

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ» (КЕМГУ)

На правах рукописи

Иванов Константин Станиславович

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ СХЕМ ПРИ
РЕШЕНИИ СИСТЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

05.13.18 – «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор,
Захаров Юрий Николаевич

Кемерово – 2015

Оглавление

Введение	3
Глава 1 Разработка комплекса программ для численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.....	23
1.1 Подготовка математического аппарата.....	25
1.2 Программная реализация.....	33
1.2.1 Процессор.....	35
1.2.2 Препроцессор.....	40
1.2.3 Постпроцессор.....	41
1.3 Тестирование.....	46
Глава 2 Численное моделирование двумерных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости	54
2.1 Дифференциальная постановка.....	56
2.2 Численный алгоритм	59
2.3 Результаты расчетов.....	66
Глава 3 Численное моделирование трехмерных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости	78
3.1 Дифференциальная постановка.....	80
3.2 Численный алгоритм	84
3.3 Результаты расчетов модельных задач.....	94
3.4 Численное моделирование размыва слабонесущего грунта вблизи опорных оснований нефтедобывающих установок в прибрежных морских зонах	108
Заключение.....	116
Список литературы	118

Введение

Течения жидкостей широко распространены как в природных явлениях (реки, моря), так и в различных технологических процессах, которые играют важную роль в промышленности и встречаются в различных устройствах и оборудовании (турбины, клапаны, насосы, миксеры, корабельная и авиационная техника). Почти все способы производства энергии в качестве существенных составляющих включают процессы гидродинамики. В основные установки металлургической и химической промышленности входят такие элементы, как топки, теплообменники, конденсаторы и реакторы, в которых имеют место течения жидкостей.

Ввиду того, что рассматриваемые процессы оказывают такое всеобъемлющее воздействие на человеческую жизнь, необходимо иметь возможность эффективно ими управлять. Эта возможность может быть следствием понимания существа процессов и методологии получения их количественного описания. Такие знания позволяют определить наиболее безопасные и эффективные режимы работы существующего оборудования, а также выбрать оптимальную его конструкцию из нескольких возможных вариантов. Возможности расчета течений жидкостей помогут предугадать и даже проконтролировать потенциальные природные опасности, такие как наводнения и штормы.

Наиболее надежную информацию о физическом процессе можно получить путем непосредственных измерений. С помощью экспериментального исследования на полномасштабной установке можно определить поведение объекта в натурных условиях. В большинстве случаев такие полномасштабные опыты чрезмерно дороги и даже невозможны. Альтернативой является проведение экспериментов на маломасштабных моделях. Однако полученную информацию необходимо экстраполировать на натурный объект, а общие правила для этого часто отсутствуют. Кроме того, на маломасштабных моделях не всегда можно воспроизвести все свойства

полномасштабного объекта. Это также снижает ценность полученных результатов. Наконец, во многих случаях измерения затруднены, и измерительное оборудование может давать погрешности.

С другой стороны результаты на основе математического моделирования реальных явлений зачастую могут быть получены быстрее и дешевле, чем при проведении натурных экспериментов. Более того, иногда с помощью математического моделирования удаётся обнаружить эффекты, не замеченные прежде в опыте. Реальные жидкости в нормальных условиях с большим трудом поддаются объемному сжатию. Этот экспериментальный факт представляет физическую основу для построения математических моделей, описывающих движение жидкостей. Использование приближения несжимаемости (плотность частицы малого объема не изменяется со временем) при выводе дифференциального уравнения закона сохранения массы приводит к чрезвычайно простой его формулировке - поле вектора скорости должно быть соленоидальным. Привлечение линейной зависимости напряжений в жидкости от градиента скорости при выводе дифференциального уравнения закона сохранения количества движения дает систему эволюционных параболических уравнений для компонент вектора скорости. В результате для прогнозирования течений вязкой несжимаемой жидкости получены уравнения Навье-Стокса [1, 2] (названы по имени французского физика Анри Навье и британского математика Джорджа Стокса).

Уравнения Навье-Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике и применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач. Они также составляют теоретическую базу для прогнозирования широкого круга явлений в смежных областях физики и химии. Исследование свойств решений уравнений Навье-Стокса представляет первостепенное значение, в их анализе заключается суть одной из открытых проблем: «необходимо доказать или опровергнуть существование глобального гладкого решения задачи Коши

для трехмерных уравнений Навье-Стокса» [3]. Математическая модель несжимаемой жидкости имеет две особенности. Во-первых, дифференциальная система уравнений содержит нелинейный конвективный член. Присутствие нелинейности всегда создает принципиальные математические трудности при построении решений краевых задач и традиционно считается источником многообразных динамических свойств математической модели. Именно на преодоление трудностей, обусловленных нелинейностью уравнений Навье-Стокса, были направлены основные усилия исследователей [4]. Во-вторых, условие соленидальности поля скоростей выводит систему из класса систем эволюционных уравнений (типа Коши-Ковалевской), что является следствием использования гипотезы несжимаемости, приведшей к бесконечной скорости распространения возмущений. Очевидно, что предельный переход к бесконечной скорости должен определить характерное свойство решений краевых задач [5]. Главный результат в области аналитического исследования математической модели вязкой несжимаемой жидкости - полное решение проблемы в двумерном случае: доказана однозначная разрешимость задачи [6, 7]. В трехмерном случае получены частичные результаты: доказана однозначная разрешимость уравнений на конечном промежутке времени, а также решена общая задача в предположении малости числа Рейнольдса [6, 7]. Вопрос о единственности слабого решения Хопфа, которое существует для бесконечного промежутка, до сих пор остается открытым. В настоящее время в аналитическом виде можно получить решения лишь небольшой части задач (обусловленной в основном простой геометрией), имеющих практический интерес [8]. Кроме того, эти решения часто содержат бесконечные ряды, специальные функции, трансцендентные уравнения для собственных значений и т. д., и их числовая оценка может сама представлять весьма трудную задачу.

Принципиальные трудности теоретического исследования математической модели реальных течений и получения аналитических

результатов «спровоцировали» применение численных методов для решения системы уравнений Навье-Стокса, что, в свою очередь, привело к появлению новой дисциплины - вычислительной гидродинамики и понятиям «численное моделирование» и «вычислительный эксперимент». Еще в 1910 г. Л. Ричардсон представил статью [9], которая должна быть признана краеугольным камнем численного анализа дифференциальных уравнений в частных производных. Тогда же он впервые применил численные методы для решения довольно масштабной практической задачи. Первые численные решения задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости были получены еще до появления ЭВМ с помощью специальных итерационных алгоритмов, разработанных для ручного счета. Появление же ЭВМ в 50-х гг. XX в. ознаменовала новую эру, положив начало развитию и становлению современной вычислительной гидродинамики. Бурное развитие вычислительной техники, расширение возможностей ЭВМ, появление параллельных вычислений с одной стороны, совершенствование существующих и разработка новых более экономичных алгоритмов с другой, привели к тому, что в настоящее время возможно провести численный расчет многих задач о течении вязкой несжимаемой жидкости, представляющих практический интерес [10, 11, 12, 13]. Создано большое количество программных продуктов (CFD-комплексов), начиная от небольших пакетов прикладных программ, заканчивая коммерческими решениями промышленного назначения, частично или полностью автоматизирующих этапы вычислительного эксперимента. Таким образом, численное моделирование не может полностью заменить натурный эксперимент и теоретические исследования, но является практически единственным способом полностью изучить параметры исследуемой системы, предоставляя при этом следующие преимущества:

1. *Низкая стоимость.* Наиболее важным преимуществом численного решения является его небольшая стоимость. В большинстве случаев стоимость затраченного машинного времени на много порядков ниже

стоимости соответствующего экспериментального исследования. Значение этого фактора возрастает с увеличением масштабов и усложнением требующего изучения физического процесса.

2. *Скорость.* Численное исследование можно провести очень быстро. Исследователь имеет возможность за короткий промежуток времени (по сравнению с соответствующим натурным экспериментом) просчитать несколько вариантов и выбрать оптимальную конструкцию.
3. *Полнота информации.* Численное решение задачи дает подробную и полную информацию. С его помощью можно найти значения **всех** имеющихся переменных (таких, как скорость, давление, температура, концентрация, интенсивность турбулентности) во **всей** области решения. В отличие от эксперимента для расчета доступна практически вся исследуемая область и отсутствуют возмущения процесса, вносимые датчиками при экспериментальном исследовании. Очевидно, что ни в одном натурном эксперименте невозможно измерить распределения всех переменных во всей исследуемой области. Поэтому, даже если проводится экспериментальное исследование, большое значение для дополнения экспериментальной информации имеют результаты численного решения.
4. *Возможность математического моделирования реальных условий.* Численную модель можно получить для реальных условий исследуемого процесса, что далеко не всегда возможно при экспериментальном исследовании.
5. *Возможность моделирования идеальных условий.* Если с помощью численного решения изучаются закономерности физического процесса, а не сложные инженерные задачи, можно сконцентрировать внимание на нескольких существенных параметрах этого процесса и исключить все несущественные явления. При этом можно моделировать многие идеализированные условия, например двухмерность, постоянство плотности, адиабатическую поверхность или бесконечно быструю

реакцию. При экспериментальном исследовании даже с помощью довольно тщательного эксперимента не всегда можно достичь таких идеализированных условий.

Несмотря на достигнутые успехи в области вычислительной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, решение не только многих трехмерных, но и некоторых двумерных задач, представляющих теоретический и практический интерес, до сих пор требует значительных усилий, что обусловлено следующими существующими проблемами:

1. *Выбор дифференциальной формулировки и численного алгоритма.*

Система уравнений Навье-Стокса может быть записана как в естественной формулировке, так и в формулировках, использующих вектор вихря. [1, 2]. Выбор одной из них при решении конкретной задачи является неочевидным. Выбор одной из них при решении конкретной задачи является неочевидным, поскольку не существует какой-либо надежной группы критериев для его определения. Современные CFD-комплексы, в большинстве своем, применяют для решения поставленных задач одну из модификаций метода SIMPLE, использующих физические переменные «скорость - давление». Таким образом, нет возможности выбора альтернативных формулировок дифференциальной системы и соответствующих численных алгоритмов, которые в зависимости от типа задачи могут обладать явными преимуществами.

2. *Постановки краевых условий.* При численном решении задач гидродинамики постановка краевых условий является одним из ключевых моментов. Существует множество подходов задания граничных значений неизвестных функций в зависимости от типа границы, используемой формулировки системы уравнений Навье-Стокса, применяемого численного алгоритма [14]. Одной из наиболее трудных проблем является постановка численных краевых условий в

задачах с удаленными границами (условия на бесконечности), где необходим их перенос на границу расчетной области [15]. Существующие CFD-комплексы предоставляют не достаточно широкие возможности постановки краевых условий, ограничиваясь, в основном, стандартными типами границ (твердая стенка, участки входа и выхода жидкости). В частности, крайне редко встречаются возможности постановки краевых условий на удаленных границах.

3. *Решение систем алгебраических уравнений (САУ).* При любом выборе способа дискретизации системы уравнений Навье-Стокса неизбежно возникает проблема построения эффективных методов решения систем алгебраических уравнений (САУ) большой размерности, к которым сводится дискретная модель [16]. Эта проблема, очевидно, становится особенно актуальной в нестационарном случае, когда требуется многократное решение САУ на каждом дискретном шаге по времени. Современные CFD-комплексы, как правило, используют линеаризацию исходных уравнений, а для решения получаемых систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) применяют градиентные методы (например, методы подпространства Крылова). Несмотря на то, что данные методы хорошо зарекомендовали себя при решении СЛАУ, сходимость их в общем случае не доказана, и они обладают известными проблемами в случаях существенной несимметричности матрицы СЛАУ, обусловленной, например, переменными коэффициентами в дифференциальных уравнениях или использовании сложных численных краевых условий. Существующие CFD-комплексы практически не предоставляют средств решения нелинейных систем алгебраических уравнений, таким образом, использование полностью неявных численных алгоритмов в них крайне затруднительно.
4. *Обнаружение нестационарных решений.* Как показали некоторые численные эксперименты [17] и теоритические исследования [18, 19, 20], во многих нестационарных задачах о течении вязкой

несжимаемой жидкости со стационарными краевыми условиями существуют нестационарные (часто периодические) несимметричные по пространству решения. Такие решения обычно возникают при больших значениях числа Рейнольдса и их обнаружение требует продолжительного счета по физическому времени. Режим течения в этих случаях приближается к турбулентному и получение нужной точности при приемлемых затратах вычислительных ресурсов сопряжено со значительными трудностями, поскольку для этих целей в CFD-комплексы должны быть заложены быстросходящиеся устойчивые численные алгоритмы.

5. *Интеграция с численными моделями смежных физических процессов.*

На практике часто возникает необходимость в численном моделировании процессов гидродинамики, сопряженных с другими физическими явлениями. Общая численная модель получается, как правило, сложной и многокомпонентной, с прямой и обратной связью между различными ее элементами. Современные CFD-комплексы ограничиваются, в основном, заложенными в них возможностями смежного численного моделирования (сопряженный теплообмен, многокомпонентное течение и т.д.). Их адаптация к специфике конкретной практической задачи, требующей интеграции модели течения жидкости с моделями смежных явлений, требует значительных усилий и часто крайне затруднена.

Указанные трудности заставляют исследователей в области вычислительной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости и смежных вопросах обращаться к поиску альтернативных путей решения встающих перед ними задач, совершенствуя при этом старые [21, 22] и разрабатывая новые [23, 24], более эффективные численные алгоритмы, использующие современные возможности компьютерного моделирования.

В настоящее время известно достаточно большое количество методов решения систем нестационарных уравнений Навье-Стокса, отличающихся

как исходной дифференциальной формулировкой, так и численной реализацией [14, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]. В двумерном случае, в основном, используются уравнения Навье–Стокса, записанные в переменных «функция тока-вихрь». Преимущество использования преобразованных переменных заключается в сокращении количества уравнений в системе и автоматическом выполнении уравнения неразрывности, как на дифференциальном, так и на дискретном уровне [34, 35, 36, 37]. Основной проблемой здесь является формулировка краевых условий для вихря на твердых стенках, которые не присутствуют явно в постановке задачи. Условия первого и второго порядка точности, получающиеся путем разложения в ряд условия прилипания, с успехом использовались в численных расчетах многими авторами [38, 39, 40]. В некоторых работах отмечается, что использование условий более высокого порядка аппроксимации может привести к зарождению численной неустойчивости [14]. Кроме того, эти условия при решении явными схемами существенно замедляют скорость сходимости, а при решении неявными схемами требуют организации отдельного итерационного процесса. Для моделирования трехмерных течений в большинстве случаев используются уравнения Навье–Стокса, записанные в физических переменных [41, 14]. Главным преимуществом такой формулировки является точное задание граничных условий для компонент вектора скорости, известных из физической постановки задачи. Основная трудность при численном решении системы в исходной постановке связана с расчетом поля давления и выполнением уравнения неразрывности. Первый значительный успех в преодолении отмеченных трудностей был достигнут благодаря идее искусственной сжимаемости [42, 43, 44]. Были построены эффективные схемы расщепления для решения регуляризованной системы уравнений Навье–Стокса [45, 46, 47, 48, 49] и решен широкий круг проблем [50, 51, 52, 53]. Подобный подход, использующийся, главным образом, для получения стационарного решения, с успехом применяется и в настоящее

время для решения важных практических задач [11, 22, 23, 54]. Другой способ определения давления заключается в применении оператора дивергенции к уравнению количества движения, в результате чего получается уравнение эллиптического типа для давления. Такой подход первоначально был введен при разработке метода маркеров и ячеек [55, 56], а в дальнейшем получил развитие в методах расщепления по физическим процессам (физическим факторам) [41, 57, 58] и методах семейства SIMPLE [59, 60]. Существенные проблемы здесь представляют собой задание недостающих краевых условий для давления и обеспечение на каждом шаге по времени соленоидальности поля скорости. Указанный подход лежит в основе большинства современных программных комплексов и в настоящее время продолжает развиваться многими исследователями [12, 21, 61, 62, 63, 64, 65, 66]. Вторую группу составляют методы решения трехмерных задач в переменных «вихрь - векторный потенциал» и «вихрь - скорость» [67, 14, 68, 69, 70]. Важнейшим преимуществом такой формулировки является то обстоятельство, что на каждом шаге по времени уравнение неразрывности выполняется автоматически, как на дифференциальном, так и на дискретном уровне. Однако у данного подхода существуют и серьезные недостатки. Во-первых, количество дифференциальных уравнений в новой системе возрастает до шести. Во-вторых, как и в двумерных задачах, существенной проблемой является задание граничных условий для вихря на твердых стенках. В-третьих, в пространственном случае (в отличие от плоского случая) возникает значительная трудность постановки краевых условий для векторного потенциала [71, 72].

И двумерная и трехмерная задача может включать в себя условия на удаленных границах (условия на бесконечности). Краевые условия на бесконечности, а также неотражающие условия рассматривались в работах [73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80]. В работе [15] содержится обзор по неотражающим условиям на границах области расчета.

В настоящее время известны различные способы дискретизации дифференциальной модели течения вязкой несжимаемой жидкости [31, 32]. В большинстве случаев дискретные аналоги представляют собой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), для решения которых используются, в основном, итерационные методы, ввиду большой размерности этих систем. Итерационные методы решения СЛАУ можно разделить на два типа. Первый - методы, использующие информацию о спектральных свойствах оператора СЛАУ [81, 82]. Для применения итерационного процесса, построенного исходя из данного принципа, нужно располагать как можно большей информацией о матрице системы, в частности о границах ее спектра. Их недостатком является трудоемкость получения информации о спектре матрицы. В некоторых случаях, расчет границ спектра представляет собой не менее сложную задачу, чем решение исходной системы уравнений. Методы второго типа - вариационные или градиентные методы, в основе которых лежит принцип минимизации некоторого функционала, минимум которого достигается на искомом решении системы [81, 82]. При решении СЛАУ вариационными методами ключевую роль играют такие свойства оператора как знакоопределенность и самосопряженность [81, 82]. Итерационные методы решения СЛАУ с несимметричной матрицей рассмотрены в работах [83, 84, 85, 86]. При решении СЛАУ хорошо зарекомендовали себя схемы неполной аппроксимации (НА) [87], которые не являются инвариантными относительно решения, и позволяют решать СЛАУ с незнакоопределенной матрицей. В работе [16] схемы НА используются при решении широкого круга стационарных задач гидродинамики.

При решении нестационарных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости, как в естественных переменных, так и в переменных «вихрь - векторный потенциал» в большинстве случаев используется многоступенчатый алгоритм с целью поэтапного определения неизвестных функций. На первом этапе, решая системы уравнений количества движения

или переноса вихря, находят компоненты векторов скорости или вихря соответственно. На втором этапе из решения уравнений Пуассона определяют давление или компоненты векторного и скалярного потенциалов. Для решения линеаризованных систем уравнений количества движения или переноса вихря, в основном, применяются устойчивые (в линейном случае) схемы расщепления, и поэтому данный этап обычно не вызывает серьезных проблем. Основные же трудности возникают при решении уравнений Пуассона и это связано, во-первых, с постановкой краевых условий, и, во-вторых, с решением системы линейных алгебраических уравнений большой размерности с матрицей, во многих случаях не обладающей необходимыми для применения хорошо разработанных итерационных методов решения свойствами.

Цель настоящей работы состоит в создании комплекса программ для численного моделирования практических задач динамики вязкой несжимаемой жидкости при наличии сопряженных физических процессов на основе применения градиентных итерационных схем неполной аппроксимации к решению разностных задач, аппроксимирующих системы нестационарных уравнений Навье-Стокса.

Для достижения поставленной цели требуется последовательно решить следующие задачи:

1. Выполнить параллельную реализацию градиентных итерационных схем неполной аппроксимации с многокомпонентной и полной оптимизацией итерационных параметров для решения систем линейных и билинейных алгебраических уравнений, возникающих в результате дискретизации систем нестационарных уравнений Навье-Стокса.
2. Разработать и реализовать численные алгоритмы решения многомерных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса на основе градиентных итерационных схем неполной аппроксимации

решения САУ, использующие различные дифференциальные формулировки, полностью неявные разностные схемы и численные интегральные соотношения для переноса краевых условий с удаленных границ.

3. Разработать программный комплекс на основе построенных численных алгоритмов для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при наличии сопутствующих физических процессов.
4. Провести тестирование разработанного программного комплекса, получив с помощью него результаты расчетов модельных двумерных и трехмерных нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости, записанных на дифференциальном уровне в различных формулировках, при различных геометриях области решения, краевых условиях и числах Рейнольдса, и сравнив их с результатами лабораторных экспериментов и результатами расчетов других исследователей.
5. Апробировать разработанный программный комплекс на решении двумерных задач с краевыми условиями на удаленных границах и задач, имеющих нестационарные решения при стационарных краевых условиях.
6. Провести сравнение численных алгоритмов, основанных на различных дифференциальных формулировках, и сформировать набор рекомендаций по условиям их применимости и степени эффективности при решении внутренних и внешних задач о течении вязкой несжимаемой жидкости.
7. Применить разработанный программный комплекс для численного моделирования практических задач динамики вязкой несжимаемой жидкости при наличии смежных физических процессов, проведя серии вычислительных экспериментов и сравнив результаты расчетов с данными, полученными с помощью лабораторных исследований.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Глава 1 посвящена разработке программного комплекса (ПК) для численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, а также подготовке математического аппарата (МА), заложенного в ядро ПК. В начале главы рассматривается метод неполной аппроксимации (НА) минимальных невязок решения САУ. Приводится основной итерационный процесс, гарантирующий монотонное убывание вектора невязки, не зависимо от свойств оператора САУ. Отдельное внимание уделяется линейному случаю, при котором доказана сходимость рассматриваемой итерационной схемы к точному решению СЛАУ при любом начальном приближении. Особо отмечаются модификации и дополнения метода НА, связанные с повышением его эффективности при решении разностных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса. Это, во-первых, вариант групповой оптимизации итерационных параметров схемы, при котором метод сходится к точному решению СЛАУ за одну итерацию, и, во-вторых, возможности параллельной реализации метода на многопроцессорных вычислительных системах, значительно повышающие его скорость работы. Далее в главе рассматривается ПК, разработанный для решения разностных нестационарных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Обосновывается необходимость разработки собственного программного продукта, выдвигаются требования к конечной вычислительной системе. Приводятся диаграммы, отражающие архитектуру и функциональные возможности ПК, а также фрагменты исходного кода, демонстрирующие основные идеи программной разработки. Глава завершается тестированием подготовленного математического аппарата и разработанного программного комплекса на численном решении нестационарного уравнения Бюргерса с краевым условием на бесконечности, которое обладает аналогичными системе уравнений Навье-Стокса свойствами, как на дифференциальном, так и на разностном уровне. Здесь же

приводится численный способ переноса краевого условия с бесконечности на границу расчетной области, при котором на каждом дискретном временном шаге возникают САУ с заранее неизвестными свойствами, для решения которых использование заложенных в ПК алгоритмов является принципиальным.

Глава 2 посвящена исследованию плоских нестационарных течений вязкой однородной несжимаемой жидкости. Целью данной главы является использование разработанного ПК и предложенных численных алгоритмов для решения двумерных нестационарных систем уравнений Навье-Стокса с последующим переносом основных результатов на трехмерный случай. В начале главы рассматривается дифференциальная постановка двумерной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса, описывающей плоское неустановившееся течение вязкой однородной несжимаемой жидкости в ограниченной многосвязной области на конечном временном промежутке. Граница области состоит из непересекающихся замкнутых контуров, один из которых охватывает остальные контуры. Данная математическая задача с помощью введения функции тока сводится к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка. Для данного уравнения ставятся начальные и граничные условия, включающие интегральные соотношения на каждом контуре, гарантирующие однозначность функции давления. Особенностью такой дифференциальной формулировки является задание краевого условия первого рода для функции тока только на одной из границ, на остальных же она определена с точностью до аддитивных функций времени, которые должны находиться в процессе численного решения задачи. Также здесь приводится эквивалентная система из двух более простых уравнений, которая классически получается с помощью введения функции вихря. Далее в главе рассматриваются численные алгоритмы решения задач о плоском течении вязкой однородной несжимаемой жидкости. Здесь же приводится способ переноса краевых условий с удаленной границы на границу расчетной области применительно к симметричным задачам при умеренных числах

Рейнольдса. Наиболее ресурсоемкую часть *классического* численного алгоритма решения двумерной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса, записанной в формулировке «вихрь - функция тока», составляет интегрирование разностных уравнений Пуассона для функции тока, которые на каждом шаге по времени можно представить в виде СЛАУ. Их матрицы в зависимости от структуры разностной сетки могут оказаться несимметричными и знакоопределенными. Для решения таких СЛАУ применяется метод НА с групповой оптимизацией итерационных параметров, изложенный в главе 1. Также отмечается, что матрицы получаемых в процессе реализации алгоритма СЛАУ не зависят от временного слоя и номера домена многосвязной области. Это дает возможность при расчетах с умеренным количеством узлов использовать для решения разностной задачи Пуассона схему с полной оптимизацией итерационных параметров и получать точное решение СЛАУ за одну итерацию, что существенно экономит вычислительные затраты. Так как матрицы СЛАУ не зависят также от числа Рейнольдса и граничных условий, то эту же возможность можно использовать и при многократных или серийных расчетах нестационарных задач. Наряду с обычно применяемым алгоритмом для численного решения двумерных задач в односвязной области предлагается использовать дискретизацию исходного уравнения, записанного только относительно функции тока. При этом отпадает необходимость задания численных граничных условий для вихря. В данной формулировке помимо линеаризованной разностной схемы также применяется аппроксимация конвективных слагаемых на верхнем временном слое, что позволяет увеличить шаг по времени. Независимо от выбора разностной схемы дискретное уравнение для функции тока на каждом временном шаге представляется как система билинейных алгебраических уравнений (СБАУ). Для решения получаемых СБАУ применяется метод НА с последовательной оптимизацией итерационных параметров, рассмотренный в главе 1. Далее предлагается один из численных способов переноса краевых

условий с удаленной границы на границу расчетной области при решении симметричных задач. Получающиеся в результате такого подхода численные интегральные соотношения заведомо приводят к несимметричным и незнакоопределенным СЛАУ, поэтому применение разработок главы 1 в этом случае является принципиальным даже на равномерных сетках и в простейших прямоугольных областях. В завершении главы приводятся результаты тестовых расчетов двумерных задач, характеризующихся наличием нестационарного режима течения жидкости.

Глава 3 посвящена исследованиям пространственных течений вязкой однородной несжимаемой жидкости. Целью данной главы является использование предложенных ранее численных алгоритмов и программных разработок, апробированных на одномерных и плоских течениях, для расчета тестовых (модельных) и практических трехмерных задач. В начале главы рассматриваются различные дифференциальные формулировки трехмерной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса. Основные уравнения, описывающие пространственное течение однородной вязкой несжимаемой жидкости записываются в физических переменных и в переменных «вихрь - векторный потенциал». Непосредственное интегрирование исходной системы уравнений, записанной в естественной формулировке, затруднено, поэтому при численном подходе используется уравнение Пуассона для давления, которое получается в результате применения оператора дивергенции к обеим частям исходной системы. Для исходной системы ставятся естественные начальные и краевые условия на компоненты вектора скорости. Для системы уравнений «вихрь – векторный потенциал» в случае отсутствия протекания ставятся граничные условия первого рода для касательных компонент векторного потенциала и условия второго рода для нормальных компонент векторного потенциала. Для задач протекания применяется разложение векторного поля скорости на потенциальную и вихревую составляющие. В этом случае дополнительно решается задача Неймана для скалярного потенциала. Далее в главе рассматриваются

численные алгоритмы решения задач о пространственном течении вязкой однородной несжимаемой жидкости. Для численного интегрирования задач в естественных переменных и переменных «вихрь - векторный потенциал» используется метод расщепления по физическим процессам и двухполевой метод соответственно. При этом в обоих случаях применяется гибридное размещение неизвестных функций, гарантирующее тождественное выполнение уравнения неразрывности на дискретном уровне. Для решения линеаризованных разностных уравнений переноса вихря и количества движения применяется устойчивый в трехмерном случае метод стабилизирующей поправки. Наиболее ресурсоемкую часть численного алгоритма составляет этап решения разностных уравнений Пуассона для давления, векторного и скалярного потенциалов, которые на каждом дискретном временном слое представляются в виде СЛАУ. В пространственном случае метод решения СЛАУ на каждом дискретном шаге по времени играет особо важную роль во всем численном алгоритме. Фактически от того, насколько он эффективен, зависит возможность решения задачи. Это объясняется, во-первых, существенно большим (по сравнению с плоским случаем) количеством уравнений в СЛАУ, во-вторых, наличием условий Неймана на всей границе области течения жидкости, и, в-третьих, необходимостью решения на каждом временном шаге более одного уравнения Пуассона (в случае использования векторного потенциала). Понятно, что для получения за приемлемое время устойчивых численных решений трехмерных нестационарных задач, необходимо использовать методы решения СЛАУ, которые, с одной стороны, являлись бы эффективными с точки зрения сходимости итерационных процессов, а с другой, использовали минимальные сведения об операторах этих СЛАУ. Независимо от выбора исходной формулировки дифференциальной системы для решения СЛАУ, возникающих на каждом шаге по времени в результате аппроксимации уравнений Пуассона для давления, векторного и скалярного потенциалов, используется метод НА с последовательной или групповой

оптимизацией итерационных параметров, изложенный в главе 1. При тестовых серийных расчетах (с умеренным количеством расчетных ячеек) применяется полная оптимизация итерационных параметров, что существенно сокращает вычислительные затраты. Далее в главе приводятся три серии расчетов модельных нестационарных пространственных задач при умеренных числах Рейнольдса, характеризующихся различными типами течения жидкости (внутренняя задача, задача протекания, задача внешнего обтекания). Глава завершается демонстрацией и описанием результатов расчетов некоторых актуальных практических задач.

В заключении сформулированы основные выводы по результатам работы.

Настоящая работа выполнена в Кемеровском Государственном Университете на кафедре вычислительной математики под руководством д.ф.-м.н., проф. Юрия Николаевича Захарова. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95], [96, 97, 98], [99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106] и докладывались на:

1. VI всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Кемерово, 2005;
2. III международной летней научной школы Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование, Кемерово, 2006;
3. Всероссийской конференции по вычислительной математики, Новосибирск, 2007;
4. VIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 2007;
5. Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании», Алматы, 2008;
6. International Conference «Mathematical and Informational Technologies», -Kopaonik, Serbia, Budva, Montenegro, 2009;

7. IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ-2010), Анжеро-Судженск, 2010;
8. International Conference «Mathematical and Informational Technologies», -Kopaonik, Serbia, Budva, Montenegro, 2011;
9. Международной конференция «Современные проблемы прикладной математики: теория, эксперимент и практика», посвящённая 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко, Новосибирск, 2011;
10. Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева, Новосибирск, 2012;
11. Международной конференции «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование», Кемерово, 2013;
12. International Conference «Mathematical and Informational Technologies», - Serbia, Budva, Montenegro, 2013;
13. Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (ГА -2014). С.-Петербург: Наука, -2014.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались также на семинарах: кафедры вычислительной математики КемГУ «Математические модели, методы решения», Кемерово (под рук. проф. Ю.Н. Захарова); кафедры НИТ КемГУ «Информационные технологии и математическое моделирование», Кемерово (под рук. проф. К.Е. Афанасьева); ИВТ СО РАН «Информационно-вычислительные технологии», Новосибирск (под рук. акад. Ю.И. Шокина и проф. В.М. Ковени).

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Ю. Н. Захарову за постоянное внимание, помощь и поддержку в работе.

Глава 1. Разработка комплекса программ для численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости

По современным представлениям вся цепочка математического моделирования состоит из следующих звеньев [32, 107, 108, 109]: объект исследования - математическая модель - численный алгоритм – программная реализация - вычисления на ЭВМ и их анализ - обработка и хранение результатов расчетов. Все эти звенья взаимосвязаны, и изменения одних способно оказать влияние на другие. Таким образом, современное численное моделирование нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости (как один из видов математического моделирования) является сложным многоэтапным и многокомпонентным процессом, требующим от исследователя профессиональных знаний умений и навыков, как в области фундаментальной и прикладной математики, так и в сфере разработки программного обеспечения. Для проведения качественного вычислительного эксперимента для нужд практики (когда необходимо обеспечить совпадение численных результатов с натурными маломасштабными испытаниями и когда планируется использование количественных показателей, полученных в результате численного расчета, при конструировании полномасштабных гидродинамических сооружений) требуется тщательная подготовительная работа, которая может занимать довольно продолжительное время (недели, месяцы). Это обусловлено тем, что, во-первых, цена ошибки вычислений может оказаться очень большой, и, во-вторых, стоимость ресурсов, требующихся для проведения реальных расчетов, может быть также довольно высокой. Действительно, для организации численного эксперимента, соответствующего реальным условиям исследуемой системы, могут потребоваться большие вычислительные мощности (кластеры, супер-эвм), а также достаточно длительное время (дни, недели или даже месяцы).

Итоговой задачей подготовительного процесса к вычислительному эксперименту является создание готового инструментария - конечной вычислительной системы или комплекса программ (КП) для численного (компьютерного) моделирования. Можно выделить три основных этапа создания КП, которые до момента его окончательной реализации могут периодически повторяться и совершенствоваться:

1. Подготовка математического аппарата.
2. Программная реализация.
3. Тестирование.

Каждый из этапов создания КП имеет первостепенное значение. Действительно, только использование максимально эффективных численных алгоритмов, привлечение передовых технологий разработки программного обеспечения, надлежащее проведение методических расчетов модельных задач и тщательное сравнение с натурными экспериментами способно привести к созданию качественного продукта, пригодного для использования в реальных условиях для нужд практики.

Изложенные во введении проблемы исследуемой области, а также поставленные цели и задачи выдвигают особые требования, обуславливая специфику КП, разработанного для численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в рамках настоящей работы. В данной главе рассматривается каждый из трех основных этапов его создания.

1.1 Подготовка математического аппарата

Математический аппарат (МА) - основа численного моделирования и его подготовка является фундаментальным этапом создания КП. В области численного решения нестационарных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости математический аппарат имеет довольно широкий спектр составляющих его компонент, начиная от методов дискретизации области решения, и заканчивая алгоритмами интерполяции численных результатов. За все время развития вычислительной гидродинамики создано немало технологий численного решения систем нестационарных уравнений Навье-Стокса (см. введение), отличающихся между собой множеством аспектов: точка зрения на движение сплошной среды, формулировка исходных дифференциальных уравнений и методы их дискретизации, алгоритмы численного решения дискретных задач и т.д.

Не зависимо от используемой технологии, основную ресурсоемкую часть всего процесса численного решения нестационарных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости занимает этап решения систем алгебраических уравнений (САУ), возникающих в результате дискретизации исходных дифференциальных систем. Несмотря на большое количество развитых к настоящему моменту современных алгоритмов решения САУ (см. введение), эта проблема остается весьма актуальной при решении многомерных нестационарных систем уравнений Навье-Стокса.

Цели, выдвинутые в настоящей работе, определяют специфику САУ, которые предстоит решать. Согласно поставленным в работе задачам необходимо провести численные расчеты многомерных систем с использованием различных дифференциальных формулировок, в областях различной геометрии, применяя сложные интегральные краевые условия. Очевидно, что САУ, к которым сводятся подобные задачи, вряд ли обладают какими-либо заранее известными свойствами (например, свойства самосопряженности или знакоопределенности оператора) для применения к

их решению хорошо зарекомендовавших себя эффективных итерационных методов. Более того, в зависимости от методов дискретизации исходных дифференциальных уравнений, САУ могут оказаться и нелинейными, что еще более затрудняет выбор алгоритма их решения. Также одной из проблем настоящей работы является обнаружение нестационарных решений, которые возникают на больших временных интервалах, что обеспечивает необходимость решения очень большого количества возникающих САУ. Наконец, финальной задачей, обозначенной в работе, является расчет трехмерных практических течений, что обуславливает достаточно большую размерность получающихся на каждом временном шаге САУ.

В работе [87] предложен метод неполной аппроксимации (НА) минимальных невязок решения САУ, который в работе [16] с успехом был применен к решению различных многомерных стационарных задач гидродинамики, а в работе [110] явился базисом для создания универсальной технологии численно решения стационарной задачи о течении жидкости в канале с заданным перепадом давления. В настоящей работе указанный метод адаптирован и применен к решению дискретных систем **нестационарных** уравнений Навье-Стокса и заложен в основу математического аппарата, используемого при создании КП для численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.

В данном параграфе рассмотрим итерационный метод НА решения САУ и его возможности, используемые для повышения скорости расчета нестационарных задач. Другие аспекты используемого в настоящей работе МА будут обсуждаться по ходу изложения материала в главах 2 и 3.

В конечномерном евклидовом пространстве E_m рассмотрим систему нелинейных уравнений вида

$$A(u, u) = f, \quad (1.1)$$

где $A(u, v) = A_1(u, v) + A_2 v$, A_2 - линейный оператор, $A_1(u, v)$ - билинейное отображение, обладающее свойством:

$$A_1(\xi_1 u^{(1)} + \xi_2 u^{(2)}, \eta_1 v^{(1)} + \eta_2 v^{(2)}) = \\ \xi_1 \eta_1 A_1(u^{(1)}, v^{(1)}) + \xi_1 \eta_2 A_1(u^{(1)}, v^{(2)}) + \xi_2 \eta_1 A_1(u^{(2)}, v^{(1)}) + \xi_2 \eta_2 A_1(u^{(2)}, v^{(2)}),$$

$u, v, f, u^{(i)}, v^{(i)} \in E_m, \xi_i, \eta_i, i = 1, 2$ - произвольные постоянные.

Далее будем предполагать, что система (1.1) имеет хотя бы одно решение.

Для решения (1.1) построим итерационную схему:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n - \tau_{n+1} B_n[A(u^n, u^n)] - f, \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} + \alpha_{n+1} x^n, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

где B_n - заданная матрица с элементами, зависящими от $u^n, x^n \in E_m$ - некоторый вектор, u^0 - произвольное начальное приближение из области определения оператора A , τ_{n+1}, α_{n+1} - итерационные параметры.

Первый шаг схемы (1.2) - это какая-либо известная схема с некоторым итерационным параметром τ_{n+1} . Целью данного параграфа является получение таких параметров τ_{n+1}, α_{n+1} , с которыми (1.2) будет сходиться.

Пусть α_{n+1} - квадратная матрица с m ненулевыми элементами $\alpha_{kij}^{(n+1)}, i, j = 1, 2, \dots, m, k$ - произвольное целое число от 1 до m . Перепишем второй шаг схемы (1.2) в виде:

$$u^{n+1} = y_{(p-1)}^{n+1/2} + \sum_{i=p}^m \alpha_{kij}^{(n+1)} e^{k_i}, p, j = 1, 2, \dots, m,$$

где $y_{(p-1)}^{n+1/2} = u^{n+1/2} + \alpha_{kij}^{(n+1)} e^{(k_1)} + \dots + \alpha_{k_{p-1}j}^{(n+1)} e^{(k_{p-1})}$, $y_{(0)}^{n+1/2} = u^{n+1/2}, e^{(k_i)}$ - вектор с одной ненулевой k_i -ой компонентой, т.е. $e^{(k_i)} = (0, \dots, 0, x_{k_i}, 0, \dots, 0)$.

Введём обозначение:

$$r_{(i)}^{n+1/2} = A(y_{(i-1)}^{n+1/2} + \alpha_{kij}^{(n+1)} y_{(i-1)}^{n+1/2} + \alpha_{kij}^{(n+1)} e^{(k_i)}) - f, i = 1, 2, \dots, m.$$

Очевидно, что $r_{(m)}^{n+1/2} = r^{n+1} = A(u^{n+1}, u^{n+1}) - f$ - невязка схемы (1.2).

Можно получить:

$$r_{(i)}^{n+1/2} = r_{(i-1)}^{n+1/2} + \alpha_{kij}^{(n+1)} F_{1n}^{(k_i)} + (\alpha_{kij}^{(n+1)})^2 F_{2n}^{(k_i)},$$

$$F_{1n}^{(k_i)} = A(y_{(i-1)}^{n+1/2}, e^{(k_i)}) + A(e^{(k_i)}, y_{(i-1)}^{n+1/2}),$$

$$F_{2n}^{(k_i)} = A(e^{(k_i)}, e^{(k_i)}).$$

Далее имеем:

$$\|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2 = \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2 + \sum_{s=1}^4 (\alpha_{kij}^{(n+1)})^s \Theta_{sn}^{(k_i)} = \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2 - \Phi_{n+1}(\alpha_{kij}^{(n+1)}), \quad (1.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$\Theta_{1n}^{(k_i)} = 2(r_{(i-1)}^{n+1/2}, F_{1n}^{(k_i)}), \Theta_{2n}^{(k_i)} = \|F_{1n}^{(k_i)}\|^2 + 2(r_{(i-1)}^{n+1/2}, F_{2n}^{(k_i)}),$$

$$\Theta_{3n}^{(k_i)} = 2(F_{1n}^{(k_i)}, F_{2n}^{(k_i)}), \Theta_{4n}^{(k_i)} = \|F_{2n}^{(k_i)}\|^2.$$

Так как $\Theta_{4n}^{(k_i)} \geq 0$, то у полинома (1.3) или два, или один минимум. При этом, глобальный минимум величины $\|r_{(i)}^{n+1/2}\|^2$ не превосходит $\|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2$. Выберем $\alpha_{kij}^{(n+1)}$ из условия минимума нормы вектора невязки $r_{(i)}^{n+1/2}$. Тогда $\alpha_{kij}^{(n+1)}$ находится как решение уравнения

$$\sum_{q=1}^4 q(\alpha_{kij}^{(n+1)})^{q-1} \Theta_{qn}^{(k_i)} = 0 \quad (1.4)$$

по формулам Кардано. Пусть $\alpha_{kij}^{*(n+1)}$ решение (1.4), отвечающее глобальному минимуму (1.3). Подставив этот корень в (1.3), получим:

$$\|r_{(i)}^{n+1/2}\| = \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\| - \Phi_{n+1}^{(i)} = \rho_{(i)}^2 \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2,$$

$$\rho_{(i)}^2 = 1 - \Phi_{n+1}^{(i)} / \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|^2,$$

$$\text{где } \Phi_{n+1}^{(i)} = \Phi_{n+1}(\alpha_{kij}^{*(n+1)}) \geq 0.$$

Таким образом,

$$\|r_{(i)}^{n+1/2}\| \leq \|r_{(i-1)}^{n+1/2}\|, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и, в силу ограниченности $\|r^0\|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|r^n\| = \|r^\infty\|$.

Здесь следует отметить, что $\Phi_{n+1}^{(i)} = 0$ только в случае $\alpha_{kij}^{*(n+1)} = 0$, а это возможно, если $\Theta_{1n}^{(k_i)} = 2(r_{(i-1)}^{n+1/2}, F_{1n}^{(k_i)}) = 0$.

Следовательно, для того чтобы последовательность $\{\|r^n\|\}$ была убывающей, номера $k_i, i = 1, 2, \dots, m$, т.е. строку матрицы α_{n+1} , в которой стоит элемент $\alpha_{kij}^{*(n+1)}$, необходимо выбирать так, чтобы величина $\Phi_{n+1}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, m$ была наибольшей.

Рассмотрим отдельно случай, когда билинейное отображение системы (1.1) тождественно равно нулю, а линейный оператор является невырожденным. Тогда система (1.1) представляет собой СЛАУ:

$$A(u) = f, \quad (1.5)$$

где $u, f \in R^m$, A - линейный оператор: $R^m \rightarrow R^m$. Перепишем итерационный процесс (1.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}} &= u^n - \tau_{n+1}[Au^n - f], \\ u_0^{n+1} &= u^{n+1/2}, \\ u_k^{n+1} &= u_{k-1}^{n+1} - \sum_{i \in S_k} \alpha_{n+1}^i z_i^n, \quad k = 1, 2, \dots, l, \\ u^{n+1} &= u_l^{n+1}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где u^0 - произвольный вектор из R^m , τ_{n+1} , α_{n+1}^i - итерационные параметры, S_k - непересекающиеся подмножества (группы) множества всех индексов, такие что $\bigcup_k S_k = S$, z_i^n - векторы из R^m с одной ненулевой i -ой компонентой. Оптимальные итерационные параметры τ_{n+1} и α_{n+1}^i в (1.6) определяются из условия минимума норм векторов невязок $r^{n+1/2}$ и r_k^{n+1} соответственно. Как показано в [16], при таком выборе итерационный процесс (1.6) является сходящимся при любом начальном приближении и произвольном неособенном операторе A . Для определения оптимальных значений α_{n+1}^i при каждом $k = 1, 2, \dots, l$ необходимо решить СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} (Az_{k_1}^n, Az_{k_1}^n) & (Az_{k_1}^n, Az_{k_2}^n) & \dots & (Az_{k_1}^n, Az_{k_{p_k}}^n) \\ (Az_{k_2}^n, Az_{k_1}^n) & (Az_{k_2}^n, Az_{k_2}^n) & \dots & (Az_{k_2}^n, Az_{k_{p_k}}^n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (Az_{k_{p_k}}^n, Az_{k_1}^n) & (Az_{k_{p_k}}^n, Az_{k_2}^n) & \dots & (Az_{k_{p_k}}^n, Az_{k_{p_k}}^n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}^{k_1} \\ \alpha_{n+1}^{k_2} \\ \dots \\ \alpha_{n+1}^{k_{p_k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Az_{k_1}^n, r_k^{n+1} \\ Az_{k_2}^n, r_k^{n+1} \\ \dots \\ Az_{k_{p_k}}^n, r_k^{n+1} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

где $k_i \in S_k$, $i = 1, 2, \dots, p_k$ и $\sum_{k=1}^l p_k = m$. Отметим, что чем большее количество индексов k_i участвует в группах S_k (т.е. чем больше p_k , или меньше l), тем большую эффективность алгоритма (1.6) следует ожидать. Вместе с тем, при увеличении размерности групп S_k увеличивается и размерность системы (1.7), решение которой в общем случае по степени сложности эквивалентно решению исходной системы (1.5). Однако заметим, что оператор системы (1.5) в интересующих нас далее задачах не является произвольным, а есть некоторая аппроксимация дифференциального оператора (в большинстве случаев оператора Лапласа), и, следовательно, его матрица имеет блочно-ленточную структуру. Например, в простейшем случае матрица оператора имеет только семь ненулевых диагоналей. Очевидно, что в силу такой структуры матрицы оператора многие из величин (Az_i^n, Az_j^n) , $i, j = 1, 2, \dots, m$ равны нулю. Следовательно, всегда возможно так выбрать группы S_k , что для каждого k матрица системы (1.7) будет иметь диагональный вид и нахождение величин α_{n+1}^i не составит труда [16]. Рассмотрим отдельно случай, когда имеется всего лишь одна группа индексов, совпадающая с множеством всех индексов S . Можно показать [16], что в этом случае, метод (1.6) сойдется к точному решению системы (1.5) за одну итерацию. Для определения оптимальных итерационных параметров α_{n+1}^i , $i = 1, 2, \dots, m$ необходимо решить систему (1.7), размерность которой в данном случае совпадает с размерностью исходной системы. В такой постановке эта задача эквивалентна исходной. Но в качестве z_i^n можно брать не единичные векторы, а такие, что $(Az_i^n, Az_j^n) = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i \neq j$, при этом матрица системы (1.7) вновь будет иметь диагональный вид. Иначе говоря, для достижения этой цели необходимо построить ортогональную

систему векторов $\widetilde{z}_j^n, j = 1, 2, \dots, m$ в пространстве $R_{A^*A}^m$ со скалярным произведением $(A^*Az, z), z \in R^m$. Как известно, задача ортогонализации системы векторов в общем случае эквивалентна по степени сложности задаче решения системы линейных уравнений. Однако такой подход в нашем случае обладает рядом значительных преимуществ: во-первых, в силу упомянутой выше блочно-ленточной структуры матрицы исходного оператора A часть векторов z_i^n уже ортогональны в $R_{A^*A}^m$; во-вторых, если однажды построить указанную ортогональную систему векторов, то ее можно применять и в последующем для решения системы (1.7) при условии, что оператор A не изменился; в-третьих, можно решить задачу построения векторов обеспечивающих не диагональный, а, например, трехдиагональный (не представляющий труда для обращения) вид матрицы системы (1.7), что значительно экономит вычислительные затраты. Отметим, что операторы систем уравнений, являющиеся следствием дискретизации нестационарных дифференциальных задач, не изменяются при переходе от слоя к слою по времени, а также сохраняют структуру своей матрицы при увеличении количества ячеек расчетной области. Этот факт позволяет построить достаточно эффективный алгоритм (1.6) с помощью оптимального выбора групп S_k , включив в каждую из них максимально возможное число индексов. При проведении тестовых расчетов очень экономичным оказывается применение ортогональной системы векторов $\overline{z}_j^n, j = 1, 2, \dots, m$, обеспечивающей сходимость процесса (1.6) за одну итерацию к точному решению системы (1.5). Построив такую систему ортогональных векторов на первом шаге по времени, затратив на это существенное количество ресурсов, ее можно использовать не только для мгновенного решения систем уравнений (1.5) на последующих временных слоях, но и для проведения новых расчетов, например, при других числах Рейнольдса или краевых условиях.

Отметим, что как в случае групповой, так и в случае полной оптимизации итерационные параметры α_{n+1}^i находятся независимо друг от друга, т.е. имеет место параллельность метода с математической точки зрения, что, в свою очередь, составляет основу для возможности программной реализации алгоритма с применением технологий параллельных вычислений.

В данном параграфе рассмотрен итерационный метод НА решения САУ, который не зависимо от свойств оператора САУ в общем (билинейном) случае обеспечивает монотонное убывание нормы вектора невязки, а в частном (линейном) случае гарантирует сходимость к точному решению. Также рассмотрены модификации метода НА, связанные с использованием многопараметрической и полной групповой оптимизацией параметров в линейном случае, существенно повышающие его (метода) эффективность при решении нестационарных задач. Рассмотренный метод составляет ядро МА, используемого в настоящей работе, и заложен в основу ПК.

1.2 Программная реализация

Программная реализация подготовленного МА является важнейшим этапом создания КП, определяя такие его свойства, как адаптивность, мобильность, масштабируемость и т.д. Главный вопрос, которым обычно задается каждый исследователь в процессе подготовки к вычислительному эксперименту состоит в дилемме: писать собственный код для реализации выбранных математических алгоритмов или же использовать готовые разработки других авторов. Выбор здесь достаточно широк, начиная от программирования всех этапов численного моделирования «с нуля», и заканчивая применением готовых пакетов, полностью автоматизирующих расчет. Существуют, очевидно, и промежуточные варианты, заключающиеся, как правило, в использовании сторонних библиотек, эффективно реализующих некоторые аспекты МА, и интеграции их с собственными программными модулями. Чтобы ответить на поставленный вопрос и сделать правильный выбор, необходимо дать ответы на более детальные вопросы: будет ли КП использовать авторские математические разработки; планируется ли применять КП для решения задач в смежных областях; допускаются ли модификации и дополнения программного кода и т.д. Иначе говоря, для принятия решения исследователю необходимо выдвинуть четкие требования к программному коду, реализующему подготовленный МА.

В данном параграфе рассматриваются особенности программной реализации используемого в настоящей работе МА для численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Цели и задачи настоящей работы, как отмечалось в параграфе 1, определили специфику используемого математического аппарата, в основу которого в результате был заложен метод НА решения САУ, позволяющий применить единообразный подход к решению многомерных нестационарных систем уравнений Навье-Стокса:

1. Дискретизация расчетной области и дифференциальных уравнений.
2. Сведение дискретных задач к набору САУ.
3. Решение САУ методом НА.
4. Интерпретация численных результатов.

Такая технология определяет основные требования и к программной реализации применяемых математических методов:

1. *Эффективность.* Программный код должен учитывать особенности применяемых математических алгоритмов и максимально экономично использовать ресурсы (время работы, машинная память), критичные при расчете нестационарных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.
2. *Адаптивность.* Структура программных модулей должна быть разработана с учетом возможности простой адаптации к разнообразным параметрам используемой математической модели и численных алгоритмов, таких как размерность исходной задачи, геометрия расчетной области, дифференциальная формулировка, типы краевых условий, линейность или нелинейность дискретных подзадач и т.д.
3. *Масштабируемость.* Конечная вычислительная система должна допускать переопределения и расширения отдельных блоков, с целью совершенствования имеющегося и добавления нового математического аппарата.

Комплекс программ для численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости традиционно состоит из трех основных компонент:

1. Препроцессор: подготовка к расчету – формирование геометрии области решения и ее дискретизация.
2. Процессор: основной расчет – реализация численных алгоритмов.

3. Постпроцессор: интерпретация результатов расчета – интерполяция численных данных, визуализация течений.

1.2.1 Процессор

Программирование процессора является наиболее важной и ресурсоемкой составляющей всей разработки ПК. Как уже отмечалось, в настоящее время существует большое количество программных продуктов (как комплексных пакетов, так и независимых библиотек), эффективно решающих основные задачи программной реализации в части процессора. В настоящей работе было принято решение провести собственную программную разработку используемого математического аппарата. Фундаментальная причина этому – применение авторских алгоритмов (метод НА и его модификации [16, 78, 87]), особенности программной реализации которых требуют переопределения низкоуровневых операций векторной арифметики и хранения данных. Ни одно из известных комплексных решений (Ansys Fluent, OpenFoam, FlowVision и т.д.) или библиотек, основанных на интерфейсах типа BLAS (например, MKL) не предоставляют таких возможностей. Более того, все они ориентированы в большей степени на конечноэлементные и конечнообъемные методы с применением матричного подхода к решению СЛАУ. Между тем, в настоящей работе для дискретизации исходных дифференциальных уравнений используется метод конечных разностей, приводящий как к линейным, так и к нелинейным САУ. Особенность конечно-разностных методов заключается в операторном (не матричном) представлении САУ, (в нелинейном случае оно является единственно возможным).

Создание программного кода, как правило, начинается и концентрируется вокруг набора некоторых базисных положений [111]. Фундаментальной идеей программной разработки в настоящей работе является абстрагирование различных компонент конечной вычислительной

системы. В большей степени это относится к абстрагированию реализации методов решения САУ, как ядра МА, от остальных его составляющих. Действительно, для выполнения задач, поставленных в работе, необходимо провести достаточно большое количество расчетов, отличающихся друг от друга принципиальными параметрами: размерность, геометрия, дифференциальная формулировка, численный алгоритм, линейность или нелинейность. Очевидно, что каждый такой расчет требует хранения специфического набора векторов, отличающихся особенностями выполнения низкоуровневых операций и форматом хранения двоичных данных. С другой стороны все подобные задачи сводятся к набору САУ, которые с математической точки зрения отличаются друг от друга только размерностью пространства конечных числовых последовательностей. При этом программирование методов решения САУ само представляет довольно рутинную работу, требуя значительных затрат ресурсов, и очень нежелательно, чтобы оно зависело от программной реализации остальных компонент математического аппарата. Если программный код будет организован таким образом, чтобы исключить программную зависимость объектов, не зависящих друг от друга с математической точки зрения (но допускающих сведение друг к другу), то поход к решению многомерных нестационарных систем уравнений Навье-Стокса, заявленный в начале параграфа, будет успешно реализован.

Как известно, задача устранения нежелательных программных зависимостей в вычислительной системе легко решается с помощью разработки надлежащего набора интерфейсов взаимодействия между различными ее (системы) частями. Для реализации описанной выше идеи программной разработки были сформулированы основные положения создания исходно кода:

1. *Компонентный подход к проектированию.* Понятие интерфейса наиболее тесно связано с шаблоном компонентной разработки

распределенной вычислительной системы, обеспечивающим максимальный уровень абстрагирования составляющих ее (системы) блоков [112].

2. Объектно-ориентированная парадигма создания программного кода.

ООП является наиболее простым и надежным средством реализации компонентного подхода к проектированию системы, обеспечивая при этом такие важные принципы, как инкапсуляция (сокрытие данных в объектах-сущностях) и полиморфизм (обобщенные и универсальные алгоритмы). Отметим некоторые работы, в которых предприняты попытки использования парадигмы ООП для программной реализации численных алгоритмов решения задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости [113, 114].

3. Язык программирования C++. В свою очередь использование C++ - это самое удачное решение для разработки программного кода в рамках парадигмы ООП [115] в совокупности с требованием максимальной скорости выполнения операций с двоичными данными и прямого доступа к памяти ЭВМ.

Приведем базовую архитектуру компонент системы и интерфейсов взаимодействия между ними:

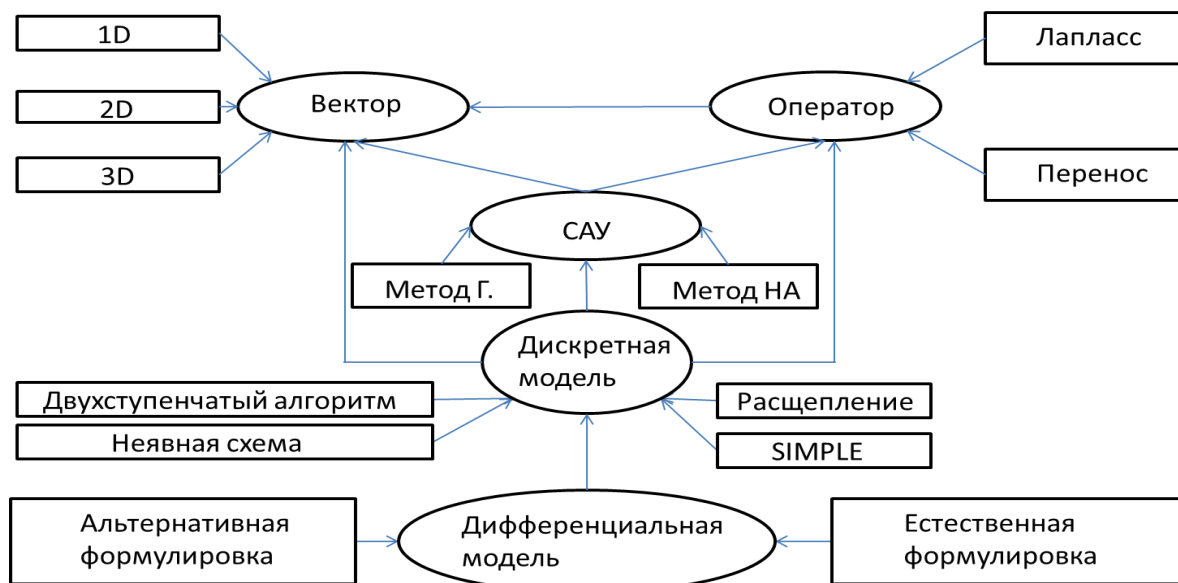


Рис. 1.1 Базовая архитектура компонент и интерфейсов вычислительной системы

Как видно, математически независимые блоки и объекты (векторная арифметика, операторы, САУ, дискретные алгоритмы, дифференциальные формулировки) программно абстрагированы с помощью соответствующих интерфейсов, что позволяет программировать каждый из них, не задумываясь о деталях реализации остальных. Приведем небольшой фрагмент исходного кода, поясняющий это утверждение:

```
while (epsCur>eps)
{
    Ark|=A(rk);
    alfa = (-1)*(Ark,rk)/(Ark,Ark);

    xk|=xk+alfa*rk;

    rk|=A(xk) - b;

    epsCur = sqrt1( (rk,rk) );
}
```

Здесь представлен цикл, реализующий классический метод минимальных невязок решения СЛАУ. Отметим, что код внутри цикла абсолютно не использует информацию о природе векторов и линейного оператора. Ему достаточно знать, что эти объекты реализуют известные ему интерфейсы. С привлечением техники перегрузки операций результирующий программный код с одной стороны мало чем отличается от соответствующих математических формулировок, с другой – является максимально эффективным в смысле скорости выполнения операций, поскольку детали реализации действий с двоичными данными инкапсулированы в соответствующие компоненты.

Предложенный подход к программной реализации процессорной части математического аппарата позволил избежать дублирования большого количества исходного кода, а также выполнить требования, предъявленные выше. Отметим, что связанные между собой надежными интерфейсами компоненты системы могут легко проектироваться и реализовываться разными разработчиками, функционировать на разных узлах вычислительной системы, и даже быть написаны на разных языках программирования.

При разработке процессорной части ПК, предназначенного для расчета многомерных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, большое значение приобретает использование технологий параллельных вычислений, которые активно развиваются в последние десятилетия [116]. Параллельная программная реализация может осуществляться на нескольких условных уровнях:

1. «Геометрический». Исходная область расчета подвергается декомпозиции, после чего расчет каждой подобласти производится параллельно с помощью заложенных в ПК алгоритмов.
2. «Алгоритмический». В этом случае используемые математические алгоритмы таковы, что позволяют производить часть своих операций параллельно.
3. «Арифметический». Самый низкий уровень параллелизма, когда производится одновременное (параллельное) вычисление различных компонент векторов при выполнении операций сложения, умножения на скаляр и, возможно, более сложных операций векторных пространств.

«Геометрический» уровень параллельной реализации в настоящее время используется довольно редко (в основном для решения стационарных задач), поскольку в этом случае необходимы дополнительные итерации для согласования краевых условий на границах раздела подобластей, что может привести к понижению эффективности вычислений. Наиболее распространены 2 и 3 уровень параллелизма, которые, однако, используют различные технологии параллельных вычислений [117, 118, 119, 120, 121]. «Алгоритмический» уровень, в основном, использует технологию OpenMP (технология параллельных вычислений с общей памятью), в то время как для параллелизма на уровне «арифметическом» наиболее эффективным является применение технологии MPI (технология параллельных вычислений с раздельной памятью). Разработка приложений с использованием MPI требует значительных усилий, поскольку задействует низкоуровневые операции

передачи данных между узлами вычислительной сети. Программа, изначально не предназначенная для параллельной работы, с большим трудом поддается адаптации к применению MPI и, как правило, требует полной переработки. Напротив, OpenMP, обладая высокоуровневым интерфейсом, довольно просто встраивается в последовательную реализацию программного кода, распараллеливая необходимые участки и повышая общую производительность. Однако в этом случае, как уже отмечалось, предъявляются дополнительные требования к используемым математическим алгоритмам.

В ПК, разработанном в рамках настоящей работы, для повышения производительности вычислений применяется технология OpenMP, позволяющая создавать многопоточные приложения для многопроцессорных систем с общей памятью. Основу программного параллелизма ПК составляет возможность параллельной реализации метода НА с алгоритмической точки зрения. Также в ПК заложены дополнительные возможности параллельных вычислений, относящиеся к другим составляющим используемого МА, которые будут отмечаться по ходу изложения материала в главах 2 и 3.

1.2.2 Препроцессор

Препроцессор выполняет подготовительные функции для проведения расчета и основной его задачей является получение дискретного представления расчетной области. Существуют специализированные программные продукты (например, Abacus), автоматизирующие данный процесс и эффективно его реализующие для произвольной многомерной геометрии. В настоящей работе препроцессор интегрирован в процессорную часть, и его программная реализация выполнена самостоятельно. Причиной этому послужили следующие факты. С одной стороны, готовые решения, в основном ориентируясь на конечно-элементные методы, выполняют триангуляцию расчетной области, и ее дискретное представление имеет

формат, непростой для преобразования. С другой стороны, геометрии областей, на которых необходимо провести численные расчеты согласно поставленным задачам в настоящей работе, имеют достаточно простую форму, и программная реализация их конечно-разностного представления собственными средствами не вызывает затруднений.

1.2.3 Постпроцессор

Постпроцессор выполняет функции интерпретации полученных численных результатов и основными его задачами является построение различных графиков профилей искомых величин и визуализация течений. В отличие от препроцессорной обработки, программная реализация постпроцессора является не такой простой задачей. Более того, неправильная интерпретация результатов численного расчета зачастую является одной из причин некорректных заключений, поэтому в настоящей работе функции постпроцессора, в основном, были поручены проверенным временем и многими исследователями программным продуктам, таким как «Tecplot» и «Paraview». Эти программы помимо прочих достоинств имеют очень простой формат файлов входных данных, поэтому не вызвало особых затруднений организовать в программной реализации процессорной части экспорт результатов численного расчета для загрузки в указанные визуализаторы.

Отметим здесь часть функций постпроцессора, которые были все же реализованы с помощью собственной программной разработки. Классическим способом визуализации нестационарных течений является прорисовка в области движения жидкости линий тока для каждого момента времени (или через некоторый интервал) и последующая анимация полученных слоев. Такой подход дает наиболее общее представление о течениях, и именно он реализован в большинстве программных продуктов, выполняющих их (течений) визуализацию. Например, результаты расчета модельной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной

каверне с периодически движущейся в разных направлениях верхней крышкой с помощью программы «Tecplot» можно представить следующим образом:

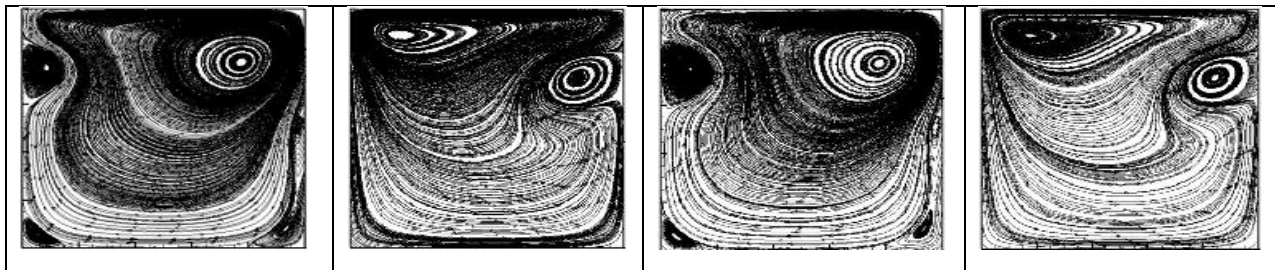


Рис. 1.2 Линии тока течения жидкости в квадратной каверне с периодически движущейся верхней крышкой в различные моменты времени

Вместе с этим для практических целей иногда требуются подробные знания о траекториях той или иной частицы жидкости, которые в процессе неустановившегося движения могут, как известно, принципиально отличаться от линий тока. Поэтому наряду с традиционным методом визуализации нестационарных течений в работе используется подход, основанный на изображении траекторий некоторого набора частиц на всем промежутке времени. Для этой цели было разработано специальное программное обеспечение (визуализатор), являющееся дополнительным компонентом к основному программному комплексу. Визуализация любого расчета осуществляется в два этапа. Во-первых, с помощью заложенного в визуализатор математического функционала по полученным значениям компонент вектора скорости определяются численные значения траекторий частиц. Иначе говоря, осуществляется переход от «эйлеровой» точки зрения на течение жидкости к «лагранжевой». При этом для обеспечения устойчивости такого перехода используются специальные численные методы интерполяции и решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также учитываются особенности поведения частиц жидкости вблизи угловых зон области течения. На втором этапе с помощью заложенных в визуализатор алгоритмов работы с графикой осуществляется прорисовка области течения жидкости и полученных траекторий частиц.

Графическая составляющая визуализатора предоставляет исследователю специальные сервисные возможности, например: отслеживание траекторий движения выбранных частиц с указанием их координат в любой момент времени; установка длины следа отслеживаемых траекторий частиц; добавление новых частиц для отслеживания их траекторий в процессе визуализации. Приведем примеры визуализации той же задачи о течении в квадратной каверне:

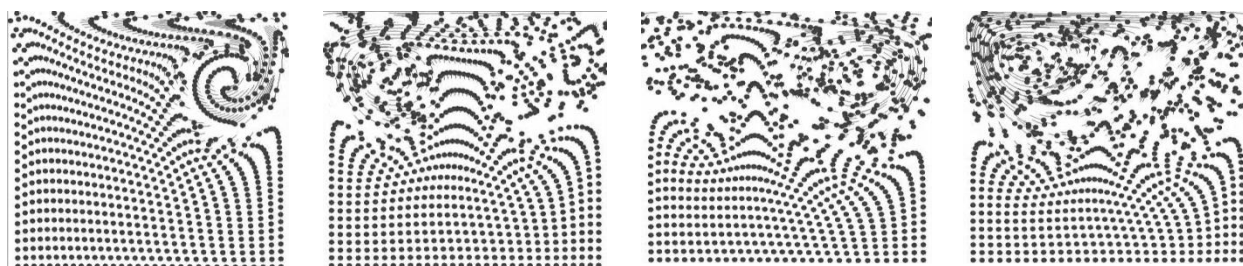


Рис. 1.3 Траектории частиц течения жидкости в квадратной каверне с периодически движущейся верхней крышкой

Из приведенного примера видно, что визуализация течения с помощью линий тока дает ложное представление о поведении частиц жидкости. Например, на Рис. 1.2 отчетливо видны вторичные вихревые образования, в то время как на самом деле жидкость в эти зонах практически покоится, о чем свидетельствует Рис. 1.3.

С помощью разработанного визуализатора были получены уникальные представления о некоторых течениях, которые принципиально невозможно получить, опираясь на анимацию мгновенных снимков. Приведем примеры визуализации установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне с равномерно движущейся верхней крышкой двумя способами: классическим (линии тока) и с помощью разработанного визуализатора (траектории частиц). Отметим, что в этой задаче в виду установившегося (стационарного) режима течения линии тока и траектории совпадают.

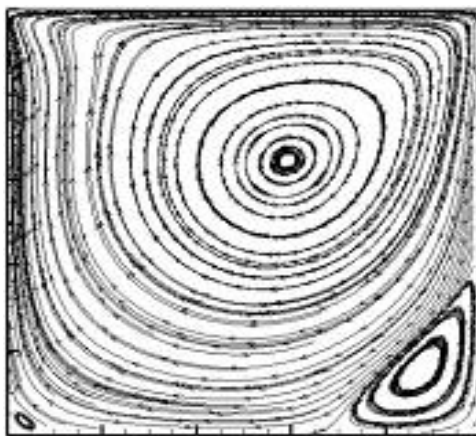


Рис. 1.4 Линии тока установившегося течения жидкости в квадратной камере с равномерно движущейся верхней крышкой

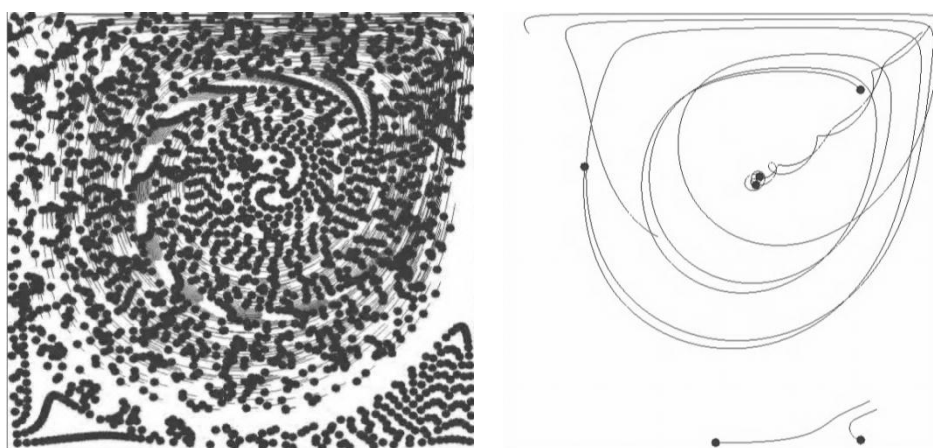


Рис. 1.5 Траектории частиц установившегося течения жидкости в квадратной камере с равномерно движущейся верхней крышкой

Как и в предыдущем примере в правой нижней зоне жидкость практически покоится (Рис. 1.5), в то время как из Рис. 1.4 следует, что здесь имеет место вихревое образование. Более того, разработанная визуализация позволила обнаружить в данной классической задаче весьма нетривиальную траекторию частицы, начинающей свое движение из правого верхнего угла. Оказывается, эта частица не двигается вдоль границы квадратной области, как это следует из картины, основанной на линиях тока, а, совершая закрученную траекторию, передвигается к центру камеры, где переходит в свое стационарное положение.

В данном параграфе рассмотрены особенности программной реализации используемого в настоящей работе МА. Выдвинуты требования к

исходному коду, обоснована необходимость собственной разработки. Сформулированы основные положения и представлена базовая архитектура компонент и интерфейсов вычислительной системы.

Созданный в результате разработки программный комплекс был зарегистрирован и на него получено "Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012610205 «Программный комплекс для численного расчета нестационарных течений вязкой однородной несжимаемой жидкости «DES»» [99]. Основные компоненты программного комплекса «DES» легли в основу разработки нового программного комплекса «XFlow», предназначенного для численного моделирования течений жидкости и сопутствующих физических процессов, на который также было получено свидетельство о государственной регистрации [106].

1.3 Тестирование

Тестирование разработанного математического аппарата и его программной реализации является завершающим этапом создания КП и является не менее важным, чем остальные. Перед проведением непосредственно вычислительного эксперимента, крайне необходимо убедиться, что заложенные в КП математические алгоритмы работают верно, и реализующий их программный код написан корректно. Традиционно такую проверку организуют, проводя предварительные расчеты тестовых (или модельных) задач, т.е. таких, решения которых известны или получены и проверены другими исследователями, и для расчета которых не требуется значительных затрат ресурсов. Между тем, очень важно, чтобы тесты обладали всеми свойствами и особенностями, которыми обладают целевые задачи.

В данном параграфе рассматривается процесс тестирования математического аппарата и его программной реализации, разработанных для численного моделирования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.

В работе [16] метод решения САУ тестируется на численном решении нестационарного уравнения Бюргерса в бесконечной области с применением интегральных краевых условий. Эта задача выбрана в качестве методической модели главным образом потому, что обладает аналогичными системе уравнений Навье-Стокса свойствами, как на дифференциальном, так и на разностном уровне. В то же время для получения устойчивых численных результатов достаточной точности в этой задаче на каждом шаге по времени необходимо решать САУ весьма небольшой размерности.

Проведем тестирование разработок из параграфов 1 и 2 настоящей работы с помощью этой же задачи, повторив результаты тестов из [16] на простом точном решении – аналоге уединенной волны, и дополнив их

результатами собственных тестов на точных решениях более сложной природы – аналогах волн с предвестником и следом.

Рассмотрим начально-краевую задачу на бесконечном отрезке $[\alpha, \infty)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1.8)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad a \leq x \leq \infty, \quad (1.9)$$

$$u(a, t) = \varphi_1(t), \quad (1.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \varphi_2(t), \quad (1.11)$$

где $u = u(x, t)$, $x \in [\alpha, \infty)$, $t \in [0, T]$, $f(x, t), \psi(x, t), \varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)$ – известные функции своих аргументов. Введем неравномерную по пространству и равномерную по времени сетку. Аппроксимируем на ней задачу (1.8)-(1.11) некоторой разностной схемой. Очевидно, что в каждом конкретном случае решение дифференциальной задачи ищется в некоторой ограниченной области. Следовательно, для замыкания разностной задачи необходимо перенести краевое условие (1.11) с бесконечности на границу конечной области. В качестве численного условия на правой границе используем аппроксимацию самого уравнения (1.8) внутрь области. Такой метод получения краевого условия на границе конечной области существенно не ухудшает ситуацию в вопросе единственности решения разностной задачи. В этом, например, можно убедиться, рассмотрев для уравнения (1.8) задачу Дирихле в некоторой ограниченной по пространственной переменной области. Несмотря на то, что на дифференциальном уровне такая задача имеет единственное решение, легко проверить, что соответствующая ей нелинейная разностная задача обладает множеством решений. Построенное граничное условие является следствием самого уравнения (1.8) и не использует условие на бесконечности (1.11). Интегрируя уравнение (1.8) сначала по x на промежутке $[b; \infty)$, (где b –

правая граница конечной области), затем по t на промежутке $[t; t+\Delta t]$, учитывая краевое условие на бесконечности (1.11), а также, предполагая, что

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, и пренебрегая величиной $\int_b^\infty [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] dx$ при $\Delta t \approx$

0, получим:

$$-\frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} u^2(b, t) dt + \mu \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) dt = F(b, t, t + \Delta t). \quad (1.12)$$

Равенство

(1.12) можно принять за краевое условие на границе конечной области, которое является следствием, как самого уравнения (1.8), так и краевого условия на бесконечности (1.11).

Независимо от того, какой из построенных способов переноса краевого условия используется, получающуюся разностную задачу на каждом дискретном временном шаге можно представить как САУ. Оператор этой системы в общем случае является билинейным (конвективное слагаемое аппроксимируется на верхнем временном слое, используется полностью неявная разностная схема). В частном линейном случае (применяется линеаризация конвективного слагаемого, используется полу-неявная разностная схема) оператор системы заведомо не обладает известными свойствами (самосопряженность, знакоопределенность) ввиду замыкания разностной задачи указанными выше способами. Для решения САУ будем использовать рассмотренный в параграфе 1 метод НА и его модификации.

В процессе тестирования были проведены серии численных расчетов задачи (1.8)-(1.11) при различных способах аппроксимации исходного дифференциального уравнения, различных вариантах выбора оптимальных итерационных параметров при решении САУ, различных коэффициентах μ и правых частях. Приведем основные варианты тестовых расчетов:

1. Линейный случай – для аппроксимации исходной дифференциальной задачи использовалась линеаризованная разностная схема, таким образом, на каждом шаге по времени необходимо было решать СЛАУ. Матрицы этих СЛАУ являются, как отмечалось, несимметричными и знаконеопределенными, а также вследствие переноса краевого условия с бесконечности на границу конечной области нарушается их трехдиагональная структура. В алгоритме (1.2) итерационные параметры $\alpha_{n+1} = \{\alpha_{n+1}^{(i)}\}$ выбирались последовательно из условия минимума нормы соответствующего вектора невязки. На каждом шаге по времени наблюдалась сходимость итерационного процесса (1.2) приблизительно с одинаковой скоростью.
 - 1.1. В алгоритме (1.2) итерационные параметры выбирались из условия минимума нормы вектора невязки на текущем итерационном шаге при оптимизации по группе параметров. Такую группу составляли те элементы, которые влияли на максимальный по модулю элемент вектора невязки, полученный на предыдущем итерационном шаге. При этом на каждом итерационном шаге необходимо было дополнительно решать задачу многопараметрической оптимизации, представляющую собой СЛАУ небольшой размерности. Несмотря на дополнительные вычисления, такой подход позволил повысить скорость сходимости итерационного процесса на каждом временном шаге.
 - 1.2. В алгоритме (1.2) использовалась групповая оптимизация с учетом структуры матрицы СЛАУ. Именно, группа итерационных параметров составлялась из таких элементов, чтобы СЛАУ, возникающая для их определения, имела диагональный вид. Такой подход обеспечил наивысшую скорость сходимости итерационного процесса (1.2) на каждом шаге по времени.

2. Нелинейный случай – для аппроксимации исходной дифференциальной задачи использовалась полностью неявная разностная схема, таким образом, на каждом шаге по времени необходимо было решать СБАУ. Также как и в линейном случае в алгоритме (1.2) использовалась последовательная и групповая оптимизация. Скорость сходимости итерационного процесса на каждом временном шаге оказалась существенно ниже, чем в линейном случае. Смысл применения неявной схемы заключался в увеличении шага по времени (сохраняя устойчивость схемы), уменьшая тем самым суммарное время расчета нестационарной задачи.

Тестовые расчёты проводились для трех типов решений:

1. Аналог бегущей уединённой волны

$$u(x, t) = a_1 e^{-(x-a_2 t)^2}$$

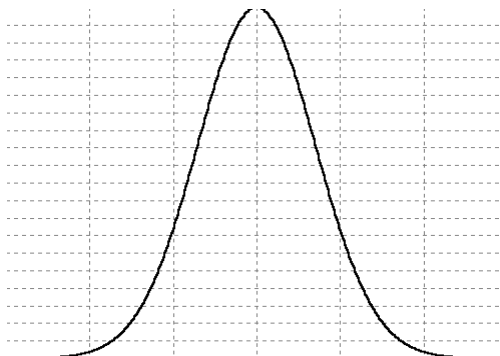


Рис. 1.6 Аналог бегущей уединенной волны

2. Аналог бегущей уединённой волны со следом

$$u(x, t) = a_1 e^{-(x-a_2 t)^2} + b_1 e^{-(x-b_2 t)^2}$$

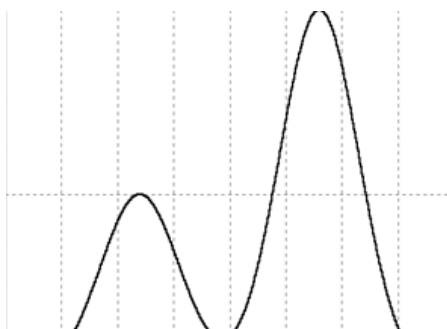


Рис. 1.7 Аналог бегущей уединённой волны со следом

Это означает, что, начиная с некоторого момента времени, в противоположном направлении от основной волны отделяется волна с меньшей амплитудой и большей скоростью, называемая следом.

3. Аналог бегущей уединённой волны с предвестником и следом

$$u(x, t) = a_1 e^{-(x-a_2 t)^2} + b_1 e^{-(x-b_2 t)^2} + c_1 e^{-(x-c_2 t)^2}$$

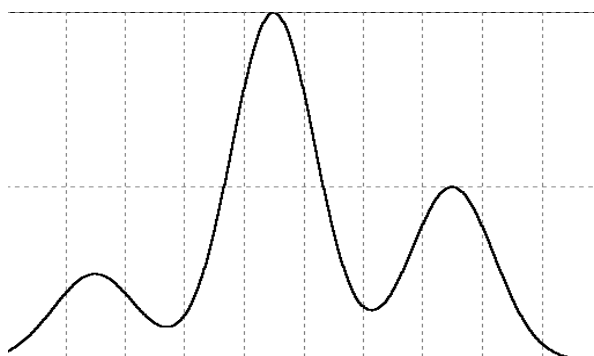


Рис. 1.8 Аналог бегущей уединённой волны с предвестником и следом

Это означает, что, начиная с некоторого момента времени, в том же направлении от основной волны отделяется волна с меньшей амплитудой и большей скоростью, называемая предвестником. В противоположном направлении от волны, начиная с некоторого момента времени, отделяется волна с меньшей амплитудой, называемая следом.

В следующих таблицах приведено суммарное число итераций и максимальная по времени норма погрешности с точным решением (τ – дискретный шаг по времени, h – дискретный шаг по пространственной координате). «Условие первого рода» означает, что данный тест дополнительно проведен при задании на границе конечной области точного краевого условия типа Дирехле (для проверки работоспособности численного алгоритма в отсутствии погрешности, вносимой численным краевым условием).

[0; T]	[a; b]	τ	h	Условие первого рода, $\mu=1$		Интегрально условие, $\mu=0,1$	
				число итераций	норма погрешности	число итераций	норма погрешности
[0; 2]	[-1; 1]	0,1	0,1	571	0,01	75	0,09

[0; 2]	[-1; 1]	0,01	0,1	2406	0,002	494	0,014
[0; 2]	[-1; 1]	0,01	0,03	23811	0,009	1954	0,02
[0; 2]	[-1; 1]	0,001	0,04	61283	0,0009	4732	0,011
[0; 2,5]	[-3; 3]	0,01	0,1	2528	0,009	507	0,04
[0; 2,5]	[-3; 3]	0,001	0,04	56287	0,004	5000	0,02

Таб. 1.1 Уединенная волна

[0; T]	[a; b]	τ	h	Условие первого рода, $\mu=1$		Интегральное условие, $\mu=0,1$	
				число итераций	норма погрешности	число итераций	норма погрешности
[0; 2,5]	[-2; 2]	0,001	0,04	12351	0,007	5000	0,02
[0; 2,5]	[-2; 2]	0,01	0,1	2923	0,02	750	0,06
[0; 2,5]	[-3; 3]	0,1	0,3	260	0,1	183	0,3
[0; 3]	[-4; 4]	0,01	0,1	2347	0,03	930	0,09
[0; 3]	[-4; 4]	0,001	0,04	9558	0,008	6000	0,05

Таб. 1.2 Уединенная волна с предвестником

[0; T]	[a; b]	τ	h	Условие первого рода, $\mu=1$		Интегральное условие, $\mu=0,1$	
				число итераций	норма погрешности	число итераций	норма погрешности
[0; 5]	[-3; 5]	0,001	0,04	30717	0,013	10000	0,06
[0; 5]	[-3; 5]	0,01	0,1	544	0,08	1471	0,19
[0; 7]	[-3; 7]	0,001	0,04	39147	0,014	14000	0,08
[0,7]	[-3; 7]	0,01	0,1	7336	0,08	2071	0,26

Таб. 1.3 Уединенная волна с предвестником и следом

Приведем далее в качестве иллюстрации расчета графики точного и численного решения теста № 1 Таб. 1.2 для начального, промежуточного и конечного момента времени (точное решение отмечено на графиках «жирной» линией, численно решение – «обычной» линией):

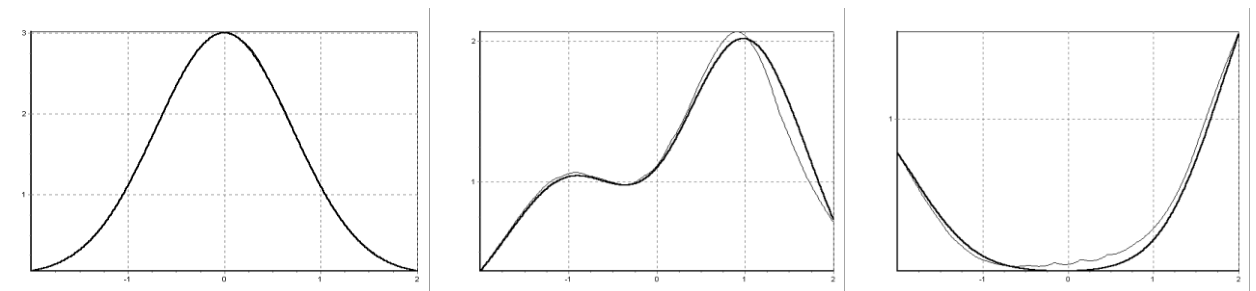


Рис. 1.9 Графики точного и численно решения теста № 1 Таб. 1.2

В данном параграфе рассмотрен процесс тестирования МА и его программной реализации на нестационарном уравнении Бюргерса, которое с одной стороны обладает всеми особенностями целевых задач, с другой (в виду одномерности) позволяет за короткий промежуток времени провести надлежащее количество серий тестовых расчетов.

Настоящая глава была посвящена этапам разработки ПК для решения нестационарных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости. Подробно рассмотрены основные стадии данного процесса:

1. Подготовка математического аппарата;
2. Программная реализация;
3. Тестирование;

Ядро МА составил метод НА минимальных невязок решения САУ, который позволил организовать единообразный подход к решению разностных нестационарных уравнений Навье-Стокса, не зависимо от способов аппроксимации исходных дифференциальных систем уравнений и вариантов замыкания дискретных задач. Компонентная архитектура программной реализации и разработанная модель интерфейсов взаимодействия между отдельными блоками программы обеспечили такие важные свойства ПК, как адаптивность, гибкость, расширяемость, масштабируемость. Проведенные тесты на модельной задаче показали высокую эффективность метода НА при решении линейных и нелинейных САУ, возникающих при аппроксимации исходных дифференциальных задач с применением сложных численных краевых условий, а полученные результаты расчетов продемонстрировали хорошую согласованность точного и численного решения.

В следующих разделах настоящей работы разработки данной главы будут применены к расчету различных двумерных и трехмерных задач гидродинамики, имеющих теоретический и практический интерес.

Глава 2. Численное моделирование двумерных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости

Все реальные течения жидкости, представляющие какой-либо практический интерес, являются трехмерными. Однако до недавнего времени усилия многих исследователей в области вычислительной гидродинамики были направлены на изучение плоских задач. Огромное количество работ (см., например, обзоры в [41, 14]) посвящено методам решения именно **двумерных** систем нестационарных уравнений Навье-Стокса. Разработано немалое количество численных алгоритмов расчета плоских течений, которые невозможно обобщить на пространственный случай [28, 29, 33]. Основная причина этому, очевидно, в том, что первые численные исследования в области движения вязкой несжимаемой жидкости проводились в двумерном случае. В то время по объективным оценкам не было ни достаточных мощностей ЭВМ, ни развитого математического аппарата, которые бы позволили считать пространственные задачи. Но даже сейчас, когда в распоряжении исследователей имеются суперэвм, кластерные системы и параллельные вычисления, когда развито большое количество численных алгоритмов для расчета трехмерных течений, методы решения двумерных задач продолжают представлять немалый интерес. Это объясняется, в основном, тем, что проведение плоских расчетов в настоящее время уже не вызывает особых затруднений, и многие исследователи используют их для тестирования разработанных математических алгоритмов и программных реализаций, перенося знания, полученные из результатов численных экспериментов, на аналогичный пространственный случай. Действительно, при существующих вычислительных мощностях и развитом математическом аппарате за довольно короткое время и на достаточно мелкой сетке можно провести серию расчетов плоского течения (аналога будущей трехмерной задачи), обнаружить какие-либо его (течения)

особенности и учесть их при подготовке к реальному вычислительному эксперименту. Более конструктивной причиной интереса к двумерным задачам является потребность исследователя в численном решении систем нестационарных уравнений Навье-Стокса в более «жестких» постановках. Например, когда решаются принципиально нестационарные задачи или задачи при высоких числах Рейнольдса. В этих случаях течения могут терять устойчивость [18, 19], их режим может приобретать турбулентный характер, и решение таких задач даже в двумерном виде становится весьма затруднительным.

С точки зрения изложенных выше позиций, обосновывающих актуальность расчетов плоских течений, абсолютно логично начать применение разработанного в главе 1 КП для численного моделирования **двумерных** нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. В данной главе рассматриваются и приводятся: основные дифференциальные постановки двумерных нестационарных систем уравнений Навье-Стокса (параграф 1), особенности алгоритмов их численного решения (параграф 2), и расчеты некоторых двумерных нестационарных течений (параграф 3).

2.1 Дифференциальная постановка

Первые расчеты двумерных задач были проведены, используя на дифференциальном уровне одну из альтернативных формулировок, полученную с помощью введения «функции тока» и «функции вихря» [14], что имеет очень простое объяснение: исчезает принципиальная трудность, связанная с расчетом давления и общее число уравнений сокращается до одного или двух. Отметим, что подобные дифференциальные постановки с успехом используются и в настоящее время для расчета плоских течений [16]. Только в 80-х гг. прошлого века, когда естественная формулировка уже применялась для численного решения пространственных задач, появились замечания [41] о преимуществах ее использования при расчетах двумерных течений. Естественная формулировка дифференциальной задачи о нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости не зависит от размерности и сохраняет свои достоинства и недостатки в обоих случаях. Напротив, формулировки, использующие «функцию тока» и «вихрь» не только критично зависят от размерности задачи, но и имеют принципиальные особенности при постановках в многосвязных областях [122].

В данном параграфе ограничимся рассмотрением двумерной дифференциальной системы нестационарных уравнений Навье-Стокса, записанной в формулировках, использующих «функцию тока» и «вихрь», а естественную постановку приведем в параграфе 1 главы 3 при изучении пространственных задач.

Рассмотрим плоское неустановившееся течение вязкой однородной несжимаемой жидкости в ограниченной $(N+1)$ -связной области G на временном промежутке $[0, T]$. Граница области $\partial G = \prod_{i=0}^N \Gamma_i$ состоит из непересекающихся замкнутых контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, причем контур Γ_0 охватывает остальные контуры. Данная математическая задача с помощью введения функции тока ψ может быть сведена к одному уравнению четвертого порядка [1] (все величины записаны в безразмерном виде [123]):

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \Delta \psi, \quad (2.1)$$

решение которого должно удовлетворять следующим начальным и краевым условиям [122]:

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in G, t = 0, \quad (2.2)$$

$$\psi(x, y) = \xi_0(x, y, t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}(x, y) = \eta_0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0, t \in (0, T], \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = \xi_i(x, y, t) + \lambda_i(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}(x, y) = \eta_i(x, y), \\ (x, y) \in \Gamma_i, i = 1, \dots, N, t \in (0, T], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_i} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) dx + \right. \\ \left. + \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right) dy \right] = 0, \\ i = 1, \dots, N, t \in (0, T], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где x, y – декартовы координаты, t – время, Re – число Рейнольдса, $\varphi(x, y)$, $\xi_0(x, y, t)$, $\eta_0(x, y)$, $\xi_i(x, y, t)$, $\eta_i(x, y)$ – известные функции своих аргументов. В общем случае многосвязной области функция тока известна только на одной из границ, на остальных же она определена с точностью до аддитивных функций времени $\lambda_i(t)$, которые должны находиться в процессе численного решения задачи [122].

При решении многих двумерных задач гидродинамики с целью преодолеть трудности решения уравнения четвертого порядка относительно функции тока вводят функцию вихря ω и переходят к системе из двух более простых уравнений:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (2.6)$$

$$\Delta \psi = -\omega. \quad (2.7)$$

К преимуществам такой формулировки задачи традиционно относят более простую реализацию численного алгоритма, основанного на

применении так называемого двухполевого метода, суть которого заключается в последовательном численном решении уравнений (2.6) и (2.7) соответственно [33]. На первом этапе для решения линеаризованного уравнения переноса вихря обычно используют какую-либо схему расщепления; на втором этапе, используя итерационные методы, по известным значениям вихря находят решение уравнения для функции тока. Главным недостатком данной методики является отсутствие в исходной постановке краевых условий для функции вихря, которые приходится получать в процессе численного решения, что в некоторых случаях приводит к неустойчивости алгоритма (см. замечания в обзоре [14]). Для уравнения же (2.1) ставятся известные из исходной постановки задачи начальные и краевые условия, но при этом на каждом временном шаге требуется решать уравнение четвертого порядка на функцию тока.

В данном параграфе рассмотрены наиболее часто используемые при решении двумерных задач дифференциальные формулировки системы нестационарных уравнений Навье-Стокса, использующие «функцию тока» и «вихрь», в общем случае многосвязной области, а также отмечены их преимущества и недостатки. Естественная формулировка исходной дифференциальной системы не зависит от размерности задачи и будет рассматриваться в параграфе 1 главы 3 настоящей работы.

2.2 Численный алгоритм

Как уже отмечалось выше, к настоящему моменту накоплено большое количество различных вариаций численных методов решения двумерных нестационарных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, использующих альтернативные формулировки исходных дифференциальных систем. Все они, в основном, ориентированы на последовательное решение двух скалярных уравнений относительно «вихря» и «функции тока» соответственно, и, в большинстве своем, отличаются между собой модификациями, связанными с постановкой численных граничных условий. Реже встречаются численные алгоритмы, использующие только одно уравнение четвертого порядка относительно «функции тока» (см. обзор [14]).

В данном параграфе приведем основные этапы используемых в настоящей работе численных алгоритмов решения двумерной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса, записанной в формулировках, использующих «функцию тока» и «вихрь».

Введем в области G неравномерную по x, y , и равномерную t , согласованную с границей ∂G сетку $G_{h,\tau}$. Аппроксимируем на сетке $G_{h,\tau}$ систему (2.6), (2.7) и условия (2.1)-(2.5) линеаризованной разностной схемой:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \Delta \omega^{n+1}, \\ \Delta \psi^{n+1} &= -\omega^{n+1}, \\ (x, y) \in G, n &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\omega^0 = \omega(x, y, 0), \psi^0 = \varphi(x, y), (x, y) \in G, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
\psi^{n+1} &= \xi_0(x, y, t^{n+1}), \\
\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial n} &= \eta_0(x, y, t^{n+1}), (x, y) \in \Gamma_0, \\
n &= 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\psi^{n+1} &= \xi_i(x, y, t^{n+1}) + \lambda_i(t^{n+1}), (x, y) \in \Gamma_i, \\
\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial n} &= \eta_i(x, y, t^{n+1}), (x, y) \in \Gamma_i, \\
i &= 1, \dots, N, n = 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Gamma_i} \left[\left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial y^2} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \Delta \psi^{n+1}}{\partial y} \right) dx + \right. \\
&\left. + \left(-\frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \Delta \psi^{n+1}}{\partial x} \right) dy \right] = 0, \\
i &= 1, \dots, N, n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Пользуясь линейностью соотношений (2.8)-(2.11) применим классический метод суперпозиции [124] и будем искать решение на текущем временном слое в виде:

$$\begin{aligned}
\omega^{n+1}(x, y) &= \omega_0^{n+1}(x, y) + \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \omega_j^{n+1}(x, y), \\
\psi^{n+1}(x, y) &= \psi_0^{n+1}(x, y) + \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi_j^{n+1}(x, y), \\
(x, y) &\in \bar{G}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь $\omega_0^{n+1}(x, y)$ и $\psi_0^{n+1}(x, y)$ являются решениями задачи

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_0^{n+1} - \omega_0^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega_0^{n+1}, \\
\Delta \psi_0^{n+1} &= -\omega_0^{n+1}, \\
(x, y) &\in G,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} \psi_0^{n+1} &= \xi_i(x, y, t^{n+1}), \frac{\partial \psi_0^{n+1}}{\partial n} = \eta_i(x, y, t^{n+1}), (x, y) \in \Gamma_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для функций $\omega_j^{n+1}(x, y)$, $\psi_j^{n+1}(x, y)$, $j = 1, 2, \dots, N$ имеем следующие задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_j^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_j^{n+1}}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega_j^{n+1}, \\ \Delta \psi_j^{n+1} &= -\omega_j^{n+1}, \\ (x, y) &\in G, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \psi_j^{n+1} &= \delta_{ij}, \frac{\partial \psi_0^{n+1}}{\partial n} = 0, (x, y) \in \Gamma_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.16)$$

При таком определении функций $\omega_0^{n+1}(x, y)$, $\psi_0^{n+1}(x, y)$, $\omega_j^{n+1}(x, y)$, $\psi_j^{n+1}(x, y)$ при любых λ_j функции $\omega^{n+1}(x, y)$, $\psi^{n+1}(x, y)$ будут удовлетворять системе (2.8) и условиям (2.9)-(2.11). Для того чтобы они удовлетворяли интегральному условию подставим в него (2.12) и получим СЛАУ для нахождения λ_j .

Таким образом, в описанном алгоритме нахождение решения на текущем временном слое сводится к решению $N+2$ краевых задач в многосвязной области и СЛАУ размерности N для определения аддитивных постоянных.

Как отмечалось ранее, решение краевых задач (2.13)-(2.16) осуществляется последовательным интегрированием уравнений переноса вихря и уравнений для функции тока соответственно. Для получения численного решения уравнения переноса вихря на каждом шаге по времени будем использовать устойчивую схему стабилизирующих поправок. Недостающие краевые условия для вихря на твердых стенках будем получать либо с помощью формул Тома первого порядка точности [14], либо из

определения функции вихря с помощью аппроксимации первых производных от компонент вектора скорости в граничных точках внутри области. Наиболее ресурсоемкую часть численного алгоритма составляет решение разностных уравнений Пуассона для функции тока, которые на каждом шаге по времени можно представить в виде СЛАУ. Матрицы этих СЛАУ в зависимости от структуры сетки $G_{h,\tau}$ могут оказаться несимметричными и не знакоопределенными, поэтому для их (СЛАУ) решения применим схему НА минимальных невязок с групповой оптимизацией итерационных параметров, рассмотренную в главе 1. Также отметим, что матрицы получаемых в процессе реализации алгоритма СЛАУ не зависят от временного слоя и номера домена многосвязной области. Это дает возможность при сравнительно небольшом количестве узлов сетки (например, при тестовых расчетах) использовать для решения СЛАУ схему с полной оптимизацией итерационных параметров и получать точное решение систем за одну итерацию, что на порядки экономит вычислительные затраты. Эту же возможность можно использовать и при серийных расчетах нестационарных задач, если заметить, что матрицы СЛАУ не зависят также от числа Рейнольдса и граничных условий.

Наряду с традиционным алгоритмом для численного решения двумерных задач в односвязной области будем использовать дискретизацию исходного уравнения (2.1). При этом отпадает необходимость задания численных граничных условий для функции вихря, но появляются существенные трудности при решении на каждом шаге по времени разностного уравнения четвертого порядка на функцию тока. В данной формулировке помимо линеаризованной разностной схемы будем также применять аппроксимацию конвективных слагаемых на верхнем временном слое (аналогично одномерному случаю, рассмотренному при тестировании метода НА в главе 1), что позволяет существенно увеличить шаг по времени. Независимо от выбора разностной схемы дискретное уравнение для функции тока в этом случае на каждом временном слое можно представить как

систему билинейных алгебраических уравнений (СБАУ). Для решения получаемых СБАУ применим схему неполной аппроксимации минимальных невязок с последовательной оптимизацией итерационных параметров, рассмотренную в главе 1.

Далее приведем один из численных способов переноса граничных условий с удаленной границы на границу конечной области при решении двумерных нестационарных систем уравнений Навье-Стокса. Такая проблема возникает, например, при исследовании различного рода задач протекания или внешнего обтекания.

Рассмотрим плоское симметричное течение вязкой однородной несжимаемой жидкости в области $[0; \infty] \times [0; y_0(x)]$ на временном промежутке $[0; T]$:

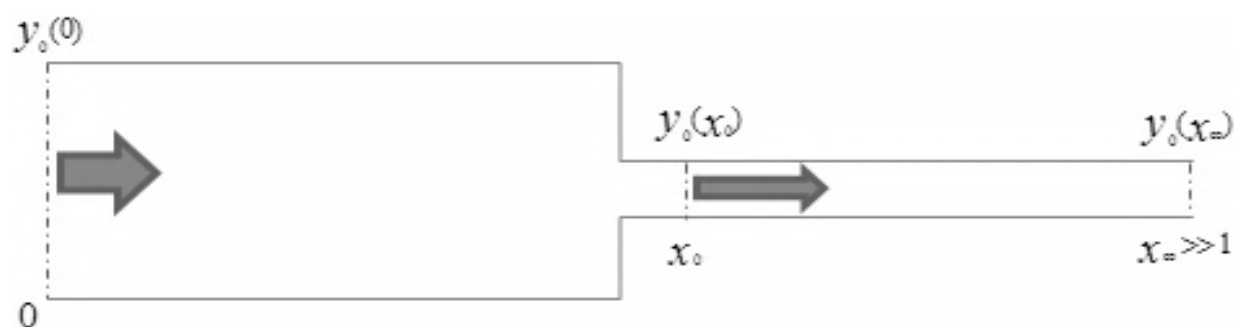


Рис. 2.1 Область симметричного течения в плоском канале с удаленной границей.

На всей границы указанной области (в том числе на удаленной границе) заданы краевые условия для компонент вектора скорости и функции тока. Для функции вихря известны значения на входной и удаленной границах. Численное интегрирование данной задачи, очевидно, всегда выполняется в какой-либо конечной области $[0; x_0] \times [0; y_0(x)] \in [0; \infty] \times [0; y_0(x)]$. При этом, как известно [15], возникает проблема задания краевого условия для функции вихря на границе конечной области, которое бы давало устойчивое решение. На твердых стенках граничные условия для функции вихря, как обсуждалось ранее, задаются в процессе численной реализации алгоритма с помощью формулы Тома или исходя из определения вихря. По аналогии с одномерным случаем построим краевое условие для функции вихря на

выходной границе при $x = x_0$, которое является следствием уравнения переноса вихря и известного из исходной постановки задачи краевого условия для функции вихря на бесконечности. Последовательно интегрируя уравнение (2.6) по t на промежутке $[t_0; t_0 + \Delta t]$, по x на промежутке $[x_0; \infty]$ и по y на промежутке $[0; y_0]$, учитывая краевые условия для компонент вектора скорости и функции вихря на удаленной границе, и пренебрегая величиной $O(\Delta t)$, получим:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_0^{y_0} u(x_0, y, t) \omega(x_0, y, t) dy dt - \frac{1}{Re} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_0^{y_0} \frac{\partial \omega(x_0, y, t)}{\partial x} dy dt = \\ = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_0^{y_0} u(\infty, y, t) \omega(\infty, y, t) dy dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

Равенство (2.17) можно принять за краевое условия для функции вихря на выходной границе конечной области.

Уравнение (2.7) тождественно связывает функцию тока с функцией вихря во всей бесконечной области. Поэтому для функции тока на выходной границе конечной области ставится краевое условие, являющееся следствием аппроксимации уравнения (2.7) внутрь области с учетом полученных ранее значений функции вихря.

Отметим, что рассмотренные краевые условия в процессе реализации численного алгоритма порождают СЛАУ с матрицами, заведомо не обладающими свойствами симметричности и знакоопределенности, поэтому использование метода НА для их решения в этом случае является принципиальным.

Заметим также, что предложенный способ переноса краевых условий можно использовать не только для решения рассмотренной задачи, но и при моделировании любых двумерных симметричных течений.

В данном параграфе рассмотрены основные этапы численных алгоритмов, используемых в настоящей работе при решении двумерных нестационарных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Особое внимание уделено особенностям их реализации в многосвязных областях. Также предложены модификации, связанные с использованием полностью неявных разностных схем для решения уравнения четвертого порядка относительно функции тока в односвязной области, и способом переноса краевых условий с удаленной границе на границу конечной области при решении симметричных задач. В следующем параграфе текущие разработки будут применены к расчету разного рода двумерных нестационарных течений.

2.3 Результаты расчетов

В работе [3] одна из «великих» проблем современной гидродинамики обозначена как доказательство (или опровержение) глобальной теоремы существования стационарных и вынужденных периодических движений вязкой несжимаемой жидкости. Автор отмечает: *«...при увеличении числа Рейнольдса стационарный режим может исчезнуть - уйти на бесконечность, когда $Re \rightarrow Re_*$, причем критическое значение Re_* конечно. Однако перед тем как исчезнуть этот стационарный режим теряет устойчивость, порождая автоколебательный периодический режим (возможно, конечно, что сначала происходит ветвление в классе стационарных режимов). Интересно было бы проверить, хотя бы в численном эксперименте, возможность такого хода событий».*

Действительно, при решении задач о течении вязкой несжимаемой жидкости во многих случаях используется стационарная постановка исходной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса. Это объясняется тем, что для практических целей зачастую важен не сам процесс развития течения, а его установившийся режим. Для решения стационарных задач гидродинамики многими исследователями в течение последних десятилетий активно разрабатываются различные численные алгоритмы [11, 16]. В действительности же любое течение жидкости является нестационарным и всегда имеет фазы своего начала и развития. Используя стационарную постановку задачи, неявно делается естественное, на первый взгляд, предположение о том, что в случае использования стационарных краевых условий течение должно довольно быстро перейти в стационарный режим. В большинстве случаев, как показали численные и натурные эксперименты [125, 126], это, действительно, так. Все же стационарная модель может быть применена не к любой задаче о течении вязкой несжимаемой жидкости. Во-первых, нет строгих теорем, которые бы гарантировали установление течения для любых значений чисел Рейнольдса

[3]. Во-вторых, существуют известные парадоксы симметрии вязких течений [19] и численные расчеты некоторых нестационарных задач [17], которые демонстрируют отсутствие стационарного режима течения жидкости при стационарных краевых условиях.

Таким образом, изучение условий возникновения или отсутствия стационарных решений в конкретных нестационарных задачах со стационарными краевыми условиями является весьма актуальной проблемой - фактически от этого зависит возможность использования стационарных моделей. Трудности таких исследований заключаются в том, что нестационарные решения потенциально могут появиться только при довольно больших значениях чисел Рейнольдса и на больших интервалах времени, когда режим течения становится близким к турбулентному, и для их обнаружения необходимы эффективные устойчивые численные алгоритмы.

В связи с вышеизложенным, целью настоящего параграфа является: во-первых, применение рассмотренных в предыдущих параграфах алгоритмов для численного расчета различных двумерных нестационарных задач о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости, и, во-вторых, определение с помощью серийных численных экспериментов критических значений чисел Рейнольдса, при которых течения на больших интервалах времени теряют свойство перехода в стационарный режим.

Сначала необходимо было убедиться в работоспособности и устойчивости численного алгоритма на сколь угодно больших интервалах времени, поэтому первая серия расчетов связана с исследованием внутренней задачи со стационарными и периодическими краевыми условиями при умеренных числах Рейнольдса. Область G в этом случае представляет собой квадратную каверну с длиной стороны $L=1$. Верхняя крышка каверны движется вдоль оси X с заданной скоростью $U(t)$. Остальные стенки каверны неподвижны. Вся граница области G является непроницаемой. На Рис. 2.2 приведены линии тока течения при $U(t)=1$, $Re=400$, $h=0.02$, $\tau=0.01$ в

различные моменты времени, демонстрирующие фазы начала, развития и установления течения (Re - число Рейнольдса, h – дискретный шаг по пространственным координатам, τ – дискретный временной шаг).

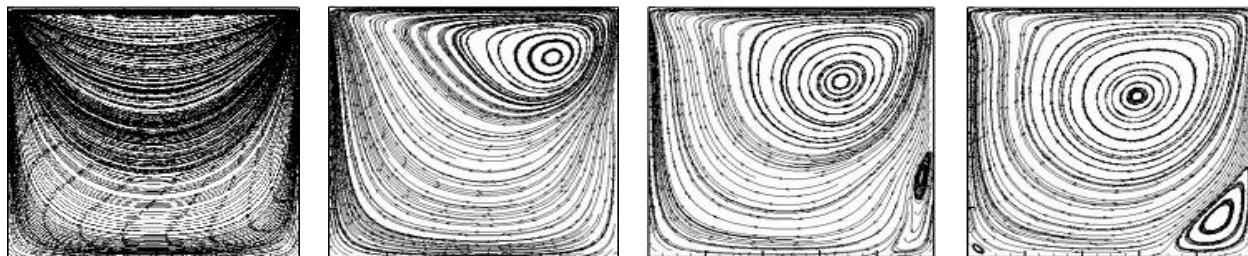


Рис. 2.2 Линии тока течения в квадратной каверне при $U(t)=1$, $Re=400$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

Полученные результаты свидетельствуют об установлении течения с ростом значений времени и качественно согласуются с результатами других исследователей [16, 125, 126, 127, 128, 129, 130].

На Рис. 2.3 приведены линии тока течения при $U(t)=\sin(t)$, $Re=400$, $h=0.02$, $\tau=0.01$ в моменты времени с периодом движения крышки каверны.

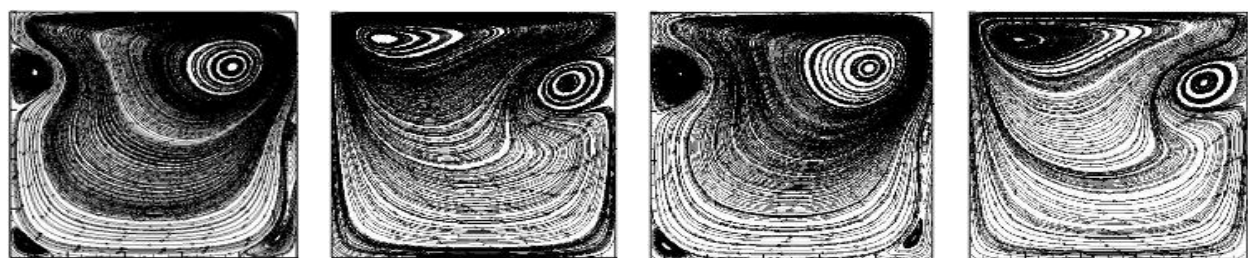


Рис. 2.3 Линии тока течения в квадратной каверне при $U(t)=\sin(t)$, $Re=400$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

Из полученных результатов следует, что течение на сколь угодно больших промежутках времени (расчет проведен для 20 временных периодов) вслед за верхней крышкой сохраняет периодический характер. Этот факт количественно подтверждается графиком распределения по времени вихревой характеристики в произвольно фиксированной точке области. Например, на Рис. 2.4 приведена зависимость функции вихря от времени при $X = 0.2$, $Y=0.8$.

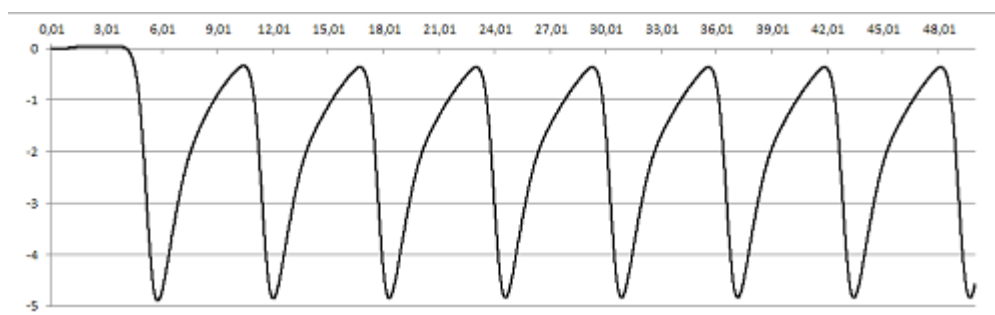


Рис. 2.4 График зависимости функции вихря от времени в задаче о течении в квадратной каверне при $X = 0.2$, $Y=0.8$, $U(t)=\sin(t)$, $Re=400$, $h=0.02$, $\tau = 0.01$

Вторая серия расчетов связана с поиском нестационарного решения в задаче о внутреннем течении. Расчеты в этом случае проводятся при больших числах Рейнольдса, верхняя крышка каверны, как и в задаче на установление, довольно быстро достигает стационарного положения. На Рис. 2.5 приведены линии тока в различные моменты времени, связанные с фазами начала, развития и возникновения неустойчившегося режима течения. Расчеты проведены при $U(t)=1$, $Re=6400$, $h=0.02$, $\tau = 0.01$.

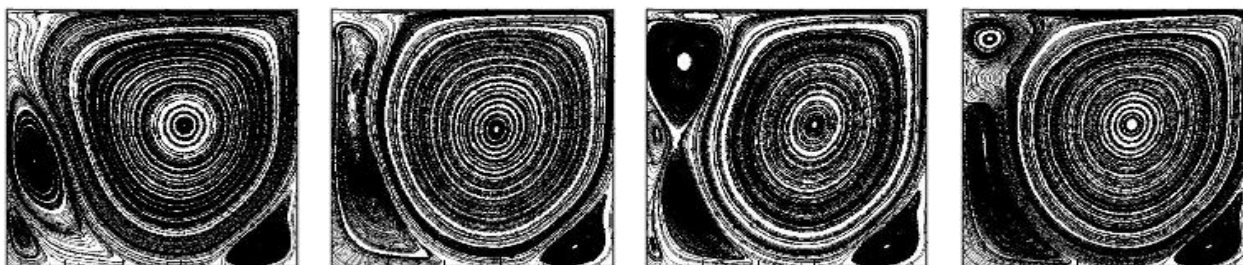


Рис. 2.5 Линии тока течения в квадратной каверне при $U(t)=1$, $Re=6400$, $h=0.02$, $\tau = 0.01$

Результаты расчетов демонстрируют отсутствие стационарного режима течения в каверне при стационарном условии движения верхней крышки в случае, когда значения числа Рейнольдса находятся вблизи критического значения $Re=6400$. На самом деле (хотя это явно и не следует из качественной картины течения) характер движения жидкости в данном случае является периодическим, на что также указывают некоторые исследователи [4, 20]. В этом можно убедиться, если, как и ранее, обратиться к графику распределения по времени вихревой характеристики в произвольно фиксированной точке области (Рис. 2.6: $X = 0.2$, $Y=0.8$).

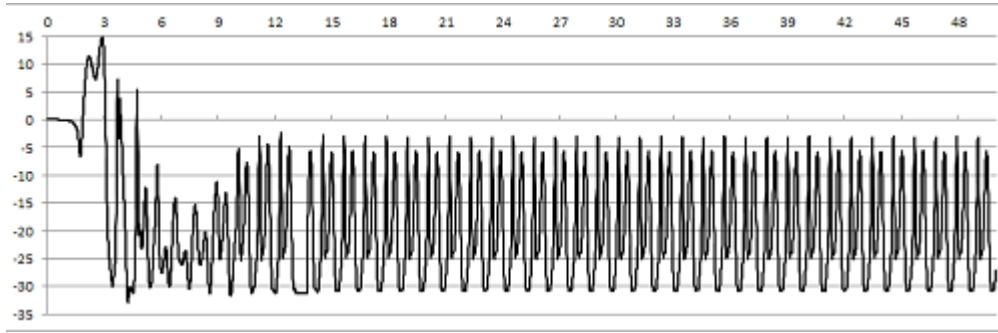


Рис. 2.6 График функции вихря при $X = 0.2$, $Y = 0.8$ в задаче о течении в квадратной каверне при $U(t) = 1$, $Re = 6400$, $h = 0.02$, $\tau = 0.01$

Третья серия расчетов связана с исследованием характера движения жидкости в задаче протекания с изменяющейся геометрией при умеренных (подобные расчеты проводились авторами в работе [130]) и больших числах Рейнольдса. Расчетная область в этом случае представляет собой плоский диффузор длиной $L = 6$ и высотой $H = 1$. Скорость входного потока имеет симметричный параболический профиль и задается своим максимальным значением с помощью функции $U(t)$. На выходе ставятся краевые условия, рассмотренные в параграфе 2 настоящей главы. Верхняя и нижняя стенки неподвижны и непроницаемы. На Рис. 2.7 - Рис. 2.10 приведены линии тока течения при $U(t) = 1$, $Re = 400$, $h = 0.02$, $\tau = 0.01$ в различные моменты времени, демонстрирующие фазы начала, развития и установления течения.

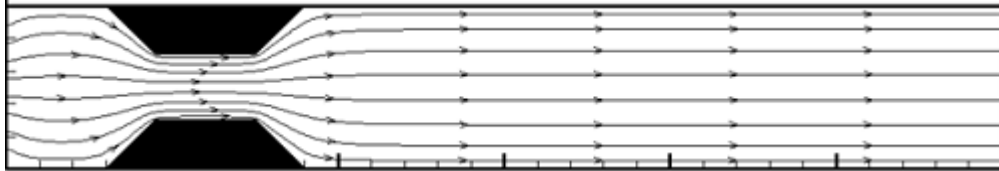


Рис. 2.7 Линии тока течения в плоском диффузоре при $U(t) = 1$, $Re = 400$, $h = 0.02$, $\tau = 0.01$, $t = 0.02$

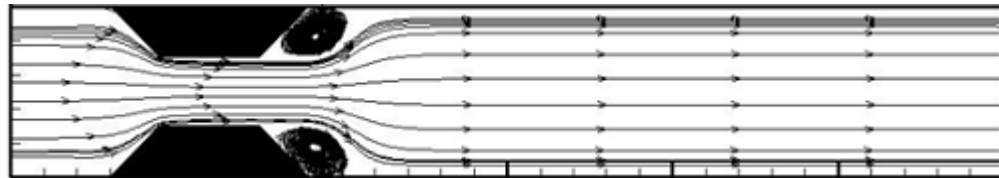


Рис. 2.8 Линии тока течения в плоском диффузоре при $U(t) = 1$, $Re = 400$, $h = 0.02$, $\tau = 0.01$, $t = 1.4$

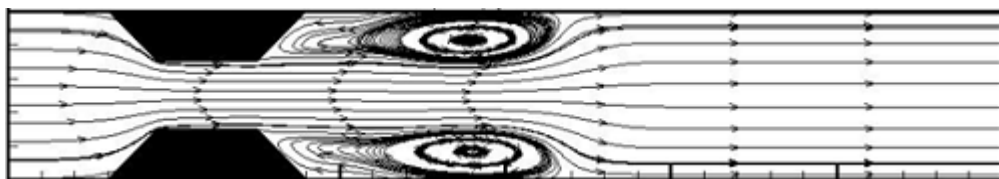


Рис. 2.9 Линии тока течения в плоском диффузоре при $U(t) = 1$, $Re = 400$, $h = 0.02$, $\tau = 0.01$, $t = 15.82$

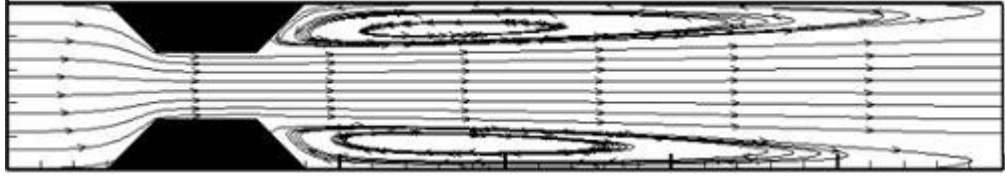


Рис. 2.10 Линии тока течения в плоском диффузоре при $U(t)=1$, $Re=400$, $h=0.02$, $\tau=0.01$, $t=21.02$

Расчеты показали, что при умеренных числах Рейнольдса в задаче протекания, как и для внутренней задачи, имеет место установление течения с ростом значений времени.

На Рис. 2.11 - Рис. 2.14 приведены линии тока течения при $U(t)=1$, $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$ в различные моменты времени, связанные с фазами начала, развития, и возникновения неустановившегося режима течения.



Рис. 2.11 Линии тока течения в плоском диффузоре при $U(t)=1$, $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$, $t=0.02$

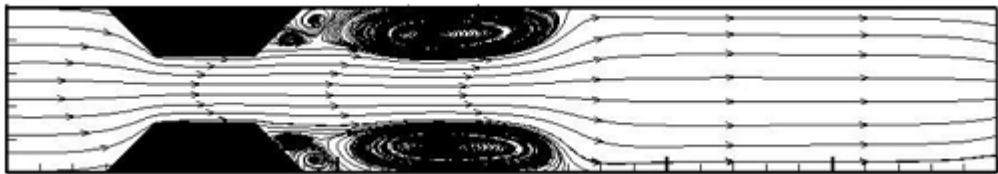


Рис. 2.12 Линии тока течения в плоском диффузоре при $U(t)=1$, $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$, $t=1.4$

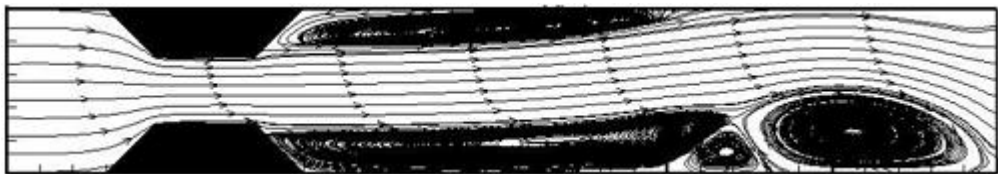


Рис. 2.13 Линии тока течения в плоском диффузоре при $U(t)=1$, $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$, $t=15.82$

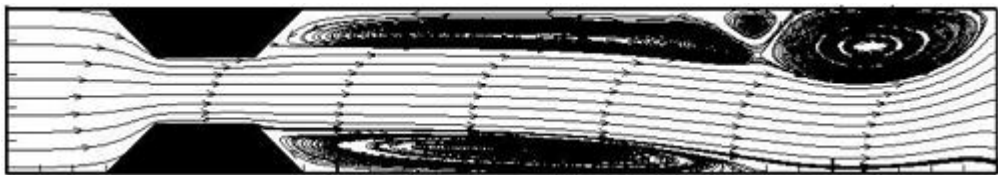


Рис. 2.14 Линии тока течения в плоском диффузоре при $U(t)=1$, $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$, $t=21.02$

Результаты расчетов показывают, что по достижению критического значения числа Рейнольдса ($Re=1200$), начиная с некоторого момента времени, поток попеременно прижимается к верхней и нижней стенкам выходного отверстия, и течение, также как и во внутренней задаче, не переходит в стационарный режим. Необходимо отметить, что в данном случае наряду с неустановившимся периодическим характером движения жидкости (на Рис. 2.15 приведен график распределения по времени вихревой характеристики в фиксированной точке) течение является несимметричным, несмотря на полную симметрию исходной постановки задачи.

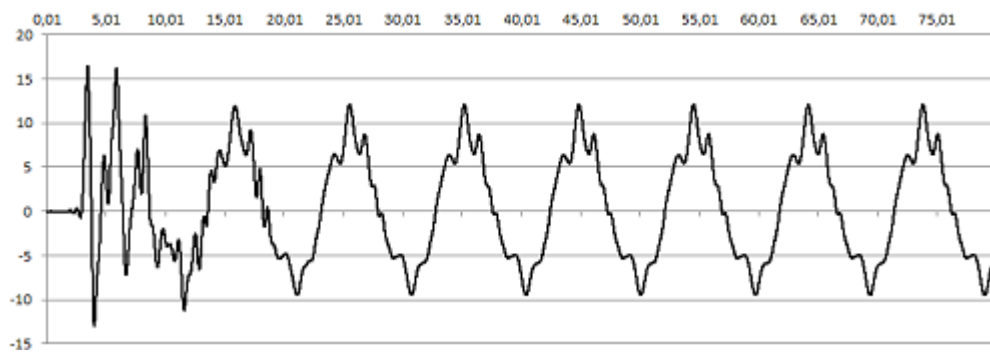


Рис. 2.15 График функции вихря при $X = 5.5$, $Y=0.5$ в задаче о течении в плоском диффузоре при $Re=1200$, $U(t)=1$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

Приведем далее результаты расчетов (Рис. 2.16 - Рис. 2.19), демонстрирующие появление нестационарного решения в задаче протекания, имеющей конкретное практическое приложение. Данная задача является упрощенной моделью шахты "Кольчугинская" Кемеровской области. Загрязненные сточные воды закачиваются в шахту, где происходит процесс их естественной очистки за счет оседания взвешенных в жидкости твердых частиц и разбавления фильтрующимися грунтовыми водами. Как показывает практика затопленные шахты со временем «заиливаются», т.е. выработанное пространство заполняется породой и оседающей примесью. Образовавшийся твердый осадок не сносится течением и может значительно изменить форму дна или даже перекрыть основной ток подаваемой на входе жидкости.

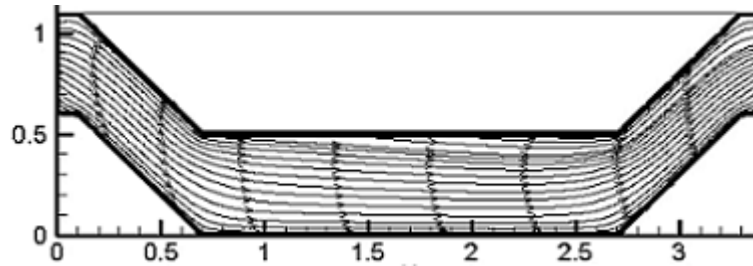


Рис. 2.16 Линии тока течения в шахте при $U(t)=1$, $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$, $t=0.02$

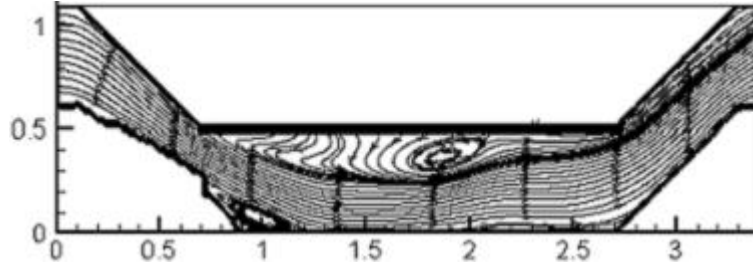


Рис. 2.17 Линии тока течения в шахте при $U(t)=1$, $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$, $t=1.4$

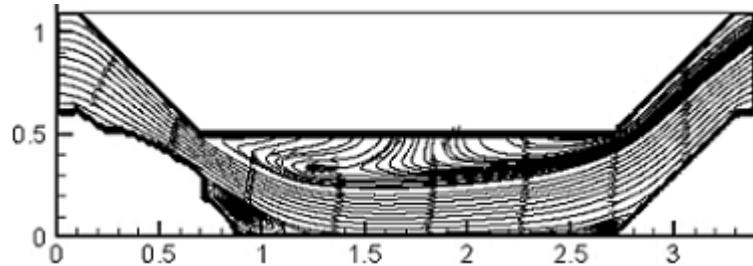


Рис. 2.18 Линии тока течения в шахте при $U(t)=1$, $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$, $t=15.82$

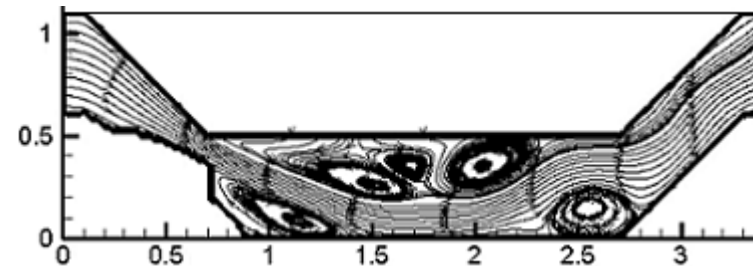


Рис. 2.19 Линии тока течения в шахте при $U(t)=1$, $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$, $t=21.02$

Как показали расчеты, нестационарное решение можно получить не в любой задаче о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости: существенное влияние на его возникновение или отсутствие оказывает геометрия области решения. Например, на Рис. 2.20 приведено стационарное решение известной задачи о течении жидкости над каверной (см. расчеты в работе [131]) при $Re=400$, $h=0.02$, $\tau=0.01$. При этом увеличение значения числа Рейнольдса не привело к появлению нестационарного решения:

течение либо переходит в стационарный режим, либо (по достижению критического значения числа Рейнольдса ($Re=6000$)) приобретает турбулентный характер.

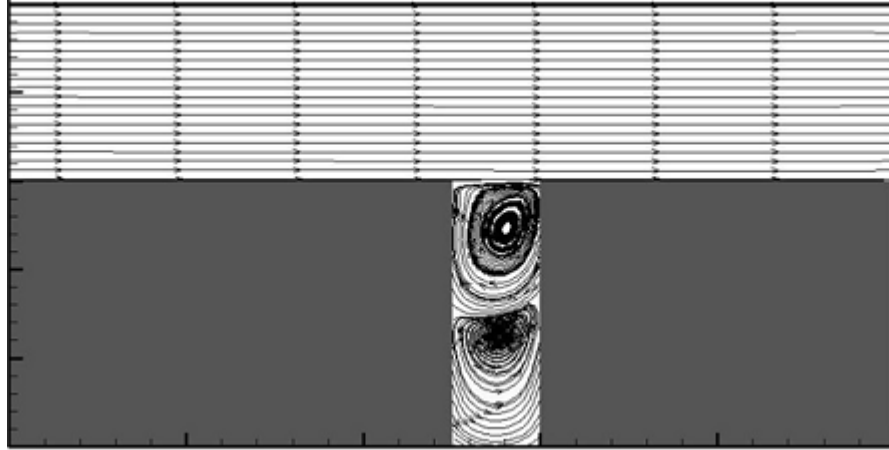


Рис. 2.20 Линии тока стационарного решения задачи о течении в канале с каверной при $Re=400$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

Подобная ситуация имеет место быть и в известной задаче обтекания квадратного препятствия (Рис. 2.21).

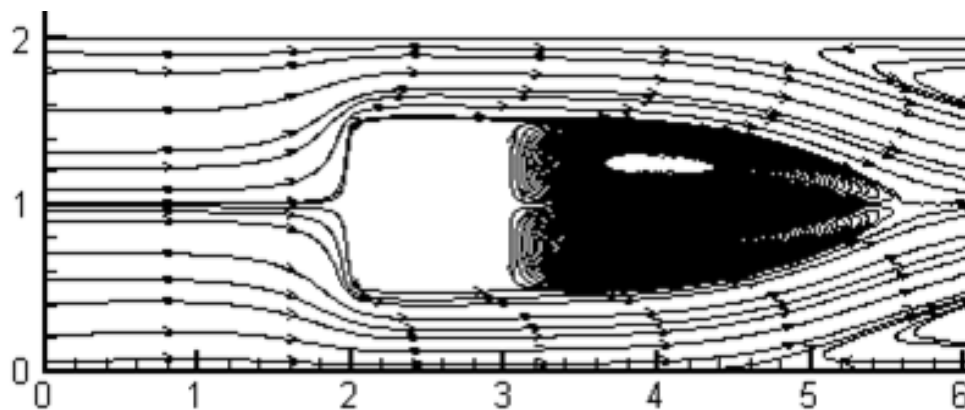


Рис. 2.21 Линии тока стационарного решения задачи обтекания препятствия квадратной формы при $Re=400$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

Отметим один интересный результат расчета – «пограничный» случай. В задаче движения жидкости в траншее П-образной формы при $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$ процесс развития течения (Рис. 2.22 - Рис. 2.26) явно указывает на возникновение нестационарного решения (появление периодических пульсирующих зон), однако со временем течение все же устанавливается (Рис. 2.27). При больших значениях чисел Рейнольдса, как и

в двух предыдущих задачах, нестационарного решения также не возникает - течение турбулизируется и выходит за рамки ламинарного режима.

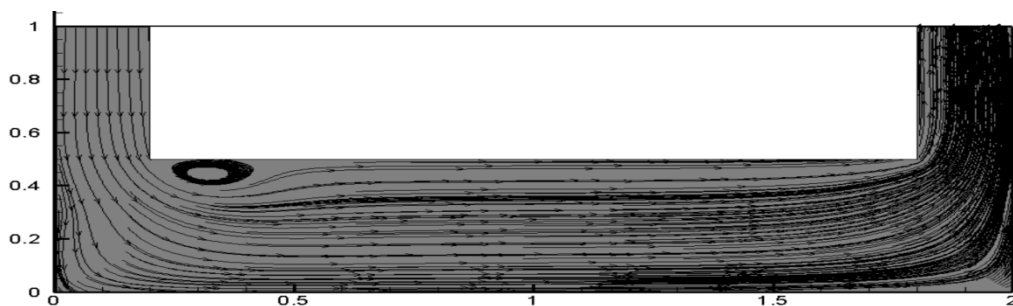


Рис. 2.22 Линии тока начальной фазы течения в задаче движения жидкости в траншее П-образной формы при $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

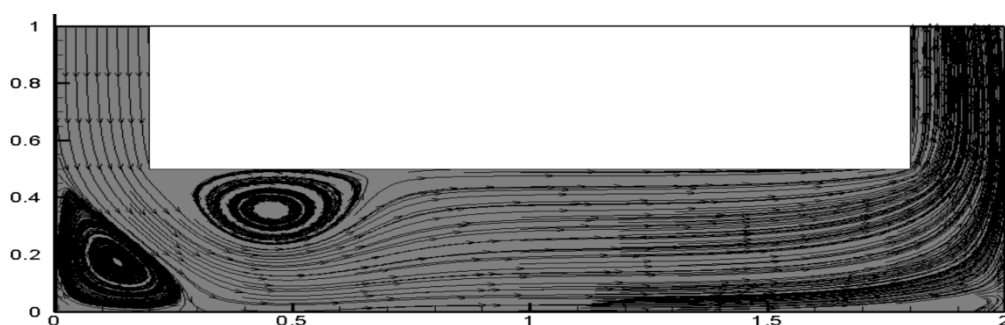


Рис. 2.23 Линии тока начальной фазы течения в задаче движения жидкости в траншее П-образной формы при $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

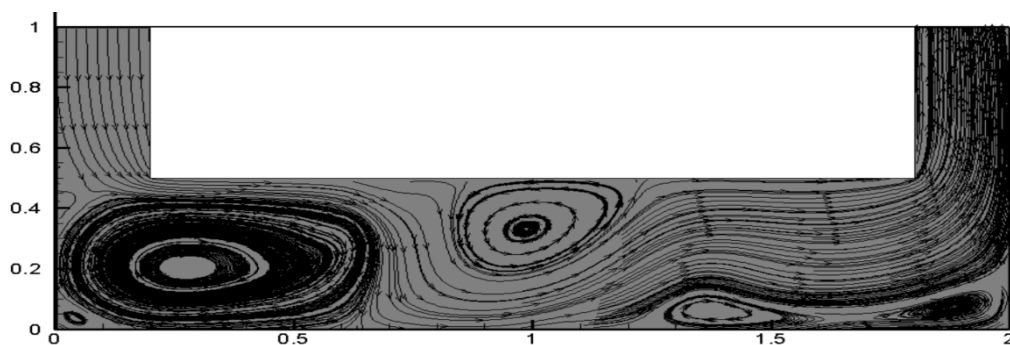


Рис. 2.24 Линии тока фазы развития течения в задаче движения жидкости в траншее П-образной формы при $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

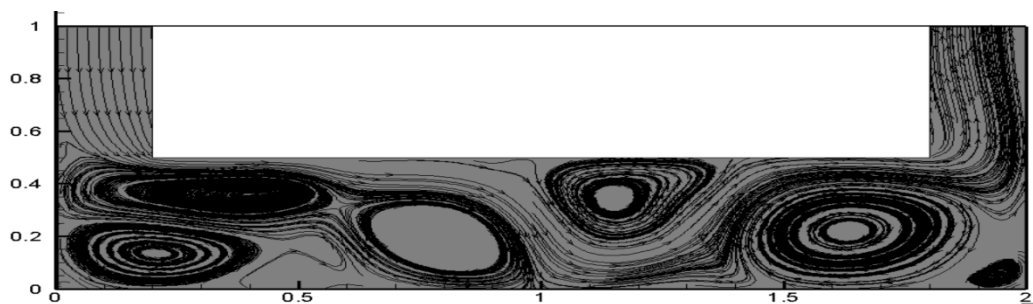


Рис. 2.25 Линии тока фазы развития течения в задаче движения жидкости в траншее П-образной формы при $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

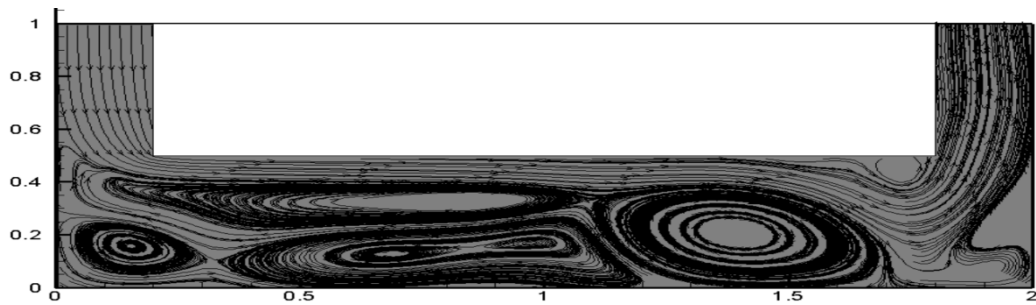


Рис. 2.26 Линии тока фазы установления течения в задаче движения жидкости в траншее П-образной формы при $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

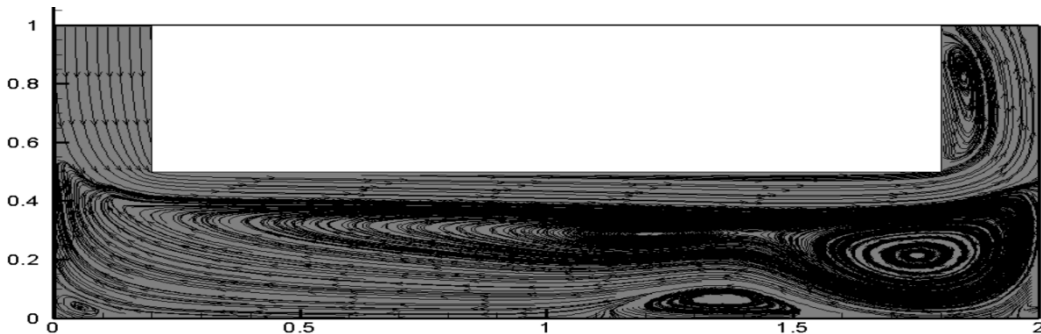


Рис. 2.27 Линии тока стационарного течения в задаче движения жидкости в траншее П-образной формы при $Re=1200$, $h=0.02$, $\tau=0.01$

В данном параграфе разработанный в главе 1 программный комплекс был использован для расчета различного типа двумерных нестационарных задач, характеризующихся как установившимся режимом течения, так и возникновением автоколебательных периодических движений.

Настоящая глава была посвящена численному моделированию плоских течений вязкой несжимаемой жидкости. На основании проведенных серийных расчетов можно сделать вывод о том, что в большинстве исследуемых задач существует некоторое критическое значение числа Рейнольдса Re_* , в малой окрестности которого течение на сколь угодно больших промежутках времени не переходит в стационарный режим, и, как правило, имеет периодический характер. При этом в некоторых случаях может наблюдаться отсутствие симметрии движения жидкости при симметричной геометрии области и симметричных краевых условиях. Для $Re < Re_*$ происходит классическое установление течения. При $Re > Re_*$ течение теряет ламинарный характер и становится турбулентным.

Произвести серийные численные расчеты и сделать соответствующие выводы стало возможным благодаря использованию эффективного итерационного метода неполной аппроксимации с групповой оптимизацией параметров для решения систем линейных алгебраических уравнений с несимметричной знаконеопределенной матрицей, возникающих на каждом шаге по времени в результате аппроксимации уравнений Пуассона для функции тока и сложных краевых условий. Используя алгоритм глобальной оптимизации, удалось свести временные затраты к минимуму и обеспечить устойчивость вычислительного процесса.

Результаты данной главы не только сами по себе имеют важное теоретическое и практическое значение, но и являются достаточным основанием для применения разработанного в главе 1 программного комплекса к расчету реальных трехмерных течений, которые и будут рассмотрены далее в заключительной части настоящей работы.

Глава 3. Численное моделирование трехмерных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости

Как отмечалось ранее, первые численные расчеты задач гидродинамики были связаны с исследованием плоских течений. В прошлом столетии были достигнуты значительные успехи в изучении движения вязкой несжимаемой жидкости применительно к ламинарным режимам в двумерном случае. Были доказаны важные теоремы существования и единственности [6], разработаны эффективные численные алгоритмы (см. обзор в [14]), получены точные количественные результаты, согласующиеся с физическим экспериментом [125].

В последние десятилетия в связи с бурным развитием информационных технологий огромный интерес исследователей вызвали методы численного моделирования пространственных течений. Появление суперэвм и параллельных вычислений позволило получить количественные результаты при решении важных практических задач. Несмотря на достигнутые успехи, трехмерные расчеты до сих пор требуют значительных усилий. Это объясняется тем, что помимо трудностей в теоретических исследованиях [3] существуют и алгоритмические проблемы. В частности, ни один из обычно применяемых на практике и включенных в современные вычислительные пакеты численных методов решения трехмерных систем уравнений Навье-Стокса не является в достаточной степени универсальным. Выбор подхода во многом зависит от условий конкретной задачи. При этом, как известно, опыт решения двумерных задач не всегда находит аналогию в трехмерном случае. [132] Поэтому проблема построения эффективных численных алгоритмов и их применения для решения пространственных уравнений Навье-Стокса остается весьма актуальной.

Данная глава является логическим завершением настоящей работы и рассматривает применение разработанного в главе 1 КП для численного

моделирования **трехмерных** нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. В параграфе 1 приводятся основные дифференциальные постановки трехмерных нестационарных систем уравнений Навье-Стокса, в параграфе 2 рассматриваются особенности алгоритмов их численного решения, в параграфе 3 описываются расчеты некоторых трехмерных модельных задач, и в параграфе 4 обсуждается применение КП для решения практических трехмерных задач гидродинамики, связанных с численным моделированием размыва несвязного грунта в прибрежных морских зонах.

3.1 Дифференциальная постановка

Первые расчеты трехмерных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости были получены благодаря идее искусственной сжимаемости [42] и применению высокоэффективных схем расщепления [45] для численного решения регуляризированной системы уравнений Навье-Стокса. По этой причине для численного моделирования пространственных задач на дифференциальном уровне использовались естественные переменные. Попытки исключить трудности расчета давления и получить аналогично двумерному случаю альтернативную дифференциальную формулировку привели к увеличению (а не уменьшению, как в двумерном случае) количества уравнений в системе и принципиальным трудностям постановки краевых условий [67]. Не видя объективных причин применения дифференциальных формулировок трехмерной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса, использующих вектор вихря, большинство исследователей разрабатывали численные методы моделирования пространственных течений, исходя из физической постановки задач [41, 59], перенося без изменений результаты своих исследований с двумерного случая. Необходимо отметить, что в настоящее время практически все известные комплексные системы, предназначенные для численных расчетов пространственных задач гидродинамики, используют алгоритмы, основанные именно на естественной формулировке исходной дифференциальной системы уравнений Навье-Стокса.

Одной из основных целей настоящей работы является применение разработанного КП для численного расчета задач гидродинамики, записанных в различных формулировках, с последующим выявлением их (формулировок) преимуществ и недостатков с точки зрения предложенных численных алгоритмов. Поэтому в данном параграфе рассматривается как естественная дифференциальная формулировка трехмерной нестационарной

системы уравнений Навье-Стокса, так и формулировка «вихрь – векторный потенциал».

Основные уравнения, описывающие пространственное течение вязкой однородной несжимаемой жидкости, в безразмерном виде [123] имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V &= -\nabla P + \frac{1}{Re} \Delta V, \\ \operatorname{div} V &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

или в переменных «вихрь - векторный потенциал»:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial t} + (V \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)V &= \frac{1}{Re} \Delta \omega, \\ \Delta \psi &= -\omega,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где V - вектор скорости, P - скалярная функция давления, Re - число Рейнольдса, $\omega = \operatorname{rot} V$ - вектор вихря, ψ - векторный потенциал, определяемый соотношением $V = \operatorname{rot} \psi$. Будем считать, что течение жидкости происходит в некоторой односвязной области G с границей ∂G на временном промежутке $[0, T]$.

Непосредственное интегрирование системы уравнений (3.1) затруднено ввиду отсутствия в ней отдельного уравнения для давления, поэтому обычно при численном подходе вместо уравнения неразрывности в предположении гладкости неизвестных функций используют уравнение,

$$\Delta P = -\operatorname{div}((V \cdot \nabla)V),\tag{3.3}$$

которое получается путем применения оператора дивергенции к уравнению количества движения [14]. При этом используемый численный метод решения новой системы уравнений должен явно обеспечивать соленоидальность поля вектора скорости [41].

Для исходной системы уравнений (3.1) ставятся естественные начальные и краевые условия для компонент вектора скорости. Граничные условия для давления отсутствуют в исходной постановке задачи, поэтому обычно их получают в процессе численного решения [65].

Для системы уравнений (3.3) постановка задачи сильно осложняется формулировкой граничных условий для составляющих векторного потенциала и вихря. Граничные условия для вихря явно не присутствуют в дифференциальной постановке задачи. В трехмерном случае невозможно провести аналогию с разложением в ряд Тейлора «функции тока», поэтому обычно краевые условия для вихря получают в процессе численного решения из соотношения $\omega = rotV$ [67]. В некоторых работах [71, 72] приводится общая постановка граничных условий для векторного потенциала, однако они достаточно сложны для численной реализации, поэтому будем отдельно рассматривать задачи с отсутствием и присутствием протекания. В случае отсутствия протекания ($V_n|_{\partial G} = 0$) граничные условия для векторного потенциала определяются достаточно просто [67]:

$$\psi_{\tau_1}|_{\partial G} = \psi_{\tau_2}|_{\partial G} = 0, \quad (3.4)$$

где τ_1, τ_2 - касательные векторы к границе, а из условия $div \bar{\psi}|_{\partial G} = 0$ находится условие для нормальной составляющей ψ_n . Например, в прямоугольной области отсюда следует соотношение

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial n}|_{\partial G} = 0 \quad (3.5)$$

Для задач протекания будем применять разложение векторного поля скорости на потенциальную и вихревую составляющие [67]:

$$V = \operatorname{rot}\psi + \nabla\varphi, \quad (3.6)$$

где ψ - векторный, а φ -скалярный потенциал. Тогда ψ определяется из решения задач (3.2),(3.4),(3.5), а для φ в силу соотношения $\operatorname{div}V|_{\partial G} = 0$ получается задача [67]:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial G} = V_n|_{\partial G} \quad (3.8)$$

Как видно, в случае использования скалярного потенциала возникает необходимость в решении дополнительной задачи Неймана для уравнения Пуассона.

В данном параграфе рассмотрены используемые в настоящей работе дифференциальные формулировки трехмерной системы нестационарных уравнений Навье-Стокса. Отмечены трудности, связанные с необходимостью модификации естественной формулировки и постановкой граничных условий в формулировке «вихрь – векторный потенциал». В следующем параграфе будут обсуждаться основные этапы численных алгоритмов, использующих обе рассмотренные здесь дифференциальные постановки.

3.2 Численный алгоритм

Для численного решения трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса, как в естественной формулировке, так и в формулировке «вихрь – векторный потенциал», используются, в основном, многоступенчатые алгоритмы с целью последовательного определения неизвестных функций. Численные методы, использующие физические переменные в пространственном случае не отличаются от плоских аналогов, напротив, алгоритмы, использующие вектор вихря имеют принципиальные отличия в трехмерном случае.

В данном параграфе рассмотрим основные этапы численного интегрирования трехмерных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса, записанных на дифференциальном уровне, как в естественных переменных, так и в переменных «вихрь – векторный потенциал». Не нарушая общности рассуждений, ограничимся при этом случаем, когда область течения жидкости представляет собой параллелепипед.

Введем в области G набор разностных сеток:

$$G_h = \{(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z): i = \overline{0, N}; j = \overline{0, L}, k = \overline{0, M}\},$$

$$G_h^1 = \{(i\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta y, (k + \frac{1}{2})\Delta z): i = \overline{0, N}; j = \overline{0, L-1}, k = \overline{0, M-1}\},$$

$$G_h^2 = \{(i + \frac{1}{2})\Delta x, j\Delta y, (k + \frac{1}{2})\Delta z): i = \overline{0, N-1}; j = \overline{0, L}, k = \overline{0, M-1}\},$$

$$G_h^3 = \{(i + \frac{1}{2})\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta y, k\Delta z): i = \overline{0, N-1}; j = \overline{0, L-1}, k = \overline{0, M}\},$$

$$G_h^4 = \{(i + \frac{1}{2})\Delta x, j\Delta y, k\Delta z): i = \overline{0, N-1}; j = \overline{0, L}, k = \overline{0, M}\},$$

$$G_h^5 = \{i\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta y, k\Delta z): i = \overline{0, N}; j = \overline{0, L-1}, k = \overline{0, M}\},$$

$$G_h^6 = \{i\Delta x, j\Delta y, (k + \frac{1}{2})\Delta z): i = \overline{0, N}; j = \overline{0, L}, k = \overline{0, M-1}\},$$

$$G_h^7 = \{(i + \frac{1}{2})\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta y, (k + \frac{1}{2})\Delta z\}: i = \overline{0, N-1}; j = \overline{0, L-1}, k = \overline{0, M-1}\}.$$

Рассмотрим следующее размещение переменных: дивергенцию скорости, давление и скалярный потенциал определим в точках сетки G_h^7 , компоненты скорости – на сетках G_h^1, G_h^2, G_h^3 соответственно, компоненты вихря и векторного потенциала определим в точках сеток G_h^4, G_h^5, G_h^6 соответственно, и, наконец, в точках исходной сетки G_h будем определять дивергенцию вихря. Для численного интегрирования задач (3.1), (3.3) будем использовать метод расщепления по физическим процессам (факторам) [41, 58, 65] или алгоритмы типа SIMPLE [59, 60]. Для решения задачи (3.2) применим классический метод последовательного нахождения компонент векторов «вихря» и «векторного потенциала» [67]. При этом в обоих случаях рассмотренное выше размещение неизвестных функций гарантирует тождественное выполнение уравнения неразрывности на дискретном уровне.

Аппроксимируя дифференциальные задачи (3.1) - (3.8) на построенных сетках разностной схемой, получим разностные задачи относительно дискретных значений компонент вектора скорости и давления, а также векторов вихря, векторного и скалярного потенциала. Для решения разностных уравнений переноса вихря и количества движения будем применять устойчивый в трехмерном случае метод стабилизирующей поправки [45]. Основные же усилия сосредоточим на решении разностных уравнений Пуассона для давления, векторного и скалярного потенциала, которые на каждом дискретном временном слое можно представить в виде СЛАУ.

В пространственном случае метод решения СЛАУ на каждом дискретном шаге по времени играет особо важную роль во всем численном алгоритме. Фактически от того, насколько он эффективен, зависит возможность решения задачи. Это объясняется, во-первых, на порядок большим (по сравнению с плоским случаем) количеством уравнений в СЛАУ, во-вторых, наличием условий Неймана на всей границе области

течения жидкости, и, в-третьих, необходимостью решения на каждом временном шаге более одного уравнения Пуассона (в случае использования альтернативных переменных). Понятно, что для получения за приемлемое время устойчивых численных решений трехмерных нестационарных задач, необходимо использовать методы решения СЛАУ, которые, с одной стороны, являлись бы эффективными с точки зрения сходимости итерационных процессов, а с другой, использовали минимальные сведения об операторах этих СЛАУ. Независимо от выбора исходной формулировки дифференциальной системы для решения СЛАУ, возникающих на каждом шаге по времени в результате аппроксимации уравнений Пуассона для давления, векторного и скалярного потенциала, будем использовать схемы неполной аппроксимации с последовательной или групповой оптимизацией итерационных параметров, описанные в главе 1. При небольшом количестве узлов в тестовых серийных расчетах будем применять полную оптимизацию итерационных параметров, что значительно сокращает вычислительные затраты.

Отметим отдельно некоторые важные особенности использования рассмотренных выше численных алгоритмов, не учитывая которые невозможно получить приемлемые результаты расчетов трехмерных задач:

1. Краевые условия для давления и скалярного потенциала.

В большинстве работ, в которых приводятся численные алгоритмы решения трехмерных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса, можно встретить утверждение о том, что отсутствие краевых условий для давления в исходной дифференциальной постановке является одной из трудностей ее использования, поскольку их приходится тем или иным образом получать при численной реализации (см., например, [14]). Действительно, если краевая дифференциальная задача поставлена «в скоростях» (на всей границе области течения жидкости заданы компоненты вектора скорости), то при некоторых допущениях граничные условия на давление не требуются для ее корректности [6, 7]. Напротив, для корректности (существования и

единственности решения) постановки разностной задачи, как правило, требуется, чтобы она была замкнута, и, следовательно, недостающие краевые условия необходимо получать численно (в большинстве случаев искусственно) из тех или иных соображений. Многие исследователи предлагают на границах, где заданы компоненты вектора скорости, ставить условия второго рода на давление, получая их из уравнения количества движения, аппроксимированного внутри области. В результате для определения функции давления необходимо решать на каждом дискретном временном шаге полную задачу Неймана. Такой подход имеет два недостатка. Во-первых, полученные таким образом краевые условия носят приближенный характер и иногда могут приводить к неустойчивости численного алгоритма. Во-вторых, что много более существенно, с помощью таких краевых условий невозможно обеспечить выполнение уравнения неразрывности на дискретном уровне во всей области, например, при наличии выпуклых углов. Более правильное решение состоит в получении разностной задачи, обладающей аналогичными своему дифференциальному предшественнику свойствами: корректность постановки при отсутствии краевых условий для давления на границах, где заданы компоненты вектора скорости. Это можно достичь, если получать уравнение для давления не на дифференциальном уровне, а на дискретном, используя при этом информацию о векторе скорости на границах области. В результате в случае простейших областей, состоящих из прямоугольников без выпуклых углов, получается разностная задача, эквивалентная задаче Неймана, в случае же наличия выпуклых углов или более сложных границ получается задача, разностный оператор которой уже не является дискретным аналогом дифференциального уравнения Пуассона, но при этом уравнение неразрывности выполняется тождественно. Эти же рассуждения переносятся на случай использования в численном алгоритме скалярного потенциала. Заметим, что не зависимо от того, ставятся ли краевые условия Неймана для давления или нет, получающаяся на каждом временном шаге разностная

задача является вырожденной (матрица оператора является квадратной матрицей, но с равным нулю определителем), если на всей границе области течения жидкости известны компоненты вектора скорости. Этот факт порождает следующую, не менее серьезную, особенность численной реализации.

2. Вырожденность разностной задачи.

Численные алгоритмы, использующие как «естественную» формулировку, так и формулировку «вихрь – векторный потенциал», при постановке исходной дифференциальной задачи «в скоростях» приводят в большинстве случаев к необходимости решения на каждом временном шаге вырожденной разностной задачи. Существует, очевидно, два пути: непосредственное решение СЛАУ с необратимой матрицей, или же регуляризация – переход к невырожденной системе, в некотором смысле эквивалентной оригинальной. Первый путь при решении трехмерных нестационарных задач представляет собой очень сложную задачу и в настоящее время является практически не реализуемым. Во-первых, алгоритмы решения СЛАУ с вырожденной матрицей [81, 82] сами по себе довольно сложны для организации сходимости итерационного процесса поиска решения. Во-вторых, общеизвестно, что при использовании для аппроксимации дифференциальной задачи какой-либо разностной схемы желательно убедиться в ее устойчивости (хотя бы в линеаризованном виде), что дает надежду на сходимость. Само определение устойчивости требует существования и единственности разностной задачи, что, конечно, выполняется только в случае невырожденности соответствующей СЛАУ. Второй путь (регуляризацию) рассмотрим на простом примере, когда область течения представляет собой параллелепипед, и решается система (3.7),(3.8) для определения скалярного потенциала. В этом случае и дифференциальная и разностная задача представляет собой классическую задачу Неймана, поставленную на всей границе, для уравнения Пуассона. Обе задачи являются, очевидно, вырожденными, так как ядра операторов содержат

бесконечное множество элементов соответствующих пространств, представляющих собой константы (общеизвестно, что в данном конкретном случае других элементов в ядрах операторов нет). На дифференциальном уровне необходимым (а в данном случае и достаточным) условием существования решения является теорема Грина [14], которая, очевидно, выполнена, так как жидкость является несжимаемой, и, вследствие закона сохранения массы и отсутствия внутри области течения источников и стоков:

$$\oint_{\partial G} V_n \cdot n = 0. \quad (3.9)$$

Таким образом, в качестве решения этой задачи можно взять любое из множества решений. Действительно, так как они все отличаются на константу, то, какое бы решение ни было выбрано, вектор скорости, вычисленный далее по (3.6), получится один и тот же. Отсюда следует, что для регуляризации дифференциальной задачи и выбора одного (любого) решения из множества возможных решений достаточно зафиксировать значение скалярного потенциала произвольным значением в произвольной точке области течения (удобнее выбрать в качестве такой точки какую-либо точку границы). Такая фиксация приведет к тому, что задача (3.7),(3.8) станет корректной (в смысле существования и единственности решения) и на части границы области (а именно в одной фиксированной точке) мы будем иметь краевое условие первого рода – условие Дирехле.

Рассуждения о фиксации точки для скалярного потенциала (а чаще для давления) при реализации численных алгоритмов, можно встретить во многих источниках (см., например, [14]). Но не следует думать, что такую фиксацию при любых условиях можно выполнять на дифференциальном уровне, а на уровне разностном, таким образом, всегда получать невырожденную задачу. Напротив, регуляризацию необходимо проводить именно на разностном уровне, проводя аналогию с уровнем дифференциальным. Основная проблема заключается в том, что это, к

сожалению, не всегда возможно. Поясним это утверждение, представив разностную задачу в виде СЛАУ, используя матрично-векторную запись:

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A &= \{a_{ij}\}, x = \{x_i\}, b = \{b_i\}, |A| = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Данная задача является вырожденная, и, как уже отмечалось, применение матрицы этой СЛАУ к любому вектору, состоящему из одинаковых чисел, даст в результате нулевой вектор (других векторов, обладающих таким свойством, как указывалось, нет). Однако, в отличие от дифференциальной задачи, мы не можем утверждать, что эта система имеет множество решений, отличающихся на константу. Дело в том, что вырожденная СЛАУ может либо не иметь решений вообще, либо иметь бесконечно множество решений (в нашем случае множество векторов, отличающихся на константу). Таким образом, чтобы можно было провести аналогию с дифференциальным уровнем, необходимо убедиться в совместности полученной СЛАУ. Если этого не сделать и, как в случае дифференциальном, зафиксировать значение искомого вектора в некоторой точке (а СЛАУ тем временем не совместна), то мы, конечно, получим **невырожденную** СЛАУ, которая, однако, **не имеет ничего общего** с оригинальной, т.е. процесс регуляризации будет выполнен неправильно. Если, например, в качестве неизвестного вектора выступает дискретное давление, то результаты таких расчетов дадут течение со стоком или источником, что не соответствует действительности.

Из алгебры известно, что критерий совместности любой СЛАУ формулируется в виде теоремы Кронекера-Капелли о ранге исходной и расширенной матриц этой СЛАУ. Однако использовать эту теорему для анализа совместности в нашем случае нереально, поскольку определение ранга матрицы является задачей не менее сложной, чем решение СЛАУ. Да и информация о несовместности полученной СЛАУ сама по себе бесполезна – необходимо уметь получать совместные СЛАУ для выполнения регуляризации. Существует необходимое условие совместности вырожденной СЛАУ:

$$\sum b_i = 0. \quad (3.11)$$

Посмотрим, выполняется ли это условие в СЛАУ, получающихся в результате аппроксимации задач Неймана для давления и скалярного потенциала. Начнем, в виду простоты рассуждений, со скалярного потенциала. Вектор правой части (3.10) представляет собой совокупность дискретных значений правых частей (3.7),(3.8). Правая часть (3.7) нулевая, а сумма компонент правой части (3.8) равна нулю в виду (3.9) и отсутствия погрешности аппроксимации при задании компонент вектора скорости на границе. Иначе говоря, (3.11) – это дискретный аналог теоремы Грина, которая в случае скалярного потенциала выполняется точно на дискретном уровне. В случае давления дело обстоит сложнее. Здесь уже (3.10) представляет собой вычисляемые с помощью аппроксимаций компонент вектора скорости значения, и равенство (3.11) требует проверки. Можно показать [14], что равенство (3.11) в случае давления выполняется с погрешностью аппроксимации. Такое состояние дел не оставляет нам надеж на совместность системы, поскольку для совместности (а следовательно, и для регуляризации) необходимо, чтобы (3.11) выполнялось абсолютно точно. Чтобы исправить данную ситуацию, нужно суммарную погрешность аппроксимации пропорционально распределить на компоненты вектора правой части (3.10) с противоположным знаком, изменив, таким образом, значение каждой компоненты на незначительную величину (много меньше порядка аппроксимации), но тем самым точно удовлетворив (3.11). К сожалению, (3.11) – это только необходимое условие совместности. Практически единственным пригодным условием, превращающим (3.11) в критерий является условие симметричности матрицы СЛАУ (3.10). Таким образом, для регуляризации разностной задачи нужно точное выполнение теоремы Грина (что не представляет труда) и симметричность матрицы СЛАУ, к которой сводится разностная задача, что представляет очень серьезное ограничение численной реализации и является одной из самых

важных ее особенностей. Отметим, что в случае корректной регуляризации разностной задачи, после ее решения, в точке, где фиксировалось значение неизвестного вектора, должно выполняться условие Неймана, выполненное в оригинальной разностной задаче. Это и означает эквивалентность двух задач и простой выбор одного решения из множества возможных. Отметим еще раз, что если вырожденная система, к которой сводится разностная задача, не является совместной по любой причине, то фиксация значения искомого вектора в произвольной точке недопустима, и в этом случае единственный вариант – это решение на каждом шаге по времени вырожденной несовместной СЛАУ (в смысле поиска обобщенного решения) с надеждой (теоретически необоснованной) на то, что это обобщенное решение будет как-то аппроксимировать решение дифференциальной задачи, и что такой численный алгоритм будет устойчив.

3. Симметричность разностной задачи.

Требование симметричности разностной задачи эквивалентно требованию симметричности оператора СЛАУ, к которой эта задача сводится, и является очень жестким ограничением при использовании численного алгоритма. Операторы СЛАУ могут получаться несимметричными по различным причинам, которые указывались на протяжении настоящей работы (неравномерные сетки, сложные краевые условия). Однако бывают достаточно простые случаи, в которых оператор СЛАУ получается несимметричным, но его можно искусственно симметризовать (что, конечно, необходимо выполнять, поскольку это позволит избавиться от рассмотренных выше проблем). Приведем один самый очевидный пример такого положения дел. Если обыкновенно выполнить аппроксимацию задачи Неймана в простейшей прямоугольной области с равномерным по всем направлениям шагом (а именно, оператор Лапласа заменить центральными разностями второго порядка, а краевые условия односторонними разностями первого порядка), то оператор получится несимметричный. Однако простое искусственное деление равенств, аппроксимирующих краевые условия на

шаг сетки приведет к новой задаче, эквивалентной исходной, но уже с симметричным оператором и сохраняющей дискретный аналог теоремы Грина. Бывают, конечно, и более сложные случаи, в которых симметризация оператора представляет собой не такой простой процесс, но, тем не менее, является возможной.

В данном параграфе были рассмотрены основные этапы численных алгоритмов решения трехмерных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса, использующих как «естественную» формулировку дифференциальной задачи, так и формулировку «вихрь – векторный потенциал». Особое внимание уделено некоторым деталям численного интегрирования исходных систем, которые крайне необходимо учитывать для получения приемлемых результатов расчетов. В следующих параграфах рассмотренные здесь численные методы, а также разработки глав 1 и 2 будут применены для непосредственного расчета некоторых модельных и практических пространственных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.

3.3 Результаты расчетов модельных задач

Расчет трехмерных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса – конечная цель настоящей работы, как и большинства исследований, связанных с численным моделированием течений вязкой несжимаемой жидкости. В предыдущих главах и параграфах проделано много подготовительной работы: разработан необходимый математический аппарат, выполнена его программная реализация, проведено тестирование на одномерных задачах, обладающих свойствами целевой системы, получен опыт решения плоских задач. Заключительным этапом является применение всех указанных разработок для численного расчета пространственных нестационарных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости, на основании которых можно сделать выводы об эффективности использования различных формулировок исходных дифференциальных систем и соответствующих алгоритмов их численного интегрирования.

В данном параграфе предложенные в работе методы применяются для численного расчета модельных задач с целью первичного тестирования работы алгоритмов в трехмерном случае, в следующем параграфе будут решаться нестационарные пространственные задачи, имеющие важное практическое значение.

Для полноценной проверки работоспособности численных алгоритмов и анализа эффективности использования различных дифференциальных формулировок в пространственном случае проведем три серии расчетов при умеренных числах Рейнольдса, характеризующихся различными типами течения жидкости: внутреннее, протекание, внешнее обтекание. В качестве конкретных тестов логично выбрать задачи, которые с одной стороны обладают не слишком сложной геометрией, с другой – имеют необходимые для тестирования структуры течения, известные из результатов расчетов других авторов и натурных экспериментов. Это, например, классическая модельная задача о течении жидкости в кубической каверне с неравномерно

движущейся верхней крышкой [133, 134, 135], [136, 137], [138, 139, 140], задача о течении жидкости в трехмерных каналах [141, 142, 143, 144], задача об обтекании жидкостью тел простой формы [16, 132, 145, 146]. Как видно, такие задачи довольно хорошо исследованы в разные годы многими авторами, как в плоском, так и в пространственном случае. Однако в пространственном случае существенно проявляется трехмерный характер течения, что принципиально отличает его от своего плоского аналога. Поэтому в сочетании с наличием лабораторных экспериментов данные задачи являются содержательными тестами для апробирования и проверки работоспособности численных алгоритмов. Несмотря на заранее известный симметричный характер течений, для более надежной оценки правильности полученных результатов проведем расчеты полных задач без использования условий симметрии.

Первая серия расчетов проводилась для исследования внутренней задачи. Область G в этом случае представляет собой куб (каверну) с длиной ребра $L=1$. Верхняя крышка каверны движется вдоль оси X с заданной скоростью $U(t)$. Остальные стенки каверны неподвижны. Вся граница области G является непроницаемой.

Трехмерное течение в каверне существенно отличается от плоского аналога. Натурные эксперименты показывают, что движение жидкости в каверне имеет сложную струйно-вихревую структуру (см. Рис. 3.1). В работе [147] эксперимент проводился следующим образом: каверна с водой, закрепленная на специальной подвижной стойке, под действием сил тяжести опускалась вдоль зафиксированной длинной пластины, которая выступала в роли подвижной крышки каверны. Развитие движения жидкости фиксировалось с помощью движущейся вместе с каверной камеры, контролируемой с помощью компьютера. Сама каверна, в свою очередь, также находилась в емкости с водой и имела размеры 6.2см. х 12.4см. х 6.2см. Скорость движения каверны была равна 1.8см/сек, что соответствует $Re=1000$. Фотография была получена с помощью лазерного освещения

частиц солей олова, образующихся в результате реакции электролиза на оловянных контактах встроенных в каверну.

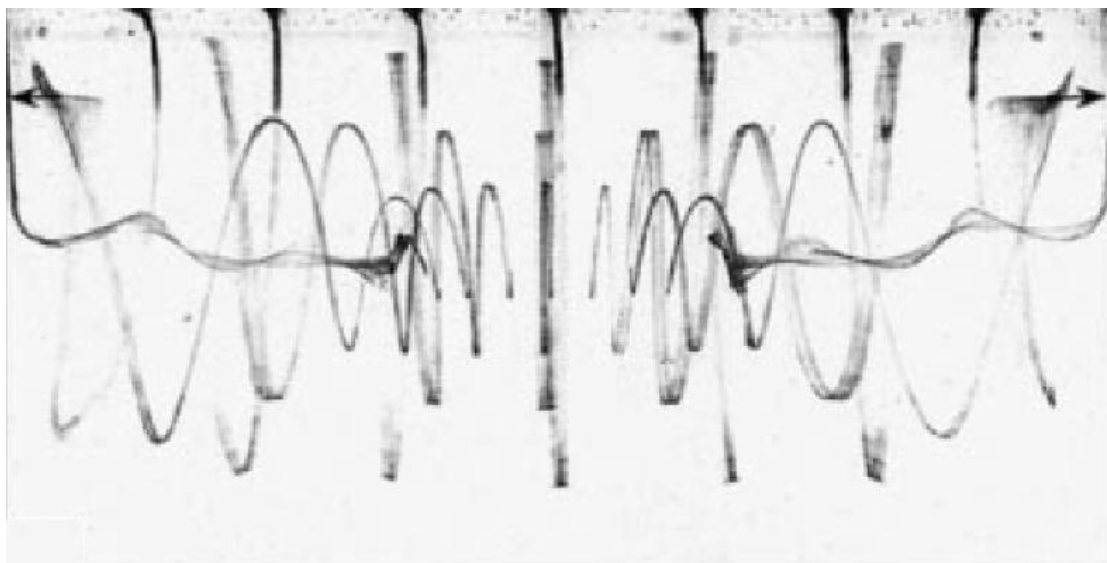


Рис. 3.1 Фотография (со стороны передней стенки каверны) результатов натурного эксперимента [147]

Для оценки точности и эффективности алгоритмов расчеты проводились на последовательности сеток с числом узлов $21 \times 21 \times 21$, $41 \times 41 \times 41$, $65 \times 65 \times 65$, при шаге по времени $\tau = 0.01$ и умеренных числах Рейнольдса $Re = 100$, $Re = 250$. При шаге сетки $h = 0.05$ для решения уравнений Пуассона использовался метод НА с полной оптимизацией по всем параметрам одновременно с помощью построения ортогональной системы векторов. При более мелкой сетке применялся итерационный процесс с групповой оптимизацией параметров. При этом группы параметров были выбраны так, чтобы матрицы систем для их определения имели диагональный вид. На Рис. 3.2 приведены линии тока установившегося течения при $Re = 100$, $h = 0.015625$ в трех центральных сечениях каверны: $y = 0.5$, $x = 0.5$, $z = 0.5$. Как и предполагалось, сечение $y = 0.5$ представляет собой плоскость симметрии, что подтверждается расчетами (см. Рис. 3.2). Имеет место хорошее качественное совпадение представленных результатов с результатами, приведенными в [138, 139, 140].

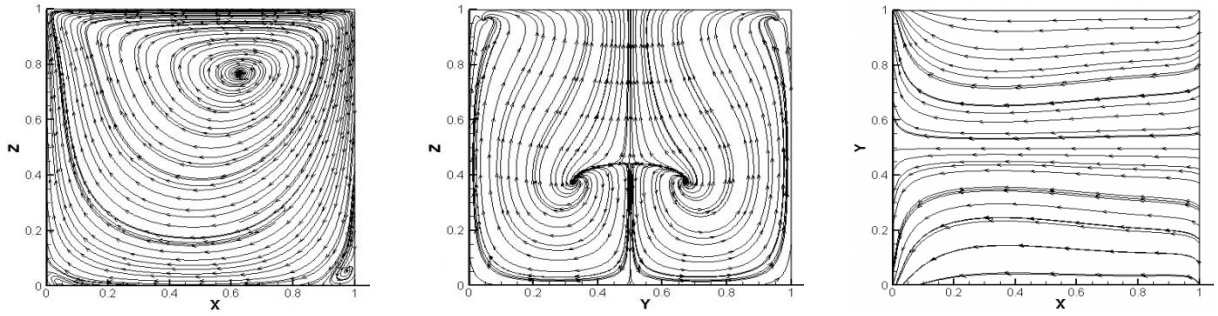


Рис. 3.2 Линии тока установившегося течения в кубической камере в трех центральных сечениях при $U(t)=1$, $Re=100$, $h=0.015625$, $\tau=0.01$

На следующих рисунках представлены распределения вертикальной компоненты скорости по поперечной (Рис. 3.3) и продольной (Рис. 3.4) координате при $Re=100$ в начальный момент времени, в развивающейся и установившейся стадиях. «Точечной линии» соответствует решение при $h=0.05$, «обычной линии» - решение при $h=0.025$ и, наконец, «жирная линия» отвечает решению при $h=0.015625$. Наблюдается сходимость решения разностной задачи, а также хорошее количественное совпадение графиков функций распределения компонент вектора скорости (с точностью до 0.000001) с аналогичными результатами, приведенными в [136].

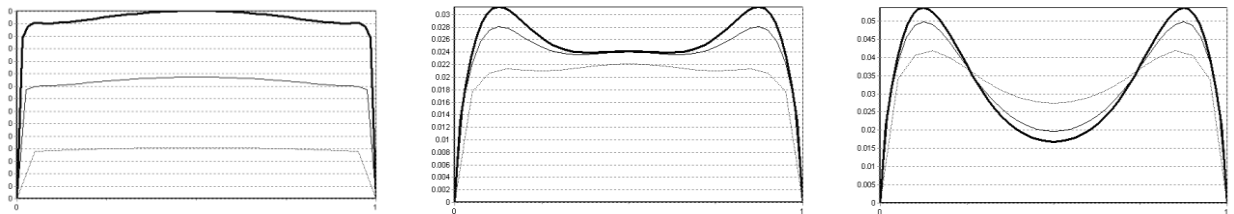


Рис. 3.3 Распределение вертикальной компоненты скорости по поперечной координате в задаче о течении в кубической камере при $U(t)=1$, $Re=100$, $\tau=0.01$

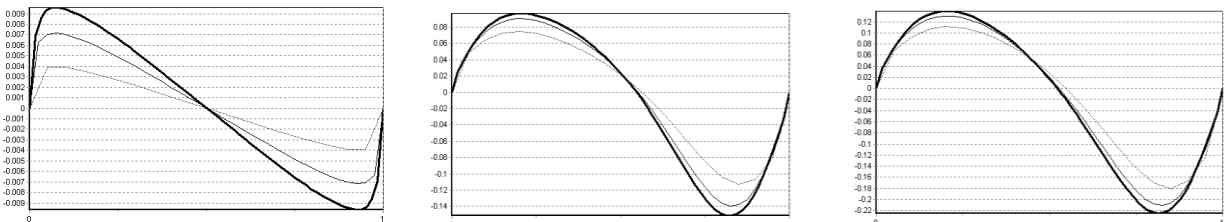


Рис. 3.4 Распределение вертикальной компоненты скорости по продольной координате в задаче о течении в кубической камере при $U(t)=1$, $Re=100$, $\tau=0.01$

На Рис. 3.5 приведен процесс развития течения на начальной, промежуточной и конечной стадиях при $h=0.025$, $Re=200$.

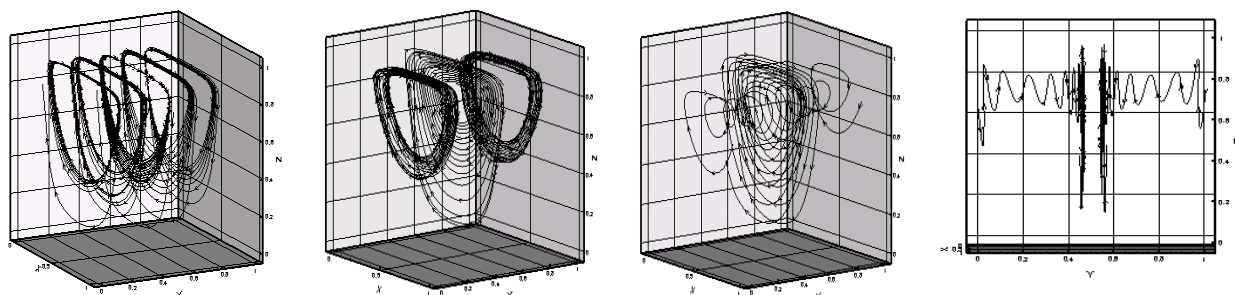


Рис. 3.5 Процесс развития течения в начальной, промежуточной и конечной стадии в задаче о течении в кубической каверне при $U(t)=1$, $Re=100$, $h=0.025$, $\tau=0.01$

В начальный момент времени слои жидкости движутся параллельно друг другу аналогично плоскому случаю. На стадии развития течения слои жидкости постепенно переходят в соседние положения, образуя при этом торовидные вихревые зоны. И, наконец, на стадии установления течения наблюдается существенные перемещения частиц жидкости вдоль третьей координаты. Частицы со стенок каверны закручиваются, перемещаясь в центр, затем раскручиваются и продолжают движение. Для более наглядного анализа симметрии движения жидкости и сравнения с экспериментальной фотографией (Рис. 3.1) также показан вид спереди полностью установившегося течения.

Вторая серия расчетов связана с исследованиями трехмерных течений в задачах протекания. В качестве первого теста было рассмотрено течение в прямолинейных каналах квадратного и кругового (течение Пуазейля) сечений. В данной задаче известно точное решение, характеризующееся линейным законом распределения давления вдоль продольной координаты и параболическим профилем продольной компоненты вектора скорости по поперечной и вертикальной координате [1, 2]. Область G в этом случае представляет собой параллелепипед (или цилиндр) длиной L и радиусом R . На участках входа и выхода в канале известен параболический (в случае кругового сечения Пуазейлевский) профиль продольной компоненты вектора

скорости, характеризующийся скалярной функцией $U(t)$ (скорость жидкости в центре сечения). Остальные стенки канала неподвижны и непроницаемы. Были проведены расчеты данной задачи с различными дискретными характеристиками (по аналогии с первой серией расчетов) и умеренными числами Рейнольдса, при этом наблюдалась сходимость численного решения, и не зависимо от шага сетки законы распределения дискретных значений компонент вектора скорости и давления полностью соответствовали аналитическим на всем временном интервале. Например, на Рис. 3.6 приведены картины установившихся течений в каналах квадратного и кругового сечений (цветом отмечено распределение продольной компоненты вектора скорости в центральном вертикальном сечении), демонстрирующие прямолинейность линий тока, т.е. равенство нулю поперечной и вертикальной компонент вектора скорости.

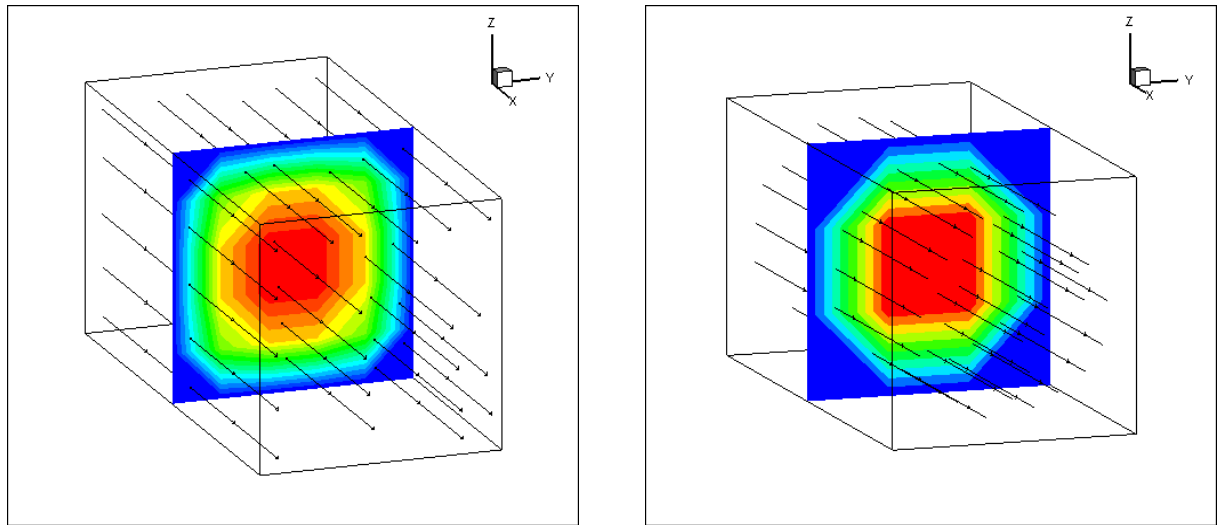


Рис. 3.6 Лини тока установившихся течений в трехмерных прямолинейных каналах квадратного и кругового сечений.

На Рис. 3.7 приведены распределения продольной компоненты вектора скорости в центральных сечениях, указывающие на ее параболический профиль.

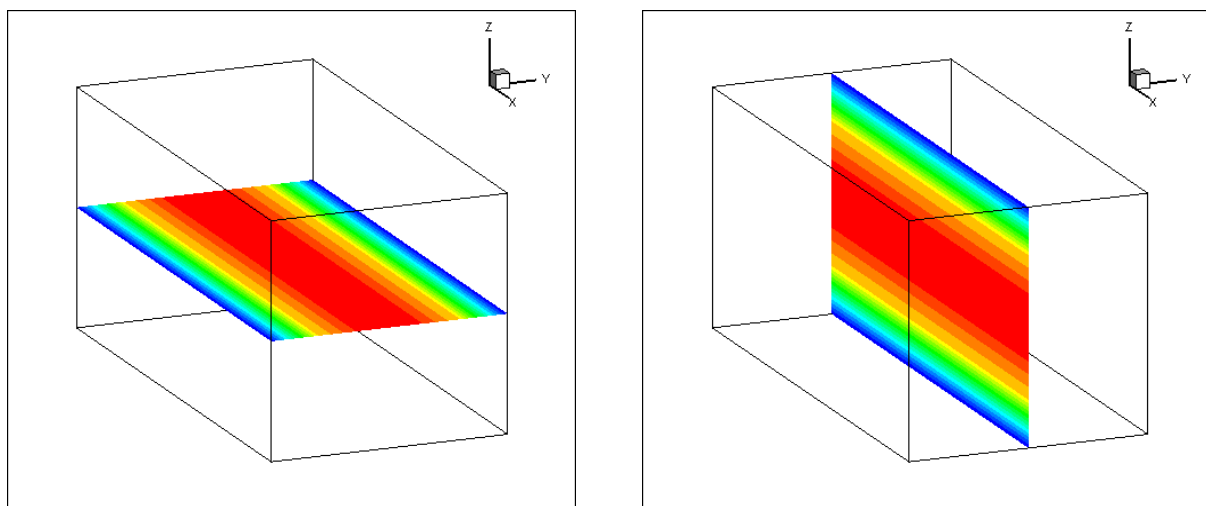


Рис. 3.7 Параболический профиль продольной компоненты вектора скорости в двух центральных сечениях в задаче о течении в трехмерном прямолинейном канале

На Рис. 3.8 приведены распределения функции давления в центральных сечениях, подтверждающие ее линейный закон.

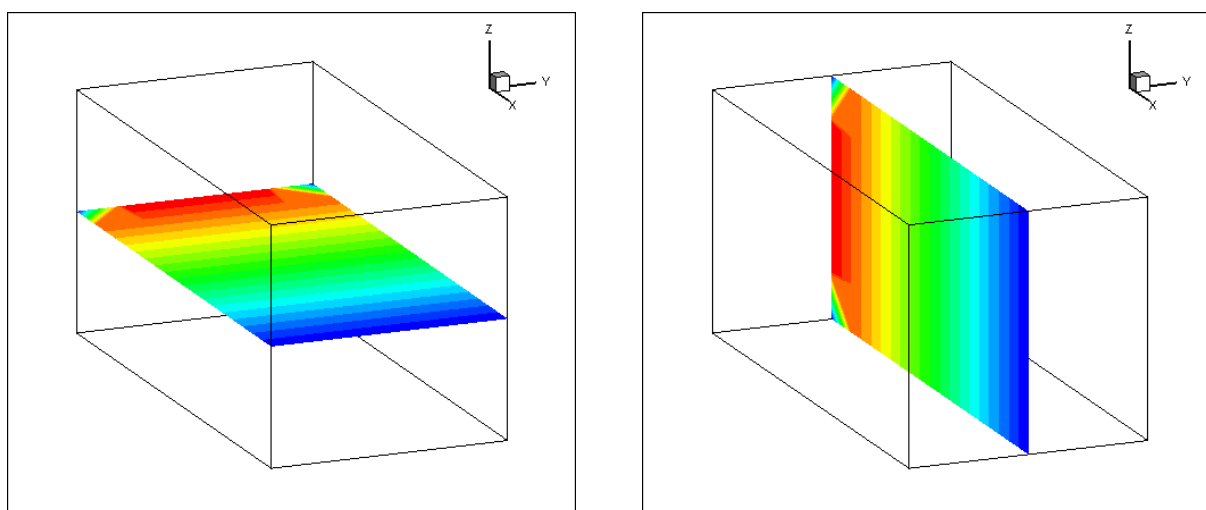


Рис. 3.8 Линейный профиль давления в двух центральных сечениях в задаче о течении в трехмерном прямолинейном канале

Для более содержательной апробации алгоритмов решения пространственных задач протекания проведем расчеты трехмерных нестационарных течений в канале с уступом и траншее при умеренных числах Рейнольдса, которые характеризуются существенным перемещением частиц жидкости вдоль третьей координаты и тем самым значительно отличаются от своих плоских аналогов [132].

На Рис. 3.9, Рис. 3.10, и Рис. 3.11 представлены соответственно фазы начала, развития и установления течения над обратным уступом при $Re = 400$.

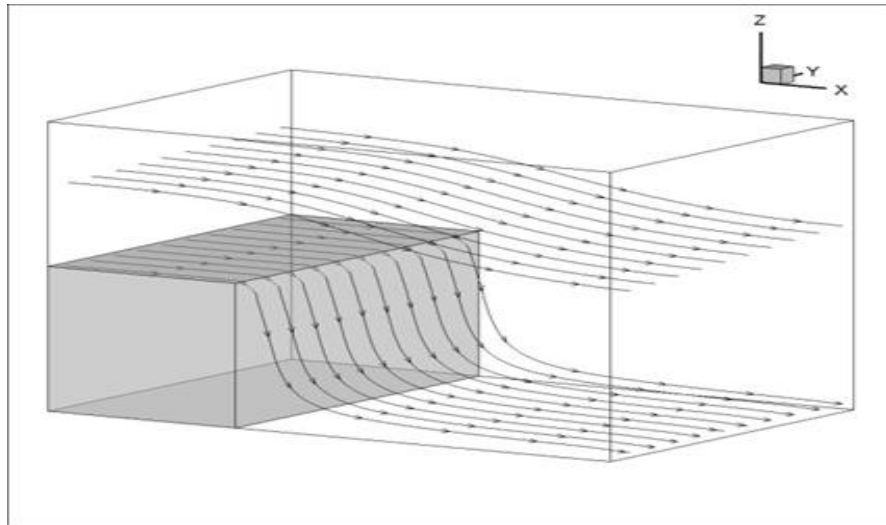


Рис. 3.9 Фаза начала течения над обратным уступом при $Re=400$

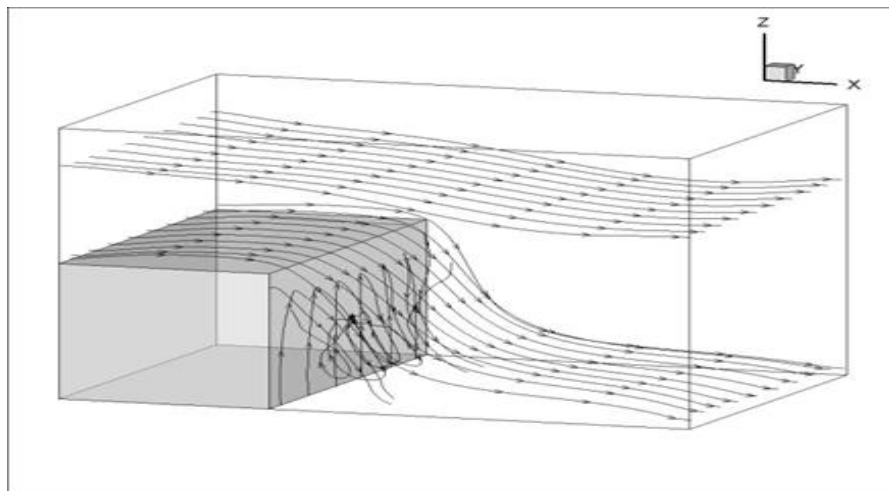


Рис. 3.10 Фаза развития течения над обратным уступом при $Re=400$

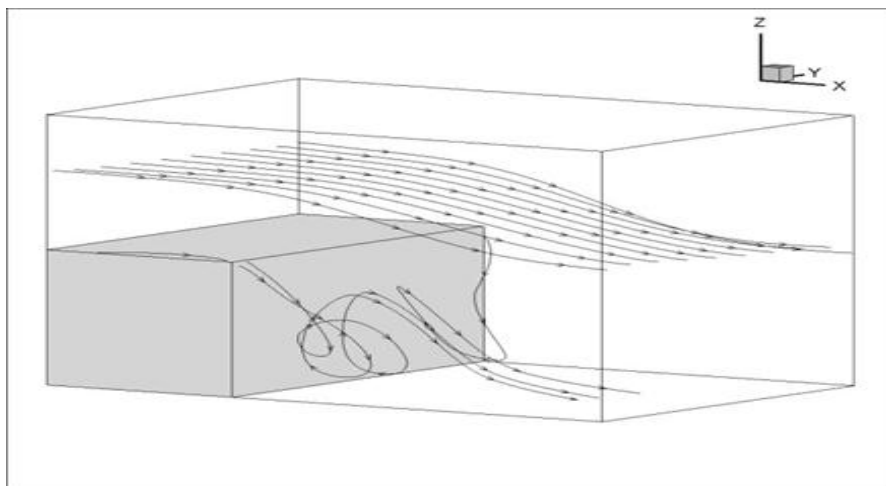


Рис. 3.11 Фаза установления течения над обратным уступом при $Re=400$

В начальный момент времени слои жидкости движутся параллельно друг другу аналогично плоскому случаю. На стадии развития течения слои жидкости постепенно переходят в соседние положения, образуя зоны перемешивания вдоль поперечной координаты. И, наконец, на стадии установления частицы со стенок канала, закручиваясь, перемещаются в центр, где продолжают движение по направлению к выходу из области. Установившееся течение в данном расчете имеет довольно хорошее качественное совпадение с результатами расчетов соответствующей стационарной задачи, проведенными авторами в [16, 132].

На Рис. 3.12, Рис. 3.13, Рис. 3.14 представлены соответственно фазы начала, развития и установления течения в траншее при $Re = 400$.

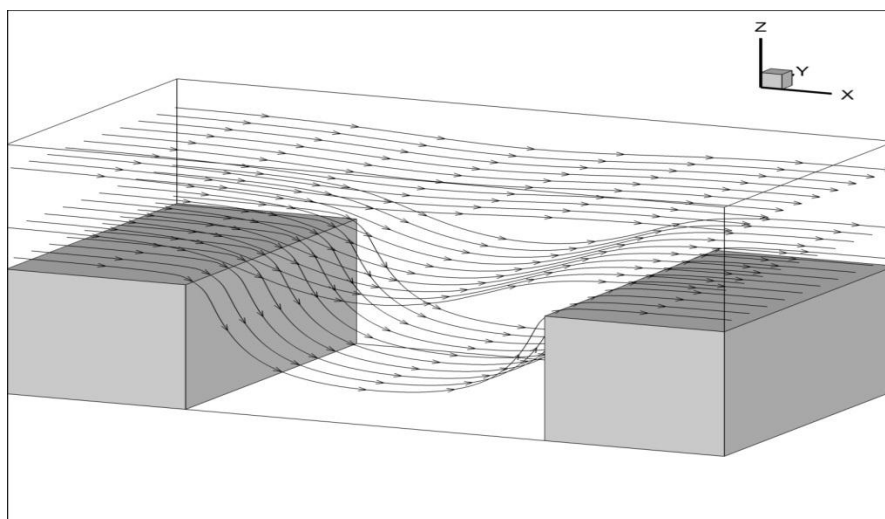


Рис. 3.12 Фаза начала течения в траншее при $Re=400$

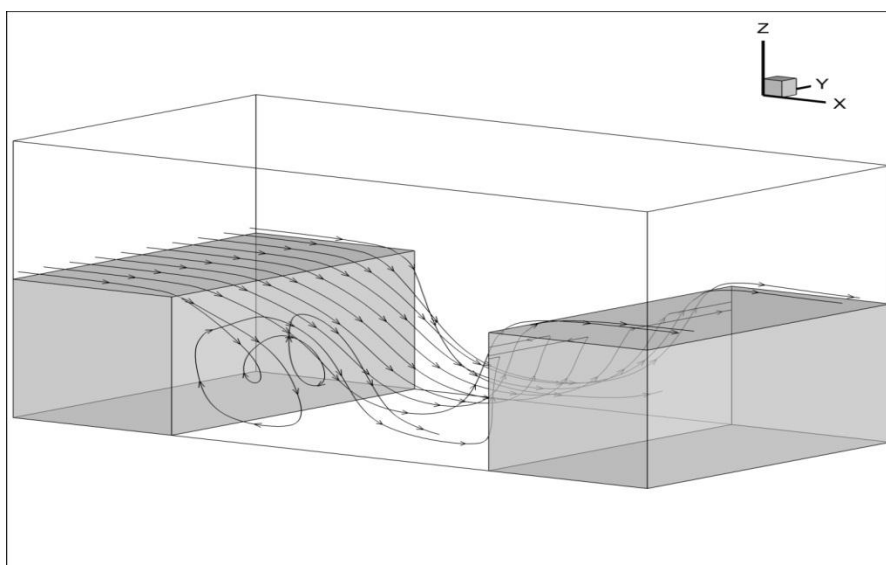


Рис. 3.13 Фаза развития течения в траншее при $Re=400$

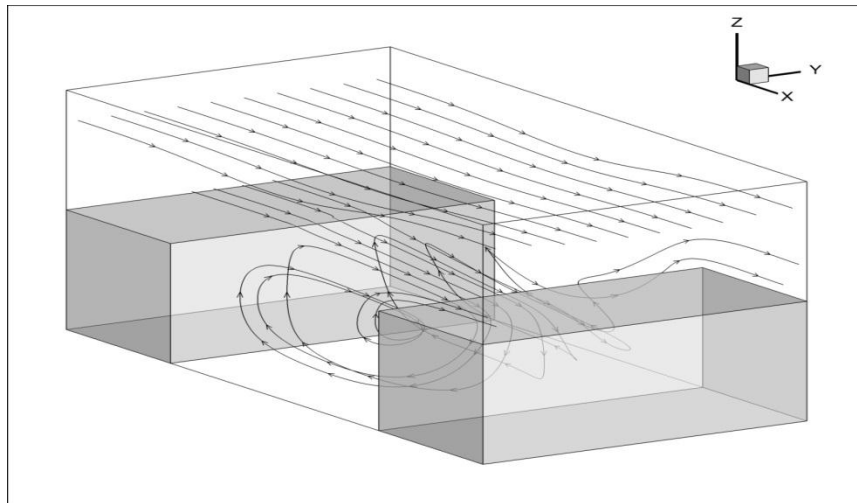


Рис. 3.14 Фаза установления течения в траншее при $Re=400$

Фазы начала и развития течения в траншее не отличаются особенным поведением движения жидкости по сравнению с течением над обратным уступом. Стадия установления течения в данном расчете имеет принципиальные отличия: движущиеся по центру частицы жидкости, попадая в траншею, вовлекаются в вихревую зону и покидают область вдоль стенок канала. Данный результат также согласуется с результатами расчетов подобной стационарной задачи, проведенными авторами в [132].

Третья серия расчетов посвящена исследованиям пространственных задач внешнего обтекания. Процесс тестирования в этом случае был основан на численном моделировании движения жидкости вокруг тел простой геометрии. Расчеты, как и прежде, проводились при различных формулировках дифференциальной системы уравнений, дискретных параметрах разностных задач и числах Рейнольдса. Продемонстрируем результаты тестирования в данном случае с помощью картин начала, развития и установления течений в двух задачах обтекания тел кубической и цилиндрической форм (Рис. 3.15 - Рис. 3.20). Проведенные расчеты качественно согласуются с аналогичными результатами в [16, 132].

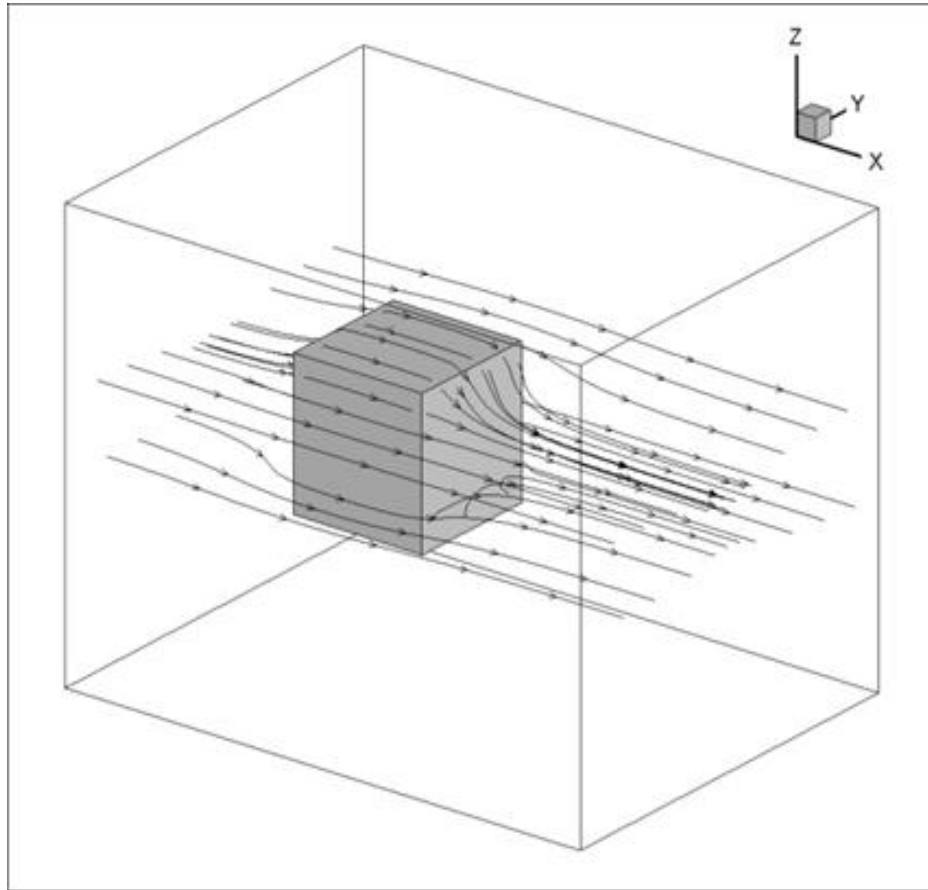


Рис. 3.15 Фаза начала течения в задаче обтекания куба при $Re=400$

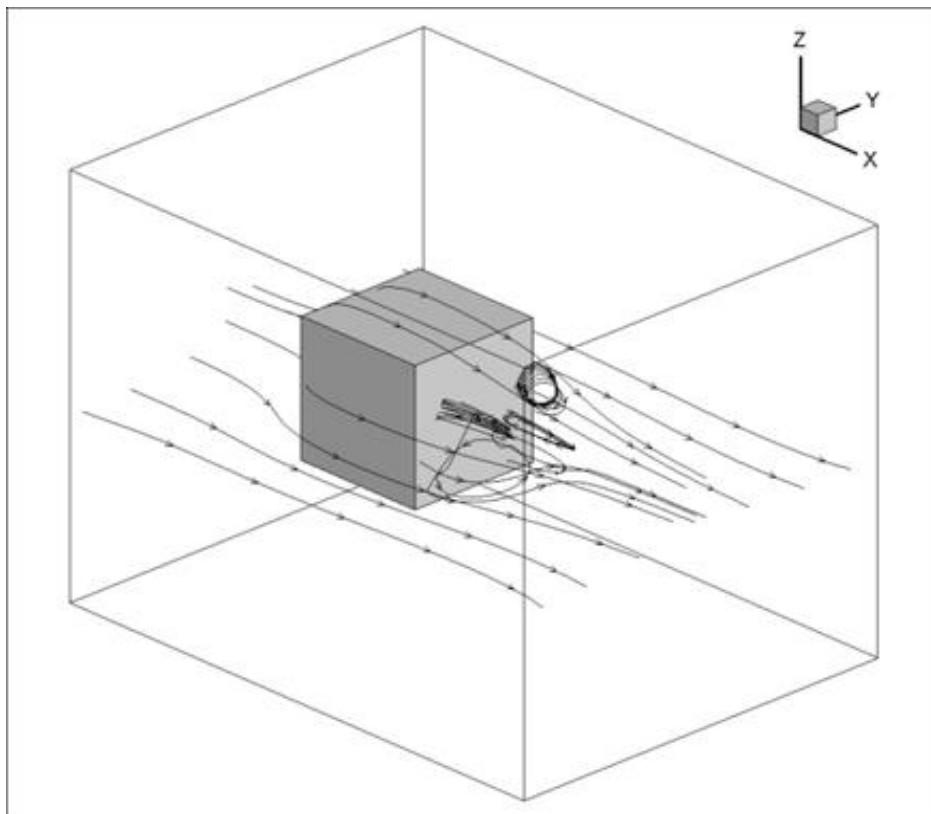


Рис. 3.16 Фаза развития течения в задаче обтекания куба при $Re=400$

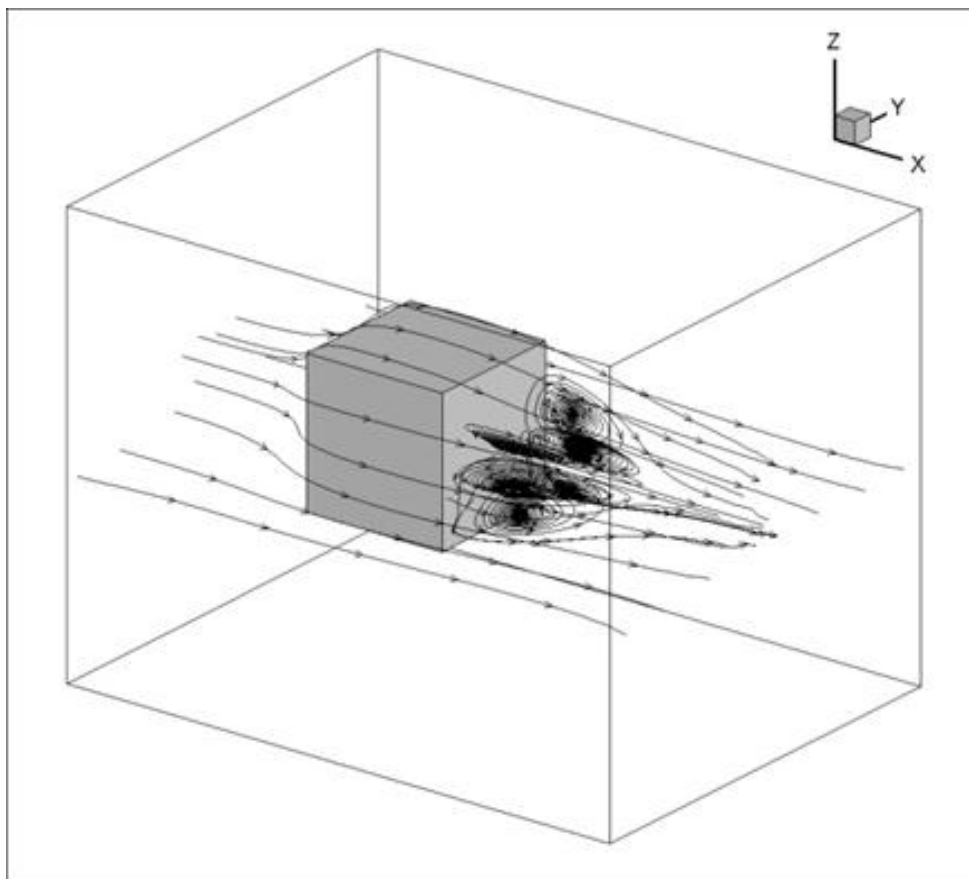


Рис. 3.17 Фаза установления течения в задаче обтекания куба при $Re=400$

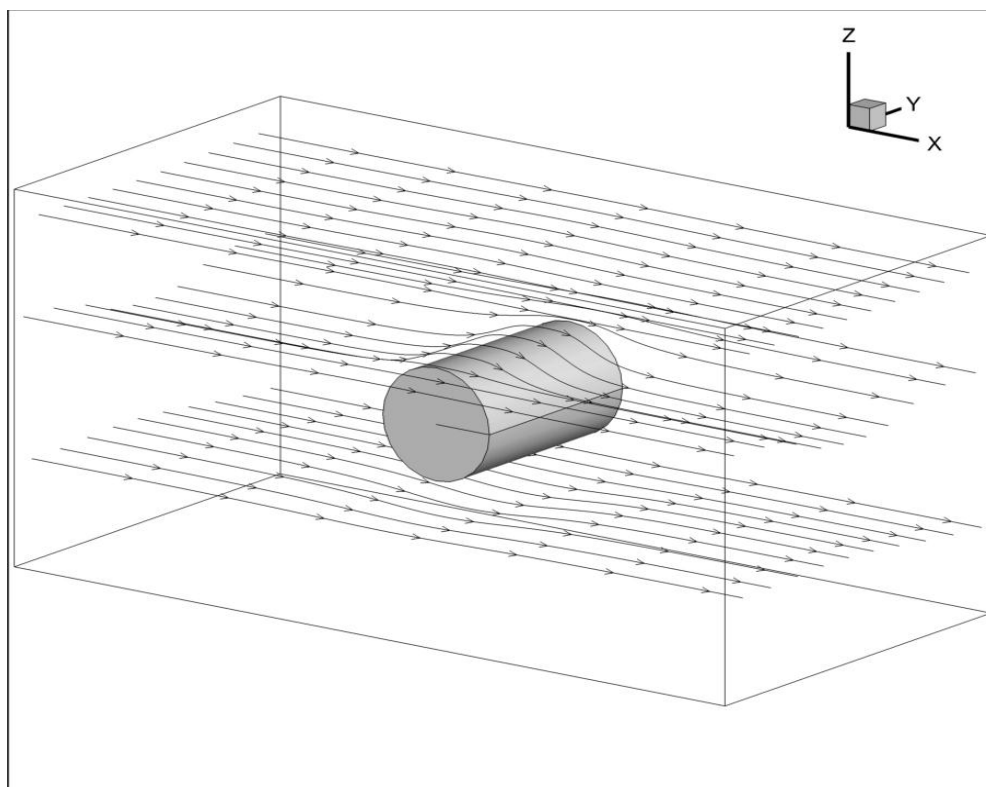


Рис. 3.18 Фаза начала течения в задаче обтекания поперечного цилиндра при $Re=400$

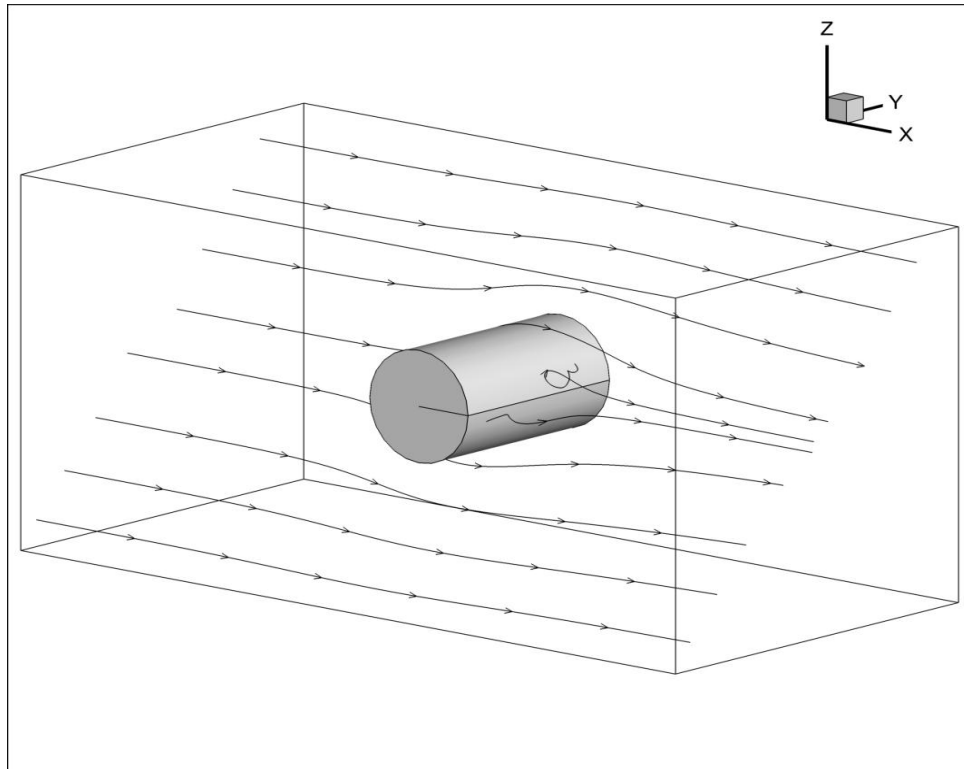


Рис. 3.19 Фаза развития течения в задаче обтекания поперечного цилиндра при $Re=400$

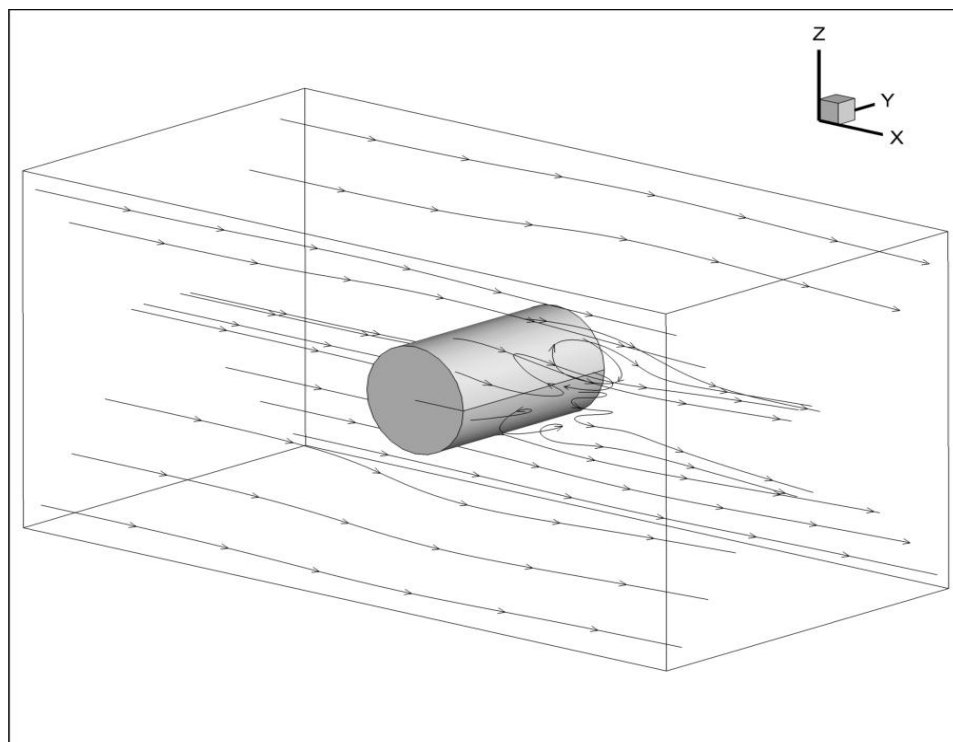


Рис. 3.20 Фаза установления течения в задаче обтекания поперечного цилиндра при $Re=400$

В данном параграфе разработанный в главе 1 программный комплекс был использован для расчета трехмерных нестационарных задач,

характеризующихся различным типом течения жидкости. Проведенные исследования являются в известном смысле модельными и были организованы для апробации предложенных в настоящей работе алгоритмов и их программной реализации в пространственном случае.

3.4 Численное моделирование размыва слабонесущего грунта вблизи опорных оснований нефтедобывающих установок в прибрежных морских зонах

Проведение реального численного эксперимента, имеющего какое-либо практическое значение, как правило, сопряжено со значительными трудностями и требует колоссальных усилий от исследовательской группы. В отличие от расчета модельных задач и различных тестовых исследований реальный численный эксперимент обладает следующими важными особенностями:

1. Трехмерность и нестационарность.

Для расчета большинства практических задач для достижения требуемой точности расчетов приходится использовать полную трехмерную дифференциальную постановку без использования условий симметрии. Также практические задачи, как правило, являются принципиально нестационарными, что объясняется нестационарными краевыми условиями или изменением геометрии области движения жидкости с течением времени.

2. Нетривиальность постановки дифференциальной задачи.

Любое течение вязкой несжимаемой жидкости описывается одной и той же системой уравнений Навье-Стокса, поэтому одна задача отличается от другой определенным набором параметров, состоящим из числа Рейнольдса, характеристик геометрии области движения жидкости и совокупностью краевых условий. Каждая из указанных составляющих в реальном численном эксперименте имеет первостепенное значение и требует отдельного рассмотрения.

2.1. Число Рейнольдса.

Первое, чем осложняется постановка реальной задачи – это большое значение числа Рейнольдса. Например, если моделируется движение воды, то ожидаемые значения числа Рейнольдса находятся в диапазоне, свыше 10^4 , а чаще имеют порядок 10^5 , или даже 10^6 и практически не оставляют надежд

на наличие ламинарного режима течения. Использование для численных расчетов какой-либо модели турбулентности сопряжено с появлением новых проблем, являющихся очень актуальными в настоящее время и связанных с существенными трудностями численного моделирования турбулентных течений. Отказ от применения моделей турбулентности означает, либо использование специальных алгоритмов, позволяющих проводить прямое численное моделирование турбулентных течений, либо ослабление постановки задачи (например, за счет проведения исследований при значительно меньших скоростях), обеспечивая условия ламинарного режима.

2.2. Геометрия области течения.

Реальная задача, как правило, обладает довольно сложной пространственной геометрией области движения жидкости. При численном эксперименте желательно учесть все ее особенности, поскольку из тестовых расчетов известно, что незначительные изменения (упрощения) геометрии могут привести к существенно иным результатам расчета течения. Более того, серьезное осложнение вызывает тот факт, что геометрия области движения жидкости может изменяться с течением времени (свободная поверхность, силовые воздействия со стороны жидкости на границы области), что приводит к необходимости периодического перезапуска процесса дискретизации при реализации численного алгоритма решения задачи.

2.3. Краевые условия.

Формулировка краевых условий, пожалуй, одна из важнейших особенностей постановки расчетов практических задач. Во-первых, возможны случаи, когда из физики задачи или натурных измерений известны граничные условия на компоненты вектора скорости, а алгоритм требует постановки задачи «в давлениях», или наоборот. Во-вторых, в большинстве практических задач постановка краевых условий на некоторых границах крайне сложна (свободная поверхность, участки выхода жидкости из

области и т.д.). И, наконец, в некоторых случаях часть краевых условий просто неизвестны или их невозможно получить из природы явления.

3. Большой объем вычислений.

Реальный численный эксперимент в большинстве случаев сопряжен с необходимостью использования колоссального количества вычислительных ресурсов. Это, конечно, объясняется требованием точности полученных численных результатов, поскольку обычно основной целью является обеспечение их количественного совпадения с лабораторными исследованиями и натурными экспериментами. Понятно, что для достижения необходимой точности результатов численных расчетов необходимо использовать максимально мелкие сетки, что приводит к значительному объему памяти, занимаемому дискретным представлением неизвестных функций и существенным временным затратам на реализацию численного алгоритма. Время, затрачиваемое на расчет модельных задач в процессе тестирования, обычно исчисляется часами или днями, а проводить такие расчеты в настоящее время возможно на персональных компьютерах и ноутбуках. Время, затрачиваемое на проведение реального вычислительного эксперимента уже может занимать недели или даже месяцы и осуществить его, как правило, возможно только на супер-эвм с привлечением технологий параллельных вычислений.

Указанные особенности расчетов реальных задач требуют, как это отмечалось во введении настоящей работы, организации подготовительного процесса к вычислительному эксперименту с целью получения программного комплекса, в который заложены прошедшие многократное тестирование численные алгоритмы. В рамках данной работы этот процесс завершен и последней его стадией было тестирование предложенных методик расчета при решении различного типа пространственных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости (параграф 3 настоящей главы). В данном параграфе разработанный программный комплекс будет применен к расчету важных практических задач, поставленных и решенных в рамках работы над

совместным проектом¹ кафедры вычислительной математики КемГУ г. Кемерово и 23 ГМПИ филиал ОАО 31 ГПИСС г. Санкт-Петербург, и Госзаданием № 1.630.2014/к – «Моделирование течений с переменной плотностью и вязкостью при решении прикладных задач».

Поверхность морского дна обыкновенно представлена слабонесущим грунтом (например, песок или глина), при этом в шельфовых зонах возможны значительные скорости постоянных и волновых придонных течений. При взаимодействии этих течений с опорами нефтедобывающих установок и поверхностью дна формируются поля скорости течения в виде областей вихревых возмущений. При определенных условиях они могут воздействовать на донный материал таким образом, что он начинает перемещаться вдоль поверхности дна и подниматься вверх, формируя профили взвешенных наносов. Эти процессы приводят к изменению структуры дна, причем в непосредственной близости от опорных оснований установок и под ними могут формироваться глубокие промоины, которые снижают устойчивость установки на дне и в отдельных, критических, случаях могут приводить к ее недопустимому наклону или даже к опрокидыванию.

При изучении и численном исследовании подобных процессов наиболее важным этапом является расчет возникающих течений около обтекаемых препятствий (платформ для нефтедобывающих сооружений). Именно распределение скоростей в нижних слоях жидкости составляет основу силовых воздействий на донный материал, формируя структуру размыва грунта.

В рамках работы над проектами коллективом кафедры вычислительной математики КемГУ был создан новый программный комплекс «XFlow», гидродинамическое ядро которого составляют численные алгоритмы и их программная реализация, разработанные и предложенные в настоящей

¹ «Разработка методики расчета процесса размыва грунта у основания буровой платформы при действии волн и течения для различных геологических условий, с учётом рельефа дна и конструкции основания гравитационной платформы». Договор № 10/12с-13 от 01 июля 2013 г. Шифр «Размыв-Грунт-КемГУ»¹

диссертации. «XFlow» также включает в себя несколько моделей размыва несвязного грунта и специальные компоненты, решающие проблемы реального вычислительного эксперимента, обозначенные в начале данного параграфа.

Приведем далее некоторые результаты, полученные при расчете течения около платформы «Приразломная» (Рис. 3.21).



Рис. 3.21 МЛСП «Приразломная»

На Рис. 3.22 приведены результаты численного расчета течения, соответствующие лабораторному эксперименту на модели платформы «Приразломная».

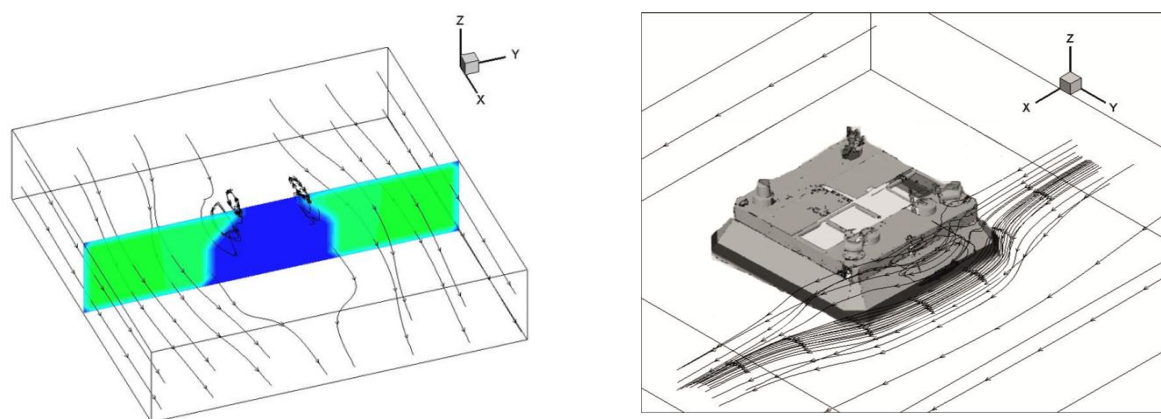


Рис. 3.22 Линии тока течения вблизи модели платформы «Приразломная»

На Рис. 3.23 приведены результаты размыва грунта, полученные с помощью численного и лабораторного эксперимента соответственно.

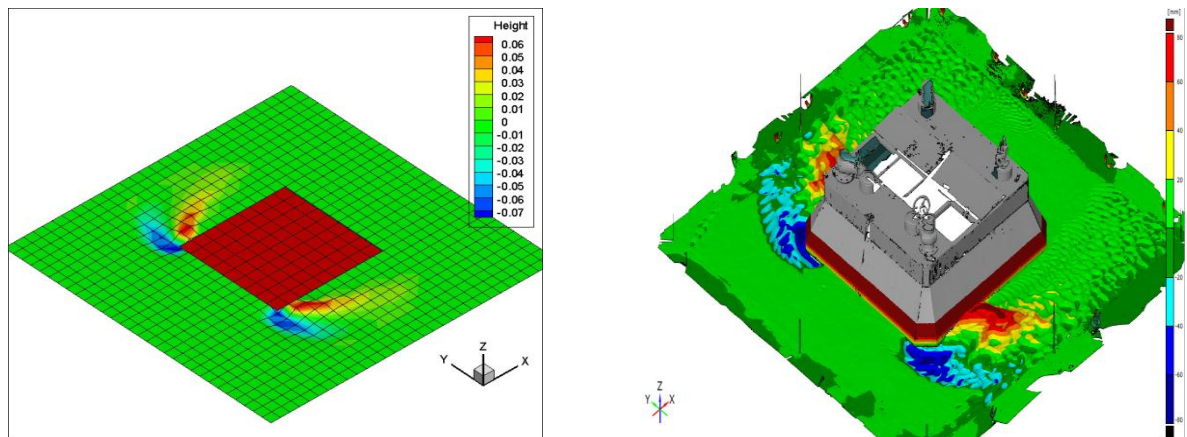


Рис. 3.23 Картины размыва грунта от течения вблизи модели платформы модели «Приразломная»

Результаты расчетов демонстрируют довольно сложную форму течения, характеризующуюся наличием вихревых зон вблизи стенок препятствия, прямо влияющих на поведение нижних слоев жидкости около основания платформы, формируя определенную структуру размыва грунта. Численные результаты размыва грунта качественно и количественно (погрешность менее 5%) согласуются с соответствующими лабораторными экспериментами.

В данном параграфе рассмотрено применение программного комплекса, разработанного в главе 1 к расчету практических задач о течении вязкой несжимаемой жидкости. Проведенные вычислительные эксперименты показали достаточную эффективность предложенных в настоящей работе численных алгоритмов и их программной реализации, а полученные совпадения с лабораторными опытами дают основания для их использования в полномасштабных исследованиях. Выполненные численные расчеты и результаты их количественного сравнения с маломасштабными экспериментами позволили также сделать важные выводы и сформировать дальнейшие перспективы развития гидродинамической составляющей, которые уже сейчас частично заложены в программный комплекс «XFlow». Это такие актуальные направления, как: численное моделирование

турбулентности, численное моделирование волновых эффектов на свободной поверхности, оптимизация и параллелизм базовых операций операторно-векторной арифметики и т.д.

Настоящая глава была посвящена численному моделированию пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости. В главе исследованы возможности применения различных формулировок исходных дифференциальных уравнений Навье-Стокса к расчету нестационарных трехмерных задач разного типа (внутренних, протекания, внешнего обтекания). На основании проведенных численных экспериментов можно сделать вывод о том, что для чисто внутренних задач (отсутствуют границы с протеканием) наиболее эффективным является применение исходной дифференциальной постановки в переменных «вихрь - векторный потенциал», в то время как для задач протекания оптимальным является использование естественных переменных. Такое утверждение базируется на ряде соображений. В первом случае не возникает особых трудностей с постановкой граничных условий для векторного потенциала, и решение трех уравнений Пуассона со смешанными краевыми условиями с помощью изложенных ранее алгоритмов не вызывает принципиальных проблем. При использовании же естественных переменных всегда возникает необходимость в решении задачи Неймана для давления. При этом матрица системы линейных алгебраических уравнений, получающейся в результате дискретизации дифференциальной задачи, всегда оказывается вырожденной. Решение систем с произвольной вырожденной матрицей на каждом шаге по времени является достаточно трудной задачей, поэтому, по существу, применение без особых трудностей методов с использованием естественной постановки возможно лишь в самосопряженном случае, в то время как при использовании постановки «вихрь - векторный потенциал» для решения внутренних задач такого ограничения нет. При численном решении задач протекания с использованием дифференциальной постановки «вихрь -

векторный потенциал» возникают серьезные проблемы с заданием граничных значений векторного потенциала. Поэтому в основном прибегают к введению скалярного потенциала, однако в этом случае возникает дополнительная задача Неймана. Таким образом, уравнение Пуассона с краевыми условиями второго рода на всей границе в задачах протекания необходимо решать при использовании любой из дифференциальных формулировок. В случае же переменных «вихрь - векторный потенциал» на каждом шаге по времени в дополнение к задаче Неймана нужно решать еще три уравнения Пуассона со смешанными граничными условиями для компонент векторного потенциала. Поэтому решение задач протекания с использованием физических переменных представляется более целесообразным.

Заключение

В заключении кратко сформулируем основные выводы по результатам работы:

1. Градиентные схемы с многокомпонентной оптимизацией итерационных параметров показали достаточную эффективность при решении систем линейных и билинейных алгебраических уравнений. Вариант схемы с полной оптимизацией итерационных параметров позволил существенно сократить вычислительные затраты при тестовых серийных расчетах.
2. Разработанный программный комплекс позволил реализовать единообразный подход к решению многомерных систем нестационарных уравнений Навье-Стокса. Дополнительный компонент для визуализации расчетов позволил получить необходимые для практических целей подробные сведения о траекториях движения отдельных частиц.
3. Полученные численные краевые условия в одномерном и симметричном двумерном случаях позволили получить решения в нестационарных задачах с условиями на удаленных границах.
4. Из результатов проведенных расчетов следует, что существование или отсутствие нестационарных решений двумерных нестационарных систем уравнений Навье-Стокса существенно зависит от геометрии области течения и граничных условий. Как показали расчеты исследуемых задач разного типа, существует некоторый интервал чисел Рейнольдса, в пределах которого течение на сколь угодно больших промежутках времени не переходит в стационарный режим, и, как правило, имеет периодический характер. При этом в некоторых случаях может наблюдаться отсутствие симметрии движения жидкости при симметричной геометрии области и симметричных краевых условиях.

5. На основании численных экспериментов сделаны заключения об эффективности применения различных дифференциальных формулировок и соответствующих дискретных алгоритмов для расчета различного типа двумерных и трехмерных нестационарных задач.
- 5.1 В плоском случае предпочтение отдается формулировке «вихрь - функция тока» и классическому численному алгоритму последовательного определения неизвестных функций. Естественную формулировку следует применять в случаях, когда количество доменов многосвязной области достаточно велико, или когда в исходной постановке задачи отсутствуют условия на компоненты вектора скорости на одной из границ.
- 5.2 В пространственном случае для внутренних задач наиболее эффективным является применение исходной дифференциальной постановки в переменных «вихрь - векторный потенциал», в то время как для задач с протеканием оптимальным является использование естественных переменных.
6. В рамках работы над совместным проектом кафедры вычислительной математики КемГУ» и «23 ГМПИ» филиала ОАО «31 ГПИСС» и Государственным заданием № 1.630.2014/к разработанный программный комплекс применен к расчету практических задач, связанных с размывом слабонесущего грунта в прибрежных морских зонах. Получено хорошее соответствие (с точностью до 1%) численных результатов с экспериментальными данными лабораторных исследований.

Список литературы

1. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – Москва: Дрофа, 2003. – 840 с.
2. Седов, Л.И. Механика сплошных сред. Т. 1-2 / Л.И. Седов. – Москва: Наука, 1970. – 1136 с.
3. Юдович, В.И. Одиннадцать великих проблем математической гидродинамики / В.И. Юдович // Вестник молодых ученых: Прикладная математика и механика. – 2003. – С. 186-192.
4. Волков, П.К. О природе движения жидкости / П.К. Волков // Вестник Югорского Государственного Университета. – 2011. – № 2 (21). – С. 8-28.
5. Волков, П.К. Исследование корректности краевых задач для уравнений Навье-Стокса в естественных переменных / П.К. Волков, П.А. Ананьев, А.В. Переверзев // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16, № 7. – С. 68-76.
6. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – Москва: Наука, 1970. – 288 с.
7. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – Москва: Мир, 1981. – 408 с.
8. Wang, C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations / C.Y. Wang // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177.
9. Richardson, L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam / L.F. Richardson // Trans. Roy. Soc. – 1910. – Vol. 210, No. Ser. A. – P. 307-357.

10. Tychkov, S.A. Numerical modeling of 3D convection in the Earth mantle / S.A. Tychkov, V.V. Chernov, G.G. Chernykh // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. – 2005. – Vol. 20, No. 5. – P. 483-500.
11. Черный, С.Г. Численное моделирование течений в турбомашинах / С.Г. Черный, Д.В. Чирков, В.Н. Лапин, В.А. Скороспелов, С.В. Шаров. – Новосибирск: Наука, 2006. – 202 с.
12. Гущин, В.А. Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости / В.А. Гущин, П.В. Матюшин // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, № 5. – С. 5-20.
13. Червов, В.В. Численное моделирование трехмерной конвекции под кратонами Центральной Азии / В.В. Червов, Г.Г. Черных, А.В. Червов // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14, № 5. – С. 114-121.
14. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – Москва: Мир, 1980. – 616 с.
15. Ильгамов, М.А. Обзор работ по неотражающим условиям на границах расчетной области / М.А. Ильгамов // Тр. семин. АН СССР. Казан. физ.-техн. ин-т. – 1990. – № 26. – С. 6–54.
16. Захаров, Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики / Ю.Н. Захаров. – Новосибирск: Наука, 2004. – 239 с.
17. Кочевский, А. Расчет внутренних течений жидкости в каналах с помощью программного продукта FlowVision / А. Кочевский. – 2004. – http://www.thesis.com.ru/infocenter/downloads/flowvision/fv_sgu_es04.pdf
18. Линь, Ц.ц. Теория гидродинамической устойчивости / Ц.ц. Линь. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1958. – 194 с.
19. Гольдштик, М.А. Вязкие течения с парадоксальными свойствами / М.А. Гольдштик, В.Н. Штерн, Н.И. Яворский. – Новосибирск: Наука, 1989. – 336 с.
20. Пухначев, В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса / В.В. Пухначев //

Успехи механики. – 2006. – № 6. – С. 6-76.

21. Ковеня, В.М. Модификация метода расщепления для численного решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса / В.М. Ковеня // XVI Международная школа-семинар по численным методам механики вязкой жидкости – Новосибирск, 1998.
22. Langtangen, H.P. Numerical methods for incompressible viscous flow / H.P. Langtangen, K.A. Mardal, R. Whinter // Advances in Water Resources. – 2002. – Vol. 25. – P. 1125–1146.
23. Kwak, D. Implicit methods for viscous incompressible flows / D. Kwak, C. Kiris, J. Housman // Computers & Fluids. – 2011. – Vol. 41. – P. 51–64.
24. Головизнин, В.М. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных комплексов / В.М. Головизнин, М.А. Зайцев, С.А. Карабасов, И.А. Короткин. – Москва: Издательство Московского университета, 2013. – 467 с.
25. Пасконов, В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. – Москва: Наука, 1984. – 288 с.
26. Полежаев, В.И. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Вerezуб. – Москва: Наука, 1987. – 272 с.
27. Андерсон, В. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1-2 / Д. Таннехил, Р. Плетчер. – Москва: Мир, 1990.
28. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1 / К. Флетчер. – Москва: Мир, 1991. – 504 с.
29. Anderson, J.D. Computational fluid dynamics - The basics with applications / J.D. Anderson. – New York: McGraw-Hill, 1995. – 547 p.
30. Ferziger, J.H. Computational methods for fluid dynamics / J.H. Ferziger, M. Peric. – Berlin: Springer, 1996. – 365 p.

31. Hafez, M. Numerical simulation of incompressible flows / M. Hafez. – World Scientific, 2002. – 708 p.
32. Hirsch, C. Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol. 1: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics / C. Hirsch. – 2007. — 680 p.
33. Тарунин, Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции / Е.Л. Тарунин. – Иркутск: изд-во Иркут. ун-та, 1990. – 228 с.
34. Мошкин, Н.П. Метод численного решения задачи протекания в переменных «функция тока, вихрь» / Н.П. Мошкин // Численные методы механики сплошной среды: сб. научн. тр. – 1984. – Т. 15, № 3. – С. 98-114.
35. Вабищевич, П.Н. Неявные разностные схемы для нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока – вихрь» / П.Н. Вабищевич // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 7. – С. 1135–1144.
36. Orlandi, P. Vorticity velocity formulation for high Re Flows / P. Orlandi // Computers Fluids. – 1987. – Vol. 15, No. 2. – P. 137-149.
37. Жумагулов, Б.Т. Численные методы решения уравнений Навье-Стокса в многосвязной области / Б.Т. Жумагулов, Ш.С. Смагулов, М.К. Орунханов // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1989. – № 3. – С. 23–27.
38. Вабищевич, П.Н. Реализация краевых условий при решении уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока - вихрь скорости» / П.Н. Вабищевич // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 1. – С. 22-26.
39. Orszag, S.A. Boundary conditions for incompressible flows / S.A. Orszag, M. Israeli, M.O. Deville // J. Scientific Computing. – 1986. – Vol. 1. – P. 75–111.
40. Rudisil, E.N. Граничные условия для уравнений Навье-Стокса / E.N. Rudisil, H.A. Hassan. – Montreal, 1987. – С. 127–136 с.

41. Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский. – Москва: Наука, 1984. – 520 с.
42. Владимирова, Н.Н. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости / Н.Н. Владимирова, Б.Г. Кузнецов, Н.Н. Яненко // Некоторые вопросы прикладной и вычислительной математики. – 1966. – С. 186-192.
43. Chorin, A.J. A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems / A.J. Chorin // J. Comp. Phys. – 1967. – Vol. 2. – P. 12—26.
44. Chorin, A.J. Numerical solution of Navier-Stokes equations / A.J. Chorin // Mathematics of computations. – 1968. – Vol. 22. – P. 745-762.
45. Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1967. – 194 с.
46. Temam, R. Sur l'approximation de la solution des equations des Navier-Stokes / R. Temam // Bull. Soc. Matem. des France. – 1968. – Vol. 96. – P. 115-152.
47. Ладыженская, О.А. Вопросы теории разностных схем для уравнения Навье-Стокса и некоторые результаты их численного решения / О.А. Ладыженская, В.Я. Ривкинд // Труды ГУ Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. – 1973. – С. 3-16.
48. Кузнецов, Б.Г. Об аппроксимации уравнений Навье-Стокса / Б.Г. Кузнецов, Ш. Смагулов // Численные методы механики сплошных сред. – 1975. – Т. 6, № 2. – С. 70-79.
49. Кузнецов, Б.Г. О сходящихся схемах дробных шагов для трехмерных уравнений Навье-Стокса / Б.Г. Кузнецов, Ш. Смагулов // Численные методы механики сплошных сред. – 1984. – Т. 15, № 2. – С. 69-80.
50. Горовая, Е.Н. О решении пространственных задач для уравнений Навье-Стокса по устойчивым разностным схемам на ЭВМ / Е.Н. Горовая. –

Новосибирск. 1973. – С. 95-100.

51. Ветлущий, В.Н. Численные методы в динамике вязкой жидкости / В.Н. Ветлущий, Б.П. Колобов, Б.Г. Кузнецов, Г.Г. Черных // Моделирование в механике. – 1987. – Т. 1 (18), № 4. – С. 22-45.
52. Merkle, C.L. Time-accurate unsteady incompressible flow algorithms based on artificial compressibility / C.L. Merkle, M. Athavall // AIAA Pap. – 1987. – No. 87 1137. – P. 1-12.
53. Грязин, Ю.А. Об одном методе численного решения трехмерных задач динамики несжимаемой жидкости / Ю.А. Грязин, С.Г. Черный, С.В. Шаров, П.А. Шашкин // Доклады Академии Наук России. – 1997. – Т. 353, № 4. – С. 478-483.
54. Hejranfar, K. Implementing a high-order accurate implicit operator scheme for solving steady incompressible viscous flows using artificial compressibility method / K. Hejranfar, A. Khajeh-Saeed // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2011. – Vol. 66. – P. 939–962.
55. Harlow, F.H. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface / F.H. Harlow, J. Welch // Phys Fluids. – 1965. – Vol. 8, No. 12. – P. 2182–2189.
56. Харлоу, Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики / Ф.Х. Харлоу // Вычислительные методы в гидродинамике. – 1967. – P. 316-342.
57. Рыков, В.В. Численное моделирование нестационарных течений несжимаемой вязкой жидкости / В.В. Рыков // ЖВММФ. – 1985. – Т. 25, № 5. – С. 789-793.
58. Гущин, В.А. Развитие метода расщепления по физическим факторам для расчета течений несжимаемой жидкости / В.А. Гущин // Числ. моделир. в аэрогидродинамике. – 1986. – С. 90-97.
59. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики

жидкости / С. Патанкар. – Москва: Энергоатомиздат, 1984. – 154 с.

60. Prudhomme, S. On the flow stability of finite elements approximation of the Navier-Stokes equations / S. Prudhomme. – 1998. – 52 p.
61. Вабищевич, П.Н. Методы расчета нестационарных несжимаемых течений в естественных переменных на неразнесенных сетках / П.Н. Вабищевич, А.Н. Павлов, А.Г. Чурбанов // Математическое моделирование. – 1996. – № 8 (7). – С. 81–108.
62. Вабищевич, П.Н. Численные методы решения нестационарных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных на частично разнесенных сетках / П.Н. Вабищевич, А.Н. Павлов, А.Г. Чурбанов // Математическое моделирование. – 1997. – № 9 (4). – С. 85–114.
63. Воеводин, А.Ф. Численный метод решения начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса в замкнутых областях на основе метода расщепления / А.Ф. Воеводин, Т.В. Юшкова // Сиб. журн. вычисл. математики. – 1999. – Т. 2, № 4. – С. 321–332.
64. Воеводин, А.Ф. Метод расщепления по физическим процессам для расчета задач конвекции / А.Ф. Воеводин, О.Н. Гончарова // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, № 5. – С. 90-96.
65. Волков, К.Н. Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости / К.Н. Волков // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6, № 2. – С. 146-159.
66. Воеводин, А.Ф. Реализация метода расщепления по физическим процессам для численного решения трехмерных задач конвекции / А.Ф. Воеводин, О.Н. Гончарова // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14, № 1. – С. 21-33.
67. Белолипецкий, В.М. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости / В.М. Белолипецкий, В.Ю. Костюк,

Ю.И. Шокин. – Новосибирск: Наука, 1991. – 173 с.

68. Davis, R.L. Решения для трехмерных вязких течений в формулировке функций тока и завихренности / R.L. Davis, J.E. Carter, M. Haiez // *AIAA Journal*. – 1989. – Т. 27, № 7. – С. 892–900.
69. Белолипецкий, В.М. Численное решение задачи протекания для системы уравнений неоднородной жидкости / В.М. Белолипецкий, В.Ю. Костюк // *Численные методы механики сплошных сред*. – 1991. – Т. 17, № 2. – С. 3-9.
70. Liu, C.H. Numerical solutions of three-dimensional Navier-Stokes equations by a velocity-vorticity method / C.H. Liu // *Intern. J. Numer. Meth. Fluids*. – 2001. – No. 35. – P. 533-557.
71. Hirasaki, G.J. A general formulation of the boundary conditions of the vector potential in three-dimensional hydrodynamics / G.J. Hirasaki, J.D. Hellums // *Quart. Appl. Math.* – 1968. – Vol. 26, No. 3. – P. 331-342.
72. Hirasaki, G.J. Boundary conditions on the vector and scalar potential in viscous three-dimensional hydrodynamics / G.J. Hirasaki, J.D. Hellums // *Quart. Appl. Math.* – 1970. – Vol. 28, No. 2. – P. 293-296.
73. Ghia, K.N. Влияние граничных условий на входе и выходе на моделирование отрывных течений с помощью уравнений Навье–Стокса / K.N. Ghia, P. Satyanarayana, U. Ghia // *Comput. Mech. 88: Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci.* – Apr 1988. – Т. 2. – С. 52.III.
74. Вабищевич, П.Н. Анализ граничных условий при приближенном решении задач обтекания вязкой несжимаемой жидкостью / П.Н. Вабищевич // *Актуал. вопр. прикл. мат.* – Москва, 1989. – С. 49-54.
75. Perozzi, M.A. О граничных условиях для численного решения задач динамики жидкости / M.A. Perozzi // *Calcolo*. – 1989. – Т. 26, № 2-4. – С. 149–165.
76. Nordstrom, J. Влияние открытых граничных условий на сходимость к

- стационарному решению для уравнений Навье–Стокса / J. Nordstrom // J. Comput. Phys. – 1989. – Т. 85, № 1. – С. 210–244.
77. Попков, А.Н. К задаче численного расчета обтекания сферы безграничным потоком вязкой несжимаемой жидкости / А.Н. Попков // Моделир. в мех. – 1990. – Т. 4, № 1. – С. 48-60.
 78. Егорова, Е.Ф. Итерационная схема решения краевых задач гидродинамики с краевыми условиями на бесконечности / Е.Ф. Егорова, Ю.Н. Захаров, М.А. Толстых. – Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1991. – 60-61 с.
 79. Захаров, Ю.Н. Об одном методе решения уравнений с краевыми условиями на бесконечности / Ю.Н. Захаров // Вычислительные технологии. – 1993. – Т. 2, № 7. – С. 56-68.
 80. Nazarov, S.A. Искусственные граничные условия для внешней пространственной задачи Навье-Стокса / S.A. Nazarov // C.r. Acad. sci. Ser. 2. Fasc. b. – 2000. – Т. 328, № 12. – С. 863–867.
 81. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – Москва: Наука, 1977. – 608 с.
 82. Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.
 83. Saad, Y. Алгоритмы типа сопряженных градиентов для решения несимметричных линейных систем / Y. Saad // Math. Comput. – 1985. – Т. 44, № 170. – С. 417–424.
 84. Saad, Y. GMRES: обобщенный алгоритм минимальных невязок для численного решения несимметричных систем линейных алгебраических уравнений / Y. Saad, M.H. Schultz // SIAM J. Sci. and Statist. Comput. – 1986. – Т. 7, № 3. – С. 856–869.
 85. Saunders, M.A. Два метода типа сопряженных градиентов для несимметричных линейных уравнений / M.A. Saunders, H.D. Simon, E.L.

Yip // SIAM J. Numer. Anal. – 1988. – Т. 25, № 4. – С. 927–940.

86. Саад, Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. Т. 1-2 / Ю. Саад. – Москва: Издательство Московского университета, 2013. – 344 с.
87. Захаров, Ю.Н. Многошаговые схемы с вариационной оптимизацией итерационных параметров / Ю.Н. Захаров // Препринт. – Новосибирск, 1980. С. 12-14.
88. Захаров, Ю.Н. Об одном методе решения нестационарных задач гидродинамики / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Вестник КемГУ. – 2005. – Т. 4, № 24. – С. 97-100.
89. Захаров, Ю.Н. Итерационный метод численного решения нестационарных задач гидродинамики / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Материалы III международной летней научной школы «Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование». – Кемерово, 2006. – С. 383-389.
90. Захаров, Ю.Н. Визуализация внутренних течений вязкой несжимаемой жидкости / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов, А.А. Саньков // Сборник научных трудов конференции «Инновационные недра Кузбасса. IT-технологии». – Кемерово, 2007. – С. 301-305.
91. Захаров, Ю.Н. Численное решение трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных «вихрь - векторный потенциал» / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Вестник КАЗНУ им. АЛЬ-ФАРАБИ, серия Математика, механика, информатика, №3 (58), часть II. – Алматы. 2008. – Т. 13. – С. 159-166.
92. Иванов, К.С. Численное решение нестационарных уравнений Навье-Стокса / К.С. Иванов // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № 4. – С. 21-27.
93. Иванов, К.С. Итерационный метод решения трехмерных

нестационарных уравнений Навье-Стокса в переменных «вихрь – векторный потенциал» / К.С. Иванов // Сборник тезисов Всероссийской конференции по математике и механике, посвященной 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета. – 2008. – С. 134-135.

94. Иванов, К.С. Итерационный метод решения нестационарных задач гидродинамики в формулировке «функция тока - вихрь» / К.С. Иванов, Л.В. Кемерова // Материалы IV (XXXVI) Международной научно-практической конференции «Образование, наука, инновации – вклад молодых исследователей», вып. 10.– Кемерово, 2009. – Т. 2. – С. 147-148.
95. Zakharov, Y.N. Numerical simulation of three-dimensional non-stationary Navier-Stokes equation using "rotation – vector potential" formulation / Y.N. Zakharov Y.N., K.S. Ivanov // Mathematical and Informational Technologies, -Kopaonik, Serbia, Budva, Montenegro, Abstracts. – 2009. – P. 442-446.
96. Захаров, Ю.Н. Решение трехмерных нестационарных систем уравнений Навье-Стокса в различных постановках / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики: теория, эксперимент и практика», посвящённая 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. Тезисы докладов. – Новосибирск, 2011. – С. 92.
97. Иванов, К.С. Об одной нестационарной модели движения примесей в закрытых водоемах / К.С. Иванов, Л.В. Кемерова // Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование», Часть 2. – Анжиро-Судженск, 2010. – С. 150-155.
98. Захаров, Ю.Н. Об использовании градиентных итерационных методов при решении начально-краевых задач для трехмерной системы

уравнений Навье-Стокса / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Вычислительные технологии. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 55-69.

99. Захаров, Ю.Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс для численного расчета нестационарных течений вязкой однородной несжимаемой жидкости «DES»», 2012610205 / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов. – 2011.
100. Захаров, Ю.Н. Нестационарные решения системы уравнений Навье-Стокса / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Материалы Международной конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященной 80-летию со дня рождения академика М.М.Лаврентьева. – Новосибирск, 2012.
101. Иванов, К.С. О численном решении систем нестационарных уравнений Навье-Стокса с использованием консервативных схем / К.С. Иванов // Материалы Международной конференции «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование». – Кемерово, 2013.
102. Захаров, Ю.Н. О нестационарных решениях в задачах гидродинамики со стационарными краевыми условиями / Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 1. – С. 24-33.
103. Гейдаров, Н.А. Численные и экспериментальные исследования размыва грунта от течений у оснований гравитационных платформ / Н.А. Гейдаров, Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов, В.В. Лебедев, А.В. Мишина, И.С. Нуднер, К.К. Семёнов, Л.Г. Щемелинин // Труды XII Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (ГА -2014). – С.-Петербург, 2014. – С. 239-241.
104. Zakharov, Y.N. On numerical solution of Navie-Stocks equations with infinite boundary conditions / Y.N. Zakharov, K.S. Ivanov // Zbornik radova konferencije MIT 2013, Beograd, 2014, 760 p. (Proceedings of International

- Conference “Mathematical and Informational Technologies MIT-2013). – Врнячка Баня, Сербия, Будва, Черногория, 2014. – P. 751-756.
105. Gaydarov, N.A. Numerical and Experimental Studies of Soil Scour Caused by Currents near Foundations of Gravity-Type Platforms / N.A. Gaydarov, Y.N. Zakharov, K.S. Ivanov, K.K. Semenov, V.V. Lebedev, I.S. Nudner, N.D. Belyaev, A.V. Mishina, L.G. Schemelinin // Proceedings of 2014 International Conference on Civil Engineering, Energy and Environment (CEEE-2014). – Hong Kong, 13-14 December 2014. – P. 190-197.
 106. Гейдаров, Н.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс для расчета размыва грунта при действии волн и течения для различных геологических условий», 2015612750 / Н.А. Гейдаров, Ю.Н. Захаров, К.С. Иванов. – 2015.
 107. Попов, Ю.П. Вычислительный эксперимент / Ю.П. Попов, А.А. Самарский // Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. – 1988. – С. 16-78.
 108. Яненко, Н.Н. Вопросы модульного анализа и параллельных вычислений в задачах математической физики / Н.Н. Яненко // Яненко Н.Н. Избранные труды. – 1991. – С. 292-296.
 109. Ковеня, В.М. Разностные методы решения многомерных задач: Курс лекций / В.М. Ковеня. – Новосибирск: НГУ, 2004. – 146 с.
 110. Гейдаров, Н.А. Решение стационарной задачи о течении вязкой жидкости в канале, вызванном заданным перепадом давлений, при наличии внутренних источников / Н.А. Гейдаров, Ю.Н. Захаров, Ю.И. Шокин // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, № 5. – С. 14-23.
 111. Макконнелл, С. Совершенный код. Мастер класс / С. Макконнелл. – Санкт-Петербург: Русская редакция, 2005. – 896 с.
 112. Роджерсон, Д. Основы COM / Д. Роджерсон. – Санкт-Петербург: Русская

редакция, 2000. – 400 с.

113. Березин, А.В. Объектно-ориентированное программирование в методе частиц / А.В. Березин, Ю.А. Волков, В.Б. Красовицкий, М.Б. Марков // Математические модели. – 1998. – Т. 10, № 10. – С. 19-29.
114. Илиев, О. О гибком многосеточном алгоритме с локальным сгущением для уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости /О. Илиев, Д. Стоянов // Математические модели. – 2001. – Т. 13, № 8. – С. 95-116.
115. Страуструп, Б. Язык программирования C++ / Б. Страуструп. – Москва: Издательство Бином, 2005. – 1098 с.
116. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, В.В. Воеводин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
117. Геркель, В.П. Высокопроизводительные вычисления для многопроцессорных многоядерных систем / В.П. Геркель. – Москва: Издательство Московского университета, 2010. – 544 с.
118. Геркель, В.П. Современные языки и технологии параллельного программирования / В.П. Геркель. – Москва: Издательство Московского университета, 2012. – 408 с.
119. Антонов, А.С. Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP / А.С. Антонов. – Москва: Издательство Московского университета, 2012. – 344 с.
120. Лин, К. Принципы параллельного программирования / К. Лин, Л. Снайдер. – Москва: Издательство Московского университета, 2013. – 408 с.
121. Якобовский, М.В. Введение в параллельные методы решения задач / М.В. Якобовский. – Москва: Издательство Московского университета, 2013. – 328 с.
122. Кузнецов, Б.Г. О постановке задач гидродинамики в многосвязных областях / Б.Г. Кузнецов, В.П. Сироченко // Вычислительные

технологии: Сб.научн. трудов. – 1995. – Т. 4, №. 12. – С. 209-218.

123. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – Москва: Наука, 1977. – 440 с.
124. Сироченко, В.П. Численное моделирование конвективных течений вязкой жидкости в многосвязных областях / В.П. Сироченко // Труды Международной конференции RDAMM-2001. – 2001. – Т. 6, Ч. 2, Спец. выпуск. – С. 554-562.
125. Ghia, U. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multi-grid method / U. Ghia, K.N. Ghia, C.T. Shin // J. Comp. Phys. – Dec. 1982. – Vol. 48. – P. 387-411.
126. Гаранжа, В.А. Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка аппроксимации / В.А. Гаранжа, В.Н. Коньшин // ЖВММФ. – 1999. – Т. 39, № 8. – С. 1378-1392.
127. Атабаев, С.Ч. Течение вязкой жидкости в плоской каверне / С.Ч. Атабаев, В.А. Брайловская, В.Р. Коган, В.И. Полежаев, А.И. Простомолов, Л.В. Феоктистова // Процессы переноса в вынужденных и свободноконвективных течениях. – 1987. – С. 168-176.
128. Rogers, S.E. An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations / S.E. Rogers, D. Kwak // AIAA J. – 1990. – Vol. 28, No. 2. – P. 253–262.
129. Rogers, S.E. Steady and unsteady solutions of the incompressible Navier-Stokes equations / S.E. Rogers, D. Kwak, C. Kiris // AIAA J. – 1991. – Vol. 29, No. 4. – P. 603–610.
130. Shah, A. Flux-difference splitting-based upwind compact schemes for the incompressible Navier-Stokes equations / A. Shah, L. Yuan // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2009. – Vol. 61. – P. 552–568.
131. Currle, J. Численное моделирование нестационарных процессов в

течении над каверной / J. Currel, H. Fasel // Z. angew. Math. und Mech. – 1989. – Т. 69, № 6. – С. 671–674.

132. Балаганский, М.Ю. Численное сравнение дву- и трехмерных течений вязкой несжимаемой жидкости / М.Ю. Балаганский, Ю.Н. Захаров // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, Специальный выпуск, посвященный 85-летию со дня рождения Н.Н. Яненко. Часть 1. – С. 38–45.
133. Iwatsu, R. Numerical simulation of three-dimensional flow structure in a driven cavity / R. Iwatsu, T. Kawamura, K. Kuwahara, J. Min Hyun // Fluid Dynamics Research. – 1989. – No. 5. – P. 173–189.
134. Исаков, А.Б. К численному решению задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне при $Re = 1000$ / А.Б. Исаков // Моделир. в мех. – 1990. – Т. 4, № 2. – С. 64–76.
135. Белолипецкий, В.М. Численное исследование рециркуляционных течений в трехмерной каверне / В.М. Белолипецкий, В.Ю. Костюк // Ж. прикл. мех. и техн. физ. – 1990. – № 1. – С. 100–104.
136. Похилко, В.И. О решении уравнений Навье-Стокса в кубической каверне / В.И. Похилко. – Москва: Ин-т мат. модел. РАН, 1994. – 22 с.
137. Граур, И.А. Численное моделирование тепломассообмена в трехмерных кавернах / И.А. Граур, Т.Г. Елизарова, Л.В. Косарев, Б.Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 37–54.
138. Кудинов, П. Численное моделирование пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости / П. Кудинов // Вестник Днепропетровского университета. Серия Механика. – 2001. – Т. 1, № 4. – С. 89–99.
139. Исаев, С.А. Численное моделирование ламинарного циркуляционного течения в кубической каверне с подвижной гранью / С.А. Исаев, А.Г. Судаков, Н.Н. Лучко, Т.В. Сидорович, В.Б. Харченко // ИФЖ. – 2002. –

Т. 75, № 1. – С. 49-54.

140. Елизарова, Т.Г. Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне / Т.Г. Елизарова, О.Ю. Милюкова // ЖВММФ. – 2003. – Т. 43, № 3. – С. 453-466.
141. Kwak, D. A three-dimensional incompressible Navier-Stokes flow solver using primitive variables / D. Kwak, J.L.C. Chang, S.P. Shanks, S. Chakravarthy // AIAA J. – 1984. – No. 24 (3).
142. Пановко, М.Я. Численное моделирование пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости в канале с уступом / М.Я. Пановко // Теплофизика высоких температур. – 1989. – Т. 27, № 6. – С. 1126-1131.
143. Грабарник, С.Я. Численный метод расчета вязкого течения в трехмерном канале произвольной формы / С.Я. Грабарник, Д.С. Цепов // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10, № 10. – С. 103-111.
144. Данилов, Ю.М. Решение трехмерных течений вязких несжимаемых жидкостей в каналах прямоугольной формы / Ю.М. Данилов, И.М. Ильина, И.П. Сидтикова, А.Н. Бергман // Естественные и технические науки. – 2003. – №. 3. – С. 88-97.
145. Pao, K. Numerical simulation of three-dimensional unsteady flow past ice crystals / K. Pao, Wang, J. Wusheng // Journal of the atmospheric sciences. 1997. – Vol. 54. – P. 2261-2274.
146. Гущин, В.А. Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при $200 < Re < 380$ / В. А. Гущин, П. В. Матюшин. // Изв. РАН. МЖГ. – 2006. – № 5. – С. 135-151.
147. Guermond, J.L. Start-up flows in a three-dimensional rectangular driven cavity of aspect ratio 1:1:2 at $Re = 1000$ / J.L. Guermond, C. Migeon, G. Pineau, L. Quartapel // J. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 450. – P. 169-199.