. Из этих сравнений можно сделать вывод, что в случае, когда оползень стартовал и двигался по верхней части склона, NLD-модель хорошо описывала рассмотренный эксперимент, в отличие от SW-модели, воспроизводя не только впадину над оползнем, но и цуг волн после нее. Однако, при движении по глубокой части NLD-модель может значительно завышать амплитуду. В одномерных задачах такой эффект был описан, например, в работе [141], где использовалась НЛД-модель Лью-Лайнетта, и в статьях [14, 20, 68] по настоящей модели. При этом отмечается, что определяющую роль играет не само заглубление оползня, а его отношение к длине. Было также проверено, что на длину образованных волн (и, следовательно, на применимость моделей мелкой воды) заметно влияет ускорение оползня.

### 2.4.5. Сход подводного оползня в модельном участке реки

Сход подводных оползней может быть опасен не только в океанах, но и в крупных внутренних водоемах [29]. В настоящем пункте рассмотрим задачу о сходе подводного оползня в модельном участке реки с прямолинейными границами. Форма основания дна, по которому двигался оползень, была однородна в направлении ОУ и имела вид дуги параболы:

$$h_{bt}(x, y) = (h_{left} - h_{\xi}) \left( \frac{x}{\xi} - 1 \right)^2 + h_{\xi}, \quad (2.66)$$

где  $h_{left} = 10$  м — заглубление на левой и правой стенках,  $\xi = 500$  м — точка вершины параболы, глубина в которой была  $h_{\xi} = 100$  м. Таким образом, длина области в направлении  $Ox$  была  $L_1 = 1000$  м, такое же значение было выбрано для направления  $Oy$ :  $L_2 = 1000$  м. Слева и справа модельный водоем был ограничен вертикальными стенками, а на нижней ( $y = 0$ ) и верхней ( $y = L_2$ ) границах ставились условия свободного прохода волн.

Форма оползня  $h_{sl}$  задавалась по формуле (2.65), в которой принимались следующие значения:  $(x_c^0, y_c^0) = (109.1 \text{ м}, 500 \text{ м})$ ,  $b_x = 200$  м,  $b_y = 400$  или  $800$  м. Абсцисса начального положения  $x_c^0$  была выбрана так, что начальное заглубление центра носителя оползня было  $z_c^0 = 45$  м. В предыдущих исследованиях на одномерных задачах [14] было показано, что при таком соотношении заглубления к длине оползня  $b_x$  используемая NLD-модель дает очень близкие результаты к модели потенциальных течений, что может говорить о ее адекватности в этом классе задач.

В законе движения оползня выбирались значения, принятые в [14] за основу:

$$\gamma = 2, C_d = 1, C_m = 1, \theta^* = 5^\circ.$$

Их влияние на образование волн при исследовании в рамках SW-модели можно найти в [79]. Из-за ограниченности объема настоящей работы эти параметры будут фиксированы.

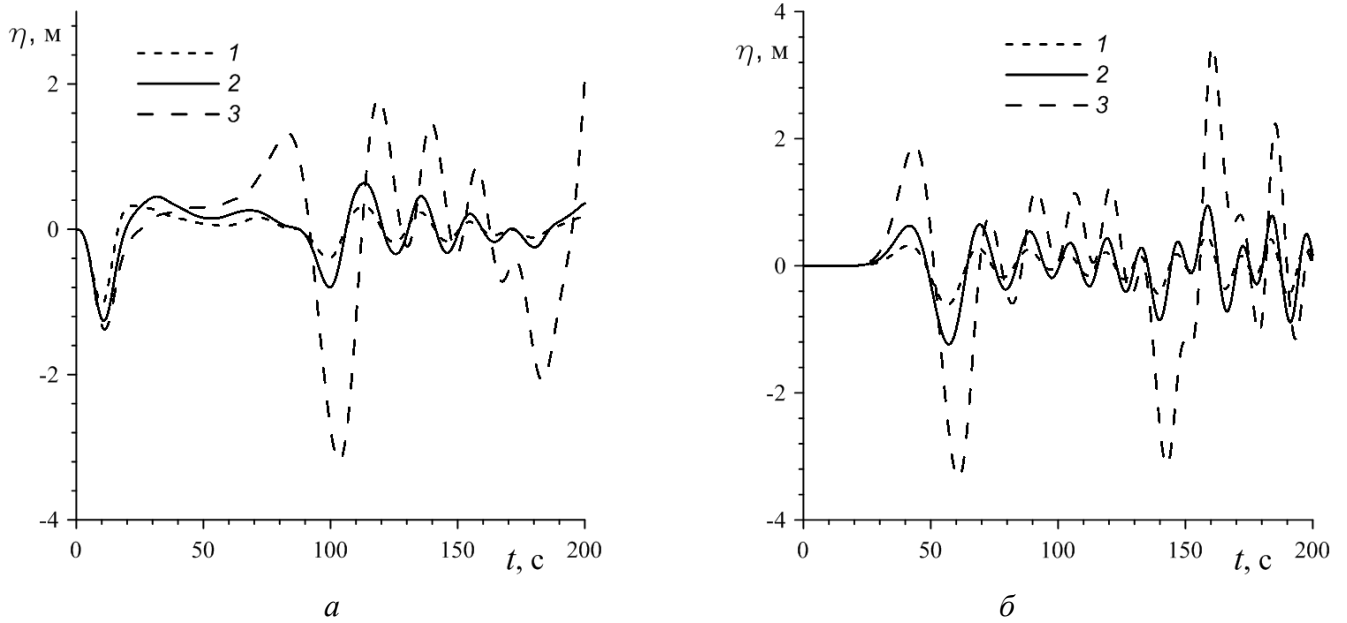


Рисунок 2.8 – Рассчитанные мареограммы на стенках слева (*a*) и справа (*б*) от центра оползня:  
 1 —  $b_y = 400$  м; 2 —  $b_y = 800$  м; 3 — одномерный расчет

При сравнении с расчетами по одномерной модели покажем влияние учета неоднородности формы оползня в двух горизонтальных направлениях. Одномерный расчет в этом случае соответствует “бесконечно широкому” оползню. Рассмотрим мареограммы на стенках слева (0 м, 500 м) и справа (1000 м, 500 м) от центра оползня на Рисунке 2.8. Отметим, что законы движения оползня для представленных расчетов совпадают.

Сравнивая двумерные расчеты с разной шириной оползня, можно заметить, что при увеличении ширины в два раза большинство волн увеличивают амплитуду также приблизительно в два раза. Этот эффект можно было ожидать в связи увеличением в два раза объема оползня, и, следовательно, его массы. Исключением стали только первые волны на левой стенке, которые не так сильно отличаются по амплитуде среди всех трех расчетов. Причиной этому стало начальное расположение оползня, близкое к левой стенке, так как волны накатились на нее за короткое время и не успели значительно распространиться в направлении  $Oy$ . Поэтому эффект “двумерности” в этом случае сказался меньше, чем при описании остальных волн, где можно заметить большое различие в амплитудах. При этом качественно волновые картины достаточно похожи.

Для объектов, располагающихся на левом и правом берегах, важной информацией может быть распределение максимальных за все время расчета заплесков. В одномерном расчете, очевидно, максимальный заплеск будет одинаковым вдоль всей стенки, но в двумерных картина оказывается нетривиальной. На Рисунке 2.9 представлены максимальные заплески вдоль левой и правой стенок за время  $t = 200$  с при ширине оползня  $b_y = 400$  м и  $b_y = 800$  м. На графиках видно, что максимальные заплески на правой, дальней от начального положения оползня, стенке значительно больше, чем на левой. При этом отличаются и формы этих заплесков: справа максимум находится по центру стенки, напротив центра оползня, и при удалении от центра заплеск почти монотонно убывает; слева же максимумы находятся симметрично на небольшом отдалении относительно

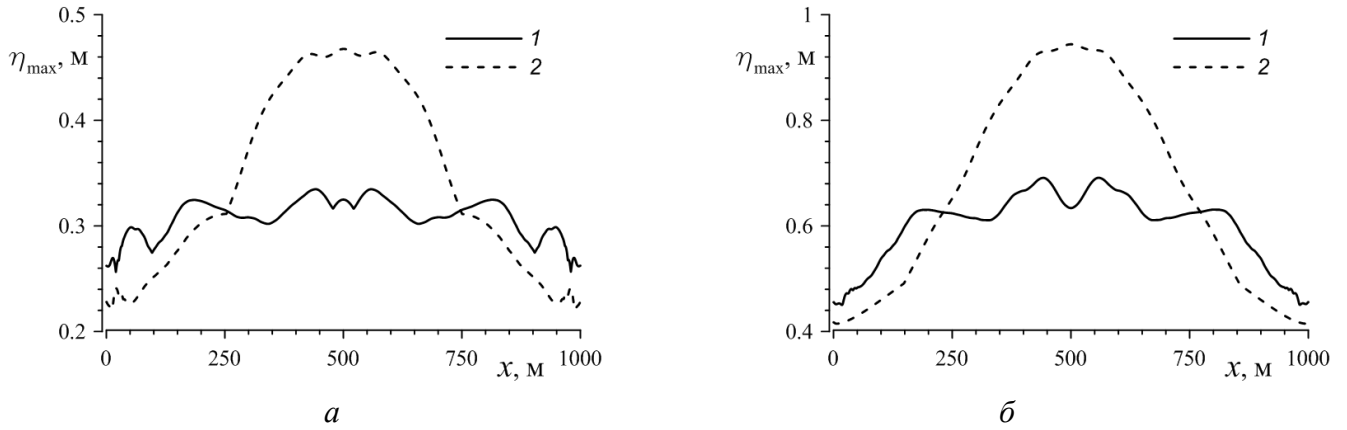


Рисунок 2.9 – Максимальная свободная поверхность за все время расчета при  $b_y = 400$  м (а) и  $b_y = 800$  м (б): 1 — на левой стенке; 2 — на правой стенке

центра, при этом есть еще два симметричных локальных максимума, близких по амплитуде к первым.

#### 2.4.6. Взаимодействие волны с цилиндрическим островом

Приведем результаты численного моделирования процесса взаимодействия уединенной волны с островом цилиндрической формы. Уединенная волна располагалась в начальный момент времени так, что ее гребень был параллелен оси ординат (Рисунок 2.10), т. е. все точки гребня имели одинаковую абсциссу  $x_0$ . Начальное возвышение и скорость течения при  $t = 0$  задавались по формулам

$$\eta(x, y, 0) = a_0 \operatorname{ch}^{-2} \left( \frac{\sqrt{3a_0g}}{2h_0U_0} (x - x_0) \right), \quad (2.67)$$

$$u(x, y, 0) = U_0 \frac{\eta(x, y, 0)}{h_0 + \eta(x, y, 0)}, \quad v(x, y, 0) \equiv 0, \quad (2.68)$$

где  $U_0 = \sqrt{g(h_0 + a_0)}$ ,  $h_0$  — толщина слоя воды над горизонтальным дном,  $a_0$  — амплитуда начальной волны. На Рисунке 2.10,  $a$  штриховой линией изображено положение  $x = x_0$  гребня уединенной волны в начальный момент времени.

Расчеты проводились в бассейне длиной  $L_1 = 35$  м, шириной  $L_2 = 30$  м и глубиной  $h_0 = 32$  см. Остров радиуса  $R_w = 2.32$  м располагался в точке  $x_* = 22.96$  м,  $y_* = 13.8$  м, в центре усеченного прямого кругового конуса с параметрами:  $R_0 = 3.6$  м и  $R_1 = 2.576$  м — радиусы основания и верхней части соответственно,  $\chi = \arctan(1/4)$  — угол между образующей конуса и плоскостью  $z = -h_0$ ,  $h_w = 6.4$  см — заглубление верхней части цилиндра (Рисунок 2.10, б). Дно в этом случае описывалось уравнением

$$z = -h(x, y) = \begin{cases} -h_w & \text{при } R_w < \rho_*(x, y) \leq R_1 \\ -h_0 + \tan \chi (R_0 - \rho_*) & \text{при } R_1 < \rho_*(x, y) < R_0 \\ -h_0 & \text{при } \rho_*(x, y) \geq R_0, \end{cases} \quad (2.69)$$



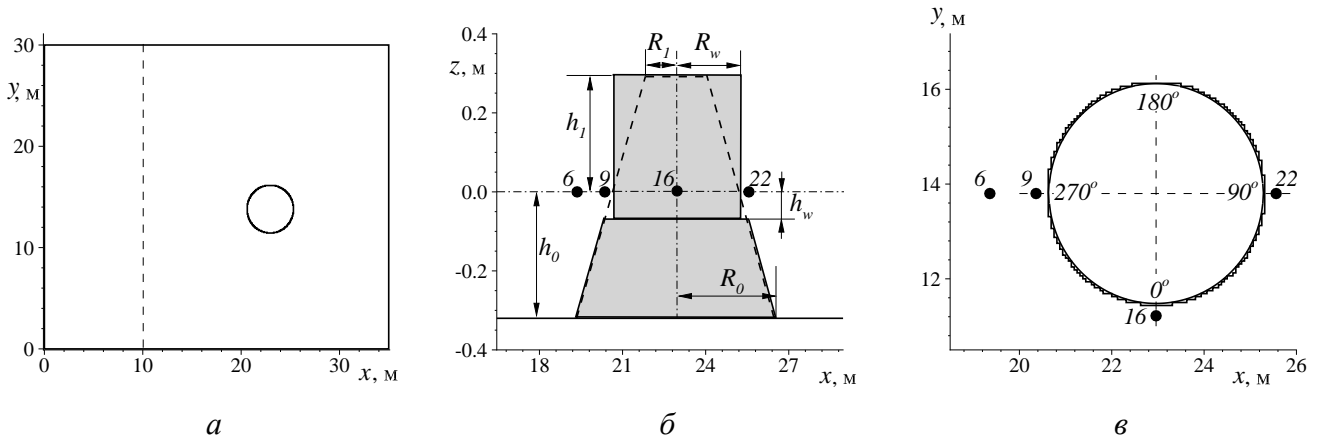


Рисунок 2.10 – Схема области решения (а) с расположенным в ней препятствием (б) в виде кругового цилиндра, установленного на усеченный конус; в – аппроксимация границы сечения цилиндрического препятствия с помощью ломаной

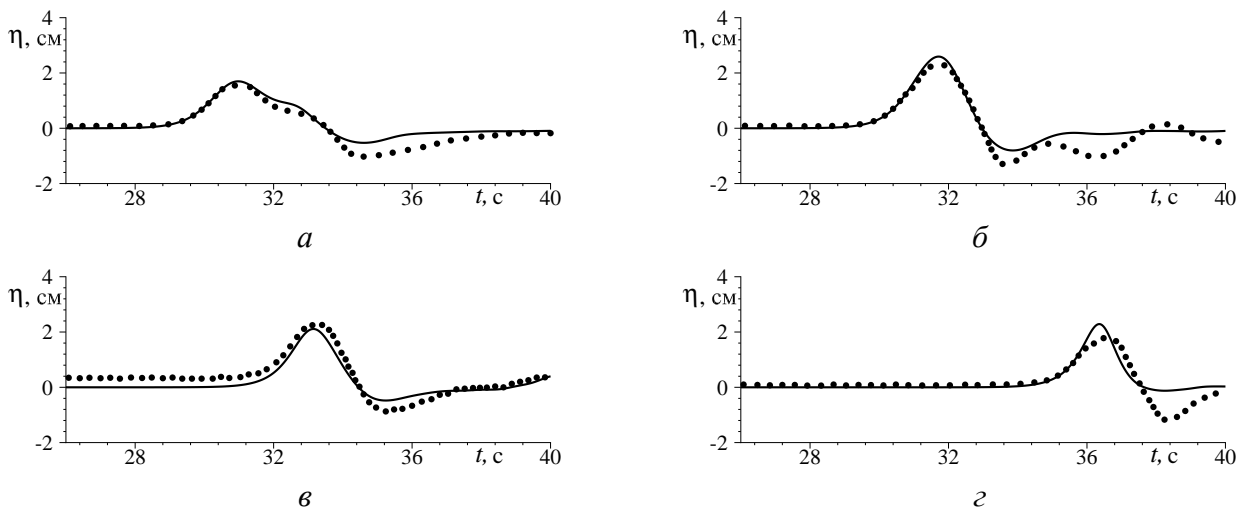


Рисунок 2.11 – Мареограммы, измеренные волномерами  $B_6$  (а),  $B_9$  (б),  $B_{16}$  (в),  $B_{22}$  (г) в эксперименте [83] (маркеры) и в расчетах по NLD-модели (сплошные линии) для амплитуды набегающей волны  $a_0 = 1.44$  см

где  $\rho_*(x, y) = \sqrt{(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2}$ . Граница цилиндра аппроксимировалась ломанной, как показано на Рисунке 2.10, в. В начальный момент времени гребень волны располагался при  $x_0 = 10$  м, а в качестве ее амплитуды выбирались два значения:  $a_0 = 1.44$  см и  $a_0 = 2.9$  см. Такие параметры задачи были выбраны для сравнения с экспериментальными данными, полученными в [83]. При этом стоит отметить, что в эксперименте весь остров представлялся усеченным конусом, возвышающимся над водой.

В расчетах и экспериментах картина взаимодействия волны с островом фиксировалась двадцатью семью волномерами. По аналогии со статьёй [87] в настоящей работе рассматривались четыре из них (см. Рисунок 2.10, б) с координатами:  $B_6 = (19.36$  м,  $13.8$  м),  $B_9 = (20.36$  м,  $13.8$  м),  $B_{16} = (12.96$  м,  $11.22$  м) и  $B_{22} = (15.56$  м,  $13.8$  м). Сравнение расчетов по NLD-модели с экспериментальными данными в указанных волномерах для амплитуд  $a_0 = 1.44$  см и  $a_0 = 2.9$  см представлены на Рисунках 2.11 и 2.12 соответственно.

При сравнении видно неплохое согласование, но в эксперименте волномеры записывали более сложную картину при откате волны. Это связано с тем, что в расчетах, в отличие от экспериментов, накат осуществлялся на вертикальную преграду. При этом наибольшие отличия фиксировались волномером  $B_{22}$ , который находился около дальней точки острова от начального положения волны.

Картину максимальных заплесков на остров можно рассмотреть на Рисунке 2.13. Угол  $\beta$ , отложенный в этих графиках по оси абсцисс, отсчитывался от точки острова с наименьшей ординатой (см. Рисунок 2.10, б). Важным результатом сравнения заплесков является качественное совпадение картин, при этом видно, что и в экспериментах и в расчетах для разных начальных амплитуд волн различается положение максимального заплеска на остров: при амплитуде  $a_0 = 1.44$  см он находится около  $\beta = 270^\circ$ , т. е. в ближней точке к начальному положению волны, а при  $a_0 = 2.9$  см — около  $\beta = 90^\circ$ . В некоторых проведенных ранее исследованиях в рамках модели мелкой воды (например, [87, 135]) такого эффекта не наблюдалось.

### 2.4.7. Распространение волн в модельной акватории “корыто”

Рассмотрим влияние частотной дисперсии при распространении волн в модельной акватории “корыто” [85], где дно было равномерным в направлении  $Ox$ , а в направлении  $Oy$  описывалось кусочно-линейной функцией, аппроксимирующей распределение глубин около Курило-Камчатского желоба, как показано на Рисунке 2.14. Длина расчётной области в направлении  $Ox$  была равна  $L_1 = 1555$  км. На нижней границе,  $y = 0$ , устанавливалась стенка и использовалось условие непротекания, а на остальных — условия свободного прохода волн. Распространение волн считалось до момента времени  $t = 50000$  с. Расчёты проводились на равномерной сетке с шагами  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 375$  м или  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 250$  м.

В исследовании использовались идеализированные (модельные) и реалистичные сейсмические источники. Модельные начальные возмущения свободной поверхности имели вид гауссовых

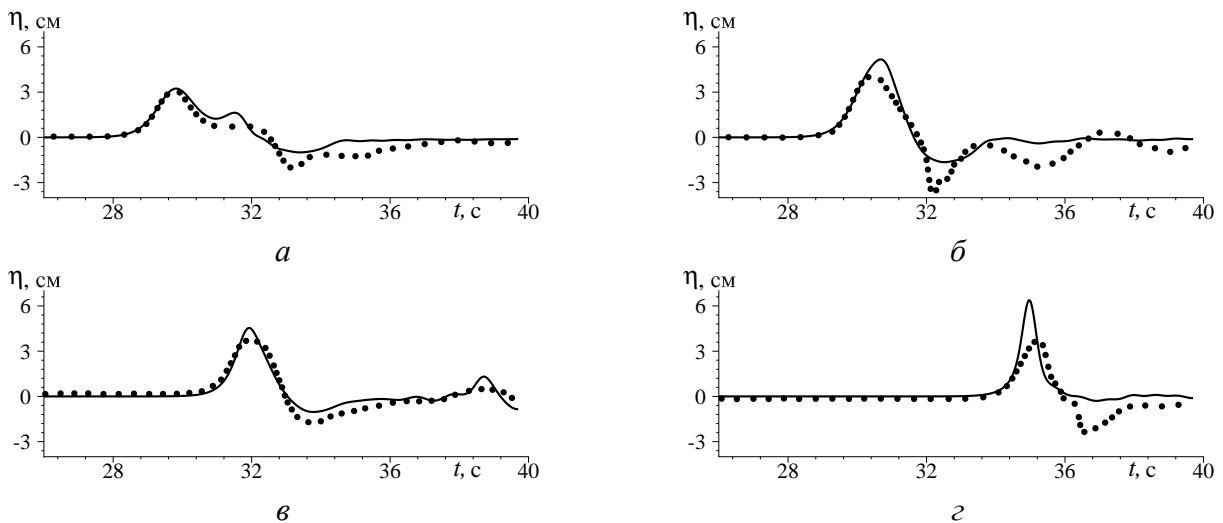


Рисунок 2.12 – Мареограммы, измеренные волномерами  $B_6$  (а),  $B_9$  (б),  $B_{16}$  (в),  $B_{22}$  (г) в эксперименте [83] (маркеры) и в расчетах по NLD-модели (сплошные линии) для амплитуды набегающей волны  $a_0 = 2.9$  см

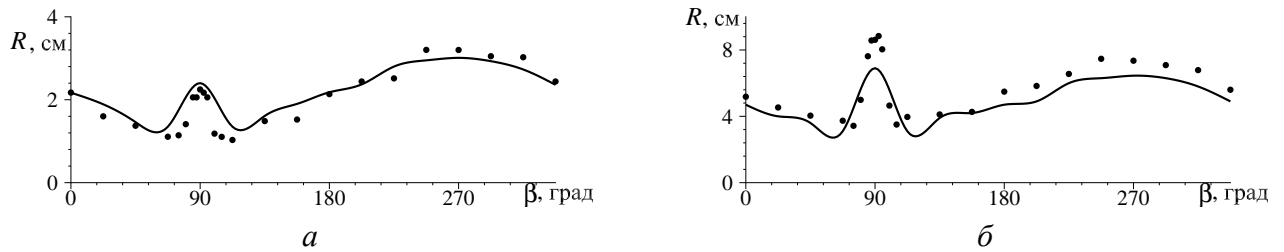


Рисунок 2.13 – Распределение максимальных высот заплесков на круговой конус в эксперименте [83] (маркеры) и на круговой цилиндр в расчетах по NLD-модели (сплошные линии) для амплитуды набегающей волны  $a_0 = 1.44$  см (а);  $a_0 = 2.9$  см (б)

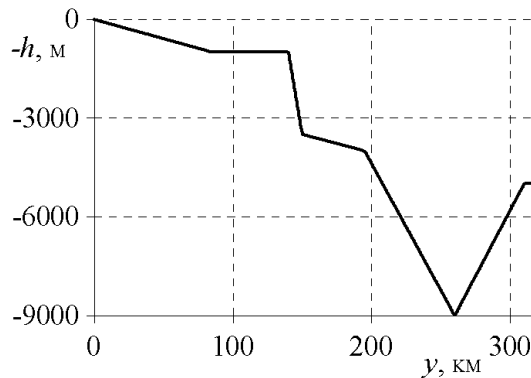


Рисунок 2.14 – Сечение  $x = const$  функции батиметрии в модельной акватории “корыто”

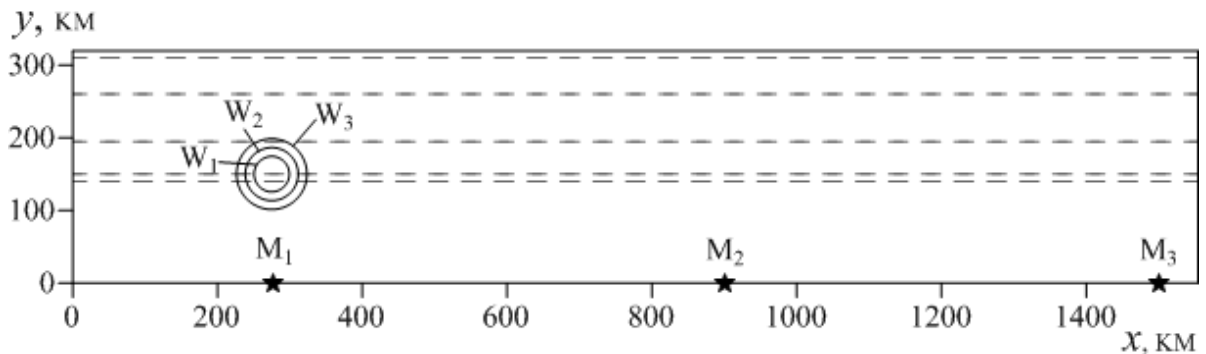


Рисунок 2.15 – Схема расчётной области “корыто” с расстановкой мареографов (звёздочки) и расположением идеализированных начальных возмущений (сплошные линии соответствуют контурам уровня 20 см). Пунктирные линии находятся над разрывами производной функции батиметрии

“шапок” и задавались формулой (2.61), в которой были выбраны следующие параметры: начальная амплитуда  $a_0 = 2$  м, положение центра возмущения  $(x_0, y_0) = (275 \text{ км}, 150 \text{ км})$ , а параметр  $w$  принимал одно из значений  $w_1 = 3.91 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-2}$ ,  $w_2 = 1.74 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-2}$  и  $w_3 = 9.78 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-2}$ , что соответствует эффективной протяжённости приблизительно равной  $W_1 = 50 \text{ км}$ ,  $W_2 = 75 \text{ км}$  и  $W_3 = 100 \text{ км}$ .

Здесь будем рассматривать записи трёх мареографов, расположенных на нижней границе:  $M_1 = (277.5 \text{ км}, 0 \text{ км})$ ,  $M_2 = (900 \text{ км}, 0 \text{ км})$  и  $M_3 = (1500 \text{ км}, 0 \text{ км})$  (см. Рисунок 2.15). Таким образом, мареограф  $M_1$  находился напротив начального возмущения,  $M_3$  — вдали от него около правой границы, а  $M_2$  — примерно посередине между ними.

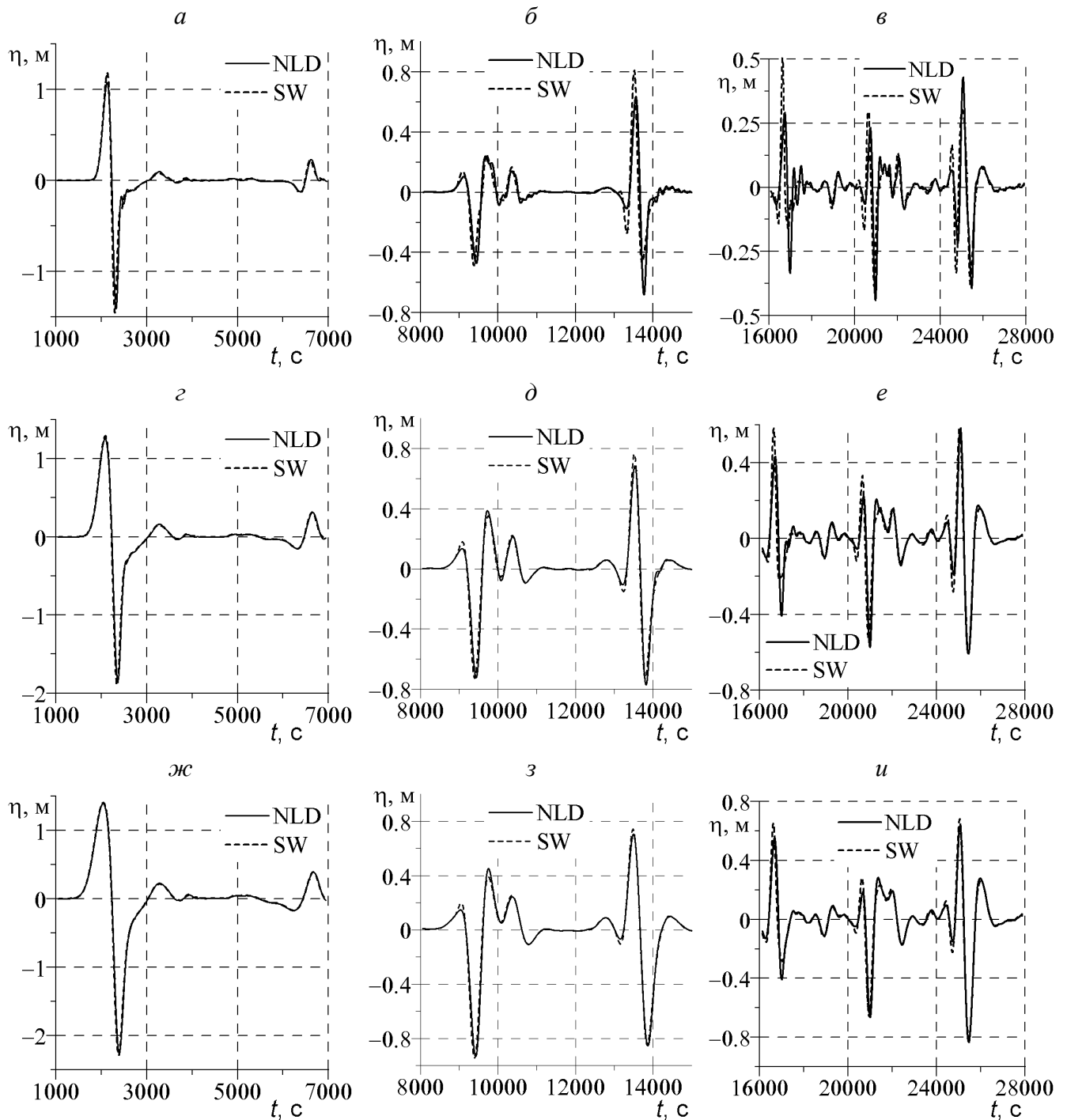


Рисунок 2.16 – Мареограммы  $M_1$  (а, г, ж),  $M_2$  (б, д, з) и  $M_3$  (в, е, и) в расчётах распространения волн в акватории “корыто” с модельными источниками с эффективной шириной протяжённостью  $W_1$  (а, б, в),  $W_2$  (г, д, е) и  $W_3$  (ж, з, и). Сплошные линии — расчёты по NLD-модели, пунктирные — по SW-модели

Наиболее значимые волны, зафиксированные тремя мареографами, представлены на Рисунке 2.16. Для оценки значимости дисперсии в этих задачах сравниваются результаты расчётов по NLD- и SW-моделям. По графикам видно, что в ближнем к начальному возмущению мареографе  $M_1$  дисперсия волн сказывается незначительно даже в расчёте с наименьшей эффективной протяжённостью  $W_1$ . При этом амплитуда первой положительной волны медленно возрастает при увеличении протяжённости источника, а отрицательной — значительно быстрее. Несмотря на то,

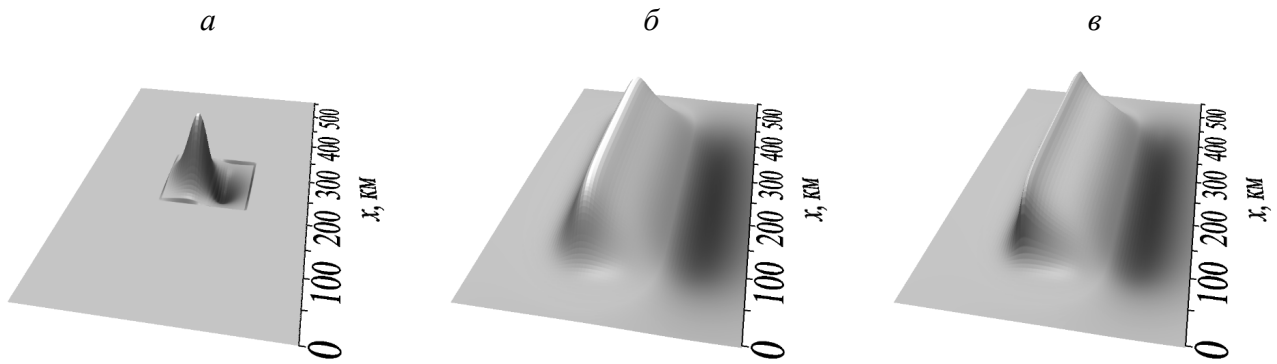


Рисунок 2.17 – Форма начального возмущения свободной поверхности для источников с  $Mw = 7.2$  (а) и  $Mw = 9.0$  (б, в)

что все границы кроме нижней “открытые”, а источники имеют простейшую форму, возникает сложная картина течения из-за взаимодействия волн с неровностями дна. Например, вторая волна небольшой амплитуды в мареографе  $M_1$  образовалась при отражении волны от стенок глубоководного жёлоба. Ещё более сложная волновая картина в мареографах  $M_2$  и  $M_3$ , где максимальную амплитуду имеет не первая пришедшая волна.

В записях мареографа  $M_2$  заметные различия между моделями проявляются только в расчётах с источником  $W_1$ . Эти различия возрастают с пройденным волной расстоянием и, можно сказать, что в мареографе  $M_3$  учёт частотной дисперсии необходим для адекватного описания процесса. Проявление дисперсии видно и по записям  $M_3$  в расчётах с источником  $W_2$ . Для самого “широкого” источника  $W_3$  даже расстояния до мареографа  $M_3$  недостаточно для того, чтобы дисперсия оказала значительное влияние на картину течения.

Рассмотренные выше модельные источники в виде “шапок” могут дать некое представление о значимости частотной дисперсии в задаче, однако, реальные сейсмические очаги порождают начальные возмущения свободной поверхности, весьма отличающейся от них формы. В зависимости от неё дисперсия может проявляться в различной степени. Поэтому, чтобы с приемлемой точностью сказать о мере её влиянии на процесс распространения для конкретного источника, необходимо проводить соответствующие расчёты. Вопрос о влиянии частотной дисперсии для реалистичных сейсмических источников исследовался ранее в работах [47], [146], [106] и др.

Для определения начального возмущения в задачах о сейсмических цунами, как правило, используется “поршневая” модель Гусякова-Окады [28]. Рассмотрим вначале три начальных возмущения свободной поверхности (Рисунок 2.17), предоставленные автору С.А. Бейзель и Л.Б. Чубаровым. В первом (Рисунок 2.17, а) в качестве источника служил очаг землетрясения с магнитудой  $Mw = 7.2$  — минимального порогового значения магнитуды, в случае превышения которого на российском дальневосточном побережье объявляется тревога цунами. Во втором и третьем — очаги с  $Mw = 9.0$ , вероятно, наибольшей магнитудой, которую стоит рассматривать для ближних очагов. Разница между вторым и третьим случаями (Рисунок 2.17, б и в соответственно) заключается в том, что в последнем уменьшено заглубление очага, из-за чего начальное возмущение имеет более крутой профиль с высокочастотным “пиком” в дальней от берега части.

Отметим, что на Рисунке 2.17 использовался разный масштаб по оси  $Oz$ , и в предложенных начальных возмущениях различаются максимальные и минимальные значения амплитуд: в первом случае  $A_{max} = 0.1782$  м,  $A_{min} = -0.0545$  м, во втором  $A_{max} = 5.061$  м,  $A_{min} = -1.532$  м, а в третьем  $A_{max} = 5.245$  м,  $A_{min} = -1.557$  м. Отсюда видно, что амплитуды возмущений существенно возрастают с магнитудой источника и немного убывают с его заглублением. Также важной особенностью исследуемых случаев является значительное увеличение площади, занимаемой начальным возмущением, с магнитудой.

На Рисунке 2.18 представлены наиболее значимые отрывки записей мареографов  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  в расчётах со всеми тремя начальными возмущениями свободной поверхности. В расчёте с источником с магнитудой  $Mw = 7.2$  в ближнем мареографе  $M_1$  дисперсия немного уменьшила амплитуду головной волны таким образом, что максимальный заплеск в расчёте по бездисперсионной модели мелкой воды (SW-) превысил заплеск, рассчитанный по NLD-модели, приблизительно на 9.5%. Во втором мареографе  $M_2$  существенно различаются амплитуды первой волны повышения, однако, максимальный заплеск даёт вторая волна, в которой отличие составляет менее 2%, причём SW-модель занижает амплитуду. Такой эффект может встречаться, например, когда перед волной повышения проходит волна понижения, и дисперсионный “хвост” от первой волны взаимодействует со второй и увеличивает её амплитуду. Тем не менее, нельзя утверждать, что при дальнейшем распространении такая картина сохранится. Так, например, в мареографе  $M_3$  вторая (самая высокая) волна в расчёте по SW-модели значительно (более чем на 28%) выше, чем в расчёте по NLD-модели.

Во втором расчёте с  $Mw = 9.0$  SW-модель завысила амплитуду максимальной волны в первом мареографе  $M_1$  менее чем на 7%. На мареограмме  $M_2$  можно увидеть, что, как и в случае с  $Mw = 7.2$ , NLD-модель даёт максимальный заплеск выше, причём почти на 8%. Но, в отличие от предыдущего расчёта, в мареографе  $M_3$  это различие увеличивается и достигает 18%. Это говорит о том, что, несмотря на существенное увеличение площади, занимаемой начальным возмущением свободной поверхности, в случае с  $Mw = 9.0$  дисперсия оказала влияние на волновую картину вдали от источника. При этом разница между NLD- и SW-моделями вела себя по-разному с различными магнитудами  $Mw$ . Заметим, что в случае модельных источников в виде “шапок” частотная дисперсия проявлялась в разной степени в зависимости от эффективной протяжённости, но во всех мареографах занижала максимальную амплитуду.

Расчёты с третьим вариантом начального возвышения свободной поверхности были проведены для исследования изменения влияния дисперсии при уменьшении заглубления очага землетрясения и, как следствие, изменении формы возмущения. Появление высокочастотного “пика” в верхней части начального возмущения, который сильнее подвержен влиянию частотной дисперсии, увеличивает отличия результатов расчётов по NLD- и SW-моделям: в ближнем мареографе  $M_1$  они достигают 10%, в  $M_2$  — NLD-модель выше также почти на 8%, а в  $M_3$  — почти на 23%. При этом визуально более отчётливо, по сравнению со вторым случаем, видны “диспергировавшие” волны малой амплитуды.

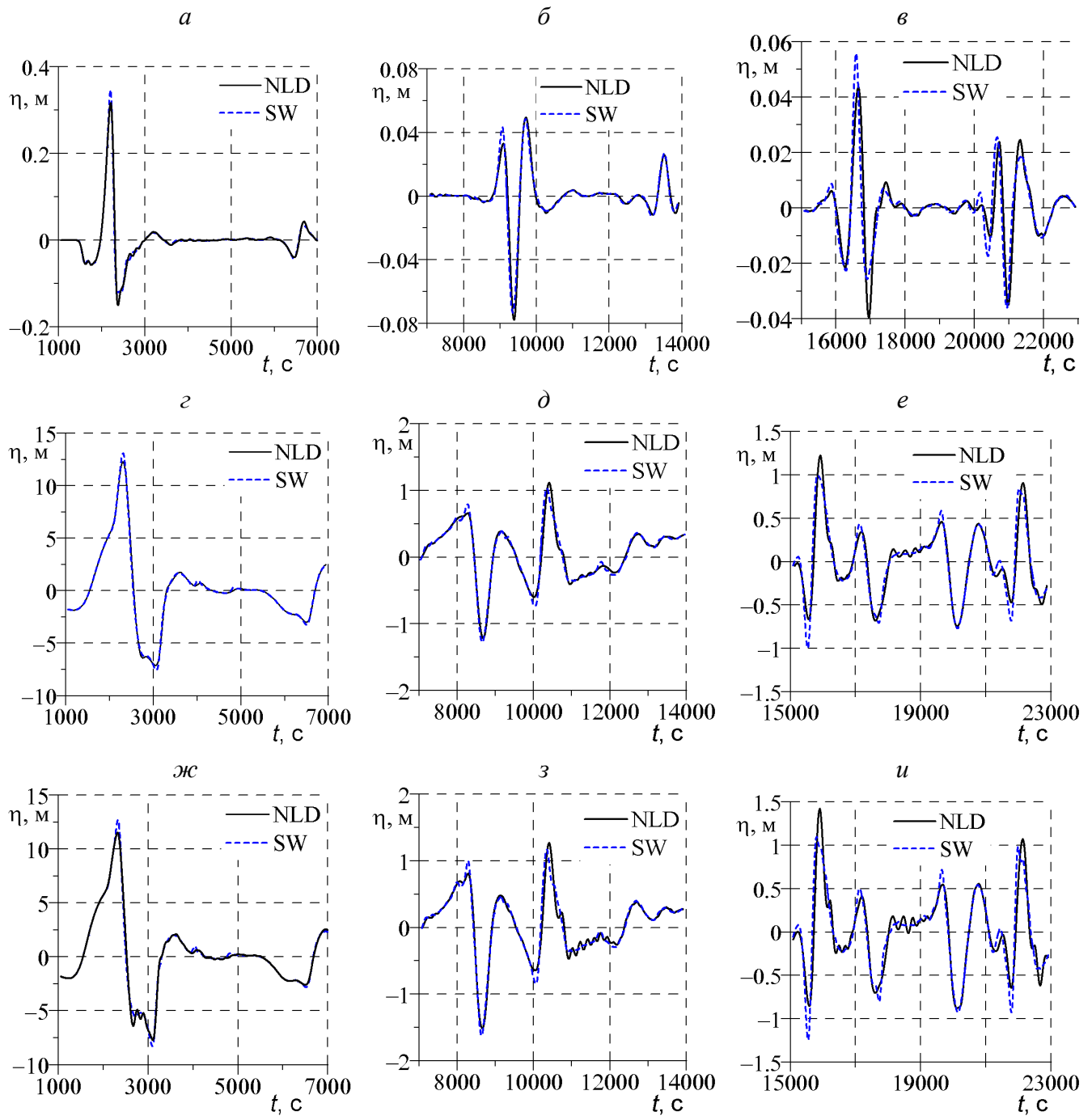


Рисунок 2.18 – Мареограммы  $M_1$  (а, г, ж),  $M_2$  (б, д, з) и  $M_3$  (в, е, и) в расчётах распространения волн в акватории “корыто” с реальными источниками с эффективной шириной протяжённостью  $W_1$  (а, б, в),  $W_2$  (г, д, е) и  $W_3$  (ж, з, и). Сплошные линии — расчёты по NLD-модели, пунктирные — по SW-модели

При рассмотрении относительных разниц в максимальных свободных поверхностях, полученных за всё время расчётов по NLD- и SW-моделям, было проверено, что в расчёте с магнитудой  $Mw = 7.2$  относительная разница велика и может достигать почти 50%. В расчётах с  $Mw = 9.0$  относительные разницы были до 25% для второго и 36% для третьего расчёта. Несмотря на большую относительную разницу в расчёте с магнитудой  $Mw = 7.2$ , абсолютная разница не превышает двух сантиметров. В двух других случаях с магнитудой  $Mw = 9.0$  отличия вблизи ближнего

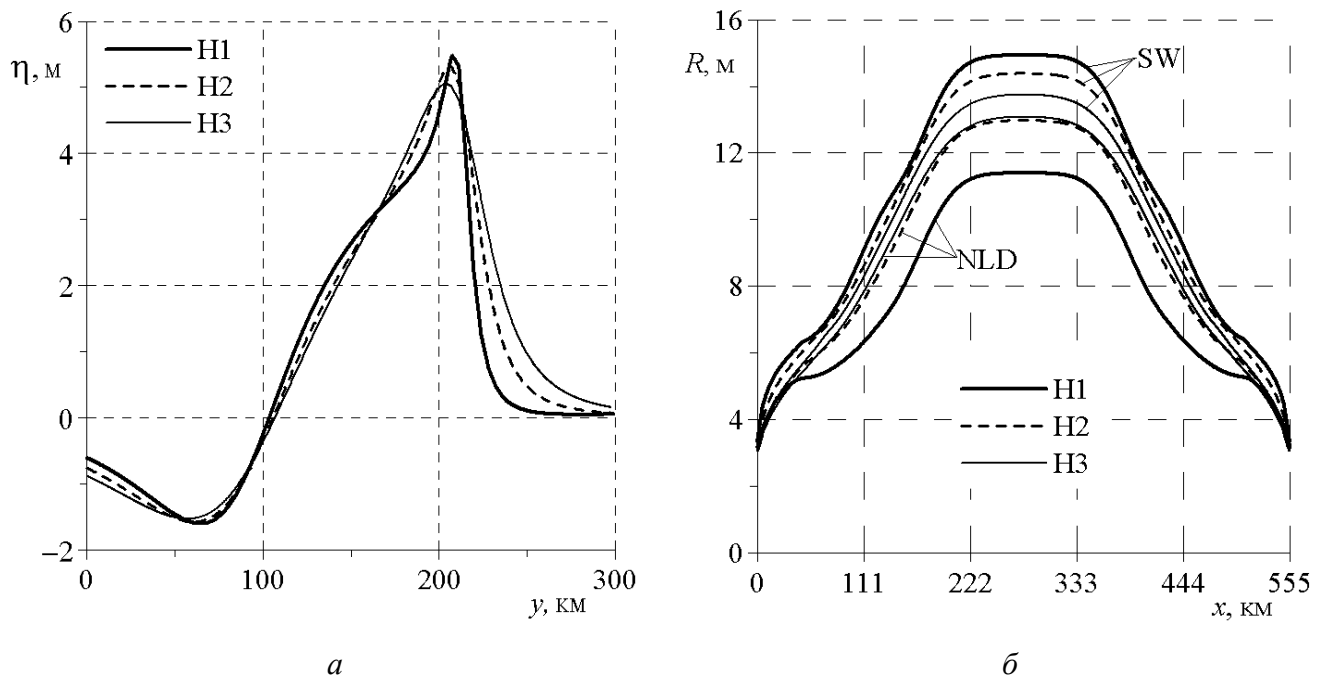


Рисунок 2.19 – Сечения начальных свободных поверхностей по прямой  $x = 277.5$  км *a* и картины максимальных заплесков за всё время расчёта на стенку при  $y = 0$  км *б*, посчитанные в рамках NLD- и SW-моделей, при различном заглублении гипоцентра  $\hat{H}$

мареографа  $M_1$  достигают 0.56 м и 0.88 м для второго и третьего варианта начальной свободной поверхности соответственно.

Для более детального выяснения влияния заглубления ( $\hat{H}$ ) гипоцентра очага землетрясения на проявление частотной дисперсии образованных поверхностных волн были рассмотрены сейсмические источники с магнитудой  $Mw = 9.0$  и значениями  $\hat{H}$  от 5 до 50 км с интервалом в 5 км. Здесь приведём результаты расчётов для трёх из них:  $\hat{H}_1 = 10$  км,  $\hat{H}_2 = 20$  км и  $\hat{H}_3 = 30$  км. Расчётная область была уменьшена в направлении  $Oy$  до  $x = 555$  км, что позволило использовать шаг сетки равный  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 125$  м, а в некоторых расчётах он был уменьшен до 62.5 м. Разницу в начальных возмущениях свободной поверхности в этих случаях можно рассмотреть на рис. 2.19, *a*, где представлены их сечения по прямой  $x = 277.5$  км. По рисунку видно, что в случае с  $\hat{H}_1$  у начальной свободной поверхности есть высокочастотный пик, а при увеличении заглубления профиль становится более гладким и уменьшается его высота.

Влияние частотной дисперсии будем рассматривать на максимальном заплеске на стенку при  $y = 0$  (рис. 2.19, *б*). При заглублении  $\hat{H}_3$  учёт дисперсии уменьшил максимальный заплеск на стенку, находящийся в точке  $x = 277.5$  км на 0.67 м, что составляет менее 5% от его значения. В случае с  $\hat{H}_2$  различия в расчётах по NLD- и SW-моделям уже 1.41 м, что есть почти 10% от максимума в расчёте по SW-модели. Наибольшее проявление дисперсии среди трёх представленных случаев замечено для  $\hat{H}_1$  — различия в расчётах по NLD- и SW-моделям составляют 3.54 м, что есть около 24%. Стоит ожидать, что при уменьшении заглубления гипоцентра землетрясения до  $\hat{H} = 5$  км эти различия ещё увеличатся. Соответствующие расчёты были проведены, однако, даже разрешения сетки  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 62.5$  м недостаточно для сходимости решения в расчётах по SW-



модели. Дальнейшее уменьшение шага затруднительно при использовании равномерной сетки и без применения технологий параллельных вычислений. Поэтому были проведены одномерные расчёты, начальными данными в которых служили сечения свободной поверхности и батиметрии по прямой  $x = 277.5$  км. В этих расчётах шаг сетки уменьшался до 16 м, и различия между максимальными заплесками на стенку в расчётах по NLD- и SW-модели при  $\hat{H} = 5$  км достигли 34%. В одномерном случае с  $\hat{H}_1$ , для сравнения, учёт дисперсии уменьшил максимальный заплеск чуть менее чем на 25%, что достаточно близко к двумерным расчётам с тем же значением  $\hat{H}$ .

Также при помощи аналогичных одномерных расчётов было проверено, что использование сеток с разрешением менее 125 м в расчёте по NLD-модели не меняет значительно величину максимального заплеска. Более быстрая сходимость решения по НЛД-моделям на последовательности сеток отмечалась, например, в работе [106], и связана с тем, что для сходимости необходимо не полное “подавление” численной дисперсии, как в SW-модели, а “преобладание” физической дисперсии над численной.

Представленные здесь результаты демонстрируют определяющее значение формы начального возмущения свободной поверхности для проявления дисперсии волн при их дальнейшем распространении. Можно сделать вывод, что даже при моделировании ближних цунами при магнитуде очага землетрясения  $Mw = 9.0$  может быть важен учёт дисперсии, когда заглупление гипоцентра этого очага мало. Более подробно настоящее исследование влияния параметров сейсмического источника цунами на проявление дисперсии изложено в работе [116].

#### 2.4.8. Гипотетические оползневые цунами в Черном море

В последнее время появляются гипотезы об образовании некоторых цунами в Черном море не сейсмическим путём (как, например, в работах [48, 50, 175]), а подводными оползнями (цунами на болгарском побережье в 2007-м году [152] и цунами в Одессе в 2015-м [43]). В связи с возможностью таких явлений изучаются оползневые отложения на континентальных склонах моря [32]. Отмечается [76] важность междисциплинарных исследований в задачах о подводных оползнях.

Основная цель вычислительных экспериментов, результаты которых представлены в настоящем пункте, заключалась в определении особенностей волновых режимов в ближней и дальней зонах акватории при различных начальных положениях оползня и значениях параметров, влияющих на его движение. Оценивалось также влияние дисперсии на волновое поле. Приведем некоторые результаты расчетов для модельных оползней, первоначально располагавшихся у подножия континентального склона вблизи места исторического оползня [37], имевшего объем  $V_0 = 40$  км<sup>3</sup>, толщину  $T_0 = 200$  м и площадь основания  $S_0 = 200$  км<sup>2</sup>.

Начальные положения трех модельных оползней  $L1$ ,  $L2$  и  $L3$ , имеющих одинаковую толщину  $T = T_0$ , схематично изображены на Рисунке 2.20, *a*. Оползни  $L2$  и  $L3$  имели при  $t = 0$  приблизительно те же координаты центра масс (37.15°В. Д., 44.4°С. Ш.) и заглупление  $z_c^0 = -1769$  м, что и исторический оползень, но отличались от него объемом или площадью. Эти отличия обусловлены необходимостью обеспечить достаточную для проведения расчетов в рамках NLD-

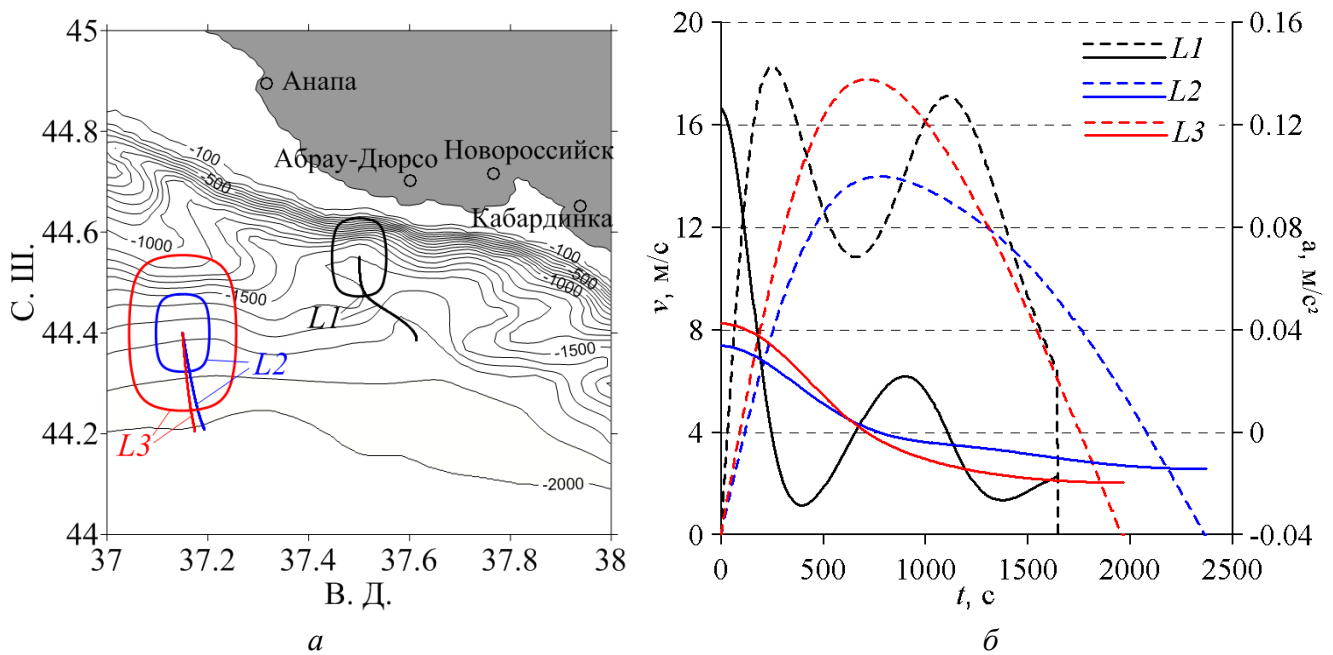


Рисунок 2.20 – *а* — схема фрагмента расчетной акватории с нанесенными изолиниями рельефа дна, контурами модельных оползней и траекториями их движения; *б* — графики скоростей  $v$  (штриховые линии) и ускорений  $a$  (сплошные линии) центров масс модельных оползней

модели гладкость поверхности модельного оползня, задаваемой формулой (2.65), согласно которой  $V = Tb_1b_2/4 = TS/4$ . Поэтому модельный оползень  $L2$ , имеющий одинаковую с историческим площадь  $S = S_0$ , по объему был вчетверо меньше. Для оползня  $L3$  с площадью  $S = 4S_0$  имело место равенство объемов  $V = V_0$ . Оползень  $L1$  с координатами центра масс ( $37.5^\circ$  В. Д.,  $44.55^\circ$  С. Ш.) имел те же размеры, что  $L2$ , но располагался в начальный момент времени выше по склону ( $z_c^0 = -1598$  м).

На Рисунке 2.20, *а* показаны также траектории движения оползней при следующих значениях параметров:  $C_w = 1$ ,  $C_d = 1$ ,  $\gamma = 2$ . Значения угла трения  $\theta_*$  подбирались так, чтобы модельные оползни проходили по склону одинаковое с историческим расстояние (около 22 км [37]). Поскольку оползни  $L2$  и  $L3$  были расположены на пологом (практически плоском) подножии континентального склона, то их траектории движения оказались близки к прямолинейным. Продолжительная деформация дна, приводящая к медленному набору скорости и к плавной остановке оползней  $L2$  и  $L3$  (см. Рисунок 2.20, *б*, на котором по левой вертикальной оси системы координат отложен модуль вектора скорости,  $v = |\mathbf{v}|$ , а по правой — величина  $a = dv/dt$ ), порождает волны небольшой амплитуды.

В самом начале движения оползня вокруг него возникает положительная волна серпообразной формы, распространяющаяся с образованием на заднем фронте волны понижения. Над самим оползнем образуется сопровождающая его “впадина”, постепенно исчезающая по мере продвижения оползня в глубоководную часть акватории. Со временем в направлении, противоположном направлению движения оползня (в мелководную прибрежную часть акватории), начинает распространяться возникшая волна понижения, которая после отражения от берега уходит на глубоководную часть акватории.

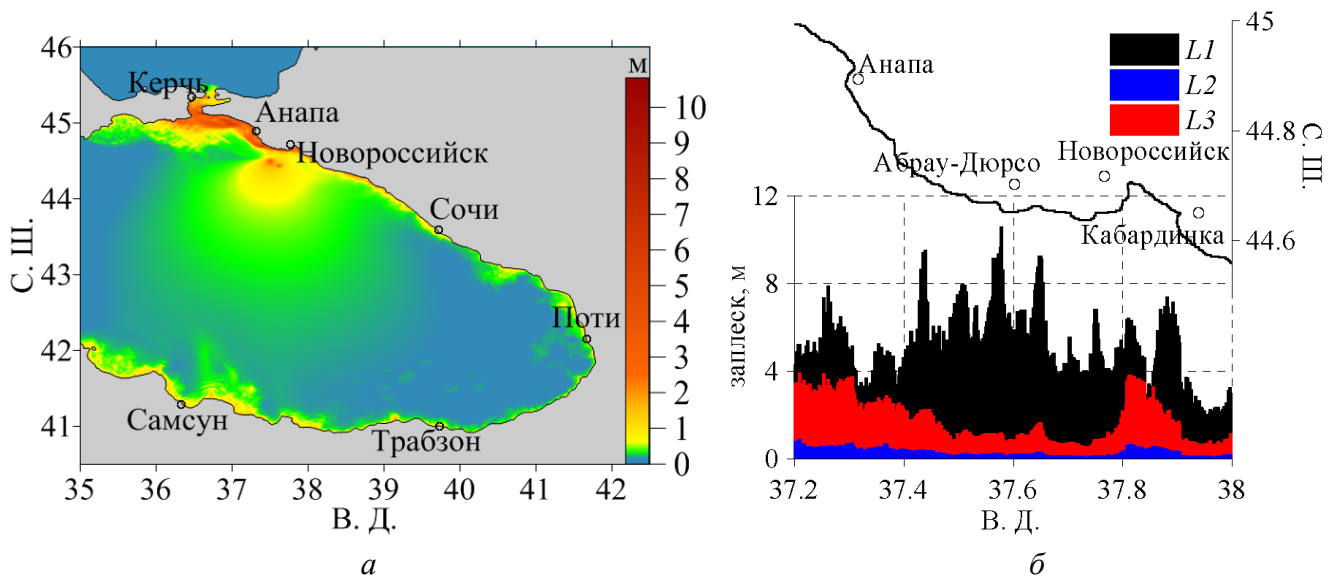


Рисунок 2.21 – *а* — распределение максимальных амплитуд волн цунами, порожденных модельным оползнем  $L1$  и рассчитанных на 3 часа физического времени их распространения; *б* — распределение максимальных высот волн вдоль участка береговой линии. NLD-модель

воде в виде положительной волны. При этом оползень бóльшего объема, при прочих равных условиях, порождает на берегу бóльшие высоты волн (см. Рисунок 2.21, *б*).

Более опасные волны возникают при движении оползня  $L1$ . Первоначально его верхняя часть располагалась на довольно крутой части склона и потому он с бóльшим ускорением (при выбранном значении  $\theta_* = 0.8^\circ$ ) достиг скорости 18 м/с, а попав в подводный каньон, дважды совершил крутые повороты и резко остановился в конце своего пути. Столь резкая остановка привела к возникновению нового элемента волнового поля — значительной положительной волны с большими амплитудами на линии уреза. Подобный эффект уже отмечался ранее (напр. [86, 157]) в модельных акваториях простой геометрии. Криволинейная траектория движения оползня  $L1$  усложняет взаимодействие генерируемых им волн, а большие начальные ускорения становятся причиной возникновения существенных амплитуд вдоль береговой линии. Отметим, что максимальные значения этих амплитуд достигаются не в ближайшей к местоположению оползня береговой точке, а там, где к берегу подходит серпообразная головная волна. Распределение максимальных высот волн на берегу оказывается крайне неравномерным (см. Рисунок 2.21, *б*) и сильно зависящим от протяженности шельфовой зоны, прибрежной батиметрии и геометрии береговой линии. Для случая с оползнем  $L1$  самыми уязвимыми оказались участки побережья, расположенные на небольшом удалении от оползневого очага, что видно из Рисунка 2.21, *а*, на котором изображено распределение максимальных за все время расчета значений амплитуд в восточной части акватории, указывающее, в частности, на отсутствие радиальной симметрии при распространении волновой энергии, основная часть которой направляется в сторону северного фрагмента российского побережья.

Отметим, что приведенные выше результаты получены на равномерной прямоугольной сетке, покрывающей акватории Черного и Азовского морей от  $27^\circ$  В. Д. до  $42.5^\circ$  В. Д. и от  $40.5^\circ$  С. Ш. до  $47.5^\circ$  С. Ш.. Предварительные расчеты проводились на грубой сетке, построенной на основе

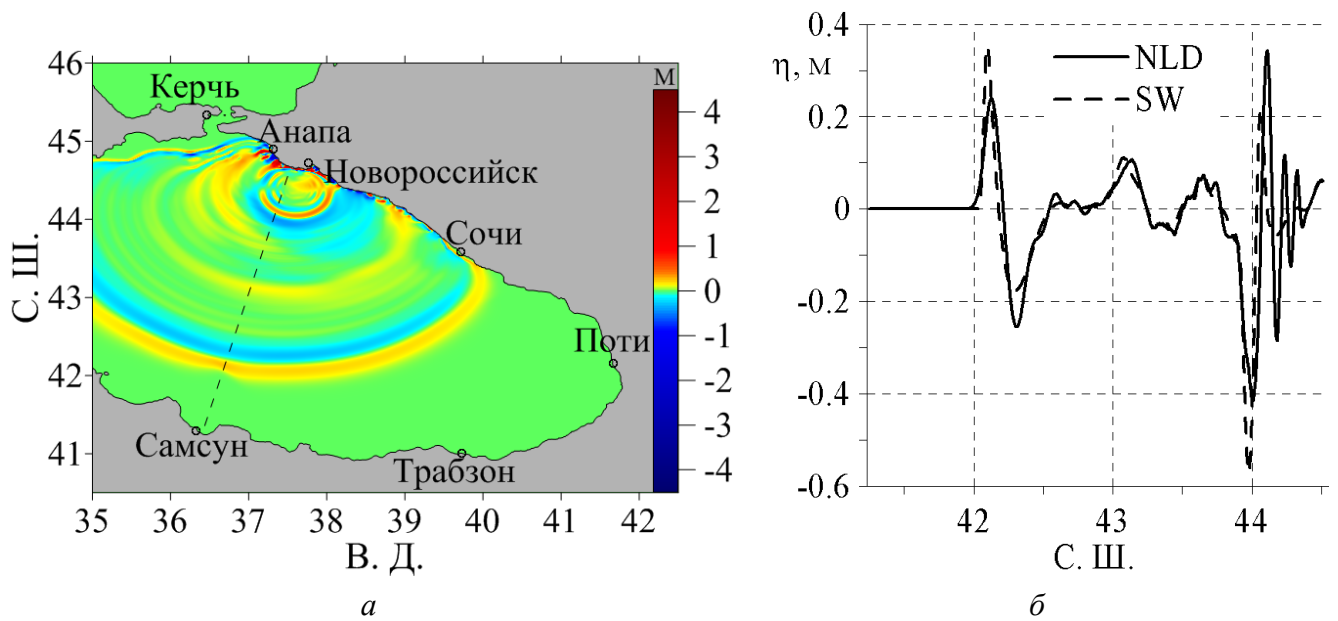


Рисунок 2.22 – *а* — свободная поверхность, рассчитанная по NLD-модели; *б* — сечения свободных поверхностей. Оползень L1;  $t = 2000$  s

цифрового рельефа “The GEBCO One Minute Grid - 2008”. Затем они пересчитывались на измельченной сетке с шагами  $h_x = 333.28$  м,  $h_y = 463.32$  м в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$  декартовой системы координат и, в конечном итоге, на самой мелкой сетке с уменьшенными вдвое шагами  $h_x = 166.64$  м,  $h_y = 231.66$  м. Сопоставление результатов, рассчитанных на этих трех сетках в точках установки виртуальных глубоководных мареографов, показало, что для нескольких первых волн сходимость имеет место. Однако детальное воспроизведение взаимодействия волн с берегом (с вертикальной стенкой, установленной на глубине  $h_w = 20$  м) потребует проведения расчетов на сетках с еще большей разрешающей способностью так как при измельчении сетки вскрываются подсеточные детали батиметрии и береговой линии, невозпроизводимые на грубых сетках, но сильно влияющие на динамику коротких волн в прибрежной зоне. Одним из приемов, способных обеспечить достаточную точность расчетов, является использование в окрестности наиболее важных участков побережья измельчающихся телескопически вложенных сеток [117].

Общее представление о динамике волнового режима, генерируемого оползнем, могут дать правильно подобранные последовательности изображений полей свободной поверхности, рассчитанных на различные моменты времени. Одно из таких изображений показано на Рисунке 2.22, *а* с использованием шкалы, отображающей величину отклонения поверхности воды от невозмущенного положения. Как видно из рисунка, через 33 минуты после начала движения оползня доминирующими элементами волнового поля являются головная волна и две волны, отраженные от берега. По мере удаления от источника возмущения амплитуды этих волн уменьшаются, однако при выходе на широкие участки южного шельфа начинают расти и могут достигать двух метров на береговой линии (см. Рисунок 2.21, *а*). Следует также отметить деформацию волновых фронтов, вызванную неоднородностью распределения скоростей их движения в акватории с сильно неоднородным распределением глубин.

Для оценки влияния дисперсии на процесс распространения волн, рассматривались сечения распределений свободной поверхности, рассчитанных в различные моменты времени. Сравнение результатов расчетов по NLD- и SW-моделям показало, что в рассматриваемом круге задач учет дисперсии слабо влияет на волновые поля в начальной стадии процесса, а также в ходе взаимодействия волн с участками побережья, близкими к начальному положению оползня. Время прихода первых волн к этим участкам оказалось небольшим и поэтому дисперсионные эффекты не успели проявиться. Оползни  $L2$  и  $L3$  генерируют столь длинные волны, что дисперсионные эффекты практически не оказывают влияния в течение всего процесса. Для оползня  $L1$  дисперсия генерируемых им волн является более заметной.

На Рисунке 2.22, *а* показано положение сечения, проходящего через точку первоначального положения центра масс оползня  $L1$  и направленного в сторону города Самсун (Турция). К моменту времени, которому соответствует Рисунок 2.22, *а*, головная волна уже прошла большую часть пути к южному побережью, оставив позади себя дисперсионный хвост из коротких волн малой амплитуды. Более четко дисперсия проявляется после возникновения волны ( $t \approx 1700$  с), обусловленной резкой остановкой оползня. Эта волна с крутыми склонами распадается на ряд коротких волн, хорошо различимых в правой части Рисунка 2.22, *б*. Бездисперсионная SW-модель такую особенность волнового поля не воспроизводит.

Было замечено, что из-за особенностей рельефа дна в некоторых мареографах южном побережье наблюдается хорошее согласие результатов расчётов по NLD- и SW-моделям. Наиболее заметные отличия имеют место в глубоководной части акватории. В частности, амплитуда головной волны, рассчитанная с помощью NLD-модели, значительно меньше, чем амплитуда, определяемая SW-моделью, и несколько медленнее распространяется её максимум. Кроме того, при длительном распространении максимум амплитуды может переместиться в дисперсионный хвост ([106, 138, 140]). Отметим, что при исследовании волн, образованных оползнями с меньшими горизонтальными размерами (например, гипотетические оползни в статье [152]), стоит ожидать усиления влияния частотной дисперсии.

#### 2.4.9. Цунами 2007-го года на болгарском побережье

В предыдущем пункте было выполнено моделирование волн цунами, которые могли образоваться при задокументированном сходе оползня. Здесь, напротив, при помощи анализа натурных данных об аномальных волнах, наблюдавшихся 7-го мая 2007-го года на болгарском побережье, и численного моделирования будет исследована возможность образования их подводным оползнем.

Эта гипотеза была предложена авторами работы [152], где были рассмотрены 4 возможных положения оползня. Во всех этих случаях он стартовал с глубины около 100 м на расстоянии 30–50 км от берега. Предполагаемый объем его составлял 30–60 миллионов кубических метров при толщине 20–40 м. Модель оползня представляла собой конечный набор твердых блоков, соединенных друг с другом гибкими связями, движущихся под действием сил тяжести и трения. Движение волн, вызванных перемещением оползня, описывалось в рамках уравнений Навье-Стокса в при-

ближении мелкой воды с использованием метода конечных элементов. Для всех четырех случаев моделирование схода показало схожие результаты: скорость оползня достигла 20 м/с через 200–300 с после начала движения; остановился он на глубине 1000 м, сместившись на 20 км от своего начального положения. Гипотеза исследовалась при помощи сравнений результатов расчётов с данными наблюдений очевидцев и записями мареографов. Всего представлены данные максимальных положительных и отрицательных амплитуд волн для 7 пунктов на побережье: Шабла (–1.5 м, 0.9 м), Болата (–1.3 м, 0.9 м), Дълбока (–2.0 м, 1.2 м), Каварна (–1.8 м, 0.9 м), Балчик (–1.5 м, 1.2 м), Варна (–0.7 м, 0.4 м) и Галата (–0.2 м, 0.1 м). Сравнения позволяют говорить о возможности оползневого механизма генерации подобных волн, однако, даже самый подходящий вариант оползня из рассмотренных не позволил получить удовлетворительное согласие с данными наблюдений во всех этих пунктах. Более того, максимальные смоделированные волны амплитудой более 2-х метров для этого варианта пришлось на более южную часть болгарского побережья (около Емине), где подобных явлений зафиксировано не было.

Помимо оползневого механизма генерации наблюдавшихся волн исследовалась гипотеза о метеоцунами в работе [167]. При анализе метеорологической обстановки за ближайшее к событию время был сделан вывод, что такие условия могли стать причиной появления аномальных волн у этого побережья. В численных расчётах удалось получить в некоторых пунктах амплитуды волн близкие к наблюдениям, однако, не позволяют говорить о хорошем соответствии в целом. В частности, в расчётах сильно занижены амплитуды в северной части побережья (Шабла) и завышены в южной (Бургаски залив).

Здесь будет исследована гипотеза о генерации этого цунами подводным оползнем. В отличие от работы [152] для моделирования образования и дальнейшего распространения волн используется NLD-модель, а в качестве модели оползня — квазидеформируемое тело (см. пункт 2.4.3) с формой (2.65). В настоящей работе акцент делается на исследовании большого числа возможных начальных положений оползня, так как наши предыдущие исследования показывают [127], что начальное положение имеет решающее значение для картины заплесков образованных волн на берег.

Сперва было выбрано 40 начальных положений оползня около болгарского побережья, приблизительно на глубине 200, 1000 и 1500 м (см. квадратики на Рисунке 2.23). Остальные параметры оползня были для всех расчётов одинаковыми:  $C_w = C_d = 1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\theta_* = 1^\circ$ ,  $T = 40$  м,  $b_1 = b_2 = 2500$  м. Объём оползня при таких параметрах равен  $V = 62.5 \cdot 10^6$  м<sup>3</sup>, то есть близок к наибольшему варианту из статьи [152]. Заметим, что при бóльшем начальном заглублении оползень генерирует волны значительно меньшей амплитуды, однако, можно ожидать, что при увеличении толщины оползня  $T$  картина течения сохранится (так как  $T$  не влияет характер движения оползня), а амплитуды волн вырастут пропорционально.

Расчёты проводились на сетке с шагом 3.75'', полученной при билинейной интерполяции цифрового рельефа "The GEBCO One Minute Grid - 2008". После рассмотрения картин распределения максимальных и минимальных амплитуд пришедших волн на побережье за всё время расчёта

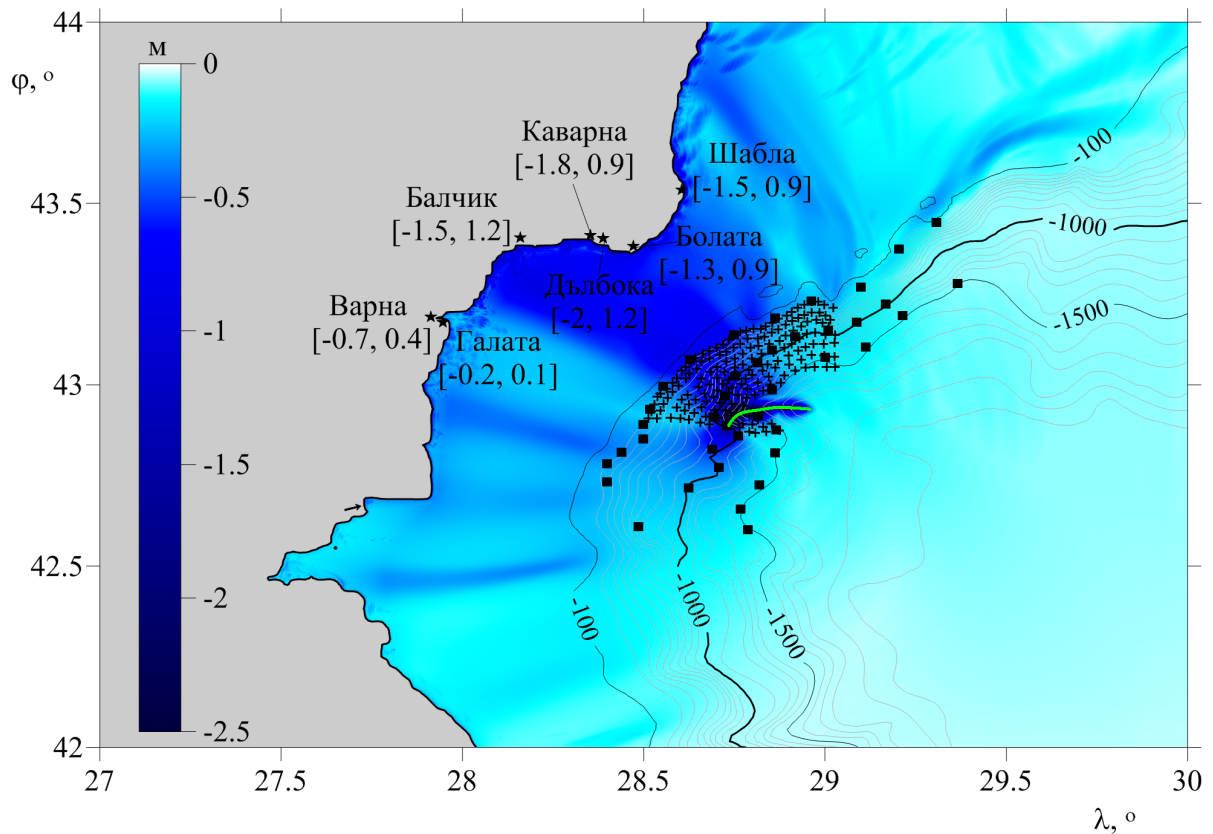


Рисунок 2.23 – Расчётная область и картина распределения минимальной свободной поверхности за всё время расчёта с наиболее подходящим вариантом оползня (2.70). Чёрными и серыми линиями показаны изобаты, звёздочками — населённые пункты, в которых есть данные наблюдений максимальных и минимальных волн (данные указаны в квадратных скобках в метрах). Квадратики и крестики — исследуемые начальные положения оползня, стрелка показывает направление и начало отсчёта для дальнейшего рассмотрения заплеска на побережье. Зелёная линия соответствует траектории схода оползня (2.70)

(3 часа) была выделена область для более детального моделирования, в которой было дополнительно исследовано 171 начальное положение оползня (крестики на Рисунке 2.23).

Путём сравнения картин минимальных и максимальных рассчитанных волн с данными наблюдений был выбран наиболее подходящий вариант, который в последствии был пересчитан с толщиной оползня  $T = 320$  м для наилучшего соответствия наблюдениям по амплитудам волн. Таким образом, параметры предполагаемого оползня в формуле (2.65) стали следующими:

$$x_c^0 = 28.7341^\circ, y_c^0 = 42.8871^\circ, T = 320 \text{ м}, b_1 = b_2 = 2500 \text{ м}. \quad (2.70)$$

При таких параметрах оползень проходит от начального положения до точки остановки ( $28.9584^\circ, 42.9324^\circ$ ) чуть менее 21 км (см. зелёную линию на Рисунке 2.23) за 19 минут, с максимальной скоростью почти 29 м/с в момент времени 214 с.

Картина распределения минимальной свободной поверхности за всё время расчёта для этого варианта оползня представлена на Рисунке 2.23. Видно, что максимальные по амплитуде волны понижения приходят как раз в те пункты, в которых и наблюдались наибольшие колебания свободной поверхности. Заметим, что в этом случае картина не имеет вид двух лучей, которые

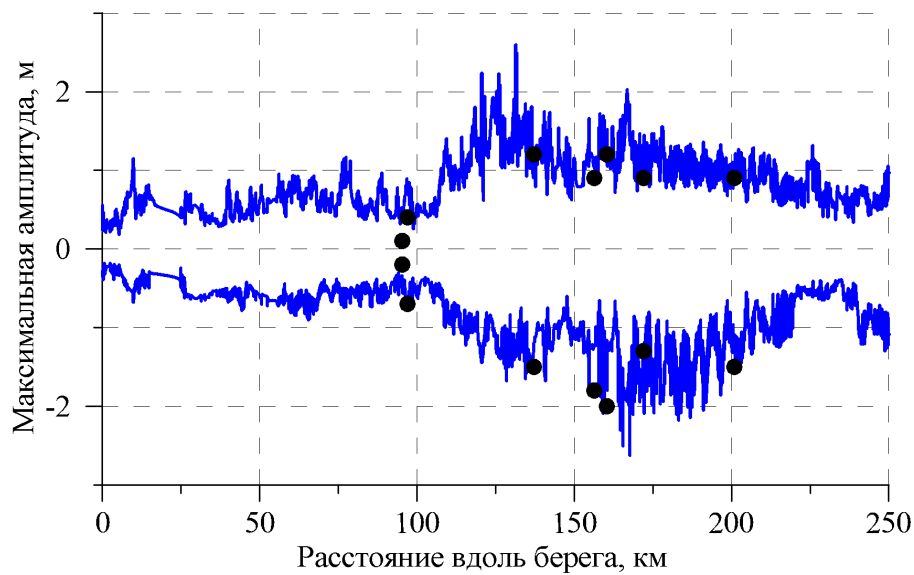


Рисунок 2.24 – Минимальные и максимальные колебания свободной поверхности на побережье за всё время расчёта. Синие линии — расчёт для оползня (2.70), круги — данные наблюдений

получились во всех вариантах, рассмотренных в работе [152]. В общем, при рассмотрении всех начальных положений, сложно выделить характерную картину минимальных или максимальных колебаний свободной поверхности, так как она сильно зависит от положения оползня и, соответственно, характера его движения. В некоторых рассмотренных случаях, к примеру, имела место резкая остановка оползня в конце его движения, которая может кардинально поменять картину “свечения”.

Минимальные и максимальные зафиксированные колебания свободной поверхности на побережье представлены на Рисунке 2.24. Отсчёт расстояния вдоль побережья ведётся от места, указанного на Рисунке 2.23 стрелкой, при этом оно считается как сумма расстояний между узлами расчётной сетки и может несколько отличаться от реального расстояния. По рисунку видно хорошее соответствие расчёта данным наблюдений во всех рассмотренных населённых пунктах. Более того, в предложенном случае нет больших волн на южной части побережья, в отличие от оползня из работы [152]. Стоит отметить, что ещё несколько начальных положений давали неплохое соответствие данным наблюдений, при этом все они останавливались или проходили место остановки оползня (2.70) (этот оползень тоже может проползти немного дальше, если уменьшить угол трения). Таким образом, можно рекомендовать эту область для дальнейших исследований морского дна.

Заметим, что размеры оползня в (2.70) могут быть изменены без потери хорошего согласия с натурными данными. Так, например, был рассмотрен вариант меньшей толщины и большей протяжённости,

$$x_c^0 = 28.7341^\circ, y_c^0 = 42.8871^\circ, T = 110 \text{ м}, b_1 = b_2 = 5000 \text{ м}, \quad (2.71)$$



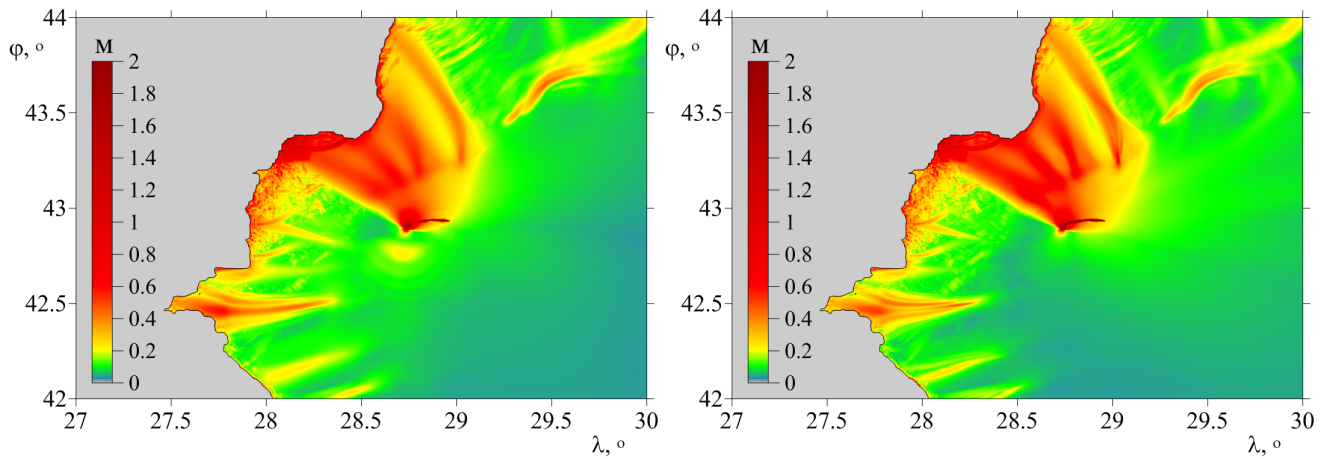


Рисунок 2.25 – Распределение максимальных значений волн, полученных за всё время расчёта по FNLD- и NLSW-моделям (слева и справа соответственно). Расчёты для оползня с параметрами (2.70)

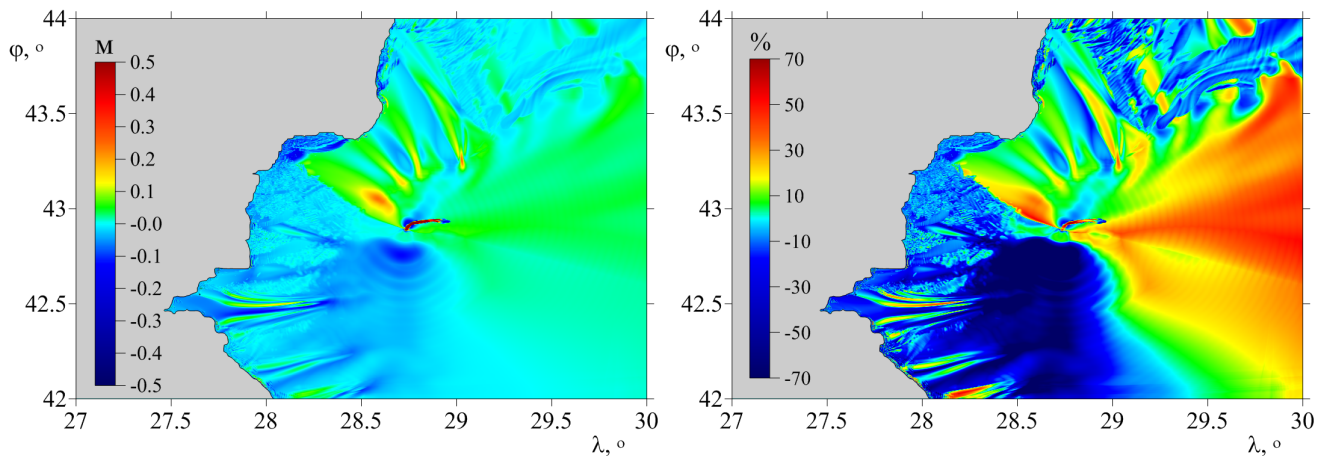


Рисунок 2.26 – Распределение абсолютных (слева) и относительных (справа) различий в максимальных значениях волн, полученных за всё время расчёта по NLSW- и FNLD-моделям. Расчёты для оползня с параметрами (2.70)

который тоже генерировал волны, близкие к наблюдениям. Изменение протяжённости оползня может значительно повлиять на траекторию и характер его движения, но в этом случае траектория была весьма схожа с той, что была у оползня (2.70). Исследование [37] демонстрирует, что сходь оползней толщиной около 200 м в Чёрном море уже случались, поэтому толщина в предложенных вариантах (2.70) и (2.71) хоть и значительно больше, чем у рассматриваемых оползней из работы [152], но не кажется невозможной.

Для оценки влияния дисперсии в задаче с оползнем (2.70) рассмотрим картины максимальных волн, зафиксированных за всё время расчётов по FNLD- и NLSW-моделям, на Рисунке 2.25. Влияние частотной дисперсии будем оценивать по абсолютной и относительной разницам этих “свечений” (Рисунок 2.26). Абсолютная разница считалась по формуле  $\max(\text{NLSW}) - \max(\text{FNLD})$ , а относительная —  $(\max(\text{NLSW}) - \max(\text{FNLD})) / \max(\text{NLSW})$ . Таким образом, на Рисунке 2.26 показывается, насколько учёт дисперсии изменил максимальные положительные амплитуды волн. Видно, что абсолютная разность “свечений” невелика, в частности, на исследуемом побережье.

Относительные различия же различия достигают достаточно больших значений, особенно в глубоководной части акватории. Было проверено, что в случае оползня (2.71) с меньшей толщиной и большей длиной дисперсия проявляется заметно меньше. Напротив, если имеет место резкая остановка оползня, различия в расчётах по NLSW- и FNLD-моделям возрастают. В настоящей работе эти результаты представлены не будут, здесь продемонстрирована возможность использования разработанной модели для решения реальных задач об оползневых цунами с перебором большого числа вариантов начальных данных. Также здесь не будут приведены записи виртуальных мареографов в указанных пунктах, отметим только, что период основных волн в случае оползня (2.70) составил 250–400 с (что хорошо согласуется с наблюдениями), при этом волны с максимальной амплитудой приходили не всегда вначале, и в некоторых пунктах первая волна была повышения, а в некоторых — понижения.

## 2.5. Заключение по Главе 2

Настоящая Глава посвящена разработке новых численных алгоритмов для двумерных в плане систем НЛД-уравнений на подвижном дне.

В параграфе 2.1 предложено выделение в системах полных двумерных НЛД-уравнениях на подвижном дне двух “простых” подзадач: скалярного уравнения второго порядка для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления и гиперболической системы классических уравнений мелкой воды с модифицированной правой частью. Доказана равномерная эллиптичность уравнения для дисперсионной составляющей. Аналогичное расщепление выполнено для новых слабо нелинейных уравнений [14, 98], имеющих уравнение баланса энергии.

Выделение в исходной NLD-системе равномерно эллиптического уравнения и гиперболической системы позволяет на каждом временном шаге алгоритма решать поочередно эти подзадачи, используя при этом большой опыт в разработке численных методов для эллиптических уравнений и SW-модели. В параграфе 2.2 описан численный алгоритм решения эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей, основанный на интегро-интерполяционном методе и методе последовательной верхней релаксации для решения полученной системы разностных уравнений. Показаны особенности аппроксимаций в случае областей со сложной формой границ. Для граничных условий непротекания их прямая аппроксимация не требовалась, а только учёт их в интегро-интерполяционном методе. На границах со свободным проходом волн предложена аппроксимация условий типа Зоммерфельда. В параграфе 2.3 для решения гиперболической системы мелкой воды с модифицированной правой частью предложена явная двушаговая схема [71] типа предиктор-корректор с TVD-ограничителями.

Параграф 2.4 посвящён численному решению ряда двумерных задач в идеализированных и реальных акваториях.

В задаче о распространении волн над ровным исследовалось влияние дисперсионных эффектов в зависимости от длины волны и пройденного волной расстояния. Показана значимость учёта дисперсии при меньших эффективных длинах волн и бóльших пройденных расстояниях.

Описаны уравнения закона движения квазидеформируемого подводного оползня под действием сил тяжести, плавучести трения о дно и сопротивления воды. На задаче о сходе твёрдой модели оползня проведены сравнения полученных численных решений по NLD- и SW-моделям с экспериментальными данными из работы [95]. Продемонстрировано, что при движении оползня по мелководной части акватории NLD-модель значительно лучше описывала процесс, однако, и она теряла адекватность при движении оползня по глубоководной части. Как было отмечено в Главе 1, это ограничение возникает из-за увеличения отношения глубины водоёма к длине образованных волн.

В модельном водоёме в виде участка реки с дном параболической формы исследовано влияние ширины подводного оползня на образованные им волны. Большая часть волн увеличивала свою амплитуду пропорционально ширине оползня, что объясняется увеличением его объёма. Тем самым продемонстрирована важность учёта неоднородности оползня по двум горизонтальным направлениям. Тем не менее в ближайшей к начальному положению оползня части берега первые волны могут быть адекватно рассчитаны даже при помощи одномерной модели. Показано, что на дальнем берегу максимальный заплеск за всё время расчёта располагался по центру (напротив начального положения оползня), а на ближнем — на некотором расстоянии от него.

Для проверки работоспособности алгоритма в областях сложной формы были проведены сравнения полученных численных решений с экспериментальными данными о взаимодействии уединённой волны с коническим островом. В расчётах накат на конус не осуществлялся, а на некоторой глубине устанавливался круговой вертикальный цилиндр, на границе которого использовались условия непротекания. Из-за этого упрощения не во всех рассмотренных мареографах было получено хорошее количественное согласие расчётов эксперименту, но качественно картины получились похожими. В частности, при меньшей начальной амплитуде волны максимальный заплеск был на ближней стороне острова к начальному положению волны, а при большей — на дальней.

Рассмотрено влияние частотной дисперсии в задаче о распространении волн в модельной акватории “корыто”, где дно было равномерным в направлении  $Ox$ , а в направлении  $Oy$  описывалось кусочно-линейной функцией, аппроксимирующей распределение глубин около Курило-Камчатского желоба. В качестве источников выбирались идеализированные “гауссовы шапки” с эффективной протяжённостью от 50 до 100 км и “реальные” очаги с магнитудами  $Mw = 7.2$  и  $Mw = 9.0$ . На идеализированных источниках продемонстрировано, что в ближнем мареографе на берегу дисперсия сказывается слабо, а в дальних оказывает значительное влияние в случаях с меньшей протяжённостью “шапки”. В расчёте с реальным очагом с магнитудой  $Mw = 7.2$  дисперсия сказалась в дальних от источника областях, при этом картина её влияния на “свечение” (максимальные высоты волн за всё время распространения) весьма сложна, и можно наблюдать как увеличение, так и уменьшение амплитуд. Замечено, что в областях, где дисперсия оказала значительное влияние, амплитуды волн были малы, и при рассмотрении абсолютных значений разности “свечений” в расчётах по NLD- и SW-моделям можно сделать вывод, что её учёт не является решающим фактором для определения степени опасности объектам на берегу. В расчёте с  $Mw = 9.0$  относительная разница “свечений” меньше, чем с  $Mw = 7.2$ , однако, абсолютная

разница больше, так как образованные волны имели существенно большую амплитуду. Установлено, что уменьшение заглублиения очага и, как следствие, образование высокочастотного “пика” в начальном возмущении свободной поверхности, увеличивает влияние дисперсии на картину течения, и учёт этого влияния может быть необходимым для адекватного описания процесса.

Приведены некоторые результаты численного моделирования гипотетических подводных оползней в Чёрном море, параметры и положения которых были близки к историческому [37]. Показано, что оползень, располагавшийся несколько выше по склону, имел большее начальное ускорение и сложную траекторию движения, заканчивающуюся резкой остановкой. В результате чего он порождал более высокие и короткие волны [118], которые были сильнее подвержены влиянию частотной дисперсии. Замечено, что при накате волн на берега вблизи начального положения оползня дисперсия сказывалась незначительно, а изменяла картину течения при распространении волн по глубоководной части акватории.

Исследована гипотеза об оползневом механизме образования аномальных волн на побережье Болгарии 7-го мая 2007-го года. При рассмотрении большого числа возможных начальных положений оползня и подборе его размеров был предложен вариант, который генерировал волны очень близкие к известным данным наблюдений. Было обозначено место у подножья континентального склона Чёрного моря, в котором останавливались или проходили все рассмотренные оползни, генерировавшие близкие к наблюдениям волны. Значимость учёта дисперсии в задаче достаточно высока и сильно зависит от размеров оползня, его положения и, соответственно, от характера его движения.

## Глава 3

# РАСЧЕТ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЕ В РАМКАХ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

При описании процесса длительного распространения длинных волн в океане может быть важно учитывать такие эффекты как сферичность и вращение Земли, а также частотную дисперсию. До недавнего времени многие расчёты велись в рамках SW-моделей в сферических координатах (например, комплексы TUNAMI [124], MOST [166], MGC [158]), не учитывающих дисперсию. В работах [91, 138] разработаны численные алгоритмы (комплексы TUNAMI-N2-NUS и GloBouss соответственно) решения СНЛД-моделей на сфере без учёта подвижности дна. Первая полная НЛД-модель на сфере была выведена в статье [97], но до настоящего исследования её численной реализации не было. В работе [131] выведена полная НЛД-модель с улучшенным дисперсионным соотношением, однако, численная реализация выполнена только для её слабо нелинейного аналога.

Настоящая Глава посвящена разработке численного алгоритма для решения полных НЛД-уравнений мелкой воды второго приближения на вращающейся сфере с учётом подвижности дна. В параграфе 3.1 описывается постановка задачи, выписываются уравнения модели. Предлагается выделение в исходной системе уравнений равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления и гиперболической системы мелкой воды с модифицированной правой частью. Кратко описывается построение численного алгоритма для расширенной системы.

В параграфе 3.2 приводятся результаты численного моделирования. Путём сравнения полученных решений по NLD- и SW-моделям исследуется важность частотной дисперсии в задачах с постоянной глубиной и в акваториях с реальным рельефом.

### 3.1. Численный алгоритм для нелинейно-дисперсионной модели на вращающейся сфере

Настоящий параграф посвящён описанию численного алгоритма для решения полных НЛД-уравнений на вращающейся сфере с учётом подвижности дна. Кратко описывается постановка задачи, особенности задания начальных и граничных условий. Предложен способ выделения [27] в исходной модели скалярного равномерно эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления и системы уравнений мелкой воды на вращающейся сфере с модифицированной правой частью. Исследована связь полученной расширенной системы с аналогичной системой в плановом случае.

Кратко описан численный алгоритм для расширенной системы, основанный на итерационном методе последовательной верхней релаксации для эллиптической подзадачи и явной конечно-разностной схеме типа предиктор-корректор для гиперболической.

#### 3.1.1. Уравнения моделей мелкой воды на вращающейся сфере

Уравнения полной NLD-модели на вращающейся притягивающей сфере имеют следующий вид [97]:

$$(HR \sin \theta)_t + (Hu)_\lambda + (Hv \sin \theta)_\theta = 0, \quad (3.1)$$

$$(HuR \sin \theta)_t + \left(Hu^2 + g\frac{H^2}{2}\right)_\lambda + (Huv \sin \theta)_\theta = gHh_\lambda - Huv \cos \theta - \\ - fvHR \sin \theta + \varphi_\lambda - \psi h_\lambda, \quad (3.2)$$

$$(HvR \sin \theta)_t + (Huv)_\lambda + \left[\left(Hv^2 + g\frac{H^2}{2}\right) \sin \theta\right]_\theta = gHh_\theta \sin \theta + g\frac{H^2}{2} \cos \theta + \\ + Hu^2 \cos \theta + fuHR \sin \theta + (\varphi_\theta - \psi h_\theta) \sin \theta + \underbrace{\Omega^2 HR^2 \sin^2 \theta \cos \theta}_{=0 \text{ при замене (3.16)}}. \quad (3.3)$$

Здесь  $R$  — радиус сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $Oz$  неподвижной декартовой системы координат  $Oxyz$ , координатная плоскость  $Oxy$  которой совпадает с экваториальной плоскостью сферы. Для описания течения воды используется вращающаяся вместе со сферой система координат  $O\lambda\theta r$ , начало которой находится в центре сферы, при этом в настоящей главе используются следующие обозначения:  $\lambda$  — долгота, отсчитываемая в направлении вращения от некоторого меридиана ( $0 \leq \lambda < 2\pi$ ),  $\theta$  — дополнение до широты ( $0 < \theta < \pi$ ),  $r$  — радиальная координата, отсчитываемая от центра сферы. Ньютоновская сила притяжения  $g$ , действующая на частицу жидкости единичной массы, считается направленной к центру Земли. Толщина слоя воды  $H = \eta + h > 0$  предполагается малой по сравнению с радиусом сферы, поэтому величина  $g = |g|$  и плотность воды  $\rho$  принимаются постоянными во всем жидком слое, ограниченном снизу непроницаемым подвижным дном, а сверху — свободной поверхностью:

$$r = R - h(\lambda, \theta, t), \quad r = R + \eta(\lambda, \theta, t). \quad (3.4)$$

Через  $u$  и  $v$  обозначены физические компоненты вектора скорости ( $u = Rc^1 \sin \theta$ ,  $v = Rc^2$ ,  $c^1 = \dot{\lambda}$ ,  $c^2 = \dot{\theta}$ ),  $f = 2\Omega \cos \theta$  — параметр Кориолиса, выраженный через дополнение к широте  $\theta$ , при этом предполагается, что

$$\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0, \quad (3.5)$$

где  $\theta_0 = \text{const} > 0$  — малый угол (полюсы исключаются из рассмотрения).

Величины  $\varphi$  и  $\psi$ , входящие в правые части уравнений движения (3.2), (3.3), представляют собой дисперсионные составляющие проинтегрированного по толщине слоя давления  $p$  в NLD-модели и соответственно давления  $p_0$  на дне:

$$p = \frac{gH^2}{2} - \varphi, \quad p_0 = gH - \psi. \quad (3.6)$$

Вычисляются дисперсионные добавки по следующим формулам [100]:

$$\varphi = \frac{H^3}{3}Q_1 + \frac{H^2}{2}Q_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2}Q_1 + HQ_2, \quad (3.7)$$

где  $Q_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{c}) - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2$ ,  $Q_2 = D^2h$ ,  $\mathbf{c} = (c^1, c^2)$ ,

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla, \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad \mathbf{c} \cdot \nabla = c^1 \frac{\partial}{\partial \lambda} + c^2 \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = c_\lambda^1 + \frac{1}{J} (Jc^2)_\theta, \quad J = -R^2 \sin \theta. \quad (3.8)$$

В более подробной записи выражения  $Q_1$  и  $Q_2$  принимают следующий вид:

$$Q_1 = (\nabla \cdot \mathbf{c})_t + \frac{1}{R \sin \theta} \left( u (\nabla \cdot \mathbf{c})_\lambda + v (\nabla \cdot \mathbf{c})_\theta \sin \theta \right) - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2,$$

$$Q_2 = (Dh)_t + \frac{1}{R \sin \theta} \left( u (Dh)_\lambda + v (Dh)_\theta \sin \theta \right),$$

где

$$\nabla \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{R \sin \theta} \left( u_\lambda + (v \sin \theta)_\theta \right), \quad Dh = h_t + \frac{1}{R \sin \theta} \left( uh_\lambda + vh_\theta \sin \theta \right).$$

NLD-модель (3.1)—(3.3) называется полной [100] по той причине, что она выведена без предположения о малости амплитуды волн и в уравнениях сохранены все нелинейные члены, связанные с дисперсией. Ее можно использовать для расчета поверхностных волн, распространяющихся над неровным дном как по глубокой воде, так и в прибрежной зоне, при этом учет дисперсии волн позволяет получать более точные результаты, чем бездисперсионная SW-модель. Также NLD-модель позволяет моделировать волны, генерируемые продолжительными по времени подвижками фрагментов дна, что расширяет круг задач, которые могут решаться в рамках известных [91, 106, 138, 140] СНЛД-моделей мелкой воды на сфере. Кроме того, эта модель обладает рядом дополнительных преимуществ, о которых говорилось во Введении.

Уравнения (3.1)—(3.3) имеют дивергентную форму записи своих левых частей. В рассматриваемом ниже численном алгоритме решения задач в рамках NLD-модели будет использоваться также недивергентная форма этих уравнений

$$H_t + \frac{1}{R \sin \theta} \left( (Hu)_\lambda + (Hv \sin \theta)_\theta \right) = 0, \quad (3.9)$$

$$u_t + \frac{1}{R \sin \theta} uu_\lambda + \frac{1}{R} vu_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} g\eta_\lambda = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\varphi_\lambda - \psi h_\lambda}{H} - \frac{uv}{R} \operatorname{ctg} \theta - fv, \quad (3.10)$$

$$v_t + \frac{1}{R \sin \theta} uv_\lambda + \frac{1}{R} vv_\theta + \frac{1}{R} g\eta_\theta = \frac{1}{R} \frac{\varphi_\theta - \psi h_\theta}{H} + \frac{u^2}{R} \operatorname{ctg} \theta + fu + \underbrace{\frac{\Omega^2 R \sin \theta \cos \theta}{R}}_{=0 \text{ при замене (3.16)}}, \quad (3.11)$$

в которой в явном виде выделены слагаемые правой части уравнений движения, связанные с силой Кориолиса и центробежной силой.

При пренебрежении дисперсионными членами, т. е. при  $\varphi = \psi = 0$ , из NLD-модели получается бездисперсионная SW-модель мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере [66], уравнения которой могут быть записаны в дивергентной форме вида (3.1)—(3.3) или недивергентной, аналогичной (3.9)—(3.11):

$$H_t + \frac{1}{R \sin \theta} \left( (Hu)_\lambda + (Hv \sin \theta)_\theta \right) = 0, \quad (3.12)$$

$$u_t + \frac{1}{R \sin \theta} uu_\lambda + \frac{1}{R} vu_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} g\eta_\lambda = -\frac{uv}{R} \operatorname{ctg} \theta - fv, \quad (3.13)$$

$$v_t + \frac{1}{R \sin \theta} uv_\lambda + \frac{1}{R} vv_\theta + \frac{1}{R} g\eta_\theta = \frac{u^2}{R} \operatorname{ctg} \theta + fu + \underbrace{\frac{\Omega^2 R \sin \theta \cos \theta}{R}}_{=0 \text{ при замене (3.16)}}. \quad (3.14)$$

### 3.1.2. Начальные и граничные условия

В начальный момент времени задавалось отклонение свободной границы от ее невозмущенного положения и значения компонент вектора скорости. Заметим, что для рассматриваемых в сферической геометрии моделей мелкой воды (3.9)—(3.11) и (3.12)—(3.14) невозмущенная свободная граница в состоянии покоя отличается от сферической [101] и описывается уравнением  $r = R + \eta_{00}(\theta)$ , где

$$\eta_{00}(\theta) = \frac{1}{2g} \Omega^2 R^2 \sin^2 \theta + \text{const}. \quad (3.15)$$

В практических задачах высота волны и глубина отсчитываются от поверхности покоящейся воды. Поэтому будет более естественным задавать функции, описывающие дно и свободную границу, не в виде отклонений (3.4) от поверхности сферы радиуса  $R$ , а отклонений  $\tilde{h}$  и  $\tilde{\eta}$  от невозмущенной свободной границы, как это обычно и делается при решении уравнений мелкой воды в плоской геометрии. Для этого достаточно сделать следующие замены:

$$-h = \eta_{00} - \tilde{h}, \quad \eta = \eta_{00} + \tilde{\eta}. \quad (3.16)$$



Посмотрим, к каким изменениям в уравнениях приведут замены (3.16). Очевидно, что полная глубина не зависит от выбора поверхности отсчета:  $H = \eta + h = \tilde{\eta} + \tilde{h}$ . Кроме того,  $\eta_\lambda = \tilde{\eta}_\lambda$  и  $g\eta_\theta = g\tilde{\eta}_\theta + \Omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta$ , поэтому, задавая глубину и свободную границу в виде отклонений от невозмущенной свободной границы, мы получаем ту же SW-систему (3.12)—(3.14), но только с отброшенным слагаемым  $\Omega^2 R \sin \theta \cos \theta$  в уравнении (3.14) и с заменой  $h$  и  $\eta$  на  $\tilde{h}$  и  $\tilde{\eta}$  соответственно.

При подстановке выражений (3.16) в системы NLD-уравнений (3.1)—(3.3) или (3.9)—(3.11) последние слагаемые в правых частях уравнений (3.3) и (3.11), связанные с центробежной силой, также сокращаются. Но, в силу равенства  $D^2 h = D^2 \tilde{h} - D^2 \eta_{00}$ , изменятся выражения для дисперсионных составляющих давления (3.7) в NLD- модели, поскольку  $Q_2$  теперь не будет совпадать с  $D^2 \tilde{h}$ .

Кроме начальных условий уравнения дополняются также краевыми условиями, которые могут иметь различный вид на разных частях границы области решения. Криволинейная береговая линия аппроксимируется ломаной  $\Gamma$ , звенья которой проходят по меридианам и параллелям. На линии  $\Gamma$  ставится условие непротекания

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \quad (3.17)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к соответствующему звену ломаной  $\Gamma$ ,  $\mathbf{u} = (u, v)^T$ . Таким образом, задача наката на береговой откос заменяется задачей наката на вертикальную стенку, установленную вдоль береговой линии на некоторой заданной глубине  $h_w$ , причем дно акватории в окрестности береговой линии предварительно выравнивается так, что если реальная глубина меньше некоторого заданного значения  $h_w$ , то она полагается равной  $h_w$ .

Для неотражающих границ вычислительной области используются краевые условия типа Зоммерфельда

$$\begin{aligned} \eta_t + \sqrt{g\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial n} &= 0, \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} + \sqrt{g\tilde{h}} \frac{\partial u_n}{\partial n} &= 0, \\ \varphi_t + \sqrt{g\tilde{h}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

и дополнительное условие

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial n} = 0, \quad (3.19)$$

где  $u_\tau$  и  $u_n$  — касательная и нормальная компоненты вектора  $\mathbf{u}$  к границе  $\Gamma$ .

### 3.1.3. Выделение двух подзадач в уравнениях на вращающейся сфере

Система уравнений NLD-модели (3.1)—(3.3) не является системой типа Коши — Ковалевской в силу того, что уравнения движения (3.2), (3.3) содержат смешанные производные третьего порядка по времени и пространственным переменным от компонент вектора скорости. Непосредствен-

ная аппроксимация этих производных приводит к сложной разностной задаче, не поддающейся исследованию. В плоском случае для аналогичной системы NLD-уравнений [99] плодотворным для конструирования численного алгоритма оказалось [8, 14, 68, 127] предварительное выделение в этой системе на скалярного уравнения эллиптического типа и системы уравнений гиперболического типа.

В настоящей работе такой же подход реализован для системы NLD-уравнений (3.1)—(3.3) на вращающейся сфере. В результате выделения получается расширенная система уравнений, состоящая из эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей  $\varphi$  проинтегрированного по глубине давления  $p$  и гиперболической системы уравнений (3.1)—(3.3) с производными по времени первого порядка, которая отличается от классической модели мелкой воды только наличием в правой части уравнений движения дополнительных слагаемых, связанных с дисперсионными добавками  $\varphi$  и  $\psi$ . При таком подходе численный алгоритм целесообразно строить на поочередном решении на каждом шаге по времени эллиптического уравнения и гиперболической системы.

Приведем вывод уравнения для дисперсионной составляющей давления. Для этого будем использовать компактную форму записи уравнений NLD-модели на сфере, приведенную в работе [101]:

$$\begin{aligned} H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{c}) &= 0; \\ \mathbf{v}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{\nabla p}{H} &= \mathbf{r} + \frac{p_0}{H}\nabla h. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  — ковариантный вектор скорости,

$$v_1 = (\Omega + c^1) R^2 \sin^2 \theta, \quad v_2 = R^2 c^2, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{r} = (0, r_2)^T, \quad r_2 = (\Omega + c^1)^2 R^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Перепишем уравнение движения (3.20) в виде, позволяющем выразить полную производную вектора скорости

$$D\mathbf{v} = -g\nabla\eta + \frac{\nabla\varphi - \psi\nabla h}{H} + \mathbf{r}, \quad (3.22)$$

где

$$D\mathbf{v} = (Dv_1, Dv_2)^T, \quad Dv_1 = (v_1)_t + \mathbf{c} \cdot \nabla v_1, \quad Dv_2 = (v_2)_t + \mathbf{c} \cdot \nabla v_2,$$

и далее, как и в плоском случае [14], вначале выразим дисперсионную составляющую  $\psi$  давления на дне через  $\varphi$  — дисперсионную составляющую проинтегрированного давления. Из определений (3.7) получаем, что

$$\psi = \frac{3\varphi}{2H} + \frac{H}{4}Q_2, \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} Q_2 &= D^2 h = D(Dh) = (Dh)_t + \mathbf{c} \cdot \nabla(Dh) = (h_t + \mathbf{c} \cdot \nabla h)_t + \mathbf{c} \cdot \nabla(h_t + \mathbf{c} \cdot \nabla h) = \\ &= h_{tt} + \mathbf{c}_t \cdot \nabla h + 2\mathbf{c} \cdot \nabla h_t + \mathbf{c} \cdot \nabla(\mathbf{c} \cdot \nabla h) = B + \mathbf{c}_t \cdot \nabla h + \mathbf{c} \cdot \nabla(\mathbf{c} \cdot \nabla h) \end{aligned}$$

и через  $B$  обозначено слагаемое, наличие которого обусловлено подвижностью дна:

$$B = h_{tt} + 2\mathbf{c} \cdot \nabla h_t.$$

Преобразуем также последнее слагаемое в выражении  $Q_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \nabla (\mathbf{c} \cdot \nabla h) &= c^1 (c^1 h_\lambda + c^2 h_\theta)_\lambda + c^2 (c^1 h_\lambda + c^2 h_\theta)_\theta = \\ &= c^1 c_\lambda^1 h_\lambda + (c^1)^2 h_{\lambda\lambda} + c^1 c_\lambda^2 h_\theta + c^1 c^2 h_{\lambda\theta} + c^2 c_\theta^1 h_\lambda + c^2 c^1 h_{\lambda\theta} + c^2 c_\theta^2 h_\theta + (c^2)^2 h_{\theta\theta} = \\ &= (c^1 c_\lambda^1 + c^2 c_\theta^1) h_\lambda + (c^1 c_\lambda^2 + c^2 c_\theta^2) h_\theta + c^1 (c^1 (h_\lambda)_\lambda + c^2 (h_\lambda)_\theta) + c^2 (c^1 (h_\theta)_\lambda + c^2 (h_\theta)_\theta) = \\ &= ((\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{c}) \cdot \nabla h + \mathbf{c} \cdot ((\mathbf{c} \cdot \nabla) \nabla h). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$Q_2 = B + \mathbf{c}_t \cdot \nabla h + ((\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{c}) \cdot \nabla h + \mathbf{c} \cdot ((\mathbf{c} \cdot \nabla) \nabla h),$$

или

$$Q_2 = B + (D\mathbf{c}) \cdot \nabla h + \mathbf{c} \cdot ((\mathbf{c} \cdot \nabla) \nabla h), \quad (3.24)$$

где

$$D\mathbf{c} = (Dc^1, Dc^2)^T, \quad Dc^1 = c_t^1 + c^1 c_\lambda^1 + c^2 c_\theta^1, \quad Dc^2 = c_t^2 + c^1 c_\lambda^2 + c^2 c_\theta^2, \quad (3.25)$$

$$(D\mathbf{c}) \cdot \nabla h = (c_t^1 + c^1 c_\lambda^1 + c^2 c_\theta^1) h_\lambda + (c_t^2 + c^1 c_\lambda^2 + c^2 c_\theta^2) h_\theta,$$

$$\mathbf{c} \cdot ((\mathbf{c} \cdot \nabla) \nabla h) = (c^1)^2 h_{\lambda\lambda} + 2c^1 c^2 h_{\lambda\theta} + (c^2)^2 h_{\theta\theta}.$$

Используя выражение (3.24), перепишем формулу (3.23)

$$\psi = \frac{3\varphi}{2H} + \frac{H}{4} \left[ (D\mathbf{c}) \cdot \nabla h + B + \mathbf{c} \cdot ((\mathbf{c} \cdot \nabla) \nabla h) \right] \quad (3.26)$$

и выразим  $D\mathbf{c}$  через  $D\mathbf{v}$ . Для этого введем ковариантные компоненты метрического тензора на сфере [57]  $g_{11} = R^2 \sin^2 \theta$ ,  $g_{22} = R^2$  и, согласно формулам (3.21), запишем ковариантный вектор скорости в виде  $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{G} + \mathcal{G} \mathbf{c}$ , где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$D\mathbf{v} = \Omega D\mathbf{G} + D(\mathcal{G} \mathbf{c}) = c^2 \Omega \mathbf{G}_\theta + \mathcal{G} D\mathbf{c} + c^1 c^2 \mathbf{G}_\theta = \mathcal{G} D\mathbf{c} + c^2 (\Omega + c^1) \mathbf{G}_\theta, \quad (3.27)$$

при этом

$$\mathbf{G}_\theta = \begin{pmatrix} 2R^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следствием равенств (3.27) является выражение  $D\mathbf{c} = \mathcal{G}^{-1}D\mathbf{v} - c^2(\Omega + c^1)\mathcal{G}^{-1}\mathbf{G}_\theta$ , которое с учетом формулы (3.22) принимает следующий вид:

$$D\mathbf{c} = \mathcal{G}^{-1}\left(-g\nabla\eta + \frac{\nabla\varphi - \psi\nabla h}{H}\right) + \mathcal{G}^{-1}\mathbf{a}, \quad (3.28)$$

где

$$\mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & 0 \\ 0 & g^{22} \end{pmatrix}, \quad g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta}, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}} = \frac{1}{R^2},$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{r} - c^2(\Omega + c^1)\mathbf{G}_\theta = (\Omega + c^1)R^2 \sin \theta \cos \theta \begin{pmatrix} -2c^2 \\ \Omega + c^1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученное выражение для  $D\mathbf{c}$  в формулу (3.26), получаем

$$\psi = \frac{3\varphi}{2H} + \frac{H}{4} \left( \frac{\nabla\varphi \cdot \nabla h - \psi|\nabla h|^2}{H} + Q \right),$$

где

$$\nabla\varphi \cdot \nabla h = g^{11}\varphi_\lambda h_\lambda + g^{22}\varphi_\theta h_\theta = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\varphi_\lambda h_\lambda}{\sin^2 \theta} + \varphi_\theta h_\theta \right),$$

$$|\nabla h|^2 = \nabla h \cdot \nabla h = g^{11}h_\lambda^2 + g^{22}h_\theta^2 = \frac{1}{R^2} \left( \frac{h_\lambda^2}{\sin^2 \theta} + h_\theta^2 \right),$$

$$Q = -g\nabla\eta \cdot \nabla h + \mathbf{c} \cdot ((\mathbf{c} \cdot \nabla)\nabla h) + B + \mathbf{a} \cdot \nabla h,$$

$$\nabla\eta \cdot \nabla h = g^{11}\eta_\lambda h_\lambda + g^{22}\eta_\theta h_\theta = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\eta_\lambda h_\lambda}{\sin^2 \theta} + \eta_\theta h_\theta \right),$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla h = (\Omega + c^1) \operatorname{ctg} \theta \left[ -2c^2 h_\lambda + (\Omega + c^1)h_\theta \sin^2 \theta \right].$$

Следовательно, для дисперсионной составляющей давления на дне справедливо следующее выражение:

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{H} + HQ + \nabla\varphi \cdot \nabla h \right), \quad (3.29)$$

где

$$r = 4 + |\nabla h|^2.$$

Теперь можно приступить к выводу уравнения для функции  $\varphi$ . Непосредственно из определений (3.7) следует, что

$$\varphi = \frac{H^3}{12}Q_1 + \frac{H}{2}\psi. \quad (3.30)$$

Преобразуем в этом выражении член  $Q_1$ . Из определения операторов полной производной  $D$  и дивергенции (3.8) получаем, что

$$D(\nabla \cdot \mathbf{c}) = (\nabla \cdot \mathbf{c})_t + c^1(\nabla \cdot \mathbf{c})_\lambda + c^2(\nabla \cdot \mathbf{c})_\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla \cdot \mathbf{c}_t + c^1 \left( c_\lambda^1 + \frac{(Jc^2)_\theta}{J} \right)_\lambda + c^2 \left( c_\lambda^1 + \frac{(Jc^2)_\theta}{J} \right)_\theta = \\
&= \nabla \cdot \mathbf{c}_t + (c^1 c_\lambda^1)_\lambda - (c_\lambda^1)^2 + (c^2 c_\theta^1)_\lambda - c_\lambda^2 c_\theta^1 + c^1 \frac{[(Jc^2)_\lambda]_\theta}{J} + c^2 \left( \frac{(Jc^2)_\theta}{J} \right)_\theta = \\
&= \underbrace{(c_t^1)_\lambda}_{(c_t^1)_\lambda} + \frac{(Jc_t^2)_\theta}{J} + \underbrace{(c^1 c_\lambda^1 + c^2 c_\theta^1)_\lambda}_{(c^1 c_\lambda^1 + c^2 c_\theta^1)_\lambda} + \frac{[c^1 (Jc^2)_\lambda]_\theta}{J} - \frac{c_\theta^1 (Jc^2)_\lambda}{J} + \left( c^2 \frac{(Jc^2)_\theta}{J} \right)_\theta - c_\theta^2 \frac{(Jc^2)_\theta}{J} - \\
&\quad - (c_\lambda^1)^2 - c_\lambda^2 c_\theta^1.
\end{aligned}$$

Легко видеть (см. формулу (3.25)), что сумма выделенных фигурными скобками слагаемых равна  $(Dc^1)_\lambda$ , поэтому

$$\begin{aligned}
D(\nabla \cdot \mathbf{c}) &= (Dc^1)_\lambda + \underbrace{\frac{(Jc_t^2)_\theta}{J}}_{\frac{(Jc_t^2)_\theta}{J}} + \underbrace{\frac{(Jc^1 c_\lambda^2)_\theta}{J}}_{\frac{(Jc^1 c_\lambda^2)_\theta}{J}} - c_\theta^1 c_\lambda^2 + \underbrace{\frac{(Jc^2 c_\theta^2)_\theta}{J}}_{\frac{(Jc^2 c_\theta^2)_\theta}{J}} + \frac{(J_\theta (c^2)^2)_\theta}{J} - \\
&\quad - \left[ \frac{c^2 (Jc^2)_\theta}{J^2} J_\theta + \frac{c_\theta^2 (Jc^2)_\theta}{J} + (c_\lambda^1)^2 \right] - c_\lambda^2 c_\theta^1.
\end{aligned}$$

Слагаемые, выделенные в этом равенстве, в сумме дают величину

$$\frac{[J(c_t^2 + c^1 c_\lambda^2 + c^2 c_\theta^2)]_\theta}{J} = \frac{(JDc^2)_\theta}{J},$$

а выражение в квадратных скобках преобразуется с учетом (3.8) к виду

$$(c_\lambda^1)^2 + \left( \frac{(Jc^2)_\theta}{J} \right)^2 = (\nabla \cdot \mathbf{c})^2 - 2c_\lambda^1 \frac{(Jc^2)_\theta}{J},$$

поэтому

$$D(\nabla \cdot \mathbf{c}) = (Dc^1)_\lambda + \frac{(JDc^2)_\theta}{J} - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2 + 2c_\lambda^1 c_\theta^2 + 2c_\lambda^1 c^2 \frac{J_\theta}{J} + 2c^2 c_\theta^2 \frac{J_\theta}{J} + (c^2)^2 \frac{J_{\theta\theta}}{J} - 2c_\theta^1 c_\lambda^2.$$

Наконец, учитывая, что  $J_{\theta\theta} = -J$ , получаем формулу

$$D(\nabla \cdot \mathbf{c}) = \nabla \cdot (D\mathbf{c}) - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2 + 2(c_\lambda^1 c_\theta^2 - c_\theta^1 c_\lambda^2) + 2c^2 (c_\lambda^1 + c_\theta^2) \operatorname{ctg} \theta - (c^2)^2. \quad (3.31)$$

Следовательно, для  $Q_1$  имеем выражение

$$Q_1 = \nabla \cdot (D\mathbf{c}) - 2(\nabla \cdot \mathbf{c})^2 + 2(c_\lambda^1 c_\theta^2 - c_\theta^1 c_\lambda^2) + 2c^2 (c_\lambda^1 + c_\theta^2) \operatorname{ctg} \theta - (c^2)^2. \quad (3.32)$$

Подставляя в (3.30) выражение (3.32) и используя формулы (3.29), (3.28) для  $\psi$  и  $D\mathbf{c}$  соответственно, получаем следующее уравнение относительно зависимой переменной  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{H^3}{12} \left\{ \nabla \cdot \left[ \mathcal{G}^{-1} \left( -g\nabla\eta + \frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{6\nabla h}{H^2 r} \varphi - \nabla h \frac{Q}{r} - \frac{(\nabla\varphi \cdot \nabla h)\nabla h}{Hr} + \mathbf{a} \right) \right] - \right. \\ \left. - 2(\nabla \cdot \mathbf{c})^2 + 2(c_\lambda^1 c_\theta^2 - c_\theta^1 c_\lambda^2) + 2c^2 (c_\lambda^1 + c_\theta^2) \operatorname{ctg} \theta - (c^2)^2 \right\} + \\ + \frac{H}{2r} \left( \frac{6\varphi}{H} + HQ + \nabla\varphi \cdot \nabla h \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Заметим, что умножение ковариантных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\nabla\eta$ ,  $\nabla\varphi$ ,  $\nabla h$  слева на матрицу  $\mathcal{G}^{-1}$  переводит эти вектора в контравариантные, через которые и определяется дивергенция вектора. Например,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla\eta &= \frac{(Jg^{11}\eta_\lambda)_\lambda + (Jg^{22}\eta_\theta)_\theta}{J} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left( \frac{\eta_{\lambda\lambda}}{\sin \theta} + (\eta_\theta \sin \theta)_\theta \right) \equiv \Delta\eta, \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{(Jg^{11}a_1)_\lambda + (Jg^{22}a_2)_\theta}{J} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left( \frac{(a_1)_\lambda}{\sin \theta} + (a_2 \sin \theta)_\theta \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Учитывая это замечание, а также равенство

$$\nabla \cdot \left( \frac{6\nabla h}{H^2 r} \varphi \right) = \frac{6}{H^2 r} \nabla\varphi \cdot \nabla h + 6\varphi \nabla \cdot \left( \frac{\nabla h}{H^2 r} \right),$$

перепишем уравнение (3.33) в компактной форме

$$L\varphi = F, \quad (3.35)$$

где

$$\begin{aligned} L\varphi &= \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{(\nabla\varphi \cdot \nabla h)\nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left( \frac{\nabla h}{H^2 r} \right) \right), \\ F &= g\Delta\eta + \nabla \cdot \left( \frac{Q\nabla h}{r} - \mathbf{a} \right) - \frac{6Q}{Hr} + 2(\nabla \cdot \mathbf{c})^2 - 2(c_\lambda^1 c_\theta^2 - c_\theta^1 c_\lambda^2) - 2c^2 (c_\lambda^1 + c_\theta^2) \operatorname{ctg} \theta + (c^2)^2. \end{aligned}$$

Используя формулу вида (3.34) для дивергенции ковариантного вектора, выпишем выражение для оператора  $L$  через частные производные:

$$\begin{aligned} L\varphi &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\varphi_\lambda}{H} - \frac{\nabla\varphi \cdot \nabla h}{Hr} h_\lambda \right]_\lambda + \left[ \left( \frac{\varphi_\theta}{H} - \frac{\nabla\varphi \cdot \nabla h}{Hr} h_\theta \right) \sin \theta \right]_\theta \right\} - \\ &- 6\varphi \left\{ \frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{h_\lambda}{H^2 r} \right)_\lambda + \left( \frac{h_\theta}{H^2 r} \sin \theta \right)_\theta \right] \right\}. \end{aligned}$$

После домножения обеих частей уравнения (3.35) на  $R^2 \sin \theta$  и перехода к физическим компонентам скорости  $u, v$  получаем следующее уравнение для  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\varphi_\lambda}{H} - \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla h}{Hr} h_\lambda \right) \right]_\lambda + \left[ \left( \frac{\varphi_\theta}{H} - \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla h}{Hr} h_\theta \right) \sin \theta \right]_\theta - \\ & - 6\varphi \left[ \frac{2}{H^3} \frac{(r-3)R^2 \sin \theta}{r} + \left( \frac{h_\lambda}{H^2 r \sin \theta} \right)_\lambda + \left( \frac{h_\theta}{H^2 r} \sin \theta \right)_\theta \right] = F, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где  $F = F_1 + F_2 + F_3$ ,

$$F_1 = \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( g\eta_\lambda + \frac{Q}{r} h_\lambda - a_1 \right) \right]_\lambda + \left[ \sin \theta \left( g\eta_\theta + \frac{Q}{r} h_\theta - a_2 \right) \right]_\theta, \quad F_2 = -\frac{6Q}{Hr} R^2 \sin \theta,$$

$$F_3 = \frac{2}{\sin \theta} \left( u_\lambda + (v \sin \theta)_\theta \right)^2 - 2(u_\lambda v_\theta - v_\lambda u_\theta) - 2(uv)_\lambda \operatorname{ctg} \theta - (v^2 \cos \theta)_\theta,$$

$$Q = -g\nabla \eta \cdot \nabla h + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left( \frac{u^2}{\sin \theta} h_{\lambda\lambda} + 2uv h_{\lambda\theta} + v^2 h_{\theta\theta} \sin \theta \right) + B + \mathbf{a} \cdot \nabla h,$$

$$B = h_{tt} + 2 \left( \frac{u}{R \sin \theta} h_{\lambda t} + \frac{v}{R} h_{\theta t} \right),$$

$$a_1 = -2uv \cos \theta - fvR \sin \theta, \quad a_2 = u^2 \operatorname{ctg} \theta + fuR + \Omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla h = \frac{a_1 h_\lambda}{R^2 \sin^2 \theta} + (u^2 \operatorname{ctg} \theta + fuR) \frac{h_\theta}{R^2} + h_\theta \Omega^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$f = 2\Omega \cos \theta$  — параметр Кориолиса и отдельно выделены слагаемые с множителем  $\Omega^2$ , наличие которых обусловлено действием центробежной силы.

### 3.1.4. Некоторые особенности уравнения (3.36) для $\varphi$

Приведем здесь более компактный вид уравнения (3.36) для дисперсионной составляющей  $\varphi$ :

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\varphi_\lambda}{H} - \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla h}{Hr} h_\lambda \right) \right]_\lambda + \left[ \left( \frac{\varphi_\theta}{H} - \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla h}{Hr} h_\theta \right) \sin \theta \right]_\theta - k_0 \varphi = F, \quad (3.37)$$

где  $k_0 = k_{00} + (k_{01})_\lambda + (k_{02})_\theta$ ,

$$k_{00} = \frac{12(r-3)}{H^3 r} R^2 \sin \theta, \quad k_{01} = \frac{6h_\lambda}{H^2 r \sin \theta}, \quad k_{02} = \frac{6h_\theta}{H^2 r} \sin \theta. \quad (3.38)$$

Далее для краткости записи используются обозначения (3.16), поэтому в развернутой записи уравнения (3.37) надо всюду вместо  $h$  подставлять выражение

$$h = \tilde{h} - \eta_{00}. \quad (3.39)$$

С учетом этого замечания формула для скалярного произведения  $\nabla\varphi \cdot \nabla h$  запишется как

$$\nabla\varphi \cdot \nabla h = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\varphi_\lambda \tilde{h}_\lambda}{\sin^2 \theta} + \varphi_\theta (\tilde{h}_\theta - \eta_{00,\theta}) \right) = \nabla\varphi \cdot \nabla \tilde{h} - \varphi_\theta \frac{\Omega^2}{g} \sin \theta \cos \theta. \quad (3.40)$$

Отличительной особенностью уравнения (3.37) является то, что ни левая, ни правая его части не содержат производных по времени от зависимых переменных  $H$ ,  $\mathbf{u}$  и оно отличается от аналогичного уравнения в плоском случае [14] лишь наличием членов, обусловленных сферичностью и вращением Земли, в том числе и членов, входящих в слагаемые правой части  $F = F_1 + F_2 + F_3$ :

$$F_1 = \left[ \frac{1}{\sin \theta} \left( g\tilde{\eta}_\lambda + \frac{Q}{r} h_\lambda - a_1 \right) \right]_\lambda + \left[ \left( g\tilde{\eta}_\theta + \frac{Q}{r} h_\theta - a_2 \right) \sin \theta \right]_\theta, \quad (3.41)$$

$$F_2 = -\frac{6Q}{Hr} R^2 \sin \theta, \quad r = 4 + \nabla h \cdot \nabla h,$$

$$F_3 = \frac{2}{\sin \theta} \left( u_\lambda + (v \sin \theta)_\theta \right)^2 - 2(u_\lambda v_\theta - v_\lambda u_\theta) - 2(uv)_\lambda \operatorname{ctg} \theta - (v^2 \cos \theta)_\theta,$$

где

$$Q = (-g\nabla\tilde{\eta} + \mathbf{a}) \cdot \nabla h + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left( \frac{u^2}{\sin \theta} h_{\lambda\lambda} + 2uv h_{\lambda\theta} + v^2 h_{\theta\theta} \sin \theta \right) + B,$$

$$B = h_{tt} + 2 \left( \frac{u}{R \sin \theta} h_{\lambda t} + \frac{v}{R} h_{\theta t} \right),$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T, \quad a_1 = -(2uv \operatorname{ctg} \theta + fvR) \sin \theta, \quad a_2 = u^2 \operatorname{ctg} \theta + fuR. \quad (3.42)$$

В слагаемом  $B$  сгруппированы члены, связанные с подвижностью дна. Для стационарного дна имеем  $B \equiv 0$ .

Легко показать, что при  $H > 0$  и условии (3.5) уравнение (3.37) является равномерно эллиптическим. Для корректности задач, связанных с решением этого уравнения, важным является знак коэффициента  $k_0$  при функции  $\varphi$ . Так например, одним из критериев [40] того, что задача Дирихле для уравнения вида (3.37) с заданной правой частью  $F(x, t)$  не может иметь более одного решения, является неравенство  $k_0 > 0$ . В случае ровного дна  $\tilde{h} \equiv \tilde{h}_0 = \operatorname{const}$  это неравенство принимает следующий вид:

$$k_0 = \frac{12R^2 \sin \theta}{H^3 r} \left[ r - 3 - \frac{\Omega^2}{2g} \left( H \sin^2 \theta - \tilde{\eta}_\theta \sin 2\theta + \frac{8H}{r} \cos 2\theta \right) \right] > 0, \quad (3.43)$$

где

$$r = 4 + \frac{\Omega^4 R^2}{4g^2} \sin^2 2\theta.$$

Используя значения  $R = 6.38 \cdot 10^6$  м,  $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$  с<sup>-1</sup>,  $g = 9.81$  м · с<sup>-2</sup>, а также предполагая, что градиент функции  $\tilde{\eta}$  ограничен и выполнено условие (3.5), приходим к оценке  $k_0 \gg 0$ , т. е. рассматриваемый критерий заведомо выполняется. В этом случае для нахождения численного решения уравнения (3.37) можно построить разностную схему с положительно определенным оператором. Для сильно неровного дна коэффициент  $k_0$  может стать отрицательным в некоторых



подобластях, что обычно приводит к ухудшению свойств разностных схем и уменьшению скорости сходимости итерационных методов решения уравнения (3.37). Для одномерных задач анализ таких случаев выполнен в работе [20]. Как правило, избежать подобных нежелательных ситуаций удастся путем сглаживания функции  $\tilde{h}$ , описывающей дно реальной акватории.

Для проведения здесь аналогии с плоским случаем положим  $\Omega = 0$  и в некоторой окрестности фиксированной точки  $(\lambda_*, \theta_*)$  введем невырожденное преобразование координат

$$\tilde{x} = R(\lambda - \lambda_*) \sin \theta_*, \quad \tilde{y} = -R(\theta - \theta_*),$$

а также соответствующие компоненты вектора скорости

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}} = R\dot{\lambda} \sin \theta_* = u\sigma, \quad \sigma = \frac{\sin \theta_*}{\sin \theta}, \quad \tilde{v} = \dot{\tilde{y}} = -R\dot{\theta} = -v.$$

Предполагая, что рассматриваемая окрестность мала в направлении широты, т. е. мала величина  $\delta = \theta - \theta_*$ , переходя в уравнении (3.36) к новым переменным  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  и пренебрегая в преобразованном уравнении членами, имеющими порядок  $O(\delta)$  или  $O(1/R)$ , получаем уравнение на плоскости для дисперсионной составляющей  $\varphi$  (см. Главу 2). Это является косвенным подтверждением правильности вывода уравнения (3.36).

### 3.1.5. Численный алгоритм для расширенной системы на вращающейся сфере

Разностное уравнение, аппроксимирующее (3.37) со вторым порядком, построим с помощью интегро-интерполяционного метода [62]. Для каждого внутреннего узла прямоугольной равномерной сетки с шагами  $h_1$  и  $h_2$  в направлении осей  $O\lambda$  и  $O\theta$  соответственно, берется прямоугольник  $ABCD$  с вершинами в центрах соседних ячеек (рис. 3.1, а) и уравнение (3.37) интегрируется по этому прямоугольнику. После применения формулы Грина получается соотношение с контурными и двойными интегралами:

$$\int_{BC} \Phi^1 d\theta - \int_{AD} \Phi^1 d\theta + \int_{DC} \Phi^2 d\lambda - \int_{AB} \Phi^2 d\lambda - \iint_{ABCD} k_0 \varphi d\lambda d\theta = \iint_{ABCD} F d\lambda d\theta, \quad (3.44)$$

при этом двойной интеграл от функции (3.41) также заменяется контурным:

$$\iint_D F_1 d\lambda d\theta = \int_{BC} f_{11} d\theta - \int_{AD} f_{11} d\theta + \int_{DC} f_{12} d\lambda - \int_{AB} f_{12} d\lambda, \quad (3.45)$$

где

$$\Phi^1 = \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\varphi_\lambda}{H} - \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla h}{Hr} h_\lambda \right), \quad \Phi^2 = \left( \frac{\varphi_\theta}{H} - \frac{\nabla \varphi \cdot \nabla h}{Hr} h_\theta \right) \sin \theta, \quad (3.46)$$

$$f_{11} = \frac{1}{\sin \theta} \left( g\tilde{\eta}_\lambda + \frac{Q}{r} h_\lambda - a_1 \right), \quad f_{12} = \left( g\tilde{\eta}_\theta + \frac{Q}{r} h_\theta - a_2 \right) \sin \theta. \quad (3.47)$$

Для приближенного вычисления интегралов использовалась квадратурная формула трапеций с аппроксимацией функций и их первых производных со вторым порядком в центрах ячеек [8]. В результате, для сеточной функции  $\varphi$  получается 9-точечное неоднородное разностное уравнение в каждом внутреннем узле сетки.

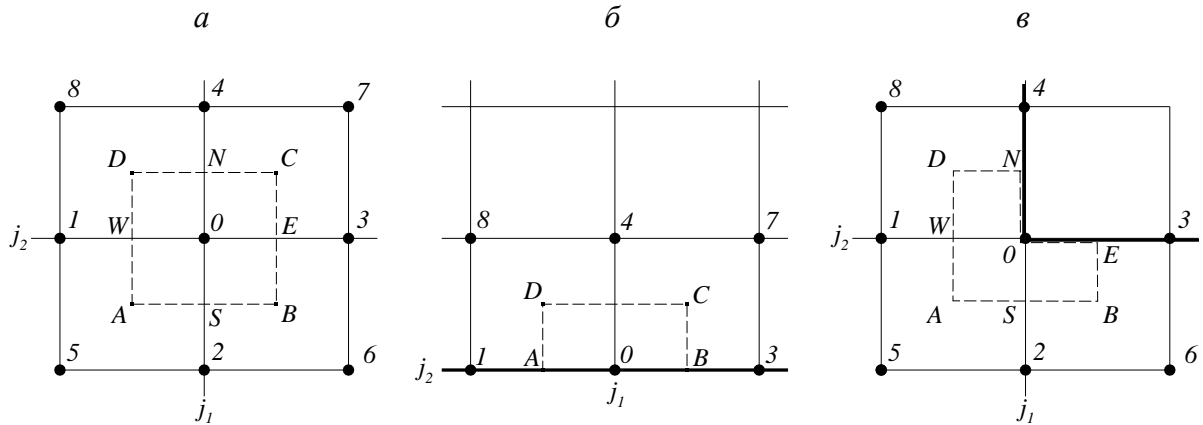


Рисунок 3.1 – Контуры интегрирования и шаблоны разностных уравнений для  $\varphi$  во внутреннем (а), в граничном (б) и угловом (в) узлах сетки

Аналогичным образом могут быть получены разностные уравнения в граничных узлах, лежащих на непроницаемой стенке. Пусть, например, узел сетки  $\mathbf{x}_{j_1, j_2} = (\lambda_{j_1}, \theta_{j_2})$  принадлежит участку границы  $\Gamma$ , проходящему по некоторой параллели (жирная линия на рис. 3.1, б), и в локальной окрестности этого узла область решения лежит выше рассматриваемой части границы. Если, например, узлы  $\mathbf{x}_{j_1-1, j_2}$  и  $\mathbf{x}_{j_1+1, j_2}$  также лежат на  $\Gamma$ , то контур интегрирования  $ABCD$  выбирается так, что две его вершины  $C$  и  $D$  совпадают с центрами соседних ячеек с общей вершиной в точке  $\mathbf{x}_{j_1, j_2}$ , а две другие —  $A$  и  $B$  — с серединами сторон этих ячеек (см. рис. 3.1, б). В этом случае сторона  $AB$  контура интегрирования целиком лежит на  $\Gamma$ , поэтому при вычислении интегралов по  $AB$ , входящих в интегральные соотношения (3.44), (3.45), необходимо использовать краевые условия для функции  $\varphi$ .

Из условия (3.17), которое в рассматриваемом случае имеет вид  $v = 0$ , и на основе уравнения (3.11), которое предполагается выполненным вплоть до границы и в котором учтены замены (3.16), получаем следующее краевое условие

$$\frac{1}{R} \left( \frac{\varphi_\theta - \psi h_\theta}{H} - g\tilde{\eta}_\theta \right) + \frac{u^2}{R} \operatorname{ctg} \theta + fu \Big|_\Gamma = 0. \quad (3.48)$$

Дисперсионная составляющая давления на дне связана с искомыми величинами  $H$ ,  $u$  и  $\varphi$  выражением

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{H} + HQ + \nabla\varphi \cdot \nabla h \right), \quad (3.49)$$

после подстановки которого в (3.48) краевое условие принимает вид

$$\left( \frac{1}{R} \left( \frac{\varphi_\theta}{H} - \frac{\nabla\varphi \cdot \nabla h}{Hr} h_\theta \right) - \frac{6h_\theta}{RH^2 r} \varphi \right) \Big|_\Gamma = \left( \frac{1}{R} \left( g\tilde{\eta}_\theta + \frac{Q}{r} h_\theta + \right) - \frac{u^2}{R} \operatorname{ctg} \theta - fu \right) \Big|_\Gamma$$

или (с учетом обозначений (3.38), (3.42), (3.46), (3.47))

$$(\Phi^2 - k_{02}\varphi - f_{12}) \Big|_{AB} = 0. \quad (3.50)$$

Краевое условие (3.50) используется при вычислении интегралов по стороне  $AB$ . Аппроксимируя двойной интеграл из левой части (3.44) выражением

$$\iint_{ABCD} k_0 \varphi d\lambda d\theta \approx \iint_{ABCD} k_{00} \varphi d\lambda d\theta + \left( \int_{BC} k_{01} d\theta - \int_{AD} k_{01} d\theta + \int_{DC} k_{02} d\lambda - \int_{AB} k_{02} d\lambda \right) \varphi(0) \quad (3.51)$$

и полагая

$$\int_{AB} \Phi^2 d\lambda \approx \Phi^2(0)h_1, \quad \int_{AB} f_{12} d\lambda \approx f_{12}(0)h_1, \quad \int_{AB} k_{02} d\lambda \approx k_{02}(0)h_1,$$

получаем, что в силу краевого условия (3.50) все разностные выражения, аппроксимирующие интегралы по  $AB$  в соотношениях (3.44), (3.45), (3.51), взаимно сократятся. Тем самым, при использовании интегро-интерполяционного метода можно не аппроксимировать краевое условие вида (3.50), достаточно лишь учесть его при получении разностных уравнений в граничных узлах.

Для граничных узлов других типов используется такой же способ получения разностных уравнений с выбором в каждом отдельном случае соответствующего контура интегрирования. В качестве примера на рис. 3.1, в изображен контур интегрирования и 8-точечный шаблон для одного из восьми типов угловых узлов. Поскольку разностные уравнения выписываются для всех узлов расчетной сетки, то число таких уравнений совпадает с общим количеством внутренних и граничных узлов.

Для решения системы разностных уравнений используется итерационный метод. В общем случае область решения имеет сложную форму границы и не будет выпуклой ни в одном из двух координатных направлений. Кроме того, наличие островов, на границах которых ставятся условия непротекания вида (3.50), делает область многосвязной. Поэтому применение итерационных методов, основанных на прогонках, затруднительно. По этой причине в программном модуле NLDSW\_sphere [17] реализован метод последовательной верхней релаксации, более подходящий для многосвязных областей сложной конфигурации.

Для заданных функций  $\varphi$  и  $\psi$  система уравнений (3.1)—(3.3) при условии (3.5) и  $H > 0$  имеет строго гиперболический тип, поэтому для ее численного решения можно использовать весь арсенал методов, созданных для гиперболических систем. В одномерном случае (см. Главу 1) для решения аналогичной системы использовалась [14,20] схема предиктор—корректор, надлежащий выбор схемного параметра в которой гарантирует выполнение TVD-свойства для линеаризованного аналога разностной схемы и свойство сохранения монотонности численного решения скалярных уравнений [63]. Некоторые особенности применения этой схемы для двумерных задач отражены в [159]. Для сферического случая будем использовать эту схему со схемным параметром, равным нулю, что повышает риск возникновения численных осцилляций на крутых фронтах волн при использовании SW-модели, но приводит к малой диссипации разностной схемы для NLD-модели.

Кратко опишем алгоритм решения расширенной системы уравнений (см. также [8, 68]). Как уже говорилось выше, в начальный момент времени задаются возвышение  $\tilde{\eta}$  и вектор скорости  $\mathbf{u}$ . Если дно предполагается подвижным, то при  $t = 0$  должны быть известными также величины  $\tilde{h}_t$  и  $\tilde{h}_{tt}$ . Этих данных достаточно, чтобы определить в начальный момент времени дисперсионную составляющую проинтегрированного давления  $\varphi$  путем численного решения уравнения (3.37) и дисперсионную составляющую давления на дне  $\psi$  из конечно-разностного аналога формулы (3.49).

Пусть на  $n$ -м слое по времени величины  $H^n$ ,  $\mathbf{u}^n$ ,  $\varphi^n$ ,  $\psi^n$  известны. Далее используется метод предиктор–корректор, каждый из двух шагов которого состоит из двух этапов. На шаге предиктор вначале в центрах ячеек определяются величины  $H^{n+1/2}$ ,  $\mathbf{u}^{n+1/2}$  как решение явных разностных уравнений, аппроксимирующих недивергентную систему (3.9)—(3.11), с правыми частями взятыми с  $n$ -го временного слоя. Затем решается разностное уравнение относительно  $\varphi^{n+1/2}$ , коэффициенты и правая часть которого вычисляются с использованием новых значений  $H^{n+1/2}$ ,  $\mathbf{u}^{n+1/2}$ , и по формуле (3.49) определяется  $\psi^{n+1/2}$ . Найденные на предикторе значения  $H^{n+1/2}$ ,  $\mathbf{u}^{n+1/2}$ ,  $\varphi^{n+1/2}$  и  $\psi^{n+1/2}$  используются затем на шаге корректор для определения окончательных значений  $H^{n+1}$  и  $\mathbf{u}^{n+1}$  путем численного решения системы уравнений (3.1)—(3.3) с дивергентной формой левой части. В последнюю очередь вычисляются значения функций  $\varphi^{n+1}$  и  $\psi^{n+1}$ .

Для SW-уравнений этот алгоритм упрощается за счет того, что из него исключаются этапы вычисления дисперсионных добавок. В этом случае его можно назвать сферическим аналогом схемы Лакса-Вендроффа.

Важным свойством разработанного численного алгоритма является сохранение им состояния покоя в случае неподвижного ( $B \equiv 0$ ) и не очень искривленного ( $k_0 > 0$ ) дна: если на  $n$ -м слое по времени жидкость покоилась ( $\mathbf{u}^n \equiv 0$ ), а свободная граница была невозмущенной ( $\tilde{\eta}^n \equiv 0$ ), то это состояние покоя сохранится и на  $(n + 1)$ -м временном слое. Добиться выполнения этого свойства удалось за счет согласованной аппроксимации левых и правых частей уравнения для  $\varphi$  и уравнений импульса.

## 3.2. Численное моделирование распространения волн по вращающейся сфере

В параграфе описаны результаты численного моделирования задач на вращающейся сфере в идеализированных и реальных акваториях.

В задаче о распространении волн в акватории с постоянной глубиной, включающей в себя большую часть Тихого океана, исследуется влияние сферичности и вращения Земли, а также дисперсионных эффектов на распространение волн различной эффективной длины. Приведены расчёты некоторых цунами в реальных акваториях с разной степени удалённости очага от побережья РФ. На основании сравнения решений, полученных в рамках NLD- и SW-модели, обсуждается важность учёта дисперсии в этих задачах.

### 3.2.1. Описание модельной задачи в акватории с постоянной глубиной

К настоящему времени сложился большой набор тестовых задач [161], принятых в качестве обязательных тестов для проверки достоверности результатов, получаемых с помощью численных алгоритмов расчета течений жидкости со свободной границей в одномерном или двумерном приближении с использованием декартовых координат, а также для сравнения характеристик различных алгоритмов [123]. Для верификации методов расчета в рамках нелинейно-дисперсионных моделей на вращающейся сфере пока что не существует общепризнанных тестов, но работа по накоплению необходимого объема материалов с расчетными данными уже началась. К таким материалам можно отнести и результаты решения тестовой задачи, приведенной ниже.

Мы ограничимся здесь решением модельной задачи в простой области, простирающейся от  $100^\circ$  до  $300^\circ$  с запада на восток и от  $-60^\circ$  до  $65^\circ$  с юга на север (Рисунок 3.2). Для наглядности здесь и далее в этой главе вместо переменной  $\theta$  используется географическая широта  $\varphi = \pi/2 - \theta$ . В рассматриваемой области содержится значительная часть Тихого океана и она не включает полюса (см. условие (3.5)). Идеализация заключается в том, что глубина океана считается постоянной:  $\tilde{h} \equiv 4$  км. Кроме того, идеализированным является источник волны цунами — начальное возмущение гауссовой формы:

$$\bar{\eta}(\lambda, \varphi, 0) = a_0 \exp(-w\rho^2). \quad (3.52)$$

Начальная амплитуда волны равнялась  $a_0 = 5$  м, центр возмущения располагался в точке  $(\lambda_0, \varphi_0) = (280^\circ, -40^\circ)$ , а параметр  $w$  выбирался равным  $w = 8 \cdot 10^{-10}, 8 \cdot 10^{-11}, 8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-2}$ , что соответствует эффективной протяженности начального возмущения приблизительно равной  $W_1 \approx 107.3$  км,  $W_2 \approx 339$  км и  $W_3 \approx 1073$  км соответственно. В формуле (3.52)

$$\rho(\lambda, \varphi) = R \cdot \arccos \left( \cos(\varphi) \cos(\varphi_0) \cos(\lambda - \lambda_0) + \sin(\varphi) \sin(\varphi_0) \right),$$

т. е.  $\rho$  есть расстояние по дуге большого круга между точками сферы с координатами  $(\lambda, \varphi)$  и  $(\lambda_0, \varphi_0)$ , поэтому линии уровня поверхности (3.52) представляют собой концентрические окружности. Эффективная протяженность определяется как диаметр окружности, являющейся линией уровня  $a_0/10$ . На наш взгляд начальное возвышение (3.52) является более подходящим для обязательного теста, чем несимметричный источник из [131], поскольку при пренебрежении вращением Земли ( $\Omega = 0$ ) оно будет генерировать симметричные волны с линиями уровня в виде концентрических окружностей, а при учете вращения Земли использование (3.52) позволяет оценить при  $t > 0$  влияние силы Кориолиса, например, по отклонениям линий уровня свободной границы от окружностей.

На границах области решения ставились неотражающие краевые условия (3.18)—(3.19) типа Зоммерфельда. Большинство расчетов проводилось на двухминутной сетке с числом узлов  $6001 \times 3751$ . Вычисления проводились до момента  $t = 30$  часов физического времени распространения волн, при этом среднее время расчета на одном ядре процессора кластера НГУ составляло

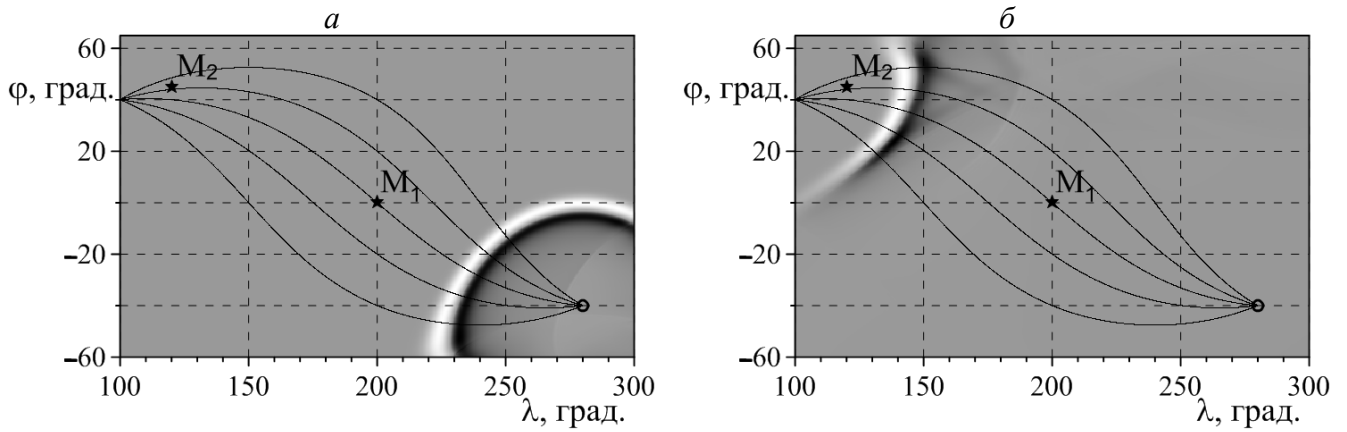


Рисунок 3.2 – Схема модельной акватории и изображения свободной поверхности (вид сверху), рассчитанные по NLD-модели для источника  $W_3$  на момент времени  $t = 6$  часов (а); 23 часа (б)

$\approx 6$  суток. Время расчета в рамках SW-модели было примерно в пять раз меньше. В некоторых задачах использовалась равномерная в плоскости  $O\lambda\varphi$  сетка с шагом 40 угловых секунд.

### 3.2.2. Влияние центробежной силы

Для оценки влияния центробежной силы на процесс распространения волн проведены расчеты по NLD-модели и ее модифицированной версии NLD0. Как уже говорилось ранее, после замены (3.16) последние слагаемые в уравнениях (3.3), (3.11) исчезнут, однако выражения, связанные с центробежной силой и имеющие в качестве множителя величину  $\Omega^2$ , останутся в членах этих уравнений, содержащих производную  $h_\theta$ . Кроме того, выражения с  $\Omega^2$  присутствуют в левой части уравнения (3.37) и в слагаемых  $F_1$  и  $F_2$  правой его части. Модифицированная NLD0-модель получается занулением всех таких слагаемых. Таким образом, в NLD0-модели, в отличие от NLD, влияние центробежной силы не учитывается.

Колебания свободной границы фиксировались двумя виртуальными мареографами, установленными в точках  $M_1 = (200^\circ, 0^\circ)$  и  $M_2 = (120^\circ, 45^\circ)$  (см. Рисунок 3.2). На мареограммах результаты расчетов по двум моделям практически неразличимы, поэтому приведем здесь лишь таблицу со значениями относительных разностей максимумов в мареограммах, рассчитанных по разным моделям:

$$\delta_i = \frac{\max_{M_i}(\text{NLD0}) - \max_{M_i}(\text{NLD})}{\max_{M_i}(\text{NLD0})}, \quad i = 1, 2.$$

Из табл. 3.1 видно, что с увеличением протяженности источника влияние центробежной силы ослабевает, и значения относительной разности  $\delta_i$  во всех случаях не превышают половины процента, из чего можно сделать вывод о слабом влиянии центробежной силы в рассматриваемом классе задач.

Таблица 3.1 – Значения относительных разностей  $\delta_i$  в зависимости от эффективной протяженности источника

Мареограф	$W_1$	$W_2$	$W_3$
$M_1$	-0.38%	-0.19%	-0.023%
$M_2$	0.27%	0.036%	0.006%

### 3.2.3. Влияние сферичности

Влияние сферичности оценивается здесь путем сравнения результатов расчетов на основе двух полных нелинейно-дисперсионных моделей: NLD-модели на сфере и NLD-модели на плоскости [14, 68], описанной в Главе 2. При моделировании поверхностных волн в рамках плановой модели начальные возмущения (3.52) имели такую же ширину  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$ , как и в сферическом случае, а два виртуальных мареографа располагались на том же расстоянии от источника, что и рассмотренные выше  $M_1$  и  $M_2$ . Кроме того, для выделения чисто сферических эффектов при использовании NLD-модели на сфере полагалось  $\Omega = 0$ , т. е. эффекты, обусловленные вращением Земли, здесь не учитывались.

На Рисунке 3.3 показаны мареограммы, рассчитанные на основе указанных моделей. Видно, что влияние сферичности возрастает с ростом эффективной ширины источника. Кроме того, во всех рассмотренных случаях амплитуды волн, зафиксированные мареографами, в расчетах на сфере больше, чем на плоскости. При этом в мареографе  $M_1$  различия еще не слишком большие, но с увеличением пройденного волной пути отличие амплитуд волн возрастает (см. мареограммы  $M_2$ ) и может достигать сотен процентов. Причина столь сильного различия волновых картин кроется в том, что в плоской задаче при разбегании волн происходит монотонное уменьшение их амплитуд на лучах, исходящих из центра возмущения. В сферической же задаче криволинейные лучи, проходящие по дугам больших окружностей, вначале расходятся, но потом сходятся в точке, диаметрально противоположной центру возмущения  $(\lambda_0, \varphi_0)$ . Поэтому амплитуда волн падает, как и в плоском случае, на участках расходимости лучей, но затем возрастает при их сходимости. Несколько таких лучей, имеющих в плоскости координат  $O\lambda\varphi$  криволинейную форму, изображены на Рисунке 3.2 в виде сплошных линий, исходящих из вершины  $(\lambda_0, \varphi_0)$ . Видно, что мареограф  $M_2$  расположен недалеко от точки сходимости лучей, поэтому в сферической задаче здесь получается волна существенно бóльшей амплитуды, чем в плоской задаче.

Следует заметить, что описанные выше особенности распространения волн по сферической поверхности должны проявляться по всей сфере, однако, из-за ограниченности модельной области и использования неотражающих краевых условий образуются подобласти, в которые волны практически не доходят. Это происходит из-за того, что лучи, идущие к этим подобластям из центра начального возмущения, выходят за границы модельной области, при этом теряется информация о волнах, идущих вдоль этих лучей. Примером такой подобласти в рассмотренной задаче может быть окрестность угловой точки  $(100^\circ, -60^\circ)$ . Когда лучи вновь приходят в область решения, то неотражающие граничные условия не впускают волну, идущую вдоль этих лучей. Поэтому волновая картина становится несимметричной, как это видно из Рисунка 3.2, б, на котором изображен

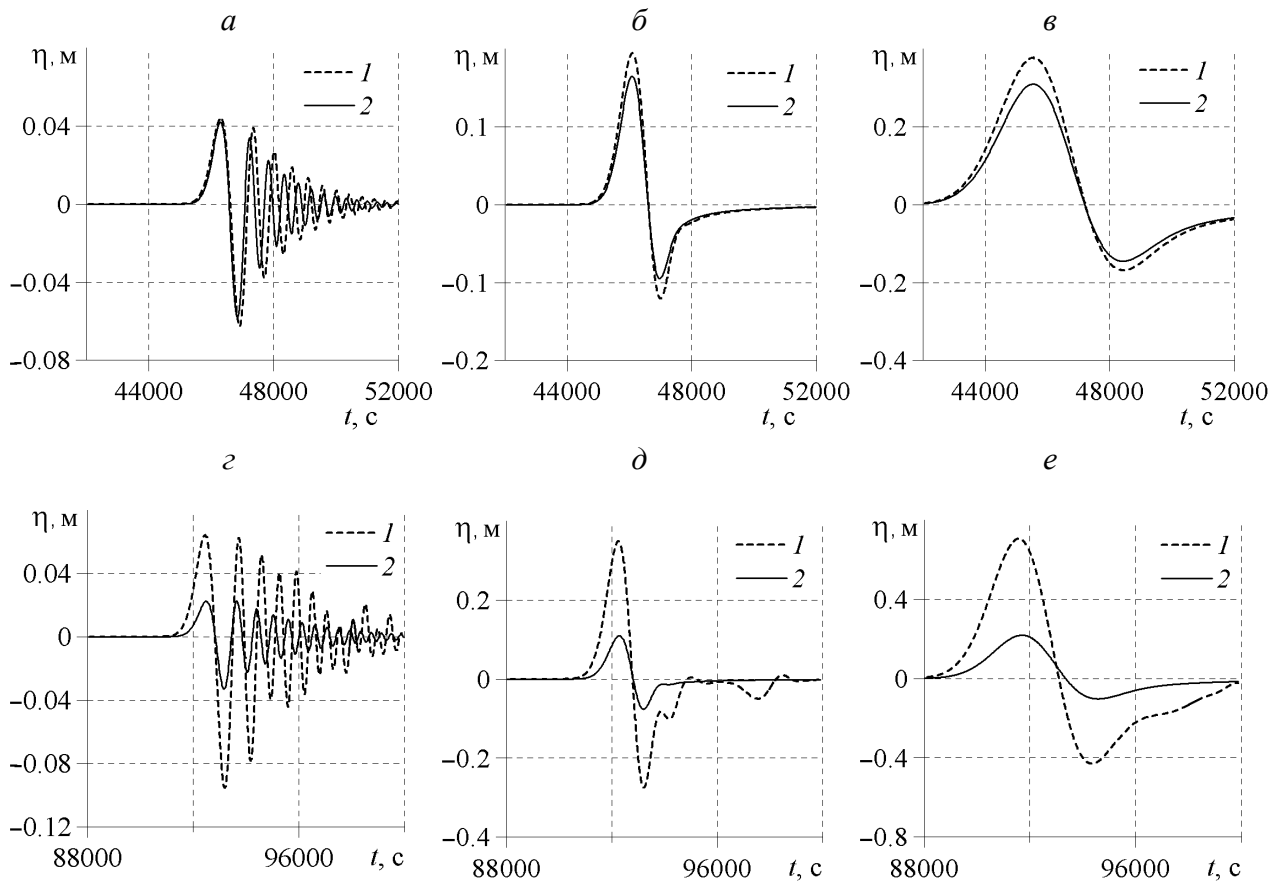


Рисунок 3.3 – Мареограммы  $M_1$  (а—в) и  $M_2$  (г—е), полученные в расчетах на основе сферической NLD-модели (1) и плановой (2) при эффективной протяженности начального возмущения  $W_1$  (а, г),  $W_2$  (б, д) и  $W_3$  (в, е)

вид сверху на свободную поверхность с использованием шкалы оттенков серого цвета, отображающей величину отклонения поверхности воды от невозмущенного положения. Средняя часть волны имеет фронт, перпендикулярный лучам, и хорошо воспроизводится в расчете, поскольку лучи, пришедшие в этот участок волны, не выходили за пределы области решения. На Рисунке 3.2, а изображена свободная поверхность в более ранний момент времени. Здесь практически все лучи пришли на фронт волны, не выходя из области решения. Поэтому форма фронта слабо отличается от дуги окружности.

Отметим работу [91], в которой также указывается на важность учета сферичности. В этой работе в рамках СНЛД-модели численно исследовалось цунами в Индийском океане в декабре 2004-го года. Вычислительная область имела значительно меньшую протяженность (не более  $40^\circ$  в каждом из координатных направлений), чем в рассматриваемой нами модельной задаче, поэтому эффекты, связанные со сферичностью Земли, проявились не столь ярко: изменение максимальной амплитуды волн составило лишь 30% в сравнении с плоским случаем.

### 3.2.4. Влияние силы Кориолиса

Рассмотрим теперь влияние вращения сферы на процесс распространение волн. Как уже было выяснено ранее, центробежная сила, обусловленная вращением Земли, оказывает ничтожно малое



влияние на процесс распространения волн, поэтому определяющее значение здесь будет иметь сила Кориолиса, которая представлена слагаемыми в правых частях уравнений (3.10), (3.11) и (3.37). На Рисунке 3.4 показаны мареограммы  $M_1$  и  $M_2$ , полученные в расчетах по полной NLD-модели с учетом вращения Земли и при отсутствии вращения ( $\Omega = 0$ ) для источников разной эффективной протяженности. Видно, что в противовес сферичности учет вращения сферы понижает максимальные положительные амплитуды волн, зафиксированные выбранными мареографами. Причем влияние вращения увеличивается с расстоянием и эффективной протяженностью начального возмущения. Таким образом, сила Кориолиса может внести значимый вклад в волновую картину только при распространении длинных волн на большие расстояния.

Расчеты с большими, чем у Земли, значениями угловой скорости  $\Omega$  показали, что совместное действие центробежной силы и силы Кориолиса оказывает заметное влияние на волновую картину. В частности, при больших значениях  $\Omega$  появляются мощные остаточные вихревые поля [46] в месте расположения начального возмущения (3.52) и замедляется скорость распространения волн.

Что касается более ранних исследований, которые проводились в рамках СНЛД-моделей, то в [91] отмечается, что учет силы Кориолиса изменяет максимальную амплитуду волн вплоть до 15%, в [138] —  $1.5 \div 2.5\%$ , в [131] — до 5%. В последней работе делается также вывод о том, что влияние силы Кориолиса увеличивается с эффективной шириной источника, при этом сила

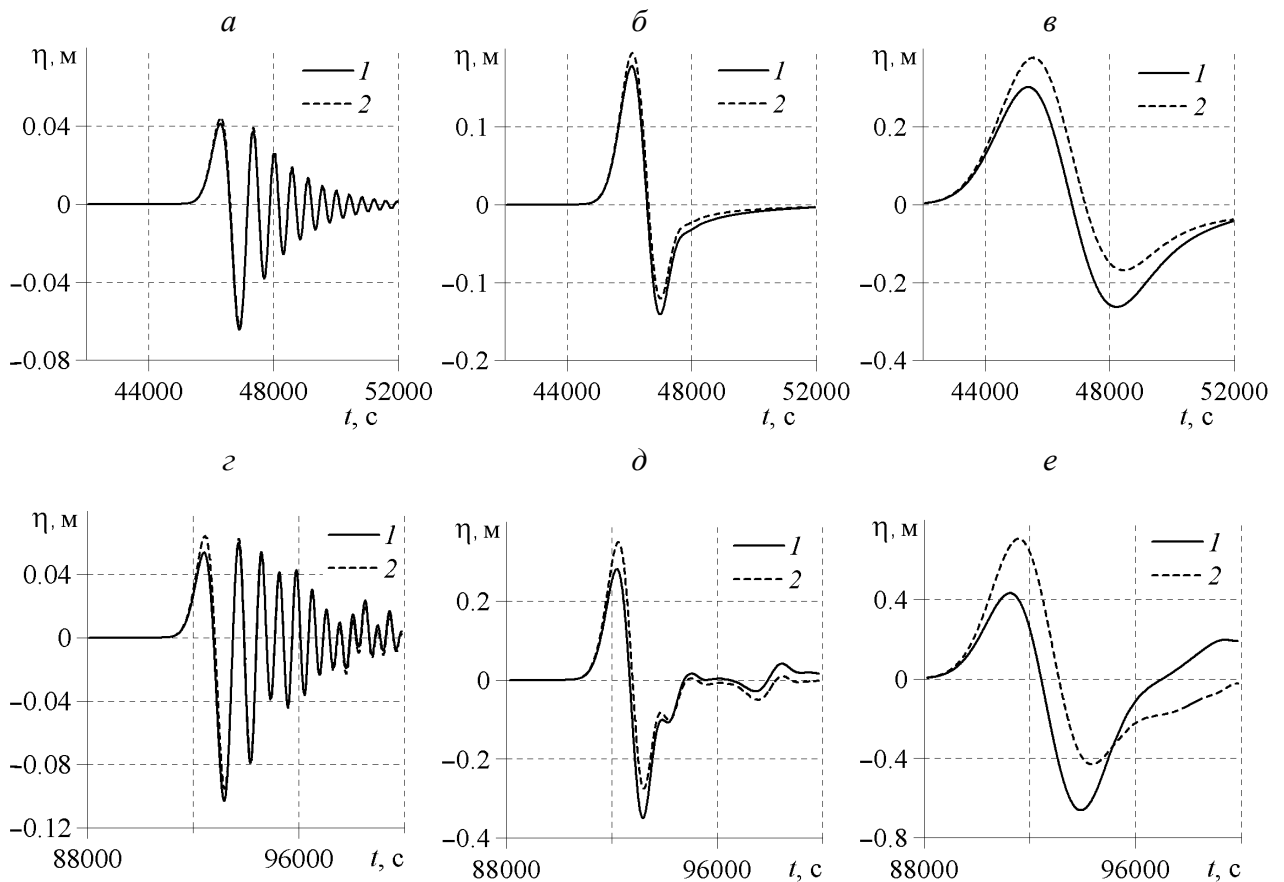


Рисунок 3.4 – Мареограммы  $M_1$  (a—v) и  $M_2$  (z—e), полученные в расчетах на основе сферической NLD-модели с учетом силы Кориолиса (1) и без учета (2) при эффективной протяженности начального возмущения  $W_1$  (a, z),  $W_2$  (б, d) и  $W_3$  (в, e)

Кориолиса пытается удержать часть возмущения свободной поверхности около его начального положения, т. е. способствует возникновению остаточного вихревого поля [44].

### 3.2.5. Дисперсионные эффекты

Для оценки вклада частотной дисперсии в процесс распространения волн будем сравнивать результаты расчетов по полной NLD-модели и бездисперсионной SW-модели с начальным возмущением (3.52). Как видно из Рисунка 3.5, при использовании NLD-модели за головной волной возникает цуг волн — дисперсионный хвост из коротких волн малой амплитуды, который не воспроизводится SW-моделью.

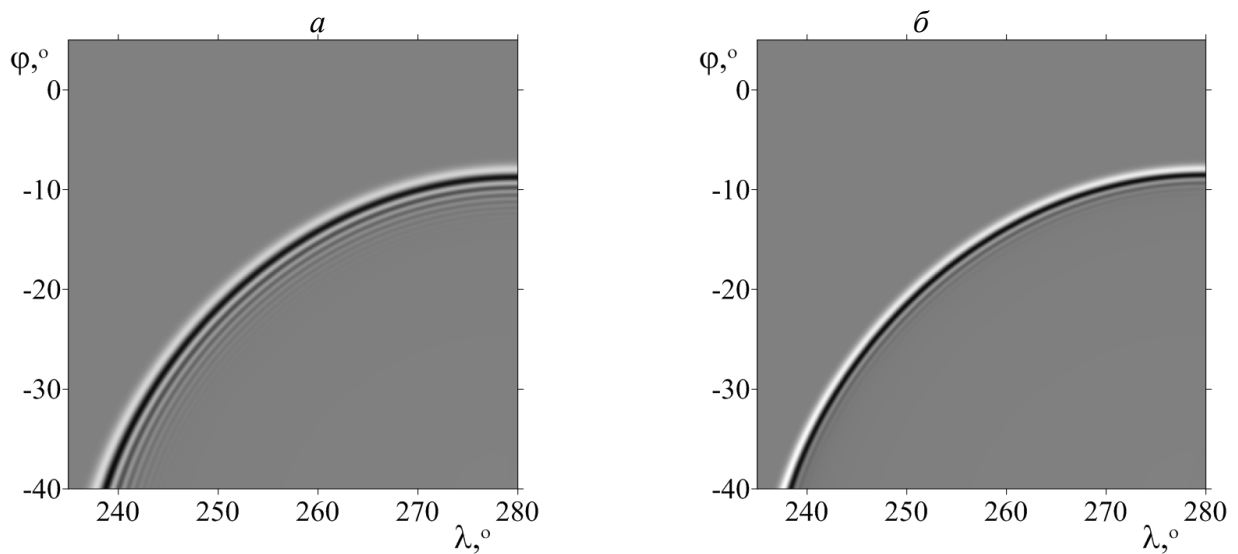


Рисунок 3.5 – Волновая картина в расчетах на основе NLD-модели (а) и SW (б). Источник  $W_1$ ,  $t = 5$  часов

Расчеты на основе NLD-модели показывают, что дисперсионные эффекты сильнее проявляются для более компактных начальных возмущений. Чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить поведение мареограмм, показанных сплошными линиями  $I$  на Рисунке 3.4. Видно, что возмущение  $W_1$  генерирует дисперсионный хвост, не наблюдаемый для более протяженных источников  $W_2$  и  $W_3$ .

Еще одной особенностью волновых полей, полученных с учетом дисперсии, является то, что при длительном распространении волн максимум амплитуды может переместиться в дисперсионный хвост, т. е. амплитуда головной волны может стать меньше амплитуды следующих за ней волн из дисперсионного хвоста (сравни линии  $I$  на Рисунке 3.4, а и 3.4, з). Такой же эффект наблюдался при использовании СНЛД-моделей [106, 138, 140]. Более того, в дисперсионном хвосте номер волны с максимальной амплитудой может возрастать с расстоянием [46].

Кроме того, влияние дисперсии возрастает с ростом пройденного волной пути. Это также видно из Рисунка 3.4. Например, для возмущения  $W_2$  дисперсия на ближнем мареографе  $M_1$  еще не проявилась (Рисунок 3.4, б, линия  $I$ ), а на дальнем  $M_2$  стала чуть заметней (Рисунок 3.4, д, линия  $I$ ). Что касается источника  $W_1$ , то дисперсия генерируемых им волн начинает проявляться

на расстояниях, меньших, чем удаление  $M_1$ . Для того, чтобы точнее определить расстояние, на котором должны проявиться дисперсионные эффекты, были использованы дополнительные виртуальные мареографы  $M_i$  ( $i = 3 \div 6$ ) с координатами  $(\lambda_i, \varphi_i)$  такими, что долгота всех мареографов совпадала с долготой центра начального возвышения  $\lambda_i = \lambda_0 = 280^\circ$ , а широта принимала разные значения:  $\varphi_3 = -35^\circ$ ,  $\varphi_4 = -30^\circ$ ,  $\varphi_5 = -20^\circ$ ,  $\varphi_6 = 0^\circ$ . Таким образом, эти мареографы расположены значительно ближе к источнику начального возмущения, чем  $M_1$ . Некоторые мареограммы представлены на Рисунке 3.6.

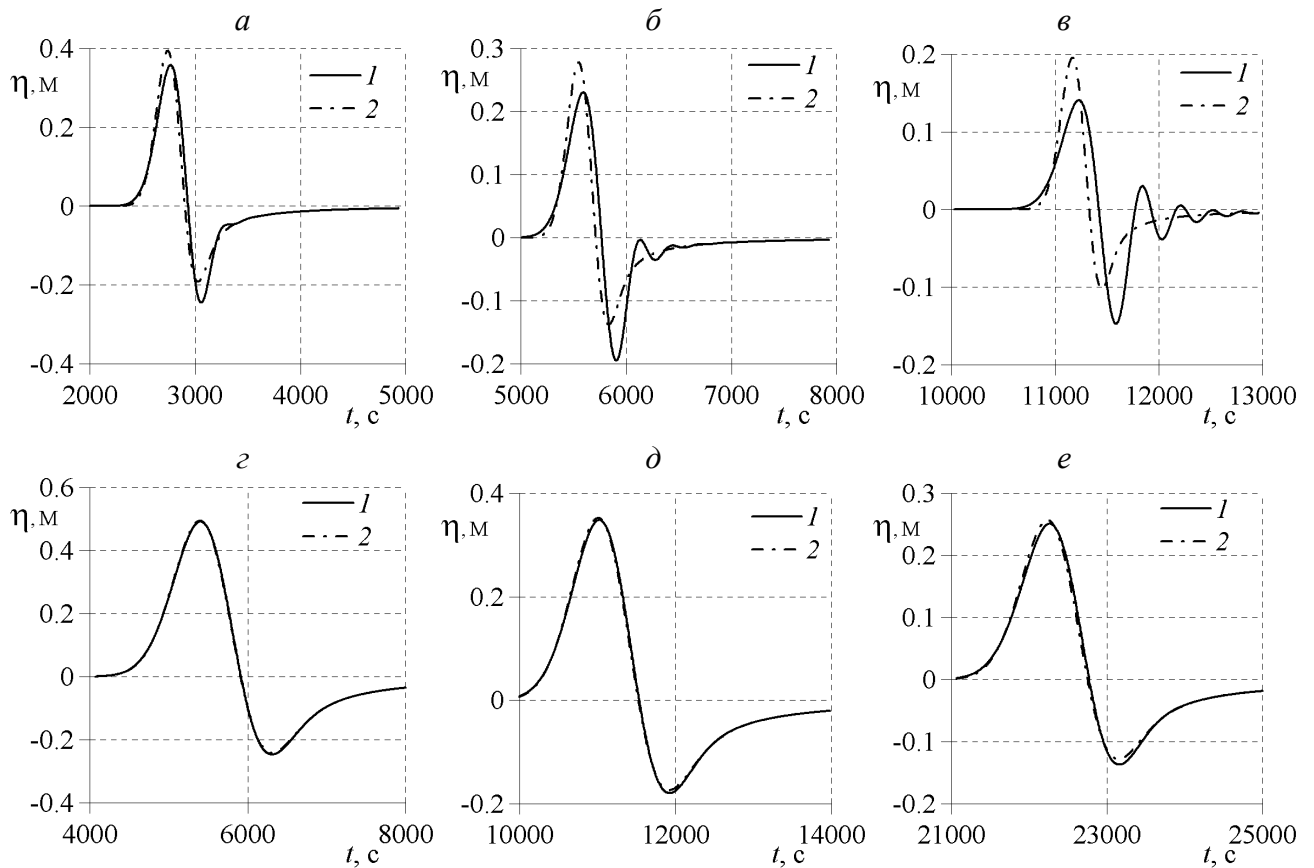


Рисунок 3.6 – Колебания свободной границы, рассчитанные по NLD (1) и SW (2) моделям для источников  $W_1$  (а—в) и  $W_2$  (г—е) и зафиксированные мареографами  $M_3$  (а),  $M_4$  (б, г),  $M_5$  (в, д) и  $M_6$  (е)

Из Рисунка 3.6, а—в видно, что для менее протяженного источника  $W_1$  дисперсия проявилась в полной мере (первая волна из дисперсионного хвоста полностью отделилась от головной) на мареографе  $M_5$ , установленном на расстоянии  $\approx 2200$  км от центра начального возмущения. Видно также, что учет дисперсии ведет к понижению амплитуды головной волны по сравнению с SW-моделью и уменьшению скорости ее движения. На этот дисперсионный эффект указывалось в одной из первых работ, посвященных численному моделированию дисперсионных волн в плановой постановке [88]. Что касается более протяженного источника  $W_2$ , то дисперсия волн не проявляется даже на мареографе  $M_6$ , удаленном на 4400 км (см. Рисунок 3.6, г—е). Таким образом, влияние учета дисперсии волн уменьшается с увеличением эффективной ширины источника (см. также [131]). Общим для NLD- и SW-моделей является то, что на не очень удаленных мареографах период головной волны растет с расстоянием, а ее амплитуда падает.

Для того чтобы приближенно определить расстояние  $L_{\text{disp}}$ , на котором могут стать заметными дисперсионные эффекты для заданной волны длины  $\lambda$ , распространяющейся над горизонтальным дном  $h_0 \equiv \text{const}$ , рассмотрим модельное RLW-уравнение (Regularised Long Wave) [150]

$$\eta_t + c_0 \eta_x = \nu \eta_{xxt},$$

которое можно получить, например, из линеаризованной системы NLD-уравнений в одномерном приближении, приведенной в [14]. Здесь  $c_0 = \sqrt{gh_0}$ ,  $\nu = h_0^2/6$ . Для этого уравнения дисперсионное соотношение  $\omega(k)$  и фазовые скорости  $v$  и  $v_k$  распространения заданной волны и волны, соответствующей волновому числу  $k$ , определяются по формулам

$$\omega(k) = \frac{c_0 k}{1 + \nu k^2}, \quad v = \frac{c_0}{1 + \nu(2\pi/\lambda)^2}, \quad v_k = \frac{c_0}{1 + \nu(2\pi/\lambda_k)^2},$$

где  $\lambda_k = 2\pi/k$ .

За время  $t$  заданная волна проходит путь  $L_{\text{disp}} = vt$ , а отделившаяся от нее волна с меньшей длиной  $\lambda_k < \lambda$  — меньший путь  $L_k = v_k t = L_{\text{disp}} v_k / v < L_{\text{disp}}$ . Несовпадение пройденных путей и есть проявление дисперсии. Далее будем считать, что длина отделившейся волны связана с  $\lambda$  соотношением  $\lambda_k = \alpha \lambda$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ) и будем полагать, что дисперсия проявляется в достаточной степени к тому моменту времени, когда короткая волна полностью отделяется от длинной, т. е. выполняется равенство  $L_k = L_{\text{disp}} - (1 + \alpha)\lambda/2$ . Отсюда следует формула для определения  $L_{\text{disp}}$ :

$$L_{\text{disp}} \left( 1 - \frac{v_k}{v} \right) = \frac{1 + \alpha}{2} \lambda$$

или

$$L_{\text{disp}} \left( 1 - \frac{\frac{c_0}{1 + \nu(2\pi/\lambda_k)^2}}{\frac{c_0}{1 + \nu(2\pi/\lambda)^2}} \right) = \frac{1 + \alpha}{2} \lambda.$$

С учетом равенства  $\lambda_k = \alpha \lambda$  получаем окончательный вид выражения для  $L_{\text{disp}}$ :

$$L_{\text{disp}} = \frac{1}{2(1 - \alpha)} \left[ \lambda + \frac{3}{2\pi^2} \alpha^2 \frac{\lambda^3}{h_0^2} \right] \approx \frac{1}{2(1 - \alpha)} \left[ \lambda + 0.152 \alpha^2 \frac{\lambda^3}{h_0^2} \right]. \quad (3.53)$$

Графики зависимостей (3.53) представлены на Рисунке 3.7.

Отметим, что аналог формулы (3.53) был получен ранее [47, 146] на основе анализа решений уравнения Кортевега-де Вриза. Величина  $L_{\text{disp}}$  названа в [46] длиной дисперсии.

Для того чтобы применить формулу (3.53) на практике необходимо знать значения  $\alpha$  и  $\lambda$ . Для источника  $W_1$  мареограф  $M_5$  зарегистрировал отделившуюся короткую волну с периодом, примерно в 3 раза меньшим, чем период головной волны (см. Рисунок 3.6, в). Поэтому с определенным приближением можно положить  $\alpha = 0.33$ . Что касается длины головной волны, то она в подобных оценках, как правило, полагается [131] равной эффективной протяженности источника, хотя в общем случае отождествлять длину головной волны с размером очага неправомерно [46]. При сле-

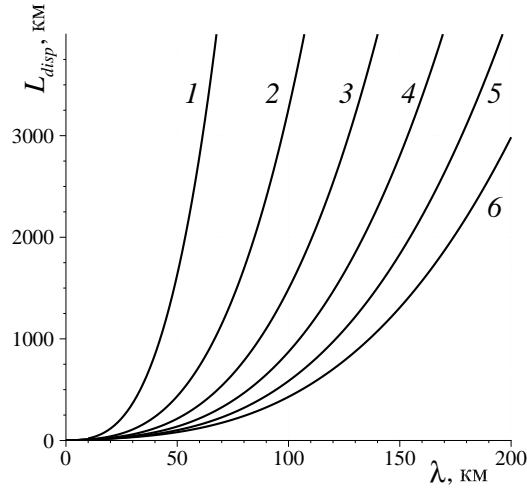


Рисунок 3.7 – Зависимость длины дисперсии  $L_{\text{disp}}$  от длины волны  $\lambda$  при  $\alpha_0 = 0.33$  и  $h_0 = 1$  км (1); 2 км (2); 3 км (3); 4 км (4); 5 км (5); 6 км (6)

ланных предположениях получаем значение  $L_{\text{disp}} = 1058$  км, т. е. формула (3.53) предсказывает, что на мареографе  $M_5$  дисперсионные эффекты обязательно проявятся. В этом смысле расчетные данные не противоречат приближенной аналитической оценке. Для источника  $W_2$  формула (3.53) дает значение  $L_{\text{disp}} = 30139$  км, если принять, что  $\alpha = 0.33$  и  $\lambda = 339$  км. Таким образом, выделение короткой волны из головной не произойдет не только в месте установки мареографа  $M_6$ , но и самого удаленного —  $M_2$ .

Есть и другие критерии для определения важности учета дисперсионных эффектов. Один из наиболее употребимых — неравенство  $P_a < 4$ , при выполнении которого считается, что дисперсия волн станет заметной. Здесь  $P_a$  — параметр Кајиуга, приведенный, например, в [131]:

$$P_a = \left( \frac{6h_0}{L} \right)^{1/3} \cdot \frac{W}{h_0}, \quad (3.54)$$

где  $W$  — протяженность источника,  $L$  — расстояние, пройденное головной волной. Рисунок 3.6, в соответствуют значения  $W = 107.3$  км и  $L = 2200$  км, поэтому  $P_a \approx 6$ . Таким образом, согласно критерию, связанному с параметром (3.54), дисперсия в точке установки мареографа  $M_5$  еще не должна проявиться, что противоречит расчетным данным. Как указано в [106], критерий  $P_a < 4$  является слишком жестким, поэтому предлагается использовать более адекватный критерий  $\tau > 0.1$ , где  $\tau$  — “нормализованное время дисперсии”,

$$\tau = 6\sqrt{gh_0} \frac{h_0^2}{\lambda^3} t, \quad (3.55)$$

$t$  — время распространения волн. Полагая  $t = 12000$  с, получаем  $\tau \approx 0.18 > 0.1$ , т. е. для источника  $W_1$  дисперсия на мареографе  $M_5$  должна проявиться, что согласуется с нашими расчетными данными (см. Рисунок 3.6, в).

На наш взгляд, использование длины дисперсии (3.53) для приближенной оценки важности учета дисперсии волн является более предпочтительным, чем параметров (3.54), (3.55), поскольку значения  $L_{disp}$  дают наглядное представление в количественном выражении о расстоянии, на котором должны проявиться дисперсионные эффекты.

Отметим более ранние работы [91, 112, 122], в которых дисперсия исследовалась на основе СНЛД-моделей. В [112, 122] при исследовании распространения волн цунами в Индийском океане в 2004-м году показывается, что в глубоководной западной части океана отличие результатов, полученных в рамках слабо нелинейных NLD- и SW-моделей, достигает 20%, в [91] — 60%. Расчеты распространения цунами 11 марта 2011-го года подтвердили [131] важность учета дисперсионных эффектов: отличия максимальных амплитуд в СНЛД- и SW-моделях достигали 60%.

### 3.2.6. Некоторые расчёты цунами в Тихом океане

В настоящем пункте рассматриваются несколько типовых задач о распространении цунами в Тихом океане, которые могут представлять опасность для дальневосточного побережья РФ. В качестве основы для батиметрии использовался цифровой рельеф “The GEBCO One Minute Grid - 2008”. Источники цунами были предоставлены автору С.А. Бейзель и Л.Б. Чубаровым, и были получены с использованием “поршневой” модели Подъяпольского-Гусякова-Окады. Исследование посвящено изучению влияния частотной дисперсии в выбранных задачах, для чего сравниваются результаты расчётов по NLD- и SW-моделям, а также влияния неровностей дна, для чего сравниваются расчёты на реальной и выровненной (с постоянной глубиной) батиметриях.

Первая группа расчётов была проведена для двух “ближних” к побережью РФ источников, располагавшихся вблизи Южной Камчатки, как и в 1952-ом году. Магнитуда землетрясений составляла в первом случае  $Mw = 7.8$ , а во втором —  $Mw = 9.0$ . Вычисления проводились на интерполированной сетке с разрешением 30 угловых секунд. Расположение очагов и размеры расчётной области можно оценить по Рисунку 3.8, на котором приведены “свечения” — максимальные за всё время расчёта значения свободной поверхности во всей области.

На рисунках можно заметить, что “свечения”, полученные в расчётах по NLD- и SW-моделям, имеют несколько различную форму: в последнем оно больше простирается в сторону океана. Особенно хорошо заметен этот эффект в расчёте с меньшей магнитудой. Стоит отметить, что в этом случае амплитуды волн и зона их воздействия заметно меньше: в расчёте с магнитудой  $Mw = 9.0$  значительные волны зафиксированы в большей части акватории, в частности, на противоположной стороне полуострова, в то время как с  $Mw = 7.8$  они локализованы у ближайшего к начальному возмущению берега.

Рассмотрим относительную и абсолютную разницу максимальных значений за всё время расчётов по двум моделям (рис. 3.9). Относительная разница считалась по формуле

$$Diff_r = \frac{\max_{SW} \eta - \max_{NLD} \eta}{\max_{NLD} \eta} \cdot 100\%,$$

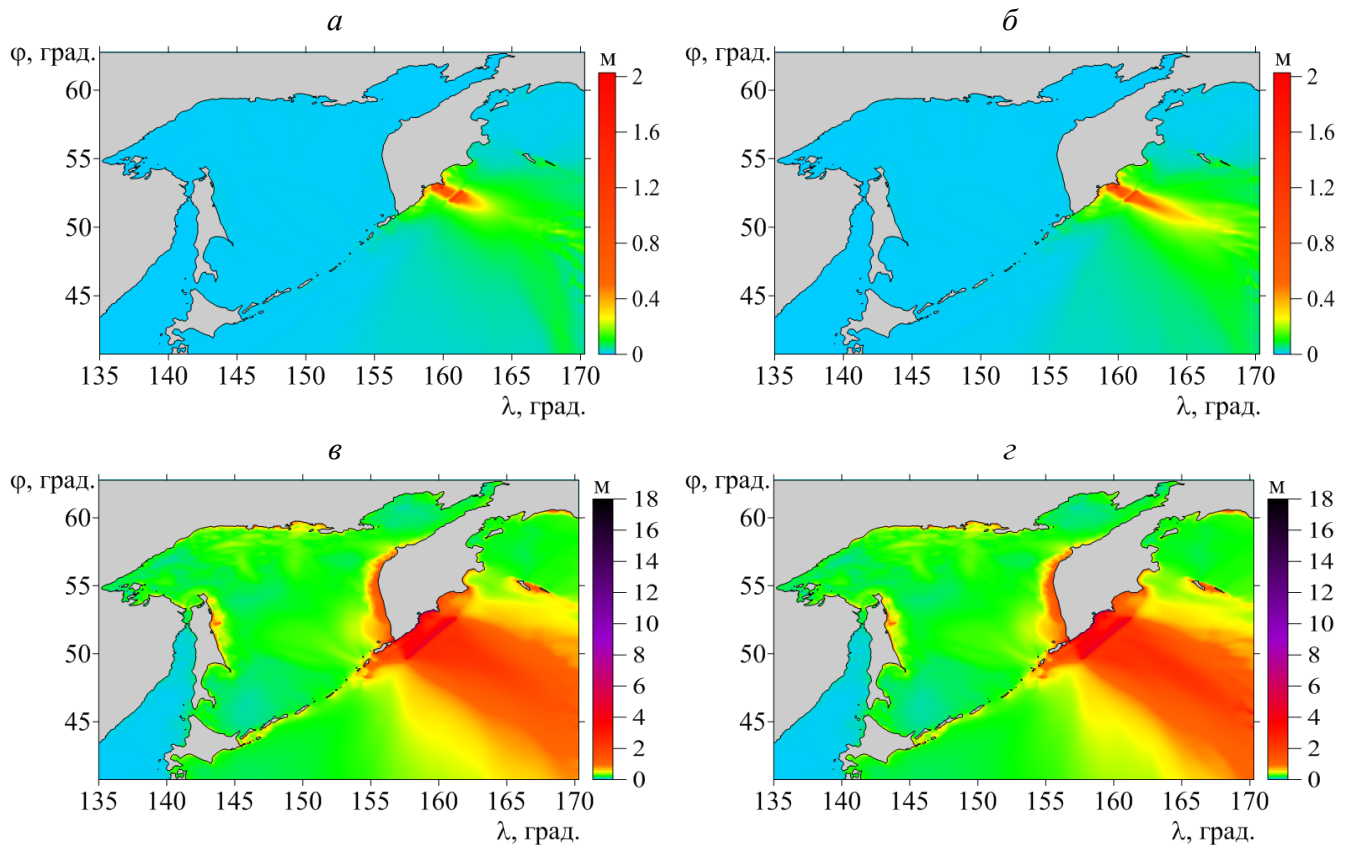


Рисунок 3.8 – Максимальные за всё время расчёта значения свободной поверхности в задаче о цунами около Южной Камчатки с магнитудами  $Mw = 7.8$  (а, б) и  $Mw = 9.0$  (в, г). Расчёты проводились в рамках NLD- (а, в) и SW-модели (б, г)

таким образом показывается относительное влияние исключения дисперсионных слагаемых из модели. Абсолютная разница измерялась в метрах и вычислялась по формуле

$$Diff_a = \max_{SW} \eta - \max_{NLD} \eta.$$

Можно сделать вывод, что для источника с магнитудой  $Mw = 7.8$  дисперсия оказала значительное влияние, поскольку относительные отличия результатов расчётов по двум моделям достаточно велики. Однако, картина абсолютных различий показывает, что дисперсия сказывалась там, где амплитуда волн была малой, и для объектов на берегу эти волны вряд ли представляли бы опасность. В случае с  $Mw = 9.0$  относительные различия не столь велики, и располагаются в основном по направлению к океану, а не побережью РФ. При рассмотрении абсолютных значений оказывается, что в этом случае различия больше, чем в расчёте с  $Mw = 7.8$ , однако, нельзя утверждать, что учёт частотной дисперсии является необходимым в этом классе задач. Причиной этому, в частности, служит относительно малое расстояние, проходимое волнами от “ближних” источников до побережья.

Среди “удалённых” источников реальную опасность для дальневосточного побережья РФ могут представлять цунамигенные землетрясения большой магнитуды около берегов Чили и Папуа

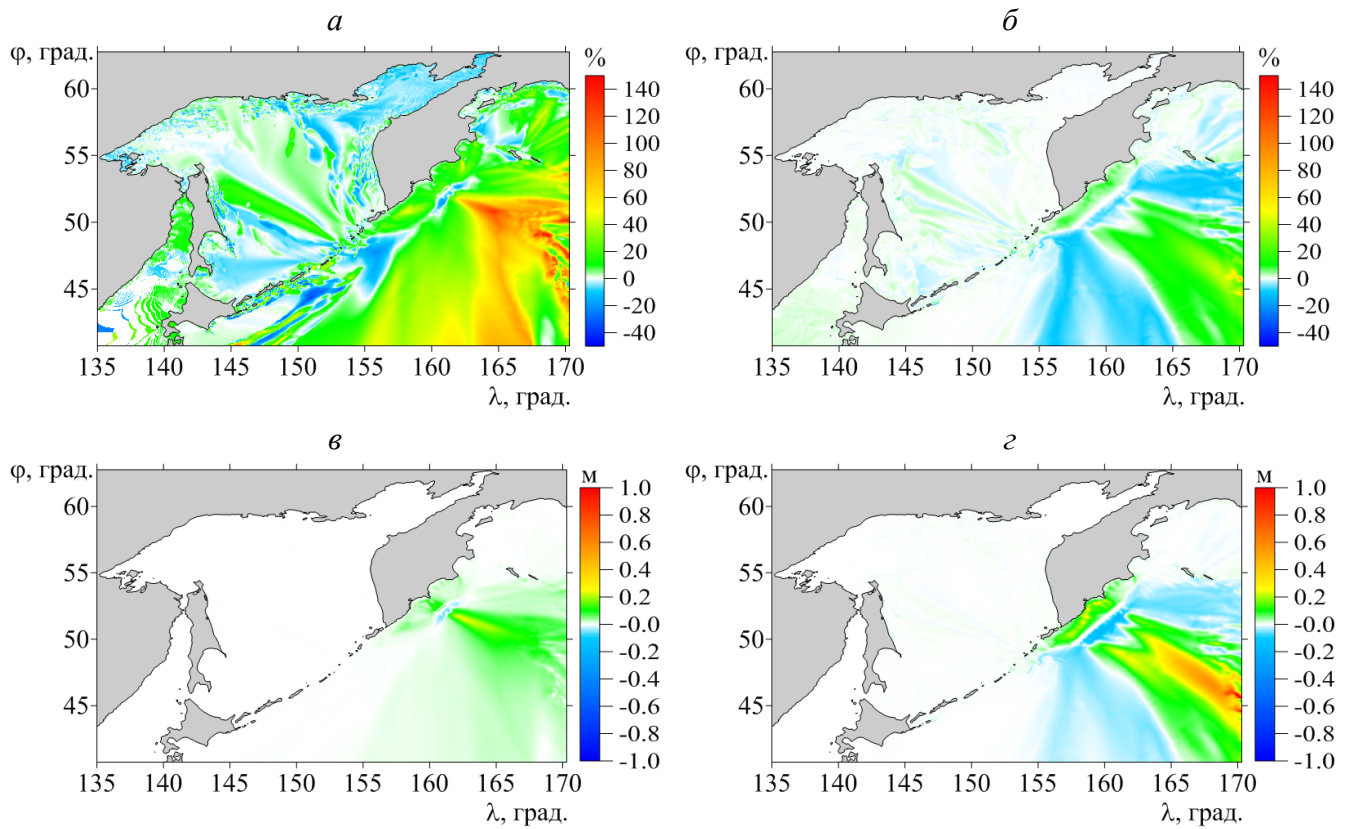


Рисунок 3.9 – Относительная (*a, б*) и абсолютная (*в, з*) разницы “свечений” в расчётах по NLD-SW-моделям для источников цунами около Южной Камчатки с магнитудами  $Mw = 7.8$  (*a, в*) и  $Mw = 9.0$  (*б, з*)

и Новой Гвинеи. Здесь рассмотрим гипотетический источник с магнитудой  $Mw = 9.0$  у берегов последней. Все расчёты выполнены на сетке с разрешением 1 угловая минута. Будем рассматривать два случая: в первом глубину в Тихом океане положим постоянной (“ровное” дно), равной  $\tilde{h} \equiv 4$  км, а во втором — она будет близка к реальной. Тем самым в первом случае мы исключим воздействие неровностей дна на картину распространения.

“Свечения” выбранного источника в расчётах по NLD- и SW-моделям для случаев ровного и реального дна показаны на Рисунке 3.10. На ровном дне максимальные амплитуды наблюдаются по направлению, перпендикулярному протяжённой части источника. В этом случае волны, зафиксированные на месте побережья РФ, не представляли бы серьёзной опасности. Наличие островов и неровностей дна во втором случае кардинально меняют картину “свечений”: от источника выходят несколько “лучей”, один из которых доходит и до Камчатского полуострова.

Что касается влияния частотной дисперсии, рассмотрим её более подробно на картинах абсолютной и относительной разницы (Рисунок 3.11). В случае ровного дна видно, что в направлении максимального “свечения” SW-модель существенно завышает значения относительно NLD-модели. В абсолютных значениях эта разница достигает более 0.7 м, а в относительных — более 55%. Слева и справа в стороны от этого направления видны практически симметричные области, в которых волны, рассчитанные по NLD-модели, имели немного (до 0.3 м в абсолютных и до 14% в относительных значениях) большую амплитуду.



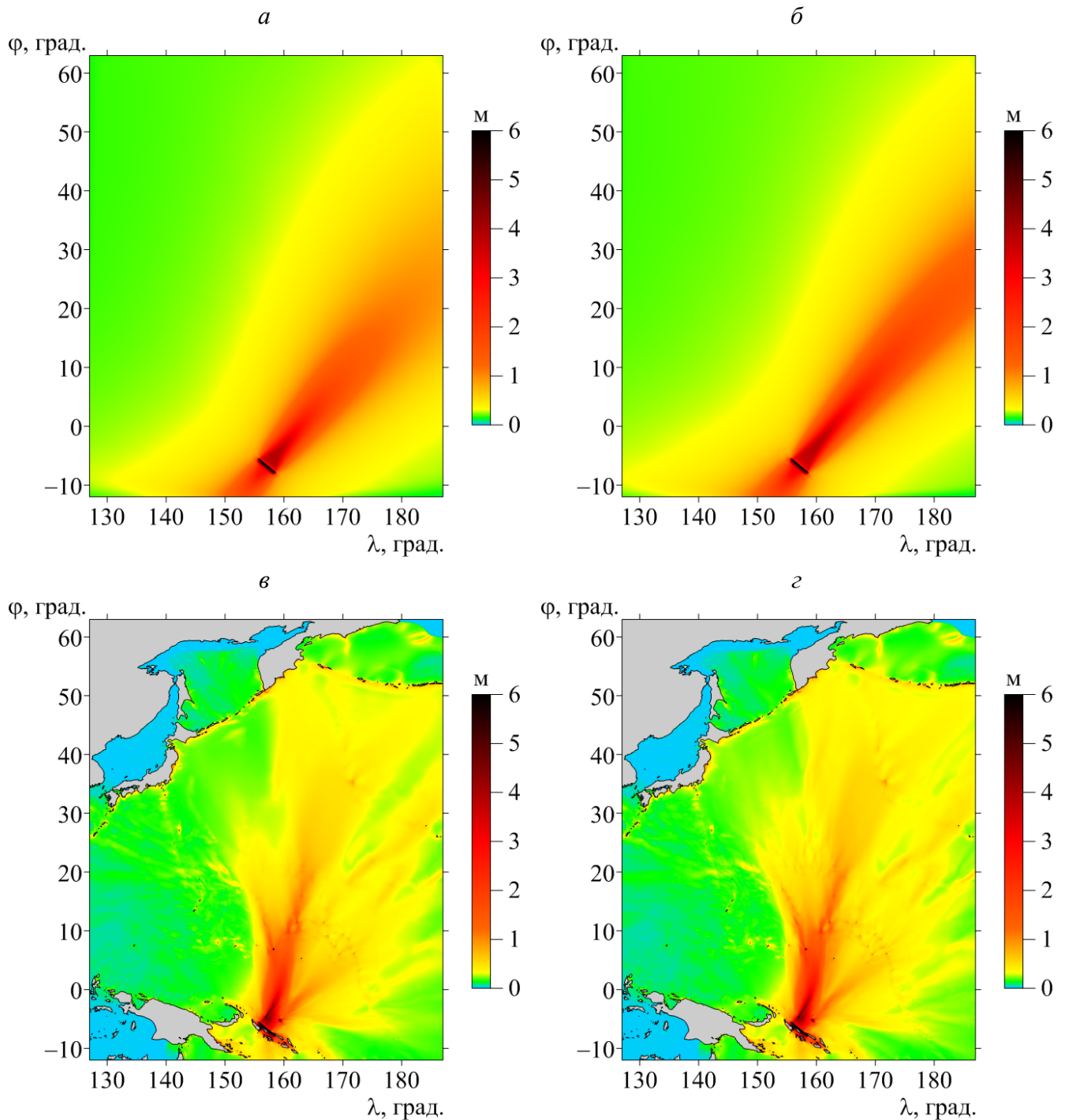


Рисунок 3.10 – Максимальные значения свободной поверхности за всё время расчётов по NLD- (*а, в*) и SW-моделям (*б, г*) в задачах о распространении гипотетического удалённого цунами над ровным (*а, б*) и реальным (*в, г*) дном

В расчётах с реальным дном картина различия “свечений” сильно усложняется. Глядя на относительную разницу (Рисунок 3.11, *г*), можно заметить области, в которых SW-модель сильно (более чем на 50%) завысила амплитуды, и более обширные зоны с завышением приблизительно на 20%. Однако, оказывается, что дисперсия сказывалась в основном в местах, где волны были малой амплитуды. Поэтому в абсолютных значениях различия крайне редко достигали 0.2 м. В связи с этим можно сказать, что важность учёта частотной дисперсии зависит не только от расстояния

или времени распространения волны, её длины и формы профиля, но и от структуры конкретной батиметрии.

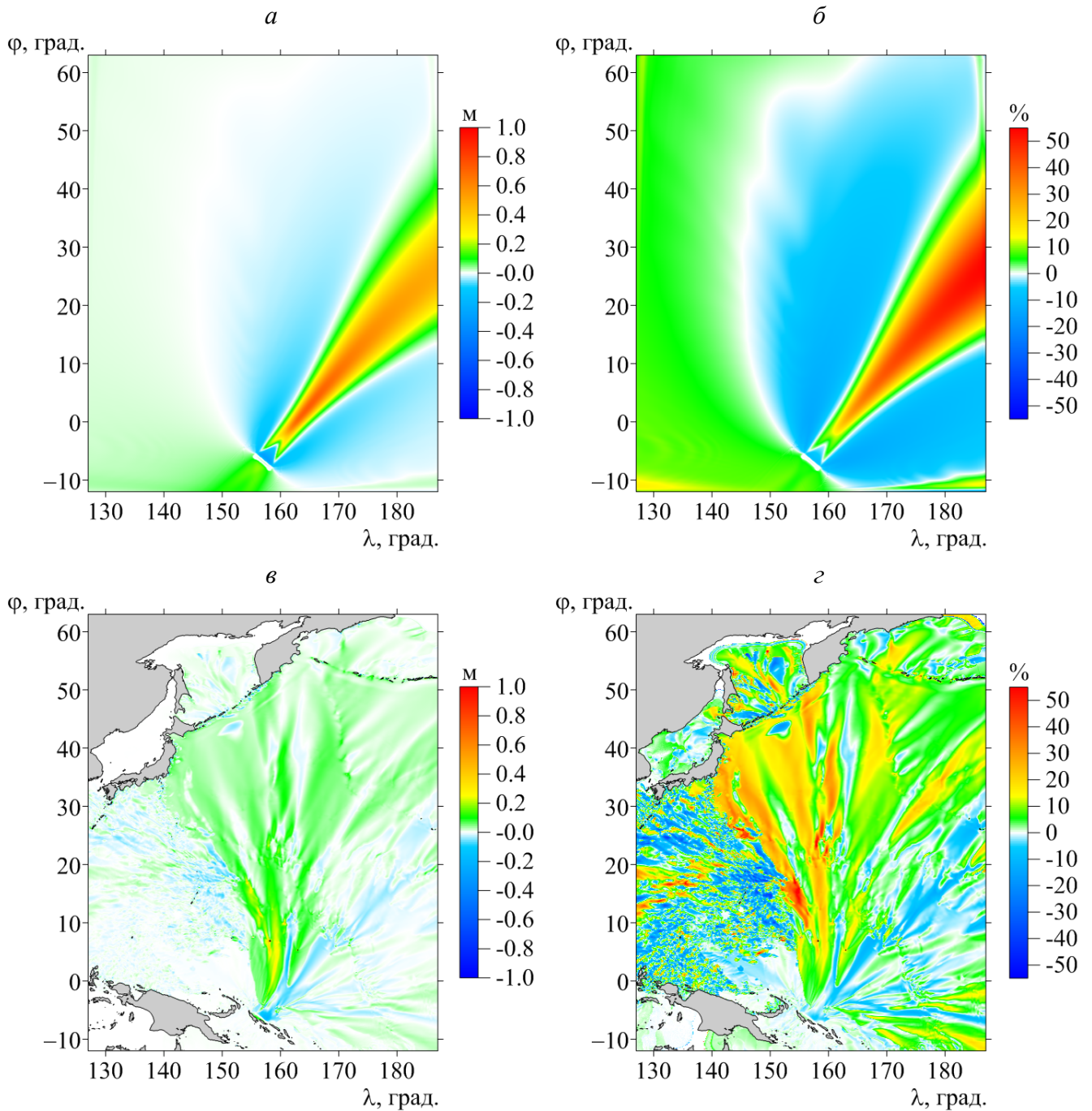


Рисунок 3.11 – Абсолютная (*а, в*) и относительная (*б, г*) разницы “свечений” в расчётах по NLD- и SW-моделям в задачах о распространении гипотетического удалённого цунами над ровным (*а, б*) и реальным (*в, г*) дном

### 3.3. Заключение по Главе 3

Настоящая Глава посвящена разработке численного алгоритма для решения системы полных НЛД-уравнений на вращающейся сфере.

Алгоритм основан на решении расширенной системы уравнений, состоящей из эллиптического уравнения для дисперсионной составляющей проинтегрированного давления по глубине и гиперболической системы уравнений первого порядка, которые отличаются от уравнений классической модели мелкой воды лишь наличием дополнительных слагаемых, связанных с дисперсионными добавками. Алгоритм реализован в виде явной двухшаговой схемы предиктор-корректор, на каждом шаге которой поочередно решаются выделенные “простые” подзадачи. Эллиптическое уравнение аппроксимируется при помощи интегро-интерполяционного метода, а получившаяся система разностных уравнений решается методом последовательной верхней релаксации.

На модельной задаче о распространении волн над ровным дном показано, что в земных условиях центробежную силу можно не принимать во внимание, а учет сферичности поверхности, по которой распространяются волны, может иметь определяющее значение. Влияние силы Кориолиса увеличивается с ростом площади начального возмущения и при распространении волн на большие расстояния, при этом учет вращения сферы понижает максимальные положительные амплитуды волн. Дисперсия также проявляется при длительном распространении волн и может приводить к существенному уменьшению максимальной амплитуды головной волны, которая распадается на цуг волн меньшей длины. Но, в отличие от силы Кориолиса, дисперсия сильнее проявляется при малых размерах начального возмущения, при этом учет дисперсии приводит к замедлению скорости распространения волн.

Проведены тестовые расчёты распространения “ближних” и “удалённых” от побережья РФ цунами в Тихом океане в рамках NLD- и SW-модели. В случае ближних источников дисперсия не оказала существенного влияния на картину максимальных заплесков на берег, и максимальные отличия между расчётами были зафиксированы на волнах, уходящих в океан. При удалённых очагах эти отличия могут достигать достаточно больших значений, и из-за неровностей дна сложно предсказать картину влияния частотной дисперсии на процесс распространения.

## Заключение

В настоящей работе для решения задач о распространении длинных поверхностных волн и образовании их подводным оползнем используются новые полные (NLD-) и слабо нелинейные (NLDB- и NLDD-) дисперсионные модели мелкой воды. Важным свойством выбранных моделей является наличие адекватных физике законов сохранения. При использовании этих моделей для решения задач о распространении цунами возможен учёт нелинейности и частотной дисперсии, подвижности дна, сферичности и вращения Земли.

Предложен универсальный способ выделения в системах полных и слабо нелинейных дисперсионных уравнений на подвижном дне в одномерном, двумерном и сферическом случаях равномерно эллиптического уравнения (или ОДУ в одномерном случае) для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления и гиперболической системы уравнений мелкой воды первого приближения с модифицированной правой частью. При этом в эллиптическом уравнении не содержится производных по времени от искомых функций. Численные алгоритмы для рассматриваемых моделей строятся на поочерёдном решении эллиптической и гиперболической подзадач.

Для аппроксимации уравнения для дисперсионной составляющей проинтегрированного по глубине давления использовался интегро-интерполяционный метод. Полученная система разностных уравнений решалась методом прогонки в одномерном случае и методом последовательной верхней релаксации в двумерном и сферическом. Для решения гиперболической подзадачи использовалась явная двушаговая схема типа предиктор-корректор с TVD-ограничителями, хорошо зарекомендовавшая себя при решении классических уравнений мелкой воды. Разработанные алгоритмы программно реализованы [16, 17] и позволяют решать задачи о генерации и распространении волн в одномерной, двумерной и сферической постановках.

В одномерном случае исследованы свойства численного алгоритма для эллиптической подзадачи и алгоритма решения всей задачи. Приведены примеры потери диагонального преобладания в методе прогонки в местах разрыва производной функции батиметрии, и его восстановления путём сглаживания этой функции. Теоретически исследованы такие свойства схем для полной NLD-модели как устойчивость, численная дисперсия и диссипация. Продемонстрировано, что разработанный алгоритм может хорошо воспроизводить дисперсионные свойства волн, когда глубина акватории хотя бы в четыре раза меньше длины волны.

В задаче о распространении над ровным дном уединённой волны показан второй порядок аппроксимации разностных схем, аппроксимирующих как полностью нелинейные, так и слабо

нелинейные дисперсионные уравнения. При моделировании наката уединённой волны на вертикальную стенку наблюдалось хорошее согласие расчётов по NLD-модели эксперименту для всех рассмотренных начальных амплитуд волн.

В задачах о сходе подводных оползней по плоскому откосу и в ограниченном водоёме с дном параболической формы численные решения, полученные при помощи рассматриваемых НЛД- и SW-моделей, сравнивались с экспериментальными данными [31, 95, 113] результатами расчётов других авторов [69, 72, 157] в рамках трёхмерной модели потенциальных течений (МПТ) [62] и известных НЛД-моделей. Показано, что при движении относительно протяжённых оползней NLD-модель хорошо описывает процесс образования и распространения волн и в сравнении с SW-моделью точнее воспроизводит амплитуду головной волны и дисперсионный “хвост”. Уменьшение длины оползня может приводить к потере адекватности приближенных моделей. Результаты расчётов по NLDB-модели близки к расчётам по NLD-модели в большом круге задач, завышая амплитуду волн в “хвосте” только при большой толщине оползня. Путём вычислительных экспериментов установлено, что NLDD-модель дает адекватные результаты только при малых значениях толщины оползня и скорости его движения. В сравнении с расчётами из [69, 72, 157] показано, что NLD-модель лучше согласуется с МПТ, чем известные модели Перегринна и Лью-Лайнетта.

Работоспособность алгоритма в областях со сложной формой границ проверена при сравнении полученных численных решений с экспериментальными данными в задаче о взаимодействии уединённой волны с коническим островом [83].

На модельной задаче о распространении волн разной эффективной длины в акватории с постоянной глубиной исследовалось влияние сферичности Земли, центробежной силы и силы Кориолиса, а также частотной дисперсии. Во всех рассмотренных случаях центробежная сила не оказывала существенного влияния на процесс. Сферичность и вращение усиливали своё воздействие с ростом расстояния, пройденного волной, и эффективной протяжённостью источника. В масштабных задачах учёт этих эффектов необходим для адекватного описания процесса. Дисперсия волн проявлялась на более компактных начальных возмущениях.

Рассмотрено влияние частотной дисперсии в задаче о распространении волн в модельной акватории “корыто”, где дно было равномерным в направлении  $Ox$ , а в направлении  $Oy$  описывалось кусочно-линейной функцией, аппроксимирующей распределение глубин около Курило-Камчатского желоба. Продемонстрировано, что оно в значительной степени зависит от формы начального возмущения свободной поверхности, которая определяется параметрами сейсмического источника.

Приведены результаты численного моделирования гипотетических подводных оползней в Чёрном море, параметры и начальные положения которых были близки к историческому [37]. Показано, что высота образованных волн и картина заплеска на берег сильно зависят от начального положения оползня и его размеров. Установлено, что при накате волн на берега вблизи начального положения оползня дисперсия сказывалась незначительно, но дисперсионные эффекты начинали ярко проявляться при распространении волн по глубоководной части акватории.

Исследована гипотеза [152] об оползневом механизме образования аномальных волн на побережье Болгарии 7-го мая 2007-го года. При численном исследовании более 200 возможных начальных положений оползня и различных соотношений его размеров был найден вариант, который генерировал волны очень близкие к имеющимся данным наблюдений по амплитуде и периоду.

Проведены тестовые расчёты распространения “ближних” и “удалённых” от побережья РФ цунами в Тихом океане. В случае ближних источников дисперсия не оказала существенного влияния на картину максимальных заплесков на берег, а при моделировании удалённых цунами важно учитывать дисперсионные эффекты.

Разработанные численные алгоритмы являются эффективным, универсальным средством для решения реальных задач о длинных поверхностных волнах, позволяющим выполнять численное моделирование процессов распространения длинных поверхностных волн, а также генерации волн подводными оползнями и взаимодействия волн с берегом.

Дальнейшие перспективы усовершенствования алгоритма заключаются в его распараллеливании (для многопроцессорных ЭВМ) и использовании вложенных сеток для возможности увеличения их разрешения. В работе не затронуты вопросы построения алгоритмов с подвижными точками уреза (см., например, [6, 7, 93]), позволяющих определить зоны затопления цунами и проводить моделирование сходов надводных оползней. Использование многослойного подхода [142] может расширить границы применимости НЛД-моделей. Выделение в исходной системе НЛД-уравнений гиперболической системы мелкой воды позволяет эффективно моделировать обрушение волн [82, 165, 176].

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность своему научному руководителю Гаязу Салимовичу Хакимзянову за организацию интересных исследований и внимание на протяжении всей работы. Также хочется поблагодарить Леонида Борисовича Чубарова, Дмитрия Леонидовича Чубарова и Софью Александровну Бейзель за ценные консультации и сотрудничество.

## Список сокращений и условных обозначений

ВЭ	вычислительный эксперимент
ГЭС	гидроэлектростанция
КРС	конечно-разностная схема
ММ	математическое моделирование
МПТ	модель потенциальных течений
НЛД-уравнения	нелинейно-дисперсионные уравнения
ОДУ	обыкновенное дифференциальное уравнение
РФ	Российская Федерация
СНЛД-уравнения	слабо нелинейные дисперсионные уравнения
ЭВМ	электронно-вычислительная машина
NLD-модель	полная нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды второго приближения на подвижном дне
NLDB-модель	слабо нелинейная дисперсионная модель мелкой воды типа Буссинеска
NLDD-модель	слабо нелинейная дисперсионная модель мелкой воды типа Буссинеска в предположении малых деформаций дна
RLW-уравнение	(regularised long wave) регуляризованное длинноволновое уравнение
SW-модель	классическая бездисперсионная нелинейная модель мелкой воды
TVD-схема	(total variation diminishing) схема, не увеличивающая полную вариацию

## Список литературы

1. Алешков, Ю. З. Течения и волны в океане / Ю. З. Алешков. – СПб: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996. – 226 с.
2. Базденков, С. В. Дисперсионные эффекты в двумерной гидродинамике / С. В. Базденков, Н. Н. Морозов, О. П. Погуце // ДАН СССР. – 1987. – Т. 293, № 4. – С. 818–822.
3. Баутин С. П. Теоремы существования и единственности для нелинейно-дисперсионных уравнений Грина-Нагди / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин // Вычисл. технологии. – 2013. – Т. 18, № 5. – С. 3–15.
4. Бейзель, С. А. Оценка важности учета дисперсионных эффектов при численном моделировании распространения волн цунами в модельных и реальных акваториях / С. А. Бейзель, О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров // Сборник материалов Всероссийской научной конференции с международным участием “Геодинамические процессы и природные катастрофы. Опыт Нефтегорска”. – 2015. – Т. 1. – С. 251–255.
5. Бейзель, С. А. Численное моделирование поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному дну / С. А. Бейзель, Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров // Вычисл. технологии. – 2010. – Т. 15, № 1. – С. 105–119.
6. Бейзель, С. А. О некоторых численных алгоритмах расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I. / С. А. Бейзель, Н. Ю. Шокина, Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, О. А. Ковыркина, В. В. Остапенко // Вычисл. технологии. – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 40–62.
7. Вольцингер, Н. Е. Длинноволновая динамика прибрежной зоны / Н. Е. Вольцингер, К. А. Клеванный, Е. Н. Пелиновский. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1989. – 272 с.
8. Гусев, О. И. Алгоритм расчета поверхностных волн над подвижным дном в рамках плановой нелинейно-дисперсионной модели / О. И. Гусев // Вычисл. технологии. – 2014. – Т. 19, № 6. – С. 19–40.
9. Гусев, О. И. Алгоритм численного решения задач для нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды / О. И. Гусев // Материалы 49-й Международной Научной Студенческой Конференции “Студент и научно-технический прогресс”, Математика. Новосибирск. 16-20 апреля 2011 г. Новосибирск: НГУ. – 2011. – С. 244.



10. Гусев, О. И. Использование нелинейно-дисперсионной модели для исследования волн цунами, возникающих при сходе подводного оползня / О. И. Гусев // Тезисы докладов XIV Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Томск. 15-17 октября 2013 г. Новосибирск: ИВТ СО РАН. – 2013. – С. 17.
11. Гусев, О. И. Использование плановой нелинейно-дисперсионной модели в задачах о генерации цунами подводными оползнями / О. И. Гусев // Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”, Математика. Новосибирск. 11-18 апреля 2014 г. Новосибирск: НГУ. – 2014. – С. 127.
12. Гусев, О. И. Моделирование генерации волн цунами подводным оползнем с использованием нелинейно-дисперсионной модели / О. И. Гусев // Материалы Юбилейной 50-й Международной Научной Студенческой Конференции “Студент и научно-технический прогресс”, Математика. Новосибирск. 13-19 апреля 2012 г. Новосибирск: НГУ. – 2012. – С. 250.
13. Гусев, О. И. Моделирование дисперсионных волн, генерируемых подводным оползнем в ограниченном водохранилище / О. И. Гусев, В. А. Кутергин, Г. С. Хакимзянов, Н. Ю. Шокина // Сборник трудов конференции “Математические и информационные технологии, МПТ-2013”. 5-9 сентября 2013 г., Врнячка Баня, Сербия; 9-14 сентября 2013 г., Будва, Черногория. – 2013. – С. 275–284.
14. Гусев, О. И. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище / О. И. Гусев, Н. Ю. Шокина, В. А. Кутергин, Г. С. Хакимзянов // Вычисл. технологии. – 2013. – Т. 18, № 5. – С. 74–90.
15. Гусев, О. И. Моделирование распространения поверхностных волн на вращающейся сфере с использованием полной нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды / О. И. Гусев // Тезисы докладов XV Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Тюмень. 29-31 октября 2014 г. Новосибирск: ИВТ СО РАН. – 2014. – С. 29.
16. Гусев, О. И. Модуль расчета поверхностных волн NLDSW / О. И. Гусев. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015616422 от 09.06.2015 г.
17. Гусев, О. И. Модуль расчета поверхностных волн NLDSW\_sphere / О. И. Гусев. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015616421 от 09.06.2015 г.
18. Гусев, О. И. Нелинейно-дисперсионные модели мелкой воды на вращающейся сфере и алгоритмы расчёта / О. И. Гусев, З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов // Тезисы докладов V Всероссийской конференции с участием зарубежных ученых “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”. Бийск. 29 июня – 4 июля 2014. – 2014. – С. 32–33.

19. Гусев, О. И. Об алгоритме расчёта образования волн подводным оползнем с использованием нелинейно-дисперсионной модели / О. И. Гусев // Тезисы докладов XIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск. 15-17 октября 2012 г. Новосибирск: ИВТ СО РАН. – 2012. – С. 17.
20. Гусев, О. И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне / О. И. Гусев // Вычисл. технологии. – 2012. – Т. 17, № 5. – С. 46–64.
21. Гусев, О. И. Расчёт распространения волн цунами с использованием многопроцессорных ЭВМ / О. И. Гусев, Д. В. Кузьминых // Материалы 47-й Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”, Математика. Новосибирск. 12-15 апреля 2009 г. Новосибирск: НГУ. – 2009. – С. 125.
22. Гусев, О. И. Численное исследование влияния дисперсии волн и вращения Земли на распространение цунами / О. И. Гусев // Тезисы XVI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Красноярск. 28–30 октября 2015 г. Новосибирск: ИВТ СО РАН. – 2015. – С. 29–30.
23. Гусев, О. И. Численное исследование генерации волн подводным оползнем с использованием плановой нелинейно-дисперсионной модели / О. И. Гусев // Материалы 51-й Международной Научной Студенческой Конференции “Студент и научно-технический прогресс”, Математика. Новосибирск. 12-18 апреля 2009 г. Новосибирск: НГУ. – 2009. – С. 130.
24. Гусев О. И. Численное моделирование дисперсионных поверхностных волн на вращающейся сфере / О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов // Тезисы Международной конференции “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики — 2015”, посвященной 90-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука. Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук. Новосибирск. 19-23 октября 2015 г. Новосибирск: Академиздат. – 2015. – С. 130.
25. Гусев О. И. Численное моделирование дисперсионных поверхностных волн на вращающейся сфере / О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов // Труды Международной конференции “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики — 2015”, посвященной 90-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука. Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук. Новосибирск. 19-23 октября 2015 г. [Электрон. ресурс]. Новосибирск: Абвей. — 2015. – 1 электрон. опт. диск. — 916–с. — ISBN 978-5-9905347-2-8. — С. 210–216.
26. Гусев, О. И. Численное моделирование поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на нестационарном дне / О. И. Гусев // Материалы 48-й Международной Научной Студенческой Конференции “Студент и научно-технический прогресс”, Математика. Новосибирск. 10-14 апреля 2010 г. Новосибирск: НГУ. – 2010. – С. 133.

27. Гусев, О. И. Численное моделирование распространения длинных поверхностных волн по вращающейся сфере в рамках полной нелинейно-дисперсионной модели / О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов // Вычисл. технологии. – 2015. – Т. 20, № 3. – С. 3–31.
28. Гусяков, В. К. Остаточные смещения на поверхности упругого полупространства / В. К. Гусяков // Условно-корректные задачи математической физики в интерпретации геофизических. – 1978. – С. 23–51.
29. Диденкулова, И. И. Цунамиподобные явления в российских внутренних водоемах / И. И. Диденкулова, Е. Н. Пелиновский // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2009. – № 3. – С. 52–64.
30. Дорфман, А. А. Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне переменной глубины / А. А. Дорфман, Г. И. Яговдик // Числен. методы мех. сплошной среды. – 1977. – Т. 8, № 1. – С. 36–48.
31. Елецкий, С. В. Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону / С. В. Елецкий, Ю. Б. Майоров, В. В. Максимов, И. С. Нуднер, З. И. Федотова, М. Г. Хажоян, Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров // Вычисл. технологии. – 2004. – Т. 9. Спец. выпуск, часть 2. – С. 194–206.
32. Есина, Л. А. Оползневые процессы на материковом склоне северо-восточной части чёрного моря / Л. А. Есина, Ю. Д. Евсюков, А. Б. Хворощ // Вестник южного научного центра РАН. Науки о Земле. – 2011. – Т. 7, № 3. – С. 61–68.
33. Железняк, М. И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды / М. И. Железняк // Накат цунами на берег: Сб. научн. тр. – Горький, 1985. – С. 122–139.
34. Железняк, М. И. Физико-математические модели наката цунами на берег / М. И. Железняк, Е. Н. Пелиновский // Накат цунами на берег: сб. научн. тр. – Горький, 1985. – С. 8–33.
35. Загрядская, Н. Н. Воздействие длинных волн на вертикальную преграду / Н. Н. Загрядская, С. В. Иванова, Л. С. Нуднер, А. Н. Шошин // Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева: сб. научн. тр. – 1980. – Вып. 138. С. 94–101.
36. Зайцев, А. И. Моделирование распространения катастрофического цунами (26 декабря 2004 г.) в Индийском океане / А. И. Зайцев, А. А. Куркин, Б. В. Левин, Е. Н. Пелиновский, А. Ялчинер, Ю. И. Троицкая, С. А. Ермаков // Доклады РАН. – 2005. – Т. 402, № 3. – С. 388–392.
37. Казанцев, Р. А. Гигантский оползень на дне Черного моря / Р. А. Казанцев, В. В. Кругляков // Природа. – 1998. – № 10. – С. 86–87.

38. Компаниец, Л. А. О численном моделировании волновых движений, вызванных перемещениями дна бассейна, по нелинейно-дисперсионным моделям / Л. А. Компаниец // Вычисл. технологии. – 1997. – Т. 2, № 2. – С. 78–83.
39. Компаниец, Л. А. О численных алгоритмах для нелинейно-дисперсионных моделей мелкой воды в двумерном случае / Л. А. Компаниец // Вычисл. технологии. – 1996. – Т. 1, № 3. – С. 44–56.
40. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
41. Ляпидевский, В. Ю. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 420 с.
42. Манойлин, С. В. Некоторые экспериментально-теоретические методы определения воздействия волн цунами на гидротехнические сооружения и акватории морских портов / С. В. Манойлин. – Красноярск: Изд-во СО АН СССР, 1989. – 45 с.
43. Никонов, А. А. Цунами в Одессе: природный или рукотворный феномен? / А. А. Никонов, Л. Д. Флейфель // Природа. – 2015. – № 4. – С. 36–43.
44. Носов, М. А. Остаточные гидродинамические поля при генерации цунами землетрясением / М. А. Носов, Г. Н. Нурисламова, А. В. Мошенцева, С. В. Колесов // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2014. – Т. 50, № 5. – С. 591–603.
45. Овсянников Л. В. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1985. – 318 с.
46. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами / Е. Н. Пелиновский. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. – 276 с.
47. Пелиновский Е. Н. Нелинейная динамика волн цунами / Е. Н. Пелиновский. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. – 226 с.
48. Пустовитенко, Б. Г. Сейсмичность черноморской впадины / Б. Г. Пустовитенко, В. Е. Кульчицкий // Геофизический журнал. – 1991. – Т. 13, № 1. – С. 14–19.
49. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений: учебное пособие / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 532 с.
50. Соловьева, О. Н. Цунами в Черном море: исторические события, сейсмические источники и закономерности распространения / О. Н. Соловьева, С. Ф. Доценко, И. П. Кузин, Б. В. Левин // Океанология. – 2004. – Т. 5. – С. 679–685.

51. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики: учебное пособие / А. Н. Тихонов, Самарский А. А. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
52. Федотова, З. И. О свойствах разностных схем для длинноволновых приближений уравнений гидродинамики / З. И. Федотова // Вычисл. технологии. – 1993. – Т. 2, № 7. – С. 237–249.
53. Федотова, З. И. О применении разностной схемы Мак-Кормака для задач длинноволновой гидродинамики / З. И. Федотова // Вычисл. технологии. – 2006. – Т. 11, № 5, часть 2. – С. 53–63.
54. Федотова, З. И. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений / З. И. Федотова, Г. С. Хакимянов // Вычисл. технологии. – 2012. – Т. 17, № 5. – С. 94–108.
55. Федотова, З. И. История развития и анализ численных методов решения нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики / З. И. Федотова, Г. С. Хакимянов, О. И. Гусев // Вычисл. технологии. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 120–156.
56. Федотова, З. И. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне / З. И. Федотова, Г. С. Хакимянов // Вычисл. технологии. – 2008. – Т. 13, № 4. – С. 114–126.
57. Федотова, З. И. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на вращающейся сфере / З. И. Федотова, Г. С. Хакимянов // Вычисл. технологии. – 2010. – Т. 15, № 3. – С. 135–145.
58. Федотова, З. И. Моделирование поверхностных волн, порожденных оползнями / З. И. Федотова, Л. Б. Чубаров, Ю. И. Шокин // Вычисл. технологии. – 2004. – Т. 9, № 6. – С. 89–96.
59. Хажоян, М. Г. Численное моделирование взаимодействия поверхностных волн с подводными препятствиями / М. Г. Хажоян, Г. С. Хакимянов // Вычисл. технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 108–123.
60. Хажоян, М. Г. Численное моделирование поверхностных волн над подвижным дном / М. Г. Хажоян // Вычисл. технологии. – 2007. – Т. 12, № 4. – С. 96–105.
61. Хакимянов, Г. С. Моделирование дисперсионных волн, генерируемых подводным оползнем в ограниченном водохранилище / Г. С. Хакимянов, О. И. Гусев, Н. Ю. Шокина, В. А. Кутергин // Сборник тезисов конференции “Математические и информационные технологии, МПТ-2013”. 5-9 сентября 2013 г., Врнячка Баня, Сербия; 9-14 сентября 2013 г., Будва, Черногория. – 2013. – С. 99–100.
62. Хакимянов, Г. С. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г. С. Хакимянов, Ю. И. Шокин, В. Б. Баряхнин, Н. Ю. Шокина. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. – 394 с.
63. Хакимянов, Г. С. Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды / Г. С. Хакимянов, Н. Ю. Шокина // Вычисл. технологии. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 54–79.

64. Хакимзянов, Г. С. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения / Г. С. Хакимзянов, Н. Ю. Шокина // Вычисл. технологии. – 2012. – Т. 17, № 2. – С. 78–98.
65. Хакимзянов, Г. С. Численное моделирование поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному дну / Г. С. Хакимзянов, Н. Ю. Шокина // Вычисл. технологии. – 2010. – Т. 15, № 1. – С. 105–119.
66. Черевко, А. А. Уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 1. Вывод и общие свойства / А. А. Черевко, А. П. Чупахин // ПМТФ. – 2009. – Т. 50, № 2. – С. 24–36.
67. Чубаров, Л. Б. Программа расчета характеристик волн цунами сейсмического происхождения MGC / Л. Б. Чубаров, В. В. Бабайлов, С. А. Бейзель. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011614598 от 09.06.2011 г.
68. Шокин, Ю. И. Численное исследование дисперсионных волн, возникающих при движении подводного оползня / Ю. И. Шокин, С. А. Бейзель, О. И. Гусев, Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, Н. Ю. Шокина // Вестник ЮУрГУ. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 121–133.
69. Шокин, Ю. И. Моделирование генерации цунами движением оползня с учетом вертикальной структуры течения / Ю. И. Шокин, З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, С. А. Бейзель // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф. – труды VIII Всероссийской конференции. – Кемерово: Ин-т угля и углехимии СО РАН, – 2005. – С. 3–27.
70. Шокин, Ю. И. Иерархия моделей гидродинамики длинных поверхностных волн / Ю. И. Шокин, З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов // ДАН. – 2015. – Т. 462, № 2. – С. 168–172.
71. Шокин, Ю. И. Схема предиктор-корректор, сохраняющая гидравлический скачок / Ю. И. Шокин, Г. С. Хакимзянов // Вычисл. технологии. – 2006. – Т. 11. Спец. выпуск, часть 2. – С. 92–99.
72. Шокин, Ю. И. О подходах к численному моделированию оползневого механизма генерации волн цунами / Ю. И. Шокин, Л. Б. Чубаров // Вычисл. технологии. – 2006. – Т. 11. Специальный выпуск, часть 2. – С. 100–111.
73. Шокин, Ю. И. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике / Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. – 1985. – 364 с.
74. Assier-Rzadkiewicz, S. Numerical modeling of a landslide-generated tsunami: the 1979 Nice event / S. Assier-Rzadkiewicz, P. Heinrich, P. C. Sabatier, B. Savoye, J. F. Bourillet // Pure Appl. Geophys. – 2000. – Vol. 157. – P. 1707–1727.

75. Barakhnin, V. B. On the algorithm for one nonlinear dispersive shallow-water model / V. B. Barakhnin, G. S. Khakimzyanov // *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 1997. – Vol. 12, No. 4. – P. 293–317.
76. Bardet, J. P. Landslide tsunamis: recent findings and research directions / J. P. Bardet, C. E. Synolakis, H. L. Davies, F. Imamura, E. A. Okal // *Pure Appl. Geophys.* – 2003. – Vol. 160. – P. 1793–1809.
77. Castro, M. J. IFCP Riemann solver: application to tsunami modelling using GPUs / M. J. Castro, M. de la Asuncion, J. Macias, C. Pares, E. D. Fernandez-Nieto, J. M. Gonzalez-Vida, T. Morales // *Numerical Methods for Hyperbolic Equations: Theory and Applications. Int. Conf. to Honour Prof. E. F. Toro.* CRC Press. – 2013. – P. 237–244.
78. Beisel, S. A. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir / S. A. Beisel, L. B. Chubarov, D. Dutykh, G. S. Khakimzyanov, N. Yu. Shokina // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2012. – Vol. 27, No. 6. – P. 539–558.
79. Beisel, S. A. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide moving over an uneven slope / S. A. Beisel, L. B. Chubarov, G. S. Khakimzyanov // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2011. – Vol. 26, No. 1. – P. 17–38.
80. Bona J. L. Long wave approximations for water waves / J. L. Bona, T. Colin, D. Lannes // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 2005. – Vol. 178. – P. 373–410.
81. Bona, J. L. A model for the two-way propagation of water waves in a channel / J. L. Bona, R. Smith // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* – 1976. – Vol. 79. – P. 167–182.
82. Bonneton, P. A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green–Naghdi model / P. Bonneton, F. Chazel, D. Lannes, F. Marche, M. Tissier // *J. Comput. Phys.* – 2011. – Vol. 230. – P. 1479–1498.
83. Briggs, M. J. Laboratory experiments of tsunami runup on circular island / M. J. Briggs, C. E. Synolakis, G. S. Harkins, D. R. Green // *Pure and Appl. Geoph.* – 1995. – Vol. 144, No. 3/4. – P. 569–593.
84. Bristeau, M. O. Numerical simulations of a non-hydrostatic shallow water model / M. O. Bristeau, N. Goutal, J. Sainte-Marie // *Computers & Fluids.* – 2011. – Vol. 47, No. 1. – P. 51–64.
85. Chubarov, L. B. Tsunamis and earthquake mechanisms in the island arc regions / L. B. Chubarov, V. K. Gusiakov // *Science of Tsunami Hazards.* – 1985. – Vol. 3, No. 1. – P. 3–21.
86. Chubarov, L. B. Simulation of surface waves generation by an underwater landslide / L. B. Chubarov, S. V. Eletsikij, Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2005. – Vol. 20, No. 5. – P. 425–437.

87. Chubarov, L. B. Investigation of computational models of long surface waves in the problem of interaction of a solitary wave with a conic island / L. B. Chubarov, Z. I. Fedotova, D. A. Shkuropatskii // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 1998. – Vol. 13, No. 4. – P. 289–306.
88. Chubarov, L. B. The numerical modelling of long wave propagation in the framework of non-linear dispersion models / L. B. Chubarov, Yu. I. Shokin // *Computers and Fluids.* – 1987. – Vol. 15, No. 3. – P. 229–249.
89. Cooker, M. J. The interaction between a solitary wave and a submerged semicircular cylinder / M. J. Cooker, D. H. Peregrine, C. Vidal, J. W. Dold // *J. Fluid Mech.* – 1990. – Vol. 215. – P. 1–22.
90. Dalrymple, R. A. Tsunamis and challenges for accurate modeling / R. A. Dalrymple, S. T. Grilli, J. T. Kirby, P. Watts // *Oceanography.* – 2006. – Vol. 19, No. 1. – P. 142–151.
91. Dao, M. H. Tsunami propagation modelling — a sensitivity study / M. H. Dao, P. Tkalich // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* – 2007. – Vol. 7. P. 741–754.
92. Dias, F. On the fully-nonlinear shallow-water generalized Serre equations / F. Dias, P. Milewski // *Phys. Lett. A.* – 2010. – Vol. 374, No. 8. – P. 1049–1053.
93. Dutykh, D. Finite volume schemes for dispersive wave propagation and runup / D. Dutykh, T. Katsaounis, D. Mitsotakis // *J. Comput. Phys.* – 2011. – Vol. 3. – P. 3035–3061.
94. Eilbek, J. C. Numerical study of the regularized long-wave equations, I. Numerical methods / J. C. Eilbek, G. R. McGuire // *J. Comput. Phys.* – 1975. – Vol. 19, No. 1. – P. 43–57.
95. Enet, F. Experimental study of tsunami generation by three-dimensional rigid underwater landslides / F. Enet, S. T. Grilli // *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.* – 2007. – Vol. 133, No. 6. – P. 442–454.
96. Ertekin, R. C. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width / R. C. Ertekin, W. C. Webster, J. V. Wehausen // *J. Fluid Mech.* – 1986. – Vol. 169. – P. 275–292.
97. Fedotova, Z. I. Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2010. – Vol. 25, No. 1. – P. 15–26.
98. Fedotova, Z. I. Energy equation for certain approximate models of long-wave hydrodynamics / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov, D. Dutykh // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2014. – Vol. 29, No. 5. – P. 167–178.
99. Fedotova, Z. I. Shallow water equations on a movable bottom / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2009. – Vol. 24, No. 1. – P. 31–41.



100. Fedotova, Z. I. Full nonlinear dispersion model of shallow water equations on a rotating sphere / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 2011. – Vol. 52, No. 6. – P. 865–876.
101. Fedotova, Z. I. Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere and conservation laws / Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 2014. – Vol. 55, No. 3. – P. 404–416.
102. Fedotova, Z. I. On the numerical modelling of the dynamics of weakly nonlinear waves with dispersion / Z. I. Fedotova, V. Yu. Pashkova // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 1995. – Vol. 10, No. 5. – P. 407–424.
103. Fedotova, Z. I. Methods of construction and the analysis of difference schemes for nonlinear dispersive models of wave hydrodynamics / Z. I. Fedotova, V. Yu. Pashkova // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 1997. – Vol. 12, No. 2. – P. 127–149.
104. Fernandez-Nieto, E. D. A new Savage-Hutter type model for submarine avalanches and generated tsunami / E. D. Fernandez-Nieto, F. Bouchut, D. Bresh, M. J. Castro, A. Mangeney // *J. Comput. Phys.* – 2008. – Vol. 227, No. 16. – P. 7720–7754.
105. Glimsdal, S. Propagation of the Dec. 26, 2004, Indian Ocean Tsunami: Effects of dispersion and source characteristics / S. Glimsdal, G. K. Pedersen, K. Atakan, C. B. Harbitz, H. P. Langtangen, F. Lovholt // *Int. J. Fluid Mech. Res.* – 2006. – Vol. 33, No. 1. – P. 15–43.
106. Glimsdal, S. Dispersion of tsunamis: does it really matter? / S. Glimsdal, G. K. Pedersen, C. B. Harbitz, F. Lovholt // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* – 2013. – Vol. 13. – P. 1507–1526.
107. Green, A. E. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth / A. E. Green, P. M. Naghdi // *J. Fluid Mech.* – 1976. – Vol. 78, part 2. – P. 237–246.
108. Grilli, S. T. Modeling of the Tohoku-oki 2011 tsunami generation, far-field and coastal impact: a mixed co-seismic and smf source / S. T. Grilli, J. C. Harris, J. T. Kirby, F. Shi, G. Ma, T. Masterlark, D. Tappin, T. Tajalli Bakhsh // *Proceedings of 7th International Conference on Coastal Dynamics, June 24-28, 2013, Arcachon Convention Centre, France.* – P. 749–758.
109. Grilli, S. T. Numerical simulation of the 2011 Tohoku tsunami based on a new transient FEM co-seismic source: comparison to far- and near-field observations / S. T. Grilli, J. C. Harris, T. Tajalli Bakhsh, T. L. Masterlark, C. Kyriakopoulos, J. T. Kirby, F. Shi // *Pure Appl. Geophys.* – 2013. – Vol. 170, No 6–8. – P. 1333–1359.
110. Grilli, S. T. Development of a 3D numerical wave tank for modeling tsunami generation by underwater landslides / S. T. Grilli, S. Vogelmann, P. Watts // *Engrg. Anal. Boundary Elements.* – 2002. – Vol. 26. – P. 301–313.

111. Grilli, S. T. Modeling of Waves Generated by a Moving Submerged Body: Applications to Underwater Landslides / S. T. Grilli, P. Watts // *Eng. Anal. Boundary Elem.* – 1999. – Vol. 23, No. 8. – P. 645–656.
112. Grilli, S. T. Source constraints and model simulation of the December 26, 2004 Indian Ocean tsunami / S. T. Grilli, M. Ioualalen, J. Asavanant, F. Shi, T. Kirby, P. Watts // *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.* – 2007. – Vol. 133, No. 6. – P. 414–428.
113. Grilli, S. T. Tsunami generation by submarine mass failure. I : Modeling, experimental validation, and sensitivity analyses / S. T. Grilli, P. Watts // *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.* – 2005. – Vol. 131, No. 6. – P. 283–297.
114. Grue, J. Formation of undular bores and solitary waves in the Strait of Malacca caused by the 26 December 2004 Indian Ocean tsunami / J. Grue, E. N. Pelinovsky, D. Fructus, T. Talipova, C. Kharif // *J. Geophys. Res.* – 2008. – Vol. 113. – C05008.
115. Gusev, O. I. Simulation of tsunami wave generation by submarine landslide using the fully nonlinear dispersive equations / O. I. Gusev // Abstracts of the International conference “Advanced mathematics, computations and applications – 2014”. Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia. June 8–11, 2014. Novosibirsk: Academizdat. – 2014. – P. 92.
116. Gusev, O. I. Tsunami dispersion sensitivity to seismic source parameters / O. I. Gusev, S. A. Beisel // *Science of Tsunami Hazards.* – 2016. – Vol. 35, No. 2. – P. 84–105.
117. Gusakov, V. K. Some approaches to local modelling of tsunami wave runup on a coast / V. K. Gusakov, Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov, L. B. Chubarov, Yu. I. Shokin // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2008. – Vol. 23, No. 6. – P. 551–565.
118. Harbitz, C. B. Mechanisms of Tsunami Generation by Submarine Landslides — a Short Review / C. B. Harbitz, F. Lovholt, G.K. Pedersen, S. Glimsdal, D. G. Masson // *Norwegian Journal of Geology.* – 2006. – Vol. 86, No. 3. – P. 255–264.
119. Harbitz, C. B. Model simulations of tsunamis generated by the Storegga Slides / C. B. Harbitz // *Marine Geology.* – 1992. – Vol. 105. – P. 1–21.
120. Heinrich, P. Numerical modeling of tsunami generation and propagation from submarine slumps: the 1998 Papua New Guinea event / P. Heinrich, A. Piatanesi, H. Hebert // *Geophys. J. Intern.* – 2001. – Vol. 145. P. 97–111.
121. Heinrich, P. Modeling of the February 1996 Peruvian tsunami / P. Heinrich, F. Schindele, S. Guibourg, P. Ihmle // *Geophys. Res. Lett.* – 1998. – Vol. 25, No. 14. – P. 2687–2690.
122. Horillo, J. Wave dispersion study in the Indian Ocean-tsunami of December 26, 2004 / J. Horillo, Z. Kowalik, Y. Shigihara // *Marine Geodesy.* – 2006. – Vol. 29. – P. 149–166.

123. Horrillo, J. Performance benchmarking tsunami models for NTHMP's inundation mapping activities / J. Horrillo, S. T. Grilli, D. Nicolsky, V. Roeber, J. Zhang // *Pure Appl. Geophys.* – 2015. – Vol. 172, No. 3–4. – P. 869–884.
124. Imamura, F. Simulation of wave-packet propagation along sloping beach by TUNAMI-code / F. Imamura // *Long-wave Runup Models*, eds. H. Yeh, P. Liu and C. Synolakis. – Singapore: World Scientific, 1996. – P. 231–241.
125. Ioualalen, M. Landslide tsunami vulnerability in the Ligurian Sea: case study of the 1979 October 16 Nice international airport submarine landslide and of identified geological mass failures / M. Ioualalen, S. Migeon, O. Sardoux // *Geophys. J. Intern.* – 2010. – Vol. 181. – P. 724–740.
126. Jiang, L. The coupling of a submarine slide and the surface waves which it generates / L. Jiang, P. H. LeBlond // *J. Geophys. Res.* – 1992. – Vol. 97, No. C8. – P. 12731–12744.
127. Khakimzyanov, G. S. Modelling of tsunami generated by submarine landslides in the Black Sea / G. S. Khakimzyanov, O. I. Gusev, S. A. Beisel, L. B. Chubarov, N. Yu. Shokina // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2015. – Vol. 30, No. 4. – P. 227–237.
128. Khakimzyanov, G. S. A finite-difference method for calculating surface waves in coastal zone / G. S. Khakimzyanov, Yu. I. Shokin. // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 1993. – Vol. 8, No. 6. – P. 461–481.
129. Khakimzyanov, G. S. Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir / G. S. Khakimzyanov, N. Yu. Shokina // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 2012. – Vol. 53, No. 5. – P. 690–699.
130. Kim, D.-H. A depth-integrated model for weakly dispersive, turbulent, and rotational fluid flows / D.-H. Kim, P. J. Lynnet, S. Sokolofsky // *Ocean Modelling.* – 2009. – Vol. 27. – P. 198–214.
131. Kirby, J. T. Dispersive tsunami waves in the ocean: Model equations and sensitivity to dispersion and Coriolis effects / J. T. Kirby, F. Shi, B. Tehranirad, J. C. Harris, S. T. Grilli // *Ocean Modelling.* – 2013. – Vol. 62. – P. 39–55.
132. Kompaniets, L. A. Analysis of difference algorithms for nonlinear dispersive shallow water models / L.A. Kompaniets // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 1996. – Vol. 11, No. 3. – P. 205–222.
133. Li Y. A. Hamiltonian structure and linear stability of solitary waves of the Green- Naghdi equations / Y. A. Li // *J. Nonlin. Math. Phys.* – 2002. – Vol. 9, No. 1. – P. 99–105.
134. Lindstrom, E. K. Experiments on slide generated waves in a 1:500 scale fjord model / E. K. Lindstrom, G. K. Pedersen, A. Jensen, S. Glimsdal // *Coastal Eng.* – 2014. – Vol. 92. – P. 12–23.

135. Liu, P. L.-F. Runup of solitary waves on a circular island / P. L.-F. Liu, Y.-S. Cho., M. J. Briggs, U. Kanoglu, C. E. Synolakis // *J. Fluid Mech.* – 1995. – Vol. 302. – P. 259–285.
136. Liu, P. L.-F. Runup and rundown generated by three-dimensional sliding masses / P. L.-F. Liu, T.-R. Wu, F. Raichlen, C. E. Synolakis, J. Borrero // *J. Fluid Mech.* – 2005. – Vol. 536. – P. 107–144.
137. Lovholt, F. Simulating tsunami propagation in fjords with long-wave models / F. Lovholt, S. Glimsdal, P. J. Lynett, G. K. Pedersen // *Nat. Hazards. Earth Syst. Sci.* – 2015. – Vol. 15. – P. 657–669.
138. Lovholt, F. Oceanic propagation of a potential tsunami from the La Palma Island / F. Lovholt, G. K. Pedersen, G. Gisler // *J. Geophys. Res.* – 2008. – Vol. 113. – C09026.
139. Lovholt, F. Instabilities of Boussinesq models in non-uniform depth / F. Lovholt, G. K. Pedersen // *International Journal for Numerical Methods in Fluids.* – 2009. – Vol. 61, No. 6. – P. 606–637.
140. Lovholt, F. Coupling of dispersive tsunami propagation and shallow water coastal response / F. Lovholt, G. K. Pedersen, S. Glimsdal // *Open Oceanography Journal.* – 2010. – Vol. 4. – P. 71–82.
141. Lynett, P. J. A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up / P. J. Lynett, P. L.-F. Liu // *Proc. Royal Society of London. A.* – 2002. – Vol. 458. – P. 2885–2910.
142. Lynett, P. J. A numerical study of the run-up generated by three-dimensional landslides / P. J. Lynett, P. L.-F. Liu // *J. Geophys. Res.* – 2005. – Vol. 110. – C03006.
143. Madsen, P. A. Run-up of tsunamis and long waves in terms of surf-similarity / P. A. Madsen, D. R. Fuhrman // *Coast. Eng.* – 2008. – Vol. 55. – P. 209–223.
144. Madsen, P. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics / P. Madsen, O. Sorensen // *Coast. Eng.* – 1992. – Vol. 18. – P. 183–204.
145. Madsen, P. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2. A slowly-varying bathymetry / P. Madsen, O. Sorensen // *Coast. Eng.* – 1992. – Vol. 18. – P. 183–204.
146. Mirchina, N. R. Nonlinear and dispersive effects for tsunami waves in the open ocean / N. R. Mirchina, E. N. Pelinovsky // *Int. J. Tsunami Soc.* – 1982. – Vol. 2, No. 4. D1 – D9.
147. Murty, T. S. Numerical modelling concepts for tsunami warning systems / T. S. Murty, A. D. Rao, N. Nirupama, I. Nistor // *Current Science.* – 2006. – Vol. 90, No 8. – P. 1073–1081.
148. Nwogu, O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation / O. Nwogu // *J. Waterw. Port Coastal Ocean Eng.* – 1993. – Vol. 119. – No. 6. – P. 618–638.
149. Pelinovsky, E. Simplified model of tsunami generation by submarine landslides / E. Pelinovsky, A. Poplavsky // *J. Phys. Chem. Earth.* – 1996. – Vol. 21, No 12. – P. 13–17.

150. Peregrine, D. H. Calculations of the development of an undular bore / D. H. Peregrine // *J. Fluid Mech.* – 1966. – Vol. 25, pt 2. – P. 321–331.
151. Peregrine, D. H. Long waves on a beach / D. H. Peregrine // *J. Fluid Mech.* – 1967. – Vol. 27, pt 4. – P. 815–827.
152. Rangelov, B. The nonseismic tsunami observed in the Bulgarian Black Sea on 7 May 2007: was it due to a submarine landslide? / B. Rangelov, S. Tinti, G. Pagnoni, R. Tonini, F. Zaniboni, A. Armigliato // *Geophys. Res. Letters.* – 2008. – Vol. 35. – L18613.
153. Savage, S. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline / S. Savage, K. Hutter // *J. Fluid Mech.* – 1989. – Vol. 199. – P. 177–215.
154. Seabra-Santos, F. J. Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle / F. J. Seabra-Santos, D. P. Renouard, A. M. Temperville // *J. Fluid Mech.* – 1987. – Vol. 176. – P. 117–134.
155. Shi, F. A high-order adaptive time-stepping TVD solver for Boussinesq modelling of breaking waves and coastal inundation / F. Shi, J. T. Kirby, J. C. Harris, J. D. Geiman, S. T. Grilli // *Ocean Modelling.* – 2012. – Vol. 43–44. – P. 36–51.
156. Tsunami benchmark results for spherical coordinate version of FUNWAVE-TVD (Version 2.0): research report No. CACR-12-02 / F. Shi, J. T. Kirby, B. Tehranirad. – Center for Applied Coastal Research, University of Delaware, 2012. – 39 p.
157. Shokin, Yu. I. Modelling surfaces waves generated by a moving landslide with allowance for vertical flow structure/ Yu. I. Shokin, Z. I. Fedotova, G. S. Khakimzyanov, L. B. Chubarov, S. A. Beisel // *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2007. – Vol. 22, No. 1. – P. 63–85.
158. Shokin, Yu. I. Mathematical modeling in application to regional tsunami warning systems operations / Yu. I. Shokin, V. V. Babailov, S. A. Beisel, L. B. Chubarov, S. V. Eletsy, Z. I. Fedotova, V. K. Gusakov // *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Computational Science and High Performance Computing III.* – 2008. – Vol. 101. – P. 52–69.
159. Shokina, N. Yu. To the problem of construction of difference schemes on movable grids / N. Yu. Shokina // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* – 2012. – Vol. 27, No. 6. – P. 603–626.
160. Synolakis, C. E. The slump origin of the 1998 Papua New Guinea tsunami / C. E. Synolakis, J.-P. Bardet, J. C. Borrero, H. L. Davies, E. A. Okal, E. A. Silver, S. Sweet, D. R. Tappin // *Proc. R. Soc. A.* – 2002. – Vol. 458. – P. 763–789.
161. Synolakis, C. E. Validation and verification of tsunami numerical models / C. E. Synolakis, E. N. Bernard, V. V. Titov, U. Kanoglu, F. I. Gonzalez // *Pure Appl. Geophys.* – 2008. – Vol. 165. – P. 2197–2228.

162. Tang, L. Direct energy estimation of the 2011 Japan tsunami using deep-ocean pressure measurements / L. Tang, V. V. Titov, E. Bernard, Y. Wei, C. Chamberlin, J. C. Newman, H. Mofjeld, D. Arcas, M. Eble, C. Moore, B. Uslu, C. Pells, M. C. Spillane, L. M. Wright, E. Gica // *J. Geophys. Res.* – 2012. – Vol. 117. – C08008.
163. Tappin, D. R. The Papua New Guinea tsunami of 17 July 1998: anatomy of a catastrophic event / D. R. Tappin, P. Watts, S. T. Grilli // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* – 2008. – Vol. 8. – P. 243–266.
164. Tinti, S. A block-based theoretical model suited to gravitational sliding / S. Tinti, E. Bortolucci, C. Vannini // *Natural Hazards.* – 1997. – Vol. 16. – P. 1–28.
165. Tissier, M. A new approach to handle wave breaking in fully non-linear Boussinesq models / M. Tissier, P. Bonneton, F. Marche, F. Chazel, D. Lannes // *Coastal Eng.* – 2012. – Vol. 67. – P. 54–66.
166. Titov, V. V. Numerical modeling of long wave runup using VTCS-3 / V. V. Titov, C. E. Synolakis // *Long-wave Runup Models*, eds. H. Yeh, P. Liu and C. Synolakis. – Singapore: World Scientific. – 1996. – P. 242–248.
167. Vilibic I. Possible atmospheric origin of the 7 May 2007 western Black Sea shelf tsunami event / I. Vilibic, J. Sepic, B. Rangelov, N. S. Mahovic, S. Tinti // *J. Geophys. Res.* – 2010. – Vol. 115. – C07006.
168. Ward, S. N. The 1963 Landslide and Flood at Vaiont Reservoir Italy. A tsunami ball simulation / S. N. Ward, S. Day // *Ital. J. Geosci.* – 2011. – Vol. 130, No. 1. – P. 16–26.
169. Watts, P. Underwater landslide shape, motion, deformation, and tsunami generation / P. Watts, S. T. Grilli // *Proc. of the 13th Intern. Offshore and Polar Eng. Conf., Honolulu, Hawaii, 2003.* –Vol. 3. – P. 364–371.
170. Watts, P. Landslide tsunami case studies using a Boussinesq model and a fully nonlinear tsunami generation model / P. Watts, S. T. Grilli, J. T. Kirby, G. J. Fryer, D. R. Tappin // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* – 2003. – Vol. 3, No. 5. – P. 391–402.
171. Watts, P. Comparing model simulations of three benchmark tsunami generation cases / P. Watts, F. Imamura, S. T. Grilli // *Science of Tsunami Hazards.* – 2000. – Vol. 18, No. 2. – P. 107–123.
172. Wei, G. A. fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves / G. A. Wei, J. T. Kirby, S. T. Grilli, R. Subramanya // *J. Fluid. Mech.* – 1995. – Vol. 294. – P. 71–92.
173. Witting, J. M. A unified model for the evolution of nonlinear water waves / J. M. Witting // *J. Comput. Phys.* – 1984. –Vol. 56. – P. 203–236.

174. Xia, D. Nonlinear hydroelastic response of a two-dimensional mat-type VLFS by the Green-Naghdi theory / D. Xia, R. C. Ertekin, J. W. Kim // Proceedings of 23rd International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, June 20-25, 2004, Vancouver, British Columbia, Canada. – Vol. 130, No. 1. – P. 16–26.
175. Yalciner, A. Tsunamis in the Black Sea: comparison of the historical, instrumental and numerical data / A. Yalciner, E. Pelinovsky, T. Talipova, A. Kurkin, A. Kozelkov, A. Zaitsev. // J. Geophys. Research. – 2004. – Vol. 109. – C12023.
176. Yamazaki, Y. Depth-integrated, non-hydrostatic model for wave breaking and run-up / Y. Yamazaki, Z. Kowalik, K. F. Cheung // Int. J. Numer. Methods Fluids. – 2008. – Vol. 61, No. 5. – P. 473–497.

# Список рисунков

- 1.1 Графики функции (1.72) (*a*) и точного решения (*b*) полных НЛД-уравнений (штриховые линии) и слабо нелинейных уравнений NLDB-модели (сплошные линии) при  $a_0/h_0 = 0.1$  (1); 0.2 (2); 0.4 (3) . . . . . 33
- 1.2 Абсолютные значений фаз в зависимости от  $\xi$ : 1 – в линеаризованной модели потенциальных течений, 2 – в NLD-модели, 3 – в КРС (1.144)–(1.149) . . . . . 55
- 1.3 Профили свободной поверхности: 1 — в начальный момент времени; 2, 3 — при  $t = 250$  с; 2 — аналитическое решение (1.27)–(1.29), 3 — численное решение при  $N = 400$  . . . . . 58
- 1.4 Профили свободной поверхности в момент времени  $t = 250$  с при начальных данных для аналитического решения NLD-модели (*a*) и NLDB-модели (*b*): 1 – численное решение по NLD-модели, 2 – по NLDB-модели . . . . . 59
- 1.5 Профили свободной поверхности после отката:  $a_0 = 10$  м (*a*);  $a_0 = 50$  м (*b*) . . . . . 59
- 1.6 Зависимость относительного максимального заплеска на стенке от начальной амплитуды уединенной волны: 1 – NLD-модель настоящей работы; 2 – SW-модель; экспериментальные данные [35] (3) и [42] (4); 5 – НЛД-модель из работы [33] . . . . . 60
- 1.7 Движение оползня по неровному дну параболической формы. График функции  $x = x(t)$  (*a*) и график зависимости числа Фруда  $Fr$  от координаты  $x(t)$  (*b*) при значениях параметров (1.190) (1); при  $b = 50$  м (2); при  $T = 1$  м,  $\theta_* = 10^\circ$  (3) . . . . . 64
- 1.8 Мареограммы на правом берегу водохранилища, полученные при  $b = 200$  м (*a*) и  $b = 50$  м (*b*) в рамках NLD-модели (1), модели потенциальных течений жидкости (2) и бездисперсионной модели мелкой воды (3) . . . . . 65
- 1.9 Профили свободной границы в момент времени  $t = 60$  с, полученные при  $T = 10$  м (*a*) и  $T = 20$  м (*b*) в рамках NLD-модели (1) и NLDB-модели (2) . . . . . 67
- 1.10 Мареограммы на правом берегу водохранилища, полученные при  $T = 10$  м,  $\theta_* = 5^\circ$  (*a*) и  $T = 1$  м,  $\theta_* = 10^\circ$  (*b*) в рамках NLD-модели (1) и NLDD-модели (2) . . . . . 68
- 1.11 Мареограммы в точках  $x = 0.9$  м (*a*) и  $x = 1.9$  м (*b*), полученные в рамках NLD-модели (1), модели потенциальных течений жидкости (2), модели мелкой воды (3) и в лабораторных экспериментах [31] (4) . . . . . 70
- 1.12 Мареограммы в точке  $x = 1.775$  м. *a*: NLD-модель (1), модель потенциальных течений жидкости (2), модель мелкой воды (3), лабораторный эксперимент [113] (4); *b*: NLD-модель (1), NLDB-модель (2), NLDD-модель (3) . . . . . 71



1.13	Мареограммы $M_6$ , полученные в расчётах по НЛД-моделям (пунктир) в сравнении с расчётом [69] по полной гидродинамической модели (сплошная линия): $a$ , $b$ и $v$ — расчёты из [69, 72, 157] по однослойной и двухслойной модели Лью-Лайнетта и модели Перегринна соответственно, $z$ — расчёт по настоящей NLD-модели . . . . .	72
2.1	Область течения $\Omega$ с границей $\Gamma$ , состоящей из ломаных, звенья которых параллельны осям координат ( $a$ ), и типы узлов расчетной сетки ( $b$ ) . . . . .	82
2.2	Контур интегрирования и шаблон разностного уравнения для $\varphi$ во внутреннем узле ( $a$ ); граничном узле типа 2 ( $b$ ) и 11 ( $v$ ) . . . . .	84
2.3	Обозначения узлов и вспомогательных точек в шаблоне . . . . .	92
2.4	$a$ — сечение $y = y_0$ начальной свободной поверхности при $w = 10^{-5} \text{ м}^{-2}$ (1); $2.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-2}$ (2); $5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-2}$ (3); $b$ — свободная поверхность в момент времени $t = 140$ с в расчете по NLD-модели при $w = 10^{-5} \text{ м}^{-2}$ . . . . .	97
2.5	Мареограммы в точке (0 км, 5 км), полученные в расчетах по NLD- и SW-моделям для разной эффективной ширины начального возмущения: $w = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-2}$ — ( $a$ ), $w = 10^{-5} \text{ м}^{-2}$ — ( $b$ ), $w = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-2}$ — ( $v$ ). Сплошные линии — результаты расчетов по NLD-модели, пунктирные — SW-модели мелкой воды . . . . .	97
2.6	Записи первого ( $a$ ) и второго ( $b$ ) мареографов при $d = 0.061$ м: 1 — в расчете по NLD-модели; 2 — в эксперименте; 3 — в расчете по SW-модели . . . . .	101
2.7	Записи третьего мареографа при $d = 0.061$ м ( $a$ ) и первого при $d = 0.189$ м ( $b$ ): 1 — в расчетах по NLD-модели; 2 — в экспериментах . . . . .	101
2.8	Расчитанные мареограммы на стенках слева ( $a$ ) и справа ( $b$ ) от центра оползня: 1 — $b_y = 400$ м; 2 — $b_y = 800$ м; 3 — одномерный расчет . . . . .	103
2.9	Максимальная свободная поверхность за все время расчета при $b_y = 400$ м ( $a$ ) и $b_y = 800$ м ( $b$ ): 1 — на левой стенке; 2 — на правой стенке . . . . .	104
2.10	Схема области решения ( $a$ ) с расположенным в ней препятствием ( $b$ ) в виде кругового цилиндра, установленного на усеченный конус; $v$ — аппроксимация границы сечения цилиндрического препятствия с помощью ломаной . . . . .	105
2.11	Мареограммы, измеренные волномерами $B_6$ ( $a$ ), $B_9$ ( $b$ ), $B_{16}$ ( $v$ ), $B_{22}$ ( $z$ ) в эксперименте [83] (маркеры) и в расчетах по NLD-модели (сплошные линии) для амплитуды набегающей волны $a_0 = 1.44$ см . . . . .	105
2.12	Мареограммы, измеренные волномерами $B_6$ ( $a$ ), $B_9$ ( $b$ ), $B_{16}$ ( $v$ ), $B_{22}$ ( $z$ ) в эксперименте [83] (маркеры) и в расчетах по NLD-модели (сплошные линии) для амплитуды набегающей волны $a_0 = 2.9$ см . . . . .	106
2.13	Распределение максимальных высот заплесков на круговой конус в эксперименте [83] (маркеры) и на круговой цилиндр в расчетах по NLD-модели (сплошные линии) для амплитуды набегающей волны $a_0 = 1.44$ см ( $a$ ); $a_0 = 2.9$ см ( $b$ ) . . . . .	107
2.14	Сечение $x = const$ функции батиметрии в модельной акватории “корыто” . . . . .	107

- 2.15 Схема расчётной области “корыто” с расстановкой мареографов (звёздочки) и расположением идеализированных начальных возмущений (сплошные линии соответствуют контурам уровня 20 см). Пунктирные линии находятся над разрывами производной функции батиметрии . . . . . 107
- 2.16 Мареограммы  $M_1(a, z, ж)$ ,  $M_2(b, d, з)$  и  $M_3(v, e, u)$  в расчётах распространения волн в акватории “корыто” с модельными источниками с эффективной ширипротяжённостью  $W_1(a, b, v)$ ,  $W_2(z, d, e)$  и  $W_3(ж, з, u)$ . Сплошные линии — расчёты по NLD-модели, пунктирные — по SW-модели . . . . . 108
- 2.17 Форма начального возмущения свободной поверхности для источников с  $Mw = 7.2$  ( $a$ ) и  $Mw = 9.0$  ( $b, v$ ) . . . . . 109
- 2.18 Мареограммы  $M_1(a, z, ж)$ ,  $M_2(b, d, з)$  и  $M_3(v, e, u)$  в расчётах распространения волн в акватории “корыто” с реальными источниками с эффективной ширипротяжённостью  $W_1(a, b, v)$ ,  $W_2(z, d, e)$  и  $W_3(ж, з, u)$ . Сплошные линии — расчёты по NLD-модели, пунктирные — по SW-модели . . . . . 111
- 2.19 Сечения начальных свободных поверхностей по прямой  $x = 277.5$  км  $a$  и картины максимальных заплесков за всё время расчёта на стенку при  $y = 0$  км  $b$ , посчитанные в рамках NLD- и SW-моделей, при различном заглублении гипоцентра  $\hat{H}$  . . . . . 112
- 2.20  $a$  — схема фрагмента расчётной акватории с нанесенными изолиниями рельефа дна, контурами модельных оползней и траекториями их движения;  $b$  — графики скоростей  $v$  (штриховые линии) и ускорений  $a$  (сплошные линии) центров масс модельных оползней . . . . . 114
- 2.21  $a$  — распределение максимальных амплитуд волн цунами, порожденных модельным оползнем L1 и рассчитанных на 3 часа физического времени их распространения;  $b$  — распределение максимальных высот волн вдоль участка береговой линии. NLD-модель . . . . . 115
- 2.22  $a$  — свободная поверхность, рассчитанная по NLD-модели;  $b$  — сечения свободных поверхностей. Оползень L1;  $t = 2000$  s . . . . . 116
- 2.23 Расчётная область и картина распределения минимальной свободной поверхности за всё время расчёта с наиболее подходящим вариантом оползня (2.70). Чёрными и серыми линиями показаны изобаты, звёздочками — населённые пункты, в которых есть данные наблюдений максимальных и минимальных волн (данные указаны в квадратных скобках в метрах). Квадратики и крестики — исследуемые начальные положения оползня, стрелка показывает направление и начало отсчёта для дальнейшего рассмотрения заплеска на побережье. Зелёная линия соответствует траектории схода оползня (2.70) . . . . . 119
- 2.24 Минимальные и максимальные колебания свободной поверхности на побережье за всё время расчёта. Синие линии — расчёт для оползня (2.70), круги — данные наблюдений . . . . . 120

2.25	Распределение максимальных значений волн, полученных за всё время расчёта по FNLD- и NLSW-моделям (слева и справа соответственно). Расчёты для оползня с параметрами (2.70) . . . . .	121
2.26	Распределение абсолютных (слева) и относительных (справа) различий в максимальных значениях волн, полученных за всё время расчёта по NLSW- и FNLD-моделям. Расчёты для оползня с параметрами (2.70) . . . . .	121
3.1	Контурные интегрирования и шаблоны разностных уравнений для $\varphi$ во внутреннем ( $a$ ), в граничном ( $b$ ) и угловом ( $v$ ) узлах сетки . . . . .	138
3.2	Схема модельной акватории и изображения свободной поверхности (вид сверху), рассчитанные по NLD-модели для источника $W_3$ на момент времени $t = 6$ часов ( $a$ ); 23 часа ( $b$ ) . . . . .	142
3.3	Мареограммы $M_1$ ( $a-v$ ) и $M_2$ ( $z-e$ ), полученные в расчетах на основе сферической NLD-модели (1) и плановой (2) при эффективной протяженности начального возмущения $W_1$ ( $a, z$ ), $W_2$ ( $b, d$ ) и $W_3$ ( $v, e$ ) . . . . .	144
3.4	Мареограммы $M_1$ ( $a-v$ ) и $M_2$ ( $z-e$ ), полученные в расчетах на основе сферической NLD-модели с учетом силы Кориолиса (1) и без учета (2) при эффективной протяженности начального возмущения $W_1$ ( $a, z$ ), $W_2$ ( $b, d$ ) и $W_3$ ( $v, e$ ) . . . . .	145
3.5	Волновая картина в расчетах на основе NLD-модели ( $a$ ) и SW ( $b$ ). Источник $W_1$ , $t = 5$ часов . . . . .	146
3.6	Колебания свободной границы, рассчитанные по NLD (1) и SW (2) моделям для источников $W_1$ ( $a-v$ ) и $W_2$ ( $z-e$ ) и зафиксированные мареографами $M_3$ ( $a$ ), $M_4$ ( $b, z$ ), $M_5$ ( $v, d$ ) и $M_6$ ( $e$ ) . . . . .	147
3.7	Зависимость длины дисперсии $L_{disp}$ от длины волны $\lambda$ при $\alpha_0 = 0.33$ и $h_0 = 1$ км (1); 2 км (2); 3 км (3); 4 км (4); 5 км (5); 6 км (6) . . . . .	149
3.8	Максимальные за всё время расчёта значения свободной поверхности в задаче о цунами около Южной Камчатки с магнитудами $Mw = 7.8$ ( $a, b$ ) и $Mw = 9.0$ ( $v, z$ ). Расчёты проводились в рамках NLD- ( $a, v$ ) и SW-модели ( $b, z$ ) . . . . .	151
3.9	Относительная ( $a, b$ ) и абсолютная ( $v, z$ ) разницы “свечений” в расчётах по NLD- SW-моделям для источников цунами около Южной Камчатки с магнитудами $Mw = 7.8$ ( $a, v$ ) и $Mw = 9.0$ ( $b, z$ ) . . . . .	152
3.10	Максимальные значения свободной поверхности за всё время расчётов по NLD- ( $a, v$ ) и SW-моделям ( $b, z$ ) в задачах о распространении гипотетического удалённого цунами над ровным ( $a, b$ ) и реальным ( $v, z$ ) дном . . . . .	153
3.11	Абсолютная ( $a, v$ ) и относительная ( $b, z$ ) разницы “свечений” в расчётах по NLD- и SW-моделям в задачах о распространении гипотетического удалённого цунами над ровным ( $a, b$ ) и реальным ( $v, z$ ) дном . . . . .	154

## Список таблиц

1.1	Максимальные отклонения $E(N)$ и отношения $E(N/2)/E(N)$ . . . . .	58
2.1	Коэффициенты разностного уравнения (2.45) . . . . .	86
3.1	Значения относительных разностей $\delta_i$ в зависимости от эффективной протяженности источника . . . . .	143