На правах рукописи

Идимешев Семен Васильевич

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ И НАИМЕНЬШИХ НЕВЯЗОК И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В МЕХАНИКЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ БАЛОК И ПЛАСТИН

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Голушко Сергей Кузьмич

Официальные оппоненты: **Кургузов Владимир Дмитриевич**,
доктор физико-математических наук,
ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск,
ведущий научный сотрудник

Садовский Владимир Михайлович,
доктор физико-математических наук,
профессор, ФИЦ КНЦ СО РАН, г. Красноярск,
директор ИВМ СО РАН – обособленного
подразделения ФИЦ КНЦ СО РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт вычислительной
математики и математической геофизики
Сибирского отделения Российской
академии наук, г. Новосибирск

Защита состоится 27 января 2017 года в 11 часов 30 минут на заседании диссертационного совета ДМ 003.046.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, конференц-зал ИВТ СО РАН.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ИВТ СО РАН: http://www.ict.nsc.ru/ru/structure/discouncil/idimeshev-sv

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан "____" ноября 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н. Лебедев А.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическое моделирование композитных конструкций (КК) является важной проблемой, актуальность которой обусловлена уникальными свойствами композиционных материалов (КМ) и их широким применением в различных отраслях промышленности[1]. При моделировании поведения КК возникают особенности из-за их неоднородности и анизотропности, что приводит к значительно более сложному виду напряженно-деформированного состояния (НДС) по сравнению с конструкциями из традиционных однородных изотропных материалов. Стремление наиболее полно описать поведение КК, приводит к усложнению математических моделей, и как следствие, к повышенным требованиям к численным методам.

Математическое моделирование НДС тонкостенных многослойных анизотропных конструкций сопряжено с высокими вычислительными затратами. Малые относительные толщины слоев и выраженная анизотропия КМ при численном решении соответствующих краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных приводят к плохо обусловленным задачам линейной алгебры большого размера. Поэтому исследователи вынуждены использовать более экономичные с вычислительной точки зрения теории пластин и оболочек, которые позволяют понизить размерность исходных задач, исключив из рассмотрения направление вдоль толщины. Следует отметить, что переход от использования традиционных теорий пластин и оболочек к тем или иным уточнённым теориям сопровождается качественным изменением структуры решений, появлением больших градиентов, имеющих ярко выраженный характер пограничных слоёв, что повышает требования к используемым численным методам.

Цель работы заключается в разработке эффективного численного метода решения задач механики многослойных анизотропных элементов конструкций в виде балок и прямоугольных пластин, в разработке математической модели расчета композитных балок, учитывающей физически нелинейное поведение и разносопротивляемость композиционных материалов растяжению и сжатию.

Объектами исследования являются численный метод коллокаций и наименьших невязок и напряженно-деформированное состояние многослойных анизотропных балок и прямоугольных пластин.

Предметами исследования являются применение полиномов высоких степеней в численном методе коллокаций и наименьших невязок и эффект разносопротивляемости растяжению и сжатию композиционных материалов и конструкций из них.

[1] Технологии создания ракетно-космической и транспортной техники нового поколения включены в перечень критических технологий Российской Федерации. Об утверждении приоритетных направлений развития науки, технологий и техники в Российской Федерации и перечня критических технологий Российской Федерации: Указ Президента Рос. Федерации от 7 июля 2011 г. № 899 // Собр. законодательства Рос. Федерации. – 2011. – № 28. Ст. 4168.

Задачи, решенные в ходе достижения поставленной цели.

1. Для задач изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин получены разрешающие системы дифференциальных уравнений в кинематических переменных для пространственной теории упругости и трех теорий пластин: Кирхгофа-Лява, Тимошенко и Григолюка-Чулкова. Проведен сравнительный анализ их особенностей, влияющих на вычислительные затраты.

2. Разработан модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок (КНН), основанный на применении полиномов высоких степеней. Метод реализован в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. Проведена верификация разработанного метода на ряде тестовых задач с особенностями. На примере задачи изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин исследовано влияние относительных толщин и числа слоев на погрешность используемых теорий пластин. Реализован способ уточнения значений поперечных касательных напряжений.

3. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния пластин на упругом основании, с использованием различных моделей реакции упругого основания: Винклера, Власова и Пастернака.

4. Разработана математическая модель расчета трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, учитывающая физически нелинейное поведение материалов и их разносопротивляемость растяжению и сжатию. Разработан и реализован алгоритм численного решения систем нелинейных уравнений для разных видов аппроксимации физических соотношений. Проведена валидация разработанной математической модели на экспериментальных данных, полученных в ФГУП "ВИАМ" ГНЦ РФ.

5. Разработан и зарегистрирован комплекс, состоящий из трех программ для ЭВМ, для расчета напряженно-деформированного состояния изотропных и многослойных анизотропных прямоугольных пластин и трехточечного изгиба композитных балок с учетом физически нелинейного поведения материала и его разносопротивляемости растяжению и сжатию.

На защиту выносятся результаты, соответствующие четырем областям исследования паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам.

Область исследования 1:

1. Математическая модель и алгоритм расчета трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, учитывающая физически нелинейное поведение материалов и их разносопротивляемость растяжению и сжатию.

Область исследования 3:

2. Модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок (КНН), основанный на применении полиномов высоких степеней, для численного решения краевых задач в канонических областях в одномерном, двумерном и

трехмерном случаях. Верификация метода на ряде тестовых задач с особенностями и результатах расчетов, полученных другими авторами.

Область исследования 4:

3. Комплекс программ для ЭВМ для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) изотропных и многослойных анизотропных прямоугольных пластин и трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, разносопротивляющихся растяжению и сжатию с учетом их физически нелинейного поведения.

Область исследования 5:

4. Применение модифицированного метода КНН для решения задач изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин в рамках классической теории Кирхгофа-Лява, уточненных теорий Тимошенко и Григолюка-Чулкова. Сравнительный анализ результатов расчетов НДС пластин в рамках пространственной теории упругости и трех различных теорий пластин. Процедура восстановления поперечных касательных напряжений для теории Григолюка-Чулкова на основе уравнений равновесия пространственной теории упругости. Валидация математической модели трехточечного изгиба полимерных композитных балок.

Научная новизна изложенных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

1. Впервые предложен и реализован модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок, основанный на применении полиномов высоких степеней, для численного решения краевых задач в канонических областях в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. Координаты точек коллокаций определяются с применением корней многочлена Чебышёва и используются специальные представления приближенного решения, позволяющие уменьшить накопление ошибок округления. На бесконечно гладких решениях получен экспоненциальный порядок уменьшения погрешности с возрастанием степени полиномов.

2. Разработанный модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок использован для расчета НДС многослойных анизотропных прямоугольных пластин в рамках классической теории Кирхгофа-Лява и уточненных теорий Тимошенко и Григолюка-Чулкова. Проведен сравнительный анализ применимости перечисленных теорий на задачах изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин.

3. Разработана новая математическая модель расчета трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, учитывающая физически нелинейное поведение материала и его разносопротивляемость растяжению и сжатию. Предложен алгоритм численного решения нелинейных уравнений и проведена валидация разработанной математической модели.

4. Создан комплекс программ для ЭВМ для расчета НДС изотропных и многослойных анизотропных прямоугольных пластин и трехточечного изгиба

полимерных и композитных балок, разносопротивляющихся растяжению и сжатию с учетом физически нелинейного поведения, с помощью которого проведено исследование деформирования балок и прямоугольных пластин.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования предложенных численных алгоритмов и комплекса программ при проектировании и анализе деформирования композитных конструкций в строительной, авиационной и ракетно-космической отраслях. Учет эффекта разносопротивляемости растяжению и сжатию при физически нелинейном поведении углепластиков исследован в рамках совместного проекта с Всероссийским институтом авиационных материалов ФГУП "ВИАМ" ГНЦ РФ «Разработка и совершенствование технологий проектирования и создания новых перспективных композиционных материалов (углепластиков) и конструкций из них для авиационной и других отраслей промышленности», поддержанного грантом РФФИ № 13-01-12032-офи_м.

Обоснованность и достоверность результатов, полученных в диссертационной работе обеспечена использованием фундаментальных законов механики деформируемого твердого тела, строгих математических методов и подтверждается сопоставлением полученных результатов с расчетами других исследователей и экспериментальными данными, полученными в ФГУП "ВИАМ" ГНЦ РФ.

Представление работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: Международной конференции «Актуальные проблемы математики, механики, информатики» (Екатеринбург, 2009); Всероссийской конференции по вычислительной математике (Новосибирск, 2009); Всероссийских конференциях молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2011; Томск, 2013; Тюмень, 2014); Международной конференции ECCOMAS (Австрия, Вена, 2012); Международной конференции «Математические и информационные технологии», (Сербия, Врнячка Баня; Черногория, Будва, 2013) ; Всероссийских конференциях по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Барнаул, 2013; Омск, 2015); Международной конференции «Успехи механики сплошных сред», приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 2014); Всероссийской конференции, приуроченной к 95-летию академика Л.В. Овсянникова «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, 2014); Международной Азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем» (Кыргызская Республика, оз. Иссык-Куль, Булан-Соготту, 2014); Всероссийской конференции с международным участием «Индустриальные информационные системы» (Новосибирск, 2015); Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015», посвященной 90-летию со дня рождения академика Г.И. Марчука, (Новосибирск, 2015); VIII Международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященной 115-летию со дня рождения академика М. А. Лаврентьева. (Новосибирск, 2015); Всероссийской конференции «Безопасность и живучесть технических систем» (Красноярск, 2015).

В полном объеме материалы диссертации докладывались и обсуждались на Объединенном семинаре «Информационно-вычислительные технологии (численные методы механики сплошной среды)» Института вычислительных технологий СО РАН, Новосибирского государственного университета и Новосибирского государственного технического университета (руководители – академик Ю.И. Шокин и проф. В.М. Ковеня), Объединенном семинаре «Численный анализ» Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирского государственного университета (руководитель – проф. В.П. Ильин), семинаре «Вычислительная механика деформируемых сред» Института вычислительного моделирования СО РАН (руководитель – проф. В.М. Садовский).

Публикации. По теме диссертации опубликовано **29** печатных работ, в том числе **7** статей в периодических изданиях рекомендованных ВАК, **6** публикаций в трудах международных и всероссийских конференций, **13** тезисов докладов международных и всероссийских конференций и **3** свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Во всех опубликованных работах автор принимал непосредственное участие в постановке задач, разработке и реализации вычислительных алгоритмов, обсуждении и критическом анализе полученных результатов, в подготовке и представлении статей и докладов по теме исследований.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объём работы составляет 179 страниц. В диссертации содержатся 27 рисунков и 27 таблиц. Список литературы состоит из 122 источников.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. С. К. Голушко за всестороннюю поддержку и постоянное внимание в ходе выполнения работы. Автор благодарит за плодотворные обсуждения д.ф.-м.н., проф. В. П. Шапеева и к.ф.-м.н. Б. В. Семисалова. Успешному выполнению работы способствовали ценные критические замечания д.ф.-м.н., проф. Ю. В. Немировского, к.ф.-м.н. Е. В. Амелиной, к.ф.-м.н. А. В. Юрченко.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность выбранной темы исследований, приведены основные результаты и положения выносимые на защиту. Приведен обзор работ, посвященных численному решению задач механики многослойных анизотропных конструкций, методу коллокаций и наименьших невязок, а также отмечены работы, посвященные применению полиномов высоких степеней в различных численных методах. Изложено краткое содержание диссертации по главам.

Глава 1 посвящена выводу и анализу разрешающих систем дифференциальных уравнений (ДУ) для задачи изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин для разных теорий. В разделе 1.1 дана физическая постановка задачи изгиба прямоугольной пластины (рисунок 1), состоящей из N трансверсально-изотропных слоев постоянной толщины с главными направлениями упругости в плоскости пластины. Верхняя грань пластины находится под действием распределенной поперечной нагрузки $q(x, y)$, нижняя грань свободна, слои жёстко скреплены между собой, а на торцах пластины заданы соответствующие условия закрепления. Необходимо рассчитать напряжённо-деформированное состояние (НДС) пластины.

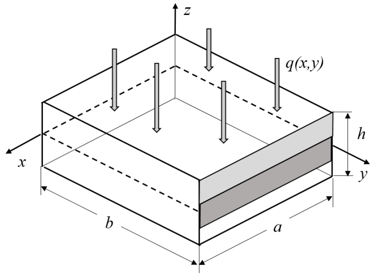

Рисунок 1 – Слоистая прямоугольная пластина под действием поперечной нагрузки.

В разделе 1.2 для слоя пластины выписаны исходные уравнения пространственной теории упругости (3D ТУ). На их основе получены разрешающие уравнения относительно функций перемещений. Полученная система ДУ имеет ряд особенностей, затрудняющих ее решение численными методами. Для рассматриваемых композитных конструкций характерны выраженная анизотропия и малость толщин слоев по отношению к другим геометрическим размерам. По этой причине при старших производных возникают малые параметры, которые могут стать причиной появления больших градиентов решения и пограничных слоев. Порядок системы ДУ для 3D ТУ зависит от числа слоев, которых в композитных конструкциях может быть несколько десятков. Таким образом, при численном решении поставленной задачи в рамках 3D ТУ могут возникать плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большого размера.

Иной подход к расчету НДС многослойных анизотропных пластин используется в *теориях пластин*, которым посвящен раздел 1.3. Малая относительная толщина пластины позволяет сформулировать гипотезы о характере НДС и понизить размерность исходной задачи, исключив из рассмотрения направление вдоль толщины пластины. В работе рассмотрены три теории пластин, в которых по-разному моделируется поперечный сдвиг: классическая теория Кирхгофа-Лява[2], теория Тимошенко[3] и теория Григолюка-Чулкова[4]. В теории Кирхгофа-Лява поперечные сдвиги не учитываются, а в теориях Тимошенко и Григолюка-Чулкова аппроксимируются константой и кусочно-квадратичной

[2]Лехницкий, С.Г. Анизотропные пластинки. 2-е изд. / С.Г. Лехницкий Гостехиздат. – 1957. – С. 463.

[3]Василенко, А.Т. Определение напряженного состояния многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке / А.Т. Василенко, Г.П. Голуб, Я.М. Григоренко // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 2. – С. 40–47.

[4]Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов Машиностроение. – 1988. – С. 288.

функциями по толщине соответственно. В диссертационной работе для каждой теории пластин приведены исходные уравнения и получены разрешающие уравнения в кинематических переменных. Получена оценка малых параметров при старших производных для рассмотренных теорий пластин (таблица 1).

Таблица 1 – Сравнение особенностей систем ДУ различных теорий на примере задачи изгиба. Малые параметры при старших производных разрешающих систем: $\varepsilon = h/a$ и $\varepsilon^k = h^k/a$ – отношение общей толщины пластины и толщины отдельного слоя к характерному размеру в плоскости пластины; ε^m – отношение модулей упругости трансверсально-изотропного материала.

Теория		Порядок ДУ	Малый параметр
Теория Кирхгофа-Лява	2D	8	$O(1)$
Теория Тимошенко	2D	10	$O(\varepsilon^2)$
Теория Григолюка-Чулкова	2D	$6+4N$	$O\left((\varepsilon^k)^2\varepsilon^m\right)$
3D ТУ	3D	$6N$	$O\left((\varepsilon^k)^2\varepsilon^m\right)$

С вычислительной точки зрения теории пластин являются удачной альтернативой исходной постановке задачи в рамках 3D ТУ по двум основным причинам. Во-первых, системы ДУ в частных производных для теорий пластин зависят только от двух переменных и в случае многослойных пластин имеют меньший порядок. Во-вторых, как правило, в уравнениях теорий пластин малые параметры при старших производных проявляются в меньшей степени, а иногда совсем отсутствуют (таблица 1). Среди рассмотренных теорий пластин более экономичными с вычислительной точки зрения являются теория Кирхгофа-Лява и теория Тимошенко, однако, область применимости этих теорий существенно ограничена в случае многослойных анизотропных пластин. Поэтому в ряде случаев необходимо применять более трудозатратные уточнённые теории, такие как теория Григолюка-Чулкова. В ней порядок системы ДУ зависит от числа слоев и равен $6 + 4N$. Малые параметры при этом имеют величины характерные для 3D ТУ, однако, рассматриваемая задача остается двумерной, что является важным преимуществом перед 3D ТУ.

Усложнение математических моделей повышает требования к численным методам. Переход от традиционных теорий пластин к уточнённым теориям сопровождается ростом порядка разрешающих систем ДУ и появлением больших градиентов решения, имеющих ярко выраженный характер пограничных слоёв. Традиционные схемы и алгоритмы численного интегрирования краевых задач в таких классах жестких систем ДУ оказываются малоэффективными. Для решения описанного класса задач в работе разработан и применен модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок.

Глава 2 посвящена численному методу решения краевых задач для дифференциальных уравнений – методу коллокаций и наименьших невязок (КНН) и его модификации, основанной на применении полиномов высоких степеней.

В разделе 2.1 изложены идеи метода коллокаций, лежащие в основе метода

КНН. В разделе 2.2 приведено описание метода КНН, суть которого заключается в следующем. Расчётная область покрывается сеткой, в каждой ячейке сетки искомое решение представляется в виде линейной комбинации базисных функций некоторого линейного конечномерного пространства (обычно пространства полиномов) и задача сводится к поиску неизвестных коэффициентов этого представления. Для их определения внутри каждой ячейки выписываются уравнения коллокаций – требование удовлетворения уравнениям задачи в точках коллокаций; граничные условия – требование выполнения краевых условий в точках на границе области; условия согласования – условия склейки решения в точках на границе между ячейками сетки. При записи этих уравнений в конкретных точках (рисунок 2) формируется СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов. Особенностью метода КНН является переопределённость полученной СЛАУ (число уравнений больше числа неизвестных). Ее решением принимается решение, полученное методом наименьших квадратов.

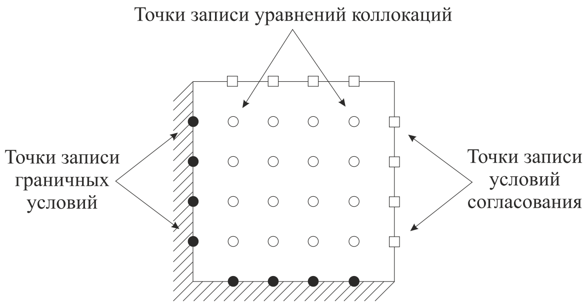

Рисунок 2 – Пример расположения точек записи уравнений в методе КНН.

При этом для решения переопределенной СЛАУ используется QR-разложение ее матрицы с применением метода Хаусхолдера, которое дает то же самое решение, что и метод наименьших квадратов, но не ухудшает обусловленность системы в процессе вычисления. Для подробных сеток применяется метод декомпозиции области – метод итераций по подобластям. Он позволяет свести решение задачи во всей области к последовательному решению задач в подобластях, вычислительная сложность которых много меньше задачи в исходной области. При этом для решения СЛАУ в подобласти также применяется QR-разложение. Такой подход позволяет экономить память вычислительного устройства и проводить вычисления на многопроцессорных системах.

В разделе 2.3 описан модифицированный метод КНН. В нем используется $p-$*подход* повышения точности численного решения для полиномиального приближения. Он заключается в увеличении степени полинома, аппроксимирующего решение в ячейке. В предыдущих вариантах метода КНН порядок аппроксимации метода был фиксирован и наблюдался степенной характер уменьшения погрешности с уменьшением размера ячейки ($h-$*подход*). В случае $p-$подхода с увеличением степени полинома возникает экспоненциальный характер уменьшения погрешности, позволяющий получать высокую точность при малых вычислительных затратах и использовать меньшее число ячеек или вовсе отказаться от разбиения области.

При реализации p – подхода возникает ряд особенностей, которые не характерны для аппроксимации полиномами низких степеней. Во-первых, требуется специальный выбор точек коллокаций, обеспечивающий сходимость полиномиального приближения на достаточно широком классе функций. В случае канонических областей (отрезок, квадрат и куб) и их конформных отображений в модифицированном методе КНН точки коллокаций выбираются с применением корней многочленов Чебышёва первого рода. В каждой ячейке вводится локальная система координат, такая что локальные переменные меняются от –1 до 1, и точки коллокаций выбираются как

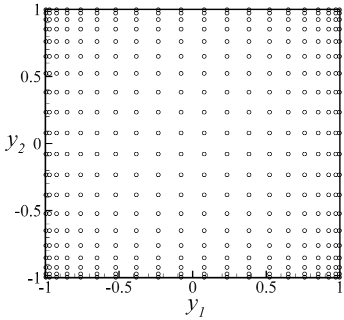

Рисунок 3 – Пример расположения точек коллокаций (2D).

$$1\text{D: } (\alpha^i), \qquad 2\text{D: } (\alpha^i, \alpha^j), \qquad 3\text{D: } (\alpha^i, \alpha^j, \alpha^k),$$

где α^i – корни многочлена Чебышёва требуемой степени (рисунок 3).

Во-вторых, при работе с полиномами высоких степеней требуются специальные формы представления полиномиального базиса, позволяющие уменьшать ошибки округления. В модифицированном методе КНН используются разложения в ряды по многочленам Чебышёва T_i и их прямые произведения

$$\begin{gathered}1\text{D: } u(y_1) = \sum_{i=0}^{N_1-1} c_i T_i(y_1), \quad 2\text{D: } u(y_1, y_2) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} c_{ij} T_i(y_1) T_j(y_2), \\ 3\text{D: } u(y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{N_3-1} c_{ijk} T_i(y_1) T_j(y_2) T_k(y_3).\end{gathered} \tag{1}$$

В разделе 2.4 на ряде тестовых задач проведена верификация модифицированного метода КНН. Рассмотрены одно-, двух- и трехмерные тестовые задачи, обладающие особенностями: большими градиентами, ограниченной гладкостью решения, высоким порядком ДУ, нелинейностью. На примере тестовых задач проведено сравнение традиционного (h – подход) и модифицированного (p – подход) методов КНН. В тестовых задачах при относительно небольших степенях полиномов численные решения получены с точностью близкой к машинной (таблица 2).

Показано, что p – подход можно успешно совмещать с h – подходом, например, для поиска решений, обладающих большими градиентами или ограниченной гладкостью.

Возможности модифицированного метода КНН позволяют применять его не только для классических теорий пластин, но и для более сложных уточненных теорий. В модифицированном методе КНН не требуется использования

Таблица 2 – Погрешность численного решения, полученного модифицированным методом КНН, при увеличении степени полиномов $N_1 \times N_2$ (см. формулу (1)), для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в квадратной области с точным решением $\sin(10\,x_1 x_2)$, $x_1, x_2 \in [0;1] \times [0;1]$. Здесь Er, Er_x, Er_{xx} – относительные погрешности решения в равномерной норме для самого решения, его первой и второй производной по x_1 соответственно.

$N_1 \times N_2$	$Er(u)$	$Er_x(u)$	$Er_{xx}(u)$
10 × 10	5.95e–2	1.62e–1	4.06e–1
15 × 15	2.15e–5	8.65e–5	6.06e–4
20 × 20	2.04e–9	8.90e–9	4.55e–8
25 × 25	3.10e–14	1.52e–13	1.93e–12

специальных приемов для решения ДУ высокого порядка. Относительно просто реализуются краевые условия в виде линейных комбинаций производных высоких порядков, характерных для постановок задач в рамках теорий пластин в кинематических переменных.

На основе описанных алгоритмов были созданы программы для расчета НДС многослойных анизотропных прямоугольных пластин.

Глава 3 посвящена расчету и анализу НДС прямоугольных пластин. В разделе 3.1 проведена верификация предложенного метода на задачах изгиба прямоугольных пластин: изотропной пластины в рамках теории Кирхгофа-Лява и ортотропной пластины в рамках теории Тимошенко. Показано, что при решении рассмотренных задач модифицированным методом КНН получено хорошее согласование с известными результатами других авторов и наблюдается экспоненциальная скорость уменьшения погрешности численного решения. В разделе 3.2 исследована задача изгиба пластин, лежащих на упругом основании. Рассмотрены три модели упругого основания: Винклера (p_1) и двухпараметрические модели Власова и Пастернака (p_2):

$$p_1 = kw, \qquad p_2 = C_1 w - C_2 \Delta w, \tag{2}$$

где p_1, p_2 – реакции основания; w – прогиб пластины; k, C_1, C_2 – параметры основания. Две последние модели отличаются способом определения параметров основания C_1, C_2. Для прямоугольной пластины со сложным закреплением проведено качественное сравнение трех моделей упругого основания.

В разделе 3.3 рассмотрены частные случаи описанной в первой главе задачи изгиба трех-, пяти- и семислойных шарнирно-закрепленных пластин разной относительной толщины (рисунок 1). Для численного решения соответствующих постановок рассматриваемых теорий пластин реализован модифицированный метод КНН. На примере задачи с известным решением в рамках 3D ТУ проведен сравнительный анализ результатов расчетов для различных теорий пластин. Рассмотрены пластины разной относительной толщины: от очень тонких $S = 100$ до толстых $S = 2$, где $S = a/h$ (рисунок 1). В работе проведены расчеты (рисунок 4) и приведены таблицы максимальных значений функций прогиба и компонент тензора напряжений σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} для 3D ТУ и различных теорий пластин. Представленные таблицы позволяют проанализировать точность приближения теорий пластин относительно исходной постановки 3D ТУ для рассмотренной задачи.

Наибольшие отличия демонстрирует теория Кирхгофа-Лява. Если ограничиться 5% отклонением от 3D ТУ, то область применения этой теории для поставленной задачи можно оценить как $S \geq 50$. Более точные результаты получаются в рамках теории пластин Тимошенко. Ее можно применять для пластин $S \geq 20$. Интересно, что при $S \geq 50$ результаты в рамках теории Тимошенко не отличаются принципиально от аналогичных результатов теории Кирхгофа-Лява. В частности, это означает, что для расчета НДС пластин при $S \geq 50$ среди этих теорий предпочтение следует отдать той, которая приводит в меньшим вычислительным затратам. Наиболее точные результаты получены в рамках теории Григолюка-Чулкова. Ее можно применять и для толстых пластин $S > 4$. При этом для $S \geq 20$ результаты теории ломаной линии на порядок точнее результатов теорий Кирхгофа-Лява и Тимошенко. Теория ломаной линии конструктивно учитывает многослойную структуру пластины, что обеспечивает такую широкую область применимости и высокую точность.

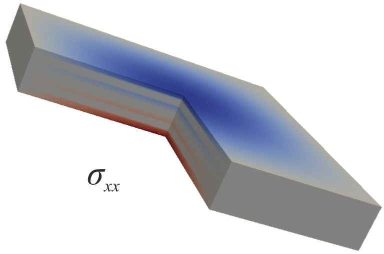

Рисунок 4 – Распределения компоненты тензора напряжений σ_{xx} в семислойной пластине ($S = 10$).

Для рассмотренных постановок задач теорий пластин проведен анализ соответствующих вычислительных затрат (таблица 3). Для решения соответствующих СЛАУ применяется прямой метод, требующий $O(n^3)$ операций (n – число неизвестных). Таким образом, для тонких пластин ($S > 50$) целесообразно использовать более экономичные теории Кирхгофа-Лява или Тимошенко. Например, для тонких семислойных пластин потребуется на два порядка меньше операций при обращении соответствующей матрицы.

Таблица 3 – Число неизвестных параметров в представлении решения (1) в модифицированном методе КНН, требуемых для получения трех первых значащих цифр в значении максимального прогиба для разных теорий.

Число слоев	Теория Кирхгофа - Лява	Теория Тимошенко	Теория Григолюка-Чулкова
3	432	720	1296
5	432	720	1872
7	432	720	2448

При этом необходимо помнить, что особенности в виде больших градиентов, локализованных в малых областях, в рамках классических теорий пластин

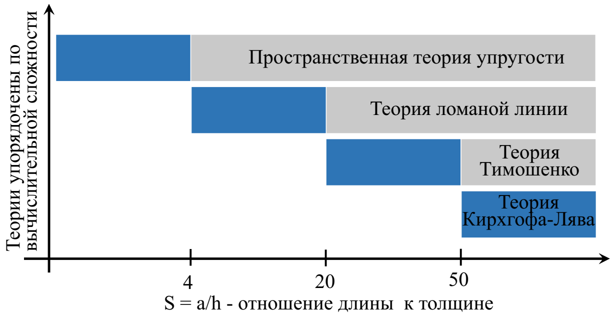

Рисунок 5 – Область применимости теорий в зависимости от относительной толщины пластин для рассмотренной постановки. Рекомендованная область выделена синим цветом.

описываются грубо, в отличии от уточненных теорий. Это необходимо иметь в виду при выборе теории пластин, так как они являются приближениями и имеют свои ограничения (рисунок 5).

При помощи теорий пластин можно с достаточной точностью рассчитать напряжения σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{xy}, но поперечные касательные напряжения σ_{xz} и σ_{yz} в них определяются достаточно грубо. Значение этих компонент важно, например, при изучении механизмов разрушения КМ. В работе описана процедура уточнения поперечных касательных напряжений из уравнений равновесия 3D ТУ, где в качестве значения компонент тензора напряжений σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{xy} берутся уже рассчитанные в соответствующей теории пластин величины. Этот подход особенно эффективен при расчете в рамках теорий пластин Кирхгофа-Лява и Тимошенко для относительно тонких пластин ($S \geq 10$) (рисунок 6).

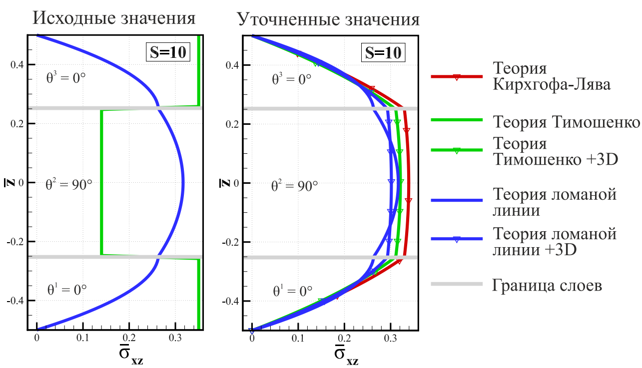

Рисунок 6 – Распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz}(0, a/2, \bar{z})$ до и после уточнения (+3D) в трехслойной пластине по толщине.

Глава 4 посвящена разработке новой математической модели расчета трехточечного изгиба композитных и полимерных балок, учитывающей физическую нелинейность материала и эффект разносопротивляемости растяжению и сжатию. В разделе 4.1. описаны особенности математического моделирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. Такими свойствами обладают углепластики на полимерной основе. В работе проведен анализ деформирования балок, выполненных из высокодеформативной эпоксидной смолы ВСЭ-1212 и созданного на ее основе перспективного конструкционного углепластика ВКУ-28, разработанных в ФГУП "ВИАМ" ГНЦ РФ.

Модель описана в разделе 4.2. В ходе решения задачи требуется определять границы областей, где конструкция испытывает сжимающие или растягивающие напряжения и использовать в этих областях соответствующие физические соотношения. Для этого в модели изгиба балок вводится неизвестная функция – положение нейтральной поверхности, на которой деформации обращаются в нуль. Тогда для трехточечного изгиба балки (рисунок 7) интегральные усилия и моменты, определенные в классической теории балок, примут более сложный вид

$$N = b\left(\int\limits_{-h}^{z_1} \sigma^- dz + \int\limits_{z_1}^{h} \sigma^+ dz\right), \quad M = b\left(\int\limits_{-h}^{z_1} \sigma^- z dz + \int\limits_{z_1}^{h} \sigma^+ z dz\right), \tag{3}$$

где b и $2h$ – ширина и толщина балки, z_1 – положение нейтральной поверхности, $\sigma^+ = \sigma^+(\varepsilon)$ и $\sigma^- = \sigma^-(\varepsilon)$ – нелинейные физические соотношения при растяжении и сжатии соответственно. Далее, используя уравнения равновесия и кинематические соотношения классической теории изгиба балок, выписывается система нелинейных уравнений. Для ее численного решение разработана программа, использующая линеаризацию методом Ньютона. В качестве начального приближения используется решение для линейный физических соотношений с учетом разносопротивляемости материала. Для определения прогиба и продольного перемещения балки использован модифицированный метод КНН.

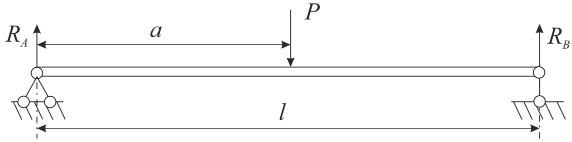

Рисунок 7 – Схема модели трехточечного изгиба балки прямоугольного сечения. Здесь l – длина балки; a – расстояние до точки приложения сосредоточенной нагрузки P; R_A, R_B – реакции опор.

Описанная модель позволяет рассматривать различные виды аппроксимации физических соотношений. В разделе 4.3 рассмотрены четыре вида аппроксимаций диаграмм деформирования: линейная (*A1*), квадратичная (*A2*), кубическая (*A3*) и линейно-степенная (*A4*). Рассмотрены балки трех видов: из полимера ВСЭ-1212 и углепластика ВКУ-28, вырезанные вдоль и поперек направления укладки армирующего наполнителя. Проведено сравнение результатов расчетов в рамках предложенной модели и результатов механических испытаний.

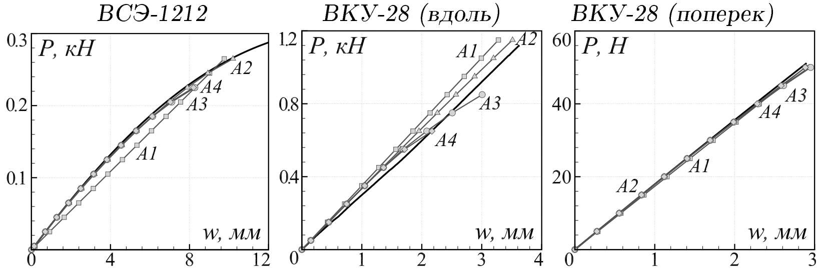

Рисунок 8 – Экспериментальные (сплошные кривые) и расчетные зависимости прогиба в центре балки от нагрузки для разных видов аппроксимаций физических соотношений.

Среди рассмотренных вариантов аппроксимации диаграмм деформирования квадратичная аппроксимация качественно и количественно лучше всего описывает нелинейный характер изгиба образцов полимерной матрицы ВСЭ-1212 и продольно вырезанного углепластика ВКУ-28. Линейная аппроксимация показала хорошее соответствие лишь на поперечно вырезанном образце углепластика ВКУ-28, где все варианты аппроксимаций дают близкие к эксперименту результаты. Более сложные виды аппроксимаций дают близкий к квадратичной аппроксимации результат, но требуют существенно больших вычислительных затрат и обладают плохими свойствами экстраполяции кривых деформирования за пределы полученных экспериментальных данных.

Показано, что неучет эффекта разносопротивляемости материала растяжению и сжатию может привести к отклонению от результатов механических испытаний более чем на 15 %.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

1. Разработан модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок (КНН), основанный на применении полиномов высоких степеней в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. На ряде тестовых задач показаны преимущества разработанного метода, в т.ч. перед стандартным методом КНН. Показано, что на бесконечно гладких решениях с ростом степени полиномов наблюдается экспоненциальный порядок уменьшения погрешности, позволяющий получать численные решения с высокой точностью.
2. Для задач изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин получены разрешающие системы уравнений в кинематических переменных для различных теорий пластин: классической теории Кирхгофа-Лява и уточненных теорий Тимошенко и Григолюка-Чулкова. Проведен сравнительный анализ особенностей разрешающих систем пространственной теории упругости и рассмотренных теорий пластин. Показано, что выбор и использование

той или иной теории пластин позволяет значительно (на 2 порядка) уменьшить вычислительные затраты.

3. Для рассмотренных теорий пластин реализован модифицированный метод КНН. Проведен расчет НДС пластин на упругом основании с использованием трех моделей реакции основания: Винклера, Власова и Пастернака. Проведено исследование применимости теорий пластин для разных относительных толщин и числа слоев на примере задачи изгиба с известным решением в рамках пространственной теории упругости. Показано, что теория пластин Григолюка-Чулкова обеспечивает получение достаточно хорошего приближения к пространственной теории упругости как для малых, так и больших ($a/h > 4$) относительных толщин. Для тонких пластин ($a/h > 50$) целесообразно применять теории Кирхгофа-Лява или Тимошенко, которые требуют меньших вычислительных затрат по сравнению с теорией Григолюка-Чулкова.
4. Разработана математическая модель расчета трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, разносопротивляющихся растяжению и сжатию с учетом физически нелинейного поведения материала. Разработан алгоритм численного решения нелинейных уравнений, для разных видов аппроксимации физических соотношений. Проведена валидация разработанной модели и получено хорошее соответствие расчетов экспериментальным данным для квадратичной аппроксимации.
5. Разработаны и зарегистрированы программы для ЭВМ для расчета напряженно-деформированного состояния изотропных и многослойных анизотропных прямоугольных пластин и трехточечного изгиба композитных балок разносопротивляющихся растяжению и сжатию с учетом физически нелинейного поведения, с помощью которого проведено исследование деформирования балок и прямоугольных пластин.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Исаев, В.И. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона / В.И. Исаев, В.П. Шапеев, С.В. Идимешев // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 1. — С. 85–94.
2. Голушко, С.К. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, № 6. — С. 31–43.
3. Шапеев, В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок для трёхмерных уравнений Навье - Стокса / В.П. Шапеев, Е.В. Ворожцов, В.И. Исаев, С.В. Идимешев // Вычислительная математика и программирование. — 2013. — Т. 14, № 1. — С. 306–322.

4. Идимешев, С.В. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин на упругом основании / С.В. Идимешев // Известия АГУ. – 2014. № 1/1 (81)— С. 53–56.
5. Голушко, С.К. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к задачам механики анизотропных слоистых пластин / С. К. Голушко, С. В. Идимешев, В. П. Шапеев // Вычислительные технологии. — 2014. — Т. 19, № 5. — С. 24–36.
6. Амелина, Е. В. Анализ и обработка экспериментальных данных при деформировании полимеров и углепластиков / Е. В. Амелина, С. К. Голушко, В. С. Ерасов, С.В. Идимешев [и др.] // Омский научный вестник. — 2015. — № 3 (143). — С. 339–345.
7. Амелина, Е. В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчёт / Е. В. Амелина, С. К. Голушко, В. С. Ерасов, С.В. Идимешев [и др.] // Вычислительные технологии. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 27–52.

Публикации в трудах международных и всероссийских конференций:

8. Исаев, В.И. О методе коллокаций и наименьших квадратов для уравнения Пуассона / В.И. Исаев, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев [и др.] // Сб. статей конф. «Актуальные проблемы математики, механики, информатики». (Екатеринбург, 2–6 февраля 2009). — 2009. — С. 53-57.
9. Shapeev, V.P. The collocations and least squares method:application to numerical solution of the Navier-Stokes equations / V.P. Shapeev, V.I. Isaev, S.V. Idimeshev // CD-ROM Proc. of the 6th ECCOMAS (Austria, Vienna, September 10–14, 2012). — 2012.
10. Golushko, S.K. Application of collocations and least residuals method to problems of mechanics of isotropic and anisotropic plates / S.K. Golushko, S.V. Idimeshev // Zbornic radova konferencije MIT 2013 (Vmjackoj Banji, Republika Srbija, Septembra 5-8, 2013; Budvi, Crna Gora, Septembra 9-14, 2013). — 2014. — P. 236–242.
11. Голушко, С.К. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к решению задач механики анизотропных слоистых пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Труды X Межд. Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем» (Кыргызская Республика, оз. Иссык-Куль, с. Булан-Соготту, 25 июля – 5 августа, 2014). —2014. — С. 225–233.
12. Голушко, С.К. Численное решение краевых задач механики слоистых конструкций / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Сборник докладов международной конференции «Успехи механики сплошных сред», приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 28 сентября - 4 октября 2014). — 2014. — С. 136-139.
13. Голушко, С.К. Сравнительный анализ различных теорий в задачах изгиба многослойных ортотропных прямоугольных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Материалы XIV Всерос. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. (Омск, 2–4 июня 2015). — 2015. — С. 44–47.

Государственная регистрация программ для ЭВМ:

14. Программа расчета изотропных прямоугольных пластин методом коллокаций и наименьших невязок : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014663756 / С. В. Идимешев, С. К. Голушко; зарег. 25.02.2015.
15. Программа расчета многослойных анизотропных прямоугольных пластин модифицированным методом коллокаций и наименьших невязок: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612644 / С. В. Идимешев, С. К. Голушко; зарег. 24.02.2015.
16. Программа расчета трехточечного изгиба композитных балок разносопротивляющихся растяжению и сжатию hp-методом коллокаций и наименьших невязок: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016614056 / С. В. Идимешев; зарег. 13.04.2016.