

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительных технологий
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Идимешев Семен Васильевич

**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ
И НАИМЕНЬШИХ НЕВЯЗОК И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ
В МЕХАНИКЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ
БАЛОК И ПЛАСТИН**

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
С.К. Голушко

Новосибирск — 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Исходные и разрешающие системы уравнений механики многослойных анизотропных пластин	28
1.1. Многослойные анизотропные пластины	28
1.2. Постановка задачи изгиба многослойных пластин в рамках пространственной теории упругости	32
1.3. Постановки задачи изгиба многослойных пластин в рамках теорий пластин	40
1.3.1. Теория Кирхгофа-Лява	41
1.3.2. Теория Тимошенко	47
1.3.3. Теория Григолюка-Чулкова	53
Глава 2. Метод коллокаций и наименьших невязок	60
2.1. Метод коллокаций	60
2.2. Метод коллокаций и наименьших невязок	65
2.3. Модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок	73
2.3.1. Одномерный случай	77
2.3.2. Двумерный случай	80
2.3.3. Трехмерный случай	82
2.4. Решение тестовых задач	83
2.4.1. Одномерные тестовые задачи	86
2.4.2. Двумерные тестовые задачи	96
2.4.3. Трехмерные тестовые задачи	103

Глава 3. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных прямоугольных пластин	106
3.1. Задачи изгиба изотропной и ортотропной пластин	106
3.2. Расчет напряженно-деформированного состояния пластин на упругом основании	111
3.3. Расчет напряженно-деформированного состояния многослойных пластин	116
3.3.1. Постановка задачи	116
3.3.2. Расчеты в рамках различных теорий	122
3.3.3. Расчет поперечных касательных напряжений	130
3.3.4. Вычислительные затраты	137
Глава 4. Моделирование трехточечного изгиба композитной балки разносопротивляющейся растяжению и сжатию	142
4.1. Разносопротивляющиеся материалы	142
4.2. Математическая модель разносопротивляющейся композитной балки	145
4.3. Расчеты и сравнение с экспериментом	149
Заключение	159
Литература	161
Приложение	176

Введение

В настоящее время развитие науки стимулирует все более широкое применение математического моделирования при решении самых различных задач. Стремление добиться наиболее полного и точного описания интересующих нас явлений приводит к необходимости использования сложных математических моделей, что в свою очередь предъявляет повышенные требования к численным методам.

Во многих случаях математическое моделирование позволяет исследовать явление, не прибегая к комплексу сложных и дорогостоящих натурных экспериментов. Именно таким образом обстоит дело при моделировании поведения композитных конструкций, особенность которых заключается в наличии большого числа управляемых параметров, влияющих на напряженно-деформированное состояние. Проблема нахождения значений параметров, удовлетворяющих требуемым свойствам конструкции с учетом технологических ограничений может быть решена с помощью математического моделирования и современных вычислительных технологий.

При анализе поведения композитных конструкций возникает необходимость решения систем дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных. В большинстве практически важных случаев получить решение ДУ в конечном аналитическом виде невозможно, поэтому исследователи прибегают к поиску приближенных решений. Очевидно, что в отличие от вполне определенного решения исходного ДУ, приближенные решения такой однозначностью не обладают и для их определения можно использовать различные подходы. Практически все современные методы построения при-

ближенных решений реализуются на вычислительных устройствах, поэтому приближенные решения принято называть численными. В настоящее время не существует универсального способа построения приближенного решения для произвольного ДУ. Это связано с многими факторами, имеющими как теоретический так и практический характер [10]. Отсутствие универсального метода решения ДУ не является признаком несовершенства теорий, а скорее подчеркивает многогранность и сложность реальных явлений, которые необходимо исследовать. Поэтому в общем множестве ДУ выделяются отдельные классы задач, для которых разрабатываются конкретные способы определения приближенного решения. При этом существуют достаточно общие подходы к построению приближенных решений, которые нашли широкое применение на практике. Примером такого подхода являются проекционные методы. В проекционном методе определяется некоторое бесконечномерное функциональное пространство (например, пространство полиномов), в котором можно представить решение исходного ДУ. Суть проекционных методов заключается в выборе конечномерного подпространства, в котором строится приближенное решение. Выбор подпространства и способ получения приближений в нем определяют конкретный проекционный метод. К проекционным методам относится, например, метод конечных элементов [40, 76], который в настоящее время является наиболее распространенным и развиваемым численным методом. Широкую известность получили также метод граничных [13, 17] и спектральных элементов [88, 90]. Еще одним из эффективных проекционных методов является метод коллокаций [36, 112], который из-за своей простоты и хорошо развитой теоретической базы нашел широкое применение при исследовании актуальных проблем механики сплошной среды.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию и развитию метода коллокаций и наименьших невязок (КНН) – проекционного метода, основанного на методе коллокаций. В отличие от метода коллокаций, в ме-

тоде КНН рассматривается более общий подход к минимизации функционала невязки разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В методе КНН разрешающая СЛАУ является переопределенной, а ее решение понимается в смысле наименьших квадратов. Между методом коллокаций и методом КНН существует связь, аналогичная связи между задачей интерполяции и задачей аппроксимации методом наименьших квадратов (МНК). Как известно, возникающая при интерполировании задача линейной алгебры может быть плохо обусловлена, а в приближенном решении могут появляться нефизичные осцилляции. Если требование точного выполнения условий интерполяции не является принципиальным, например исходные данные содержат ошибки какого-либо происхождения, предпочтительнее перейти к более общей задаче аппроксимации, которая зачастую лучше обусловлена и дает решение лучшего качества. Аналогично использование более общего подхода к минимизации функционала невязки улучшает свойства численного решения и при решении дифференциальных уравнений методом коллокаций.

Идеи и принципы метода КНН берут начало в работах де Бора (de Boor), Ашера (Ascher), Рассела (Russell), Кристиансена (Christiansen) [84, 96, 112, 113], посвященных методу коллокации. Метод КНН был впервые предложен и исследован А.Г. Слепцовым, Ю.И. Шокиным, А.В. Плясуновой сначала для обыкновенных дифференциальных уравнений [71], а затем и для уравнений в частных производных [72, 73, 109], в том числе с применением адаптивных сеток [119]. Дальнейшее развитие метод КНН получил в работах Шапеева В.П., Семина Л.Г., Беляева В.В, Исаева В.И. При решении задач гидродинамики: уравнениях Стокса [69], Навье-Стокса в двумерных [42, 44, 68] и трехмерных постановках [81, 118]. Метод КНН применялся при моделировании лазерной сварки металлических изделий [49, 93]. В работах [12, 47] были реализованы варианты метода с адаптивными сетками в областях с криволинейной границей. Алгоритмы, используемые в методе КНН продолжают

развиваться и оптимизироваться [43, 45, 48, 115].

Так как в большинстве практически важных задач не удается получить аналитические решения, то естественным требованием к численному методу является получение приближенного решения исходной задачи с заданной точностью. Из-за того, что во многих случаях она должна быть достаточно высокой возникает задача повышения точности приближенного решения. Многие проекционные методы основаны на полиномиальной аппроксимации, т.е. представлении приближенного решения в виде полинома или кусочно-полиномиальной функции, что и определяет два основных подхода повышения точности. Первый подход основан на разбиении исходной области на более мелкие подобласти, в которых решение аппроксимируется полиномами невысоких степеней. Повышение точности реализуется за счет увеличения количества подобластей с незначительным повышением степени аппроксимирующих полиномов в подобластях. Вторым подходом заключается в применении полиномов высоких степеней. В этом случае повышение точности достигается за счет увеличения степени полинома, аппроксимирующего решение в подобласти, что позволяет использовать малое число подобластей или вовсе отказаться от разбиения области.

Для обозначения первого подхода в литературе [88] встречается термин *h-refinement*, который указывает на то, что увеличение точности происходит за счет уменьшения характерного размера подобластей, которое часто обозначается через h . На таком подходе основан классический метод конечных элементов, реализованный в различных инженерных вычислительных пакетах. Второе направление обозначается *p-refinement*, где под p понимается степень аппроксимирующего полинома. Известными примерами численных методов, основанных на этом подходе, являются спектральный метод и p -метод конечных элементов. Далее будем использовать термины *h-подход*, *p-подход*. Принципиальное отличие этих подходов заключается в том, каким образом увеличение числа свободных параметров в представ-

лении решения отражается на уменьшении погрешности приближения. В методе коллокаций, как и в методе КНН, погрешность численного решения дифференциального уравнения m -го порядка с достаточно гладким решением оценивается как $O(h^{p-m+1})$ [112]. Таким образом, при использовании h -подхода порядок аппроксимации метода фиксирован и наблюдается степенной закон уменьшения погрешности с ростом числа разбиений. А в случае p -подхода порядок аппроксимации увеличивается с ростом степени аппроксимирующего полинома и возникает экспоненциальный характер уменьшения погрешности, позволяющий получать высокую точность при малых вычислительных затратах. Стоит отметить, что два описанных способа повышения точности не противоречат друг другу и могут быть успешно использованы совместно (hp -подход), как это, например, реализовано в методе спектральных элементов. Более того hp -подход является более универсальным и при правильном использовании более экономичным с точки зрения вычислительных затрат [88, 114].

Методы, ориентированные на применение p -подхода, являются более сложными с точки зрения реализации, и возможно поэтому они не сразу нашли широкое применение на практике. Метод Фурье [39, 87], в котором решение представляется в виде ряда Фурье, относится к методам, использующим полиномы высокой степени, но не алгебраические, а тригонометрические. Широкую известность получили псевдоспектральный метод [99, 102] (в отечественной литературе известен как метод ортогональной коллокаций [18]) и спектральный метод [88, 91] для вариационных постановок. Аналогичный подход был реализован и в методе конечных элементов (МКЭ), соответствующая реализация получила название p -МКЭ [114]. Но в отличие от перчисленных методов, реализация которых позволяет относительно просто увеличивать степень полиномов в представлении приближенного решения, в p -МКЭ эта задача является более сложной. Самой известной и наиболее универсальной реализацией hp -подхода является метод спектральных эле-

ментов [100,108], где в каждом элементе используются полиномы достаточно высоких степеней и пространственные сетки сложной геометрии.

Применение полиномов высоких степеней можно рассматривать как частный случай теории методов без насыщения (ненасыщения), которая изучает приближения функций, обладающие асимптотикой наилучших приближений. При соответствующей реализации p – подхода метод обладает свойством ненасыщаемости. Идеиные и теоретические основы методов без насыщения были заложены К. И. Бабенко [10]. В Новосибирском научном центре эти подходы активно разрабатывают В.Н. Белых [11], А. М. Блохин, Б. В. Семисалов [14, 70].

В методе коллокаций и наименьших невязок традиционно использовался h – подход, в котором решение имеет кусочно-полиномиальное представление с полиномами невысоких степеней. В настоящей работе для метода КНН разработаны и реализованы p – и hp – подходы.

Отметим, что применение полиномов высоких степеней не может быть реализовано простым увеличением степени. Этот подход требует специальных приемов и вводит ряд ограничений на класс рассматриваемых задач. Например, при таком подходе неприменимо равномерное расположение точек коллокаций, т.к. в этом случае теория полиномиального приближения не гарантирует сходимости приближенного решения к точному. Достаточно вспомнить известный пример Рунге [92], в котором погрешность интерполяции на равномерной сетке растет с увеличением числа узлов. В областях произвольной геометрической формы проблема выбора точек коллокаций, обеспечивающих сходимость, не решена даже в случае интерполяции. Однако, для канонических областей и их конформных отображений такие способы существуют. Например, выбор точек коллокаций с применением корней полиномов Чебышёва обеспечивает сходимость приближения на достаточно широком классе функций [60]. При работе с полиномами высоких степеней требуются специальные формы представления полиномов, позволяющие ми-

минимизировать ошибки округления. Например, в данной работе используются ряды по полиномам Чебышёва и их прямые произведения. И конечно очень важным условием является дифференцируемость решения, т.к. оценка $O(h^{p-m+1})$ верна только для достаточно гладких решений. Стоит отметить, что особенности, связанные с ограниченной гладкостью решения не всегда являются непреодолимыми для методов высокого порядка аппроксимации. Если удастся локализовать особенность и поместить ее на границу двух подобластей, таким образом, чтобы в каждой подобласти решение не имело особенностей, то p -подход может быть успешно применен.

Несмотря на перечисленные ограничения, p -подход является весьма актуальным. Многие расчетные области могут быть конформно отображены в канонические, а расчетные сетки можно строить с учетом особенностей решения, поэтому p -подход может быть применен для достаточно широкого класса задач.

В диссертационной работе новые варианты метода КНН были разработаны для решения задач механики деформируемого твёрдого тела. А именно для расчета напряжённо-деформированного состояния (НДС) многослойных анизотропных прямоугольных пластин и балок [24, 25, 29–31, 101].

Многие конструктивные элементы машин и аппаратов современной техники представляют собой пластины и оболочки различной формы и слоистой структуры с переменными геометрическими и физико-механическими параметрами. Для исследования прочности, жёсткости и несущей способности этих конструкций требуется оценить их НДС. Анизотропия и слоистая (неоднородная) структура таких конструкций приводят к сложному распределению напряжений и деформаций. Расчёт НДС многослойных анизотропных пластин можно попытаться осуществить, опираясь на пространственную теорию упругости. Но при таком подходе при построении вычислительных моделей возникает ряд трудностей. Малая толщина слоев по сравнению с другими геометрическими размерами пластин и анизотропия мате-

риалов являются источниками малых параметров при старших производных, что приводит к плохой обусловленности соответствующих задач. Из-за независимой аппроксимации решения в каждом слое расчетные сетки становятся очень подробными. При решении пространственных задач механики деформируемого твердого тела наиболее востребованы конечно-элементный [65, 97, 122] и гранично-элементный [17, 83, 98] подходы и другие подходы [66, 67]. Но для задач расчета НДС многослойных анизотропных пластин применение этих методов приводит к описанным вычислительным сложностям. Высокая вычислительная сложность и плохая обусловленность задач линейной алгебры стимулировали разработку альтернативных подходов.

Наличие малых параметров в системах ДУ многослойных конструкций позволяет в ряде случаев заранее сформулировать некоторые допущения о характере НДС конструкции и понизить размерность исходной задачи, исключив из рассмотрения направление вдоль толщины пластины. На этом подходе основаны *теории пластин*. К настоящему времени разработано большое количество теорий пластин, использующих различные гипотезы о характере распределения напряжений, деформаций и перемещений по толщине пластин [28]. Но следует помнить, что решения, полученные в рамках теорий пластин, являются приближениями к решениям, полученным в рамках пространственной теории упругости. Поэтому вопрос о величине погрешности той или иной теории пластин, о ее применимости, является актуальным.

Первые теории пластин разрабатывались для случаев изотропных и однородных материалов. Наиболее известными и широко распространенными являются классическая теория Кирхгофа — Лява [56, 62, 111] и теория Тимошенко [21, 106]. В некоторых случаях, например, для очень тонких пластин, эти теории применяют и для расчета многослойных пластин. Этот факт является очень важным так как указанные теории являются достаточно простыми с вычислительной точки зрения, но и для них в замкнутой аналитической форме решение можно получить лишь в редких случаях. Опреде-

лённые классы задач теории пластин и оболочек можно свести к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений и воспользоваться, например, методами дискретной ортогонализации Годунова [23, 26, 27], инвариантного погружения [9] или сплайн-коллокации [36]. Однако многие практически важные задачи механики деформируемого твёрдого тела приводят к необходимости решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Высокая практическая значимость задач привела к тому, что для расчета тонкостенных конструкций применялись самые разные численные методы. Например, метод конечных разностей (МКР) для решения задач механики тонкостенных пластин и оболочек [1, 59]. Особенности МКР является простота реализации и возможность рассмотрения сложных видов нагружения, однако при этом возникают трудности с реализацией краевых условий, которые содержат производные высоких порядков. Метод граничных элементов [17, 83, 98] позволяет проводить расчеты для конструкций со сложной геометрий, но в ряде важных случаев приводит к сложным с вычислительной точки зрения задачам [50]. Для решения этого класса задач также использован метод коллокаций [18]. Наиболее популярным и универсальным является метод конечных элементов (МКЭ) [65, 97, 122].

Для многослойных конструкций с существенно различными физико-механическими характеристиками слоёв необходимо применять уточнённые теории, учитывающие поперечные сдвиги в слоях [28]. Усложнение математических моделей повышает требования к используемым численным методам [15, 19]. Традиционные схемы и алгоритмы численного интегрирования краевых задач на таких классах жёстких систем нелинейных уравнений в частных производных оказываются малоэффективными. Переход от классической теории однородных изотропных пластин и оболочек к тем или иным уточнённым теориям сопровождается увеличением порядка разрешающих систем дифференциальных уравнений и качественным изменением структуры их решений, появлением новых быстроизменяющихся компонент реше-

ний, имеющих ярко выраженный характер погранслоёв [28, 37, 54]. В настоящей работе при расчёте анизотропных слоистых пластин помимо классической теории Кирхгофа — Лява и теории Тимошенко используется уточненная теория ломаной линии Григолюка-Чулкова [34, 35].

В диссертационной работе для решения задач механики прямоугольных многослойных анизотропных пластин разработан и применен p – подход в методе КНН, позволяющий проводить расчеты, в том числе, и для уточненной теории Григолюка-Чулкова.

Сложная структура новых композиционных материалов приводит к появлению специфических особенностей при их деформировании. Многие современные конструкционные материалы, по-разному сопротивляются растяжению и сжатию. Например, модуль упругости, пределы прочности и текучести при растяжении и сжатии могут сильно отличаться. Ярким примером разносопротивляющего материала являются эпоксидные смолы – полимеры, у которых модуль упругости при растяжении может отличаться от модуля упругости при сжатии на десятки процентов [55, 63, 86]. Многие композиционные материалы (КМ) также обладают свойством разносопротивляемости растяжению и сжатию. Например, такими свойствами обладают углепластики – композиты, армированные углеродными волокнами, расположенными в матрице из полимерных смол. Характерная особенность полимерных материалов – выраженная нелинейность диаграмм деформирования, являющаяся одним из источников нелинейного поведения конструкций из полимерного КМ [6].

Задача деформирования разносопротивляющихся конструкций требует решения задачи с неизвестной границей. В ходе решения задачи требуется определять зоны где конструкция испытывает сжимающие или растягивающие напряжения и использовать для расчета поведения в этих зонах соответствующие механические параметры. Вопросы расчета деформирования для нелинейно-упругих разносопротивляющихся материалов мало исследо-

ваны вследствие значительных вычислительных трудностей. Задачи моделирования линейно-упругих разномодульных материалов рассматривались, в частности, С. П. Тимошенко [78] и С. А. Амбарцумяном [3, 4]. В работе [2] изложен теоретический подход к расчету разносопротивляющихся растяжению — сжатию нелинейно-упругих балок при изгибе. В работе разработана математическая модель изгиба балки из нелинейно-упругого разносопротивляющегося материала, а также вычислительная методика, которые позволили провести численные расчеты балок из углепластиков и полимерных материалов [7].

Цель работы заключается в разработке эффективного численного метода решения задач механики многослойных анизотропных элементов конструкций в виде балок и прямоугольных пластин, в разработке математической модели расчета композитных балок, учитывающей физически нелинейное поведение и разносопротивляемость композиционных материалов растяжению и сжатию.

Объектами исследования являются численный метод коллокаций и наименьших невязок и напряженно-деформированное состояние многослойных анизотропных балок и прямоугольных пластин.

Предметами исследования являются применение полиномов высоких степеней в численном методе коллокаций и наименьших невязок и эффект разносопротивляемости растяжению и сжатию композиционных материалов и конструкций из них.

Задачи, решенные в ходе достижения поставленной цели.

1. Для задач изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин получены разрешающие системы дифференциальных уравнений в кинематических переменных для пространственной теории упругости и трех теорий пластин: Кирхгофа-Лява, Тимошенко и Григолюка-Чулкова. Проведен сравнительный анализ особенностей, влияющих на вычислительные затраты.

2. Разработан модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок (КНН), основанный на применении полиномов высоких степеней. Метод реализован в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. Проведена верификация разработанного метода на ряде тестовых задач с особенностями. На примере задачи изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин исследовано влияние относительных толщин и числа слоев на погрешность используемых теорий пластин. Реализован способ уточнения значений поперечных касательных напряжений.
3. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния пластин на упругом основании, с использованием различных моделей реакции упругого основания: Винклера, Власова и Пастернака.
4. Разработана математическая модель расчета трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, учитывающая физически нелинейное поведение материалов и их разнсопротивляемость растяжению и сжатию. Разработан и реализован алгоритм численного решения систем нелинейных уравнений для разных видов аппроксимации физических соотношений. Проведена валидация разработанной математической модели на экспериментальных данных, полученных в ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ.
5. Разработан и зарегистрирован комплекс, состоящий из трех программ, для ЭВМ для расчета напряженно-деформированного состояния изотропных и многослойных анизотропных прямоугольных пластин и трехточечного изгиба композитных балок с учетом физически нелинейного поведения материала и его разнсопротивляемости растяжению и сжатию.

На защиту выносятся результаты, соответствующие четырем областям исследования паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое модели-

рование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам.

Область исследования 1:

1. Математическая модель и алгоритм расчета трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, учитывающая физически нелинейное поведение материалов и их разносопротивляемость растяжению и сжатию.

Область исследования 3:

2. Модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок (КНН), основанный на применении полиномов высоких степеней, для численного решения краевых задач в канонических областях в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. Верификация метода на ряде тестовых задач с особенностями и результатах расчетов, полученных другими авторами.

Область исследования 4:

3. Комплекс программ для ЭВМ для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) изотропных и многослойных анизотропных прямоугольных пластин и трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, разносопротивляющихся растяжению и сжатию с учетом их физически нелинейного поведения.

Область исследования 5:

4. Применение модифицированного метода КНН для задач изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин в рамках классической теории Кирхгофа-Лява, уточненных теорий Тимошенко и Григлюка-Чулкова. Сравнительный анализ результатов расчетов НДС пластин в рамках пространственной теории упругости и трех различных

теорий пластин. Процедура восстановления поперечных касательных напряжений для теории Григолюка-Чулкова на основе уравнений равновесия пространственной теории упругости. Валидация математической модели трехточечного изгиба полимерных композитных балок.

Научная новизна изложенных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

1. Впервые предложен и реализован модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок, основанный на применении полиномов высоких степеней, для численного решения краевых задач в канонических областях в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. Координаты точек коллокаций определяются с применением корней многочлена Чебышёва и используются специальные представления приближенного решения, позволяющие уменьшить накопление ошибок округления. На бесконечно гладких решениях получен экспоненциальный порядок уменьшения погрешности с возрастанием степени полиномов.
2. Разработанный модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок использован для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) многослойных анизотропных прямоугольных пластин в рамках классической теории Кирхгофа-Лява и уточненных теорий Тимошенко и Григолюка-Чулкова. Проведен сравнительный анализ применимости перечисленных теорий на примере задачи изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин.
3. Разработана новая математическая модель расчета трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, учитывающая физически нелинейное поведение материала и его разносопротивляемость растяжению и сжатию. Предложен алгоритм численного решения нелинейных уравнений и проведена валидация разработанной математической модели.

4. Создан комплекс программ для ЭВМ для расчета НДС изотропных и многослойных анизотропных прямоугольных пластин и трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, разносопротивляющихся растяжению и сжатию с учетом физически нелинейного поведения, с помощью которого проведено исследование деформирования балок и прямоугольных пластин.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования предложенных численных алгоритмов и комплекса программ при проектировании и анализе деформирования композитных конструкций в строительной, авиационной и ракетно-космической отраслях. Учет эффекта разносопротивляемости растяжению и сжатию при физически нелинейном поведении углепластиков исследован в рамках совместного проекта с Всероссийским институтом авиационных материалов ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ «Разработка и совершенствование технологий проектирования и создания новых перспективных композиционных материалов (углепластиков) и конструкций из них для авиационной и других отраслей промышленности», поддержанного грантом РФФИ № 13-01-12032-офи_м.

Обоснованность и достоверность результатов, полученных в диссертационной работе обеспечена использованием фундаментальных законов механики деформируемого твердого тела, строгих математических методов и подтверждается сопоставлением полученных результатов с расчетами других исследователей и экспериментальными данными, полученными в ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ.

Представление работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: Международной конференции «Актуальные проблемы математики, механики, информатики» (Екатеринбург, 2009); Всероссийской конференции по вычислительной математике (Новосибирск, 2009); Всероссийских конференциях молодых ученых по математическому моделированию

и информационным технологиям (Новосибирск, 2011; Томск, 2013; Тюмень, 2014); Международной конференции ЕССОМАС (Австрия, Вена, 2012); Международной конференции «Математические и информационные технологии», (Сербия, Врнячка Баня; Черногория, Будва, 2013) ; Всероссийских конференциях по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Барнаул, 2013; Омск, 2015); Международной конференции «Успехи механики сплошных сред», приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 2014); Всероссийской конференции, приуроченной к 95-летию академика Л.В. Овсянникова «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, 2014); Международной Азиатской школе-семинаре «Проблемы оптимизации сложных систем» (Кыргызская Республика, оз. Иссык-Куль, Булан-Соготту, 2014); Всероссийской конференции с международным участием «Индустриальные информационные системы» (Новосибирск, 2015); Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015», посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, (Новосибирск, 2015); VIII Международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике», посвященной 115-летию со дня рождения академика М. А. Лаврентьева. (Новосибирск, 2015); Всероссийской конференции «Безопасность и живучесть технических систем» (Красноярск, 2015).

В полном объеме материалы диссертации докладывались и обсуждались на Объединенном семинаре «Информационно-вычислительные технологии (численные методы механики сплошной среды)» Института вычислительных технологий СО РАН, Новосибирского государственного университета и Новосибирского государственного технического университета (руководители – академик Ю.И. Шокин и проф. В.М. Ковеня), Объединенном семинаре «Численный анализ» Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирского государственного университета (руководитель – проф. В.П. Ильин), семинаре «Вычислительная механика

деформируемых сред» Института вычислительного моделирования СО РАН (руководитель – проф. В.М. Садовский).

Публикации. По теме диссертации опубликована **29** печатная работа, в том числе **7** статей в периодических изданиях рекомендованных ВАК, **6** публикаций в трудах международных и всероссийских конференций, **13** тезисов докладов международных и всероссийских конференций и **3** свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Во всех опубликованных работах автор принимал непосредственное участие в постановке задач, разработке и реализации вычислительных алгоритмов, обсуждении и критическом анализе полученных результатов, в подготовке и представлении статей и докладов по теме исследований.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объём работы составляет 179 страниц. В диссертации содержатся 27 рисунков и 27 таблиц. Список литературы состоит из 122 источников.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. С. К. Голушко за всестороннюю поддержку и постоянное внимание в ходе выполнения работы. Автор благодарит за плодотворные обсуждения д.ф.-м.н., проф. В. П. Шапеева и к.ф.-м.н. Б. В. Семисалова. Успешному выполнению работы способствовали ценные критические замечания д.ф.-м.н., проф. Ю. В. Немировского, к.ф.-м.н. Е. В. Амелиной, к.ф.-м.н. А. В. Юрченко.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы исследований, приведены основные результаты и положения, выносимые на защиту. Изложено краткое содержание диссертации по главам.

Глава 1 посвящена выводу и анализу разрешающих систем дифференциальных уравнений для задачи изгиба многослойных анизотропных прямо-

угольных пластин. В работе рассмотрены три теории пластин: классическая теория Кирхгофа-Лява и уточненные теории Тимошенко и Григолюка-Чулкова, в которых по-разному моделируются поперечные сдвиги. Для каждой теории пластин приведены исходные и получены разрешающие системы дифференциальных уравнений в кинематических переменных. Получена оценка значений малых параметров при старших производных для каждой из рассмотренных теорий пластин.

Глава 2 посвящена численному методу решения краевых задач – методу коллокаций и наименьших невязок (КНН) и его модификации, основанной на применении полиномов высоких степеней. В модифицированном методе КНН точки коллокаций выбираются с применением корней многочленов Чебышёва, а для представления решения используются разложения в ряды по многочленам Чебышёва и их прямые произведения. На одно-, двух- и трехмерных тестовых задачах проведено сравнение традиционного и модифицированного методов КНН.

Глава 3 посвящена расчету и анализу напряженно-деформированного состояния многослойных прямоугольных пластин. Рассмотрен ряд тестовых задач и получено хорошее согласование с результатами других авторов. Исследована задача изгиба пластин, лежащих на упругом основании, с использованием трех различных моделей реакции основания: Винклера, Власова, Пастернака. Рассмотрена задача изгиба трех-, пяти- и семислойных шарнирно-закрепленных пластин разной относительной толщины с трансверсально-изотропными слоями. Для рассматриваемых теорий пластин реализован модифицированный метод КНН, проведен сравнительный анализ результатов расчетов в рамках теорий пластин и пространственной теории упругости.

Глава 4 посвящена разработке математической модели расчета трехточечного изгиба полимерных и композитных балок, учитывающей физическую нелинейность материала и эффект разносопротивляемости растяже-

нию и сжатию. Показано, что неучет эффекта разносопротивляемости материала растяжению и сжатию может привести к отклонению от результатов механических испытаний более чем на 15 %.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Исаев, В.И. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона / В.И. Исаев, В.П. Шапеев, С.В. Идимешев // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 1. — С. 85–94.
2. Голушко, С.К. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, № 6. — С. 31–43.
3. Шапеев, В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок для трёхмерных уравнений Навье - Стокса / В.П. Шапеев, Е.В. Ворожцов, В.И. Исаев, С.В. Идимешев // Вычислительная математика и программирование. — 2013. — Т. 14, № 1. — С. 306–322.
4. Идимешев, С.В. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин на упругом основании / С.В. Идимешев // Известия АГУ. — 2014. № 1/1 (81)— С. 53–56.
5. Голушко, С.К. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к задачам механики анизотропных слоистых пластин / С. К. Голушко, С. В. Идимешев, В. П. Шапеев // Вычислительные технологии. — 2014. — Т. 19, № 5. — С. 24–36.
6. Амелина, Е. В. Анализ и обработка экспериментальных данных при деформировании полимеров и углепластиков / Е. В. Амелина, С. К. Голушко, В. С. Ерасов, С.В. Идимешев [и др.] // Омский научный вестник. — 2015. — № 3 (143). — С. 339–345.

7. Амелина, Е. В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчёт / Е. В. Амелина, С. К. Голушко, В. С. Ерасов, С.В. Идимешев [и др.] // Вычислительные технологии. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 27–52.

Публикации в трудах международных и всероссийских конференций:

8. Исаев, В.И. О методе коллокаций и наименьших квадратов для уравнения Пуассона / В.И. Исаев, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев [и др.] // Сб. статей конф. «Актуальные проблемы математики, механики, информатики». (Екатеринбург, 2–6 февраля 2009). — 2009. — С. 53-57.
9. Shapeev, V.P. The collocations and least squares method: application to numerical solution of the Navier-Stokes equations / V.P. Shapeev, V.I. Isaev, S.V. Idimeshev // CD-ROM Proc. of the 6th ECCOMAS (Austria, Vienna, September 10–14, 2012). — 2012.
10. Golushko, S.K. Application of collocations and least residuals method to problems of mechanics of isotropic and anisotropic plates / S.K. Golushko, S.V. Idimeshev // Zbornic radova konferencije MIT 2013 (Vrnjackoj Banji, Republika Srbija, Septembra 5-8, 2013; Budvi, Crna Gora, Septembra 9-14, 2013). — 2014. — P. 236–242.
11. Голушко, С.К. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к решению задач механики анизотропных слоистых пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Труды X Межд. Азиатской школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем» (Кыргызская Республика, оз. Иссык-Куль, с. Булан-Соготту, 25 июля – 5 августа, 2014). — 2014. — С. 225–233.
12. Голушко, С.К. Численное решение краевых задач механики слоистых конструкций / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Сборник докладов

международной конференции «Успехи механики сплошных сред», приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 28 сентября - 4 октября 2014). — 2014. — С. 136-139.

13. Голушко, С.К. Сравнительный анализ различных теорий в задачах изгиба многослойных ортотропных прямоугольных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Материалы XIV Всерос. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. (Омск, 2–4 июня 2015). — 2015. — С. 44–47.

Государственная регистрация программ для ЭВМ:

14. Программа расчета изотропных прямоугольных пластин методом коллокаций и наименьших невязок : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014663756 / С. В. Идимешев, С. К. Голушко; зарег. 25.02.2015.
15. Программа расчета многослойных анизотропных прямоугольных пластин модифицированным методом коллокаций и наименьших невязок: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015612644 / С. В. Идимешев, С. К. Голушко; зарег. 24.02.2015.
16. Программа расчета трехточечного изгиба композитных балок разносопротивляющихся растяжению и сжатию hp-методом коллокаций и наименьших невязок: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016614056 / С. В. Идимешев; зарег. 13.04.2016.

В сборниках тезисов докладов международных и всероссийских конференций:

17. Идимешев, С.В. Метод КНК решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона четвертого порядка / С.В. Идимешев // Сб. тезисов Всерос.

- конф. по вычислительной математике КВМ-2009 (Новосибирск, 23-25 июня 2009). — 2009. С. — 15.
18. Идимешев, С.В. О подходах повышения порядка сходимости в методе КНК / С.В. Идимешев // Сб. тезисов Межд. науч. студенческой конф. (Новосибирск, 10-14 апреля 2010). — 2010. С. — 28.
19. Идимешев С.В. Идимешев, С.В. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших квадратов при решении краевых задач механики тонкостенных оболочек / С.В. Идимешев // Сб. тезисов Всеросс. конф. молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 3 - 6 октября 2011). — 2011. С. — 17.
20. Идимешев, С.В. О расчете изотропных и анизотропных прямоугольных пластин на упругом основании методом коллокаций и наименьших невязок / С.В. Идимешев // Сб. тезисов Всеросс. конф. молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Томск, 15-17 октября 2013). — 2013. С. — 19.
21. Голушко, С.К. Метод коллокаций и наименьших квадратов в задачах механики изотропных и анизотропных прямоугольных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Сб. тезисов Междур. конф. Математические и информационные технологии, (Сербия, Врнячка Баня 5-9 сентября; Черногория, Будва 10-14 сентября 2013). — 2013. С. — 91.
22. Голушко, С.К. О расчете прямоугольных пластин на упругом основании методом коллокаций и наименьших квадратов / С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев // Сб. тезисов Всеросс. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Барнаул, 26-28 июня 2013). — 2013. С. — 62.
23. Голушко, С.К. О математических моделях и методах решения краевых

- задач в механике слоистых сред / С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев // Сб. тезисов Всерос. конф., приуроченной к 95-летию акад. Л.В. Овсянникова "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение" (Новосибирск, 18-22 апреля 2014) . — 2014. С. — 47.
24. Идимешев, С.В. Модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок в задачах механики многослойных анизотропных пластин / С.В. Идимешев // Сб. тезисов Всерос. конф. молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Тюмень, 29-31 октября 2014). — 2014. — С. 34.
25. Голушко, С.К. Метод коллокаций и наименьших невязок в задачах статики многослойных термоупругих прямоугольных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Сб. тезисов Междунар. конф. «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе» (Сургут, 14-18 мая 2014). — 2014. — С. 232–233.
26. Голушко, С.К. Сравнительный анализ применения различных теорий в задаче изгиба многослойных ортотропных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Сб. тезисов VIII Междунар. конф. "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике посвящ. 115-летию со дня рождения акад. М. А. Лаврентьева. (Новосибирск, 7–11 сентября 2015). — 2015. — С. 218–219.
27. Идимешев, С.В. Прочность многослойных прямоугольных пластин в задачах изгиба композитных конструкций / Идимешев, С.В. // Материалы V Всерос. конф. "Безопасность и живучесть технических систем". (Красноярск, 12–16 октября 2015) . — 2015.—Т. 1 — С. 201–206.
28. Идимешев, С.В. Разработка метода расчета анизотропных слоистых сред и создание пакета прикладных программ на его основе / Идиде-

шев, С.В.// Сб. тезисов Всеросс. конф. с Междунар. участием «Индустриальные информационные системы» – ИИС-2015 (Новосибирск, 20-24 сентября 2015). — 2015. — С. 35.

29. Голушко, С.К. Модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок в механике многослойных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев// Сб. тезисов Междунар. конф. «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015» (АПВПМ-2015), посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Г. И. Марчука, (Новосибирск, 19-23 октября 2015). — 2015. — С. 8.

Глава 1.

ИСХОДНЫЕ И РАЗРЕШАЮЩИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

1.1. Многослойные анизотропные пластины

В настоящее время многослойные анизотропные пластины в качестве элементов конструкций находят широкое применение в самых разных отраслях: в аэрокосмической, авиационной, корабле- и машиностроении, гражданской. Такие пластины состоят из нескольких слоев постоянной или переменной толщины, а материал каждого слоя может обладать своими уникальными свойствами, в т.ч. анизотропией. Конструкции из композиционных материалов (КМ) обладают значительными преимуществами по сравнению с традиционными однородными материалами. Высокие удельные жесткость и прочность, малый вес – причины, по которым КМ получили широкое распространение. При создании конструкций из КМ часто применяется армирование волокнами. Примерами таких материалов являются стекло-, боро-, органико- и углепластики. В них прочные и жесткие волокна помещены в связующий материал – матрицу, которая обеспечивает совместность работы волокон и защищает их от воздействия окружающей среды. Технология производства конструкций из армированных КМ часто сводится к работе с монослоями (препрегами) – тонкими слоями с регулярной схемой укладки волокон. В конкретных конструкциях монослои располагаются в определенном порядке

и имеют заданную ориентацию для максимально эффективной реализации прочностных свойств конструкции. Конструкции, созданные по описанной технологии, являются примером многослойных конструкций с анизотропными слоями.

Композиционные материалы являются гетерогенными средами, что отражается на сложном виде распределения напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций, созданных на их основе. На данный момент задача о деформировании многослойных конструкций из КМ в полной постановке является практически неразрешимой, поэтому на практике часто прибегают к некоторым “усреднениям”. Например, неоднородный КМ моделируется как однородный материал с анизотропными свойствами. Естественно возникает задача определения таких “усредненных” характеристик. Существует множество подходов для их определения, начиная от эксперимента и заканчивая построением сложных структурных моделей, опирающимися на атомные и молекулярные взаимодействия [61, 103, 120]. Так или иначе, цель каждого из них описать механические характеристики “усредненного” материала.

Обычно механические характеристики монослоев предварительно определяются в соответствующих лабораторных испытаниях. Это позволяет рассматривать материал слоя как однородный анизотропный материал с “усредненными” свойствами. А конструкции из них могут быть представлены как многослойные конструкции с анизотропными слоями, для описания НДС которых можно применять хорошо развитый аппарат теории упругости. Все это приводит к упрощению математических моделей и позволяет проводить численные расчеты.

Многослойные анизотропные прямоугольные пластины имеют достаточно простую геометрическую форму. При этом в пластинах при определенных условиях закрепления, видах нагрузки и свойствах материала возникают все те характерные особенности НДС, которые наблюдаются в более сложных

конструкциях.

Для моделирования НДС многослойных анизотропных пластин воспользуемся стационарными уравнениями пространственной линейной теории упругости (3D ТУ). Каждый слой пластины будем рассматривать однородным анизотропным материалом, поведение которого описывается уравнениями 3D ТУ. Для корректной постановки краевой задачи на границе между слоями необходимо задать условия контакта, а на торцевых гранях слоя условия закрепления.

Особенностью конструкций из КМ является малость толщин слоев по отношению к другим геометрическим размерам (тонкостенная конструкция). Это приводит к тому, что, несмотря на корректную постановку краевой задачи, численное решение соответствующих уравнений может приводить к серьезным вычислительным сложностям. Они возникают по трем основным причинам. Первая заключается в геометрии слоя, толщина которого является малой величиной по сравнению с другими геометрическими размерами. С точки зрения вычислительной математики это приводит к тому, что в системе дифференциальных уравнений возникает малый параметр при старших производных, что может приводить к появлению больших градиентов решения и погранслоям. При построении расчетных сеток для отдельного слоя также возникают трудности, связанные с малостью относительной толщины слоя. Например, в методе конечных элементов (МКЭ), традиционно используемом для решения задач механики деформируемого твердого тела, при построении сетки желательно выполнение условия Делоне для всех ячеек сетки. Условие Делоне запрещает ячейкам сетки быть сильно вытянутыми в каком-либо направлении, что в свою очередь обеспечивает устойчивость к ошибкам округления в расчетах. Для тонкостенных конструкций это значит, что увеличение числа ячеек по толщине слоя приводит к быстрому увеличению общего числа ячеек, если они удовлетворяют условию Делоне. А применение подробных сеток приводит к СЛАУ больших размеров. Второй

причиной, затрудняющей получение численного решения, является анизотропия материала. Часто в качестве отдельного слоя рассматривается слой с волокнами, уложенными в одном направлении. Как уже отмечалось, в полимерных КМ волокна являются на порядок более жесткими, чем связывающая их матрица. При моделировании такого КМ как однородного трансверсально-изотропного тела, модуль упругости, соответствующий главному направлению упругости и совпадающему с направлением укладки волокон, имеет значение на порядок больший, чем модуль упругости в перпендикулярном направлении. Эта особенность является еще одним источником появления малых параметров при старших производных. Наконец, большинство реальных композитных конструкций имеют достаточно большое число слоёв. Число слоев может достигать нескольких десятков, а это значит что соответствующая сетка должна быть очень подробной.

Таким образом, при решении задачи в рамках пространственной теории упругости возникают СЛАУ большого размера, которые из-за наличия малого параметра могут быть плохо обусловленными.

Однако, малый параметр, связанный с малостью толщины слоя и вызывающий такие серьезные сложности при решении в рамках 3D ТУ, позволяет воспользоваться специальными подходами. Они позволяют понизить размерность задачи, в случае тонких пластин, свести ее к решению двумерной задачи относительно координат в плоскости пластин. Существуют различные подходы понижения размерности по малому параметру: асимптотические методы [33], методы гипотез [28, 110]. На последних основаны теории пластин, которые будут рассмотрены далее. В работе рассмотрены три теории пластин: классическая теория Кирхгофа-Лява, теория Тимошенко, и теория Григолюка-Чулкова. С вычислительной точки зрения теории пластин являются удачной альтернативой постановке в рамках 3D ТУ по двум главным причинам. Во-первых системы дифференциальных уравнений в частных производных для теорий пластин зависят только от двух

пространственных переменных, что сильно уменьшает вычислительный затраты по сравнению с расчетом в рамках 3D ТУ. Во-вторых, как правило, в уравнениях теорий пластин малые параметры при старших производных проявляются в меньшей степени, чем в исходной постановке теории 3D ТУ, а иногда совсем отсутствуют.

При этом важно помнить, что теории пластин являются приближениями пространственной теории упругости, поэтому вопрос о точности приближения является очень важным при расчетах в рамках теорий пластин. Следует отметить, что переход от классической теории однородных изотропных пластин к тем или иным уточнённым теориям сопровождается увеличением порядка разрешающих систем дифференциальных уравнений и качественным изменением структуры их решений, появлением новых быстро возрастающих и быстро убывающих решений, имеющих ярко выраженный характер погранслоёв [28]. Для решения поставленных задач здесь применяется численный метод p – и hp – КНН.

Для корректной постановки задач с использованием теорий пластин необходимо сформулировать задачу в рамках 3D ТУ. В следующем параграфе выпишем уравнения пространственной теории упругости.

1.2. Постановка задачи изгиба многослойных пластин в рамках пространственной теории упругости

Рассмотрим задачу изгиба прямоугольной пластины, состоящей из N трансверсально-изотропных слоев постоянной толщины (рисунок 1.1). Будем считать, что главные направления упругости материала слоев лежат в плоскости пластины. Предположим, что верхняя грань пластины находится под действием распределенной поперечной нагрузки $q(x, y)$, нижняя грань свободна, а на торцах пластины заданы соответствующие краевые условия. Будем считать, что слои жёстко скреплены между собой. Необходимо рас-

считать напряжённно-деформированное состояние такой пластины.

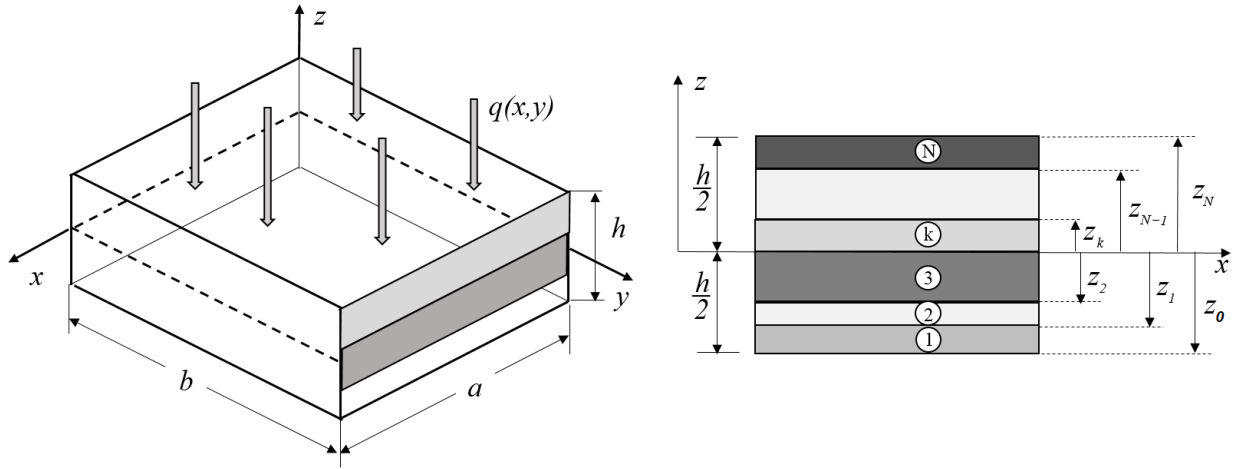


Рисунок 1.1 – Прямоугольная слоистая пластина под действием поперечной нагрузки; a, b, h — размеры пластины в направлениях x, y, z соответственно, z_k — координата верхней границы k -го слоя, h_k — толщина k -го слоя, $k = 1, \dots, N$.

Для главной системы координат, с осями параллельными сторонам пластины, используется обозначение (x, y, z) . Дополнительно в каждом k -том слое введем декартову систему координат (x^k, y^k, z^k) , где ось x^k сонаправлена с главным направлениями упругости k -го слоя, а z^k сонаправлена z . Назовем систему координат (x^k, y^k, z^k) *материальной*. Плоскость перпендикулярную главному направлению упругости назовем плоскостью изотропии слоя.

В рамках пространственной теории упругости [58] физические соотношения для каждого трансверсально-изотропного слоя, в системе координат (x, y, z) можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{zz}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{13}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{23}^k & Q_{26}^k \\ Q_{13}^k & Q_{23}^k & Q_{33}^k & Q_{36}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{36}^k & Q_{66}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx}^k \\ e_{yy}^k \\ e_{zz}^k \\ e_{xy}^k \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{44}^k & Q_{45}^k \\ Q_{45}^k & Q_{55}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{yz}^k \\ e_{xz}^k \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где $\sigma_{xx}^k, \sigma_{yy}^k, \sigma_{zz}^k, \sigma_{xy}^k, \sigma_{xz}^k, \sigma_{yz}^k, e_{xx}^k, e_{yy}^k, e_{zz}^k, e_{xy}^k, e_{xz}^k, e_{yz}^k$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций; Q_{ij}^k — коэффициенты матрицы жёсткости k -го слоя в главной системе координат ($i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 6$). Коэффициенты Q_{ij}^k выражаются через коэффициенты матрицы жёсткости C_{ij}^k в материальной системе координат (x^k, y^k, z^k) в виде

$$\begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{13}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{23}^k & Q_{26}^k \\ Q_{13}^k & Q_{23}^k & Q_{33}^k & Q_{36}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{36}^k & Q_{66}^k \end{pmatrix} = D_1^k C_1^k (D_1^k)^T, \quad \begin{pmatrix} Q_{44}^k & Q_{45}^k \\ Q_{45}^k & Q_{55}^k \end{pmatrix} = D_2^k C_2^k (D_2^k)^T,$$

где

$$D_1^k = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta^k & \sin^2 \theta^k & 0 & -\sin 2\theta^k \\ \sin^2 \theta^k & \cos^2 \theta^k & 0 & \sin 2\theta^k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\sin 2\theta^k)/2 & -(\sin 2\theta^k)/2 & 0 & \cos 2\theta^k \end{pmatrix}, \quad C_1^k = \begin{pmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{13}^k & 0 \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{23}^k & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{33}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66}^k \end{pmatrix},$$

$$D_2^k = \begin{pmatrix} \cos \theta^k & \sin \theta^k \\ -\sin \theta^k & \cos \theta^k \end{pmatrix}, \quad C_2^k = \begin{pmatrix} C_{44}^k & 0 \\ 0 & C_{55}^k \end{pmatrix}.$$

где θ^k — угол между осями x и x^k , отсчитываемый от x против часовой стрелки. Коэффициенты C_{ij}^k выражаются через технические постоянные следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{11}^k &= \frac{1 - \nu_{LT}^k{}^2}{E_L^k \Delta}, & C_{12}^k &= C_{13}^k = \frac{(1 + \nu_{LT}^k) \nu_{TT}^k}{E_L^k E_T^k \Delta}, \\ C_{22}^k &= C_{33}^k = \frac{E_T^k - E_L^k \nu_{TT}^k{}^2}{E_L^k E_T^k{}^2 \Delta}, & C_{23}^k &= \frac{E_T^k \nu_{LT}^k + E_L^k \nu_{TT}^k{}^2}{E_L^k E_T^k{}^2 \Delta}, \\ C_{44}^k &= G_{TT}^k, & C_{45}^k &= C_{66}^k = G_{LT}^k, \\ \Delta &= \frac{E_T^k{}^2 - E_T^k{}^2 \nu_{LT}^k{}^2 - 2E_L^k E_T^k \nu_{TT}^k{}^2 (1 + \nu_{LT}^k)}{E_L^k{}^2 E_T^k{}^3}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь E^k, G^k, ν^k — модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона k -го трансверсально-изотропного слоя пластины соответственно; индекс L

соответствует главному направлению упругости (x^k); индекс T соответствует нормальному к x^k направлению. Напомним, что трансверсально-изотропный материал описывается пятью константами, например, модулями упругости E_L , E_T , коэффициентом Пуассона ν_{TT} для плоскости изотропии, коэффициентом Пуассона ν_{LT} и модулем сдвига G_{LT} для плоскостей параллельных главному направлению упругости. При этом $G_{TT} = E_L/2(1 + \nu_{TT})$. Из представленных формул легко получить соответствующие значения для изотропного слоя ($L = T$).

Предположим, что деформации в пластине малы и могут быть описаны в линейном приближении

$$\begin{aligned} e_{xx}^k &= \frac{\partial u^k}{\partial x}, & e_{yy}^k &= \frac{\partial v^k}{\partial y}, & e_z^k &= \frac{\partial w^k}{\partial z}, \\ e_{xy}^k &= \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x}, & e_{xz}^k &= \frac{\partial u^k}{\partial z} + \frac{\partial w^k}{\partial x}, & e_{yz}^k &= \frac{\partial v^k}{\partial z} + \frac{\partial w^k}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $u^k(x, y, z)$, $v^k(x, y, z)$, $w^k(x, y, z)$ – функции перемещения k -го слоя в направлениях x , y и z соответственно.

Из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^k}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

с учетом (1.1), (1.2), (1.4) получим разрешающую систему уравнений, описывающую НДС k -го слоя, относительно функций перемещений в следующем

виде

$$\begin{aligned}
& Q_{11}^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2} + 2Q_{16}^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial x \partial y} + Q_{11}^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial y^2} + Q_{55}^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial z^2} + (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 v^k}{\partial x \partial y} + \\
& Q_{16}^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial x^2} + Q_{16}^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial y^2} + Q_{45}^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial z^2} + (Q_{13}^k + Q_{55}^k) \frac{\partial^2 w^k}{\partial x \partial z} + (Q_{36}^k + Q_{45}^k) \frac{\partial^2 w^k}{\partial y \partial z} = 0, \\
& Q_{16}^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2} + (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \frac{\partial^2 u^k}{\partial x \partial y} + Q_{16}^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial y^2} + Q_{45}^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial z^2} + Q_{66}^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial x^2} + \\
& + 2Q_{26}^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial x \partial y} + Q_{66}^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial y^2} + Q_{44}^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial z^2} + (Q_{36}^k + Q_{45}^k) \frac{\partial^2 w^k}{\partial x \partial z} + (Q_{23}^k + Q_{44}^k) \frac{\partial^2 w^k}{\partial y \partial z} = 0, \\
& (Q_{13}^k + Q_{55}^k) \frac{\partial^2 u^k}{\partial x \partial z} + (Q_{36}^k + Q_{45}^k) \frac{\partial^2 u^k}{\partial y \partial z} + (Q_{36}^k + Q_{45}^k) \frac{\partial^2 v^k}{\partial x \partial z} + \\
& + (Q_{23}^k + Q_{44}^k) \frac{\partial^2 v^k}{\partial y \partial z} + Q_{55}^k \frac{\partial^2 w^k}{\partial x^2} + 2Q_{45}^k \frac{\partial^2 w^k}{\partial x \partial y} + Q_{55}^k \frac{\partial^2 w^k}{\partial y^2} + Q_{33}^k \frac{\partial^2 w^k}{\partial z^2} = 0.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

На границах между k и $k + 1$ слоями запишем условие “жѐсткого” контакта ($k = 1, \dots, N - 1$):

$$\begin{aligned}
u^k &= u^{k+1}, & v^k &= v^{k+1}, & w^k &= w^{k+1}, \\
\sigma_{zz}^k &= \sigma_{zz}^{k+1}, & \sigma_{xz}^k &= \sigma_{xz}^{k+1}, & \sigma_{yz}^k &= \sigma_{yz}^{k+1}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Поперечная нагрузка на верхнюю грань и свободная нижняя грань пластины соответствуют следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^N(x, y, h/2) &= q_0(x, y), & \sigma_{xz}^N(x, y, h/2) &= \sigma_{yz}^N(x, y, h/2) = 0, \\
\sigma_{zz}^1(x, y, -h/2) &= \sigma_{xz}^1(x, y, -h/2) = \sigma_{yz}^1(x, y, -h/2) = 0.
\end{aligned}$$

Для постановки корректной краевой задачи на всех гранях пластины необходимо записать соответствующие условия закрепления. Например, для шарнирно-опертой пластины на торцевых гранях условия закрепления будут выглядеть следующим образом ($k = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^k(0, y, z) &= v^k(0, y, z) = w^k(0, y, z) = 0, \\
\sigma_{xx}^k(a, y, z) &= v^k(a, y, z) = w^k(a, y, z) = 0, \\
\sigma_{yy}^k(x, 0, z) &= u^k(x, 0, z) = w^k(x, 0, z) = 0, \\
\sigma_{yy}^k(x, b, z) &= u^k(x, b, z) = w^k(x, b, z) = 0.
\end{aligned}$$

Условия заземления на границах пластины запишутся как равенство нулю всех перемещений:

$$\begin{aligned} u^k(0, y, z) &= v^k(0, y, z) = w^k(0, y, z) = 0, \\ u^k(a, y, z) &= v^k(a, y, z) = w^k(a, y, z) = 0, \\ v^k(x, 0, z) &= u^k(x, 0, z) = w^k(x, 0, z) = 0, \\ v^k(x, b, z) &= u^k(x, b, z) = w^k(x, b, z) = 0. \end{aligned}$$

Разрешающие уравнения (1.6) записаны в размерном виде. Для анализа дифференциальных уравнений удобно записать их в канонической области (единичном кубе). Чтобы оценить малые параметры при старших производных рассмотрим случай трансверсально-изотропного слоя, у которого ось x_k совпадает с x . В этом случае $Q_{ij} = C_{ij}$, (опустим индекс k). Тогда уравнения (1.6) упростятся

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= 0, \\ (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} &= 0, \\ (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Перейдем от исходных независимых переменных к нормированным безразмерным переменным. Пусть

$$\tilde{z} = \frac{z}{h_k}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\gamma}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\gamma}, \quad \varepsilon_k = \frac{h_k}{\gamma}, \quad (1.9)$$

где γ есть некоторое характерное значение для длин сторон a и b , h_k – толщина k -го слоя. Считаем, что величина ε_k , является малой, т.к. это следует из условия малости относительной толщины пластины. Тогда уравнения (1.8)

с учетом (1.9) после умножения на h_k^2 преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_k^2 C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon_k^2 C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{z}^2} + \\
 & \quad + \varepsilon_k^2 (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \varepsilon_k (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} = 0, \\
 & \varepsilon_k^2 (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \varepsilon_k^2 C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon_k^2 C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{y}^2} + \\
 & \quad + C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{z}^2} + \varepsilon_k (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} = 0, \\
 & \varepsilon_k (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} + \varepsilon_k (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} + \\
 & \quad + \varepsilon_k^2 C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon_k^2 C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{y}^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{z}^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Малый параметр при старших производных ε_k возникает из-за геометрической особенности пластин – их малой толщины. Если $\varepsilon_k \approx (1/20)/N$ (N – число слоев), что соответствует реальным композитным конструкциям, то при старших производных малый параметр принимает значение порядка $10^{-3}/N^2$. Например, для пятислойного КМ эта величина имеет порядок 10^{-4} .

В уравнениях (1.10) присутствуют ненормированные коэффициенты C_{ij} , которые связаны с механическими характеристиками материала. Как уже отмечалось трансверсально-изотропный материал моделирует КМ с волокнами уложенными в одном направлении совпадающем с главным направлением упругости. Так как волокна являются намного более жесткими чем матрица, то введем еще один параметр

$$\varepsilon_m = \frac{E_T}{E_L}, \tag{1.11}$$

который отражает насколько модуль упругости в плоскости изотропии отличается от соответствующего в направлении укладки волокон. Этот параметр также можно трактовать как показатель анизотропии трансверсально-изотропного материала. При $\varepsilon_m = 1$ материал является изотропным,

с уменьшением ε_m анизотропность будет “возрастать”. Если матрицу коэффициентов жесткости разделить на C_{11} , то с учетом уравнений для коэффициентов трансверсально-изотропного материала (1.3), получим

$$\frac{C_1}{C_{11}} \approx \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_m & \varepsilon_m & 0 \\ \varepsilon_m & \varepsilon_m & \varepsilon_m & 0 \\ \varepsilon_m & \varepsilon_m & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix}, \quad \frac{C_2}{C_{11}} \approx \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 \\ 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Таким образом, если систему уравнений (1.10) разделить на C_{11} , то при всех слагаемых системы, за исключением, содержащих C_{11} , возникнет величина порядка ε_m . Это приводит к тому, что в системе возникает еще один малый параметр, являющийся следствием анизотропии материала слоя пластины. На практике модуль упругости волокон, например углеродных, может превышать модуль упругости матрицы в 25 раз (т.е. $\varepsilon_m \approx 10^{-2}$).

В результате в разрешающей системе дифференциальных уравнений, описывающих НДС прямоугольной многослойной пластины в рамках 3D ТУ, имеются два независимых малых параметра: ε_k – возникающий из-за относительной малости толщины; ε_m – возникающий из-за анизотропии материала. При старших производных неизвестных функций стоят произведения этих малых параметров. Поэтому в общем случае малый параметр является произведением $\varepsilon^2 \varepsilon_m$, который может быть меньше чем 10^{-6} .

Решение систем дифференциальных уравнений с таким малым параметром в трехмерном случае, даже для линейных систем, является непростой задачей вычислительной математики, требующей больших вычислительных затрат. Поэтому для решения такого класса задач часто прибегают в постановкам в рамках теорий пластин.

1.3. Постановки задачи изгиба многослойных пластин в рамках теорий пластин

Как было показано в предыдущем параграфе, разрешающая система дифференциальных уравнений для пространственной теории упругости в случае тонких анизотропных пластин обладает малыми параметрами при старших производных. Однако, эта особенность позволяет применять специальные подходы для упрощения уравнений, путем понижения размерности. Наличие малого параметра позволяет разложить уравнения в ряд по этому параметру, а затем отбросить члены, являющиеся малыми по какому-либо критерию. Такой подход называется асимптотическим [33]. Мы будем рассматривать другой подход – метод гипотез, основанный на некоторых физических предположениях. В качестве гипотез принимаются, например, предположения о специальном распределении перемещений по толщине пластины. Необходимо отметить, что несмотря на разные подходы к понижению размерности асимптотический метод и метод гипотез тесно связаны.

Некоторые теории многослойных пластин являются развитием традиционных теорий однородных пластин. К ним в рассматриваемой работе относятся теории пластин Кирхгофа-Лява и Тимошенко. В рамках соответствующих гипотез многослойная пластина моделируется как однородная пластина с усредненными механическими характеристиками по слоям. В практических расчетах этот подход очень удобен, т.к. число слоев не влияет на порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений. Однако, упрощенное приближение неоднородности пластин естественно ограничивает область применимости таких теорий. Для более качественного учета многослойной структуры пластин используются уточненные теории, например, так называемая теория “ломаной” линий Григолюка-Чулкова. В ней механические параметры каждого слоя учитываются отдельно, что приводит к более точному учету НДС, в частности, в окрестности границ слоев и закрепле-

ний пластины. Уточненное описание НДС приводит к более высокому порядку разрешающей системы дифференциальных уравнений, который зависит от числа слоев. Это обстоятельство отражается на высоких вычислительных затратах по сравнению с расчетами в рамках теорий Кирхгофа-Лява и Тимошенко. При этом вычислительные затраты для численного решения задач в постановке теорий ломаной линии более экономичны по сравнению с решением задачи в рамках 3D ГУ, т.к. постановка является двумерной.

Идея рассматриваемых теорий пластин заключается в формулировке гипотез о зависимости перемещений точек пластины от перемещения некоторой отсчетной поверхности. Формулируется задача для неизвестных функций, описывающих НДС отсчетной поверхности. Затем воспользовавшись рассчитанными характеристиками отсчетной поверхности и гипотезами конкретной теории пластин, можно определить НДС в каждой точке пластины. В работе для всех теорий пластин в качестве отсчетной поверхности будем использовать срединную плоскость $z = 0$. Перейдем к описанию каждой теории.

1.3.1. Теория Кирхгофа-Лява

Гипотезы теории Кирхгофа-Лява:

- (1) Прямой нормальный элемент к недеформированной срединной поверхности при деформировании сохраняет
 - прямолинейность,
 - перпендикулярность к деформированной срединной поверхности,
 - длину.
- (2) Нормальными напряжениями σ_{zz} можно пренебречь по сравнению с напряжениями σ_{xx} , σ_{xy} и σ_{yy} ($\sigma_{zz} = 0$).

В терминах функций перемещений гипотезу (1) можно сформулировать

следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$ – перемещения срединной поверхности. Тогда геометрические соотношения примут вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, & e_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, & e_{zz} &= 0, \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, & e_{xz} &= 0, & e_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из этих уравнений и гипотезы (2) следует, что НДС пластины является плоско напряженным ($\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$). В этом случае трансверсально-изотропный слой моделируются как плоский ортотропный материал. Запишем соответствующие физические соотношения для k -го слоя в главной системе координат (x, y, z)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{pmatrix} = D_1^k C_1^k (D_1^k)^T,$$

где

$$D_1^k = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta^k & \sin^2 \theta^k & -\sin 2\theta^k \\ \sin^2 \theta^k & \cos^2 \theta^k & \sin 2\theta^k \\ (\sin 2\theta^k)/2 & -(\sin 2\theta^k)/2 & \cos 2\theta^k \end{pmatrix}, \quad C_1^k = \begin{pmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & 0 \\ C_{12}^k & C_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^k \end{pmatrix},$$

где θ^k – угол между осями x и x^k , отсчитываемый от x против часовой стрелки. При этом C_{ij}^k выражаются через технические постоянные следую-

щим образом:

$$\begin{aligned} C_{11}^k &= \frac{E_L^k}{1 - \nu_{LT}^k \nu_{TL}^k}, & C_{22}^k &= \frac{E_T^k}{1 - \nu_{LT}^k \nu_{TL}^k}, \\ C_{12}^k &= \frac{\nu_{LT}^k E_T^k}{1 - \nu_{LT}^k \nu_{TL}^k}, & C_{66}^k &= G. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь E^k , G^k , ν^k — модули Юнга, модули сдвига, коэффициенты Пуассона k -го слоя пластины соответственно; индекс L соответствует главному направлению упругости, т.е. x^k ; индекс T соответствует направлению y^k .

В теориях пластин вводятся интегральные усилия и моменты, которые являются усреднениями компонент тензора напряжений и их моментов по толщине пластины:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{pmatrix} dz = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{pmatrix} dz, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{pmatrix} z dz = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{pmatrix} z dz. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Далее удобно ввести следующие величины

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^k dz = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (z_{k+1} - z_k), \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^k z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2), \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^k z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Для записанных интегральных усилий и моментов в теории пластин, используя принцип возможных перемещений, выписываются уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} &= -q. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Отметим, что в общем случае в правой части третьего уравнения стоит величина $q = \sigma_{zz}(x, y, -h/2) + \sigma_{zz}(x, y, h/2)$, но так как нижняя грань пластины свободна от нагружения, то первое слагаемое равно нулю. Подставляя (1.20) в (1.21), получаем разрешающие уравнения для теории Кирхгофа-Лява для многослойных пластин в перемещениях:

$$\begin{aligned}
& (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + (-B_{12} - 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - \\
& - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \\
& + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0, \\
& A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + (-B_{12} - 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - \\
& - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \\
& + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0, \\
& (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + \\
& + 2B_{66} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (-2D_{12} - 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - \\
& - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \\
& + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = -q(x, y).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Эта система дифференциальных уравнений имеет 8-ой порядок. Краевые условия в теории пластин формулируются на основе краевых условий исходной постановки в рамках 3D ТУ. При решении конкретных задач, краевые условия будут приведены.

Для дальнейших численных расчетов и анализа уравнений (1.22) запишем их учетом (1.23) для одного важного частного случая. Рассмотрим пластину со слоями равной толщины и симметричной относительно срединной плоскости структурой укладки слоев: $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$, $\theta_3 = 0^\circ$, $\theta_4 = 90^\circ, \dots$, $\theta_{N-1} = 90^\circ$, $\theta_N = 0^\circ$ (N – нечетное). В этом случае значения $B_{ij} = 0$ и система уравнений (1.22) разбивается на две независимые подсистемы. Первая подсистема содержит неизвестные функции перемещения в плоскости пластины $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$, а вторая – поперечные перемещения, которые

также называют прогибом пластины $w_0(x, y)$. Воспользуемся обозначениями аналогичными (1.9)

$$\tilde{z} = \frac{z}{h}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\gamma}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\gamma}, \quad \varepsilon = \frac{h}{\gamma}. \quad (1.23)$$

Проведем сокращения и выпишем систему

$$\begin{aligned} (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x}^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{y}^2} &= 0, \\ A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{y}^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{x}^2} &= 0, \\ (2D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} + D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \tilde{x}^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \tilde{y}^4} &= \gamma^4 q(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Оценим коэффициенты A_{ij} и D_{ij} . Все слои имеют постоянную толщину ($\tilde{z}_k = k/N$) поэтому

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (\tilde{z}_{k+1} h - \tilde{z}_k h) = \frac{h}{N} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k, \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k ((\tilde{z}_{k+1} h)^3 - (\tilde{z}_k h)^3) = \left(\frac{h}{N}\right)^3 \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k ((k+1)^3 - k^3). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Таким образом, все коэффициенты A_{ij} , без учета $\sum_{k=1}^N Q_{ij}^k$, имеют один порядок h/N , следовательно, первые два уравнения (1.24) можно нормировать на эту величину. Аналогичные рассуждения верны и для третьего уравнения системы. Все это приводит к тому, что в нормированной системе дифференциальных уравнений для теории пластин Кирхгофа-Лява (1.24) отсутствует малый параметр при старших производных, который возникал из-за относительной малости толщины пластины.

Интересно также отметить, что в описанном случае в системе уравнений не возникает малого параметра, вызванного анизотропией материала, так как из формул (1.25) следует, что A_{ij} и D_{ij} - есть осредненные по пакету слоев значения коэффициентов жесткости Q_{ij}^k .

Напомним, что для постановки в 3D ТУ при старших производных наблюдается малый параметр порядка $\varepsilon_k^2 \varepsilon_m$. Несмотря на то, что мы рассмотрели частный пример, в общем случае в разрешающих системах для теории пластин Кирхгофа-Лява малые параметры при старших производных не проявляются значительно.

1.3.2. Теория Тимошенко

В теории Тимошенко не используется одна из гипотеза о сохранение перпендикулярности прямого нормального элемента к деформированной отсчетной поверхности. Это допущение позволяет в первом приближении учитывать поперечные касательные напряжения σ_{xz} и σ_{yz} . Для этого в теории Тимошенко вводятся функции углов поворота срединной поверхности $\phi_x(x, y)$ и $\phi_y(x, y)$. Тогда зависимость перемещений точек пластины от перемещения срединной плоскости запишется

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Соответствующие геометрические соотношения примут вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \\ e_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right), \\ e_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, & e_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y, & e_{zz} &= 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Обратим внимание, если положить

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y},$$

то гипотезы Тимошенко (1.26) совпадут с гипотезами теории Кирхгофа-Лява (1.13).

Для определения физических соотношений теории Тимошенко к соответствующим соотношениям теории Кирхгофа-Лява (1.15) нужно добавить выражения для касательных напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{44}^k & Q_{45}^k \\ Q_{45}^k & Q_{55}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{yz} \\ e_{xz} \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{44}^k & Q_{45}^k \\ Q_{45}^k & Q_{55}^k \end{pmatrix} = D_2^k C_2^k (D_2^k)^T, \quad D_2^k = \begin{pmatrix} \cos \theta^k & \sin \theta^k \\ -\sin \theta^k & \cos \theta^k \end{pmatrix}, \quad C_2^k = \begin{pmatrix} C_{44}^k & 0 \\ 0 & C_{55}^k \end{pmatrix},$$

где θ^k – угол между осями x и x^k , отсчитываемый от x против часовой стрелки. Коэффициенты матрицы жесткости выражаются через технические постоянные

$$C_{44}^k = G_{TT}, \quad C_{55}^k = G_{LT}, \quad (1.29)$$

которые соответствуют рассматриваемому трансверсально-изотропному материалу. Определим интегральные усилия для касательных напряжений

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{pmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} Q_{44}^k & Q_{45}^k \\ Q_{45}^k & Q_{55}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{yz} \\ e_{xz} \end{pmatrix} dz, \\ &= \begin{pmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{yz} \\ e_{xz} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^k dz = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (z_{k+1} - z_k), \quad i, j = 4, 5. \quad (1.31)$$

Тогда с учетом (1.19)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (1.32) \\
 \begin{pmatrix} Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Уравнения равновесия теории Тимошенко можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q, \quad (1.33) \\
 \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\
 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= 0.
 \end{aligned}$$

Отметим, что в общем случае в правой части третьего уравнения стоит величина $q = \sigma_{zz}(x, y, -h/2) + \sigma_{zz}(x, y, h/2)$, но так как нижняя грань пластины свободна от нагружения, то первое слагаемое равно нулю. Подставим выражения для усилий и моментов (1.32) в уравнения равновесия (1.33) и получим разрешающую систему уравнений для задачи изгиба многослойных

пластин в рамках теории Тимошенко

$$\begin{aligned}
 & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \\
 & + A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \\
 & + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} = 0, \\
 & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \\
 & + A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \\
 & + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} = 0, \\
 & -2A_{45} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - A_{44} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - A_{45} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} - \\
 & - A_{45} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - A_{55} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -q,
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}
 & (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - A_{45} \phi_y - \\
 & - A_{45} \frac{\partial w_0}{\partial y} - A_{55} \phi_x - A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \\
 & + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - A_{44} \phi_y - \\
 & - A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial y} - A_{45} \phi_x - A_{45} \frac{\partial w_0}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \\
 & + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Представленная система дифференциальных уравнений имеет 10-й порядок. Краевые условия выписываются на основании краевых условий 3D ТУ и зависят от механических характеристик материала слоев. Поэтому конкретный вид краевых условий будет приведен при постановке конкретных задач.

Как и ранее, выпишем систему уравнений (1.34) для частного случая пластины со слоями равной толщины и симметричной относительно срединной плоскости структурой укладки слоев: $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$, $\theta_3 = 0^\circ$, $\theta_4 = 90^\circ, \dots$,

$\theta_{N-1} = 90^\circ$, $\theta_N = 0^\circ$ (N – нечетное). В этом случае система уравнений (1.34) разбивается на две независимые подсистемы. Первая подсистема содержит неизвестные функции перемещения в плоскости пластины $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$, а вторая – прогибы пластины $w_0(x, y)$ и углы поворота срединной поверхности $\phi_x(x, y)$, $\phi_y(x, y)$

$$\begin{aligned}
 (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} &= 0, \\
 (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} &= 0, \\
 -A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - A_{44} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - A_{55} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= q, \\
 (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - A_{55} \phi_x - A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} &= 0, \\
 (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - A_{44} \phi_y - A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Для оценки малых параметров при старших производных этой системы воспользуемся обозначениями (1.23) и откажемся от строгих равенств. При этом введем величину $\tilde{Q} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Q_{11}^k$ как характерное значение коэффициентов жесткости Q_{ij}^k (такая величина имеет место, т.к. коэффициенты жесткости получаются усреднением). Так как все слои имеют постоянную толщину, то можно провести оценку коэффициентов системы (1.35)

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (\tilde{z}_{k+1} h - \tilde{z}_k h) = \frac{h}{N} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k \approx h \tilde{Q}, \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k ((\tilde{z}_{k+1} h)^3 - (\tilde{z}_k h)^3) = \left(\frac{h}{N} \right)^3 \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k ((k+1)^3 - k^3) \approx h^3 \tilde{Q}.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнения (1.35) можно приближенно выписать следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \frac{h\tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{h\tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{h\tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{y}^2} \approx 0, \\
 & \frac{h\tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{h\tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{h\tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{x}^2} \approx 0, \\
 & -\frac{h\tilde{Q}}{\gamma} \frac{\partial \phi_y}{\partial \tilde{y}} - \frac{h\tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{h\tilde{Q}}{\gamma} \frac{\partial \phi_x}{\partial \tilde{x}} - \frac{h\tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tilde{x}^2} \approx q, \\
 & \frac{h^3 \tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} - h\phi_x - \frac{h\tilde{Q}}{\gamma} \frac{\partial w_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{h^3 \tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{h^3 \tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \tilde{y}^2} \approx 0, \\
 & \frac{h^3 \tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} - h\phi_y - \frac{h\tilde{Q}}{\gamma} \frac{\partial w_0}{\partial \tilde{y}} + \frac{h^3 \tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{h^3 \tilde{Q}}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial \tilde{x}^2} \approx 0.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

После соответствующих сокращений система примет более простой для анализа вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{y}^2} \approx 0, \\
 & \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{x}^2} \approx 0, \\
 & \frac{\partial \phi_y}{\partial \tilde{y}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial \tilde{x}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tilde{x}^2} \approx \frac{q}{\varepsilon}, \\
 & \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} - \phi_x - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial w_0}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \tilde{y}^2} \approx 0, \\
 & \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} - \phi_y - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial w_0}{\partial \tilde{y}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial \tilde{x}^2} \approx 0.
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Интересно, что малые параметры ($\varepsilon = h/\gamma$) появились при неизвестных функциях – углах поворота ϕ_x и ϕ_y . Малые параметры при функции w_0 отсутствуют, т.к. системе (1.37) можно провести замену $w_0^* = w_0/\gamma$. Напомним, что для этой частной постановки для уравнений в рамках теории Кирхгофа-Лява малые параметры при старших производных отсутствовали. Добавление в теорию пластин учета поперечных касательных напряжений приводит к появлению малых параметров при старших производных и как следствие, усложнению постановки задачи с точки зрения вычислительных затрат. Стоит также отметить, что в отличии малого параметра $\varepsilon_k = h_k/\gamma$, который

возникает в 3D ТУ, параметр $\varepsilon = h/\gamma$ больше в N раз. Т.е. можно сказать, что постановка теории Тимошенко менее “жесткая”, чем постановка 3D ТУ.

1.3.3. Теория Григолюка-Чулкова

В отличие от теорий пластин Кирхгофа-Лява и Тимошенко, где многослойная пластина представляется как однородная пластина, в теории ломаной линии Григолюка-Чулкова механические характеристики каждого слоя учитываются независимо. Для этого в каждом слое пластины вводятся свои углы поворота нормали слоя $\phi_x^k(x, y)$ и $\phi_y^k(x, y)$. В определенном смысле, можно считать, что теория ломаной линии является развитием теории Тимошенко для учета поперечных касательных напряжений в каждом слое отдельно.

В теории ломаной линии удобно для записи уравнений в качестве отсчетной поверхности выбрать нижнюю плоскость $z = -h/2$.

Считаем, что компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz}^k, \sigma_{yz}^k$ и функции перемещений u^k, v^k, w^k являются непрерывными по толщине пластины. В теории ломаной линии функции перемещения зависят от перемещений срединной поверхности и углов поворота

$$\begin{aligned} u^k &= u_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \phi_x^i + (z - z_{k-1}) \phi_x^k, \\ v^k &= v_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i \phi_y^i + (z - z_{k-1}) \phi_y^k, \\ w^k &= w_0, \end{aligned} \tag{1.38}$$

где h_k - толщина k -го слоя (см. рисунок 1.1). Для удобства введем матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{N-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда первые два уравнения (1.38) можно переписать

$$\begin{aligned} u^k &= u_0 + \sum_{i=1}^N P_{k,i} \phi_x^i + (z - z_{k-1}) \phi_x^k, \\ v^k &= v_0 + \sum_{i=1}^N P_{k,i} \phi_y^i + (z - z_{k-1}) \phi_y^k, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где $P_{k,i}$ - элемент матрицы P в k -ой строке i -го столбца. Обратим внимание, что если положить $\phi_x^k = \phi_x$ и $\phi_y^k = \phi_y$ для всех k , то соотношения (1.38), совпадут с соответствующими соотношениями теории Тимошенко (1.26).

Получим выражения для геометрических соотношений:

$$\begin{aligned} e_{xx}^k &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \sum_{i=1}^N P_{k,i} \frac{\partial \phi_x^i}{\partial x} + (z - z_{k-1}) \frac{\partial \phi_x^k}{\partial x}, \\ e_{yy}^k &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \sum_{i=1}^N P_{k,i} \frac{\partial \phi_y^i}{\partial y} + (z - z_{k-1}) \frac{\partial \phi_y^k}{\partial y}, \\ e_{xy}^k &= \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \sum_{i=1}^N P_{k,i} \left(\frac{\partial \phi_y^i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x^i}{\partial y} \right) + \\ &+ (z - z_{k-1}) \left(\frac{\partial \phi_y^k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x^k}{\partial y} \right), \\ e_{xz}^k &= \phi_x^k + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ e_{yz}^k &= \phi_y^k + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ e_{zz}^k &= 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Определим усилия и моменты для каждого слоя по аналогии с формулами теории Тимошенко

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^k \\ N_{yy}^k \\ N_{xy}^k \end{pmatrix} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{pmatrix} dz = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx}^k \\ e_{yy}^k \\ e_{xy}^k \end{pmatrix} dz, \quad (1.41)$$

$$\begin{pmatrix} M_{xx}^k \\ M_{yy}^k \\ M_{xy}^k \end{pmatrix} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{pmatrix} z dz = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx}^k \\ e_{yy}^k \\ e_{xy}^k \end{pmatrix} z dz, \quad (1.42)$$

$$\begin{pmatrix} Q_y^k \\ Q_x^k \end{pmatrix} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{pmatrix} \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{xz}^k \end{pmatrix} dz. \quad (1.43)$$

Дополнительно введем

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} N_{xx}^k \\ N_{yy}^k \\ N_{xy}^k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} Q_x^k \\ Q_y^k \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{xx}^k \\ \Phi_{yy}^k \\ \Phi_{xy}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{xx}^k \\ M_{yy}^k \\ M_{xy}^k \end{pmatrix} - z_{k-1} \begin{pmatrix} N_{xx}^k \\ N_{yy}^k \\ N_{xy}^k \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^N P_{i,k} \begin{pmatrix} N_{xx}^i \\ N_{yy}^i \\ N_{xy}^i \end{pmatrix}.$$

Для этих величин можно выписать соответствующие уравнения равновесия ($k = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q, \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{xy}^k}{\partial y} - Q_x^k &= 0, \quad k = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial \Phi_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yy}^k}{\partial y} - Q_y^k &= 0, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Как и для предыдущих теорий пластин, в правой части третьего уравнения стоит величина $q = \sigma_{zz}(x, y, -h/2) + \sigma_{zz}(x, y, h/2)$, но так как нижняя грань пластины свободна от нагружения, то первое слагаемое равно нулю. Таким образом, порядок дифференциальной системы зависит от числа слоев как $2(3 + 2N)$.

Для формулировки разрешающей системы дифференциальных уравнений осталось учесть (1.1) и выписать зависимость поперечных касательных напряжений от деформаций. Для этого вводится независимая аппроксимация [35]

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^k &= f_0(z)\mu_x^0 + f_k(z)\mu_x^k, \\ \sigma_{yz}^k &= f_0(z)\mu_y^0 + f_k(z)\mu_y^k,\end{aligned}\tag{1.46}$$

где $f_0(z)$ и $f_k(z)$ характеризуют закон распределения касательных напряжений по толщине пакета. Согласно работе [35] они выбираются следующим образом

$$\begin{aligned}f_0(z) &= \frac{6}{h^3}(z - z_0)(z_N - z), & z \in [z_0; z_N], \\ f_k(z) &= \frac{6}{h_k^3}(z - z_{k-1})(z_k - z), & z \in [z_{k-1}; z_k].\end{aligned}\tag{1.47}$$

Далее для расчета функций μ_x^0 , μ_y^0 , μ_x^k и μ_y^k введем обозначения

$$\begin{aligned}\xi_k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} f_0(z)dz, & \lambda_k &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} f_0^2(z)dz, \\ \lambda_{k0} &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} f_0(z)f_k(z)dz, & \lambda_{kk} &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} f_k^2(z)dz.\end{aligned}$$

Для $l, m = 4, 5$ выпишем

$$\tau_{lm} = \sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) a_{lm}^k, \quad \tilde{q}_{lm} = \frac{\tau_{lm}}{\tau_{44}\tau_{55} - \tau_{45}^2}, \quad \eta_{nl}^k = \frac{1}{\lambda_{kk} a_{44}^k a_{55}^k - (a_{45}^k)^2},$$

$$\tau_{lm} = \sum_{k=1}^N \left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}} \right) a_{lm}^k, \quad \tilde{q}_{lm} = \frac{\tau_{lm}}{\tau_{44}\tau_{55} - \tau_{45}^2}, \quad \eta_{nl}^k = \frac{1}{\lambda_{kk} a_{44}^k a_{55}^k - (a_{45}^k)^2},$$

где a_{lm}^k элементы матрицы обратной к (1.28). Далее

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \sum_{k=1}^N \left(\xi_k - \frac{\lambda_{k0}}{\lambda_{kk}} \right) e_{xz}, & \varphi_y &= \sum_{k=1}^N \left(\xi_k - \frac{\lambda_{k0}}{\lambda_{kk}} \right) e_{yz}, \\ \mu_x^0 &= \tilde{q}_{44}\varphi_x - \tilde{q}_{45}\varphi_y, & \mu_y^0 &= \tilde{q}_{55}\varphi_y - \tilde{q}_{45}\varphi_x, \\ \mu_x^k &= \eta_{44}e_{xz} - \eta_{45}e_{yz} - \frac{\lambda_{k0}}{\lambda_{kk}}\mu_x^0, & \mu_y^k &= \eta_{55}e_{yz} - \eta_{45}e_{xz} - \frac{\lambda_{k0}}{\lambda_{kk}}\mu_y^0.\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned} Q_x^k &= \sum_{i=1}^N q_{44}^{ki} e_{xz}^i - q_{45}^{ki} e_{yz}^i, & Q_y^k &= \sum_{i=1}^N q_{55}^{ki} e_{yz}^i - q_{45}^{ki} e_{xz}^i, \\ Q_x &= \sum_{k=1}^N q_{44}^k e_{xz}^k - q_{45}^k e_{yz}^k, & Q_y &= \sum_{k=1}^N q_{55}^k e_{yz}^k - q_{45}^k e_{xz}^k, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где

$$q_{lm}^{ki} = \tau^k \tau^i \tilde{q}_{lm} + \delta k n \eta_{lm}^i, \quad q_{lm}^k = \sum_{i=1}^N q_{lm}^{ki}, \quad \tau^k = \xi_k - \frac{\lambda_{k0}}{\lambda_{kk}}.$$

Представленные уравнения выписаны в случае, когда отсчетная поверхность выбиралась на нижней поверхности ($z = -h/2$). Для перехода к срединной отсчетной поверхности необходимо при формировании уравнений провести замену

$$\begin{aligned} u_{mid} &= u_0 - \sum_{i=1}^N P_{k^*,i} \phi_x^i + (z^* - z_{k^*-1}) \phi_x^{k^*}, \\ v_{mid} &= v_0 - \sum_{i=1}^N P_{k^*,i} \phi_y^i + (z^* - z_{k^*-1}) \phi_y^{k^*}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где $u_{mid}(x, y)$ и $v_{mid}(x, y)$ – перемещения срединной поверхности; k^* – номер слоя, в котором лежит срединная поверхность; z^* – координата срединной поверхности.

В (1.45) число уравнений зависит от числа слоев, поэтому разрешающая система дифференциальных уравнений из-за громоздкости здесь представлена не будет.

Из-за громоздкости формул не будем приводить разрешающие уравнения для и частного случая пластины со слоями равной толщины и симметричной относительно срединной плоскости структурой укладки слоев: $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$, $\theta_3 = 0^\circ$, $\theta_4 = 90^\circ, \dots, \theta_{N-1} = 90^\circ, \theta_N = 0^\circ$ (N – нечетное). Однако, отметим, что в этих уравнениях возникают малые параметры порядка $\varepsilon_k^2 \varepsilon_m$ ($\varepsilon_k = h_k/\gamma$, $\varepsilon_m = E_T/E_L$) при неизвестных функциях углов поворота ϕ_x^k и ϕ_y^k .

Напомним, что в теории Кирхгофа-Лява для этой задачи малые параметры при старших производных отсутствовали, в теории Тимошенко имели порядок ε^2 ($\varepsilon = h/\gamma$), а теории Григолюка-Чулкова малые параметры сопоставимы с малыми параметрами в соответствующей постановке 3D ТУ. Здесь, также как в 3D ТУ, в уравнениях появляется малый параметр, возникающий из-за анизотропии трансвесально-изотропного материала слоя (1.11)–(1.12).

Таким образом, независимый учет поперечных касательных напряжений в теории Григолюка-Чулкова приводит к значительному увеличению вычислительных затрат. Во-первых, это связано с числом неизвестных функций, которое зависит от количества слоев как $3+2N$, что в свою очередь сказывается на увеличении размеров соответствующих СЛАУ. Во-вторых, наличие малого параметра при старших производных вносит свои дополнительные трудности для поиска численного решения. Но несмотря на эти замечания, решение задач изгиба многослойных пластин в рамках теории ломаной линии Григолюка-Чулкова является намного более экономичной задачей по сравнению с решением исходной постановки в рамках пространственной теории упругости, т.к. все неизвестные функции зависят только от двух пространственных переменных.

Выводы по главе 1

1. Для расчета НДС многослойных анизотропных пластин получены разрешающие системы уравнений в кинематических переменных для пространственной теории упругости, классической теории Кирхгофа-Лява, теории Тимошенко и теории Григолюка-Чулкова.
2. Разрешающие уравнения были выписаны в безразмерной форме для важных частных случаев. Показано, что в уравнениях существуют два независимых малых параметра при старших производных, возникающих из-за малой относительной толщины слоев и анизотропии матери-

ала слоев.

3. Теория Кирхгофа-Лява приводит к системе дифференциальных уравнений 8-го порядка и не имеет значительных малых параметров. Система уравнений теории Тимошенко имеет 10-й порядок и более ярко выраженные малые параметры. В уравнениях теории Григолюка-Чулкова наблюдаются малые параметры характерные пространственной постановке, а порядок систем уравнений зависит от числа слоев.

Глава 2.

МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ И НАИМЕНЬШИХ НЕВЯЗОК

Метод коллокаций и наименьших невязок (КНН) основан на методе коллокаций. Покажем их основные отличия, для этого опишем общую идеологию методов коллокаций на примере краевой задачи для эллиптической системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$Lu(\bar{x}) = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega, \quad (2.1)$$

с краевыми условиями

$$L_{bnd}u(\bar{x}) = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \partial\Omega, \quad (2.2)$$

где L и L_{bnd} – дифференциальные операторы; f и g – известные вектор-функции; u – искомая вектор-функция. Ограничимся случаем, когда операторы L и L_{bnd} линейны. В случае нелинейных краевых задач обычно путем линеаризации их решение сводят к решению последовательности линейных краевых задач. Исходные уравнения (2.1)–(2.2) назовем дифференциальной постановкой.

2.1. Метод коллокаций

Метод коллокаций – проекционный численный метод. Суть проекционных методов заключается в том, что решение дифференциальной задачи,

существующее в бесконечномерном функциональном пространстве, проектируется в некоторое конечномерное подпространство. При этом указывается, каким именно способом элементы подпространства аппроксимируют решение дифференциальной задачи. Проектирование позволяет в выбранном подпространстве сформулировать задачу, решения которой аппроксимируют решения исходной задачи. Для краткости операцию проектирования назовем дискретизацией, а задачу в подпространстве, полученную в результате проектирования, дискретной. Таким образом, вместо точных решений дифференциальной задачи проекционными методами ищутся решения соответствующей дискретной задачи. Они являются приближенными к решениям исходной задачи и называются также численными решениями. При выборе подпространства учитывается, насколько эффективно можно использовать его элементы для аппроксимации решений задачи и ее краевых условий, насколько устойчивы алгоритмы нахождения численных значений его элементов и какое количество арифметических действий для этого требуется. От этих обстоятельств зависит точность и время расчета при решении задачи на ЭВМ.

Приближенное решение исходных дифференциальных уравнений (2.1) можно определять как функцию u_n минимизирующую норму невязки этих уравнений. Невязкой уравнений (2.1) назовем

$$R(\bar{x}) \equiv Lu_n(\bar{x}) - f(\bar{x}). \quad (2.3)$$

Очевидно, если $R = 0$ во всех точках области и u_n удовлетворяет краевым условиям, то приближенное решение является точным решением (2.1). В работе [80] К. Флетчер приводит классификацию проекционных численных методов, опирающуюся на способ минимизации нормы невязки R уравнений (2.1). В рамках этой классификации в методе коллокаций невязка приравнивается к нулю в некоторых заданных точках $\{\bar{x}_{col}\}$ – *точках кол-*

локаций:

$$R(\bar{x}_{col}) = 0. \quad (2.4)$$

Проекционные методы, основанные на условии (2.4) относятся к семейству методов коллокаций. Следует обратить внимание на то, что из условия (2.4) следует тесная связь методов коллокаций и задачи интерполяции, для которой L есть тождественный оператор, т.е. невязка в этом случае есть погрешность интерполяции.

Основное различие методов, использующих условие (2.4), заключается в выборе точек коллокаций и способе представления численного решения u_n , т.е. в выборе пространства на которое осуществляется проектирование решения исходной задачи. Обычно его выбирают в виде линейной комбинации известных базисных элементов ϕ_i некоторого функционального пространства

$$u_n(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \phi_i(\bar{x}), \quad (2.5)$$

где c_i – неизвестные коэффициенты. Величину N можно трактовать как число степеней свободы, число свободных параметров выбранного представления или размерность конечномерного подпространства, в котором ищутся решения.

Если точность построенного решения неудовлетворительна, то необходимо увеличить количество степеней свободы N в представлении численного решения. Например, если базисные функции выбирались в пространстве полиномов, представление (2.5) дополняют полиномами с более высокими степенями (*p-подход*) [88]. Другой подход увеличения количества степеней свободы заключается в применении кусочно-аналитического базиса. Исходная область решения задачи Ω разбивается на подобласти, в каждой из которых решение ищется в виде линейной комбинации относительно небольшого числа базисных элементов. Рост N происходит за счет увеличения числа подобластей, т.е. за счет увеличения количества кусков решений (*h-подход*).

При этом на границе подобластей решения склеиваются между собой согласно выбранной идеологии построения кусочно-аналитического решения. Достаточно наглядно и просто выглядит реализация такого подхода в методах *сплайн-коллокации*. Известной реализацией метода сплайн-коллокаций для решения краевых задач систем нелинейных ОДУ является пакет COLSYS [85], использующий B -сплайны в качестве полиномиального базиса.

Для определения неизвестных коэффициентов представление (2.5) подставляется в уравнения (2.4), которые в результате становятся системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно этих коэффициентов. При этом, если представление (2.5) не удовлетворяет тождественно краевым условиям (2.2), СЛАУ необходимо дополнить уравнениями

$$L_{bnd}u_n(\bar{x}_{bnd}) - g(\bar{x}_{bnd}) = 0, \quad \bar{x}_{bnd} \in \partial\Omega, \quad (2.6)$$

где \bar{x}_{bnd} – точки записи краевых условий (2.6). Если базисные функции автоматически не удовлетворяют условиям склейки на границе подобластей, то систему нужно дополнить соответствующими условиями. Перечисленные соотношения, вычисленные в конкретных точках, являются линейными уравнениями относительно c_i . Общее количество точек коллокаций, граничных точек и условий согласования должно совпадать с количеством неизвестных коэффициентов приближенного решения. Введем обозначение для итоговой СЛАУ, решение которой определяет коэффициенты c_i ($i = 0, \dots, N$),

$$Ac = b, \quad (2.7)$$

где A – матрица размера $(N \times N)$, c – вектор искомых коэффициентов c_i , b – известный вектор правой части.

В ряде случаев при решении практически важных задач метод коллокаций независимо от способов дискретизации приводит к плохо обусловленной задаче линейной алгебры (2.7). Например, для жестких задач ОДУ, для па-

рабочих уравнений с малыми коэффициентами при старших производных, для уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса и для других задач с решениями, обладающими существенными особенностями.

Эта проблема стимулировала поиск новых подходов, которые могли выйти за рамки основных принципов метода коллокаций. Один из таких подходов был предложен А. Г. Слепцовым [69]. Одна из возможных трактовок этого подхода апеллирует к тесной связи между методом коллокаций и задачей интерполяции. В этих методах приближения решение ищется из условия (2.4), при этом в задаче интерполяции $L \equiv 1$. Таким образом, в узлах интерполяции задаются значения искомой функции, а в точках коллокаций значения некоторого оператора от искомой функции. Как известно, возникающая при интерполировании задача линейной алгебры может быть плохо обусловлена, а в приближенном решении могут появиться нефизические осцилляции. Если требование точного выполнения условий интерполяции не является принципиальным, например исходные данные содержат ошибки какого-либо происхождения, предпочтительнее перейти к более общей задаче аппроксимации, например методом наименьших квадратов, которая зачастую лучше обусловлена и дает решение лучшего качества. Возникает естественное желание по аналогии перенести эту технику на метод коллокаций. Для этого нужно понять, могут ли уравнения коллокаций быть выполнены неточно. Напомним, что целью проекционного метода является минимизация нормы невязки на всей расчетной области, а не только в заданных точках. В этом смысле, условием точного равенства невязки нулю в некоторых заданных точках можно пожертвовать, если при этом норма невязки не увеличится, соответствующая СЛАУ будет лучше обусловлена и приближенное решение будет обладать лучшими свойствами.

А. Г. Слепцов предложил при дискретизации дифференциальной задачи выписывать *переопределенную* СЛАУ относительно искомых коэффициентов представления решения s_i . Переопределение достигается за счет уве-

личения числа точек коллокаций \bar{x}_{col} , граничных точек \bar{x}_{bnd} и условий согласования решений на границах между подобластями. При этом решении полученной СЛАУ понимается в смысле минимизации некоторого выбранного функционала невязки. Таким образом, метод коллокаций, в котором определяющая СЛАУ переопределена, был назван *методом коллокаций и наименьших невязок*.

С практической точки зрения, удобным является случай, когда минимизируется сумма квадратов невязок всех уравнений переопределенной определяющей СЛАУ

$$\|Ac - b\|_2^2 \rightarrow \min. \quad (2.8)$$

Таким образом, по аналогии с задачей приближения функции, решение системы понимается в смысле *наименьших квадратов*. При этом, если количество уравнений совпадает с числом неизвестных, то условие (2.8) эквивалентно (2.7). Практика показывает, что во многих случаях решения задач аппроксимации и краевых задач для дифференциальных уравнений, применение условия (2.8) позволяет свести решение исходной задачи к лучше обусловленной СЛАУ по сравнению со случаем применения традиционного метода коллокаций.

Итак, в отличие от метода коллокаций изложенный подход построения приближенного решения отличается тем, что здесь выписывается переопределенная СЛАУ, а ее решение минимизирует сумму квадратов невязок всех уравнений дискретной задачи.

Перейдем к более подробному описанию метода КНН.

2.2. Метод коллокаций и наименьших невязок

Продолжим рассмотрение краевой задачи (2.1)–(2.2). Разобьем область Ω на подобласти Ω^k ($k = 1, \dots, K$) с кусочно-гладкими границами $\partial\Omega^k$ так, чтобы выполнялись условия $\Omega^k \cap \Omega^l = \emptyset$ при $k \neq l$, и $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}^k$. Назовем

такое разбиение области сеткой, а подобласти – ячейками сетки.

В каждой ячейке решение будем искать в виде

$$u^k(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{N^k-1} c_i^k \phi_i^k(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega^k. \quad (2.9)$$

В качестве базисных функций ϕ_i^k в методе КНН обычно применяют полиномы, т.е. решение в области Ω аппроксимируется кусочно-полиномиальной функцией. Для определения неизвестных коэффициентов c_i^k в ячейке Ω^k записываются три вида уравнений:

- уравнения коллокаций – требование выполнения исходных уравнений в точках коллокаций $\{\bar{x}_{col}^k\}$

$$Lu^k(\bar{x}_{col}^k) = f(\bar{x}_{col}^k), \quad \bar{x}_{col}^k \in \Omega^k; \quad (2.10)$$

- граничные условия – краевые условия для приближенного решения в заданных точках $\{\bar{x}_{bnd}^k\}$, на границах ячеек $\partial\Omega_k$, прилегающих к границе области Ω

$$L_{bnd}u^k(\bar{x}_{bnd}^k) = g(\bar{x}_{bnd}^k), \quad \bar{x}_{bnd}^k \in \partial\Omega^k \cap \partial\Omega; \quad (2.11)$$

Точки постановки граничных условий $\{\bar{x}_{bnd}^k\}$ назовем *граничными точками*.

- условия согласования – условия склейки решений (L_{mat}) в соседних ячейках в заданных точках $\{\bar{x}_{mat}^k\}$ на границе между ними

$$L_{mat}u^k(\bar{x}_{mat}^k) = L_{mat}u^{adj}(\bar{x}_{mat}^k), \quad \bar{x}_{mat}^k \in \partial\Omega^k \cap \partial\Omega^{adj}, \quad (2.12)$$

где u^{adj} – решение в соседней ячейке Ω^{adj} . Точки постановки условий согласования $\{\bar{x}_{mat}^k\}$ назовем *точками согласования*.

В качестве условий согласования L_{mat} при аппроксимации гладких решений в точках согласования обычно требуют непрерывность самого решения и необходимого числа его производных по нормали к рассматриваемой

границе ячейки. В случае построения обобщенных решений дифференциальной задачи условия согласования должны аппроксимировать законы сохранения, которым удовлетворяют обобщенные решения задачи. При выборе того или иного вида условий согласования необходимо помнить, что они не должны противоречить определению решения исходной задачи. То есть, при аппроксимации гладких решений в условия согласования, кроме требования непрерывности решения, можно включать требования непрерывности производных и их комбинаций. А при аппроксимации обобщенных решений условия согласования должны допускать те разрывы приближенного решения и его производных, которые может иметь решение исходной задачи.

Совокупность всех уравнений для определения приближенного решения в конкретной ячейке для краткости назовем *локальной* СЛАУ. А объединение всех локальных СЛАУ дискретной задачи, которая определяет приближенное решение исходной задачи, назовем *глобальной* СЛАУ. Если решение дискретной задачи сходится к решению дифференциальной задачи, то решение локальной СЛАУ определяет решение в ячейке, которое сходится к локальному решению дифференциальной задачи. В методе КНН нет строгих условий на степень переопределения локальной СЛАУ вышеперечисленными уравнениями. Важно, чтобы переопределенная СЛАУ обладала полным рангом, т.е. имела решение в смысле наименьших квадратов. При этом, как правило, чрезмерное увеличение числа уравнений, которое приводит к дополнительным вычислительным затратам, на свойства приближенного решения влияет незначительно. Обычно в методе КНН число уравнений не превышает число неизвестных более чем в полтора-два раза.

Для решения переопределенной СЛАУ в смысле наименьших квадратов применяются ортогональные методы QR -разложения её матрицы. При отсутствии ошибок округления они дают то же самое решение, что и метод наименьших квадратов [38]. Однако ортогональные методы в отличие от метода наименьших квадратов не ухудшают обусловленность исходной мат-

рицы, следовательно, они менее чувствительны к ошибкам округления, что особенно важно при решении задач с плохо обусловленными СЛАУ.

В методе КНН применяются методы вращений Гивенса и отражений Хаусхолдера с выбором главного элемента [38]. Их результатом является аннулирование всех поддиагональных элементов прямоугольной матрицы, т.е. элементов, находящихся ниже главной диагонали. В методе Гивенса при помощи умножения на элементарные матрицы вращения последовательно аннулируется каждый поддиагональный элемент матрицы. В методе отражений Хаусхолдера на каждом шаге аннулируются все поддиагональные элементы отдельного столбца. На практике метод Хаусхолдера зачастую требует меньшее число арифметических действий, особенно в случае существенно переопределенных систем [38].

При решении задач без особенностей, для которых достаточную точность можно получить при малом числе ячеек, ортогональные методы применяются непосредственно для решения глобальной СЛАУ. В более сложных случаях при стремлении достичь лучшей точности область решения задачи приходится покрывать сеткой с большим числом мелких ячеек. При этом возникает глобальная СЛАУ больших размеров, которую затруднительно решить напрямую описанными методами из-за накопления погрешности округлений и длительного времени расчета. Поэтому в методе КНН применяется метод декомпозиции области – метод итераций по подобластям [20]. В нем решение дискретной задачи можно получить итерационно. При декомпозиции в качестве подобласти можно выбрать как отдельную ячейку, так и любое объединение из множества соседних ячеек. Каждая итерация представляет собой последовательное решение задач во всех подобластях расчетной области. При этом уравнения коллокаций и граничные условия не зависят от предыдущих итераций (если они линейны), а условия согласования на границах между соседними подобластями записываются с учетом последовательности вычислений. Например, условие непрерывности функции и ее

первой производной на границе ячейки Ω^k запишется в виде

$$\tilde{u}^k + p_1 \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial n} = u^{adj} + p_1 \frac{\partial u^{adj}}{\partial n}, \quad (2.13)$$

где \tilde{u}^k — искомое решение в ячейке на текущей итерации; u^{adj} — решение в соседней ячейке на текущей итерации, если решение в ней уже “рассчитано”, и на предыдущей итерации — в противном случае (зависит от способа обхода подоластей); n — внешняя нормаль к границе Ω^k . Для задач механики пластин, которые могут содержать в уравнениях производные вплоть до 4-го порядка дополнительно можно потребовать непрерывность линейной комбинации 2-ой и 3-ей производных приближенного решения задачи:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^k}{\partial n^2} + p_2 \frac{\partial^3 \tilde{u}^k}{\partial n^3} = \frac{\partial^2 u^{adj}}{\partial n^2} + p_2 \frac{\partial^3 u^{adj}}{\partial n^3}. \quad (2.14)$$

Здесь p_1, p_2 — весовые коэффициенты при отдельных слагаемых в условиях согласования. Выбор их значений в некоторых пределах влияет на свойства гладкости численного решения и скорость сходимости итерационного процесса.

Параметры размеров ячеек, координаты точек коллокаций, точек записи условий согласования и краевых условий, весовые множители при отдельных слагаемых и уравнениях в переопределенной СЛАУ будем называть параметрами дискретизации. Значения этих параметров влияют на вычислительный процесс и свойства приближенного решения. Опыт применения метода КНН, показывает, что даже в случае решения задач с особенностями, например, задач для уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса существуют достаточно большие области значений параметров дискретизации, при которых решение дискретной задачи сходится. Стоит отметить, что для каждой задачи существуют значения параметров дискретизации, которые обеспечивают лучшую точность и скорость сходимости итерационного процесса по сравнению со “стандартными” значениями параметров.

Для ускорения итерационного процесса в методе КНН применяется метод ускорения сходимости итераций, использующий подпространства Крылова.

В этом методе через определенное число шагов к текущему приближению добавляется поправка, являющаяся линейной комбинацией векторов нескольких предыдущих приближений. Подробное описание варианта этого метода дано в [48, 81].

Метод КНН можно применять в областях неканонической формы на регулярных и нерегулярных сетках. Но для наглядности продемонстрируем технологию построения формул метода КНН на простом примере. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ [46]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2.15)$$

$$u = g(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \quad (2.16)$$

Область Ω покрывается сеткой с прямоугольными ячейками Ω^k . Для удобства в каждой ячейке Ω^k вводятся локальные независимые переменные (y_1^k, y_2^k) , которые связаны с глобальными переменными (x_1, x_2) в декартовой системе координат формулами

$$y_1^k = \frac{x_1 - x_1^{*k}}{h_1^k}, \quad y_2^k = \frac{x_2 - x_2^{*k}}{h_2^k},$$

где $2h_1^k, 2h_2^k$ — размеры ячеек в направлениях x_1 и x_2 , (x_1^{*k}, x_2^{*k}) — центры ячеек. Локальные переменные выбраны таким образом, что в каждой ячейке $y_1^k \in [-1, 1], y_2^k \in [-1, 1]$.

Приближённое решение u^k в каждой ячейке Ω^k представляется в виде полного полинома фиксированной степени p относительно двух переменных. Далее, рассматривая конкретную ячейку, для краткости индекс k опустим.

Обычно, в методе КНН точки коллокаций расположены равномерно внутри ячейки, а точки согласования и граничные точки расположены равномерно на соответствующих границах ячейки (рисунок 2.1). Воспользуемся методом декомпозиции. Пусть подобласть декомпозиции совпадает с ячей-

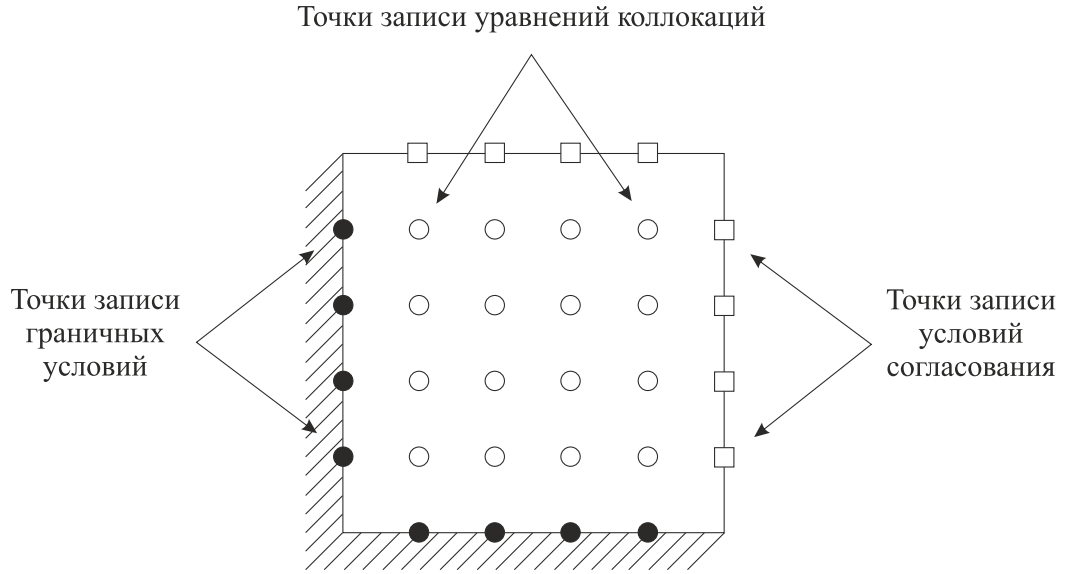


Рисунок 2.1 – Схема расположения точек записи граничных условий, уравнений коллокаций и условий согласования

кой. Это значит, что на границах ячеек в качестве условий согласования используются условия аналогичные (2.13).

Для определения неизвестных коэффициентов в точках коллокаций выпишем уравнения коллокаций в локальных переменных

$$\frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)). \quad (2.17)$$

В граничных точках – краевые условия

$$u = g(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)). \quad (2.18)$$

На границах между ячейками в точках согласования запишем условия

$$u + p_1 \frac{1}{h_n} \frac{\partial u}{\partial n} = u^{adj} + p_1 \frac{1}{h_n} \frac{\partial u^{adj}}{\partial n}, \quad (2.19)$$

где $h_n = h_1$, если $n = y_1$, и $h_n = h_2$, если $n = y_2$.

Отметим, что запись условий согласования на границе между двумя ячейками будет различаться знаками перед вторыми слагаемыми в (2.19) в каждой из двух ячеек с общей границей. Например, на вертикальной границе

для ячейки слева от этой границы направление внешней нормали n совпадает с направлением оси y_1 , поэтому перед указанными слагаемыми в записи условия будет знак “+”, а для ячейки справа от этой границы направление внешней нормали n к ее границе противоположно оси y_1 , и перед указанными слагаемыми знак “-”. Это обеспечивает линейную независимость в глобальной СЛАУ условий согласования, записанных в одной и той же точке в двух соседних ячейках.

Из вышперечисленных уравнений, записанных в точках с конкретными координатами, в ячейке Ω^k сформируем переопределенную локальную СЛАУ

$$A^k c_i^k = b^k. \quad (2.20)$$

Она имеет небольшой размер и для ее решения можно воспользоваться прямыми методами (например методом Хаусхолдера). В итоге решение дискретной задачи свелось к осуществлению итерационного процесса, в котором одна итерация представляет собой последовательное решение каждой локальной СЛАУ. Окончание итерационного процесса происходит при выполнении условия

$$\max_{k,i} |\tilde{c}_i^k - c_i^k| < \varepsilon, \quad (2.21)$$

где \tilde{c}_i^k — значение коэффициента c_i^k на предыдущей итерации, ε — псевдопогрешность решения. Псевдопогрешность решения ε связана с точностью приближенного решения, а выбор её значения зависит от конкретной задачи.

Заканчивая описание метода КНН, следует отметить важную роль метода декомпозиции. На практике решение СЛАУ больших размеров требует серьезных ресурсов памяти вычислительной системы. Поэтому зачастую решение задач, требующих подробной дискретизации, проводят на специализированных кластерных вычислительных системах, которые могут обеспечить вычислительный процесс необходимыми ресурсами. Однако, во многих случаях соответствующие расчеты можно проводить и на персональных ЭВМ. Это особенно актуально когда рассматриваемая СЛАУ разрежена, т.е.

имеет большое количество нулевых элементов. Как уже отмечалось, метод итераций по подобластям позволяет свести решение глобальной СЛАУ к последовательности систем меньшего размера. За счет этого многие задачи математической физики могут быть решены методом КНН на персональной ЭВМ.

Другое важное свойство метода итераций по подобластям — его высокая эффективность при расчётах на многопроцессорных вычислительных системах. Этот метод позволяет распределить задачу последовательного обращения локальных матриц между вычислительными узлами для параллельной работы, добившись высокой загрузки вычислительных узлов [57].

Описанный способ реализации метода КНН (h – подхода) можно назвать стандартным. В диссертационной работе предложен и осуществлен очередной шаг в развитии метода КНН, основанный на реализации p – подхода. Перейдем к его описанию.

2.3. Модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок

Вернемся к вопросу повышения точности численного решения в проекционных методах. Как уже отмечалось, повышение точности в методе коллокаций достигается за счет увеличения числа базисных элементов N в представлении численного решения. Этого можно достичь либо увеличивая количество ячеек сетки K (уменьшая h – характерный размер ячеек), либо повышая степень полинома в представлении решения в ячейке (для простоты будем считать, что во всех ячейках используется одно и тоже представление решения степени p). Если решение дифференциального уравнения m -го порядка обладает достаточной гладкостью, то погрешность аппроксимации приближенного решения в методе КНН, как и в методе коллокаций, будет

равна [112]

$$\|u - u_{ex}\|_{\infty} = O(h^{p-m+1}), \quad (2.22)$$

где u – решение полученное методом коллокаций, u_{ex} – точное решение. В методе КНН p обычно невелико, а необходимая точность достигается за счет увеличения K (уменьшения h). Таким образом, согласно формуле (2.22) погрешность имеет степенной характер уменьшения при мельчении характерного размера сетки h . Такой способ является достаточно универсальным, но при использовании очень подробных сеток для поддержания удовлетворительной скорости сходимости итерационного процесса иногда приходится в условиях согласования типа (2.13) подбирать значения весовых параметров. Значения параметров дискретизации, обеспечивающих хорошую скорость сходимости итераций, необходимо определять для каждой конкретной задачи.

Если согласно формуле (2.22) отказаться от увеличения K , т.е. от сеток с большим числом ячеек, то повышение точности можно достичь увеличением p . В случае использования пространств полиномов, это означает применение полиномов более высоких степеней. Если решение обладает достаточной гладкостью, то из (2.22) следует, что уменьшение погрешности примет экспоненциальный характер, так как h фиксировано, а p растет. Такая высокая скорость уменьшения погрешности является главным преимуществом p -подхода перед h -подходом. Однако, простое увеличение степени полинома в представлении решения может привести к непредсказуемым результатам. Возникают особенности, связанные как с теоретическими аспектами аппроксимации полиномами высоких степеней, так и с практической реализацией алгоритма.

Во-первых, при использовании полиномов высоких степеней требуется специальное расположение точек коллокаций. При использовании равномерно распределенных точек коллокаций с ростом p точность численного решения может ухудшаться при относительно небольших значениях p . Ана-

логичный эффект, наблюдается в задачах полиномиальной интерполяции. Например, при интерполировании функции Рунге с равноотстоящими узлами при увеличении степени интерполяционного полинома погрешность интерполяции растет. Для обеспечения сходимости приближенного решения в p -подходе прибегают к специальному расположению точек коллокаций. Например, в качестве координат точек коллокаций в одномерном случае можно использовать корни многочленов Чебышёва. В областях произвольной геометрической формы проблема выбора точек коллокаций, обеспечивающих сходимость, не решена даже в случае интерполяции. Однако, для канонических областей и их конформных отображений такие способы существуют. Например, выбор точек коллокаций с применением корней полинома Чебышёва обеспечивает сходимость приближения на достаточно широком классе функций [60].

Во-вторых, возникает задача выбора пространства базисных функций, которое позволит работать с большими значениями p в практических расчетах. Элементы базиса должны быть устойчивы к ошибкам округления и сохранять линейную независимость в реальных численных расчетах при больших p . При этом возникающая переопределенная СЛАУ может иметь большой размер, а соответствующая ей прямоугольная матрица может быть полностью заполненной. Поэтому выбранный базис должен обладать свойством медленного роста числа обусловленности соответствующих систем, при увеличении p .

Как уже отмечалось, основное преимущество p -подхода перед h -подходом заключается в более высокой скорости уменьшения погрешности решения. По этой причине для достижения фиксированной точности численные методы высокого порядка аппроксимации требуют меньшее число свободных параметров N по сравнению с методами низкого порядка аппроксимации и как следствие могут быть более экономичны при расчетах. При этом в областях канонических форм за счет высокой точности p -подхода часто можно

отказаться от разбиения области или ограничиться малым числом разбиений. Отметим, что особенности, связанные с потерей гладкости не являются непреодолимыми для методов высокого порядка аппроксимации. Если удастся локализовать особенность и поместить ее на границу двух подобластей, таким образом, чтобы в каждой подобласти решение не имело особенностей, то p -подход может быть успешно применен.

Далее метод КНН с равномерным расположением точек коллокаций и применением полиномов невысоких степеней для краткости назовем стандартным или h -КНН. Вариант с неравномерным расположением точек коллокаций и с аппроксимацией полиномами высоких степеней назовем *модифицированным* методом КНН или hp -КНН, подразумевая и p -КНН в случае аппроксимации одним полиномом.

В рассматриваемом варианте метода hp -КНН берутся сетки с ячейками канонической формы: отрезок, квадрат, куб. В общем случае, метод hp -КНН можно реализовать на сетках с ячейками, которые могут быть конформно отображены на соответствующую каноническую область. Напомним, что в методе КНН, в каждой ячейке вводится локальная система координат, такая что локальные переменные изменяются от -1 до 1 . В методе hp -КНН координаты точек коллокаций выбираются как корни многочлена Чебышёва. Использование корней многочленов Чебышёва в качестве точек коллокаций позволяет для достаточно широкого класса решений дифференциальных задач обеспечить сходимость численного решения к точному при аппроксимации полиномами высоких степеней. Например, интерполяционный процесс, основанный на чебышевских сетках сходится равномерно для любой функции, удовлетворяющей условию Дини-Липшица, частным случаем которого является обобщенное условие Липшица [60, 82].

В общем случае выбор точек коллокаций и выбор базиса не определен однозначно. Например, вместо корней многочлена Чебышёва можно использовать точки экстремума многочлена Чебышёва, дополненные точками -1 и 1 .

В западной литературе для этих точек принят термин – узлы Гаусса-Лобатто. Также можно использовать корни многочлена Лежандра или Чебышёва второго рода, а сами эти функции в качестве базиса. Например, для периодических функций наиболее эффективным является представление решения в виде ряда Фурье с равномерной сеткой точек коллокаций. В редких случаях используются специальные функции, такие как многочлены Лаггера, Эрмита, сферические гармоники [88] и их модификации. В методе hp -КНН используются многочлены Чебышёва и их корни, как наиболее простой и универсальный способ реализации p -подхода.

Метод коллокаций, в котором в качестве точек коллокаций выбраны корни многочленов Чебышёва в западной литературе носит название псевдоспектрального метода [88], а в отечественной научной школе – ортогональной коллокации [18]. Также применение полиномов высоких степеней можно рассматривать как частный случай теории методов без насыщения (ненасыщения).

Как уже было отмечено, в отличие от метода коллокаций в методе КНН минимизируется функционал невязки, что позволяет в методе hp -КНН сочетать достоинства метода КНН и методов без насыщения.

Основные отличия hp -КНН от h -КНН заключаются в специальном расположении точек коллокаций и способе представления решения в ячейке. Технология применения метода декомпозиции в обоих вариантах метода аналогична. Поэтому отличия можно описать на примере отдельной ячейки. Во многих случаях, представленных ниже, высокая точность метода hp -КНН позволяет отказаться от декомпозиции на ячейки, рассматривая область как одну ячейку (p -КНН).

2.3.1. Одномерный случай

Напомним, что величина N^k есть количество неизвестных коэффициентов c_i в представлении решения в ячейке Ω^k , т.е. решение аппроксимируется

полиномом степени $N^k - 1$

$$u(y) = \sum_{i=0}^{N^k-1} c_i \phi_i(y), \quad y \in [-1; 1], \quad (2.23)$$

где $\phi_i(y)$ – известные полиномы. Пусть количество точек коллокаций $\{y_{col}\}$ также равно N^k и в качестве их координат выберем α_i – корни многочлена Чебышёва первого рода степени N^k , обозначенного $T_{N^k}(y)$. Таким образом, в описанном варианте метода hp –КНН количество точек коллокаций совпадает с количеством степеней свободы базиса, а граничные условия и условия согласования приводят к переопределению локальной СЛАУ в ячейке.

В стандартном методе КНН, в котором используются полиномы невысокой степени, в качестве базисных функций используются мономы

$$\phi_i(y) = y^i, \quad i = 0, \dots, N^k - 1. \quad (2.24)$$

Такой выбор удобен, так как представление (2.23) с учетом (2.24) может быть легко продифференцировано и проинтегрировано в аналитическом виде. При этом требуется небольшое число арифметических действий для вычисления его значения. При описанных преимуществах этот базис имеет принципиальные недостатки. С увеличением N^k число обусловленности локальной СЛАУ быстро растет, и, следовательно, возникают большие ошибки округления в результате её решения. Также из-за ошибок округления может быть нарушена линейная независимость базисных функций. Описанные недостатки приводят к тому, что стандартный базис метода КНН не применяется в методе hp –КНН.

Выделим два способа представления решения, которые позволят работать с полиномиальной аппроксимацией высокого порядка. Первый основан на идеях построения интерполяционного полинома Лагранжа. В качестве базисных функций выбираются полиномы L_i ($i = 0, \dots, N^k - 1$) степени

$N^k - 1$ такие, что

$$L_i(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = \alpha_i, \\ 0, & \text{если } y = \alpha_j, \quad j \neq i, \end{cases} \quad (2.25)$$

то есть,

$$\phi_i(y) = L_i(y) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{N^k-1} \frac{y - \alpha_m}{\alpha_i - \alpha_m}, \quad i = 0, \dots, N^k - 1, \quad (2.26)$$

где α_i – координаты точек коллокаций, в наше случае корни многочлена Чебышёва степени N^k .

В отличие от случая (2.24) рассматриваемый базис по определению зависит от выбора точек коллокаций. Использование базиса в виде (2.26) с корнями многочленов Чебышёва при решении задач аппроксимации приводит к лучше обусловленным СЛАУ, чем в случае применения базиса (2.24). Медленный рост числа обусловленности дает возможность увеличивать N^k до больших значений – порядка 30 и больше. Но известно, что на практике работа с базисными полиномами Лагранжа трудоемка. Несмотря на то, что они как и в (2.24) могут быть аналитически продифференцированы и проинтегрированы, получающиеся выражения требуют большого числа арифметических действий при вычислении значения функции (2.23) и ее производных. Это приводит к возникновению дополнительных ошибок округления.

Для работы с полиномами высоких степеней наиболее удобным и универсальным способом является представление решения в виде ряда по многочленам Чебышёва T_i

$$\phi_i(y) = T_i(y), \quad i = 0, \dots, N^k - 1. \quad (2.27)$$

Несомненно, такой выбор базиса объединяет в себе преимущества первых двух подходов. Во-первых, с ростом N^k число обусловленности СЛАУ в среднем растет также как в случае (2.26), во-вторых многочлены Чебышёва можно записать в тригонометрической форме для быстрого подсчета

$$T_i(y) = \cos(it), \quad t = \arccos(y), \quad y \in [-1, 1]. \quad (2.28)$$

Относительно просто выписываются первая и вторая производная

$$\begin{aligned} \frac{dT_i(t)}{dy} &= \frac{i \sin(it)}{\sin(t)}, & \frac{dT_i(\pm 1)}{dy} &= (\pm 1)^{i+1} i^2, \\ \frac{d^2T_i(t)}{dy^2} &= -\frac{i^2 \cos(it)}{\sin^2(t)} + \frac{i \cos(t) \sin(it)}{\sin^3(t)}, & \frac{d^2T_i(\pm 1)}{dy^2} &= (\pm 1)^{i+2} i^2 \frac{i^2 - 1}{3}. \end{aligned}$$

При решении задач методом hp –КНН здесь применены два последних способа.

2.3.2. Двумерный случай

В двумерных расчетных областях задача реализации p –подхода становится еще более требовательной. В одномерном случае мы накладывали два основных условия: расположение точек коллокаций, обеспечивающее сходимость приближенного решения при использовании полиномов высоких степеней и вид представления решения удобный в реальных численных расчетах. В определенном смысле два этих условия являются независимыми в одномерном случае. В двумерном случае связь между выбором базиса и расположением точек коллокаций становится критичной. Необходимо чтобы возникающая локальная СЛАУ имела полный ранг. Одновременное выполнения всех трех перечисленных условий является основной трудностью для применения p –подходов увеличения точности в областях сложной геометрической формы.

Описанные требования могут быть удовлетворены в случае квадратной области. Пусть $N_1 N_2 = N^k$ и $\alpha_{i_1}^1$ ($i_1 = 0 \dots, N_1 - 1$) корни многочлена Чебышёва степени N_1 , а $\alpha_{i_2}^2$ ($i_2 = 0 \dots, N_2 - 1$) корни многочлена Чебышёва степени N_2 . Тогда для квадратной области выберем координаты точек коллокаций следующим образом (рисунок 2.2)

$$(\alpha_{i_1}^1, \alpha_{i_2}^2). \tag{2.29}$$

По аналогии с одномерным случаем такой выбор точек коллокаций позволит применять полиномиальную аппроксимацию высокого порядка. Описанный

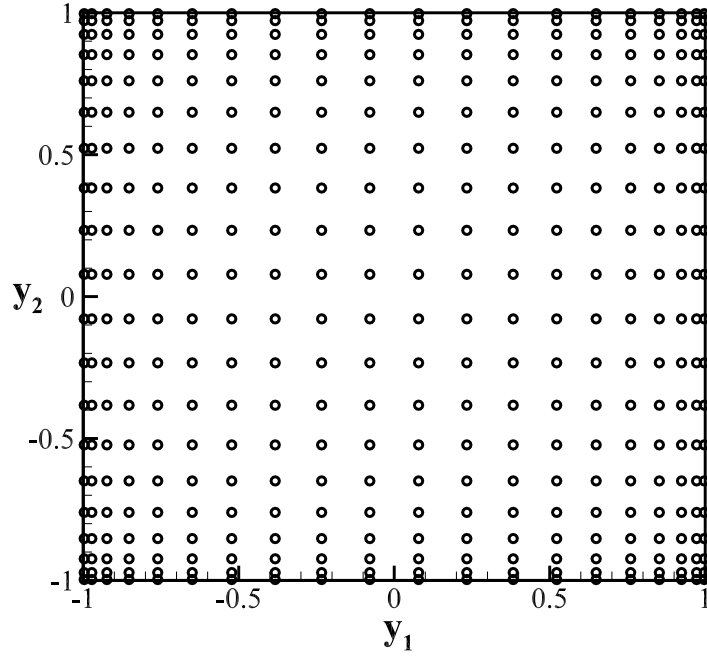


Рисунок 2.2 – Пример расположения точек коллокаций в квадратной ячейке при $N_1=N_2=20$.

выбор точек коллокаций и форма области дают возможность использовать представление решения в виде произведения двух одномерных полиномов

$$u(y_1, y_2) = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} c_{i_1 i_2} \phi_{i_1}(y_1) \phi_{i_2}(y_2), \quad (y_1, y_2) \in [-1; 1] \times [-1; 1]. \quad (2.30)$$

Аналогично выберем координаты точек согласования и граничных точек

$$(\pm 1, \alpha_{i_2}^2), \quad (\alpha_{i_1}^1, \pm 1). \quad (2.31)$$

В случае применения базисных полиномов Лагранжа, по аналогии с одномерным случаем (2.26), имеем

$$\phi_{i_1}(y_1) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i_1}}^{N_1-1} \frac{y_1 - \alpha_m^1}{\alpha_{i_1}^1 - \alpha_m^1}, \quad \phi_{i_2}(y_2) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i_2}}^{N_2-1} \frac{y_2 - \alpha_l^2}{\alpha_{i_2}^2 - \alpha_l^2}, \quad (2.32)$$

а для полиномов Чебышёва

$$\phi_{i_1}(y_1) = T_{i_1}(y_1), \quad \phi_{i_2}(y_2) = T_{i_2}(y_2). \quad (2.33)$$

Количество степеней свободы представления решения (2.30) равно $N_1 N_2 = N^k$. Количество уравнений коллокаций также равно N^k . Но на границе ячейки имеются еще $2(N_1 + N_2)$ точки постановки условий согласования или краевых уравнений. Таким образом, локальная СЛАУ переопределена на $2(N_1 + N_2)$ уравнений. Стоит отметить, что если отказаться от переопределения системы, возникает отдельная задача выбора точек записи уравнений. Во-первых, количество уравнений в системе должно совпадать с числом неизвестных, во-вторых, расположение точек коллокаций должно обеспечить применимость полиномиальной аппроксимации высокой степени и, в-третьих, должны быть выполнены краевые условия или условия склейки решения. В методе коллокаций для решений этой проблемы применяются различные подходы, такие как выбор базиса тождественно удовлетворяющий краевым условиям и требованиям гладкости. Метод КНН за счет возможности переопределения СЛАУ позволяет избежать описанных трудностей и дает при реализации ббольшую свободу.

2.3.3. Трехмерный случай

Пусть $N^k = N_1 N_2 N_3$. В кубе точки коллокаций выбираются аналогично одномерному и двумерному случаю: $(\alpha_{i_1}^1, \alpha_{i_2}^2, \alpha_{i_3}^3)$ ($i_1 = 0 \dots, N_1 - 1$; $i_2 = 0 \dots, N_2 - 1$; $i_3 = 0 \dots, N_3 - 1$), где $\alpha_{i_1}^1, \alpha_{i_2}^2, \alpha_{i_3}^3$ корни многочленов Чебышёва степени N_1, N_2 и N_3 соответственно. Условия согласования и граничные условия записываются в точках

$$(\pm 1, \alpha_{i_2}^2, \alpha_{i_3}^3), \quad (\alpha_{i_1}^1, \pm 1, \alpha_{i_3}^3), \quad (\alpha_{i_1}^1, \alpha_{i_2}^2, \pm 1). \quad (2.34)$$

Описанный выбор точек коллокаций позволяет представить приближенное решение в виде произведения трех одномерных полиномов

$$u(y_1, y_2, y_3) = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \sum_{i_3=0}^{N_3-1} c_{i_1 i_2 i_3} \phi_{i_1}(y_1) \phi_{i_2}(y_2) \phi_{i_3}(y_3). \quad (2.35)$$

Аналогично можно выписать вид базисных функций для базисных полиномов Лагранжа

$$\begin{aligned}\phi_{i_1}(y_1) &= \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i_1}}^{N_1-1} \frac{y_1 - \alpha_m^1}{\alpha_{i_1}^1 - \alpha_m^1}, \\ \phi_{i_2}(y_2) &= \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i_2}}^{N_2-1} \frac{y_2 - \alpha_l^2}{\alpha_{i_2}^2 - \alpha_l^2}, \\ \phi_{i_3}(y_3) &= \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i_3}}^{N_3-1} \frac{y_3 - \alpha_l^3}{\alpha_{i_3}^3 - \alpha_l^3}.\end{aligned}\tag{2.36}$$

В случае полиномов Чебышёва

$$\phi_{i_1}(y_1) = T_{i_1}(y_1), \quad \phi_{i_2}(y_2) = T_{i_2}(y_2), \quad \phi_{i_3}(y_3) = T_{i_3}(y_3).\tag{2.37}$$

2.4. Решение тестовых задач

Для демонстрации возможностей модифицированного метода коллокаций и наименьших невязок покажем результаты его работы на примерах решения тестовых задач. Тестовые задачи позволяют сконцентрировать внимание исследователя на отдельных аспектах вычислительного процесса, не внося дополнительных сложностей. Обычно тестовые задачи имеют аналитическое решение или опубликованные результаты расчетов другими численными методами. Это позволяет верифицировать результаты расчетов и оценить преимущества или недостатки исследуемого метода в сравнении. Представленные тестовые задачи содержат определенные трудности, возникающие при решении важных практических задач численными методами. Для сравнения p - и h -подходов расчеты проведены как для стандартного метода КНН так и для hp -КНН.

В расчетах стандартным методом КНН (h -КНН) используется равномерная сетка с равномерным расположением точек коллокаций в ячейках

- в одномерном случае (N – точек коллокаций)

$$y_{col}^i = -1 + \frac{2}{N+1}(i+1), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

- в двумерном случае (N_1N_2 – точек коллокаций)

$$y_{col}^{i_1} = -1 + \frac{2}{N_1+1}(i_1+1), \quad i_1 = 0, \dots, N_1-1,$$

$$y_{col}^{i_2} = -1 + \frac{2}{N_2+1}(i_2+1), \quad i_2 = 0, \dots, N_2-1.$$

- в трехмерном случае ($N_1N_2N_3$ – точек коллокаций)

$$y_{col}^{i_1} = -1 + \frac{2}{N_1+1}(i_1+1), \quad i_1 = 0, \dots, N_1-1,$$

$$y_{col}^{i_2} = -1 + \frac{2}{N_2+1}(i_2+1), \quad i_2 = 0, \dots, N_2-1,$$

$$y_{col}^{i_3} = -1 + \frac{2}{N_3+1}(i_3+1), \quad i_3 = 0, \dots, N_3-1.$$

При реализации метода итераций по подобластям в качестве подобласти используется одна ячейка сетки. Если не оговорено особо, в условиях согласования вида (2.19) весовые параметры равны единице. Обозначение КНН(n) используется для метода КНН, в каждой ячейке которого решение аппроксимируется полиномом степени n .

Для метода hp –КНН число степеней свободы в представлении решения совпадает с количеством точек коллокаций (см. параграф 2.3). Во всех расчетах, если не оговорено особо, применяется базис в виде ряда многочленов Чебышёва. В представленных расчетах в hp –КНН метод итераций по подобластям не применяется, т.е. решается непосредственно глобальная переопределенная СЛАУ, выписанная для всех ячеек. В качестве условий согласования используется требование непрерывности функции и ее производных по нормали к границе ячейки вплоть до $m-1$ порядка, где m – порядок дифференциального уравнения.

Погрешность численного решения определяется как относительная погрешность в супремум норме

$$Er(u) = \frac{\|u(x) - u_{ex}(x)\|}{\|u_{ex}(x)\|}, \quad \|u(x)\| \equiv \max_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad (2.38)$$

где $u(x)$ – численное решение; $u_{ex}(x)$ – точное решение. Также введем обозначения для погрешности производных численного решения

$$Er_x(u) = \frac{\left\| \frac{\partial u(x)}{\partial x} - \frac{\partial u_{ex}(x)}{\partial x} \right\|}{\left\| \frac{\partial u_{ex}(x)}{\partial x} \right\|},$$

и по аналогии для других производных.

При проведении численных расчетов очень важно убедиться, что при увеличении количества ячеек сетки K , приближенное решение сходится к решению дифференциальной задачи. Из исследования численного решения на сходимость можно оценить порядок аппроксимации метода при помощи правила Рунге. Для этого необходимо провести расчет на разных сетках. Если первый расчет проводился при $K = k_1$, а второй при $K = k_2$ и $k_2 > k_1$, тогда можно определить порядок уменьшения погрешности γ , определяемый по формуле

$$\gamma = \frac{\ln(\|u_{k_1}(x) - u_{ex}(x)\| / \|u_{k_2}(x) - u_{ex}(x)\|)}{\ln(k_2/k_1)}, \quad (2.39)$$

где u_{k_1} и u_{k_2} – численные решения, полученные при $K = k_1$ и $K = k_2$ соответственно. Если при $K \rightarrow \infty$ приближенное решение сходится к решению дифференциальной задачи, то без учета ошибок округления γ стремится к теоретическому значению порядка аппроксимации метода на решении дифференциальной задачи. Стоит отметить, что в качестве величины относительно которой определяется порядок аппроксимации метода обычно используется h – некоторый характерный размер используемой сетки. Однако, метод Рунге нельзя применить для определения порядка аппроксимации p – КНН так как, порядок аппроксимации для него не является константой и увеличивается с ростом p (степени полинома).

При демонстрации численных величин для экономии места будем использовать следующий способ записи

$$\begin{aligned} -1.23 \cdot 10^4 &= -1.23e+4, \\ 5.67 \cdot 10^{-8} &= 5.67e-8. \end{aligned}$$

Численные расчеты проводились на персональной ЭВМ, на одном вычислительном узле с тактовой частотой 4 ГГц. В вычислениях использовалась арифметика с двойной точностью (примерно 16 знаков).

2.4.1. Одномерные тестовые задачи

Задача без особенностей. В первом численном эксперименте рассмотрим краевую задачу для ОДУ

$$u''(x) - 4u(x) = 4 \cosh(1), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (2.40)$$

точное решение которой

$$u_{ex}(x) = \cosh(2x - 1) - \cosh(1) \quad (2.41)$$

не имеет особенностей на интервале $[0; 1]$. Под особенностями будем понимать разрывы, большие градиенты решения или его производных.

На примере подобных тестовых задач можно при относительно небольшом количестве степеней свободы в представлении решения получить сходимость приближенного решения к точному. Для этой задачи в работе [112] приведены результаты ее решения методом коллокаций. Также для этой задачи получено решение методом КНН(3) (таблица 2.1).

В работе [112] применяется метод коллокаций, использующий кубические сплайны и имеющий второй порядок аппроксимации. В стандартном h – КНН, также используются полиномы 3 степени. Напомним, что K – число ячеек, N^k – число неизвестных в разложении решения в ячейке. Можно отметить, что порядок аппроксимации для метода коллокаций (2.1), рассчитанный по формуле (2.39) отличается от теоретического. Это связано с тем, что

Таблица 2.1 – Погрешность численных решений краевой задачи (2.40), полученная методами коллокаций и КНН(3).

$K \times N^k$	Работа [112]	γ	КНН(3)	γ
5×4	9.63e-3	–	1.84e-3	–
7×4	4.84e-3	2.4	9.48e-4	2.0
9×4	2.91e-3	2.3	5.74e-4	2.0
11×4			3.85e-4	2.0
13×4			2.76e-4	2.0

γ стремится к своему предельному значению, начиная с некоторого N_0 при $N \rightarrow \infty$. Из таблицы видно, что решение получено примерно с одним порядком точности. При этом в методе КНН порядок расчетной величины γ уже на грубых сетках равен теоретическому значению, а решение получено с меньшей погрешностью.

Рассмотрим p – подход. Для этого достаточно использовать одну ячейку, т.е. для представления решения применяется один полином $N - 1$ степени (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Погрешность численных расчетов краевой задачи (2.40) для p – КНН

$K \times N^k$	$Er(u)$	$Er_x(u)$	$Er_{xx}(u)$
1×5	7.75e-6	4.58e-5	4.04e-4
1×7	2.30e-8	2.68e-7	3.36e-6
1×9	6.19e-11	8.99e-10	1.48e-8
1×11	1.02e-13	2.01e-12	4.08e-11
1×13	1.33e-16	3.17e-15	7.67e-13

Таблица (2.2) демонстрирует преимущества p – подхода перед h – подходом (таблица 2.1). Из первой колонки таблицы видно, что использование полинома 12 степени (13 коэффициентов) достаточно, чтобы получить точ-

ность близкую к машинной точности. Уменьшение погрешности, которое наблюдается в таблице (2.2) является примером экспоненциальной сходимости. В численных методах, где решение уточняется за счет увеличения количества кусков в кусочно-полиномиальном представлении (h – подход), порядок аппроксимации метода фиксирован. Это хорошо видно, в таблице (2.1) в соответствующих колонках для γ . Напротив, в методе p –КНН с ростом N порядок уменьшения погрешности растет и для решений без особенностей, вообще говоря, ограничен только погрешностями округления. Этот эффект имеет место в методах без насыщения, спектральных методах и хорошо описан в соответствующей литературе [10, 88]. Также в таблице (2.2) приведены значения погрешности первой и второй производных численного решения. Видно, что экспоненциальная сходимость также наблюдается и для производных численного решения. Стандартному методу КНН(3) для достижения точности порядка 10^{-10} требуется 20 000 ячеек и следовательно 80 000 свободных параметров, а методу p –КНН их требуется всего 9. Таким образом, применение полиномов высоких степеней в методе КНН позволяет минимизировать число свободных параметров в представлении решения, и как следствие минимизировать число арифметических операций.

Во многих задачах математической физики не требуется столь высокая точность вычислений, но даже в этом случае применение методов, обладающих экспоненциальным порядком аппроксимации, может быть предпочтительным. Так как для достижения необходимой точности потребует меньшее число свободных параметров по сравнению с методами низкого порядка аппроксимации, а следовательно решение задачи линейной алгебры может быть более экономичным.

Задача с большим градиентом решения. Предыдущий пример показывает, что метод p –КНН позволяет найти численное решение с очень высокой точностью. Однако существуют классы задач, где для получения относительно невысокой точности (несколько верных знаков) требуется боль-

шое количество элементов в представлении решения. К ним относятся задачи, решения которых имеют большие градиенты. В работе [112] приводится пример краевой задачи, описывающий распределение напряжений в круглой мембране под действием нагрузки

$$\begin{aligned} u''(x) + (3 \cot(x) + 2 \tan(x)) u'(x) + 0.7 u(x) &= 0, \\ u(30^\circ) &= 0, \quad u(60^\circ) = 5, \quad x \in [30^\circ; 60^\circ]. \end{aligned} \tag{2.42}$$

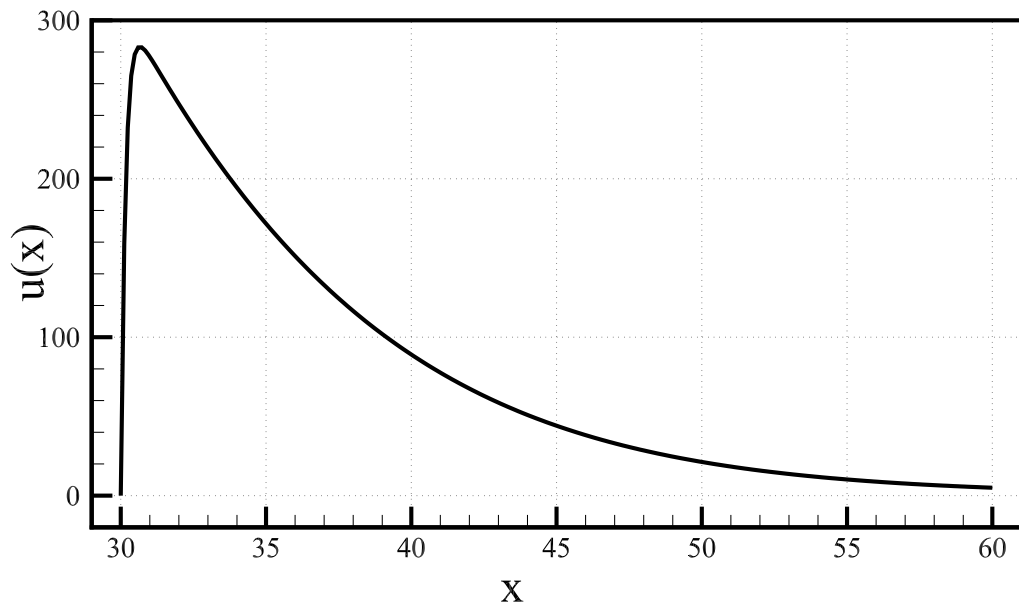


Рисунок 2.3 – Распределение напряжений в круглой мембране

На рисунке 2.3 представлено приближенное решение этой задачи. Из рисунка видно, что у левого края решение резко возрастает от 0 до величины порядка 280. Это пример жесткой краевой задачи для ОДУ. При использовании полиномиальной аппроксимации наличие больших градиентов в решении или в его производных приводит к необходимости применения большого числа базисных функций в представлении решения. В [112] приведена таблица 2.3 значений численного решения, полученного методом конечных разностей с применением центральных разностей. В расчетах применялась сетка с 3000 узлов.

Сравним эффективность методов КНН, p -КНН и hp -КНН на примере

Таблица 2.3 – Численное решение краевой задачи (2.42), полученное методом конечных разностей.

x	$u(x)$
35.01	1.71437e+2
40.01	8.89492e+1
45.01	4.40578e+1
50.01	2.12367e+1
55.01	1.01900e+1

решения краевой задачи (2.42). Для этого определим из численных экспериментов N – число степеней свободы в представлении базиса необходимое для достижения результатов, представленных в таблице 2.3. В методе конечных разностей использован трехточечный шаблон, поэтому в стандартном методе КНН используются полиномы второй степени для аппроксимации решения в ячейках, т.е. число степеней свободы в ячейке равно 3. В этом случае необходимо порядка 900 ячеек для полного совпадения результатов расчета с данными таблицы 2.3. Таким образом, стандартному методу КНН(2) требуется 2700 степеней свободы в представлении решения.

В случае p – КНН, в котором ячейка совпадает с расчетной областью, требуется 70 точек коллокаций, а следовательно применение полинома 69-й степени. Представление базисных функций в виде мономов (2.24) для таких степеней уже не применимо, так как числовая матрица соответствующей СЛАУ не имеет полного ранга. Однако, представление решения с использованием базисных полиномов Лагранжа (2.26) и многочленов Чебышёва (2.27) дает необходимый результат. При помощи систем компьютерной алгебры можно оценить число обусловленности соответствующих СЛАУ в спектральной норме. Для случаев (2.26) и (2.27) оно имеет порядок $2 \cdot 10^6$.

В предыдущих расчетах использовалась одна ячейка, т.е. решение во всей области аппроксимировалось одним полиномом (p – КНН). На примере этой

задачи покажем как влияет увеличение числа ячеек сетки (равномерное разбиение) на количество степеней свободы N необходимое для достижения фиксированной точности. Для этого рассмотрим hp -КНН, в котором используется K ячеек, в каждой из которых решение аппроксимируется полиномами степени $N^k - 1$. Точность расчетов как и прежде определим совпадением с данными таблицы 2.3.

Таблица 2.4 – Зависимость общего числа неизвестных N от количества ячеек сетки, необходимого для совпадения с таблицей 2.3.

K	N^k	N
1	70	70
2	42	84
3	34	102
4	30	120
5	27	135
10	21	210
20	16	320
40	13	520
80	11	880
160	10	1600

Здесь N – общее количество степеней свободы представления решения, рассчитанное согласно формуле $N = KN^k$. При увеличении числа разбиений уменьшается степень полиномов. При этом из таблицы 2.4 видно как возрастает общее число неизвестных коэффициентов N , необходимое для достижения фиксированной точности, при уменьшении числа базисных элементов в каждой ячейке. Таблица 2.4 демонстрирует, что в методах низкого порядка аппроксимации, требуется большее число степеней свободы в представлении базиса, чем в методах высокого порядка. Однако, следует понимать, что минимизация N не всегда приводит к минимизации вычислительных затрат. Для случая одной ячейки соответствующая разрешающая СЛАУ является

полностью заполненной, а при использовании кусочных базисов, матрица соответствующей разрешающей СЛАУ имеет блочно-диагональный вид, к которому могут быть применены более экономичные алгоритмы обращения.

Очевидно, что в задачах с локализованной особенностью, можно применять специальные подходы, такие как, адаптивные сетки. Методы, использующие hp – подход дают вычислителю помимо выбора сетки дополнительную вид адаптации – подбор необходимой степени представления решения в ячейке. В этом смысле hp – КНН является наиболее универсальным.

Задача с ограниченной гладкостью решения. В предыдущих примерах решения краевых задач обладали бесконечной гладкостью. Дифференцируемость искомого решения является принципиальным моментом для численных методов высокого порядка аппроксимации. Приведем пример краевой задачи, решение которой в некоторых точках дифференцируемо ограниченное число раз [112]

$$\begin{aligned} u''(x) + x u'(x) - u(x) &= x e^x - |x|(6 - 12x + 2x^2 - 3x^3), \\ u(-1) &= e^{-1} - 2, \quad u(1) = e, \quad x \in [-1; 1]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Оно имеет точное решение

$$u_{ex}(x) = \begin{cases} e^x - x^3 + x^4, & x \geq 0 \\ e^x + x^3 - x^4, & x \leq 0, \end{cases} \quad (2.44)$$

которое терпит разрыв третьей и четвертой производной (рисунок 2.4). Интересно, что визуально особенность в точке $x = 0$ выявить невозможно.

В общем случае приближенное решение задачи (2.43) может быть получено лишь со вторым порядком аппроксимации и применение аппарата методов высокого порядка аппроксимации кажется бессмысленным. Однако, известно, что проекционные методы могут получать более высокий порядок аппроксимации если особенность точно локализуется. Если точки, в которых решение имеет особенность поместить на границы ячеек, то есть

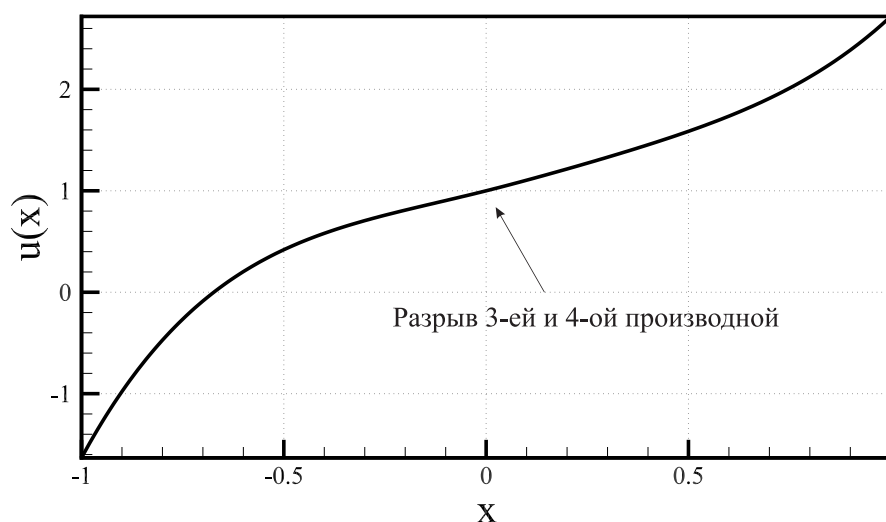


Рисунок 2.4 – Точное решение задачи (2.43).

в места склейки кусочных решений, то можно повысить порядок аппроксимации. В описанном примере решение терпит разрыв третьей и четвертой производной в точке 0. Рассмотрим два способа построения сетки, когда точка разрыва производных находится либо внутри ячейки, либо на ее границе. Так как рассматриваются только равномерные сетки, в случае четного количества ячеек особенность попадает на границу ячейки, а в случае нечетного количества в центр ячейки. В таблице 2.5 приведены результаты расчетов методом hp -КНН для сеток, состоящих из одной ($K = 1$) и двух ячеек ($K = 2$).

В случае, когда используется одна ячейка, особенность не попадает на границу ячейки и порядок уменьшение погрешности решения и его производных ограничен. Однако, если используется две ячейки и особенность находится на границе между ними, наблюдается экспоненциальный порядок сходимости для решения и его первой и второй производных.

Таким образом, метод hp -КНН может успешно применяться для краевых задач, решения которых терпят разрыв в известных точках. При построении сетки необходимо поместить точки разрыва решения на границе между ячейками, что позволит эффективнее использовать hp -подход, по сравнению со случаем когда разрыв попадает внутрь ячейки.

Таблица 2.5 – Погрешность численных расчетов краевой задачи (2.43) для сеток с одной и двумя ячейками.

$K \times N^k$	$Er(u)$	$Er_x(u)$	$Er_{xx}(u)$
$K = 1$			
1×8	1.20e-2	1.16e-2	4.93e-2
1×12	4.70e-3	4.29e-3	2.99e-2
1×16	2.56e-3	2.27e-3	2.18e-2
1×20	1.62e-3	1.41e-3	1.72e-2
$K = 2$			
2×4	4.50e-2	4.66e-2	9.26e-2
2×6	3.84e-6	1.02e-5	3.17e-5
2×8	4.05e-9	1.36e-8	6.61e-8
2×10	2.56e-12	1.12e-11	7.30e-11
2×12	1.39e-15	6.03e-15	5.67e-14

Краевая задача 4-го порядка. При решении задач механики пластин возникают системы дифференциальных уравнений, которые содержат четвертые производные от искомого решения. Для многих численных методов наличие производных высокого порядка является серьезной трудностью, требующей специальных решений. Но технология методов КНН и его вариантов может быть успешно применена практически без изменений. Рассмотрим задачу, описывающую изгиб тонкой балки, защемленной на краях

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u(x)}{dx^4} &= e^x (x^4 + 14x^3 + 49x^2 + 32x - 12), \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) &= 0, \quad x \in [0; 1]. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Точное решение этой задачи

$$u_{ex}(x) = x^2(1-x)^2 e^x.$$

Результаты расчетов методом p -КНН представлены в таблице 2.6. Видно, что помимо высокой точности самого решения, достигается высокая точность всех производных вплоть до 4-го порядка.

Таблица 2.6 – Погрешность численных расчетов методом p – КНН для краевой задачи (2.45)

$K \times N$	$Er(u)$	$Er_x(u)$	$Er_{xx}(u)$	$Er_{xxx}(u)$	$Er_{xxxx}(u)$
1×5	7.34e-1	7.43e-1	1.83e-1	1.85e-2	6.82e-1
1×7	2.18e-2	3.79e-2	2.92e-2	2.03e-2	3.48e-2
1×9	1.11e-4	2.68e-4	1.51e-4	1.67e-4	3.82e-4
1×11	1.17e-7	3.96e-7	3.13e-7	4.77e-7	1.46e-6
1×13	6.41e-11	3.02e-10	3.48e-10	6.88e-10	2.69e-9
1×15	1.14e-13	6.05e-13	9.02e-13	3.43e-12	1.49e-10
1×17	9.64e-14	6.78e-13	1.23e-12	4.98e-12	3.41e-10

В стандартном методе КНН для аппроксимации решения в ячейке использован полином 5-ой степени. Воспользовавшись формулой (2.39) из таблицы 2.7 можно получить, что порядок аппроксимации решения и всех производных вплоть до 3-ей равен 2 и равен 1 для 4-ой производной.

Таблица 2.7 – Погрешность численных расчетов стандартным методом КНН(5) (h – КНН) для краевой задачи (2.45)

K	N	$Er(u)$	$Er_x(u)$	$Er_{xx}(u)$	$Er_{xxx}(u)$	$Er_{xxxx}(u)$
2	12	8.57e-2	9.33e-2	7.99e-2	2.01e-2	7.06e-2
10	60	3.16e-3	2.90e-3	2.41e-3	2.22e-3	3.13e-3
20	120	7.90e-4	7.26e-4	5.96e-4	5.40e-4	6.21e-4
40	240	1.98e-4	1.82e-4	1.49e-4	1.32e-4	1.14e-4
80	480	4.94e-5	4.54e-5	3.71e-5	3.18e-5	5.87e-4

Нелинейное ОДУ. В качестве еще одной одномерной тестовой краевой задачи рассмотрим нелинейное уравнение [112]

$$u''(x) = e^{u(x)}, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad x \in [0; 1] \quad (2.46)$$

с точным решением

$$u_{ex}(x) = \ln(2) + 2 \ln(c \sec(0.5 c (x - 0.5))),$$

где для c известно 7 первых цифр $c=1.336056$. Для решения краевой задачи применяется метод линеаризации Ньютона и исходную нелинейную краевую задачу (2.46) согласно [117] можно свести к сходящемуся итерационному процессу

$$v_{n+1}''(x) - v_{n+1}(x) = e^{v_n(x)} - v_n(x), \quad v_{n+1}(0) = v_{n+1}(1) = 0,$$

где v_n – решение, полученное на n -ой итерации, а $v_0(x) \equiv 0$. Для решения используется метод p -КНН (с одной ячейкой). Из таблицы 2.8 видно, что наименьшая погрешность, ограниченная точностью константы c , достигается уже на полиномах 7 степени. При этом требуется порядка 8 итераций в методе Ньютона для сходимости итерационного процесса (условие основы аналогично условию (2.21)).

Таблица 2.8 – Погрешность численных расчетов методом p -КНН для краевой задачи (2.46).

$K \times N$	$Er(u)$
1×2	5.18e-1
1×4	3.07e-2
1×6	2.05e-4
1×8	5.04e-6
1×10	4.48e-6

Перейдем к рассмотрению двумерных краевых задач.

2.4.2. Двумерные тестовые задачи

В проекционных методах представление приближенного решения часто модифицируется таким образом, чтобы оно тождественно удовлетворяло

краевым условиям задачи. Если в одномерном случае этот подход реализуется относительно просто, то в двумерном случае, выбор такого представления решения может оказаться отдельной задачей, осложненной геометрией области, особенностями решения на границе, сложным видом краевых условий. Важное преимущество в этом случае имеет подход метода КНН, который позволяет переопределять СЛАУ, увеличивая количество уравнений, в том числе граничных условий. Переопределение позволяет использовать стандартный вид представления решения и потребовать от решения соответствия краевым условиям в заданных точках в смысле наименьших квадратов. При этом использование более сложных краевых условий, в виде линейной комбинации решения и его производных, которые повсеместно встречаются в задачах механики пластин, не вызывает особых трудностей. Покажем результаты применения p – подхода в двумерном случае.

Задача Дирихле для уравнение Пуассона. В качестве первой двумерной тестовой задачи рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в квадратной области $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} &= -100 \sin(10 x_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u(x_1, x_2) &= u_{ex}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.47)$$

с известным точным решением $u_{ex}(x_1, x_2) = \sin(10 x_1 x_2)$ (рисунок 2.5).

В таблице 2.9 указана погрешность численного решения и его производных для стандартного метода КНН(4), т.е. если решение в каждой ячейке представляется в виде полного полинома четвертой степени относительно двух переменных с 15 свободными параметрами. Из таблицы видно, что наблюдается близкий к четвертому порядок сходимости численного решения как для самой функции, так и для ее производной. Вторая производная аппроксимируется с порядком близким к третьему.

В расчетах применен метод p – КНН ($K = 1$), а приближенное решение имеет базисные функции вида (2.33). В таблице 2.10 представлены результа-

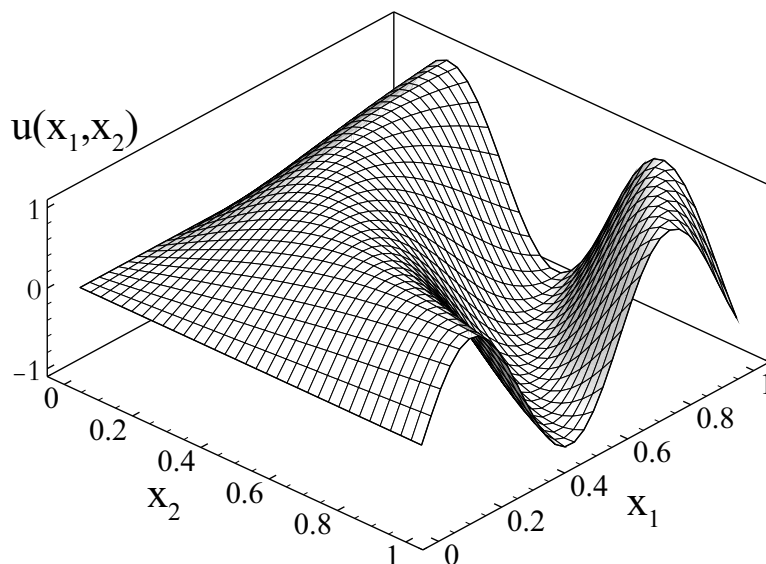


Рисунок 2.5 – Вид решения u_{ex} задачи (2.47).

Таблица 2.9 – Погрешность численных расчетов стандартным методом КНН(4) ($N^k=15$) для краевой задачи (2.47).

K	N	$Er(u)$	γ	$Er_x(u)$	γ	$Er_{xx}(u)$	γ
4×4	240	$5.23e-2$		$1.23e-1$		$5.17e-1$	
8×8	960	$3.02e-3$	4.1	$8.27e-3$	3.9	$6.93e-2$	2.9
16×16	3840	$1.76e-4$	4.1	$8.72e-4$	3.2	$1.59e-2$	2.1
32×32	15360	$1.05e-5$	4.1	$3.70e-5$	4.6	$1.34e-3$	3.6
64×64	61440	$6.61e-7$	4.0	$2.62e-6$	3.8	$1.51e-4$	3.2
128×128	245760	$9.85e-8$	2.7	$1.34e-7$	4.3	$1.75e-5$	3.1

ты расчетов для p –КНН. Из таблицы видно, что достаточно выбрать базис в виде произведения двух полиномов 24 степени (2.30) для получения решения с точностью близкой к машинной. При этом с очень высокой точностью порядка 10^{-10} определяются значения вторых производных численного решения. Таким образом, p –подход может быть реализован и в двумерном случае, что и продемонстрировано на задаче (2.47).

Как и в одномерном случае можно использовать несколько ячеек, в каждой из которых решение аппроксимируется полиномами высоких степеней

Таблица 2.10 – Погрешность численных расчетов методом p -КНН с одной ячейкой для краевой задачи (2.47).

$N_1 \times N_2$	$Er(u)$	$Er_x(u)$	$Er_{xx}(u)$
5×5	3.89e+0	6.53e+0	4.48e+0
10×10	5.95e-2	1.62e-1	4.06e-1
15×15	2.15e-5	8.65e-5	6.06e-4
20×20	2.04e-9	8.90e-9	4.55e-8
22×22	3.14e-11	1.82e-10	1.05e-9
24×24	4.87e-13	3.24e-12	2.28e-11
25×25	3.10e-14	1.52e-13	1.93e-12

(hp -КНН). В таблице 2.11 представлены результаты расчетов в случае равномерных сеток с 2, 3 и 4 ячейками в каждом направлении. Из нее видно, что чем большее число ячеек используется, тем большее число свободных параметров требуется для получения решения с фиксированной точностью. Для достижения точности порядка 10^{-14} в случае одной ячейки требуется 676 свободных параметров, для 4 ячеек – 1600, для 9 – 2916, для 16 – 4096. Таким образом, с точки зрения минимизации свободных параметров, декомпозиция как и в одномерном случае может влиять отрицательно. Стоит отметить, что несмотря на сложную форму графика, решения рассматриваемой задачи (2.5) не имеет особенностей, так как является целой функцией. В следующем примере рассмотрим задачу, решение которой такими особенностями обладают.

Задача Дирихле для уравнение Пуассона с особенностью.

В качестве тестовой задачи, решение которой обладает особенностью, опять обратимся к задаче Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате $\Omega =$

Таблица 2.11 – Погрешность численных расчетов методом hp –КНН для краевой задачи (2.47) для равномерных сеток с 4, 9 и 16 ячейками.

$N_1 \times N_2$	$K = 2 \times 2$		$K = 3 \times 3$		$K = 4 \times 4$	
	N	$Er(u)$	N	$Er(u)$	N	$Er(u)$
10×10	400	1.49 –04	900	3.52 –06	1600	1.88 –07
14×14	784	2.89 –08	1764	1.27 –10	3136	2.91 –12
16×16	1024	2.58 –10	2304	6.14 –13	4096	8.28 –15
18×18	1296	8.35 –13	2916	5.02 –15		
20×20	1600	1.51 –14	3600	1.65 –14		

$[-1; 1] \times [-1; 1]$

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u_{ex}(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{ex}(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}, \quad (2.48)$$

$$u(x_1, x_2) = u_{ex}(x_1 x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega,$$

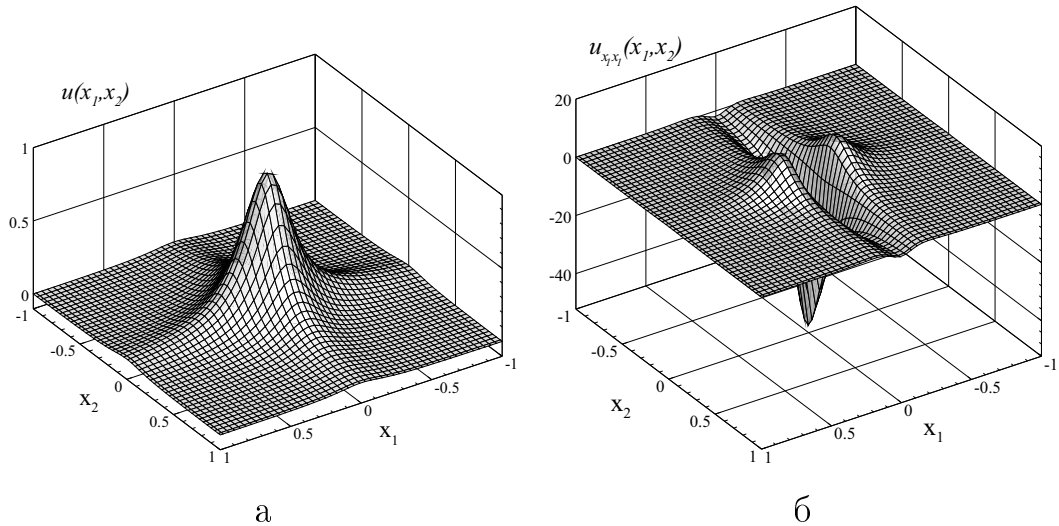
с точным решением

$$u_{ex}(x_1, x_2) = \frac{1}{(1 + 25 x_1^2)} \frac{1}{(1 + 25 x_2^2)}, \quad (2.49)$$

которое является произведением двух одномерных функций с особенностью в комплексной плоскости [92] (рисунок 2.6, *a*). Несмотря на то, что функция бесконечное число раз дифференцируема, её особенность заключается в высокой скорости роста значений ее производных в окрестности нуля, что в частности приводит к неприменимости равномерного расположения узлов в задаче интерполяции для этой функции. Можно показать, что абсолютные значения m -ой производной в окрестности точки $(0,0)$ растут быстрее чем $m!$ На рисунке 2.6 представлены графики функции (2.49) и её второй производной по переменной x_1 .

Для решения краевой задачи (2.48) применим метод p –КНН (с одной ячейкой). Результаты расчетов приведены в таблице (2.12). В таблице указаны погрешности численного решения только для производных по одной из

Рисунок 2.6 – Вид функции (2.49)(а) и ее второй производной по переменной x (б).



переменных так как задача обладает симметричностью относительно пространственных переменных.

Из таблицы 2.12 видно, что такое быстрое уменьшение погрешности численного решения, как например в предыдущей задаче (таблица 2.10), здесь уже не наблюдается. Если требуется найти приближенное решение задачи с точностью 10^{-7} , то необходимо аппроксимировать решение в виде произведения двух полиномов 100-ой степени, т.е. старший член в представлении решения будет иметь степень 200. Тот факт, что применение полиномов такой высокой степени продолжает давать численные решения высокой точности, является одной из особенностей совместного применения двух техник: выбора координат точек коллокаций в корнях полинома Чебышёва и выбора базиса в виде прямого произведения полиномов в виде ряда по многочленам Чебышёва [88]. Но даже в этом случае дальнейшее повышение степени полиномов не дает улучшения точности, что скорее всего связано с влиянием ошибок округления. Однако, что делать если решение требуется найти с точностью 10^{-9} ?

Так как в известном смысле p -подход уже не приводит к уточнению

Таблица 2.12 – Погрешность численных расчетов методом p –КНН для краевой задачи (2.47).

$N_1 \times N_2$	N	$Er(u)$	$Er_x(u)$	$Er_{xx}(u)$
10×10	100	2.67e+0	1.27e+0	4.61e+0
15×15	225	9.11e-1	3.90e+0	1.45e+1
20×20	400	3.47e-1	3.88e-1	2.08e+0
25×25	625	1.13e-1	2.48e+0	1.76e+1
30×30	900	2.78e-2	8.09e-2	7.45e-1
35×35	1225	3.01e-2	1.10e+0	5.32e+0
40×40	1600	3.77e-3	1.51e-1	1.59e+0
45×45	2025	5.16e-3	7.35e-2	1.30e+0
50×50	2500	9.12e-4	5.09e-2	4.19e-1
60×60	3600	1.60e-4	6.31e-3	1.11e-1
70×70	4900	3.57e-5	3.63e-3	3.23e-2
80×80	6400	5.97e-6	5.17e-4	6.42e-3
90×90	8100	1.10e-6	1.12e-4	1.60e-3
100×100	10000	1.96e-7	3.79e-5	3.85e-4

численного решения, воспользуемся hp –подходом, то есть декомпозицией области на более мелкие подобласти. В таблице 2.13 приведены результаты расчетов методом hp –КНН для этой же краевой задачи, но с равномерной сеткой из 4-х ячеек. Из таблицы видно, что декомпозиция области дает возможность получить численное решение с очень высокой точностью порядка 10^{-14} . В предыдущих примерах декомпозиция области приводила к увеличению числа свободных параметров N , требуемых для достижения фиксированной точности. Но для рассматриваемой задачи это не так. Для получения численного решения с точностью порядка 10^{-7} на сетке с одной ячейкой требуется 10000 свободных параметров в представлении решения, а для декомпозиции на 4 ячейки всего 3600. Применение декомпозиции в этом случае позволяет уменьшить степень используемых в расчетах полиномов, что делает расчет более устойчивым к ошибкам округления.

Таблица 2.13 – Погрешность численных расчетов методом hp –КНН с 4-мя ячейками для краевой задачи (2.48).

$N_1 \times N_2$	N	$Er(u)$	$Er_x(u)$	$Er_{xx}(u)$
10×10	400	$1.78e-1$	$9.89e-1$	$5.14e+0$
15×15	900	$1.10e-2$	$1.04e-1$	$1.06e+0$
20×20	1600	$2.32e-4$	$2.97e-3$	$3.12e-2$
25×25	2500	$2.59e-5$	$6.39e-4$	$1.73e-2$
30×30	3600	$8.57e-7$	$3.96e-5$	$1.37e-3$
35×35	4900	$2.78e-8$	$1.77e-6$	$7.66e-5$
40×40	6400	$1.54e-9$	$7.92e-8$	$3.82e-6$
45×45	8100	$8.39e-11$	$3.67e-9$	$1.33e-7$
50×50	10000	$1.72e-12$	$8.24e-11$	$5.32e-9$
60×60	14400	$9.15e-14$	$2.82e-14$	$1.99e-10$

2.4.3. Трехмерные тестовые задачи

Задача Дирихле для уравнение Пуассона. Описанные алгоритмы метода КНН можно реализовать и в трехмерном случае. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в единичном кубе $\Omega = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} &= \\ &= -100 \sin(10 x_1 x_2 x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ u(x_1, x_2, x_3) &= \sin(10 x_1 x_2 x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.50}$$

с известным точным решением $u(x_1, x_2, x_3) = \sin(10 x_1 x_2 x_3)$.

Из таблицы 2.14 видно, что ситуация аналогична уже рассмотренному двумерному случаю (2.10). Видно, что в трехмерном случае также наблюдается экспоненциальный порядок уменьшения погрешности при увеличении степени полиномов в представлении решения.

Таблица 2.14 – Погрешность численных расчетов методом p -КНН для краевой задачи (2.46).

N	$Er(u)$
$4 \times 4 \times 4$	2.26e+0
$6 \times 6 \times 6$	7.61e-1
$8 \times 8 \times 8$	1.24e-1
$10 \times 10 \times 10$	1.68e-2
$12 \times 12 \times 12$	8.52e-4
$14 \times 14 \times 14$	2.74e-5
$16 \times 16 \times 16$	7.34e-7
$18 \times 18 \times 18$	1.78e-8
$20 \times 20 \times 20$	3.35e-10

Выводы по главе 2

1. Разработаны и реализованы p -версии метода КНН в одно-, двух- и трехмерном случаях, обеспечивающие экспоненциальную скорость сходимости погрешности численного решения. Способ построения метода заключается в выборе координат точек коллокаций в корнях многочленов Чебышёва и выборе представления решения удобного для работы в практических расчетах – в виде ряда по многочленам Чебышёва или интерполяционным многочленам Лагранжа.
2. Проведены тестовые расчеты и показано, что использование переопределения как более общего способа минимизации невязки разрешающей системы уравнений упрощает реализацию метода и сохраняет свойство экспоненциальной скорости уменьшения погрешности при увеличении общего числа свободных параметров в представлении решения.
3. Модифицированный метод КНН использован при численном решении краевых задач, решения которых обладают особенностями: большими градиентами и разрывами. Показано, что p -подход можно успешно

совмещать с h –подходом, например, в для поиска решений, обладающих большими градиентами.

4. На примере краевой задачи, решение которой обладает особенностью, показано, что hp –подход уточнения решения может быть более эффективным по сравнению с h – или p –подходами.

Глава 3.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Проблема изгиба пластин представляет собой одну из актуальных задач математической теории упругости. В замкнутой аналитической форме ее решение удастся получить только для очень ограниченного числа краевых задач с конкретными условиями нагружения и закрепления. Рассмотрим ряд тестовых задач для верификации модифицированного метода КНН для этого класса задач.

3.1. Задачи изгиба изотропной и ортотропной пластин

Изгиб изотропной пластины. Рассмотрим задачу изгиба прямоугольной изотропной пластины шарнирно закрепленной по всему контуру в рамках классической теории Кирхгофа-Лява. В случае однородной изотропной пластины уравнения (1.22) примут упрощенный вид

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial n^2} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (3.2)$$

где $w(x, y)$ — прогиб срединной поверхности; $q(x, y)$ — поперечная нагрузка; $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — жёсткость пластины при изгибе; a, b, h — длина, ширина и толщина пластины; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона

изотропного материала пластины; n – внешняя нормаль к границе. Для нагрузки специального вида $q(x, y) = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ ($q_0 = const$) можно получить точное решение краевой задачи (3.1)– (3.2) в виде [79]

$$w(x, y) = \frac{q(x, y)a^4b^4}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2}.$$

В расчётах использовались следующие параметры: $a = 10$ см, $b = 20$ см, $h = 0.5$ см, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $q_0 = 0.1$ МПа.

Для решения поставленной задачи используется p –КНН. В таблице 3.1 приведена погрешность численного решения, а на рисунке 3.1 изображена форма прогиба пластины. Из таблицы 3.1 видно, что p –подход в методе КНН приводит к высокой точности численного решения при расчете изгиба изотропных пластин.

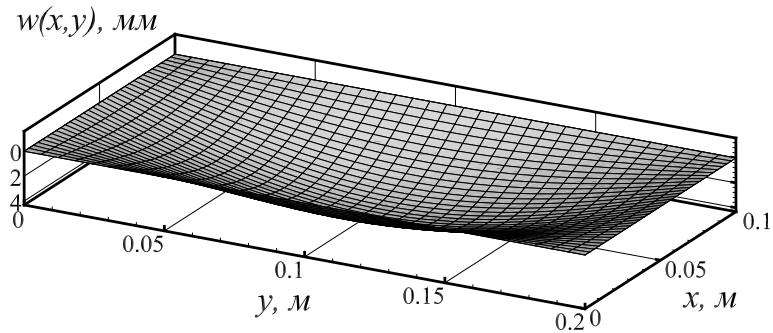
Таблица 3.1 – Погрешность численных расчетов методом p –КНН для краевой задачи (3.1)– (3.2).

$N_1 \times N_2$	$Er(u)$	$Er_x(u)$	$Er_y(u)$	$Er_{xx}(u)$	$Er_{yy}(u)$
5×5	1.22e+1	2.05e+1	1.21e+1	2.25e+1	2.09e+1
10×10	2.87e–2	1.92e–2	1.09e–1	2.00e–2	2.87e–1
15×15	4.77e–9	9.51e–9	5.47e–8	3.76e–8	3.95e–7
20×20	6.13e–13	8.85e–13	2.08e–12	4.28e–12	1.90e–11

В задачах механики пластин часто возникают краевые условия, отличающиеся от традиционных краевых условий типа Дирихле и Неймана. В методе КНН не возникает трудностей с реализацией таких краевых условий. Представление приближенного решения подставляется в краевые условия и выбранных точках записываются граничные условия. Например, в рассмотренной задаче вместо краевых условий (3.2) на одной из границ ($x_1 = 0$) поставим условия свободного края

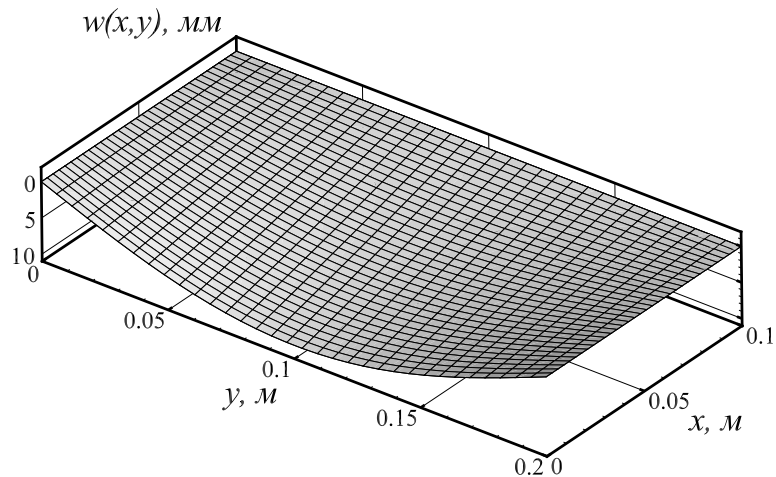
$$\frac{\partial^2 w(0, y)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w(0, y)}{\partial x^3} = 0. \quad (3.3)$$

Рисунок 3.1 – Форма прогиба пластины для краевой задачи (3.1) с краевыми условиями (3.2).



Это условие практически не влияет на схему реализации метода. На рисунке 3.2 представлена форма прогиба пластины, у которой один край свободен от закрепления.

Рисунок 3.2 – Форма прогиба пластины для краевой задачи (3.1) с краевыми условиями (3.3).



Изгиб ортотропной пластины. Рассмотрим задачу изгиба однородной ортотропной прямоугольной пластины в рамках теории Тимошенко. Для этого в более общих уравнениях (1.34), полученных в предыдущей главе, число слоев нужно взять равным единице. Тогда уравнения примут более

простой вид и для определения прогиба получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 & -A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - A_{44} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - A_{55} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -q, \\
 & (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - A_{55} \phi_x - A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} = 0, \quad (3.4) \\
 & (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} - A_{44} \phi_y - A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим материал, который в одном из направлений изотропии является намного более жестким

$$E_L = 25E_T, \quad G_{LT} = 0.5E_T, \quad G_{TT} = 0.2E_T, \quad \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25.$$

Выпишем условия шарнирного закрепления

$$\begin{aligned}
 w_0(x, 0) = 0, \quad \phi_x(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \phi_y(x, 0)}{\partial y} = 0, \\
 w_0(x, b) = 0, \quad \phi_x(x, b) = 0, \quad \frac{\partial \phi_y(x, b)}{\partial y} = 0, \\
 w_0(0, y) = 0, \quad \frac{\partial \phi_x(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \phi_y(0, y) = 0, \\
 w_0(a, y) = 0, \quad \frac{\partial \phi_x(a, y)}{\partial x} = 0, \quad \phi_y(a, y) = 0.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

В работе [110] для квадратной пластины и для двух видов нагрузок – синусоидальной и равномерной (рисунок 3.3) получено решение методом Фурье.

$$\begin{aligned}
 SSL : \quad q(x, y) &= q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b), \\
 UDL : \quad q(x, y) &= q_0.
 \end{aligned}$$

В таблице 3.2 приведены нормированные максимальные значения прогиба и компонент тензора напряжений, полученных по формулам (1.14)–(1.15)

$$\bar{w}_0 = w_0 \frac{E_T h^3}{a^4 q_0} 10^2, \quad \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \lambda, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \lambda, \quad \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \lambda, \quad \lambda = \frac{h^2}{a^2 q_0}.$$

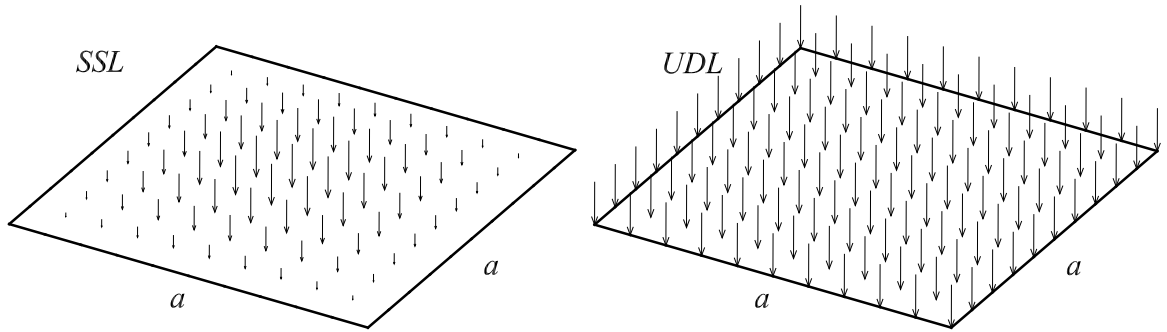


Рисунок 3.3 – Вид синусоидальной (SSL) и равномерной (UDL) поперечных нагрузок $q(x, y)$

Таблица 3.2 – Значения прогиба $\bar{w}_0(a/2, a/2)$ и компонент тензора напряжений $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, a/2, h/2)$, $\bar{\sigma}_{yy}(a/2, a/2, h/2)$ и $\bar{\sigma}_{xy}(a, a, -h/2)$ для синусоидальной и равномерной нагрузки и разных относительных толщин

a/h	\bar{w}_0	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$
<i>SSL</i>				
10	0.6383	0.5248	0.0338	0.0246
20	0.4836	0.535	0.0286	0.0222
100	0.4333	0.5385	0.0267	0.0213
<i>UDL</i>				
10	0.9519	0.7706	0.0352	0.0539
20	0.7262	0.7828	0.0272	0.0487
100	0.6528	0.7865	0.0245	0.0464

Для совпадения приближенного решения с данными таблицы 3.2 в методе p –КНН требуется полиномы 12 степени в каждом направлении.

При равномерной нагрузке, как и следовало ожидать, наблюдается больший прогиб центре пластины.

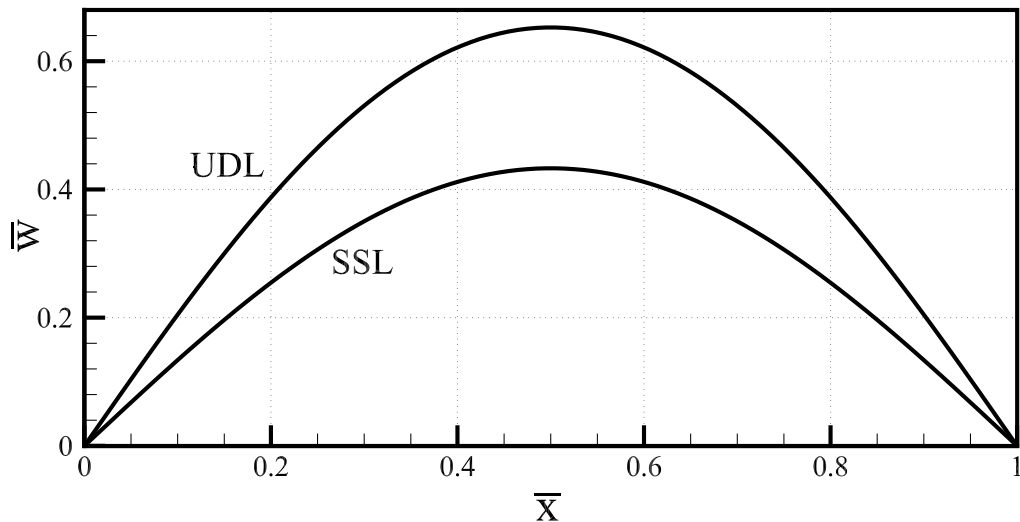


Рисунок 3.4 – Прогиб пластины $w(\bar{x}, a/2)$ для синусоидальной (SSL) и равномерной (UDL) поперечных нагрузок $q(x, y)$. Здесь $\bar{x} = x/a$ и $a/h = 100$.

3.2. Расчет напряженно-деформированного состояния пластин на упругом основании

Прямоугольная поперечно нагруженная пластина может опираться на упругое основание, как это имеет место, например, в покрытиях автомобильных дорог, мостов или взлетно-посадочных полос аэродромов. Для исследования прочности и несущей способности таких конструкций требуется знание их напряженно-деформированного состояния (НДС).

Рассмотрим прямоугольную пластину на упругом основании [41]. Реакцию упругого основания будем рассматривать с использованием однопараметрической модели, основанной на гипотезе Винклера (далее модель Винклера) [32, 51, 79], и двух более сложных двухпараметрических моделей Власова [22] и Пастернака [64]. Гипотеза Винклера, предполагает, что реакция основания пропорциональна прогибу плиты

$$p = kw, \tag{3.6}$$

где p – реакция основания, w – прогиб плиты, k – коэффициент постели (коэффициент пропорциональности), определяемый экспериментально для

каждого типа грунта (некоторые экспериментальные значения приведены в [79]). Несмотря на простоту, во многих случаях использование этой модели достаточно для получения приемлемых с практической точки зрения результатов. Однако такое представление реакции грунта имеет ряд недостатков. Например, внешние нагрузки распределяются на грунт только в пределах площади подошвы пластины. Это положение не отвечает реальным наблюдениям, по которым грунт оседает, а следовательно напряжен за пределами пластины. Еще одним недостатком является трудность в определении значения коэффициента постели k , который зависит от размеров и формы пробного штампа. Более качественный учет реакции грунта заложен в двухпараметрических моделях

$$p = C_1 w - C_2 \Delta w, \quad (3.7)$$

где Δ – оператор Лапласа, C_1 , C_2 – параметры грунта. Здесь, помимо работы основания на сжатие (гипотеза Винклера), дополнительно учитывается работа основания на сдвиг или срез.

В работе В.З. Власова и Н.Н. Леонтьева [22] основание представляется как среда, в которой отсутствуют продольные (вдоль плоскости покоящейся пластины) перемещения. Тогда коэффициенты C_1 , C_2 можно определить по следующим формулам

$$C_1 = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \int_0^H \phi'(z)^2 dz, \quad C_2 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)} \int_0^H \phi(z)^2 dz, \quad (3.8)$$

$$E_0 = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_f}{1 - \nu_f},$$

E_f , ν_f – модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого основания, $\phi(z)$ – функция поперечного распределения упругого основания, которая характеризует угасание напряженности грунта с увеличением глубины H . В данной работе $\phi(z) = sh(\gamma(H - z))/sh(\gamma H)$, где $\gamma = 1.5$.

В работе П.Л. Пастернака [64] предлагается получать коэффициенты C_1 и C_2 из следующих соображений. Коэффициент C_1 связывает интенсивность

вертикального отпора грунта с его осадкой, а второй независимый коэффициент C_2 позволяет определить интенсивность вертикальной силы сдвига. Также в работе приведены следующие возможные значения параметров

$$C_1 = \frac{E_0}{(1 - 2\nu_0^2)H}, \quad C_2 = \frac{E_0 H}{6(1 + \nu_0)}. \quad (3.9)$$

Перейдем к математической постановке задачи. В прямоугольной области $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ рассмотрим краевую задачу, описывающую изгиб пластины с учетом реакции упругого основания (рисунок 3.5) [22, 79].

$$D\Delta\Delta w(x, y) = q(x, y) - p(x, y), \quad (3.10)$$

где $w(x, y)$ – прогиб пластины; $q(x, y)$ – внешняя нагрузка; $p(x, y)$ – реакция упругого основания; $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость; a, b, h – длина, ширина, толщина пластины; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона пластины.

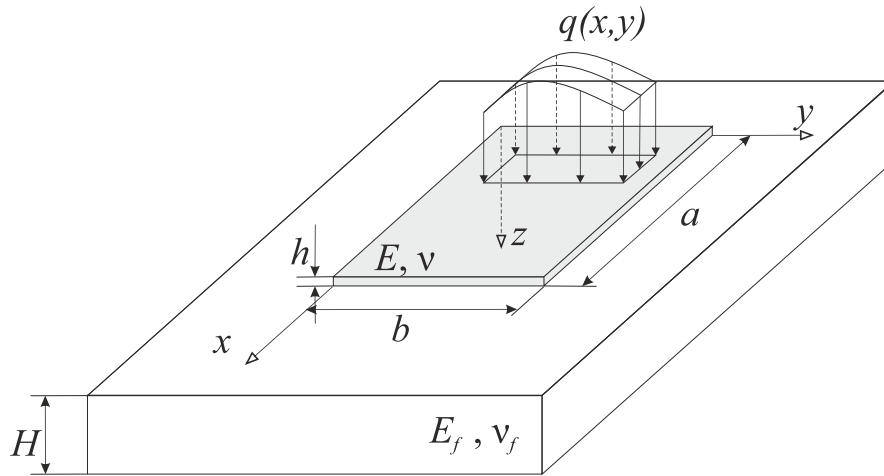


Рисунок 3.5 – Пластина на упругом основании.

Реакция упругого основания определяется для каждой модели из соответствующих формул (3.6), (3.7) с коэффициентами (3.8) или (3.9). Отметим, что при $p(x, y) \equiv 0$ получаем классическое уравнение изгиба пластины (3.1).

Рассмотрим различные виды краевых условий [79]. Например, на краю $x = 0$ краевые условия определяются следующим образом:

1. заземленный край: $(w) = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0;$
2. шарнирно закрепленный край: $(w) = 0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0;$
3. свободный край: $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - v) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = Q^f.$

Особое внимание следует уделить величине Q^f . Эту функцию можно трактовать как влияние грунта, находящегося за пределами пластины на ее края [22, 64]. Так как модель Винклера не учитывает этот эффект, то для нее $Q^f \equiv 0$. Для двухпараметрических моделей Q^f принимает следующий вид [64]

$$Q^f = C_2 \left(\alpha w + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right), \quad \alpha = \sqrt{C_1/C_2}. \quad (3.11)$$

Аналогичным образом можно выписать условия на других краях пластины.

Для решения поставленной задачи воспользуемся p -вариантом метода КНН, с представлением базиса в виде ряда многочленов Чебышёва 15 степени в каждом направлении.

При расчете пластин на упругом основании, следует отметить, что сравнение результатов расчетов для разных моделей реакций оснований не всегда корректно. Для получения набора коэффициентов, описывающих один и тот же грунт, необходимо провести натурные эксперименты по технологиям, описанным для каждой модели. В противном случае используемые коэффициенты, вообще говоря, описывают грунты с разными характеристиками. Однако можно определить характер НДС для каждой модели на качественном уровне.

Рассмотрим прямоугольную пластину на упругом основании под действием равномерной нагрузки q . Две смежные стороны пластины заземлены, две другие свободны. В эксперименте приведены расчеты по трем моделям основания (рисунок 3.6) для параметров $a = 2b = 2$ м, $h = 0.01$ м, $H = 0.2$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $E_f = 0.4$ ГПа, $\nu_f = 0.4$, $k = 0.3$ ГПа/м, $q = 0.1$ МПа.

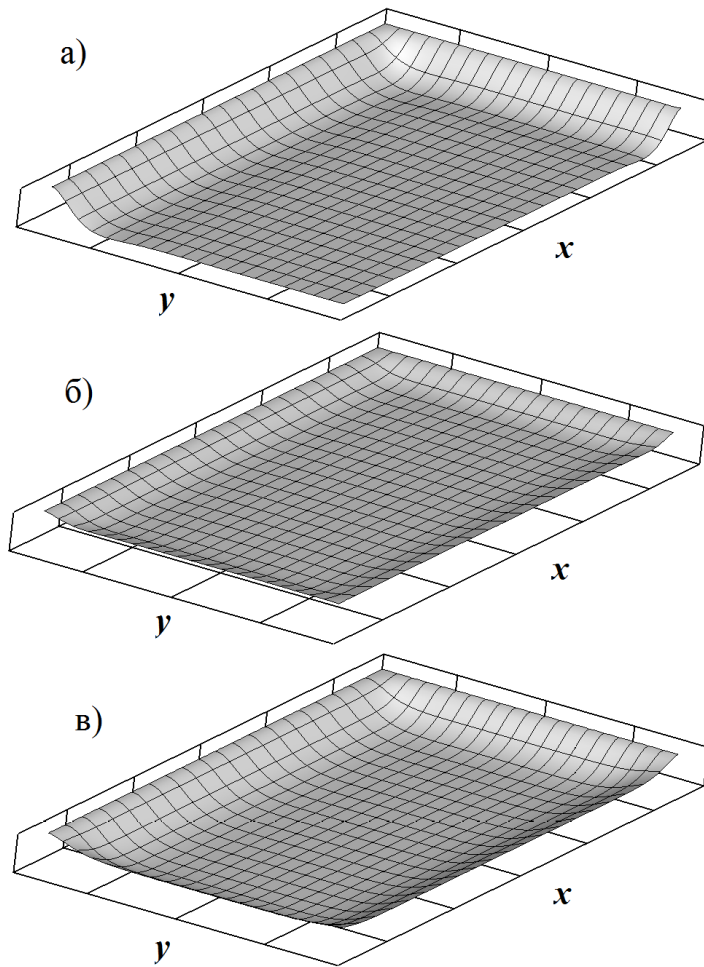


Рисунок 3.6 – Форма деформированной равномерно нагруженной пластины два края которой защемлены для моделей Винклера (а), Власова (б), Пастернака (в).

Из рисунка 3.6 видно, что для двухпараметрических моделей учет функции Q^f на свободном крае приводит к его приподниманию, что с точки зрения реального опыта более логично, чем для случая модели Винклера, когда свободный край деформируется без изгиба.

3.3. Расчет напряженно-деформированного состояния многослойных пластин

В главе 1 было показано что, чем более точные теории пластин используются, тем более сложные задачи вычислительной математики при этом возникают. Поэтому очень важно иметь представления о границах применимости той или иной теории пластин. Осознанный выбор теории позволит значительно сэкономить время расчета и будет важным преимуществом при проведении комплекса расчетов с большим числом варьируемых параметров. Такие задачи возникают при проектировании конструкций из композиционных материалов, где путем перебора большого числа параметров композита достигаются оптимальные свойства конструкции.

В этом параграфе проведем ряд расчетов для сравнения описанных выше теорий пластин. Так как теории пластин являются приближениями к пространственной теории упругости, то удобно в качестве эталона выбрать задачу, имеющую известное решение в рамках 3D ТУ. Несмотря на то, что расчет НДС многослойных пластин является сложной с вычислительной точки зрения задачей, в частном случае, при специальном выборе условий закрепления, нагружения и структуры материала, можно получить решение в аналитическом виде. Подобный расчет, при помощи метода Фурье был проведен в работе [107] для 3-, 5-, 7-слойных пластин разной относительной толщины.

3.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим квадратные пластины ($a = b$), состоящие из трех, пяти и семи слоев постоянной толщины (все обозначения соответствуют постановке задачи 3D ТУ в главе 1). На верхнюю грань действует поперечная распределенная нагрузка, нижняя грань свободна. На торцах пластина шарнирно закреплена. Считаем, что слои жёстко скреплены между собой. Необходимо

рассчитать напряжённно-деформированное состояние такой пластины.

Каждый слой выполнен из трансверсально-изотропного материала с главным направлением упругости θ^k , лежащим в плоскости пластины. При этом для слоев с нечетным номером главное направление упругости равно 0° , а для слоев с четным – 90° . Таким образом, схема укладки слоев имеет вид

$$0^\circ/90^\circ/0^\circ, \quad 0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ, \quad 0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$$

для пластин с тремя, пятью и семью слоями соответственно. Параметры трансверсально-изотропного материала

$$\begin{aligned} E_L = 172 \text{ ГПа}, \quad E_T = 6.89 \text{ ГПа}, \quad G_{LT} = 3.49 \text{ ГПа}, \\ G_{TT} = 1.38 \text{ ГПа}, \quad \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Толщина слоя с нечетным номером равна $h^k = h/(N+1)$ (k – нечетное), а для слоев с четным номером $h^k = h/(N-1)$ (k – четное), здесь N – количество слоев. Верхняя грань пластины находится под действием распределенной поперечной нагрузки $q(x, y)$, принимающей максимальные значения в центре пластины и равная нулю на краях (рисунок 3.7).

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right), \quad (3.13)$$

где q_0 – константа.

Эта постановка является частным случаем общей постановки задачи изгиба многослойных пластин, которая была сформулирована для каждой теории в первой главе. Перейдем к формулировке краевых условий. Условие шарнирного закрепления для 3D ТУ записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k(0, y, z) = v^k(0, y, z) = w^k(0, y, z) = 0, \\ \sigma_{xx}^k(a, y, z) = v^k(a, y, z) = w^k(a, y, z) = 0, \\ \sigma_{yy}^k(x, 0, z) = u^k(x, 0, z) = w^k(x, 0, z) = 0, \\ \sigma_{yy}^k(x, a, z) = u^k(x, a, z) = w^k(x, a, z) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

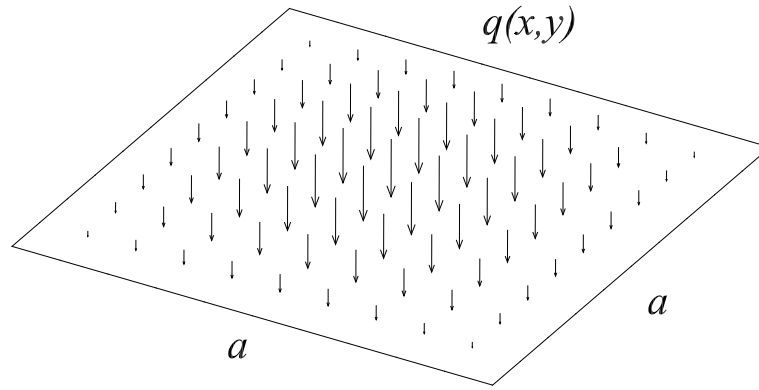


Рисунок 3.7 – Распределение поперечной нагрузки $q(x, y)$ на верхнюю грань пластины.

Сформулируем на основании этих краевых условий соответствующие краевые условия для теорий пластин. Для примера, рассмотрим условия на торце $x = 0$, аналогично можно получить условия и на других торцах.

Согласно гипотезам теории Кирхгофа-Лява

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v^k(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w^k(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned}$$

условия $w^k(0, y, z) = 0$ выполняются, если $w_0(0, y) = 0$. Следующее условие $v^k(0, y, z) = 0$ будет выполнено, если только $v_0(0, y) = 0$ и $\frac{\partial w_0(0, y)}{\partial y} = 0$. Условие на напряжения $\sigma_{xx}^k(0, y, z) = 0$ приводят к тому, что нулю будет равна интегральная сила N_{xx} . Из уравнений (1.20) получим выражения этой величины через функции перемещения

$$\begin{aligned} N_{xx} &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - \\ &\quad - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Т.е. в краевых условиях теорий пластин возникает зависимость от параметров материала. Но в случае рассматриваемой постановки из симметричности

схемы укладки слоев относительно срединной поверхности следует, что все коэффициенты $B_{ij} = 0$. Из-за совпадения углов укладки θ^k с главной системой координат нулю равен коэффициент A_{16} . Заметим также

$$v_0(0, y) = 0, \quad \forall y \in [0, b] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_0(0, y)}{\partial y} = 0, \quad \forall y \in [0, b].$$

Таким образом

$$\sigma_{xx}^k(0, y, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad N(0, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0.$$

В итоге при $x = 0$ условия шарнирного закрепления в теории Кирхгофа-Лява можно записать

$$x = 0 : \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0.$$

Аналогично на других краях

$$\begin{aligned} x = a : \quad & \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \\ y = 0 : \quad & u_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad w_0 = 0, \\ y = a : \quad & u_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad w_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Поступая точно также, можно выписать соответствующие краевые условия для теории Тимошенко и теории Григолюка-Чулкова. Приведем их окончательный вид. Для теории Тимошенко шарнирное закрепление примет вид

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad & \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = 0, \quad \phi_y = 0, \\ x = a : \quad & \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = 0, \quad \phi_y = 0, \\ y = 0 : \quad & u_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad w_0 = 0, \quad \phi_x = 0, \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = 0, \\ y = a : \quad & u_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad w_0 = 0, \quad \phi_x = 0, \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для теории Григолюка-Чулкова для всех k выписываются похожие условия

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad & \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{\partial \phi_x^k}{\partial x} = 0, \quad \phi_y^k = 0, \\
 x = a : \quad & \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{\partial \phi_x^k}{\partial x} = 0, \quad \phi_y^k = 0, \\
 y = 0 : \quad & u_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad w_0 = 0, \quad \phi_x^k = 0, \quad \frac{\partial \phi_y^k}{\partial y} = 0, \\
 y = a : \quad & u_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad w_0 = 0, \quad \phi_x^k = 0, \quad \frac{\partial \phi_y^k}{\partial y} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Отметим, что относительно простой вид краевых условий является следствием специальной структуры пластины. В общем случае произвольных толщин и ориентации слоев краевые условия могут принимать достаточно сложный вид, в т.ч. зависеть от коэффициентов жесткости.

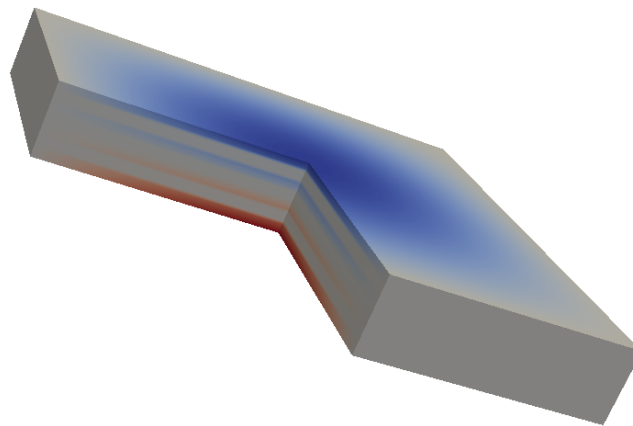
Как уже было отмечено, гипотезы, на основании которых построены теории пластин, с хорошей точностью выполняются для относительно тонких пластин. Увеличение относительной толщины приводит к отклонению результатов расчета в рамках теорий пластин от решения исходной постановки 3D ТУ. Но для разных теорий пластин область применимости (где отличия от 3D ТУ достаточно малы) может сильно отличаться. Для этого рассмотрим пластины разной относительной толщины. Следуя работе [107], введем величину

$$S = \frac{a}{h}, \tag{3.18}$$

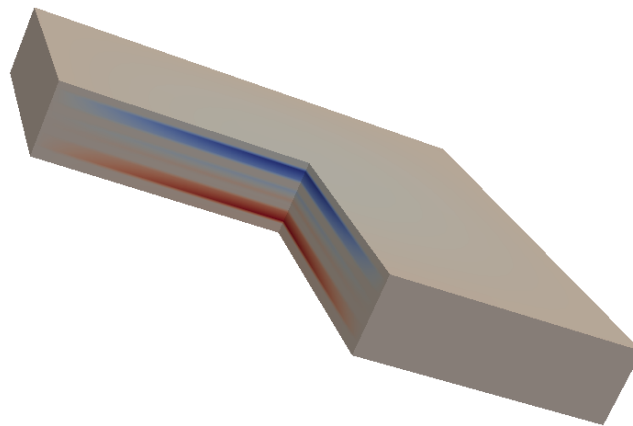
которая будет принимать значения 2, 4, 10, 20, 50, 100. При $S = 2$ пластина является очень толстой, напротив при $S = 100$ – очень тонкой. Проводя расчеты для разных S , можно оценить область применимости той или иной теории пластин.

На рисунке 3.8 приведены распределения напряжений на срезе семислойной пластины для $S = 10$, которые дают представление о характере НДС в рассматриваемых пластинах. На рисунке хорошо видно, что распределение напряжений имеет неоднородный характер по толщине пластины. Это связано с тем, что слои имеют разные механические характеристики, а именно

главные направления изотропии, попеременно принимающие значения 0° и 90° . Поэтому при изгибе в слоях с нечетным номером ($\theta = 0^\circ$) преобладает влияние компоненты тензора напряжений σ_{xx} , а в слоях с четным номером ($\theta = 90^\circ$) компоненты σ_{yy} . При этом максимальные абсолютные значения напряжений наблюдаются на внешних слоях в окрестности центра пластины.



а



б

Рисунок 3.8 – Распределение компонент тензора напряжений σ_{xx} (а) и σ_{yy} (б) в семислойной пластине для $S = 10$. Расчет проведен в рамках теории Григолюка-Чулкова.

3.3.2. Расчеты в рамках различных теорий

Для сравнения результатов расчетов в рамках различных теорий используются значения искомым функций перемещений и компонент тензора напряжений в заданных точках. Точки выбираются в областях, где искомые функции принимают максимальные или минимальные значения. Для сравнения расчетов удобно искомые функции нормировать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{q_0 S^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{q_0 S} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix},$$

$$\bar{u} = \frac{E_T u}{q_0 h S^3}, \quad \bar{w} = \frac{\pi^4 Q^* w}{12 q_0 h S^4}, \quad Q^* = \frac{4G_{LT} + (E_L + E_T(1 + 2\nu_{TT}))}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}.$$

Также для удобства введем $\bar{z} = z/h$, т.е. $\bar{z} \in [-1/2, 1/2]$, и будем считать, что введенные выше нормированные функции (с чертой) есть функции от (x, y, \bar{z}) .

В таблицах (3.3)–(3.6) представлены результаты расчетов прогиба \bar{w} и компонент тензора напряжений $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$ и $\bar{\sigma}_{xy}$ в заданных точках для разных теорий, величин S и числа слоев. Приведены относительные отклонения от результатов 3D ТУ [107] в процентах. Например, в таблице (3.3)

$$\text{ТКЛ}(\%) = \left| \frac{w_{3D \text{ ТУ}} - w_{\text{ТКЛ}}}{w_{3D \text{ ТУ}}} \right| 100\%, \quad (3.19)$$

где $w_{3D \text{ ТУ}}$, $w_{\text{ТКЛ}}$ – прогибы, рассчитанные в рамках 3D ТУ и теории пластин Кирхгофа-Лява соответственно. На основании представленных таблиц можно провести анализ применимости конкретных теорий пластин.

Таблица 3.3 – Прогибы $\bar{w}(a/2, a/2, 0)$ в 3-, 5-, 7-слойных пластинах для разных S . Результаты расчетов проведены в рамках ТКЛ – теории Кирхгофа-Лява, ТТ – теории Тимошенко, ЛЛ – теории ломаной линии Григолюка-Чулкова. Знак (%) используется для обозначения относительного отклонения от 3D ТУ в процентах (3.19).

S	3D ТУ	ТКЛ	ТТ	ЛЛ	ТКЛ (%)	ТТ (%)	ЛЛ (%)
3 слоя							
2	11.77	1	10.04	12.55	91.5	14.7	6.7
4	4.491	1	3.508	4.557	77.7	21.9	1.5
10	1.709	1	1.450	1.713	41.5	15.1	0.2
20	1.189	1	1.116	1.190	16.0	6.1	0.1
50	1.031	1	1.019	1.031	3.0	1.2	< 0.1
100	1.008	1	1.005	1.008	0.8	0.3	< 0.1
5 слоев							
2	12.28	1	9.529	13.04	91.9	22.4	6.2
4	4.291	1	3.196	4.368	76.7	25.5	1.8
10	1.570	1	1.368	1.578	36.3	12.8	0.5
20	1.145	1	1.094	1.147	12.7	4.5	0.2
50	1.023	1	1.015	1.024	2.2	0.8	0.1
100	1.006	1	1.004	1.006	0.6	0.2	< 0.1
7 слоев							
2	12.34	1	9.454	13.06	91.9	23.4	5.8
4	4.153	1	3.144	4.225	75.9	24.3	1.7
10	1.529	1	1.351	1.536	34.6	11.6	0.5
20	1.133	1	1.089	1.135	11.7	3.9	0.2
50	1.021	1	1.014	1.022	2.1	0.7	0.1
100	1.005	1	1.004	1.005	0.5	0.1	< 0.1

Таблица 3.4 – Компонента напряжений $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, a/2, 1/2)$ в 3-, 5-, 7-слойных пластинах для разных S . Результаты расчетов проведены в рамках ТКЛ – теории Кирхгофа-Лява, ТТ – теории Тимошенко, ЛЛ – теории ломаной линии Григолюка-Чулкова. Знак (%) используется для обозначения относительного отклонения от 3D ТУ в процентах (3.19).

S	3D ТУ	ТКЛ	ТТ	ЛЛ	ТКЛ (%)	ТТ (%)	ЛЛ (%)
3 слоя							
2	0.912	0.537	0.346	0.877	41.1	62.1	3.8
4	0.684	0.537	0.417	0.645	21.5	39.1	5.6
10	0.559	0.537	0.505	0.549	3.9	9.7	1.8
20	0.543	0.537	0.529	0.540	1.1	2.6	0.5
50	0.539	0.537	0.537	0.539	0.4	0.3	< 0.1
100	0.539	0.537	0.538	0.539	0.4	0.1	< 0.1
5 слоев							
2	0.903	0.537	0.405	0.924	40.5	55.1	2.4
4	0.651	0.537	0.443	0.633	17.5	32.0	2.7
10	0.545	0.537	0.506	0.540	1.5	7.2	0.9
20	0.539	0.537	0.529	0.537	0.4	1.9	0.3
50	0.539	0.537	0.536	0.538	0.4	0.6	0.1
100	0.539	0.537	0.537	0.539	0.4	0.4	0.1
7 слоев							
2	0.880	0.537	0.437	0.928	39.0	50.3	5.5
4	0.645	0.537	0.464	0.637	16.7	28.1	1.2
10	0.548	0.537	0.513	0.545	2.0	6.4	0.6
20	0.539	0.537	0.531	0.539	0.4	1.5	< 0.1
50	0.539	0.537	0.537	0.539	0.4	0.4	< 0.1
100	0.539	0.537	0.537	0.539	0.4	0.4	< 0.1

Таблица 3.5 – Компонента напряжений $\bar{\sigma}_{yy}$ в 3-, 5-, 7-слойных пластинах для разных S . Результаты расчетов проведены в рамках ТКЛ – теории Кирхгофа-Лява, ТТ – теории Тимошенко, ЛЛ – теории ломаной линии Григорулюка-Чулкова. Знак (%) используется для обозначения относительного отклонения от 3D ТУ в процентах (3.19).

S	3D ТУ	ТКЛ	ТТ	ЛЛ	ТКЛ (%)	ТТ (%)	ЛЛ (%)
3 слоя $\bar{\sigma}_{yy}(a/2, a/2, 1/4)$							
2	0.795	0.268	0.715	0.633	66.3	10.0	20.4
4	0.666	0.268	0.551	0.611	59.8	17.2	8.3
10	0.403	0.268	0.348	0.396	33.5	13.6	1.9
20	0.309	0.268	0.291	0.307	13.3	5.7	0.6
50	0.276	0.268	0.273	0.276	2.9	1.1	0.1
100	0.271	0.268	0.270	0.271	1.1	0.3	< 0.1
5 слоев $\bar{\sigma}_{yy}(a/2, a/2, 1/3)$							
2	0.848	0.358	0.547	0.805	57.8	35.5	5.1
4	0.626	0.358	0.493	0.594	42.8	21.2	5.1
10	0.432	0.358	0.403	0.427	17.1	6.7	1.3
20	0.380	0.358	0.372	0.379	5.8	2.1	0.2
50	0.363	0.358	0.360	0.363	1.4	0.8	0.1
100	0.360	0.358	0.358	0.360	0.6	0.6	< 0.1
7 слоев $\bar{\sigma}_{yy}(a/2, a/2, 3/8)$							
2	0.838	0.403	0.531	0.861	51.9	36.6	2.7
4	0.610	0.403	0.496	0.600	33.9	18.7	1.7
10	0.458	0.403	0.435	0.455	12.0	5.0	0.6
20	0.420	0.403	0.413	0.419	4.0	1.7	0.2
50	0.407	0.403	0.405	0.407	1.0	0.5	0.1
100	0.405	0.403	0.403	0.405	0.5	0.5	< 0.1

Таблица 3.6 – Компонента напряжений $\bar{\sigma}_{xy}(0, 0, 1/2)$ в 3-, 5-, 7-слойных пластинах для разных S . Результаты расчетов проведены в рамках ТКЛ – теории Кирхгофа-Лява, ТТ – теории Тимошенко, ЛЛ – теории ломаной линии Григолюка-Чулкова. Знак (%) используется для обозначения относительного отклонения от 3D ТУ в процентах (3.19).

S	3D ТУ	ТКЛ	ТТ	ЛЛ	ТКЛ (%)	ТТ (%)	ЛЛ (%)
3 слоя							
2	-0.0673	-0.0212	-0.0351	-0.0715	68.5	47.9	6.2
4	-0.0458	-0.0212	-0.0301	-0.0451	53.7	34.4	1.5
10	-0.0276	-0.0212	-0.0237	-0.0274	23.2	14.0	0.8
20	-0.0230	-0.0212	-0.0220	-0.0230	7.8	4.5	< 0.1
50	-0.0216	-0.0212	-0.0214	-0.0216	1.9	1.0	< 0.1
100	-0.0214	-0.0212	-0.0213	-0.0214	0.9	0.4	< 0.1
5 слоев							
2	-0.0634	-0.0212	-0.0242	-0.0699	66.6	61.8	10.2
4	-0.0384	-0.0212	-0.0234	-0.0386	44.8	39.1	0.4
10	-0.0247	-0.0212	-0.0220	-0.0246	14.2	10.9	0.4
20	-0.0222	-0.0212	-0.0215	-0.0222	4.5	3.2	< 0.1
50	-0.0214	-0.0212	-0.0213	-0.0214	0.9	0.5	< 0.1
100	-0.0213	-0.0212	-0.0212	-0.0213	0.5	0.5	< 0.1
7 слоев							
2	-0.0579	-0.0212	-0.0226	-0.0648	63.4	61.0	11.9
4	-0.0347	-0.0212	-0.0222	-0.0352	38.9	36.0	1.4
10	-0.0238	-0.0212	-0.0216	-0.0238	10.9	9.2	< 0.1
20	-0.0219	-0.0212	-0.0214	-0.0219	3.2	2.3	< 0.1
50	-0.0214	-0.0212	-0.0213	-0.0214	0.9	0.5	< 0.1
100	-0.0213	-0.0212	-0.0212	-0.0213	0.5	0.5	< 0.1

Представленные таблицы позволяют проанализировать точность приближения теорий пластин относительно исходной постановки 3D ТУ. Наибольшие отличия демонстрирует теория Кирхгофа-Лява. Если ограничиться 5% отклонением от 3D ТУ, то область применения этой теории для поставленной задачи можно ограничить случаем $S \geq 50$. Более точные результаты

получаются в рамках теории пластин Тимошенко. Ее можно применять для пластин $S \geq 20$. Интересно, что при $S \geq 50$ результаты в рамках теории Тимошенко не отличаются принципиально от аналогичных результатов теории Кирхгофа-Лява. В частности, это значит, что для расчета НДС пластин при $S \geq 50$ среди этих теорий предпочтение следует отдать той, которая приводит в меньшим вычислительным затратам, т.е. теории Кирхгофа-Лява.

Наиболее точные результаты получены в рамках теории Григолюка-Чулкова. Ее можно применять для толстых пластин $S > 4$. При этом для $S \geq 20$ результаты теории ломаной линии на порядок точнее результатов теорий Кирхгофа-Лява и Тимошенко. Теория ломаной линии конструктивно учитывает многослойную структуру пластины, что обеспечивает такую широкую область применимости и высокую точность.

В отличие от однородных пластин, где анализируется влияние относительной толщины самой пластины, в случае многослойных пластин можно анализировать влияние относительных толщин слоев. В представленных таблицах (3.3)–(3.6) приведены результаты расчетов для разного числа слоев, при фиксированном S . При увеличении числа слоев в пластине с фиксированной полной толщиной уменьшаются относительные толщины каждого слоя, что позволяет оценить влияние величины $S^k = a/h^k$ на точность приближения теорий пластин при фиксированном S . Видно, что с возрастанием числа слоев все рассматриваемые теории дают более точные результаты. На рисунке 3.9 приведены распределения по толщине в центре пластины нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, \bar{z})$ и $\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, \bar{z})$ для теории ломаной линии для разных относительных толщин и чисел слоев. Обратим внимание, что при $S = 100$ (очень тонкие слои) графики функций напряжений $\bar{\sigma}_{xx}$ слоях с нечетными номерами лежат на одной прямой. Аналогичное наблюдение верно и для графиков функций напряжений $\bar{\sigma}_{yy}$ для слоев с четными номерами. Это свойство характерно для тонких однородных пластин, в которых $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\sigma}_{yy}$ есть прямые линии. На основании этих наблюдений можно сделать

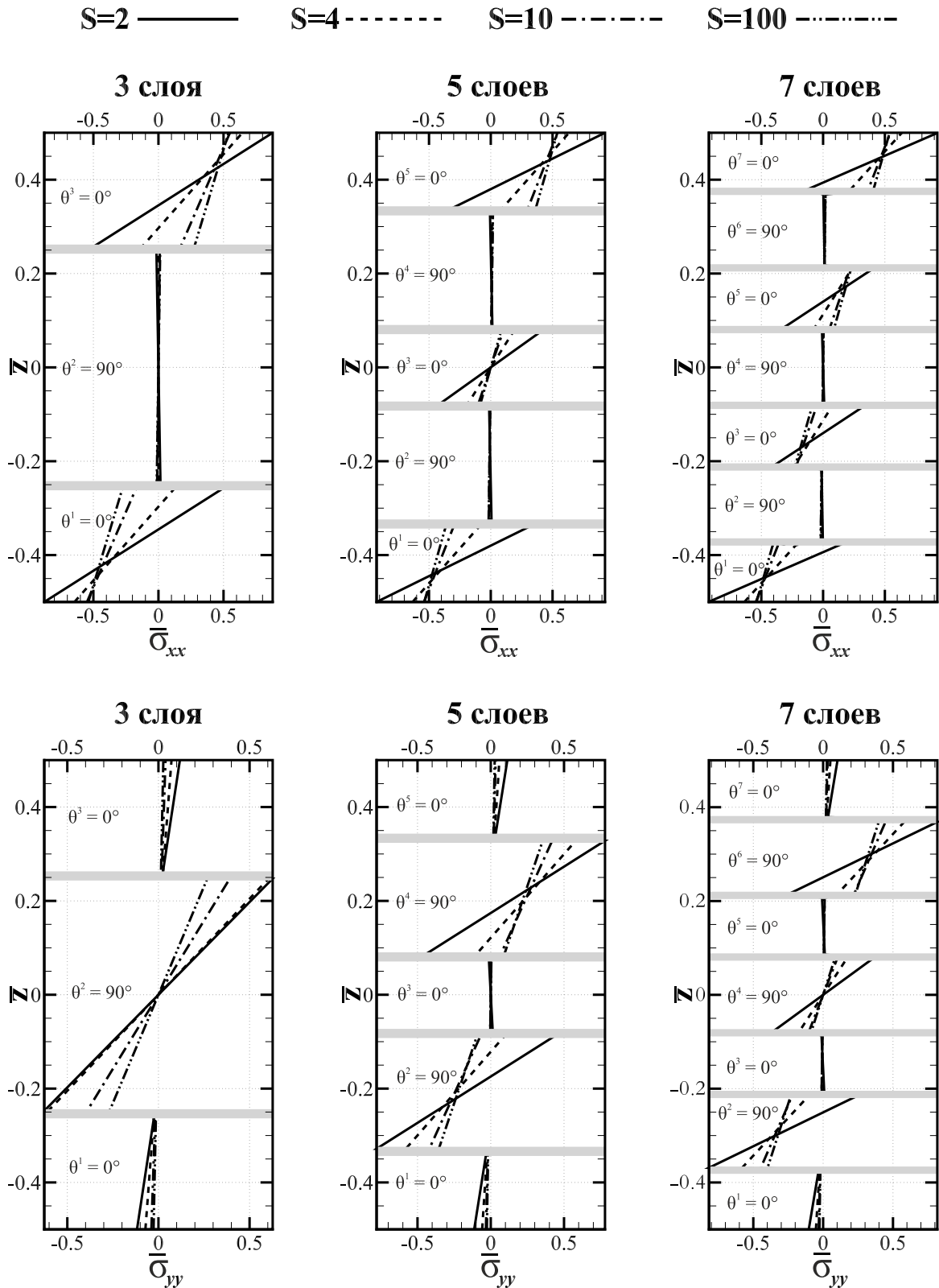


Рисунок 3.9 – Распределение компонент тензора напряжений $\sigma_{xx}(a/2, a/2, \bar{z})$ и $\sigma_{yy}(a/2, a/2, \bar{z})$ для разных относительных толщин и числа слоев. Расчет проведен в рамках теории ломаной линии Григолюка-Чулкова.

вывод о том, в тонких слоях распределение НДС имеет характерный вид НДС “слоя” однородной пластины. Такое НДС хорошо описывается в рамках теорий пластин. С уменьшением S , т.е. при увеличении относительной толщины слоев, углы наклона графиков изменяются и пластина начинает проявлять свойства неоднородности. Чем большую толщину слой имеет, тем сильнее это изменение может проявляться. Это может приводить, как видно на рисунке 3.9 для $S < 4$, к тому, что напряжение в верхнем слое изменяет знак. То есть, на верхней части слоя наблюдается растяжение, а на нижней части сжатие, т.е. в слое возникает нейтральная поверхность (рисунок 3.10).

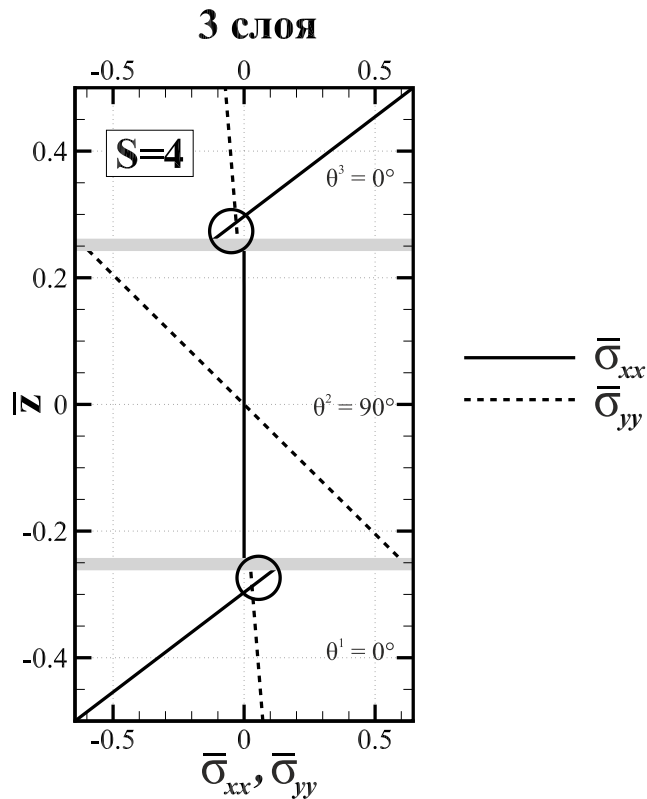


Рисунок 3.10 – Распределение компонент тензора напряжений $\sigma_{xx}(a/2, a/2, \bar{z})$ и $\sigma_{yy}(a/2, a/2, \bar{z})$ в трехслойной пластине для $S = 4$. Расчет проведен в рамках теории ломаной линии Григолюка-Чулкова. Выделены области, где напряжения изменяют знак.

3.3.3. Расчет поперечных касательных напряжений

При изгибе в тонких пластинах поперечные напряжения σ_{zz} , σ_{xz} и σ_{yz} являются малыми величинами по сравнению с другими компонентами тензора напряжений. При построении теорий пластин этими напряжениями пренебрегают или описывают их достаточно грубо. Но на практике поперечные напряжения могут представлять интерес, например, при изучении процессов разрушения КМ, которые могут инициироваться в областях контакта слоев или на границе волокна и матрицы.

Во всех рассмотренных выше теориях пластин, так или иначе, пренебрегают нормальной поперечной компонентой тензора напряжений σ_{zz} . В теории Кирхгофа-Лява пренебрегают также и компонентами σ_{xz} и σ_{yz} . В теории Тимошенко эти напряжения принимаются кусочно-постоянными по координате z (1.28). Более точно σ_{xz} и σ_{yz} описываются в рамках теории Григолюка-Чулкова. Здесь в каждом слое поперечные касательные напряжения представляются в виде полиномов второй степени от координаты z . Соответствующие результаты расчетов для теорий пластин и сравнения с 3D ТУ приведены в таблицах 3.7–3.8, из которых следует, что погрешности в рамках теории Кирхгофа-Лява и Тимошенко неприемлемые. При этом теория Григолюка-Чулкова намного точнее описывает поперечные касательные напряжения, но отклонения от 3D ТУ, особенно для тонких пластин, на порядок больше соответствующих отклонений для других компонент тензора напряжений.

С лучшей точностью определить поперечные касательные напряжения можно воспользовавшись приемом, описанным в [110]. Идея этого подхода заключается в определении касательных напряжений непосредственно из

уравнений равновесия пространственной теории упругости

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^k}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^k}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует, что

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^k &= - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} \right) dz + C_x^k, \\ \sigma_{yz}^k &= - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} \right) dz + C_y^k.\end{aligned}\tag{3.20}$$

В этих формулах функции $\sigma_{xx}^k(x, y, z)$, $\sigma_{yy}^k(x, y, z)$ и $\sigma_{xy}^k(x, y, z)$ необходимо взять из расчетов в рамках соответствующей теории пластин. Так как зависимость от переменной z в них проста, то вычисление интегралов не представляет сложности и может быть проведено аналитически. Свободные коэффициенты C_x^k и C_y^k определяются из краевых условий исходной постановки 3D ТУ на верхней и нижней гранях, а также условий сопряжения на границе слоев, которые в нашем случае определялись из условия непрерывности всех поперечных напряжений.

В таблицах 3.9–3.10 представлены значения поперечных касательных напряжений, рассчитанных согласно описанному методу. Полученные результаты принципиально более точные по сравнению с исходными значениями, полученными из формул теорий пластин непосредственно. На рисунке 3.11 представлены распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz}(0, a/2, \bar{z})$ по толщине в трехслойной пластине для $S = 10$. Для сравнения поперечное касательное напряжение рассчитано стандартным и описанным выше способами для разных теорий пластин. Теория Григолюка-Чулкова в стандартном подходе на качественном уровне хорошо описывает поперечные касательные

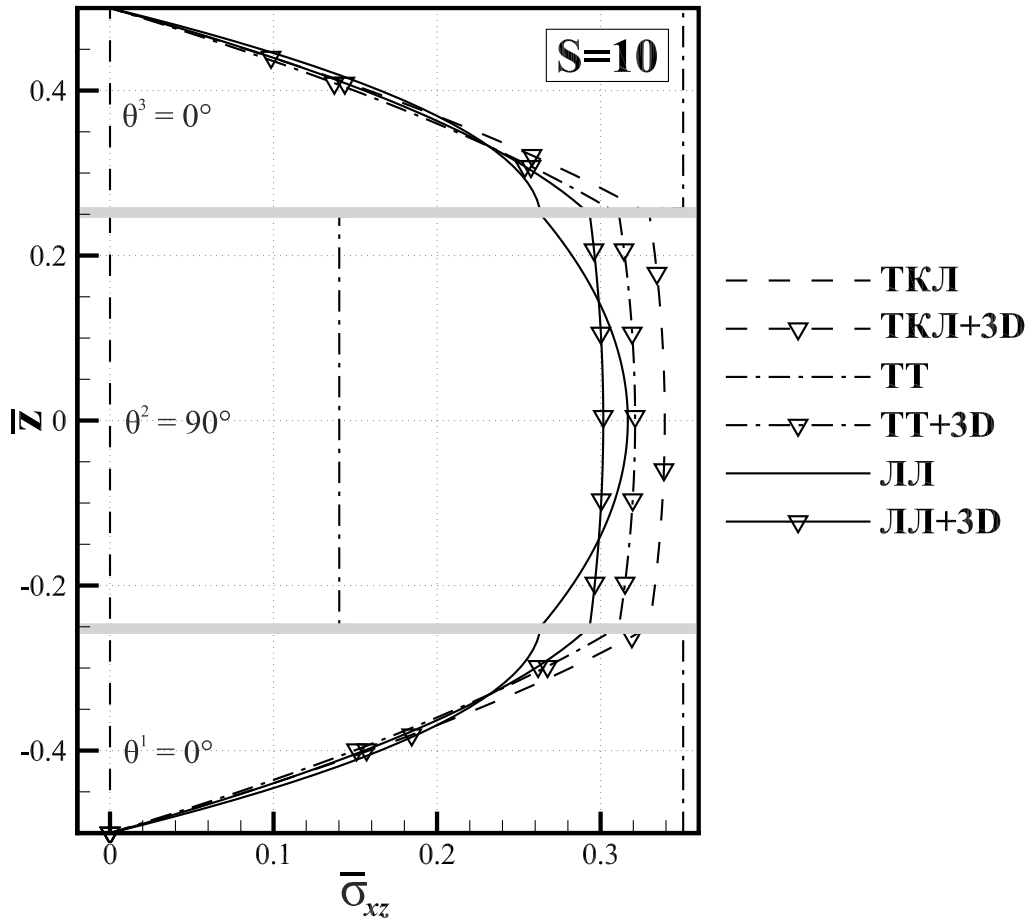


Рисунок 3.11 – Распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{xz}(0, a/2, \bar{z})$ в трехслойной пластине по толщине для $S = 10$. Представлены результаты расчетов в рамках теорий пластин и восстановленные из уравнений равновесия 3D ТУ значения (+3D).

напряжения, но применение уравнений (3.20) приводит к их восстановлению с более высокой точностью (см. таблицу 3.9). В теории Кирхгофа-Лява напряжение σ_{xz} принимается равным 0. Однако, согласно рисунку 3.11 применение подхода (3.20) позволяет оценить распределение напряжений, а в случае более тонких пластин получить достаточно точные численные значения. Аналогично дело обстоит и с теорией Тимошенко, которая дает более близкое приближение к 3D ТУ.

Обратим внимание, что теории Кирхгофа-Лява и Тимошенко при использовании предложенного метода восстановления напряжений дают хорошую

точность при $S = 10$, хотя область применимости, определяемая по рассчитанным значениям прогибов и компонент тензоров напряжений σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} была ограничена более тонкими пластинами.

Таким образом, если в рамках теории пластин удастся с достаточной точностью рассчитать напряжения σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} , то поперечные касательные напряжения можно восстановить воспользовавшись подходом описанном в этом параграфе. Этот подход особенно эффективен при расчете в рамках теорий пластин Кирхгофа-Лява и Тимошенко для относительно тонких пластин ($S \geq 20$). Используя эти теории, можно с хорошей точностью рассчитывать напряжения σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} , но поперечные напряжения, как видно из представленных таблиц, определяются очень грубо даже на качественном уровне. Описанный же способ позволяет восстановить поперечные напряжения при малых вычислительных затратах.

Таблица 3.7 – Компонента напряжений $\bar{\sigma}_{xz}(0, a/2, 0)$ в 3-, 5-, 7-слойных пластинах для разных S . Результаты расчетов проведены в рамках ТКЛ – теории Кирхгофа-Лява, ТТ – теории Тимошенко, ЛЛ – теории ломаной линии Григолюка-Чулкова. Знак (%) используется для обозначения относительного отклонения от 3D ТУ в процентах (3.19).

S	3D ТУ	ТКЛ	ТТ	ЛЛ	ТКЛ (%)	ТТ (%)	ЛЛ (%)
3 слоя							
2	0.153	0.000	0.102	0.160	100.0	33.3	4.5
4	0.219	0.000	0.119	0.229	100.0	45.6	4.5
10	0.301	0.000	0.140	0.317	100.0	53.4	5.2
20	0.328	0.000	0.146	0.345	100.0	55.5	5.3
50	0.337	0.000	0.148	0.355	100.0	56.1	5.4
100	0.339	0.000	0.148	0.357	100.0	56.3	5.2
5 слоев							
2	0.227	0.000	0.238	0.222	100.0	4.8	2.3
4	0.238	0.000	0.257	0.229	100.0	8.0	3.9
10	0.258	0.000	0.290	0.250	100.0	12.4	3.2
20	0.268	0.000	0.302	0.259	100.0	12.7	3.3
50	0.271	0.000	0.306	0.263	100.0	12.9	2.9
100	0.272	0.000	0.307	0.264	100.0	12.9	3.1
7 слоев							
2	0.178	0.000	0.094	0.175	100.0	47.4	1.4
4	0.219	0.000	0.099	0.216	100.0	54.8	1.3
10	0.255	0.000	0.108	0.256	100.0	57.6	0.6
20	0.267	0.000	0.111	0.270	100.0	58.4	1.1
50	0.271	0.000	0.113	0.275	100.0	58.3	1.4
100	0.272	0.000	0.113	0.275	100.0	58.5	1.3

Таблица 3.8 – Компонента напряжений $\bar{\sigma}_{yz}(a/2, 0, 0)$ в 3-, 5-, 7-слойных пластинах для разных S . Результаты расчетов проведены в рамках ТКЛ – теории Кирхгофа-Лява, ТТ – теории Тимошенко, ЛЛ – теории ломаной линии Григолюка-Чулкова. Знак (%) используется для обозначения относительного отклонения от 3D ТУ в процентах (3.19).

S	3D ТУ	ТКЛ	ТТ	ЛЛ	ТКЛ (%)	ТТ (%)	ЛЛ (%)
3 слоя							
2	0.295	0.000	0.200	0.315	100.0	32.4	6.7
4	0.292	0.000	0.157	0.282	100.0	46.1	3.6
10	0.196	0.000	0.104	0.183	100.0	46.8	6.4
20	0.156	0.000	0.089	0.146	100.0	42.6	6.6
50	0.141	0.000	0.085	0.132	100.0	39.9	6.2
100	0.139	0.000	0.084	0.130	100.0	39.6	6.3
5 слоев							
2	0.186	0.000	0.087	0.202	100.0	146.6	8.5
4	0.229	0.000	0.079	0.257	100.0	65.6	12.4
10	0.223	0.000	0.066	0.254	100.0	70.6	14.1
20	0.212	0.000	0.061	0.241	100.0	128.7	13.7
50	0.206	0.000	0.059	0.235	100.0	128.8	14.0
100	0.205	0.000	0.059	0.234	100.0	128.8	14.1
7 слоев							
2	0.238	0.000	0.220	0.245	100.0	7.6	2.9
4	0.236	0.000	0.207	0.243	100.0	12.3	3.1
10	0.219	0.000	0.183	0.227	100.0	16.4	3.8
20	0.210	0.000	0.175	0.218	100.0	16.7	3.8
50	0.206	0.000	0.172	0.214	100.0	16.5	3.9
100	0.205	0.000	0.171	0.214	100.0	16.6	4.2

Таблица 3.9 – Компонента напряжений $\bar{\sigma}_{xz}(0, a/2, 0)$ в 3-, 5-, 7-слойных пластинах для разных S . Результаты расчетов проведены в рамках ТКЛ – теории Кирхгофа-Лява, ТТ – теории Тимошенко, ЛЛ – теории ломаной линии Григолюка-Чулкова. Знак (%) используется для обозначения относительного отклонения от 3D ТУ в процентах (3.19).

S	3D ТУ	ТКЛ	ТТ	ЛЛ	ТКЛ (%)	ТТ (%)	ЛЛ (%)
3 слоя							
2	0.153	0.339	0.237	0.156	121.6	54.7	1.6
4	0.219	0.339	0.274	0.220	54.8	25.3	0.4
10	0.301	0.339	0.321	0.302	12.6	6.7	0.2
20	0.328	0.339	0.334	0.328	3.4	1.9	0.1
50	0.337	0.339	0.338	0.337	0.6	0.4	0.1
100	0.339	0.339	0.339	0.339	0.0	0.0	0.1
5 слоев							
2	0.227	0.272	0.213	0.233	19.8	6.4	2.5
4	0.238	0.272	0.230	0.237	14.3	3.5	0.3
10	0.258	0.272	0.258	0.258	5.4	0.0	0.1
20	0.268	0.272	0.268	0.268	1.5	0.0	0.2
50	0.271	0.272	0.272	0.271	0.4	0.2	0.2
100	0.272	0.272	0.272	0.272	0.0	0.0	0.0
7 слоев							
2	0.178	0.205	0.265	0.247	13.9	11.2	3.7
4	0.219	0.205	0.248	0.238	13.1	5.3	0.7
10	0.255	0.205	0.220	0.219	6.4	0.5	0.2
20	0.267	0.205	0.210	0.210	2.4	0.2	0.1
50	0.271	0.205	0.206	0.206	0.5	0.0	0.0
100	0.272	0.205	0.205	0.205	0.0	0.2	0.2

Таблица 3.10 – Компонента напряжений $\bar{\sigma}_{yz}(0, a/2, 0)$ в 3-, 5-, 7-слойных пластинах для разных S . Результаты расчетов проведены в рамках ТКЛ – теории Кирхгофа-Лява, ТТ – теории Тимошенко, ЛЛ – теории ломаной линии Григолюка-Чулкова. Знак (%) используется для обозначения относительного отклонения от 3D ТУ в процентах (3.19).

S	3D ТУ	ТКЛ	ТТ	ЛЛ	ТКЛ (%)	ТТ (%)	ЛЛ (%)
3 слоя							
2	0.295	0.138	0.344	0.332	53.2	16.6	12.6
4	0.292	0.138	0.269	0.302	52.7	7.9	3.4
10	0.196	0.138	0.175	0.197	29.6	10.9	0.3
20	0.156	0.138	0.148	0.156	11.5	4.9	0.2
50	0.141	0.138	0.140	0.141	2.1	0.8	0.1
100	0.139	0.138	0.139	0.139	0.7	0.3	0.0
5 слоев							
2	0.186	0.205	0.305	0.195	10.2	63.7	4.7
4	0.229	0.205	0.276	0.233	10.5	20.6	1.5
10	0.223	0.205	0.229	0.224	8.1	2.6	0.7
20	0.212	0.205	0.212	0.212	3.3	0.1	0.0
50	0.206	0.205	0.206	0.206	0.5	0.2	0.2
100	0.205	0.205	0.206	0.206	0.0	0.3	0.3
7 слоев							
2	0.238	0.205	0.265	0.247	13.9	11.2	3.7
4	0.236	0.205	0.248	0.238	13.1	5.3	0.7
10	0.219	0.205	0.220	0.219	6.4	0.5	0.2
20	0.210	0.205	0.210	0.210	2.4	0.2	0.1
50	0.206	0.205	0.206	0.206	0.5	0.0	0.0
100	0.205	0.205	0.205	0.205	0.0	0.2	0.2

3.3.4. Вычислительные затраты

Описанные выше теории пластин при численных расчетах отличаются с точки зрения вычислительных затрат. Это связано как с порядком разрешающих систем ДУ, числом неизвестных функций, так и малыми параметрами

при старших производных. Теория Кирхгофа-Лява имеет 8-ой порядок системы дифференциальных уравнений с 3-я неизвестными функциями перемещения и не зависит от числа слоев. Описанная постановка задачи изгиба многослойной пластины для теории Кирхгофа-Лява не имеет значимых малых параметров при старших производных. При этом для получения трех первых знаков для значения максимального прогиба в методе p – КНН требуются полиномы 12 степени в каждом направлении для каждой неизвестной функции, т.е.

$$(12 \times 12) \times 3 = 432$$

свободных параметра в представлении решения для теории Кирхгофа-Лява для любой относительной толщины.

Теория Тимошенко имеет 10-й порядок и 5 неизвестных функций и тоже не зависит от числа слоев. При этом при старших производных при неизвестных функциях углов поворота имеется малый параметр порядка $\varepsilon^2 = (h/a)^2$. Но для рассматриваемой постановки задачи этот малый параметр не влияет на точность решения, что по-видимому связано с хорошими свойствами решения задачи. Вид нагрузки (3.13) и закрепления пластины (3.16) приводят к тому, что решение не обладает особенностями и является целой функцией. Для получения трех первых знаков для значения максимального прогиба в методе p – КНН также требуются полиномы 12 степени в каждом направлении для каждой неизвестной функции, т.е.

$$(12 \times 12) \times 5 = 720$$

свободных параметра в представлении решения для теории Тимошенко для любой относительной толщины.

В теории Григолюка-Чулкова порядок дифференциальных уравнений зависит от числа слоев и равен $6 + 4N$, а число неизвестных функций в разрешающей системе равно $3 + 2N$.

Как и для рассмотренных выше теорий в случае теории Григолюка-Чул-

кова в методе p –КНН требуются полиномы 12 степени в каждом направлении для каждой функции. Удобно составить таблицу числа неизвестных параметров требуемых для получения трех первых знаков для значения максимального прогиба для разных теорий (таблица 3.11).

Таблица 3.11 – Число неизвестных параметров в методе p –КНН, требуемых для получения трех первых знаков для значения максимального прогиба для разных теорий в зависимости от числа слоев

Число слоев слоев	Теория Кирхгофа - Лява	Теория Тимошенко	Теория Григолюка-Чулкова
3	432	720	1296
5	432	720	1872
7	432	720	2448

При решении рассматриваемых задач в p –КНН для решения соответствующих СЛАУ применяется прямой метод, требующий $O(n^3)$ операций (n – число неизвестных). Таким образом, для тонких пластин ($S > 50$) целесообразно использовать более экономичные теории Кирхгофа-Лява или Тимошенко. Например, для тонких семислойных пластин потребуется на два порядка меньше операций при обращении соответствующей матрицы.

Стоит однако отметить, что в рассмотренной реализации метода p –КНН все неизвестные функции аппроксимировались одинаково, т.е. с одним и тем же числом неизвестных параметров. Возможно более экономичным будет случай, когда, например, для продольных перемещений срединной поверхности $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$, которые являются малыми по сравнению с прогибом $w_0(x, y)$, можно аппроксимировать полиномами более низких степеней.

На основании таблицы 3.11 и результатов расчетов (таблицы 3.3 – 3.6) можно схематически определить область применимости теорий пластин для рассмотренной задачи. Схема на рисунке 3.12 основывается на точности приближения теорий пластин и вычислительных затратах. Например, при

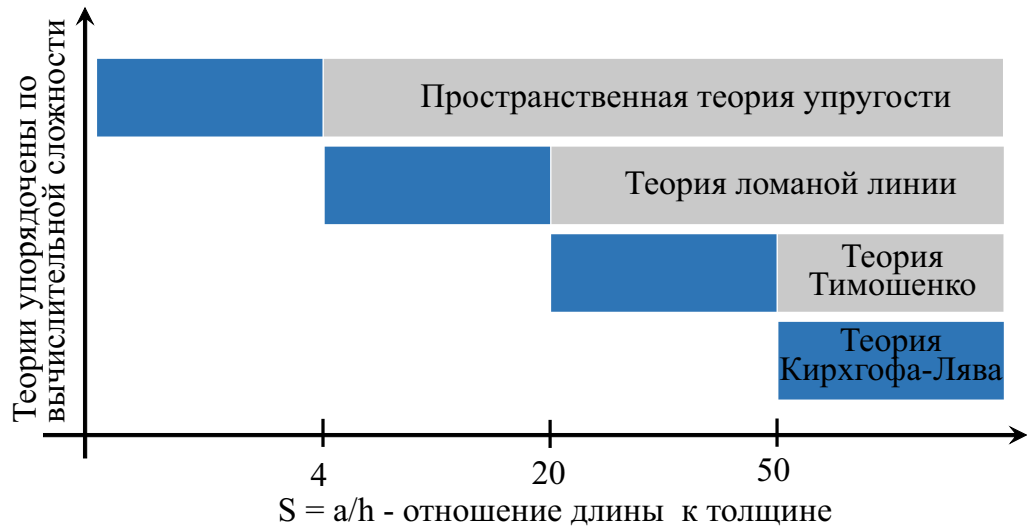


Рисунок 3.12 – Область применимости рассматриваемых теорий в зависимости от относительной толщины пластин. Рекомендованная область выделена синим цветом.

$S \geq 50$ все теории дают близкий результат, но т.к. теория Кирхгофа-Лява наиболее экономична с точки зрения вычислений, то она является более предпочтительной. Теорию Тимошенко можно использовать в расчетах при $20 \leq S \leq 50$. А для более толстых пластин следует использовать теорию Григолюка-Чулкова. Отметим, что для толстых пластин $S > 4$ теория ломаной линии может быть также применима, особенно в случае большого числа слоев. Но в толстых пластинах начинает проявляться эффект “обжатия”, т.е. напряжение σ_{zz} уже не является малой величиной по сравнению с σ_{xx} и σ_{yy} . Ни в одной рассмотренных теорий пластин влияние компоненты σ_{zz} на НДС пластины не учитывается.

Отметим, что рассмотренное решение не имеет особенностей, т.к. нам требовалось точное решение в рамках пространственной постановки. Но в реальных условиях эксплуатации НДС конструкций может быть достаточно сложным. Решение может содержать особенности в виде больших градиентов локализованных в малых областях. Такие эффекты в рамках упрощенных теорий пластин описываются грубо. Но уточненные теории типа

теории ломаной линии Григолюка-Чулкова имеют заложенный в них потенциал для более точного описания особенностей. Это естественно отражается на вычислительной сложности соответствующих постановок. Поэтому при выборе теории пластин необходимо помнить, что теории пластин как любые приближения имеют свои возможности и ограничения.

Выводы по главе 3

1. P -версия метода КНН верифицирована на задачах изгиба изотропной и ортотропной пластин с известными решениями.
2. Проведен расчет НДС пластин на упругом основании. Рассмотрены три модели реакции упругого основания: Винклера, Власова и Пастернака.
3. Модифицированный метод КНН применен для решения задач изгиба трех-, пяти-, семислойных многослойных анизотропных прямоугольных пластин для трёх различных теорий пластин: Кирхгофа-Лява, Тимошенко, Григолюка-Чулкова. Показано, что теория Григолюка-Чулкова обеспечивает получение достаточно хорошего приближения к пространственной теории как для малых, так и больших ($a/h > 4$) относительных толщин. Для тонких пластин ($a/h > 50$) целесообразно применять теории Кирхгофа-Лява или Тимошенко, которые требуют меньших вычислительных затрат по сравнению с теорией Григолюка-Чулкова.
4. Реализован способ уточнения поперечных касательных напряжений с использованием уравнений равновесия пространственной теории упругости для рассмотренных теорий пластин.

Глава 4.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХТОЧЕЧНОГО ИЗГИБА КОМПОЗИТНОЙ БАЛКИ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

4.1. Разносопротивляющиеся материалы

Многие современные конструкционные материалы имеют разные механические характеристики при растяжении и сжатии. Например, модуль упругости, пределы прочности и текучести при растяжении и сжатии могут сильно отличаться. Неучет эффекта разносопротивляемости может привести к серьезным отклонениям рассчитанных величин от результатов эксперимента.

Примером разносопротивляющего материала являются эпоксидные смолы – полимеры, у которых модуль упругости при растяжении может отличаться от модуля упругости при сжатии на десятки процентов [63, 86]. Полимеры представляют собой длинные цепочки мономерных звеньев и исследователи отмечают эту особенность структуры полимеров как возможную причину их разносопротивляемости [63, 86]. Многие композиционные материалы (КМ) также обладают свойством разносопротивляемости растяжению и сжатию, что может быть связано как со сложной гетерогенной структурой КМ [53], так и с использованием в них разносопротивляющихся материалов.

В этой главе рассмотрим балки, выполненные из высокодеформативной эпоксидной смолы ВСЭ-1212 и созданного с ее применением перспективно-

го конструкционного углепластика ВКУ-28, которые были разработаны в ФГУП “ВИАМ” ГНЦ РФ. Секущий модуль Юнга матрицы при растяжении и сжатии может отличаться до 20 % (рисунок 4.1). Характерная особенность

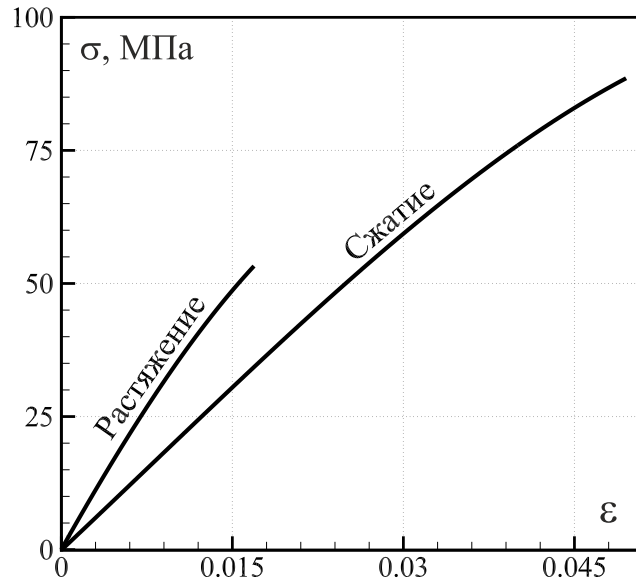


Рисунок 4.1 – Отличия диаграмм деформирования при растяжении и сжатии полимерной матрицы ВСУ-1212.

полимерных материалов – выраженная нелинейность диаграмм деформирования, являющаяся одним из источников нелинейного поведения КМ на их основе. В композитах, где все волокна уложены в одном направлении, характер деформирования зависит от угла приложения нагрузки по отношению к направлению укладки. При углах больше 20° волокна практически не воспринимают нагрузку и наблюдается эффект быстрого падения жесткости углепластиков вследствие малой жесткости материалов матриц. Напротив, в работе [104] показано, что при испытаниях на растяжение жесткость образцов углепластика с углами приложения нагрузки до 20° увеличивается с ростом деформаций. В [116] указывается, что это происходит из-за свойств углеродных волокон. Аналогичные выводы сделаны в [121], где в качестве возможной причины такого поведения названо наличие пор в углеродных волокнах, возникающих при отжиге, которые могут “схлопываться” при их растяжении. Указанные нелинейные свойства компонентов и самого углепла-

стика требуют построения физически нелинейных моделей. Это, в свою очередь, порождает серьезные математические и вычислительные проблемы, возникает необходимость разработки и использования специальных расчетных схем при анализе поведения конструкций из углепластиков.

Для моделирования разносопротивляющихся материалов требуется специальные программы испытаний материала. В рамках проекта «Разработка и совершенствование технологий проектирования и создания новых перспективных композиционных материалов (углепластиков) и конструкций из них для авиационной и других отраслей промышленности», поддержанного грантом РФФИ № 13-01-12032-офи_м, была разработана программа испытаний и реализован комплекс экспериментов на растяжение, сжатие, трех- и четырехточечный изгиб образцов полимерной матрицы ВСЭ-1212 и углепластика ВКУ-28.

Расчет разносопротивляющихся конструкций требует решения задачи с неизвестной границей. В ходе решения задачи требуется определять зоны, где конструкция испытывает сжимающие или растягивающие напряжения и использовать для расчета поведения в этих зонах соответствующие физические соотношения. В этой главе предложена модель расчета трехточечного изгиба полимерных и композитных балок с учетом их разносопротивляемости и физической нелинейности.

Вопросы расчета деформирования для нелинейно-упругих разносопротивляющихся материалов мало исследованы вследствие значительных вычислительных трудностей. Задачи моделирования линейно-упругих разномодульных материалов рассматривались, в частности, С. П. Тимошенко [78] и С. А. Амбарцумяном [3, 4]. В работе [2] изложен теоретический подход к расчету разносопротивляющихся растяжению — сжатию нелинейно-упругих балок при изгибе. Ниже предложена математическая модель изгиба балки из нелинейно-упругого разносопротивляющегося материала, разработана вычислительная методика и проведены численные расчеты для балок из уг-

лепластиков и полимерных матриц.

4.2. Математическая модель разнсопротивляющейся композитной балки

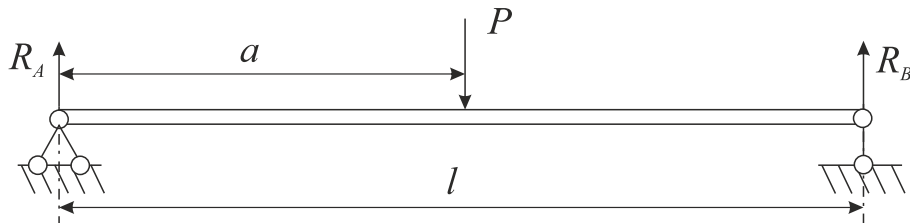


Рисунок 4.2 – Схема модели трехточечного изгиба балки прямоугольного сечения

Испытание образцов на трехточечный изгиб — один из стандартных методов определения физико-механических характеристик материалов (см, например, ГОСТ 4648). На рисунке 4.2 представлена схема физической модели трехточечного изгиба балки прямоугольного сечения $b \times 2h$ с пролетом l между опорами. Левый край балки шарнирно закреплен, а правый свободно оперт, при этом на расстоянии a от левого края балки прикладывается сосредоточенная нагрузка. В рамках модели пренебрегаем формой опор, и возникающие реакции опор R_A , R_B и нагрузку P и полагаем сосредоточенными. Кроме того, будем пренебрегать и возможной неоднородностью деформаций в третьем направлении (перпендикулярном продольному направлению). В этом случае в верхней части балки возникают деформации сжатия в продольном направлении, а в нижней части — деформации растяжения.

Для описания равновесного состояния воспользуемся уравнениями классической теории изгиба балки. В качестве отсчетной поверхности примем срединную поверхность балки $z = 0$ (см. рисунок 4.3). В этом случае на отсчетной поверхности балки определяются следующие величины: $Q(x)$ — перерезывающая сила, $M(x)$ — изгибающий момент, $N(x)$ — продольное

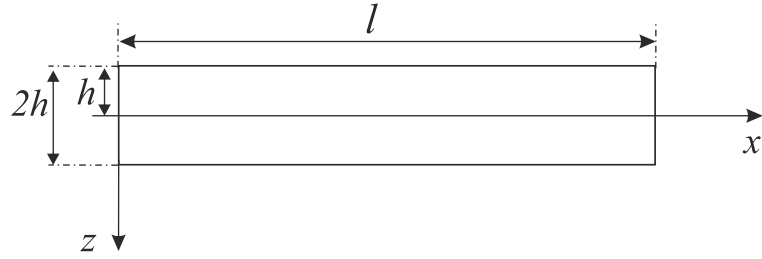


Рисунок 4.3 – Система координат

усилие. Для рассматриваемой постановки соответствующие уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dx} = Q. \quad (4.1)$$

Реакции опор R_A и R_B определяются соотношением $R_A = R_B = P/2$. Изгибающие моменты в точках опоры равны нулю $M_A = M_B = 0$. Решение системы уравнений (4.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} N(x) &= 0 \quad \text{при } x \in [0, l], \\ Q(x) &= \begin{cases} P(1 - a/l) & \text{при } x \in [0, a), \\ -Pa/l & \text{при } x \in [a, l]; \end{cases} \\ M(x) &= \begin{cases} Px(1 - a/l) & \text{при } x \in [0, a), \\ -Pa(x/l - 1) & \text{при } x \in [a, l]. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Распределение деформаций по толщине балки получим в рамках кинематических гипотез Кирхгофа – Лява, в соответствии с которыми

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, z) &= e(x) + z\kappa(x), \\ e(x) &= \frac{du}{dx}, \quad \kappa(x) = -\frac{d^2w}{dx^2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\varepsilon(x, z)$ – деформации в балке; $e(x)$, $\kappa(x)$ – деформации и изменение кривизны срединной поверхности; $u(x)$, $w(x)$ – продольное перемещение и прогиб срединной поверхности. Как было отмечено, в балке возникают деформации сжатия и растяжения, границу раздела которых обозначим z_1 .

В области $-h \leq z \leq z_1$ значения деформаций ε будут отрицательными, а в области $z_1 \leq z \leq h$ — положительными. На границе этих областей деформации ε равны нулю, поэтому согласно (4.3) сама граница определяется уравнением

$$z_1 = -\frac{e}{\kappa}, \quad -h \leq z_1 \leq h. \quad (4.4)$$

Физические соотношения запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma^+ &= f^+(\varepsilon), & \varepsilon > 0, \\ \sigma^- &= f^-(\varepsilon), & \varepsilon \leq 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где верхний индекс “+” отвечает соотношениям для области с положительными деформациями, “-” — с отрицательными; $f(\varepsilon)$ — выбранная для расчетов форма аппроксимации диаграммы деформирования. Обратим внимание, что в моделях без учета разнсопротивляемости материала $|f^+(\varepsilon)| = |f^-(-\varepsilon)|$, т.е. материал при сжати и растяжении деформируется одинаково.

Продольное усилие N и изгибающий момент M в сечении стержня с учетом разнсопротивляемости растяжению и сжатию определяются равенствами

$$N = b \left(\int_{-h}^{z_1} \sigma^- dz + \int_{z_1}^h \sigma^+ dz \right), \quad M = b \left(\int_{-h}^{z_1} \sigma^- z dz + \int_{z_1}^h \sigma^+ z dz \right). \quad (4.6)$$

Подставляя в (4.6) соотношения (4.3), (4.4), (4.5) и интегрируя по толщине, получим систему уравнений для определения κ, e :

$$\begin{aligned} \text{при } 0 \leq x < a & \quad \begin{cases} N(\kappa, e, x) = 0, \\ M(\kappa, e, x) = Px(1 - a/l), \end{cases} \\ \text{при } a \leq x \leq l & \quad \begin{cases} N(\kappa, e, x) = 0, \\ M(\kappa, e, x) = -Pa(x/l - 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Система уравнений (4.7) в общем случае является нелинейной, но при линейных физических соотношениях, учитывающих разносопротивляемость в виде

$$\sigma^+ = E^+ \varepsilon, \quad \sigma^- = E^- \varepsilon, \quad (4.8)$$

может быть решена аналитически (E^+ , E^- — модули упругости при растяжении и сжатии соответственно). Если в качестве физических соотношений используются линейные соотношения (4.8), то такие модели материалов также называют *разномодульными* [3]. В нелинейном случае для решения уравнений (4.7) применяется метод Ньютона, который приводит к линеаризованной системе

$$\begin{aligned} N(e_0, \kappa_0) + \frac{\partial N(e_0, \kappa_0)}{\partial e}(e - e_0) + \frac{\partial N(e_0, \kappa_0)}{\partial \kappa}(\kappa - \kappa_0) &= 0, \\ M(e_0, \kappa_0) + \frac{\partial M(e_0, \kappa_0)}{\partial e}(e - e_0) + \frac{\partial M(e_0, \kappa_0)}{\partial \kappa}(\kappa - \kappa_0) &= M(x) \end{aligned}$$

разрешаемой относительно неизвестных величин

$$\kappa = F(e_0, \kappa_0, M(x)), \quad e = G(e_0, \kappa_0), \quad (4.9)$$

где e_0 и κ_0 — начальные приближения, а $M(x)$ определяется из (4.2).

В качестве начального приближения при малых значениях нагрузки P использовались решения, полученные для линейных физических соотношений (4.8). Такой выбор начального приближения основывается на предположении о линейности физических соотношений (4.5) при малых деформациях. Далее расчет производится с постепенным увеличением нагрузки P с небольшим шагом, поэтому в случае больших значений P в качестве начального приближения можно принять результат расчета с предыдущего шага, т.е. меньшей нагрузки.

Определив из итерационного процесса (4.9) изменение кривизны и дефор-

мации срединной поверхности

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1(x) & \text{при } x \in [0, a), \\ \kappa_2(x) & \text{при } x \in [a, l], \end{cases} \quad e(x) = \begin{cases} e_1(x) & \text{при } x \in [0, a), \\ e_2(x) & \text{при } x \in [a, l], \end{cases}$$

можно выписать дифференциальные уравнение для определения прогиба и продольного перемещения балки. Для этого представим их в виде

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) & \text{при } x \in [0, a), \\ w_2(x) & \text{при } x \in [a, l], \end{cases} \quad u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{при } x \in [0, a), \\ u_2(x) & \text{при } x \in [a, l]. \end{cases} \quad (4.10)$$

Используя уравнения (4.3) и условия закрепления балки, запишем систему уравнений для определения прогиба балки

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\kappa_1, \quad \frac{d^2 w_2}{dx^2} = -\kappa_2, \\ w_1(0) = w_2(l) = 0, \quad w_1(a) = w_2(a), \quad \frac{dw_1(a)}{dx} = \frac{dw_2(a)}{dx},$$

и продольного перемещения

$$\frac{du_1}{dx} = e_1, \quad \frac{du_2}{dx} = e_2, \\ u_1(0) = 0, \quad u_1(a) = u_2(a),$$

для численного решения которых применяется hp-вариант метода коллокаций и наименьших невязок для двух ячеек ($\Omega = [0, a] \cup [a, l]$).

4.3. Расчеты и сравнение с экспериментом

Рассмотрим три образца с геометрическими размерами $l \times 2h \times b$:

- образец 1 — полимерная матрица ВСЭ-1212, $75 \times 4.78 \times 10.05$ мм;
- образец 2 — углепластик ВКУ-28 (образец вырезан вдоль направления укладки армирующего наполнителя), $90 \times 3.45 \times 9.85$ мм;

- образец 3 — углепластик ВКУ-28 (образец вырезан поперек направления армирования), $90 \times 3.40 \times 9.95$ мм.

Из обработки экспериментальных данных на растяжение и сжатие полимерной матрицы ВСЭ-1212 и углепластика ВКУ-28 были получены соответствующие аппроксимации $\sigma - \varepsilon$ диаграмм деформирования. Все деформации приведены в долях. В таблицах 4.1–4.2 приведены результаты аппроксимации кривых деформирования (4.5) различными функциями:

A1 : линейная аппроксимация $f = a_1\varepsilon$;

A2 : аппроксимация полиномом второй степени $f = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2$;

A3 : аппроксимация полиномом третьей степени $f = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3$;

A4 : комбинация линейной и степенной функций $f^+ = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^{a_3}$ для растяжения и $f^- = a_1\varepsilon + a_2(-\varepsilon)^{a_3}$ для сжатия.

Значения коэффициентов приведено для напряжений в $Па$, а деформаций в долях. Также в таблицах приведены промежутки для деформаций, на которых была получена аппроксимация.

Из представленных таблиц можно оценить эффект разнсопротивляемости рассматриваемых образцов при сжатии и растяжении. Для полимерной матрицы эта разница превышает 15 % (см. таблицу 4.1), для углепластика ВКУ-28 достигает 5–7 % при продольном армировании и 12–15 % при поперечном (см. таблицу 4.2).

Для образцов 1–3 в испытательном центре ФГУП “ВИАМ” ГНЦ РФ были проведены испытания на трехточечный изгиб. Во время эксперимента для каждого значения нагрузки, приложенной в центр образца ($a = l/2$), измерялся прогиб образца в центре. Для определения прогиба балки использована описанная модель изгиба балки с учетом разнсопротивляемости и физически нелинейного поведения материала. В качестве условия остановки

Таблица 4.1 – Коэффициенты аппроксимации диаграмм растяжения и сжатия ВСЭ-1212 и среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от исходных данных

Вид аппроксимации	$a_1 \cdot 10^{-9}$	$a_2 \cdot 10^{-9}$	a_3	SME
Растяжение, $\varepsilon \in [0; 0.0018]$				
A1	3.33			2.7e-2
A2	3.89	-4.02e+1		1.8e-3
A3	3.80	-2.48e+1	-6.30e+2	4.0e-4
A4	3.77	-1.40e+2	2.35	2.7e-4
Сжатие, $\varepsilon \in [-0.06; 0]$				
A1	2.10			7.2e-2
A2	3.05	2.12e+1		4.2e-3
A3	3.18	2.85e+1	9.13e+1	1.1e-3
A4	3.31	1.24e+1	1.75	1.9e-3

итерационного процесса (4.9) использованы условия

$$\max_{x \in [0, l]} |\kappa_{n+1}(x) - \kappa_n(x)| < 10^{-7}, \quad \max_{x \in [0, l]} |e_{n+1}(x) - e_n(x)| < 10^{-7}$$

для выполнения которых требовалось в среднем 3–4 итерации метода Ньютона. При решении дифференциальных уравнений (4.10) для определения приближенного решения в каждой ячейке использованы полиномы 12-ой степени, которые обеспечивали точность решения в три знака.

На рисунке 4.4 представлены результаты расчетов прогиба и продольного перемещения образца 2 при использовании квадратичной аппроксимации (A2) для разных нагрузок. Видно, что в центре образца наблюдается максимальный прогиб, который возрастает пропорционально увеличению нагрузки. Для всех численных экспериментов продольные перемещения в балке на два порядка меньше поперечных перемещений, т.е. прогибов. Можно сделать вывод о том, что основной вклад в НДС балки вносят именно поперечные перемещения $w(x)$.

Таблица 4.2 – Коэффициенты аппроксимации диаграмм деформирования углепластика ВКУ-28 и среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от исходных данных

Вид аппроксимации	$a_1 \cdot 10^{-9}$	$a_2 \cdot 10^{-9}$	a_3	SME
Растяжение, продольное армирование, $\varepsilon \in [0; 0.015]$				
A1	160.8			1.4e-2
A2	144.9	1.44e+3		5.7e-4
A3	144.0	1.66e+3	-1.14e+13	4.3e-4
A4	143.0	8.87e+2	1.87	4.1e-4
Сжатие, продольное армирование, $\varepsilon \in [-0.0018; 0]$				
A1	155.4			5.8e-3
A2	160.2	3.33e+3		3.4e-3
A3	155.9	-4.31e+3	-3.00e+15	2.9e-3
A4	157.7	5.81e+8	3.98	3.0e-3
Растяжение, поперечное армирование, $\varepsilon \in [0; 0.0076]$				
A1	7.37			1.1e-2
A2	7.89	-9.22e+1		6.4e-4
A3	7.87	-8.97e+1	2.54e+11	4.3e-4
A4	7.82	-2.23e+2	2.20	4.8e-4
Сжатие, поперечное армирование, $\varepsilon \in [-0.0034; 0]$				
A1	8.90			6.7e-3
A2	9.21	1.20e+2		4.1e-3
A3	8.96	-1.16e+2	-5.09e+13	3.7e-3
A4	9.04	5.16e+6	3.95	3.7e-3

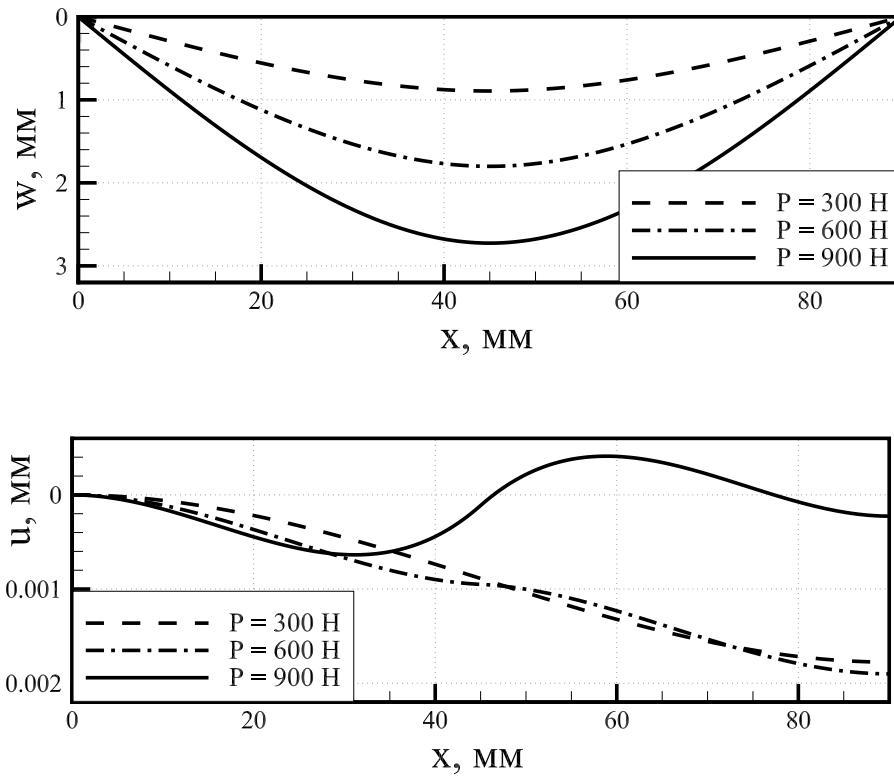


Рисунок 4.4 – Прогиб $w(x)$ и продольное перемещение $u(x)$ образца 2 при использовании квадратичной аппроксимации (A2) для разных нагрузок P .

На рисунке 4.5 представлена зависимость максимального значения прогиба балки от нагрузки, полученные при использовании различных подходов к аппроксимации физических соотношений, в сравнении с экспериментальными данными. Использование линейных законов для растяжения и сжатия не дает адекватного приближения даже на 30 % диаграммы. Использование более сложных, чем квадратичный, законов аппроксимации для диаграмм растяжения и сжатия приводит к тому, что сначала возникает существенное отклонение от экспериментальной диаграммы, а в дальнейшем начинает расходиться итерационный процесс метода Ньютона. Этот факт объясняется тем, что при испытаниях на растяжение образцов полимерной матрицы вследствие ее хрупкости диапазон деформаций ограничен 2 %, в то время как при расчете изгиба деформации в зоне растяжения достигают 4–5 %. Таким образом, при решении задачи изгиба используется экстраполирован-

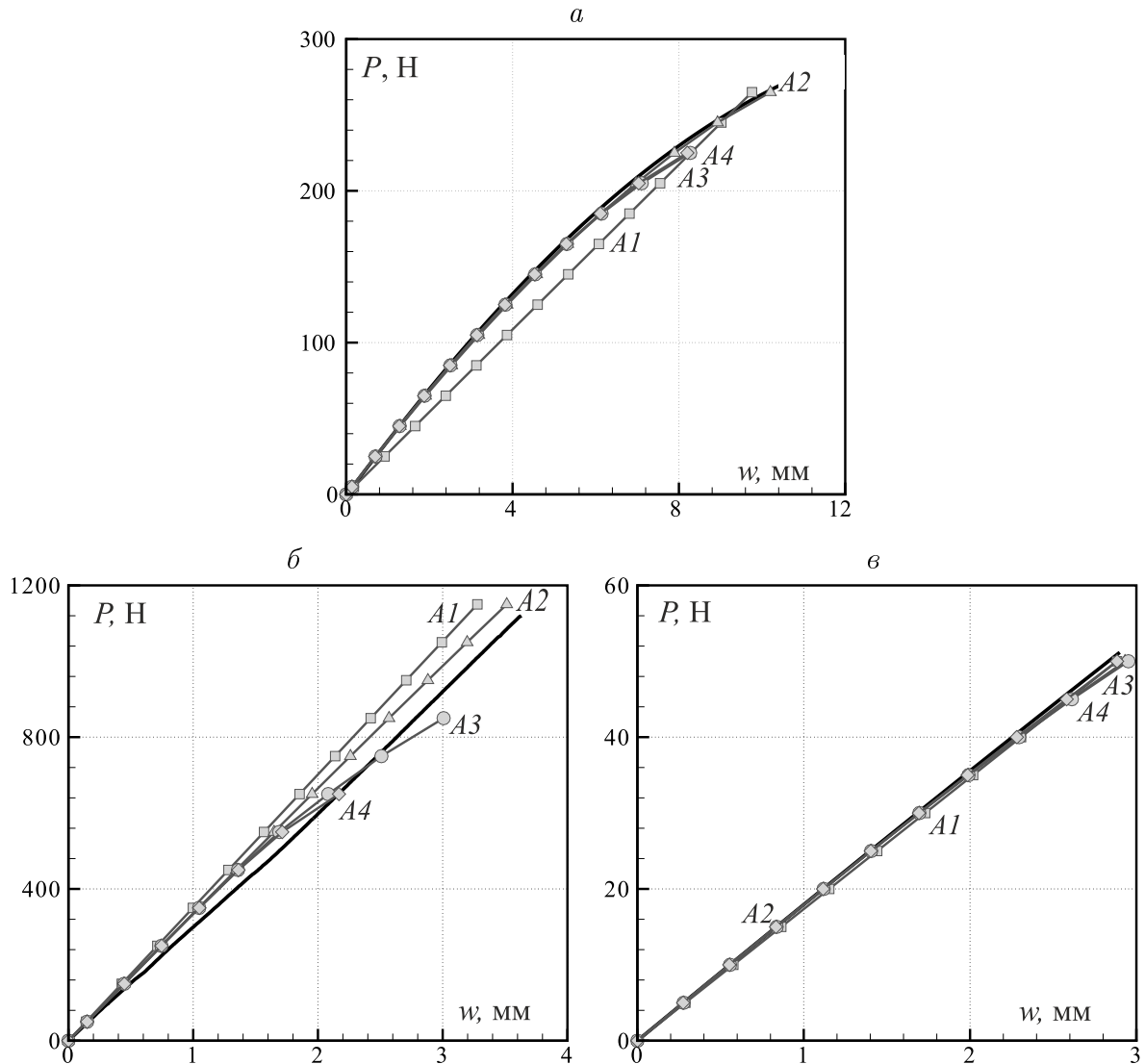


Рисунок 4.5 – Экспериментальные (сплошные кривые) и расчетные зависимости прогиба в центре балки от нагрузки: линейная аппроксимация — кривые $A1$, квадратичная (полиномом второй степени) — $A2$, кубическая — $A3$, линейно-степенная — $A4$; a – $в$ — соответственно образцы 1–3

ная в область больших деформаций аппроксимация диаграмм растяжения. Экстраполяции, полученные на основе полинома третьей степени и линейно-степенной функции, быстро достигают максимума, после чего начинают убывать, что не соответствует физике процесса.

Вариант расчета при использовании квадратичной аппроксимации и экстраполяции диаграмм деформирования качественно и количественно лучше

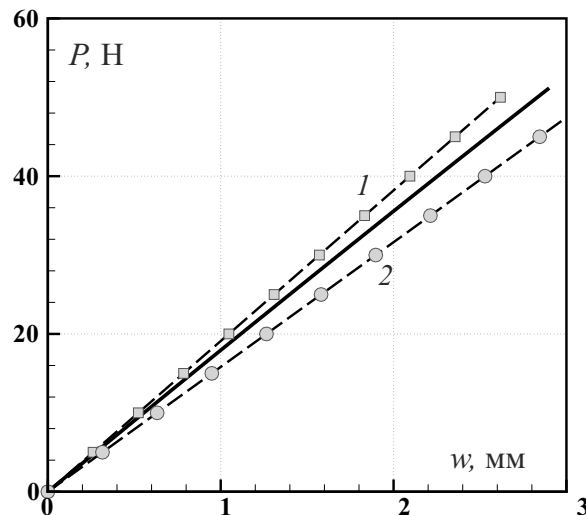


Рисунок 4.6 – Решение задачи трехточечного изгиба без учета разносопротивляемости материала растяжению (кривая 1) и сжатию (кривая 2), сплошная кривая — результаты механических испытаний

всего описывает нелинейный характер изгиба образца полимерной матрицы ВСЭ-1212. Это верно и для изгиба углепластика, вырезанного вдоль направления укладки армирующего наполнителя. В случае поперечно армированного углепластика все варианты аппроксимаций дают близкие к эксперименту результаты расчетов, хотя в эксперименте при максимальных нагрузках наилучшим вариантом остается расчет с использованием квадратичных аппроксимаций.

Рассмотрим влияние способа определения и задания механических характеристик материала при моделировании трехточечного изгиба балки из углепластика, вырезанного поперек направления укладки армирующего наполнителя. На рисунке 4.6 представлены решения, полученные при использовании “равномодульной” линейной аппроксимации физических соотношений: кривая 1 — модуль получен из экспериментов на растяжение, 2 — на сжатие (таблица 4.2). Как видно, результаты расчетов без учета разносопротивляемости на основе линейных характеристик материала отличаются от результатов механических испытаний (сплошная кривая) более чем на 15%.

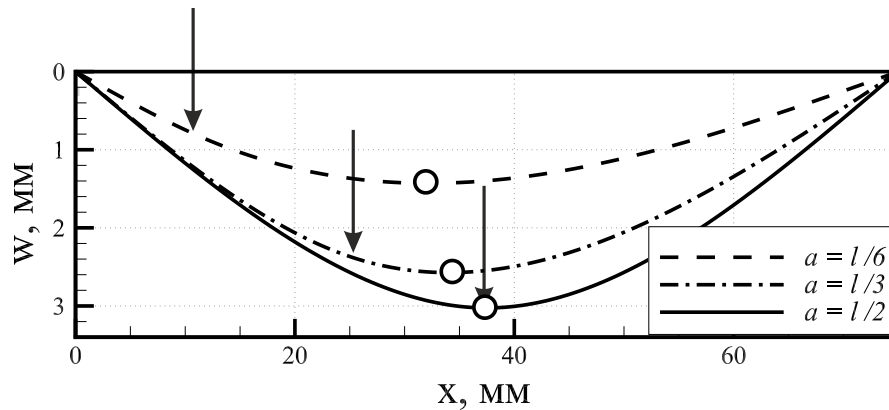


Рисунок 4.7 – Прогиб $w(x)$ образца 1 для разных точек приложения нагрузки (обозначены стрелками). Использована квадратичной аппроксимации (A2) и нагрузка $P = 100$ Н. Кружками обозначены точки, в которых наблюдается максимальный прогиб.

Большинство реальных конструкций в обычных условиях эксплуатации подвержено сложному нагружению, при котором в конструкции одновременно присутствуют зоны растяжения, сжатия, изгиба и их различные комбинации. Используя традиционные методики определения характеристик материалов и линейные модели деформирования (в частности, без учета разносопротивляемости материала растяжению и сжатию) для расчета конструкций из углепластиков, можно получить существенно искаженную картину НДС, и, как следствие, — недооценить или переоценить прочность и жесткость конструкции. Принимая во внимание, что углепластики используются для изготовления конструкций ответственного назначения, при их расчете необходим учет разносопротивляемости растяжению — сжатию.

Так как квадратичная аппроксимация дает наиболее точное соответствие экспериментальным данным, далее будем рассматривать расчеты в рамках этой аппроксимации. Предложенная математическая модель трехточечного изгиба балки и ее реализация позволяют перемещать положение нагрузки, т.е. изменять параметр a . На рисунке 4.7 приведены функции прогиба для разных точек приложения нагрузки $a = l/6$, $a = l/3$ и $a = l/2$ при фикси-

рованной силе нагрузки $P=100$ Н для образца 1. При смещении положения точки нагрузки от центра к краю балки существенно уменьшается значение максимального прогиба. При этом максимальный прогиб наблюдается не в точке приложения нагрузки, а лишь незначительно смещается от центра к ней (на рисунке 4.7 обозначены кружками). На рисунке 4.8 приведены напряжения в балке для трех рассмотренных положений нагрузки. Для расчета напряжений использованы формулы (4.3)–(4.5). Максимальные абсолютные значения напряжений наблюдаются в окрестности точки приложения нагрузки. Наибольшее напряжение возникает если нагрузка приложена в центр балки, при этом при смещении точки положения нагрузки к краю балки абсолютные значения напряжений уменьшаются.

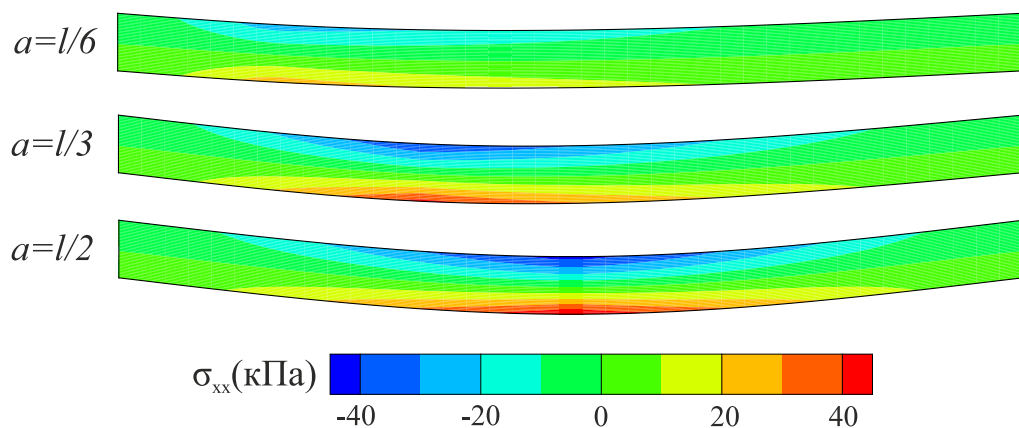


Рисунок 4.8 – Распределение напряжений $\sigma_{xx}(x, z)$ в балке для разных точек приложения нагрузки. Использована квадратичной аппроксимации (A2) и нагрузка $P = 100$ Н.

Расчеты показали, что разнсопротивляемость материала растяжению и сжатию является важной особенностью материала, которую необходимо учитывать. Но не менее важно учитывать физическую нелинейность материалов, которая в случае КМ может отвечать как за упрочение материала так и за ослабление его жесткостных характеристик. В рассмотренных испытаниях на трехточечный изгиб зоны где преобладают деформации сжатия

и растяжения очень близки по объему и симметрично расположены, а зоны больших по модулю напряжений относительно невелики. В таких условиях происходит усреднение характеристик материала. Стоит отметить, что в реальных конструкциях со сложной геометрией, находящихся в под произвольной нагрузкой разнсопротивляемость может проявиться намного сильнее. Если в конструкции возникнут зоны где будут преобладать не изгибные деформации, а зоны растяжения или сжатия, то применение усредненных характеристик может быть неприемлемым. В этом случае только учет разного поведения материала при сжатии и растяжении может дать адекватный результат.

Выводы по главе 4

1. Разработана и реализована математическая модель расчета трехточечного изгиба композитных балок, учитывающая физически нелинейное поведение материала и его разнсопротивляемость растяжению и сжатию.
2. Показано, что разнсопротивляемость материала растяжению и сжатию является важной особенностью материала, которую необходимо учитывать. Не менее важно учитывать физическую нелинейность материалов, которая в случае композиционного материала может приводить как к упрочению так и к ослаблению жесткостных и прочностных характеристик материала.
3. Математическая модель реализована для 4-х видов аппроксимаций физических соотношений: линейной, квадратичной, кубической и линейно-степенной. Показано, что использование квадратичной аппроксимации лучше всего согласуется с результатами лабораторных испытаний.

Заключение

В заключение сформулируем основные результаты работы.

1. Разработан модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок (КНН), основанный на применении полиномов высоких степеней в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. На ряде тестовых задач показаны преимущества разработанного метода, в т.ч. перед стандартным методом КНН. Показано, что на бесконечно гладких решениях с ростом степени полиномов наблюдается экспоненциальный порядок уменьшения погрешности, позволяющий получать численные решения с высокой точностью.
2. Для задач изгиба многослойных анизотропных прямоугольных пластин получены разрешающие системы уравнений в кинематических переменных для различных теорий пластин: классической теории Кирхгофа-Лява и уточненных теорий Тимошенко и Григолюка-Чулкова. Проведен сравнительный анализ особенностей разрешающих систем пространственной теории упругости и рассмотренных теорий пластин. Показано, что выбор и использование той или иной теории пластин позволяет значительно (на 2 порядка) уменьшить вычислительные затраты.
3. Для рассмотренных теорий пластин реализован модифицированный метод КНН. Проведен расчет НДС пластин на упругом основании с использованием трех моделей реакции основания: Винклера, Власова и Пастернака. Проведено исследование применимости теорий пластин

для разных относительных толщин и чисел слоев на примере задачи изгиба с известным решением в рамках пространственной теории упругости. Показано, что теория Григолюка-Чулкова обеспечивает получение достаточно хорошего приближения к пространственной теории как для малых, так и больших ($a/h > 4$) относительных толщин. Для тонких пластин ($a/h > 50$) целесообразно применять теории Кирхгофа-Лява или Тимошенко, которые требуют меньших вычислительных затрат по сравнению с теорией Григолюка-Чулкова.

4. Разработана математическая модель расчета трехточечного изгиба композитной балки, разносопротивляющейся растяжению и сжатию с учетом физически нелинейного поведения материала. Разработан алгоритм численного решения нелинейных уравнений, для разных видов аппроксимации физических соотношений. Проведена валидация разработанной модели и получено хорошее соответствие расчетов экспериментальным данным для квадратичной аппроксимации.
5. Разработаны и зарегистрированы программы для ЭВМ для расчета напряженно-деформированного состояния изотропных и многослойных анизотропных прямоугольных пластин и трехточечного изгиба композитных балок разносопротивляющихся растяжению и сжатию с учетом физически нелинейного поведения, с помощью которого проведено исследование деформирования балок и прямоугольных пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абовский, Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга. Наука. – 1978. – 288 с.
2. Амбарцумян, С.А. Об изгибе нелинейно-упругой балки с учетом разносопротивляемости и разнопрочности материала к растяжению и сжатию / С.А. Амбарцумян, В.Ц. Гнуни // Докл. НАН РА. Механика. – 2005. – № 1. – С. 43–50.
3. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. Наука. – 1982. – 317 с.
4. Амбарцумян, С.А. Сопротивление материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию / С.А. Амбарцумян. РАУ. – 2004. – 187 с.
5. Амбарцумян, С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость, колебания / С.А. Амбарцумян. Наука. – 1967. – 266 с.
6. Амелина, Е. В. Анализ и обработка экспериментальных данных при деформировании полимеров и углепластиков / Е. В. Амелина, С. К. Голушко, В. С. Ерасов, С.В. Идимешев [и др.] // Омский научный вестник. – 2015. – № 3 (143). – С. 339–345.
7. Амелина, Е. В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчёт / Е. В. Амелина, С. К. Голушко, В. С. Ерасов, С.В. Идимешев [и др.] // Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 27–52.

8. Амелина, Е.В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчёт / Е.В. Амелина, С.К. Голушко, Ю.В. Немировский [и др.] // Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20., № 5. – С. 27–52.
9. Андреев, А.Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания / А.Н. Андреев, Ю.В. Немировский. Наука. – 2001. – С. 288.
10. Бабенко, К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2002. – 848 с.
11. Белых, В. Н. Особенности реализации ненасыщаемого численного метода для внешней осесимметричной задачи Неймана / В.Н. Белых // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 1237–1249.
12. Беляев, В.В. Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей / В.В. Беляев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. – 2000. – Т. 5, № 4. – С. 12–21.
13. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках. Пер. с англ. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. Мир. – 1984. – 494 с.
14. Блохин, А.М. Численный анализ задач переноса заряда в полупроводниковых устройствах / А.М. Блохин, Б.В. Семисалов, А.С. Ибрагимова. Palmarium Academic Publishing. – 2012. – 216 с.
15. Богульский, И. О. Численное моделирование в задачах геофизики и механики деформируемого твердого тела / И. О. Богульский, В. А. Кочнев, О. В. Садовская, В. М. Садовский, Л.И. Шкутин // Вычислительные технологии. – 2004. —Т. 9, (Спец. выпуск, посвященный 30-летию ИВМ СО РАН). —С. 29–44.

16. Большаков, А.А. Прямоугольная пластина на двухпараметрическом упругом основании: аналитическое решение / А.А. Большаков // Вестн. СамГУ. – 2011. – №8 – С. 128–133.
17. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Врорубел. Мир. – 1987. – 584 с.
18. Букша, В.В. Расчет пластин и пологих оболочек коллокационными методами / В.В. Букша, О.В. Машкин, В.В. Рогалевич. Издательство АМБ. – 2007. – 357 с.
19. Варыгина, М. П. Вычислительные алгоритмы для анализа упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками / М. П. Варыгина, М. А. Похабова, О. В. Садовская, В. М. Садовский // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. — 2011. —Т. 12. —С. 435–442.
20. Василевский, Ю.В. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области / Ю.В. Василевский, М.А. Ольшанский. МГУ им. М.В. Ломоносова. – 2007. – 100 с.
21. Василенко, А.Т. Определение напряженного состояния многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке / А.Т. Василенко, Г.П. Голуб, Я.М. Григоренко // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 2. – С. 40–47.
22. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. Физматгиз. – 1960. – 490 с.
23. Годунов, С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи матем. – 1961. – Т. 16, № 3. – С. 171–174.

24. Голушко, С.К. Сравнительный анализ различных теорий в задачах изгиба многослойных ортотропных прямоугольных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Материалы XVI Всерос. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. (Омск, 2–4 июня 2015). — 2015. — С. 44–47.
25. Голушко, С.К. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, № 6. — С. 31–43.
26. Голушко, С.К. О двух численных методах решения многоточечных нелинейных краевых задач / С.К. Голушко, В.В. Горшков, А.В. Юрченко // Вычисл. технологии. — 2002. — Т. 7, № 2. — С. 24–33.
27. Голушко, С.К. О численном решении краевых задач для жёстких систем дифференциальных уравнений / С.К. Голушко, Е.В. Морозова, А.В. Юрченко // Вестник КазНУ. Математика, механика, информатика. — 2005. — № 2. — С. 12–26.
28. Голушко, С.К. Прямые и обратные задачи механики композитных пластин и оболочек вращения / С.К. Голушко, Ю.В. Немировский. Физматлит. — 2008. — 432 с.
29. Голушко, С.К. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к задачам механики анизотропных слоистых пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. — 2014. — Т. 19, № 5. — С. 24–36.
30. Голушко, С.К. Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к решению задач механики анизотропных слоистых пластин / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Труды X Межд. Азиатской

- школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем» (Кыргызская Республика, оз. Иссык-Куль, с. Булан-Соготту, 25 июля – 5 августа, 2014). — 2014. — С. 225–233.
31. Голушко, С.К. Численное решение краевых задач механики слоистых конструкций / С.К. Голушко, С.В. Идимешев // Сборник докладов международной конференции «Успехи механики сплошных сред», приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина (Владивосток, 28 сентября - 4 октября 2014). — 2014. — С. 136-139.
32. Горбунов-Посадов, М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова. Стройиздат. — 1973. — 628 с.
33. Горынин, Г.Л. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления / Г.Л. Горынин, Ю.В. Немировский. Югорский гос. ун-т, Ин-т теорет. и прикладной мех. Сиб. отд-ния Рос. Акад. Наук. — 2004. — 407 с.
34. Григолюк, Э.И. К общей теории трехслойных оболочек большого прогиба / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 150, № 5. — С. 1012-1014.
35. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. Машиностроение. — 1988. — 288 с.
36. деБор, К. Практическое руководство по сплайнам / К. деБор. Радио и связь. — 1985. — 304 с.
37. Демешкин, А.Г. Моделирование отрыва упругой балки, частично приклеенной к жесткой плите / А.Г. Демешкин, В.Д. Кургузов // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций. Сборник материалов III Всероссийской конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова. — 2014. — С. 40.

38. Деммель, Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель. Мир. – 2001. – 435 с.
39. Жук, В.В. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации / В.В. Жук, Г.И. Натансон. Изд-во Ленингр. ун-та. – 1983. – 188 с.
40. Зенкевич, О.С. Метод конечных элементов в технике / О.С. Зенкевич. Мир. – 1975. – 543 с.
41. Идимешев, С.В. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин на упругом основании / С.В. Идимешев // Известия АГУ. – 2014. № 1/1 (81)— С. 53–56.
42. Исаев, В.И. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье — Стокса / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 2010. – Т. 50, № 10. – С. 1758–1770.
43. Исаев, В.И. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Пуассона / В.И. Исаев, В.П. Шапеев, С.В. Идимешев // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 1. – С. 85-94.
44. Исаев, В.И. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье-Стокса / В.И. Исаев, В.П. Шапеев, С.А. Еремин // Вычислительные технологии. – 2007. – Т. 12, № 3. – С. 53–70.
45. Исаев, В.И. Консервативный вариант метода коллокаций и наименьших квадратов / В.И. Исаев // Труды 40-й всеросс. молод. конф. «Проблемы теор. и прикл. математики». – 2009. – С. 141–144.

46. Исаев, В.И. О методе коллокаций и наименьших квадратов для уравнения Пуассона / В.И. Исаев, С.В. Идимешев, В.П. Шапеев [и др.] // Сб. статей конф. «Актуальные проблемы математики, механики, информатики». (Екатеринбург, 2–6 февраля 2009). — 2009. — С. 53-57.
47. Исаев, В.И. Применение нерегулярных сеток в методе коллокаций и наименьших квадратов / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // Труды 39-й все-росс. молод. конф. «Проблемы теор. и прикл. математики». — 2008. — С. 61–66.
48. Исаев, В.И. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // Труды ИММ УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 1. — С. 41–60.
49. Исаев, В.И. Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне / В.И. Исаев, В.П. Шапеев, А.Н. Черепанов // Теплофизика и аэромеханика. — 2010. — Т. 13, № 3. — С. 451.
50. Карзов, Г.П. Физико-механическое моделирование процессов разрушения / Г.П. Карзов, Б.З. Марголин, В.А. Швецова. Политехника. — 1993. — 391 с.
51. Клепиков, С.Н. Расчет конструкций на упругом основании / С.Н. Клепиков. Будивэльник. — 1967. — 391 с.
52. Коренева, Е.Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения / Е.Б. Коренева. Изд-во: АСВ. — 2009. — 240 с.
53. Кузоватова, О. И. Моделирование локализации деформации в разнопрочной среде / О. И. Кузоватова, В. М. Садовский // Журнал СФУ. — 2008. — Т. 1, № 3. — С. 272–283.

54. Кургузов, В.Д. Численное моделирование напряженного состояния балки-стенки / В.Д. Кургузов // Известия высших учебных заведений. Строительство. — 2014. — № 7 (667). — С. 94–102.
55. Кургузов, В.Д. Экспериментальное исследование разносопротивляемости оргстекла / В.Д. Кургузов, А.Г. Демешкин, Е.В. Карпов // Фундаментальные и прикладные аспекты новых высокоэффективных материалов II Всероссийская научная Интернет - конференция с международным участием: материалы конференции. ИП Синяев Д. Н. — 2014. — С. 50–57.
56. Лехницкий, С.Г. Анизотропные пластинки. 2-е изд. / С.Г. Лехницкий. Гостехиздат. — 1957. — 463 с.
57. Кучунова, Е. В. Вычислительный алгоритм для расчета волновых полей в блочных средах на многопроцессорных вычислительных системах / Е. В. Кучунова, В. М. Садовский // Журнал СФУ. — 2008. —Т. 1, № 2. —С. 210–220.
58. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела (Изд. 2-е, перераб. и доп.) / С.Г. Лехницкий. Наука. — 1977. — 416 с.
59. Махненко, В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций / В.И. Махненко. Наук. думка. — 1976. — 320 с.
60. Мысовских, И.П. Лекции по методам вычислений / И.П. Мысовских. Издательство Санкт-Петербургского университета. — 1998. — 784 с.
61. Немировский, Ю.В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин / Ю.В. Немировский // Механика полимеров. — 1972. — № 5. — С. 861–873.

62. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. Судпромгиз. – 1951. – 431 с.
63. Одинокова, О.А. Термомеханические методы в технологии производства и проектировании изделий из пластмасс / О.А. Одинокова, А.В. Одинок. РАН. – 2008. – 89 с.
64. Пастернак, П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П.Л. Пастернак. Госстройиздат. – 1954. – 56 с.
65. Рикардс, Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р.Б. Рикардс. Зинатне. – 1988. – 284 с.
66. Садовский, В. М. О численной реализации термомеханической модели динамики упругопластической среды / В. М. Садовский, К. С. Свободина // Известия Алтайского государственного университета. — 2014. —Т. 1, № 1(81). —С. 179–181.
67. Садовский, В. М. Анализ резонансного возбуждения слоистых и блочных сред на основе дискретных моделей / В. М. Садовский, Ченцов Е. П. // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. — 2015. —Т. 16, № 2. —С. 318–327.
68. Сёмин, Л.Г. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье-Стокса / Л.Г. Сёмин, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3, № 3. – С. 72–84.
69. Семин, Л.Г. Метод коллокаций-наименьших квадратов для уравнений Стокса / Л.Г. Семин, А.Г. Слепцов, В.П. Шапеев // Вычислительные технологии. – 1996. – Т. 1, № 2. – С. 90–98.

70. Семисалов, Б.В. Нелокальный алгоритм решения уравнения Пуассона и его приложения / Б.В. Семисалов // Выч. мат. и мат. физ. – 2014. – Т. 54, № 7. – С. 1110–1135.
71. Слепцов, А. Г. Сходимость метода локальной коллокации для обыкновенных дифференциальных уравнений / А.Г. Слепцов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1975. – Т. 15, № 6. – С. 1447–1456.
72. Слепцов, А.Г. Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач / А.Г. Слепцов, Ю.И. Шокин // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1997. – Т. 37, № 5. – С. 572–586.
73. Слепцов, А.Г. Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач / А.Г. Слепцов // Моделирование в механике. – 1991. – Т. 5(22), № 2. – С. 101–126.
74. Слепцов, А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций / А.Г. Слепцов // Моделирование в механике. – 1989. – Т. 3(20), № 3. – С. 132–147.
75. Слепцов, А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций II / А.Г. Слепцов // Моделирование в механике. – 1989. – Т. 3(20), № 5. – С. 118–125.
76. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. Мир. – 1980. – 512 с.
77. Темам, Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. Мир. – 1981. – 408 с.
78. Тимошенко, С.П. Курс сопротивления материалов / С.П. Тимошенко. Гостехиздат. – 1931. – 571 с.
79. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С.А. Войновский-Кригер. Физматгиз. – 1963. – 636 с.

80. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер. Мир. – 1988. – 352 с.
81. Шапеев, В.П. Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса / В.П. Шапеев, Е.В. Ворожцов, В.И. Исаяев [и др.] // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 124, № 1. – С. 306–322.
82. Шарый, С.П. Курс вычислительных методов / С.П. Шарый. Институт вычислительных технологий СО РАН. – 2013. – 497 с.
83. Albuquerque, E.L. A boundary element analysis of symmetric laminated composite shallow shells. / E.L. Albuquerque, M.H. Aliabadi // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2010. – Vol. 199, Is. 41–44. – P. 2663–2668.
84. Ascher, U. A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems / U. Ascher, J. Christiansen, R.D. Russel // Math. Comp. – 1979. – Vol. 33. – P. 659–679.
85. Ascher, U. Collocation software for boundary value ODE's / U. Ascher, J. Christiansen, R.D. Russell // ACM. Trans. Math. Software. – 1981. – Vol. 7, Is. 2. – P. 209–222.
86. Boyce, M.C. An experimental and analytical investigation of the large strain compressive and tensile response of glassy polymers / M.C. Boyce, E.M. Arruda. Polymer Engineering & Science. – 2004. – Vol. 30, Is. 20. – P. 1288–1298.
87. Boyce, W.E. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (9th ed.) / W.E. Boyce, R.C. DiPrima. Wiley. – 2008. – P. 816.
88. Boyd, J.P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition. / J.P. Boyd Dover Publications. – 2001. – P. 668.

89. Bramble, J.H. On a finite difference analogue of an elliptic boundary problem which is neither diagonally dominant for nonnegative type. / J.H. Bramble, B.E. Hubbard // J. Math. And Phys. – 1964. – Vol. 43. – P. 117–132.
90. Canuto, C. Spectral Methods in Fluid Dynamics / C. Canuto, M Hussaini, A. Quarteroni [et al.]. Springer Verlag. – 1988. – P. 567.
91. Canuto, C. Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains. / C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni [et al.]. Springer-Verlag . – 2006. – P. 581.
92. Cheney, W. A Course in Approximation Theory, / W. Cheney, W. Light. Brooks/Cole. – 2000. – P. 360.
93. Cherepanov, A.N. Simulation of Heat Transfer Processes in Laser Welding of Dissimilar Metals with an Insert. / A.N. Cherepanov, V.P. Shapeev, V.I. Isaev // High Temperature. – 2015. – Vol. 53, Is. 6. – P. 841–846.
94. Ciarlet, P.G. Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems – I. one dimensional problem / P.G. Ciarlet, M.H. Schultz, R.S. Varga // Numer. Math. – 1967. – Vol. 9. – P. 394–430.
95. Collatz, L. The numerical treatment of differential equations, 3rd ed. / L. Collatz. Springer. – 1960. – P. 568.
96. deBoor, C. Collocation at Gaussian points / C. deBoor, B. Swartz // SIAM J. Numer. Anal. – 1973. – Vol. 10, Is. 4. – P. 582–606.
97. Dey, P. A new element for the analysis of composite plates / P. Dey, A.H. Sheikh // Finite Elements in Analysis and Design. – 2014. – Vol. 82. – P. 62–71.

98. Dirgantara, T. Elastoplastic boundary element method for shear deformable shells / T. Dirgantara, M.H. Aliabadi // *Engineering Structures*. – 2012. – Vol 45. – P. 62–67.
99. Fornberg, B. *A Practical Guide to Pseudospectral Methods* / B. Fornberg. Cambridge University Press . – 1996. – P. 231.
100. Funaro, D. *Spectral Elements for Transport-Dominated Equations* / D. Funaro. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering* 1. Springer. – 1997. – P. 215.
101. Golushko, S.K. Application of collocations and least residuals method to problems of mechanics of isotropic and anisotropic plates / S.K. Golushko, S.V. Idimeshev // *Zbornic radova konferencije MIT 2013 (Vmjackoj Banji, Republika Srbija, Septembra 5-8, 2013; Budvi, Crna Gora, Septembra 9-14, 2013)*. – 2014. – P. 236–242.
102. Gottlieb, D. *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications* / D. Gottlieb, S. Orzag. SIAM. – 1977. – P. 172.
103. Jones, R.M. *Mechanics of Composite Materials, Second Edition* / R.M. Jones. Taylor and Francis. – 1999. – P. 490.
104. Lagace, P.A. Nonlinear stress-strain behavior of graphite/epoxy laminates / P.A. Lagace // *AIAA Journal*. – 1985. – Vol. 23, Is. 10. – P. 1583–1589.
105. Lees, M. Discrete methods for nonlinear two-point boundary value problems, in *numerical solution of partial differential equations*, ed. by J.H. Bramble. / M. Lees. Academic Press . – 1966. –
106. Mindlin, R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates / R.D. Mindlin // *Journal of Applied Mechanics*. – 1951. – Vol. 18. – P. 31–38.

107. Pagano, N.J. Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites / N.J. Pagano, H.J. Hatfield // AIAA Journal. – 1972. – Vol. 10, Is. 7. – P. 931–933.
108. Patera, A.T. A spectral element method for fluid dynamics - Laminar flow in a channel expansion / A.T. Patera // Journal of Computational Physics. – 1984. – № 54. – P. 468–488.
109. Plyasunova, A.V. Collocation - grid method for solving nonlinear parabolic equations / A.V. Plyasunova, A.G. Sleptsov // Rus. J. of Theoretical and Applied Mechanics. – 1991. – Vol. 1, Is. 1. – P. 15–26.
110. Reddy, J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells / J.N. Reddy. CRC Press. – 2003. – P. 858.
111. Reissner, E. Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates / E. Reissner, Y. Stavsky // Journal of Applied Mechanics. – 1961. – Vol. 28. – P. 402–408.
112. Russell, R.D. A collocation method for boundary value problems / R.D. Russell, L.F. Shampine // Numer. Math. – 1972. – Vol. 19. – P. 1–28.
113. Schild, K.H. Gaussian collocation via defect correction / K.H. Schild // Numerische Mathematik. – 1990. – Vol. 58. – P. 369–386.
114. Schwab, Ch. p- and hp- Finite Element Methods: Theory and Applications to Solid and Fluid Mechanics / Ch. Schwab. Oxford University Press. – 1999. – P. 374.
115. Semin, L.G. Collocation and least squares method for 2D heat conduction equation. / L.G. Semin // J. of Computational Technologies. – 2006. – Vol. 11, Is. 1. – P. 18–25.
116. Sendekyj, G.P. Fracture behavior of thornel 300/5208 graphite/epoxy laminate. Part I: Unnotched laminates / G.P. Sendekyj, M.D. Richardson,

- J.E. Pappas // Composite Reliability. American Society for Testing and Materials. – 1973. – STP580. – P. 528–546.
117. Shampine, L.F. Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations / L.F. Shampine// SIAM J. Numer. Anal. – 1968.Vol. 5, Is. 2. – P. 219–242.
118. Shapeev, V.P. The collocations and least squares method:application to numerical solution of the Navier-Stokes equations / V.P. Shapeev, V.I. Isaev, S.V. Idimeshev // CD-ROM Proc. of the 6th ECCOMAS (Austria, Vienna, September 10–14, 2012). – 2012.
119. Sleptsov, A.G. Grid - projection solution of elliptic problem for a irregular grid / A.G. Sleptsov // Russ. J. Numer. Analys. and Math. Modelling. – 1993. – Vol. 8, Is. 6. – P. 501–525.
120. Tsai, S.W. Structural behaviour of composite materials / S.W. Tsai. NASA CR-71. – 1964. –
121. Vasiliev, V.V. Advanced mechanics of composite materials / V.V. Vasiliev, E.V. Morozov. Elsevier. – 2007. – P. 491.
122. Zhang, Y.X. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates / Y.X. Zhang, C.H. Yang // Composite Structure. – 2009. – Vol. 88. – P. 147–157.

Приложение

Фрагмент программы для расчета трехточечного изгиба композитной балки с учетом разносопротивляемости растяжению и сжатию для квадратичной аппроксимации физических соотношений.

Алгоритм описан с использованием языка Wolfram Research Mathematica.

(*Размеры образцов*)

(*a - длина*)

(*b - ширина*)

(*h = толщина*)

(*Коэффициенты квадратичной аппроксимации физических соотношений*)

(*AComp, BComp - для сжатия*)

(*ATen, BTen - для растяжения*)

(*LocF - Сила нагрузки*)

FPoint=a/2; (*Положение нагрузки*)

(*Распределение изгибающего момента по длине балки*)

M1=LocF*(1-FPoint/a)*x;

M2=LocF*FPoint*(1-x/a);

(*Функция линеаризующая нелинейные уравнения методом Ньютона*)

Linearize[f_,u_,v_,u0_,v0_] :=(

(f[u,v]/.{u->u0,v->v0})+(D[f[u,v],u]/.{u->u0,v->v0})*

(u-u0)+(D[f[u,v],v]/.{u->u0,v->v0})*(v-v0))

Eps=Eps0+z*каппа; (*Выражения для деформаций*)

SigTen=ATen*Eps+BTen*Eps*Eps; (*Выражения для напряжений растяжения*)

SigComp=AComp*Eps-BComp*Eps*Eps; (*Выражения для напряжений сжатия*)

ZNeut=-Eps0/кappa; (*Определение нейтральной поверхности*)

NForce=b*Nxx; (*Определение продольной силы*)

Nxx=Integrate[SigComp,{z,-h/2,ZNeut}]+
+Integrate[SigTen,{z,ZNeut,h/2}];

MForce=b*Mxx; (*Определение момента силы*)

Mxx=Integrate[SigComp*z,{z,-h/2,ZNeut}]+
+Integrate[SigTen*z,{z,ZNeut,h/2}];

(*Разрешающие уравнения*)

Eq11[Eps0_,kappa_]=Simplify[NForce(**kappa)];

Eq12[Eps0_,kappa_]=Simplify[MForce(*(MForce-M1)*kappa*kappa)];

Eq21[Eps0_,kappa_]=Simplify[NForce(**kappa)];

Eq22[Eps0_,kappa_]=Simplify[MForce(*(MForce-M2)*kappa*kappa)];

(*Линеаризация и решение разрешающих уравнений*)

Eq11 = Linearize[Eq11,Eps0,kappa,Eps00,kappa0];

Eq12 = Linearize[Eq12,Eps0,kappa,Eps00,kappa0];

Eq21 = Linearize[Eq21,Eps0,kappa,Eps00,kappa0];

Eq22 = Linearize[Eq22,Eps0,kappa,Eps00,kappa0];

Sol=Solve[{Eq11==0,Eq12==M1},{Eps0,kappa}];

kappa1=Simplify[kappa/.Sol[[1]]];

Eps01=Simplify[Eps0/.Sol[[1]]];

Sol=Solve[{Eq21==0,Eq22==M2},{Eps0,kappa}];

kappa2=Simplify[kappa/.Sol[[1]]];

Eps02=Simplify[Eps0/.Sol[[1]]];

(*В качестве начального приближения метода Ньютона
берем решения по линейной теории*)

DDw10=-Part[InitialVal,1];

DDw20=-Part[InitialVal,2];

Du10=Part[InitialVal,3];

```
Du20=Part[InitialVal,4];
```

```
(*10 итераций метода Ньютона*)
```

```
ch1=1;
```

```
While[ch1<=10,
```

```
  StartT=SessionTime[];
```

```
  Clear[C1,C2,M20];
```

```
  Pod1={Eps00->Du10, kappa0->-DDw10, x->nX*x};
```

```
  Pod2={Eps00->Du20, kappa0->-DDw20, x->nX*x};
```

```
(*Возникающие краевые задачи для ОДУ решаются  
модифицированным (hp-КНН) методом*)
```

```
  DEq11=kappa1/.Pod1;
```

```
  DEq12=Eps01/.Pod1;
```

```
  DEq21=kappa2/.Pod2;
```

```
  DEq22=Eps02/.Pod2;
```

```
  CollocEqRightPart[1]=-DEq11;
```

```
  CollocEqRightPart[2]=-DEq21;
```

```
  NotebookEvaluate[ToFileName[NotebookDirectory[], "MCLR_1D_w.nb"]];
```

```
  TecW1=Uh[1, x/h1-1];
```

```
  TecW2=Uh[2, (x-2*h1)/h2-1];
```

```
  CollocEqRightPart[1]=DEq12;
```

```
  CollocEqRightPart[2]=DEq22;
```

```
  NotebookEvaluate[ToFileName[NotebookDirectory[], "MCLR_1D_u.nb"]];
```

```
  TecU1=Uh[1, x/h1-1];
```

```
  TecU2=Uh[2, (x-2*h1)/h2-1];
```

```
EndTime=SessionTime[]-StartT;
```

```
DDw10=D[TecW1, {x, 2}];
```

```
Du10=D[TecU1, {x, 1}];
```

```
DDw20=D[TecW2, {x, 2}];
```

```
Du20=D[TecU2, {x, 1}];
```

```
ch1++;
];

(*Решение по линейной теории*)
LinearCaseSolution[] :=
Module[{M1, M2, M3, M20, Eps, z, ZNeut, kappa, SigTen, SigComp,
  NForce, Nxx, temp, sol, MForce, Mxx, kappa1, kappa2, kappa3, w1,
  w2, w3, eq1, eq2, Eps01, Eps02},
M1 = LocF*(1 - FPoint/a)*x;
M2 = LocF*FPoint*(1 - x/a);

Eps = (z - ZNeut)*kappa;
SigTen = ATen*Eps;
SigComp = AComp*Eps;

NForce = b*Nxx;
Nxx = Integrate[SigComp, {z, -h/2, ZNeut}] +
  Integrate[SigTen, {z, ZNeut, h/2}];
temp = Coefficient[NForce, kappa];
sol = Solve[temp == 0 && ZNeut < h/2 && ZNeut > -h/2, ZNeut];
ZNeut = ZNeut /. sol[[1]];

MForce = b*Mxx;
Mxx = Integrate[SigComp*z, {z, -h/2, ZNeut}] +
  Integrate[SigTen*z, {z, ZNeut, h/2}];
sol = Solve[MForce == M1, kappa];
kappa1 = kappa /. sol[[1]];
sol = Solve[MForce == M2, kappa];
kappa2 = kappa /. sol[[1]];

kappa1 = Simplify[kappa1]; kappa2 = Simplify[kappa2];
Eps01 = Simplify[-ZNeut*kappa1]; Eps02 = Simplify[-ZNeut*kappa2];
{kappa1, kappa2, Eps01, Eps02}
]
```