На правах рукописи

Иванов Константин Станиславович

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ СХЕМ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Захаров Юрий Николаевич**
Официальные оппоненты:	**Перминов Валерий Афанасьевич**, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, профессор кафедры экологии и безопасности жизнедеятельности
	Паничкин Алексей Васильевич, кандидат физико-математических наук, Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Омск, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск

Защита состоится «» 2015 г. в час. 00 мин. на заседании диссертационного совета ДМ 003.046.01 на базе государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук по адресу 630090, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук http://www.ict.nsc.ru/ru/Structure/disCouncil/ivanov2015

Автореферат разослан «» 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент А.С. Лебедев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последние десятилетия в связи с бурным развитием информационных технологий все больший интерес исследователей вызывают методы численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Появление супер-эвм и параллельных вычислений позволило получить количественные результаты при решении задач, имеющих важное практическое значение. Создано большое количество программных продуктов (CFD-комплексы), начиная от небольших пакетов прикладных программ, заканчивая коммерческими решениями промышленного назначения, частично или полностью автоматизирующих этапы вычислительного эксперимента. Несмотря на достигнутые успехи, исследования в этой области в настоящее время все еще требуют значительных усилий, что объясняется существующими проблемами.

Выбор дифференциальной формулировки и численного алгоритма. Система уравнений Навье-Стокса может быть записана как в естественной формулировке, так и в формулировках, использующих вектор вихря. Выбор одной из них при решении конкретной задачи является неочевидным, поскольку не существует какой-либо надежной группы критериев для его определения. Современные CFD-комплексы, в большинстве своем, применяют для решения поставленных задач одну из модификаций метода SIMPLE, использующих физические переменные «скорость - давление». Таким образом, нет возможности выбора альтернативных формулировок дифференциальной системы и соответствующих численных алгоритмов, которые в зависимости от типа задачи могут обладать явными преимуществами.

Постановка краевых условий. При численном решении задач гидродинамики постановка краевых условий является одним из ключевых моментов. Существует множество подходов задания граничных значений неизвестных функций в зависимости от типа границы, используемой формулировки системы уравнений Навье-Стокса, применяемого численного алгоритма. Одной из наиболее трудных проблем является постановка численных краевых условий в задачах с удаленными границами (условия на бесконечности), где необходим их перенос на границу расчетной области. Существующие CFD-комплексы предоставляют не достаточно широкие возможности постановки краевых условий, ограничиваясь, в основном, стандартными типами границ (твердая стенка, участки входа и выхода жидкости). В частности, крайне редко встречаются возможности постановки краевых условий на удаленных границах.

Решение систем алгебраических уравнений. При любом выборе способа дискретизации системы уравнений Навье-Стокса неизбежно возникает проблема построения эффективных методов решения систем алгебраических уравнений (САУ) большой размерности, к которым сводится дискретная модель. Эта проблема, очевидно, становится особенно актуальной в нестационарном случае, когда требуется многократное решение САУ на каждом дискретном шаге по времени. Современные CFD-комплексы, как правило, используют линеаризацию исходных уравнений, а для решения получаемых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) применяют градиентные методы (например, методы подпространства Крылова). Несмотря на то, что данные методы хорошо зарекомендовали себя при решении СЛАУ, сходимость их в общем случае не доказана, и они обладают известными проблемами в случаях существенной несимметричности матрицы СЛАУ, обусловленной, например, переменными коэффициентами в дифференциальных уравнениях или использовании сложных численных краевых условий. Существующие CFD-комплексы практически не предоставляют средств решения нелинейных систем алгебраических уравнений, таким образом, использование полностью неявных численных алгоритмов в них крайне затруднительно.

Обнаружение нестационарных решений. Во многих нестационарных задачах о течении вязкой несжимаемой жидкости со стационарными краевыми условиями существуют нестационарные (часто периодические) решения. Такие решения обычно возникают при больших значениях числа Рейнольдса и их обнаружение требует продолжительного счета по физическому времени. Режим течения в этих случаях приближается к турбулентному и получение нужной точности при приемлемых затратах вычислительных ресурсов сопряжено со значительными трудностями, поскольку для этих целей в CFD-комплексы должны быть заложены быстросходящиеся устойчивые численные алгоритмы.

Интеграция с численными моделями смежных физических процессов. На практике часто возникает необходимость в численном моделировании процессов гидродинамики, сопряженных с другими физическими явлениями. Общая численная модель получается, как правило, сложной и многокомпонентной, с прямой и обратной связью между различными ее элементами. Современные CFD-комплексы ограничиваются, в основном, заложенными в них возможностями смежного численного моделирования (сопряженный теплообмен, многокомпонентное течение и т.д.). Их адаптация к специфике конкретной практической задачи, требующей интеграции модели течения жидкости с моделями смежных явлений, требует значительных усилий и часто крайне затруднена.

Таким образом, развитие методов вычислительной гидродинамики и создание на их основе программных комплексов для численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости при наличии сопутствующих физических процессов в настоящее время остаются весьма актуальными проблемами.

Цель работы состоит в создании комплекса программ для численного моделирования практических задач динамики вязкой несжимаемой жидкости при наличии сопряженных физических процессов на основе применения градиентных итерационных схем неполной аппроксимации к решению разностных задач, аппроксимирующих системы нестационарных уравнений Навье-Стокса.

Для достижения поставленной цели требуется последовательно решить следующие **задачи:**

1. Выполнить параллельную реализацию градиентных итерационных схем неполной аппроксимации с многокомпонентной и полной оптимизацией итерационных параметров для решения систем линейных и билинейных алгебраических уравнений, возникающих в результате дискретизации систем нестационарных уравнений Навье-Стокса.

2. Разработать и реализовать численные алгоритмы решения многомерных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса на основе градиентных итерационных схем неполной аппроксимации решения САУ, использующие различные дифференциальные формулировки, полностью неявные разностные схемы и численные интегральные соотношения для переноса краевых условий с удаленных границ.

3. Разработать программный комплекс на основе построенных численных алгоритмов для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при наличии сопутствующих физических процессов.

4. Провести тестирование разработанного программного комплекса, получив с помощью него результаты расчетов модельных двумерных и трехмерных нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости, записанных на дифференциальном уровне в различных формулировках, при различных геометриях области решения, краевых условиях и числах Рейнольдса, и сравнив их с результатами лабораторных экспериментов и результатами расчетов других исследователей.

5. Апробировать разработанный программный комплекс на решении двумерных задач с краевыми условиями на удаленных границах и задач, имеющих нестационарные решения при стационарных краевых условиях.

6. Провести сравнение численных алгоритмов, основанных на различных дифференциальных формулировках, и сформировать набор рекомендаций по условиям их применимости и степени эффективности при решении внутренних и внешних задач о течении вязкой несжимаемой жидкости.

7. Применить разработанный программный комплекс для численного моделирования практических задач динамики вязкой несжимаемой жидкости при наличии смежных физических процессов, проведя серии вычислительных экспериментов и сравнив результаты расчетов с данными, полученными с помощью лабораторных исследований.

Методы исследования. В исследовании применялись методы механики сплошных сред, методы теории разностных схем, методы теории итерационных схем решения систем алгебраических уравнений, методы объектно-ориентированного и компонентного программирования.

Основные результаты, выносимые на защиту. В работе присутствуют результаты, соответствующие трем областям исследования паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам.

Область исследования 3:

1. Интегральные соотношения, используемые для переноса краевых условий с удаленной границы на границу расчетной области при численном решении двумерных задач.

2. Численные алгоритмы решения многомерных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса, основанные на применении градиентных итерационных схем неполной аппроксимации решения САУ.

Область исследования 4:

3. Параллельная реализация градиентных итерационных схем неполной аппроксимации с многокомпонентной и полной оптимизацией итерационных параметров для решения систем линейных и билинейных алгебраических уравнений.

4. Объектно-ориентированная модель векторных математических пространств и построенная на ее основе библиотека программных интерфейсов и компонент, предназначенных для эффективного решения разностных операторных уравнений.

5. Конфигурируемый и адаптируемый к интеграции с численными моделями сопутствующих физических процессов программный комплекс, предназначенный для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Область исследования 5:

6. Набор рекомендаций по использованию различных дифференциальных формулировок исходных уравнений и численных алгоритмов для решения многомерных нестационарных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости.

7. Условия возникновения нестационарных периодических решений в двумерных нестационарных задачах о течении вязкой несжимаемой жидкости.
8. Результаты расчетов практических задач о размыве несвязного грунта вблизи опорных оснований нефтедобывающих платформ гравитационного типа в прибрежных морских зонах с учетом воздействия волн и внутреннего течения.

Научная новизна выносимых на защиту результатов:
1. Построены новые интегральные численные краевые условия в двумерном случае, позволяющие получать решения в нестационарных задачах с условиями на удаленных границах.
2. Впервые градиентные итерационные схемы неполной аппроксимации применены для построения численных алгоритмов решения многомерных нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости, позволяющих использовать полностью неявные дискретизации исходных дифференциальных систем и сложные краевые условия.
3. Впервые выполнена параллельная реализация итерационных схем неполной аппроксимации решения САУ, позволившая существенно сократить объем вычислительных затрат при решении нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.
4. Спроектирована оригинальная объектно-ориентированная модель векторных математических пространств и на ее основе разработана уникальная библиотека, обеспечивающая универсальный объектно-ориентированный подход к решению разностных операторных уравнений.
5. Создан уникальный программный комплекс, позволяющий производить численное моделирование различных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при наличии смежных физических процессов.
6. Впервые проведены комплексные численные исследования, связанные с расчетом трех типов многомерных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при умеренных числах Рейнольдса с использованием различных дифференциальных формулировок исходных систем уравнений Навье-Стокса, на основе которых сформирован набор рекомендаций по условиям применимости и степени эффективности используемых численных алгоритмов.
7. Впервые проведены комплексные численные исследования, связанные с расчетом трех типов двумерных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости со стационарными краевыми условиями при больших числах Рейнольдса, на основе которых определены условия возникновения в этих задачах нестационарных периодических решений.

8. Впервые получены результаты численного моделирования размыва слабонесущего грунта вблизи опорных оснований нефтедобывающих платформ типа «Приразломная» и «Баржа» в прибрежных морских зонах с учетом воздействия волн и внутреннего течения.

Обоснованность и достоверность основных результатов обеспечивается: сходящимися итерационными методами решения систем алгебраических уравнений; устойчивыми численными решениями различных нестационарных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости, сходящимися на последовательности сеток; качественным и количественным совпадениями результатов методических расчетов с известными точными решениями модельных задач и результатами, полученными другими авторами.

Теоретическая значимость исследований обуславливается: новизной результатов численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости; выявлением интервалов значений параметров этих задач, при которых возникают различные режимы течений при одних и тех же граничных условиях; определением границ применимости к этим задачам различных дифференциальных формулировок исходных уравнений и численных алгоритмов решения.

Практическая значимость исследований определяется: возможностью использования реализованных численных алгоритмов для решения широкого класса нестационарных задач гидродинамики, возникающих в современных производственных, медицинских и социальных сферах; применением созданного комплекса программ при выполнении хозяйственного договора № 10/12с-13 «Разработка методики расчета процесса размыва грунта у основания буровой платформы при действии волн и течения для различных геологических условий, с учётом рельефа дна и конструкции основания гравитационной платформы» и государственного задания №1.630.2014/К «Моделирование течения с переменной плотностью и вязкостью при решении прикладных задач».

Представление работы. Результаты работы были представлены на: VI всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Кемерово, 2005; III международной летней научной школы Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование, Кемерово, 2006; всероссийской конференции по вычислительной математики, Новосибирск, 2007; VIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 2007; Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании», Алмааты, 2008; International Conference «Mathematical and Informational Technoklogies», -Kopaonik, Serbia, Budva, Montenegro, 2009, 2011; Международной конференция «Современные проблемы прикладной математики: теория, эксперимент и практика», посвящённой 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко, Новосибирск, 2011; Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева, Новосибирск, 2012; Международной конференции «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование», Кемерово, 2013; International Conference «Mathematical and Informational Technoklogies», - Serbia, Budva, Montenegro, 2013; XII Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (ГА -2014), С.-Петербург, 2014.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах: кафедры вычислительной математики КемГУ «Математические модели, методы решения», Кемерово (под рук. проф. Ю.Н. Захарова); кафедры НИТ КемГУ «Информационные технологии и математическое моделирование», Кемерово (под рук. проф. К.Е. Афанасьева); ИВТ СО РАН «Информационно-вычислительные технологии», Новосибирск (под рук. акад. Ю.И. Шокина и проф. В.М. Ковени).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 41 работа, в том числе 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ, 3 статьи в изданиях, рекомендуемых ВАК, 1 статья в рецензируемых журналах, 7 статей в трудах международных и всероссийских конференций, 28 работ в тезисах международных, всероссийских и региональных конференций.

Личный вклад автора. Во всех публикациях автору принадлежит участие в формулировке задач, постановке краевых условий, реализации методов решения и проведении расчетов, интерпретации полученных результатов. Также автору принадлежит создание программного комплекса для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка цитируемой литературы из 147 наименований, 3 таблиц и 59 рисунков. Общий объем диссертации составляет 134 страницы.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Ю.Н. Захарову.

Основное содержание работы

Во **введении** формулируются цели диссертационной работы, обосновывается актуальность решаемых задач, приводится обзор научной литературы по изучаемой тематике, излагается краткое содержание работы.

Первая глава состоит из трех параграфов и посвящена подготовке базового математического аппарата и разработке на его основе программного комплекса, используемого для решения изучаемых задач.

В параграфе 1.1 рассматривается метод неполной аппроксимации минимальных невязок решения линейных и билинейных систем алгебраических уравнений (САУ).

Рассмотрим САУ вида

$$A(u,u) = f$$

где $u, f \in R^m$, A – линейный или билинейный оператор: $R^m * R^m \to R^m$. Для решения системы будем использовать двухшаговый итерационный процесс

$$u^{n+1/2} = u^n - \tau_{n+1}[Au^n - f],$$
$$u_0^{n+1} = u^{n+1/2},$$
$$u_k^{n+1} = u_{k-1}^{n+1} - \sum_{i \in S_k} \alpha_{n+1}^i z_i^n, \; k = 1,2,\ldots,l$$
$$u^{n+1} = u_l^{n+1},$$

где u^0 - произвольный вектор из R^m, τ_{n+1}, α_{n+1}^i - итерационные параметры, S_k - непересекающиеся подмножества (группы) множества всех индексов, такие что $\bigcup_k S_k = S$, z_i^n - векторы из R^m с одной ненулевой i-ой компонентой. Оптимальные итерационные параметры τ_{n+1} и α_{n+1}^i определяются из условия минимума норм соответствующих векторов невязок. При таком выборе параметров итерационный процесс обладает свойством монотонного убывания нормы вектора невязки. Если A является линейным неособенным оператором, то итерационный процесс сходится при любом начальном приближении. В этом случае для определения оптимальных значений α_{n+1}^i при каждом $k = 1,2,\ldots,l$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$A_z(\alpha) = r_z,$$

где $A_z = [(Az_{k_i}^n, Az_{k_j}^n)]$, $\alpha = [\alpha_{n+1}^{k_j}]$, $r_z = [(Az_{k_i}^n, r_k^{n+1})]$, $k_i \in S_k$, $i = 1,2,\ldots,p_k$ и $\sum_{k=1}^l p_k = m$. Очевидно, что в силу блочно-ленточной структуры матрицы исходного оператора всегда возможно так выбрать группы S_k, что для каждого k матрица системы будет иметь диагональный вид и нахождение величин α_{n+1}^i не составит труда, которые можно в этом случае вычислять параллельно.

Рассмотрим отдельно случай, когда имеется всего одна группа индексов, совпадающая с множеством всех индексов S, при этом, метод сойдется к точному решению линейной системы за одну итерацию. Для определения оптимальных итерационных параметров $\alpha_{n+1}^{i}, i = 1,2,\dots,m$ необходимо решить систему, размерность которой совпадает с размерностью исходной системы. В этом случае в качестве z_i^n можно брать не единичные векторы, а такие, что $\left(Az_i^n, Az_j^n\right) = 0,\ i,j = 1,2,\dots,m,\ i \neq j$, при этом матрица системы для определения итерационных параметров вновь будет иметь диагональный вид. Если однажды построить указанную ортогональную систему векторов, то ее можно применять и в последующем для решения системы при условии, что оператор A не изменился.

В параграфе 1.2 приводится описание процесса разработки программного комплекса, используемого для решения изучаемых задач.

Идея разработки программного комплекса состоит в реализации универсальной вычислительной технологии решения систем нестационарных уравнений Навье-Стокса, основанной на применении градиентных итерационных схем неполной аппроксимации к решению САУ, возникающих на каждом шаге по времени в результате дискретизации исходных дифференциальных задач.

Программный комплекс базируется на разработанной библиотеке многоуровневой иерархии интерфейсов и реализующих их компонентов, обеспечивающих эффективный, универсальный, объектно-ориентированный подход к решению разностных операторных уравнений. Такая модель программного комплекса обеспечила его свойствами конфигурируемости, масштабируемости, адаптируемости и позволила реализовать с его помощью численные алгоритмы для решения широкого класса нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости при наличии сопряженных физических процессов, отличающихся друг от друга такими принципиальными параметрами, как размерность пространства, геометрия области решения, формулировка исходных дифференциальных уравнений.

В параграфе 1.3 описанные в предыдущих разделах разработки тестируются на численном решении нестационарного уравнения Бюргерса, которое обладает аналогичными системе уравнений Навье-Стокса свойствами, как на дифференциальном, так и на разностном уровне:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad u(x,0) = \psi(x), \quad a \le x \le \infty,$$

$$u(a,t) = \varphi_1(t), \lim_{x\to\infty} u(x,t) = \varphi_2(t).$$

Здесь же приводится численный способ переноса краевого условия с бесконечности на границу конечной (расчетной) области $(a,b), b < \infty$:

$$\frac{1}{2}\int_{t}^{t+\Delta t} u^2(b,t)dt + \mu\int_{t}^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial x}(b,t)dt = \frac{1}{2}\int_{t}^{t+\Delta t} {\varphi_2}^2(t)dt - \int_{t}^{t+\Delta t}\int_{b}^{\infty} f(x,t)dxdt.$$

Интегральное соотношение является следствием, как самого уравнения, так и условия на удаленной границе. При таком подходе на каждом шаге по времени возникают САУ с заведомо неизвестными свойствами, для решения которых используется алгоритм, предложенный в параграфе 1.1.

Вторая глава состоит из трех параграфов и посвящена исследованию плоских течений вязкой несжимаемой жидкости. Целью данной главы является использование предложенных ранее численных алгоритмов для решения двумерных задач с последующим переносом основных результатов на пространственный случай.

В параграфе 2.1 рассматривается дифференциальная постановка двумерной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса, описывающей плоское неустановившееся течение вязкой однородной несжимаемой жидкости в ограниченной *(N+1)*-связной области G на временном промежутке [0,T]. Граница области ∂G состоит из непересекающихся замкнутых контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$, причем контур Γ_0 охватывает остальные контуры. Данная математическая задача представляет собой уравнение четвертого порядка относительно функции тока ψ, дополненное начальными, краевыми условиями и интегральным соотношением, необходимым для однозначности функции давления в многосвязной области. В общем случае функция тока известна только на одной из границ, на остальных же она определена с точностью до аддитивных функций времени $\lambda_i(t)$, которые должны находиться в процессе численного решения задачи.

При решении многих двумерных задач вводится функция вихря ω и используется система из двух более простых уравнений.

В параграфе 2.2 рассматривается численные алгоритмы решения задач о плоском течении вязкой однородной несжимаемой жидкости. Здесь же приводится способ переноса краевых условий с удаленной границы на границу конечной области при умеренных числах Рейнольдса.

Наиболее ресурсоемкую часть численного алгоритма решения двумерной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса, записанной в формулировке «вихрь - функция тока», составляет интегрирование разностных уравнений Пуассона для функции тока, которые на каждом шаге по времени можно представить в виде СЛАУ. Их матрицы в зависимости от структуры разностной сетки могут оказаться несимметричными и незнакоопределенными. Для решения таких СЛАУ применим схему неполной аппроксимации минимальных невязок с групповой оптимизацией итерационных параметров, описанную в главе 1. Также отметим, что матрицы получаемых в процессе реализации алгоритма СЛАУ не зависят от временного слоя и номера домена многосвязной области. Это дает возможность при тестовых расчетах использовать для решения разностной задачи Пуассона, схему с полной оптимизацией итерационных параметров и получать точное решение СЛАУ за одну итерацию, что существенно экономит вычислительные затраты. Так как матрицы СЛАУ не зависят также от числа Рейнольдса и граничных условий, то эту же возможность используем и при многократных расчетах нестационарных задач.

Для численного решения двумерных задач в односвязной области предлагается также использовать дискретизацию исходного уравнения, записанного только относительно функции тока. При этом отпадает необходимость задания численных граничных условий для вихря. В данной формулировке помимо линеаризованной разностной схемы будем также применять аппроксимацию конвективных слагаемых на верхнем временном слое, что позволяет увеличить шаг по времени. Независимо от выбора разностной схемы дискретное уравнение для функции тока на каждом временном слое можно представить как систему билинейных алгебраических уравнений (СБАУ). Для решения получаемых СБАУ применяется схема неполной аппроксимации минимальных невязок с последовательной оптимизацией итерационных параметров, рассмотренная в главе 1.

Далее предлагается один из численных способов переноса краевых условий с удаленной границы на границу расчетной области при решении задач с симметричной границей $\{-y_0(x) \cup y_0(x)\}$. Для переноса краевого условия с удаленной границы x_∞ на границу расчетной области x_0 на каждом дискретном промежутке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ построим интегральное соотношение

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_0^{y_0} u(x_0, y, t)\omega(x_0, y, t)dydt - \frac{1}{Re}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_0^{y_0} \frac{\partial\omega(x_0, y, t)}{\partial x} dydt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_0^{y_0} u(x_\infty, y, t)\omega(x_\infty, y, t)dydt,$$

которое является прямым следствием уравнения переноса вихря и известного из исходной постановки задачи краевого условия на удаленной границе. Для функции тока на выходной границе конечной области ставится краевое условие, являющееся следствием аппроксимации уравнения Пуассона внутрь области с учетом полученных ранее значений функции вихря.

Использование предложенных соотношений для переноса граничных условий при аппроксимации исходных дифференциальных уравнений заведомо приводит к несимметричным и незнакоопределенным СЛАУ, поэтому применение метода неполной аппроксимации, изложенного в п. 1.1, в этом случае является принципиальным даже на равномерных сетках и в простейших прямоугольных областях.

Параграф 2.3 посвящен результатам расчетов различных типов плоских неустановившихся течений.

Первая серия расчетов связана с исследованием модельных задач (течение в прямоугольной каверне, течение над обратным уступом и т.д.) со стационарными и периодическими краевыми условиями при умеренных числах Рейнольдса. Предложенные в предыдущих параграфах численные алгоритмы позволили получить в этих задачах устойчивые решения при сколь угодно больших значениях временной координаты.

Вторая серия расчетов связана с исследованием характера движения жидкости при стационарных краевых условиях и больших числах Рейнольдса. В качестве примера рассматривается задача о течении жидкости в плоском диффузоре. Результаты расчетов показывают, что, начиная с некоторого момента времени, поток попеременно прижимается к верхней и нижней стенкам выходного отверстия. Течение не переходит в стационарный режим и приобретает периодический характер, что количественно подтверждается графиком распределения по времени вихревой характеристики в некоторой фиксированной точке:

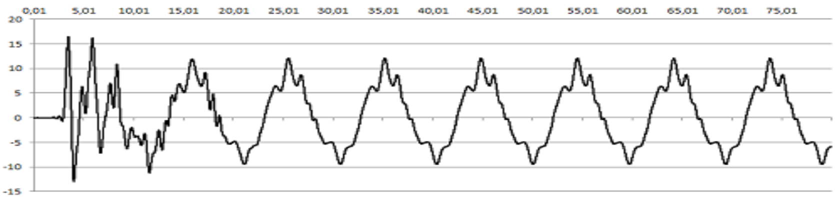

Рис. 2.1. График распределения вихревой характеристики в фиксированной точке в задаче о течении в плоском диффузоре при Re=1200

Третья глава состоит из четырех параграфов и посвящена исследованиям пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости. Целью данной главы является использование предложенных ранее численных алгоритмов, апробированных на одномерных и плоских течениях, для расчета трехмерных модельных и практических задач.

В параграфе 3.1 рассматриваются различные дифференциальные формулировки трехмерной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса.

Основные уравнения, описывающие пространственное течение вязкой однородной несжимаемой жидкости имеют следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\nabla \mathrm{P} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta V, \qquad \mathrm{div}V = 0,$$

или в переменных «вихрь - векторный потенциал»:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (V \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)V = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega, \qquad \Delta\psi = -\omega,$$

где V - вектор скорости, P – функция давления, Re – число Рейнольдса, $\omega = rotV$ - вектор вихря, ψ - векторный потенциал, определяемый соотношением $V = rot\psi$. Течение жидкости происходит в некоторой односвязной области G с границей ∂G на временном промежутке $[0, T]$.

Для исходной системы ставятся естественные начальные и краевые условия для компонент вектора скорости. Для системы уравнений «вихрь – векторный потенциал» в случае отсутствия протекания граничные условия для касательных компонент векторного потенциала являются нулевыми, а граничные условия для нормальной компоненты векторного потенциала определяется из условия соленоидальности последнего на границе. Для задач протекания применяется разложение векторного поля скорости на потенциальную и вихревую составляющие. В этом случае дополнительно решается задача (φ - скалярный потенциал)

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial G} = V_n|_{\partial G}.$$

Параграф 3.2 посвящен численным алгоритмам решения задач о пространственном течении вязкой несжимаемой жидкости.

Для численного интегрирования задач в естественных переменных и переменных «вихрь - векторный потенциал» будем использовать метод расщепления по физическим процессам и классический двухполевой метод соответственно. При этом в обоих случаях используется разнесенная сетка, гарантирующая тождественное выполнение уравнения неразрывности на дискретном уровне.

Для решения разностных уравнений переноса вихря и количества движения будем применять устойчивый в трехмерном случае метод стабилизирующей поправки.

Наиболее ресурсоемкую часть численного алгоритма составляет этап решения разностных уравнений Пуассона для давления, векторного и скалярного потенциалов, которые на каждом дискретном временном слое можно представить в виде СЛАУ.

В пространственном случае метод решения СЛАУ на каждом дискретном шаге по времени играет особо важную роль во всем численном алгоритме. Фактически от того, насколько он эффективен, зависит возможность решения задачи. Это объясняется, во-первых, существенно бóльшим (по сравнению с плоским случаем) количеством уравнений в СЛАУ, во-вторых, наличием условий Неймана на всей границе области течения жидкости, и, в-третьих, необходимостью решения на каждом временном шаге более одного уравнения Пуассона (в случае использования векторного потенциала). Понятно, что для получения за приемлемое время устойчивых численных решений трехмерных нестационарных задач, необходимо использовать методы решения СЛАУ, которые, с одной стороны, являлись бы быстросходящимися, а с другой, использовали минимальные сведения об операторах этих СЛАУ. Независимо от выбора исходной формулировки дифференциальной системы для решения СЛАУ, возникающих на каждом шаге по времени в результате аппроксимации уравнений Пуассона для давления, векторного и скалярного потенциалов, будем использовать схемы неполной аппроксимации с последовательной или групповой оптимизацией итерационных параметров, описанные в главе 1. При тестовых серийных расчетах будем применять полную оптимизацию итерационных параметров, что существенно сокращает вычислительные затраты.

Параграф 3.3 посвящен результатам расчетов трехмерных модельных задач. В различных дифференциальных формулировках предложенными численными алгоритмами были исследованы три типа пространственных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при умеренных числах Рейнольдса: внутреннее, протекание и внешнее обтекание.

С помощью разработанного программного комплекса [1] были проведены расчеты таких задач, как: течение в кавернах с движущейся крышкой; течение в каналах прямоугольного и кругового сечений, течение над обратным уступом и течение в канале над каверной; обтекания куба и обтекание кругового цилиндра.

Полученные результаты расчетов с точностью до 0.1% согласуются с результатами расчетов этих же задач, выполненными другими исследователями, а также результатами известных лабораторных экспериментов.

Параграф 3.4 посвящен применению результатов предыдущих разделов к расчетам важных практических задач, поставленных и решенных в рамках работы над:

Совместным проектом кафедры вычислительной математики КемГУ» г. Кемерово и «23 ГМПИ» филиала ОАО «31 ГПИСС» г. Санкт-Петербург - «Разработка методики расчета процесса размыва грунта у основания буровой платформы при действии волн и течения для различных геологических условий, с учётом рельефа дна и конструкции основания гравитационной платформы».

Государственным заданием № 1.630.2014/к – «Моделирование течений с переменной плотностью и вязкостью при решении прикладных задач».

С помощью разработанного программного комплекса [2] было проведено численное моделирование размыва слабонесущего грунта вблизи опорных оснований нефтедобывающих платформ типа «Приразломная» и «Баржа» в прибрежных морских зонах с учетом воздействия волн и внутреннего течения.

Результаты расчетов демонстрируют довольно сложные формы течений, характеризующиеся наличием вихревых зон вблизи стенок препятствий, прямо влияющих на поведение нижних слоев жидкости около основания платформы, формируя определенные структуры размыва грунта.

Полученные численные результаты с точностью до 1% согласуются с результатами лабораторных исследований, проведенных в рамках указанных проектов.

В заключении сформулированы основные выводы по результатам работы:

1. Параллельная реализация градиентных итерационных схем с многокомпонентной оптимизацией итерационных параметров показала достаточную эффективность при решении разностных задач, аппроксимирующих системы нестационарных уравнений Навье-Стокса. Модификация схемы с полной оптимизацией итерационных параметров позволила существенно сократить вычислительные затраты при тестовых расчетах.

2. Разработанные численные алгоритмы и их программная реализация позволили построить единообразный подход к решению многомерных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса и провести комплексные исследования модельных многомерных течений вязкой несжимаемой жидкости. Получено хорошее качественное и количественное совпадение численных результатов с результатами натурных и лабораторных экспериментов и результатами других исследователей.

3. Полученные численные краевые условия в двумерном случае позволили получить решения в нестационарных задачах с условиями на удаленных границах.

4. Результаты проведенных расчетов позволили сделать вывод, что существует интервал чисел Рейнольдса, в пределах которого течение на сколь угодно больших промежутках времени не переходит в стационарный режим, и, как правило, имеет периодический характер. При этом может наблюдаться отсутствие симметрии движения жидкости при симметричной геометрии области и симметричных краевых условиях.

5. На основании численных экспериментов сделаны заключения об оптимальности применения различных дифференциальных формулировок и соответствующих дискретных алгоритмов для расчета различного типа двумерных и трехмерных нестационарных задач.

5.1. В плоском случае предпочтение отдается формулировке «вихрь-функция тока» и численному алгоритму последовательного определения неизвестных функций. Естественную формулировку следует применять в случаях, когда количество доменов многосвязной области достаточно велико, или когда в исходной постановке задачи отсутствуют условия на компоненты вектора скорости на одной из границ.

5.2. В пространственном случае для внутренних задач наиболее эффективным является применение исходной дифференциальной постановки в переменных «вихрь - векторный потенциал», в то время как для задач с протеканием оптимальным является использование естественных переменных.

6. В рамках работы над совместным проектом кафедры вычислительной математики КемГУ» и «23 ГМПИ» филиала ОАО «31 ГПИСС» и Государственным заданием № 1.630.2014/к разработанный программный комплекс применен к расчету практических задач, связанных с размывом слабонесущего грунта в прибрежных морских зонах. Получено хорошее соответствие (с точностью до 1%) численных результатов с экспериментальными данными лабораторных исследований.

Основные публикации по теме исследования.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

1. Захаров, Ю.Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс для численного расчета нестационарных течений вязкой однородной несжимаемой жидкости «DES»», 2012610205 / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов. – 2011.

2. Гейдаров, Н.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс для расчета размыва грунта при действии волн и течения для различных геологических условий», 2015612750 / Н.А. Гейдаров, Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов. – 2015.

В рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК:

3. Иванов, К.С. Численное решение нестационарных уравнений Навье-Стокса / К.С. Иванов // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № 4. – С. 21-27.

4. Захаров, Ю.Н. Об использовании градиентных итерационных методов при решении начально-краевых задач для трехмерной системы уравнений Навье-Стокса / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 55-69.

5. Захаров, Ю.Н. О нестационарных решениях в задачах гидродинамики со стационарными краевыми условиями / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 1. – С. 24-33.

В рецензируемых журналах:

6. Захаров, Ю.Н. Об одном методе решения нестационарных задач гидродинамики / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Вестник КемГУ. – 2005. – Т. 4, № 24. – С. 97-100.

В трудах международных и всероссийских конференций:

7. Захаров, Ю.Н. Итерационный метод численного решения нестационарных задач гидродинамики / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Материалы III международной летней научной школы «Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование». – Кемерово, 2006. – С. 383-389.

8. Захаров, Ю.Н. Численное решение трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных «вихрь - векторный потенциал» / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Вестник КАЗНУ им. АЛЬ-ФАРАБИ, серия Математика, механика, информатика, №3 (58), часть II. – Алмааты. 2008. – Т. 13. – С. 159-166.

9. Zakharov, Y.N. Numerical simulation of three-dimensional non-stasionary Navier-Stokes equation using "rotation – vector potential" formulation / Y.N. Zakharov, K.S. Ivanov // Mathematical and Informational Technoklogies, - Kopaonik, Serbia, Budva, Montenegro, Abstracts. – 2009. – P. 442-446.

10. Иванов, К.С. Об одной нестационарной модели движения примесей в закрытых водоемах / К.С. Иванов, Л.В. Кемерова // Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование», Часть 2. – Анжеро-Судженск, 2010. – С. 150-155.

11. Гейдаров, Н.А. Численные и экспериментальные исследования размыва грунта от течений у оснований гравитационных платформ / Н.А. Гейдаров, Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов, В.В. Лебедев, А.В. Мишина, И.С. Нуднер, К.К. Семёнов, Л.Г. Щемелинин // Труды XII Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (ГА -2014). – С.-Петербург, 2014. – С. 239-241.

12. Zakharov, Y.N. On numerical solution of Navie-Stocks equations with infinite boundary conditions / Y.N. Zakharov, K.S. Ivanov // Zbornik radova konferencije MIT 2013, Beograd, 2014, 760 p. (Proceedings of International Conference “Mathematical and Informational Technologies MIT-2013). – Врнячка Баня, Сербия, Будва, Черногория, 2014. – P. 751-756.

13. Gaydarov, N.A. Numerical and Experimental Studies of Soil Scour Caused by Currents near Foundations of Gravity-Type Platforms / N.A. Gaydarov, Y.N. Zakharov, K.S. Ivanov, K.K. Semenov, V.V. Lebedev, I.S. Nudner, N.D. Belyaev, A.V. Mishina, L.G. Schemelinin // Proceedings of 2014 International Conference on Civil Engineering, Energy and Environment (CEEE-2014). – Hong Kong, 13-14 December 2014. – P. 190-197.