

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ НЕФТЕГАЗОВОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ  
ИМ. А. А. ТРОФИМУКА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

На правах рукописи

**ЛИСИЦА Вадим Викторович**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ  
РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ  
В СРЕДАХ С ЛОКАЛЬНЫМИ ОСЛОЖНЯЮЩИМИ ФАКТОРАМИ**

05.13.18 - математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**ДИ С С Е Р Т А Ц И Я**  
на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
д.ф.-м.н., профессор Чеверда В.А.

НОВОСИБИРСК  
2017

# Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>Глава 1. РАЗРАБОТКА МЕТОДА И АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ С МЕЛКО-МАСШТАБНОЙ СТРУКТУРОЙ</b> . . . . .	<b>20</b>
1.1 Аналитический обзор известных решений . . . . .	20
1.2 Постановка задачи . . . . .	27
1.3 Применимость конечно-разностных схем на сдвинутых сетках для локального измельчения шагов . . . . .	30
1.3.1 Стандартная схема на сдвинутых сетках . . . . .	30
1.3.2 Предварительная оценка нефизичных отражений по результатам дисперсионного анализа . . . . .	33
1.4 Конечно-разностный метод расчета волновых полей на основе локального измельчения сеток . . . . .	36
1.4.1 Алгоритм измельчения сеток в одномерной постановке . . . . .	36
1.4.2 Разработка алгоритма в двумерной постановке . . . . .	42
1.4.3 Измельчение сеток в трехмерной постановке . . . . .	55
1.5 Анализ разработанного метода . . . . .	63
1.5.1 Анализ коэффициентов отражения от границы раздела сеток . . . . .	63
1.5.2 Численное исследование коэффициентов отражения и прохождения . . . . .	69
1.5.3 Теоретический анализ устойчивости . . . . .	77
1.5.4 Численный анализ устойчивости . . . . .	81

1.6	Применение метода для решения прикладных задач . . . . .	85
1.6.1	Расчет волновых полей в среде с карстовыми скоплениями . . .	85
1.6.2	Моделирование взаимодействия волн с границей раздела газ-вода в трещине гидроразрыва . . . . .	86
1.6.3	Оценка влияния флюидонасыщения мелкомасштабных неоднородностей на интенсивность рассеяния . . . . .	96

<b>Глава 2.</b>	<b>РАЗРАБОТКА МЕТОДА И АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ С АНИЗОТРОПНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ . . . . .</b>	<b>109</b>
2.1	Изученность решения задачи . . . . .	109
2.2	Постановка задачи . . . . .	121
2.3	Исследование конечно-разностных схем для расчета волновых полей в анизотропных средах . . . . .	123
2.3.1	Аппроксимация, устойчивость, численная дисперсия . . . . .	124
2.3.2	Сходимость численного решения в моделях с контрастными границами . . . . .	139
2.3.3	Ограничение расчетной области . . . . .	148
2.3.4	Нефизичные решения в виде плоских волн . . . . .	157
2.4	Комбинирование схемы Лебедева и стандартной схемы на сдвинутых сетках . . . . .	172
2.4.1	Алгоритм комбинирования конечно-разностных схем в двумерной постановке . . . . .	172
2.4.2	Разработка алгоритма в трехмерной постановке . . . . .	184
2.5	Численный анализ метода . . . . .	200
2.5.1	Прохождение волны из области со стандартной схемой на сдвинутых сетках в область со схемой Лебедева . . . . .	200
2.5.2	Прохождение физических решений из области со схемой Лебедева в область со стандартной схемой на сдвинутых сетках . . . . .	201
2.5.3	Прохождение нефизичных решений из области со схемой Лебедева в область со стандартной схемой на сдвинутых сетках . . . . .	204

2.5.4	Проявление нефизичных решений при наличии в модели анизотропного слоя . . . . .	205
2.6	Применение метода для решения прикладных задач . . . . .	208
2.6.1	Расчет волновых полей для модели Северного моря с анизотропным слоем . . . . .	208
2.6.2	Проявление анизотропии верхней части разреза в данных вертикального сейсмического профилирования . . . . .	209
<b>Глава 3. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ С ВЯЗКОУПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ . . . . . 215</b>		
3.1	Аналитический обзор известных решений . . . . .	215
3.2	Постановка задачи . . . . .	221
3.3	Исследование математических моделей вязкоупругих сред и их конечно-разностных аппроксимаций . . . . .	223
3.3.1	Обобщенная стандартная линейная модель твердого тела для трансверсально-изотропной среды . . . . .	223
3.3.2	Конечно-разностная аппроксимация обобщенной стандартной линейной модели твердого тела . . . . .	230
3.4	Разработка алгоритма на основе комбинирования моделей идеально упругой и вязкоупругой сред . . . . .	232
3.5	Численный анализ гибридного алгоритма . . . . .	235
3.5.1	Оценка параметров балансировки . . . . .	235
3.5.2	Распределение процессорного времени . . . . .	236
<b>Глава 4. РАЗРАБОТКА МЕТОДА И АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ВОЛНОВЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ С РЕЗКОКОНТРАСТНЫМИ ГРАНИЦАМИ . . . . . 239</b>		
4.1	Изученность задачи . . . . .	239
4.2	Постановка задачи . . . . .	248
4.3	Исследование разрывного метода Галеркина в применении к расчету сейсмических полей . . . . .	249

4.3.1	Дискретизация системы уравнений динамической теории упругости разрывным методом Галеркина . . . . .	249
4.3.2	Аппроксимация производной по времени . . . . .	253
4.3.3	Дисперсионный анализ разрывного метода Галеркина . . . . .	254
4.3.4	Численное исследование дисперсии . . . . .	261
4.4	Разработка метода комбинированием разрывного метода Галеркина и метода конечных разностей . . . . .	274
4.4.1	Используемые дискретизации . . . . .	274
4.4.2	Комбинирование разрывного метода Галеркина и схемы на несдвинутых сетках . . . . .	278
4.4.3	Комбинирование стандартной схемы на сдвинутых сетках со схемой на несдвинутых сетках . . . . .	279
4.5	Численный анализ разработанного метода . . . . .	283
4.5.1	Исследование коэффициентов отражения . . . . .	283
4.5.2	Расчет волновых полей в модели с топографией свободной поверхности . . . . .	287
4.6	Использование алгоритма для определения влияния вариации рельефа свободной поверхности на сейсмические поля . . . . .	291
4.6.1	Построение сейсмогеологической модели среды . . . . .	292
4.6.2	Расчет волновых полей с использованием разработанного метода	298
4.6.3	Статистический анализ рассчитанных волновых полей . . . . .	298
	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>306</b>
	<b>ЛИТЕРАТУРА . . . . .</b>	<b>308</b>

# Введение

**Объект исследования** - численные методы и алгоритмы на предмет их комплексирования для расчета волновых сейсмических полей с учетом локальных осложняющих факторов среды (скоплений мелкомасштабных неоднородностей, анизотропных формаций, вязкоупругих включений, топографии свободной поверхности).

**Актуальность.** В настоящее время численное моделирование волновых сейсмических процессов является одним из основных инструментов исследования, предваряющим, а иногда и заменяющим, физические эксперименты.

С появлением высокопроизводительных вычислительных систем с параллельной архитектурой открылись принципиально новые возможности для изучения особенностей сейсмических волновых полей в сложно устроенных сейсмогеологических средах путём проведения полномасштабных численных экспериментов. Однако для удовлетворения постоянно растущих требований к качеству получаемых сейсмических изображений и глубине понимания физики процесса распространения сейсмических волн в реальных средах необходимы новые подходы и решения в разработке численных методов, учитывающие всё большее число осложняющих факторов реальных сред - разномасштабность, поглощение сейсмической энергии, анизотропию, флюидонасыщенность и т.д. Учёт разномасштабности необходим, например, при изучении трещиновато-кавернозных резервуаров в карбонатных отложениях, емкостные свойства которых определяются скоплениями каверн, а фильтрационные - наличием разветвленной системы трещин. Анизотропия и поглощение сейсмической энергии - признаки, в частности, ориентированной флюидозаполненной микроструктуры пласта. Обработка сейсмических данных из регионов со сложным строением верхней части разреза и нерегулярной топографией свободной поверхности требует многофак-

торного учета и компенсации связанных с ними эффектов. Каждый из указанных осложняющих факторов среды требует специально скорректированного численного метода, точной дискретизации или нерегулярных сеток для моделирования процессов распространения сейсмических волн в таких средах, что может привести к существенному увеличению времени счета и объема необходимых вычислительных ресурсов. Поскольку в большинстве случаев эти факторы проявляются локально, например, в верхней части разреза или в резервуаре мощностью до нескольких сотен метров, то актуальной становится разработка численных методов и алгоритмов моделирования волновых процессов именно в средах с локальными осложняющими факторами.

**Цель исследования** - развитие численных методов и их алгоритмической составляющей для снижения времени вычислений и требований на вычислительные ресурсы при сохранении точности расчетов волновых полей в упругих средах с локальными осложняющими факторами.

#### **Научные задачи**

1. На основе локального измельчения сеток для конечно-разностных схем разработать численный метод и алгоритмы расчета волновых сейсмических полей в средах со скоплениями мелкомасштабных неоднородностей (с системами каверн и трещин).

2. Комбинированием схемы Лебедева и стандартной схемы на сдвинутых сетках разработать конечно-разностный метод и алгоритм расчета волновых сейсмических полей в средах с анизотропными формациями.

3. Разработать конечно-разностный алгоритм моделирования волновых процессов в средах с вязкоупругими включениями на основе комбинирования обобщенной стандартной линейной модели твердого тела и модели идеально упругой среды.

4. Комбинированием разрывного метода Галеркина и метода конечных разностей разработать метод расчета волновых сейсмических полей в моделях с резкоконтрастными границами со сложной геометрией.

#### **Теория и методы исследования**

Для решения поставленной проблемы применялись как классические, так и современные методы вычислительной математики и теории распространения волн, позволяющие с высокой точностью описать особенности формирования и распростра-

нения сейсмических волновых полей в реалистичных моделях сред. В основе используемого при этом математического аппарата лежат разработанные в ряде смежных областей вычислительной математики методы и подходы:

- теория корректности начально-краевых задач для гиперболических систем уравнений в частных производных и разностных уравнений для разработки методов комбинированием разных математических моделей и численных схем, используемых для их аппроксимации;
- теория рациональных аппроксимаций для локализации операторов, содержащих свертку по времени, при построении модели вязкоупругой среды и идеально согласованных слоев;
- современный математический аппарат численных методов, включая метод конечных разностей и разрывный метод Галеркина для аппроксимации начально-краевых задач динамической теории упругости;
- теория распространения волн в упругих и вязкоупругих средах и ее обобщение на модели анизотропных сред для построения конечно-разностных аппроксимаций соответствующих математических моделей;
- теория уравнений в частных производных и сеточных уравнений для построения решений в виде плоских волн и дисперсионного анализа используемых конечно-разностных схем;
- метод сингулярного разложения операторов для проведения дисперсионного анализа разрывного метода Галеркина, применяемого для аппроксимации уравнений динамической теории упругости;
- методы функционального анализа и теории функций комплексного переменного для построения идеально согласованных слоев и анализа уровня нефизичных отражений от таких слоев;
- тестирование разработанных методов и алгоритмов проводилось сравнительным анализом с известными аналитическими решениями для случаев, когда

такие решения могут быть построены в явном виде; для более сложных моделей верифицировались корректность описания ключевых характеристик решения, таких как амплитуды волн, времена вступления.

Поскольку разработанные методы основаны на комбинировании разных численных методов, конечно-разностных схем, математических моделей среды и несогласованных сеток верификация проводилась сравнительным анализом. Для заданной модели среды решение рассчитывалось с использованием одного из комбинируемых методов (схемы, модели, сетки) после чего проводилось сравнение с результатами расчета разработанными методами, что позволяло полностью локализовать ошибку, вызванную именно комбинированием.

#### **Защищаемые научные результаты:**

1. С использованием несогласованных сеток с локальным пространственно-временным измельчением шага разработан, теоретически и экспериментально обоснован и протестирован новый метод численного моделирования волновых процессов в средах со скоплениями неоднородностей субсейсмического масштаба (коридоры трещиноватости, скопления каверн). По результатам численного моделирования показано, что наличие скоплений флюидозаполненных неоднородностей такого масштаба приводит к многократному рассеянию сейсмической энергии, отчетливо выделяемому в регистрируемых полях.

2. На основе комбинирования схемы Лебедева и стандартной схемы на сдвинутых сетках разработан, теоретически и экспериментально обоснован и протестирован новый метод численного моделирования волновых процессов в средах, содержащих локальные анизотропные включения.

3. Разработан, обоснован и реализован в виде научно-исследовательской версии программного продукта, ориентированного на вычислительные ресурсы с распределенной памятью, алгоритм моделирования волновых процессов в средах с вязкоупругими включениями, основанный на локальном использовании обобщенной стандартной линейной модели твердого тела с оптимизированным разбиением расчетной области.

4. Разработан, теоретически и экспериментально обоснован новый метод расчета волновых полей в моделях с резкоконтрастными границами со сложной геомет-

рией, включая топографию свободной поверхности, основанный на комбинировании метода конечных разностей и разрывного метода Галеркина. По результатам численного моделирования показано, что незначительные, в том числе сезонные, вариации профиля свободной поверхности могут приводить к потере повторяемости в данных сейсмического мониторинга.

#### **Научная новизна и личный вклад.**

1. С использованием несогласованных сеток с локальным пространственно-временным измельчением шага разработан, теоретически и экспериментально обоснован и протестирован новый метод численного моделирования волновых процессов в средах со скоплениями неоднородностей субсейсмического масштаба, который включает в себя:

- разработку оригинального способа "вложенных шаблонов" для измельчения шага сетки по времени во избежание интерполяции решения на границе раздела сеток;

- теоретический и численный анализ нефизичных отражений от границы раздела сеток при разных способах измельчения сеток: одновременном по пространству и времени, последовательном и др.;

- анализ корректности получаемой начально-краевой конечно-разностной задачи;

2. На основе комбинирования схемы Лебедева и стандартной схемы на сдвинутых сетках разработан, теоретически и экспериментально обоснован и протестирован новый метод численного моделирования волновых процессов в средах, содержащих локальные анизотропные включения. Метод базируется на совокупности следующих оригинальных решений:

- по результатам исследования известных конечно-разностных схем (аппроксимации, устойчивости, дисперсионных свойств, дифференциальных приближений) выбрана и обоснована схема Лебедева для аппроксимации системы уравнений динамической теории упругости для анизотропной среды;

- методом дифференциальных приближений доказано, что схема Лебедева допускает более широкий набор независимых решений, чем аппроксимируемая система уравнений динамической теории упругости, причем интенсивность таких нефизич-

ных решений контролируется аппроксимацией начальных и граничных условий;

- на основе теории корректности начально-краевых задач сформулирован необходимый признак устойчивости многоосного идеально согласованного слоя, или MPML (от английского Multiaxial Perfectly Matched Layer), разработан критерий выбора оптимального стабилизационного параметра MPML для обеспечения устойчивости решения и минимизации коэффициентов нефизичных отражений (совместно с Дмитриевым М.Н.);

- комбинирование схемы Лебедева со стандартной схемой на сдвинутых сетках, применяемой в изотропной части модели, основано на минимизации коэффициентов отражений, возникающих при прохождении волн через границу раздела сеток, при этом замыкание системы уравнений для расчета решения в окрестности границы базируется на учете нефизичных решений, допускаемых схемой Лебедева, свойства которых исследуются методом дифференциального приближения конечно-разностной схемы;

- на основе разработанного метода создан научно-исследовательский вариант проблемно-ориентированного параллельного программного обеспечения для расчета волновых сейсмических полей в средах с анизотропными включениями (совместно с Вишневым Д.М.), с помощью которого исследовано проявление анизотропии верхней части разреза в данных вертикального сейсмического профилирования.

3. Разработан, обоснован и реализован в виде научно-исследовательской версии программного продукта, ориентированного на вычислительные ресурсы с распределенной памятью, алгоритм моделирования волновых процессов в средах с вязкоупругими включениями, основанный на локальном использовании обобщенной стандартной линейной модели твердого тела с оптимизированным разбиением расчетной области, который включает в себя:

- выбор и обоснование обобщенной стандартной линейной модели твердого тела для корректного описания волновых полей в средах с поглощением сейсмической энергии;

- построение оптимальной декомпозиции расчетной области, основанной на минимизации машинного времени, при организации вычислений с использованием библиотеки MPI (от английского message passing interface).

4. Разработан, теоретически и экспериментально обоснован новый метод расчета волновых полей в моделях с резкоконтрастными границами со сложной геометрией, включая топографию свободной поверхности, основанный на комбинировании метода конечных разностей и разрывного метода Галеркина, который включает ряд оригинальных решений:

- по результатам теоретического и численного исследования в качестве метода расчета волновых полей в моделях с резкоконтрастными границами выбирается разрывный метод Галеркина с центральной аппроксимацией потоков;

- результатами дисперсионного анализа показано, что для расчета волновых сейсмических полей оптимальным является метод Галеркина с базисными и пробными функциями - полиномами не выше второй степени;

- комбинирование разрывного метода Галеркина на треугольной сетке и стандартной схемы на сдвинутых сетках предложено проводить в два этапа с введением "переходного" слоя, в котором применяется классическая схема на несдвинутых сетках, совмещающая в себе свойства метода конечных разностей и метода Галеркина с базисными функциями - константами;

- разработанный и реализованный в виде научно-исследовательского проблемно-ориентированного программного продукта алгоритм моделирования волновых полей использован для анализа влияния изменчивости профиля свободной поверхности на повторяемость данных наблюдений при сейсмическом мониторинге резервуаров углеводородов;

- выполненные расчеты показывают, что даже незначительные изменения профиля свободной поверхности и верхней части разреза, связанные с сезонными изменениями или техногенными воздействиями, могут приводить к полной потере повторяемости и достоверности данных.

#### **Теоретическая и практическая значимость результатов.**

Разработанные на основе современных достижений в области вычислительной математики, в частности, теории разностных схем и вариационных методов решения гиперболических уравнений, численные методы решения задач динамической теории упругости для сред с анизотропными, вязкоупругими и мелкомасштабными включениями и резкоконтрастными границами со сложной геометрией позволяют существенно

снизить время вычислений и потребности в вычислительных ресурсах без снижения точности для проведения расчетов волновых полей в средах с локальными осложняющими факторами, что является важным вкладом в развитие методологической и алгоритмической составляющей сейсмических методов исследования земной коры.

1. Разработанный конечно-разностный метод расчета волновых сейсмических полей, основанный на локальном пространственно-временном измельчении сеток, позволяет существенно повысить качество моделирования и последующее изучение моделей распространения волн в средах, содержащих скопления неоднородностей субсейсмического масштаба - коридоры трещиноватости, системы трещин, скопления каверн:

- при исследовании мелкомасштабной структуры пласта-коллектора сложных карбонатных коллекторов трещиновато-кавернозного и трещиновато-порового типов;

- при выделении рассеянной компоненты поля для определения с ее использованием ориентации трещин, их раскрытости, концентрации и флюидозаполнения;

- при анализе физических процессов, таких как потоки флюидов, индуцированные сейсмическими волнами в мезомасштабной структуре пласта.

2. Разработанный на локальном применении схемы Лебедева конечно-разностный метод расчета волновых полей позволяет существенно снизить машинное время, необходимое для расчета волновых полей в средах с анизотропными включениями без снижения точности численного решения. Научно-исследовательская версия программного продукта, в которой реализован предложенный метод, может быть использована:

- для анализа процессов распространения волновых полей в трещиноватых карбонатных коллекторах и в сланцах, поскольку микротрещиноватость с достаточной точностью описывается эффективными макроскоростными анизотропными моделями среды;

- для картирования зон аномальных предварительных напряжений, возникающих, например, в окрестности соляных диапиров, с целью предотвращения аварийных ситуаций при бурении;

- для анализа и последующего учета проявлений анизотропии верхней части

разреза в сейсмических полях с целью компенсации этих проявлений при обработке сейсмических данных.

3. Использование разработанного алгоритма конечно-разностного моделирования волновых процессов в средах с вязкоупругими включениями на основе локального использования обобщенной стандартной линейной модели твердого тела и его программной реализации дает возможность

- выделять проявления потоков, индуцированных сейсмическими волнами в мезомасштабной структуре пласта;

- определять влияние аномальных поглощений, характерных для газовых резервуаров, разрабатывать методы их компенсации при обработке сейсмических данных.

4. Новый метод расчета волновых полей, основанный на комбинировании конечных разностей и разрывного метода Галеркина, позволяет существенно сократить потребности в вычислительных ресурсах при расчете волновых полей в моделях среды с границами со сложной геометрией. В частности, научно-исследовательская версия программного продукта, в которой реализован предложенный метод, может применяться:

- для расчета и анализа волновых полей в моделях со сложной топографией свободной поверхности, что особенно актуально при проведении сейсморазведочных работ в Восточной Сибири;

- для определения проявлений изменчивости рельефа свободной поверхности и верхней части разреза в данных сейсмического мониторинга и разработки методик компенсации этих проявлений.

#### **Реализация результатов.**

Представленный в работе метод численного моделирования волновых полей в среде с мелкомасштабными неоднородностями, с локальным измельчением сеток, активно применяется для построения сейсмических изображений на основе рассеянных и дифрагированных волновых полей. В частности, специалистами ООО "РН-КрасноярскНИПИнефть" Мерзликиной А.С. и Шиликовым В.В. разработана методика картирования зон концентрации флюидозаполненных каверн с использованием амплитудного анализа поля рассеянных волн. Эта методика легла в основу кандидатской диссертации А.С. Мерзликиной "Реконструкция трещиноватости карбонатных

коллекторов по рассеянной составляющей сейсмического волнового поля" , защищенной в ИНГГ СО РАН в 2014 году.

Представленный в работе метод численного моделирования волновых полей в средах с анизотропными включениями был развит зарубежными коллегами (Н. Bernth, С. Chapman, N. Li, J. de la Puente и др.); в частности, предложены модификации схемы Лебедева и ее комбинирования со стандартной схемой на сдвинутых сетках для аппроксимаций высокого порядка и для схем с минимизацией численной дисперсии. Программная реализация алгоритмов комбинирования схем, ориентированная на использование графических сопроцессоров, представлена исследовательским Суперкомпьютерным центром Барселоны (Barcelona Supercomputer Centre).

Реализованный в виде научно-исследовательской версии программного обеспечения метод используется для расчета синтетических сейсмограмм вертикального сейсмического профилирования в моделях с анизотропией верхней части разреза. На основе анализа и обработки полученных синтетических данных в Лаборатории многоволновых сейсмических исследований ИНГГ СО РАН разработана и реализована методика компенсации расщепления поперечных волн в верхней части разреза в рамках научно-исследовательской работы (государственное задание) Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук на 2014 - 2016 годы, проект VIII.70.1.4., рег. номер 01201351741. По результатам этих работ в 2016 году Афоной Е.В. защищена диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по теме "Методика обработки данных 2D-3C отраженных PS-волн для компенсации их расщепления в азимутально-анизотропных слоях, залегающих выше целевого интервала исследований".

Все проведенные по теме диссертации исследования являются составной частью планов НИР (государственное задание) в период с 2007 по 2016 года Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук.

- Приоритетное направление 7.3. Физические поля Земли: природа, взаимодействие. Геодинамика и внутреннее строение Земли. Проект 7.3.1.3. Развитие методов поисков нефтегазоносных структур по данным многоволновой сейсморазведки, а так-

же оценки напряженного состояния, фильтрационных возможностей и устойчивости продуктивных пластов, 2007 - 2009 годы;

- Приоритетное направление VII.56. Физические поля Земли - природа, взаимодействие, геодинамика и внутреннее строение Земли. Проект VII.56.1.4. Развитие многоволновых сейсмических исследований для поиска нефтегазоносных месторождений и прогноза их напряженного состояния, 2010 - 2012 годы;

- Приоритетное направление VIII.70. Физические поля, внутреннее строение Земли и глубинные геодинамические процессы. Проект VIII.70.1.1. Разработка иерархии вычислительных моделей и численных методов, ориентированных на использование современных высокопроизводительных вычислительных систем с гибридной архитектурой, для описания сейсмических волновых процессов в разномасштабных средах с флюидонасыщенной микроструктурой и областями концентрации напряжений. Рег. номер - 01201351727, 2013-2017 годы.

Научные задачи, решаемые в диссертационной работе, поддерживались:

1. Российским фондом фундаментальных исследований

- 2007-2009, проект РФФИ № 07-05-00538-а, "Изучение проявлений скоплений неоднородностей субсейсмического масштаба в волновых сейсмических полях"(руководитель д.ф.-м.н. В.А. Чеверда);

- 2008-2010, проект РФФИ № 08-05-00265-а, "Изучение проявления микроструктуры кавернозно/трещиновато/пористых резервуаров в сейсмоакустических полях и прогнозирование их флюидонасыщенности"(руководитель д.ф.-м.н. Г.В. Решетова);

- 2010-2012, проект РФФИ № 10-05-00233-а, "От микроструктуры к макромоделли трещиновато-кавернозных резервуаров: гомогенизация, проявление флюидонасыщенности, описание рассеянных волн"(руководитель д.ф.-м.н. В.А. Чеверда);

- 2012-2013, проект РФФИ № 12-05-31008-мол-а, "Разработка модульного алгоритма для численного моделирования и изучения волновых процессов в трёхмерно-неоднородных сейсмогеологических средах реалистичного строения"(руководитель к.ф.-м.н. В.В. Лисица);

- 2013-2015, проект РФФИ № 13-05-00076-а, "Разработка иерархии вычислительных моделей и численных методов, ориентированных на супер-ЭВМ с гибридной архитектурой, для описания сейсмических волновых процессов в разномасштабных

средах с флюидонасыщенной микроструктурой" (руководитель д.ф.-м.н. Г.В. Решетова);

- 2013-2015, проект РФФИ № 13-05-12051-офи-м, "Разработка масштабируемого программного обеспечения, реализующего иерархию численных трёхмерных моделей разномасштабных процессов подземной гидродинамики и геофизики. Создание технологии его применения для вычислительных систем сверхвысокой (вплоть до экзафлопсной) производительности в целях реконструкции тонкой структуры флюидонасыщенных сред, прогнозирования фильтрационно-ёмкостных свойств кавернозно-трещиновато-пористых коллекторов и оптимизации режима их разработки" (руководители д.ф.-м.н., ак. Б.Г. Михайленко и д.ф.-м.н. Ю.М. Лаевский);

- 2014-2016, проект РФФИ № 14-05-00049-а, "Разработка гибридного алгоритма моделирования волновых полей в частотной области, ориентированного на использование в методах полного обращения сейсмических данных для площадных систем наблюдения" (руководитель к.ф.-м.н. В.В. Лисица);

- 2015-2016, проект РФФИ № 15-35-20022-мол-а-вед, "Определение фильтрационно-ёмкостных свойств и проницаемости трещиновато/кавернозно/пористых коллекторов на основе численного моделирования волновых процессов в средах с флюидонасыщенной мезомасштабной структурой: поглощение сейсмической энергии, дисперсия, частотно-зависимая анизотропия" (руководитель к.ф.-м.н. В.В. Лисица).

2. Грантом Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых - кандидатов наук № МК 47.2011.5 "Развитие сейсмических/акустических методов исследования кавернозно-трещиноватых резервуаров: гомогенизация, проявление флюидонасыщенности, определение фильтрационно-ёмкостных свойств, описание рассеянных волн" (руководитель к.ф.-м.н. В.В. Лисица).

### **Апробация работы и публикации**

Всего по теме диссертации соискателем лично и в соавторстве опубликовано более 70 работ, в том числе 24 статьи, из которых 19 из списка ВАК, 8 индексируются в базе данных Web of Science, 13 индексируются в базе данных Scopus. Результаты диссертационной работы обсуждались на 57 ведущих международных и российских конференциях. Основные:

- Международные конференции по математическим и вычислительным аспектам распространения волн (Waves), Провиденс, США, 2005; Рединг, Великобритания, 2007; По, Франция, 2009; Ванкувер, Канада, 2011; Тунис, Тунис, 2013; Карлсруе, Германия, 2015.

- Конференции Европейского общества геоученых и инженеров (EAGE Conference and Exhibition), Лондон, Великобритания, 2007, 2013; Амстердам, Нидерланды, 2009, 2014; Барселона, Испания, 2010; Копенгаген, Дания, 2012; Мадрид, Испания, 2015.

- Ежегодные конференции Общества промышленной геофизики (SEG Annual Meeting), Денвер, США, 2010, 2014; Хьюстон, США, 2013; Новый Орлеан, США, 2015.

- Международная конференция Европейского общества геоученых и инженеров, Санкт-Петербург, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016.

- Научно-практическая конференция "Суперкомпьютерные технологии в нефтегазовой отрасли" , Москва, 2011, 2012, 2013, 2015, 2016.

- Международная конференция по математическим методам в геофизике "ММГ-2008" , Новосибирск, 2008.

- Восьмая европейская конференция по вычислительной математике и приложениям "ENUMATH 2009" , Уппсала, Швеция, 2009.

- 14-й международный симпозиум по сейсмической анизотропии "IWSA 2010" , Перт, Австралия, 2010.

- Международная конференция по параллельным вычислениям "PARA" , Рейкьявик, Исландия, 2010; Хельсинки, Финляндия, 2012.

- Международная конференция по теоретической и вычислительной акустике, Дрезден, Германия, 2010; Тайпей, Тайвань, 2011.

- 20-я Международная конференция по методам декомпозиции области, Сан-Диего, США, 2011.

- Европейский конгресс по вычислительным методам в прикладных науках "ECCOMAS 2012" , Вена, Австрия, 2012.

### **Благодарности**

Автор выражает искреннюю признательность своим коллегам: В.А. Чеверде,

Г.В. Решетовой, В.И. Костину, Д.М. Вишневному, М.Н. Дмитриеву, С.А. Соловьеву, М.А. Белоносову, Д.Р. Колюхину за содержательные и плодотворные обсуждения и дискуссии, в результате которых рождалась истина.

Автор ценит поддержку, оказанную всеми сотрудниками Лаборатории многоволновых методов сейсмических исследований и Лаборатории вычислительной физики горных пород Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения РАН.

Особую признательность автор выражает коллегам из ООО "РН-КрасноярскНИПИнефть" А.С. Мерзликиной и В.В. Шиликову и коллегам из Лаборатории многоволновых методов сейсмических исследований ИНГГ СО РАН С.Б. Горшкалеву, В.В. Карстену и Е.В. Афониной за предоставленную возможность применить результаты исследования при разработке методик обработки данных полевых наблюдений.

Отдельную благодарность автор выражает В.А. Левину, А.В. Вершинину и В.Д. Левченко за помощь и поддержку при апробации работы.

Отдельную благодарность автор выражает В.И. Самойловой за консультации при написании диссертации.

# Глава 1

## Разработка метода и алгоритмов расчета волновых сейсмических полей в средах с мелкомасштабной структурой

### 1.1 Аналитический обзор известных решений

Одной из наиболее актуальных задач современных сейсмических методов поиска и разведки углеводородов является реконструкция мелкомасштабной структуры пласта. Обусловлено это тем, что достаточно большая часть резервуаров представлена карбонатными отложениями, что особенно характерно для коллекторов Восточной Сибири. Как известно, карбонаты обладают чрезвычайно низкой проницаемостью [88], при этом аккумуляция углеводородов в них происходит в системах каверн, а транспортировка углеводородов обеспечивается по системам и скоплениям трещин. Поэтому, восстановление распределения систем каверн и трещин в карбонатном резервуаре с использованием сейсмических методов - необходимое условие организации эффективной разработки месторождений. Поскольку характерные размеры каверн составляют 1 м, а толщина трещин - до нескольких сантиметров, при этом трещины, как правило, вертикально ориентированы, на этих объектах не образуется сколько-нибудь значимых отражений, что чрезвычайно затрудняет картирование

таких объектов с помощью традиционных сейсмических методов. Поэтому в настоящее время активно развивается направление, связанное с использованием рассеянной компоненты волнового поля, в частности, можно отметить такие методы, как индекс рассеяния [341], позволяющий определять ориентацию трещин; методы с использованием энергии Кода-волн [336] для локализации рассеивающих объектов; методы анализа энергии многократного рассеяния для локализации структуры и выделения скоплений флюидонасыщенных объектов [304], [333], [47], [216], [259], [368].

При этом разработка новых методов обработки сейсмических данных для выделения и интерпретации рассеянной компоненты поля, а также детальное изучение протекания волновых процессов в средах с микроструктурой невозможны без достоверного полномасштабного численного моделирования. Однако при подобном моделировании с использованием сеточных методов, таких как метод конечных разностей [53], [13], [373], [238], [316], [36], [30]; метод конечных элементов [388], [100], метод конечных объемов [389], [390], [120]; метод спектральных элементов [228], [363]; разрывный метод Галеркина [276], [82], [64]; сеточно-характеристические методы [50], [9], [24], [38], [25] и др. для достоверного описания модели используются сетки с чрезвычайно мелким шагом. Например, характерный размер каверн составляет около 10 см, то есть порядка 0.001 - 0.01 длины волны, а характерные размеры расчетной области 100 длин волн. Для достоверного описания неоднородности необходимо использовать сетку с не менее чем двумя точками на неоднородность, тогда общее число точек сетки, необходимое для моделирования составит  $2.5 \times 10^{12}$ . Даже если моделирование выполняется в изотропной среде с использованием наиболее экономичной стандартной схемы на сдвинутых сетках [373], которая предполагает хранение 12 переменных на узел сетки, то для проведения расчетов требуется около 100 терабайт оперативной памяти. Так же можно оценить и требуемое число операций с плавающей точкой, при необходимости рассчитать решение вплоть до 100 периодов по времени число операций составит 0.5 эксафлоп. Если еще учесть, что стандартные сейсмические системы наблюдения предполагают тысячи пунктов возбуждения, то понятно, что проведение подобного моделирования в настоящее время не представляется возможным.

Можно выделить три основных подхода к изучению проявлений мелкомасштабной структуры в сейсмических волновых полях: построение эффективных моделей

(гомогенизация), многомасштабные численные методы, методы с локальным выбором шага сетки.

В основе первого лежит предположение, что в силу малого размера изучаемых неоднородностей влиянием каждого отдельного объекта на волновые поля можно пренебречь, а влияние скоплений таких объектов может быть с достаточной точностью аппроксимировано некоторой, зачастую достаточно сложной, моделью *однородной* среды. Среди известных, общепризнанных и верифицированных и зарекомендовавших себя подходов к осреднению параметров среды можно выделить модель пороупругих сред Био [114], [115] - принципиально иная по сравнению с моделью на микроуровне модель, описывающая распространение волн в пористой среде, заполненной жидкостью. Эта модель учитывает и волну, распространяющуюся по флюиду - медленную волну Био. Существенным недостатком такой модели является полуэмпирический выбор параметров, особенно коэффициентов модели, обеспечивающих учет вязкости флюида и определяющих диссипацию энергии волн. К настоящему времени предложен ряд эмпирических формул, связывающих эти коэффициенты с микроструктурой пласта [306], [262], [127]. Известны и другие модели, в которых учитывается динамика волновых процессов в средах с флюидонасыщенной микроструктурой, например, модель континуальной теории фильтрации [23], [22], или термодинамически согласованная модель двухфазной среды [49]. Однако сложность с установлением связи между коэффициентами модели и микроструктурными параметрами среды актуальна и для них. Другим широко используемым способом осреднения параметров среды является модель Гассмана [184], описывающая изменение упругих параметров породы при заполнении порового пространства флюидом неподвижным. В этом случае результирующая модель - изотропная идеально упругая среда, то есть учета потоков флюида в модели Гассмана нет. Важно также отметить способы осреднения пачек тонкослоистых упругих слоев [95], [321]. В таком случае результирующей является модель анизотропной упругой среды, даже если каждый из слоев изотропный. Этот подход с высокой точностью описывает распространение упругих волн в тонкослоистых средах, если толщина каждого слоя не превышает  $1/4$  длины волны [290]. На сегодня существует весьма большое количество способов построения эффективных моделей трещиноватых сред. В частности, классические

модели Хадсона [210], [213], [212]; дифференциальные модели [3], [52], [4], [111], описывающие распространение волн в среде, заполненной регулярными непересекающимися трещинами "правильной" дискообразной формы. Позднее в работах [219], [220] предложена теория построения моделей для взаимодействующих трещин. Для учета диссипации энергии, связанной с рассеянием сейсмических волн на системах трещин, предложен метод Т-матриц [209]. Этот список можно продолжать долго [324], [188], [391]. В результате в настоящее время известно большое количество способов построения макроскоростных моделей трещиноватых сред. Однако, как показывают даже самые простые лабораторные и численные эксперименты [67], они с той или иной точностью описывают отклик упругой трещиноватой среды на внешнее воздействие в квазистатическом - длинноволновом - приближении, в то время как для реалистичных сейсмических длин волн их использование приводит к значительным ошибкам - более 100%, поэтому осреднения параметров трещиноватых сред являются скорее качественными, позволяющими оценить ориентацию трещин и их концентрацию по ориентации и степени анизотропии результирующей модели. Отдельно следует отметить еще один принципиальный недостаток таких моделей - однородность, то есть распространение волн в таких моделях рассматривается без учета рассеяния сейсмической энергии, свойственного для скоплений неоднородностей субсейсмического масштаба. Эти модели не учитывают такие физические эффекты взаимодействия волн с микроструктурой, как потоки флюидов, индуцированные сейсмическими волнами [280], [126], [128], [378], [122], или возникновение специфических волн в трещинах, например волны Крауклиса [31], [179], [283].

Вторым подходом в изучении влияния мелкомасштабной структуры на волновые поля и их учету при моделировании волновых процессов являются многомасштабные численные методы. Эти подходы можно рассматривать и как обобщение способов построения эффективных макроскоростных моделей среды. Однако эти модели весьма далеки от классических, содержат большое количество вспомогательных параметров и уравнений на них, и существенно зависят от численного метода, используемого для моделирования. Среди них целесообразно выделить два. Первый - метод многомасштабного осреднения [123], [191], [124], [9] для построения многомасштабной модели с последующим разложением по малому параметру, характер-

ному размеру неоднородности по отношению к длине волны. Числом членов ряда, используемых для описания процесса, и определяется точность аппроксимации. Как показано в работе [124], такой подход позволяет сохранить часть рассеянной энергии, при его использовании видно формирование Кода-волн и пр. Однако связь между точностью модели (числом используемых членов ряда в разложении) и сохраняемыми физическими эффектами до сих пор не формализована. Еще один подход - многомасштабный метод конечных элементов, в частности, многомасштабный разрывный метод Галеркина [138], [66], [281], [185], [282]. Его идеей является построение адаптивных базисных функций, для метода Галеркина - полное решение статической задачи в каждой из ячеек грубой сетки, которое, в свою очередь, строится численно с использованием детальной дискретизации. Как и в предыдущем случае, этот метод позволяет учитывать специфику распространения волн в средах с мезомасштабной структурой, однако заранее определить, какие физические особенности сохраняются, а какие - нет, при использовании заданной аппроксимации невозможно. Кроме того, сложность и ресурсоемкость метода сдерживают его развитие: к настоящему времени известна лишь его двумерная реализация [185].

Третьим подходом в численном изучении проявлений скоплений мелкомасштабных неоднородностей в волновых полях является локальное измельчение сеток при дискретизации модели так, что в основной части модели используется сетка, определяемая свойствами волнового процесса, то есть дискретизация 10-30 точек на доминирующую длину волны, а в области, содержащей скопления мезомасштабных неоднородностей, применяется детальная сетка, подходящая для описания структуры, то есть с дискретизацией более 100 точек на доминирующую длину волны. Отдельно следует отметить, что в большинстве случаев модели кавернозно-трещиноватых резервуаров строятся на основе статистического моделирования [362] на некоторой заданной мелкой регулярной сетке [174], что приводит к противоречию. С одной стороны, локальное измельчение сеток для методов конечных элементов [387], в частности разрывного метода Галеркина [97], [167], [131], метода конечных объемов [107] и [108] и сеточно-характеристических методов [50], [9], [25], [24], [38], [39], является более естественным, чем для метода конечных разностей [373], [53]. С другой стороны, построение нерегулярной сетки, описывающей распределение мезомасштабных

неоднородностей, и высокая вычислительная сложность методов на неструктурированных сетках делают их применение проблематичным. В то время как метод конечных разностей соединяет в себе простоту реализации и приемлемую точность [371], [61], [289], хотя и требует использования несогласованных или разрывных сеток при локальном измельчении.

Практика показывает, что в основном применяют явные по времени аппроксимации как для метода конечных разностей, так и, по возможности, для метода конечных элементов. Причем в методе конечных элементов существует отдельное направление, ориентированное на решение именно гиперболических задач, - диагонализация матрицы масс, что позволяет ее достаточно эффективно обрабатывать, то есть использовать явные по времени соотношения. Этот способ, в англоязычной литературе называемый *mass-lumping*, представлен, например, в работах [388], [100]. Среди конечно-разностных аппроксимаций уравнений динамической теории упругости наиболее распространены схемы на сдвинутых сетках, такие как стандартная схема на сдвинутых сетках, или SSGS (от английского *Standard Staggered Grid Scheme*) [373], [238]; схема Лебедева [36], [152], [245], [110]; схема на повернутых сетках, или RSGS (от английского *Rotated Staggered Grid Scheme*) [316]. В них разные компоненты поля естественным образом определяются на разных слоях по времени с последующим использованием операторов центральных разностей, что приводит к явным по времени аппроксимациям, которые в англоязычной литературе называют *leap-frog*. Наряду с этим известны также сеточно-характеристические методы [51], [50], [38], [25]. Однако эти методы изначально разрабатываются для решения задач газовой динамики, которые допускают существенно разрывные решения, точная аппроксимация которых необходима, что требует повышенных вычислительных затрат. Уравнения линейной динамической теории упругости подобных решений не допускают, как следствие, использование сложных в реализации и вычислительно затратных сеточно-характеристических методов для их решения едва ли представляется целесообразным. При этом, как хорошо известно из теории разностных схем [53], [13], явные конечно-разностные схемы, аппроксимирующие гиперболические уравнения, являются условно устойчивыми, то есть значение шага по времени определяется минимальным шагом по пространству. Как следствие, при использовании локального

измельчения шага по пространству в окрестности скоплений мелкомасштабных неоднородностей приводит к необходимости измельчения шага по времени, то есть возникает задача локального пространственно-временного измельчения сеток при конечно-разностном моделировании волновых процессов.

На сегодня известно большое количество методов и алгоритмов на основе локального пространственно-временного измельчения сеток. В частности большое распространение такие методы получили при решении параболических систем уравнений [33], [26], [96], [34], [161], где детально развита теория и построены явные условия устойчивости. При моделировании волновых процессов наиболее простой метод построения алгоритма локального измельчения шагов сетки - интерполяция решения как по времени, так и по пространству для расчета решения в узлах мелкой сетки на границе раздела сеток [225]. Позднее показано, что получаемая в этом случае начально-краевая конечно-разностная задача некорректна: при определенных условиях допускаются экспоненциально растущие решения [143]. Другие методы основаны на решении задачи разрыва при пересчете решения на следующий временной слой. Этот подход реализован для метода конечных объемов [107], [108], [121], [254] и разрывного метода Галеркина [167], [131]. Принципиально иной способ предложен в работах [144], [145] с последующим развитием в ряде работ [218], [154], [287], [253]: условия согласования на границе раздела сеток строятся из условия сохранения конечно-разностного аналога полной энергии, что гарантирует устойчивость. Известен метод в котором условия согласования реализуются на основе принципа эквивалентных напряжений [103], [105], [106]. К сожалению, перечисленные методы обладают существенным недостатком - они чрезвычайно сложны в реализации, например в методах, основанных на сохранении энергии [144], условия согласования являются нелокальными по касательному направлению, причем они задаются неявно, что требует решения систем линейных алгебраических уравнений на каждом временном шаге. Эти недостатки сдерживают развитие указанных техник в трехмерных постановках. Так, о применении локального пространственно-временного измельчения в 3D упоминается лишь в работах [121], [167], [131], [106], [253]. Причем только в одной из них [167] обсуждается параллельная реализация алгоритма на основе метода декомпозиции расчетной области с использованием библиотек MPI (message

passing interface). В остальных работах представлены лишь реализации алгоритмов с использованием вычислительных ресурсов с общей памятью, то есть либо с применением библиотек OpenMP для центральных процессоров, либо с использованием графических ускорителей [253]. Вторым недостатком указанных методов - недопустимо высокий уровень нефизичных отражений от границы раздела сеток. Здесь следует уточнить, что постановка задачи моделирования волновых процессов в средах с мезомасштабной структурой - предполагает, что одним из типов целевых волн будут волны, рассеянные на скоплениях неоднородностей, амплитуда которых не превышает 1% от падающей волны. Это значит, что неизбежно возникающие при использовании различных дискретизаций нефизичные отражения не должны превышать 0.1% от амплитуды падающей волны для рабочих дискретизаций - 10-30 точек на минимальную длину волны. Анализ же методов показывает, что они данному требованию не удовлетворяют. В частности, для метода, основанного на сохранении энергии, коэффициент отражения достигает 10%.

## 1.2 Постановка задачи

Распространение сейсмических волн в изотропной идеально упругой среде описывается системой уравнений динамической теории упругости, которая в декартовой системе координат записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{13}}{\partial x_3}, \\
 \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{23}}{\partial x_3}, \\
 \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{33}}{\partial x_3},
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{22} \\ f_{33} \\ f_{23} \\ f_{13} \\ f_{12} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  - вектор скоростей смещений,  $\sigma_{ij}$  - компоненты тензора напряжений,  $\rho$  - объемная плотность,  $\lambda$  и  $\mu$  - параметры Ламэ [35], [29].

Начальные условия нулевые:

$$\begin{aligned} u_i|_{t=0} &= 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ \sigma_{ij}|_{t=0} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Постановка задачи типичная - в области  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_3 \geq 0$ . Поверхность  $x_3 = 0$  предполагается свободной от внешних нагрузок:

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{23}|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0.$$

На бесконечности ставятся условия предельного поглощения, обеспечивающие ограниченность решения. При численном моделировании расчеты проводятся в ограниченной области с построением слабоотражающих граничных условий, обеспечивающих малость отражений от границ расчетной области. Таким образом аппроксимируется решение исходной задачи решением задачи в ограниченной области. Существует ряд способов построения таких условий, например, поглощающие граничные условия [169] или идеально согласованные слои [104], [146], [250]. При моделировании волновых процессов в средах, содержащих неоднородности субсейсмического масштаба, используется классическая формулировка идеально согласованного слоя с расщеплением поля [104].

Системы уравнений (1.1) решаются методом конечных разностей, предполагающим дискретизацию расчетной области с использованием регулярных прямоугольных сеток. Шаг сетки определяется длиной волны и составляет (для типичных дискретизаций) от 10 до 20 точек на длину волны. Предполагается, что в сейсмогеологической модели присутствуют также неоднородности субволнового размера - от 0.01 до 0.1 длины волны, корректное описание которых требует сеток, содержащих не менее пяти точек на неоднородность. В связи с этим возникает необходимость разработки конечно-разностного алгоритма с использованием локального пространственно-временного измельчения сеток. Решение этой задачи строится на основе удовлетворения двух принципов. Во-первых, используется техника "вложенных шаблонов" при

измельчении сетки по времени, что обеспечивает низкий уровень нефизичных отражений и локальность оператора перехода. Во-вторых, измельчения сеток по пространству и по времени проводится на разных пространственных интерфейсах, что позволяет избежать проблем с устойчивостью. Следует отметить, что именно обеспечение устойчивости метода конечных разностей с локальным пространственно-временным измельчением шага является одной из наиболее сложных и актуальных задач при разработке таких методов. Теоретическое обоснование подхода, в одномерной постановке, исследование уровня нефизичных отражений и устойчивости алгоритма приведено в работе [243], а описание и исследование подхода в применении к уравнениям динамической теории упругости приводится в работе [252]. Описание метода в трехмерной постановке и особенностей его параллельной реализации на основе метода декомпозиции расчетной области приводится в ряде работ [44], [175], [28], [333]. Метод активно применяется в настоящее время для исследования особенностей формирования и распространения волновых полей в моделях, содержащих скопления мелкомасштабных включений. К ним относятся модели кавернозно-трещиноватых карбонатных резервуаров углеводородов, характерных для Восточной Сибири. Так, на основе полномасштабного моделирования, с использованием разработанного алгоритма, было показано, что максимальная интенсивность рассеянной компоненты волнового поля проявляется в направлении, параллельном трещиноватости, что подтверждается результатами прямого скважинного наблюдения [216], [177], [335]. Интенсивность рассеяния сейсмической энергии и возможность ее применения для построения сейсмических изображений с последующей локализацией флюидонасыщенных каверн обсуждается в работах [47], [335].

## 1.3 Применимость конечно-разностных схем на сдвинутых сетках для локального измельчения шагов

### 1.3.1 Стандартная схема на сдвинутых сетках

Для построения стандартной схемы на сдвинутых сетках [373], аппроксимирующей систему уравнений динамической теории упругости (1.1), необходимо ввести сетку с целыми и полужелыми узлами. Далее для определения узлов сетки используются обозначения:

$$\begin{aligned}(x_1)_i &= ih_1, & (x_1)_{i+1/2} &= (i + 1/2)h_1, \\(x_2)_j &= jh_2, & (x_2)_{j+1/2} &= (j + 1/2)h_2, \\(x_3)_k &= kh_3, & (x_3)_{k+1/2} &= (k + 1/2)h_3, \\t^n &= n\tau, & t^{n+1/2} &= (n + 1/2)\tau,\end{aligned}$$

где  $h_m$  - шаг сетки в направлении  $x_m$ ,  $\tau$  - шаг по времени. Затем вводятся сеточные функции:  $(u_1)_{i+1/2,j,k}$ ,  $(u_2)_{i,j+1/2,k}$  и т.д. так, что разные компоненты волнового поля определяются в различных узлах сетки:

$$\begin{aligned}(u_1)_{i+1/2,j,k}^n &= u_1((x_1)_{i+1/2}, (x_2)_j, (x_3)_k, t^n), \\(u_2)_{i,j+1/2,k}^n &= u_2((x_1)_i, (x_2)_{j+1/2}, (x_3)_k, t^n), \\(u_3)_{i,j,k+1/2}^n &= u_3((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_{k+1/2}, t^n), \\(\sigma_{11})_{i,j,k}^{n+1/2} &= \sigma_{11}((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k, t^{n+1/2}), \\(\sigma_{22})_{i,j,k}^{n+1/2} &= \sigma_{22}((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k, t^{n+1/2}), \\(\sigma_{33})_{i,j,k}^{n+1/2} &= \sigma_{33}((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k, t^{n+1/2}), \\(\sigma_{23})_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \sigma_{23}((x_1)_i, (x_2)_{j+1/2}, (x_3)_{k+1/2}, t^{n+1/2}), \\(\sigma_{13})_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} &= \sigma_{13}((x_1)_{i+1/2}, (x_2)_j, (x_3)_{k+1/2}, t^{n+1/2}), \\(\sigma_{12})_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} &= \sigma_{12}((x_1)_{i+1/2}, (x_2)_{j+1/2}, (x_3)_k, t^{n+1/2}).\end{aligned}$$

Ячейка сетки для стандартной схемы на сдвинутых сетках, иллюстрирующая взаимное расположение компонент волнового поля, позволяющее использовать центральные разности для аппроксимации производных, представлена на рис. 1.1.

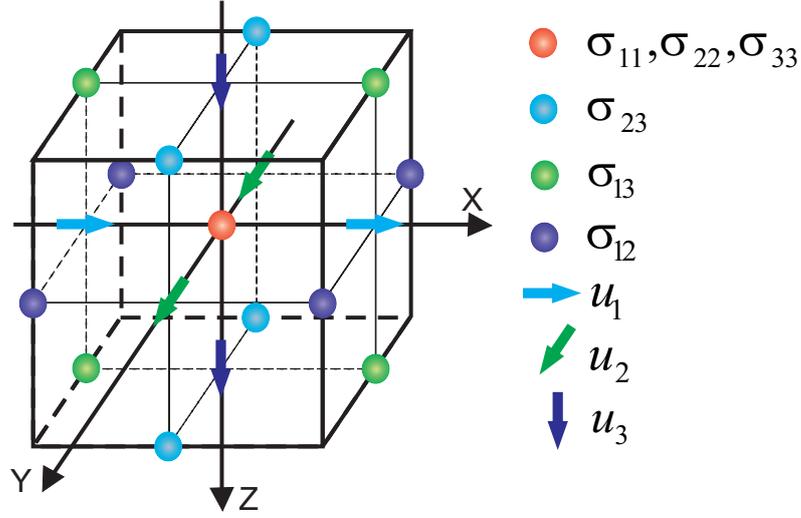


Рисунок 1.1 – Ячейка для стандартной схемы на сдвинутых сетках с пространственным распределением переменных

Для построения конечно-разностной схемы вводятся следующие операторы.

- Оператор для аппроксимации производной по времени:

$$D_t[f]_{I,J,K}^N = \frac{f_{I,J,K}^{N+1/2} - f_{I,J,K}^{N-1/2}}{\tau} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{I,J,K}^N + O(\tau^2), \quad (1.2)$$

где  $f$  - произвольная достаточно гладкая функция. Здесь и далее предполагается, что индексы, записанные строчными буквами, обозначают целые значения, индексы, записанные прописными буквами, могут использоваться как для целых, так и полуцелых значений.

- Оператор для аппроксимации производной по пространственной переменной  $x_1$ :

$$D_1[f]_{I,J,K}^N = \frac{f_{I+1/2,J,K}^N - f_{I-1/2,J,K}^N}{h_1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{I,J,K}^N + O(h_1^2). \quad (1.3)$$

- Операторы  $D_2[f]$  и  $D_3[f]$ , аппроксимирующие производные по остальным направлениям, могут быть получены из оператора (1.3) перестановкой индексов.

Здесь рассматриваются лишь схемы второго порядка аппроксимации как по времени, так и по пространству, поскольку именно эти схемы являются наиболее распространенными и эффективными для моделирования волновых процессов в сейсмогеологических моделях неоднородной сложноустроенной среды.

Используя введенные операторы и учитывая геометрию сетки, можно построить стандартную схему на сдвинутых сетках [373] для аппроксимации системы уравнений (1.1):

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{i+1/2,j,k} D_t [u_1]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{11}]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{12}]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} + D_3 [\sigma_{13}]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2}, \\
\hat{\rho}_{i,j+1/2,k} D_t [u_2]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{12}]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{22}]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} + D_3 [\sigma_{23}]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2}, \\
\hat{\rho}_{i,j,k+1/2} D_t [u_3]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{13}]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{23}]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} + D_3 [\sigma_{33}]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2}, \\
D_t [\sigma_{11}]_{i,j,k}^n &= (\hat{\lambda}_{i,j,k} + 2\hat{\mu}_{i,j,k}) D_1 [u_1]_{i,j,k}^n + \hat{\lambda}_{i,j,k} D_2 [u_2]_{i,j,k}^n + \hat{\lambda}_{i,j,k} D_3 [u_3]_{i,j,k}^n, \\
D_t [\sigma_{22}]_{i,j,k}^n &= \hat{\lambda}_{i,j,k} D_1 [u_1]_{i,j,k}^n + (\hat{\lambda}_{i,j,k} + 2\hat{\mu}_{i,j,k}) D_2 [u_2]_{i,j,k}^n + \hat{\lambda}_{i,j,k} D_3 [u_3]_{i,j,k}^n, \\
D_t [\sigma_{33}]_{i,j,k}^n &= \hat{\lambda}_{i,j,k} D_1 [u_1]_{i,j,k}^n + \hat{\lambda}_{i,j,k} D_2 [u_2]_{i,j,k}^n + (\hat{\lambda}_{i,j,k} + 2\hat{\mu}_{i,j,k}) D_3 [u_3]_{i,j,k}^n, \\
D_t [\sigma_{23}]_{i,j+1/2,k+1/2}^n &= \hat{\mu}_{i,j+1/2,k+1/2} \left( D_2 [u_3]_{i,j+1/2,k+1/2}^n + D_3 [u_2]_{i,j+1/2,k+1/2}^n \right), \\
D_t [\sigma_{13}]_{i+1/2,j,k+1/2}^n &= \hat{\mu}_{i+1/2,j,k+1/2} \left( D_3 [u_1]_{i+1/2,j,k+1/2}^n + D_1 [u_3]_{i+1/2,j,k+1/2}^n \right), \\
D_t [\sigma_{12}]_{i+1/2,j+1/2,k}^n &= \hat{\mu}_{i+1/2,j+1/2,k} \left( D_1 [u_2]_{i+1/2,j+1/2,k}^n + D_2 [u_1]_{i+1/2,j+1/2,k}^n \right).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Необходимое условие устойчивости для схемы (1.4) строится аналитически в следующем виде [373]:

$$v_{PT} \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2}} \leq 1.$$

Крышки над коэффициентами  $\hat{\rho}_{IJK}$ ,  $\hat{\lambda}_{IJK}$ ,  $\hat{\mu}_{IJK}$  используется для того чтобы подчеркнуть, что они не являются проекцией коэффициентов дифференциальной задачи на сетку. Задача построения оптимальных в том или ином смысле коэффициентов является самостоятельной задачей, и обзор подходов к ее решению представлен в работах [62], [271], [289]. Далее рассматривается достаточно стандартная постановка, обусловленная спецификой задачи моделирования волновых процессов, - предполагается, что модель является кусочно-постоянной и внутри ячейки сетки  $[(x_1)_{i-1/2}, (x_1)_{i+1/2}] \times [(x_2)_{j-1/2}, (x_2)_{j+1/2}] \times [(x_3)_{k-1/2}, (x_3)_{k+1/2}]$  модель постоянна. В этом случае коэффициенты конечно-разностных уравнений могут быть получены на

основе метода баланса (глава 3, [53]):

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_{i,j,k} &= \lambda_{i,j,k} = \lambda((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k), \\
\hat{\mu}_{i,j,k} &= \mu_{i,j,k} = \mu((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k), \\
\rho_{i,j,k} &= \rho((x_1)_i, (x_2)_j, (x_3)_k), \\
\hat{\rho}_{i+1/2,j,k} &= \frac{1}{2}(\rho_{i,j,k} + \rho_{i+1,j,k}), \\
\hat{\mu}_{i+1/2,j+1/2,k} &= 4(\mu_{i,j,k}^{-1} + \mu_{i+1,j,k}^{-1} + \mu_{i,j+1,k}^{-1} + \mu_{i+1,j+1,k}^{-1})^{-1}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Формулы для построения остальных коэффициентов могут быть получены из представленных соотношений перестановкой индексов.

### 1.3.2 Предварительная оценка нефизичных отражений по результатам дисперсионного анализа

Прежде чем переходить описывать алгоритм локального измельчения сеток для моделирования волновых процессов в упругих средах, необходимо одномерной постановке проанализировать свойства локального использования разных шагов сетки. В случае распространения плоской волны в направлении, параллельном одной из координатных осей, пусть вдоль оси  $x_1$ , которая далее обозначается  $x$ , система уравнений (2.2) сводится к одномерной системе уравнений акустики:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad . \tag{1.6}$$

где  $u$  - скорость,  $p$  - минус давление, одна из компонент тензора напряжений. Предполагается, что система задана в области  $(t, x) \in D = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ . Начальные условия - нулевые. Предполагается, что коэффициенты уравнения равны единице, в противном случае задача может быть обезразмерена, для удовлетворения этому условию.

Стандартная схема на сдвинутых сетках для системы уравнений (1.6) имеет

следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{p_j^n - p_j^{n-1}}{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j+1/2}^{n-1/2}} &= \frac{u_{j+1/2}^{n-1/2} - u_{j-1/2}^{n-1/2}}{h}, \\ \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j+1/2}^{n-1/2}}{\tau} &= \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{h}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $\tau$  и  $h$  - шаги сетки по времени и пространству соответственно.

Использование разных дискретизаций с необходимостью приводит к возникновению дополнительной численной ошибки. При рассмотрении гиперболических задач эта ошибка может быть локализована и представлена в виде нефизичных отраженных волн от границы раздела сеток. Интенсивность же нефизичных отражений для линейных гиперболических задач можно оценить основываясь на технике дисперсионного анализа, который детально описан в работах [142], [245], [110], [270], [316], [325], [74], в том числе в применении к рассматриваемой схеме 1.4.

Фазовая скорость распространения решения в виде плоской волны системы (1.7) представляется в виде:

$$c_j = \frac{N_j}{\alpha_j \pi} \arcsin \left( \alpha_j \sin \left( \frac{\pi}{N_j} \right) \right), \quad (1.8)$$

где  $N_j = \frac{2\pi}{kh^j}$  - число точек на длину волны на сетке с номером  $j$  и  $\alpha_j = \frac{\tau^j}{h^j}$  - отношение Куранта,  $\tau^j$  и  $h^j$  - шаги сетки с номером  $j$  по времени и по пространству соответственно,  $k$  - волновое число. При этом коэффициент отражения от граница раздела двух сеток определяется по формуле

$$R = \frac{c_j - c_i}{c_j + c_i},$$

где  $c_j$  и  $c_i$  - фазовые скорости на сетке с номерами  $j$  и  $i$  соответственно. Здесь коэффициент отражения соответствует случаю распространения волны с сетки с номером  $i$  на сетку с номером  $j$ . Используя эту формулу, можно оценить значения коэффициентов отражения для реалистичных дискретизаций. Ниже приводятся оценки для трех типов измельчения сеток: измельчение пространственного шага сетки, измельчение шага сетки по времени, одновременное измельчение шагов сетки как по пространству, так и по времени. При этом в последнем случае коэффициент измельчения -

отношение соответствующих шагов смежных сеток - одинаков для пространственных и временных шагов. Такое упрощение не приводит к ограничению общности результатов, тем более что одновременное измельчение неустойчиво и применяться не будет.

Типичными дискретизациями, используемыми при моделировании волновых процессов с применением схемы (1.7), являются число точек на длину волны от 15 до 50; число Куранта, изменяющееся в интервале  $[0.1; 1]$ ; коэффициенты измельчения в пределах от 1 до 50. Именно для таких дискретизаций проводится анализ нефизичных коэффициентов отражения.

Прежде всего следует отметить, что с ростом числа точек на длину волны коэффициенты отражений стремятся к нулю со вторым порядком относительно шага сетки (рис. 1.2), что подтверждается аналитически, на основе дисперсионного соотношения (1.8). При этом зависимость коэффициентов отражения от чисел Куранта для разных типов измельчения сеток является существенно различной (рис. 1.3). Так, при измельчении шага по пространству коэффициенты отражения не зависят от чисел Куранта на грубой сетке. При измельчении только шага по времени наблюдается рост коэффициентов отражения с ростом чисел Куранта, а при одновременном измельчении, наоборот, с ростом чисел Куранта отражения слабеют. Зависимость от коэффициентов измельчения все методы демонстрируют достаточно быстрый выход на асимптотику при увеличении коэффициента измельчения (рис. 1.4). Причем эта асимптотика определяется именно грубой сеткой - дисперсионной ошибкой фазовой скорости на грубой сетке. При этом фазовая скорость решения на мелкой сетке сходится со вторым порядком к точному решению с увеличением коэффициента измельчения, что и определяет скорость сходимости коэффициентов отражения к асимптотике. Отсюда следует, что нефизичные коэффициенты отражения от раздела сеток, обусловленные различием дисперсионных свойств, не превосходят  $3 \cdot 10^{-3}$  для типичных дискретизаций - число точек на длину волны 15-50, число Куранта в интервале  $[0.1; 1]$ . Поэтому вводится формальное определение слабоотражающего алгоритма измельчения сеток.

**Определение 1.** *Алгоритм измельчения сеток является слабоотражающим, если нефизичные коэффициенты отражения от границы раздела сеток не превосходят*

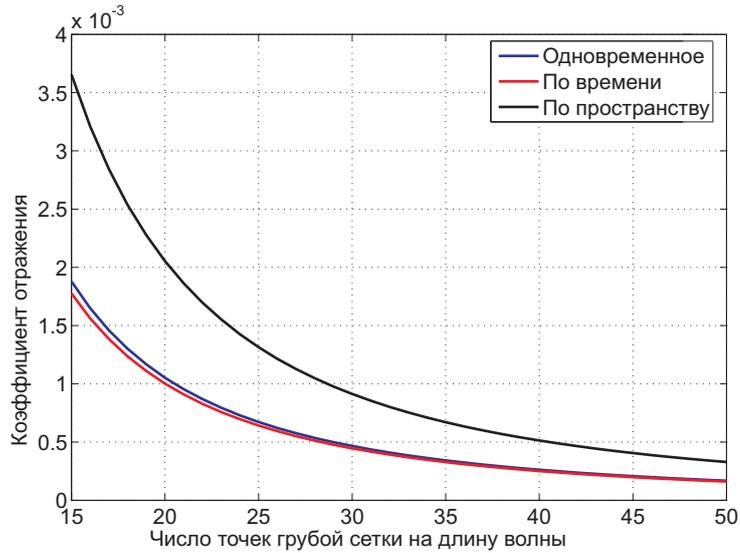


Рисунок 1.2 – Зависимость коэффициентов отражения от числа точек на длину волны. По результатам дисперсионного анализа. Число Куранта 0.7, коэффициент измельчения 5

*оценок, полученных при дисперсионном анализе.*

## 1.4 Конечно-разностный метод расчета волновых полей на основе локального измельчения сеток

### 1.4.1 Алгоритм измельчения сеток в одномерной постановке

Рассматривается система уравнений (1.6), соответствующая одномерной постановке задачи в области  $\{t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ . Для численного решения этой системы используется стандартная конечно-разностная схема на сдвинутых сетках (1.7) с шагами  $h$  и  $\tau$  при  $x < 0$  и с шагами  $h/L$  и  $\tau/K$  при  $x > 0$ . Здесь  $L$  и  $K$  - коэффициенты измельчения по пространству и по времени. Конечно-разностная задача записывается

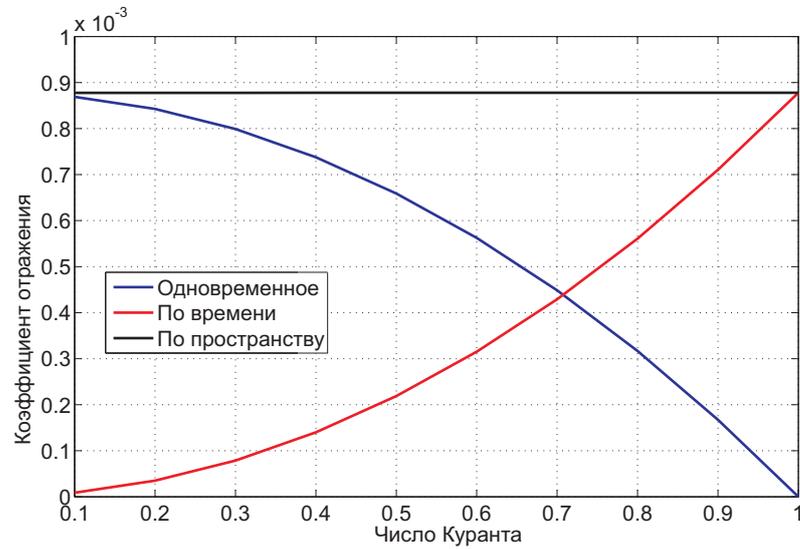


Рисунок 1.3 – Зависимость коэффициентов отражения от числа Куранта. По результатам дисперсионного анализа. Число точек на длину волны 30, коэффициент измельчения 5

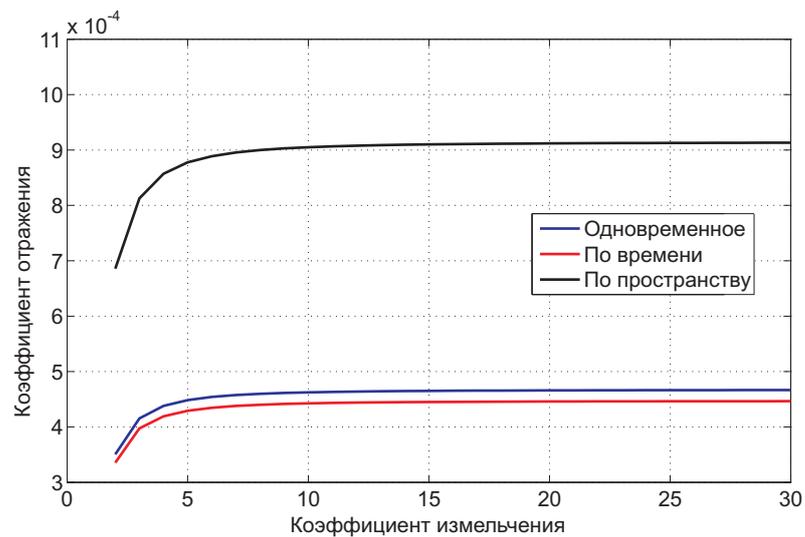


Рисунок 1.4 – Зависимость коэффициентов отражения от коэффициента измельчения. По результатам дисперсионного анализа. Число Куранта 0.7, число точек на длину волны 30

в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{p_j^n - p_j^{n-1}}{h} &= \frac{u_{j+1/2}^{n-1/2} - u_{j-1/2}^{n-1/2}}{h}, & j < 0, \\
\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j+1/2}^{n-1/2}}{h} &= \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{h}, & j < 0, \\
\frac{p_{j+l/L}^{n+k/K} - p_{j+l/L}^{n+(k-1)/K}}{\tau/K} &= & j > 0, \\
&= \frac{u_{j+(2l+1)/2L}^{n+(2k-1)/2K} - u_{j+(2l-1)/2L}^{n+(2k-1)/2K}}{h/L}, & (1.9) \\
\frac{u_{j+(2l-1)/2L}^{n+(2k-1)/2K} - u_{j+(2l-1)/2L}^{n+(2k-3)/2K}}{\tau/K} &= & j > 0, \\
&= \frac{p_{j+l/L}^{n+(k-1)/K} - p_{j+(l-1)/L}^{n+(k-1)/K}}{h/L}, & j > 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрение ограничивается случаем, когда коэффициенты измельчения  $K$  и  $L$  есть целые нечетные числа. Такой выбор обусловлен двумя факторами. Во-первых, согласованием сеток, то есть, если ввести грубую сетку в области  $x > 0$ , то каждой ее точке будет соответствовать точка мелкой сетки, причем в ней будет определена та же самая компонента волнового поля. Очевидно, что мелкая сетка содержит и дополнительные узлы, однако согласование является одним из принципиальных требований при разработке алгоритма. Во-вторых, с практической точки зрения, данное требование не накладывает сколько-нибудь значимых ограничений на применимость алгоритма, особенно для моделирования волновых процессов в средах с микронеродностями, где используемые коэффициенты измельчения составляют три и более. Параметры  $k$  и  $l$ , используемые в схеме (1.9), целые числа, применяющиеся обозначения узлов с дробными индексами такие, что  $k = 0, \dots, K - 1$  и  $l = 0, \dots, L - 1$ . При этом случай  $K = 1$  означает, что измельчение по времени не применяется, а используется лишь измельчение по пространству,  $L = 1$  - измельчение проводится только по времени,  $K = L = 1$  - схема без измельчения.

С использованием уравнения (1.9) решение находится всюду в расчетной области, за исключением границы  $x = 0$  или  $j = 0$ . При построении формул для расчета решения на интерфейсе  $p_0^{n+k/K}$  используется конечно-разностная аппроксимация рассматриваемой системы уравнений (1.6), а также аппроксимация волнового уравнения второго порядка. При этом рассматриваются две принципиально разные ситуации:

- расчет решения во временном интервале  $t \in (t^n, t^{n+1/2}]$ ;
- расчет решения во временном интервале  $t \in (t^{n+1/2}, t^{n+1}]$ .

#### 1.4.1.1 Расчет решения во временном интервале $t \in (t^n, t^{n+1/2}]$ .

На этом временном интервале требуется вычислить решение  $p_0^{n+k/K}$  для  $k = 1, \dots, (K-1)/2$ , для чего конечно-разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений первого порядка, неприменима, поскольку ее использование подразумевает знание переменной  $u$  на дробных слоях по времени на грубой сетке. Однако переменная  $u$  может быть исключена из системы уравнений (1.6) с переходом к волновому уравнению второго порядка относительно переменной  $p$ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0.$$

Это уравнение аппроксимируется схемой "крест" со вторым порядком:

$$\frac{p_J^{N+1} - 2p_J^N + p_J^{N-1}}{(\delta t)^2} = \frac{p_{J+1}^N - 2p_J^N + p_{J-1}^N}{(\delta x)^2}. \quad (1.10)$$

В схеме намеренно используются заглавные буквы для обозначения индексов и переменные  $\delta t$  и  $\delta x$  для обозначения шагов сетки, чтобы подчеркнуть, что схема (1.10) аппроксимирует волновое уравнение со вторым порядком на любой равномерной сетке, не обязательно связанной с сетками, используемыми в схеме (1.9). Следует отметить, что аппроксимация, устойчивость и численная дисперсия схем (1.10) и (1.7) совпадают [142].

При использовании схемы (1.10) для расчета решения  $p_0^{n+k/K}$ ,  $k = 1, \dots, (K-1)/2$  достаточно переписать схему в следующем виде с использованием "вложенных шаблонов":

$$\frac{p_0^{n+k/K} - 2p_0^n + p_0^{n-k/K}}{(\tau k/K)^2} = \frac{p_1^n - 2p_0^n + p_{-1}^n}{h^2}. \quad (1.11)$$

Использование полученного соотношения предполагает, что известны компоненты  $p_0^n$ ,  $p_{\pm 1}^n$  на временном слое с номером  $n$ , а также значение  $p_0^{n-k/K}$ , определенное на интерфейсе, но на слое ниже  $t^n$ . Здесь свойство согласования сеток используется яв-

но, поскольку значение  $p_1^n$ , определенное на мелкой сетке, используется шаблоном крупной сетки. На графическом представлении шаблона, используемого для вычисления решения на интерфейсе (рис. 1.5) приведен случай  $K = L = 5$ , когда значения  $p_0^{n+1/5}$  (рис. 1.5 вверху) и  $p_0^{n+2/5}$  (рис. 1.5 внизу) вычисляются по формуле (1.11).

#### 1.4.1.2 Расчет решения во временном интервале $t \in (t^{n+1/2}, t^{n+1}]$

Для расчета решения на интерфейсе в указанном интервале используется стандартная схема на сдвинутых сетках (1.7) с вложенными шаблонами в силу того, что значения  $p_0^{n+k/K}$ ,  $k = 1, \dots, (K-1)/2$  предполагаются известными, вычисленными по формуле (1.11). Конечно-разностные формулы для расчета решения  $p_0^{n+1/2+(2k+1)/2K}$ ,  $k = 0, \dots, (K-1)/2$  могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \frac{p_0^{n+1/2+(2k+1)/2K} - p_0^{n+1/2-(2k+1)/2K}}{(2k+1)\tau/K} &= \\ &= \frac{u_{1/2}^{n+1/2} - u_{-1/2}^{n+1/2}}{h}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

где переменные  $u_{\pm 1/2}^{n+1/2}$  вычисляются по формулам (1.9), при этом важным является согласование сеток.

На шаблонах операторов, используемых в соотношениях (1.12), (рис. 1.6) приведены случаи, соответствующие расчету компонент  $p_0^{n+3/5}$  (рис. 1.6 вверху),  $p_0^{n+4/5}$  (рис. 1.6 посередине) и  $p_0^{n+1}$  (рис. 1.6 внизу) на границе раздела сеток. Коэффициенты измельчения  $K$  и  $L$  в представленном примере равны пяти.

Отдельно следует сказать, что полученная конечно-разностная схема (1.9), (1.11), (1.12) построена с использованием симметричных шаблонов, как следствие - все дифференциальные операторы аппроксимируются со вторым порядком. При этом как следует из построения, схема может применяться для разных целых нечетных коэффициентов измельчения. В частности, при  $L = 1$  пространственные шаги сетки не изменяются, а измельчение производится только для шага по времени. В случае  $K = 1$  шаг по времени фиксирован, при этом формулы (1.11) не применяются, а формулы (1.12) вырождаются в стандартное конечно-разностное соотношение. Аналогично и для случая  $K = L = 1$ .

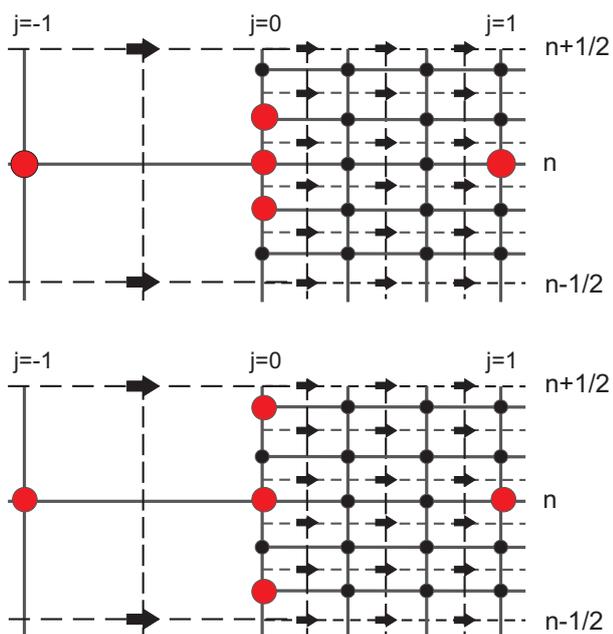


Рисунок 1.5 – Вложенные шаблоны операторов, аппроксимирующих уравнение второго порядка на интерфейсе. Коэффициент измельчения сетки равен пяти.

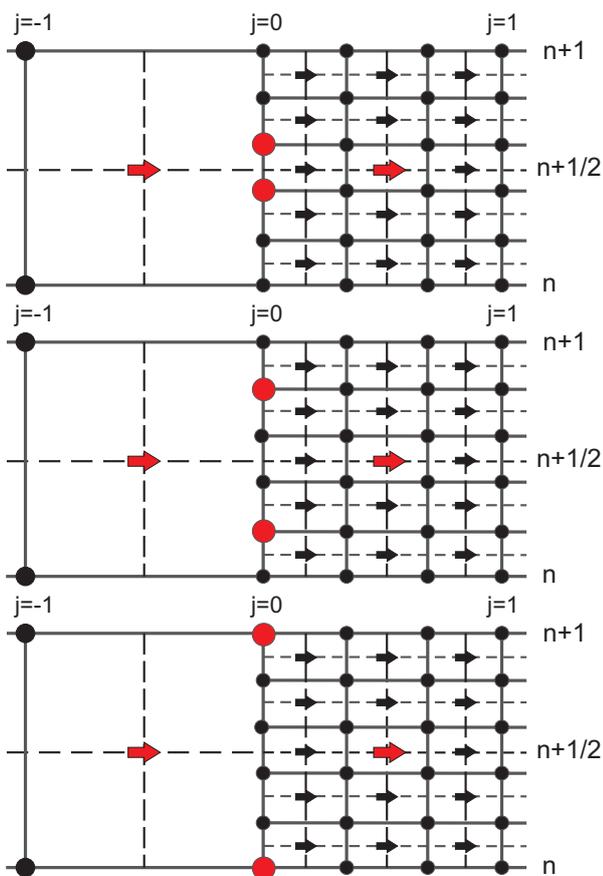


Рисунок 1.6 – Вложенные шаблоны операторов, аппроксимирующих уравнение первого порядка на интерфейсе. Коэффициент измельчения сетки равен пяти.

### 1.4.2 Разработка алгоритма в двумерной постановке

Система уравнений динамической теории упругости в двумерной постановке может быть получена из системы (1.1) в предположении независимости решения от одной из пространственных переменных. Пусть такой переменной является  $x_2$ , в этом случае система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}, \\
 \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}, \\
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3},
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

где  $u_1$  и  $u_3$  - компоненты вектора скорости,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$  и  $\sigma_{13}$  - компоненты тензора напряжений,  $\rho$  - плотность,  $\lambda$  и  $\mu$  - параметры Ламэ.

Для аппроксимации этой системы уравнений применяется стандартная схема на сдвинутых сетках [373] с использованием двух разных сеток. Первая сетка - грубая, с шагами  $\tau$ ,  $h_1$  и  $h_3$ , определяемая по правилу:

$$T^C = \{t^N | N = 0, 1/2, 1, \dots\}, \tag{1.14}$$

$$\Omega^C = \{((x_1)_I, (x_3)_J) | I = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots; J = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots\}. \tag{1.15}$$

Вторая сетка - мелкая, с шагами  $\tau/K$ ,  $h_1/L_1$  и  $h_3/L_3$ , где  $K$ ,  $L_1$  и  $L_3$  - натуральные нечетные числа:

$$T^F = \{t^{N+k/K} | N = 0, 1/2, 1, \dots; k = 1, \dots, K\}, \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega^F &= \{((x_1)_{I+l_1/L_1}, (x_3)_{J+l_3/L_3}) | \\
 &I = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots; J = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots; l_1 = 1, \dots, L_1; l_3 = 1, \dots, L_3\}.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Для обеспечения устойчивости алгоритма, основанного на локальном пространственно-временном измельчении сеток, вводится транзитная зона, в кото-

рой используется грубая сетка по пространству (1.15), но мелкая - по времени (1.16).

Для удобства вводятся подсетки по следующим правилам:

для грубой сетки

$$T_\sigma^C = \{t^{n+1/2} | n \in \mathbb{N}\}, \quad T_u^C = \{t^n | n \in \mathbb{N}\}, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\sigma_{11}}^C &= \Omega_{\sigma_{33}}^C = \{((x_1)_i, (x_3)_j) | i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_{\sigma_{13}}^C &= \{((x_1)_{i+1/2}, (x_3)_{j+1/2}) | i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_{u_1}^C &= \{((x_1)_{i+1/2}, (x_3)_j) | i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_{u_3}^C &= \{((x_1)_i, (x_3)_{j+1/2}) | i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

для мелкой сетки

$$\begin{aligned} T_\sigma^F &= \{t^{n+1/2+k/K} | n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, K\}, \\ T_u^F &= \{t^{n+k/K} | n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, K\}, \\ T^F &= T_\sigma^F + T_u^F. \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\sigma_{11}}^F &= \Omega_{\sigma_{33}}^F = \{((x_1)_{i+l_1/L_1}, (x_3)_{j+l_3/L_3}) | i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_{\sigma_{13}}^F &= \{((x_1)_{i+1/2+l_1/L_1}, (x_3)_{j+1/2+l_3/L_3}) | i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_{u_1}^F &= \{((x_1)_{i+1/2+l_1/L_1}, (x_3)_{j+l_3/L_3}) | i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_{u_3}^F &= \{((x_1)_{i+l_1/L_1}, (x_3)_{j+1/2+l_3/L_3}) | i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}\}, \\ l_1 &= 1, \dots, L_1, \quad l_3 = 1, \dots, L_3, \\ \Omega^F &= \Omega_{\sigma_{11}}^F + \Omega_{\sigma_{13}}^F + \Omega_{u_1}^F + \Omega_{u_3}^F. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Несложно показать, что каждый из наборов подсеток - состоит непересекающихся множеств, объединение которых совпадает с соответствующей сеткой:

$$T_u^C \cap T_\sigma^C = \emptyset, \quad T_u^C \cup T_\sigma^C = T^C.$$

При этом требование нечетности коэффициентов измельчения сеток  $K$ ,  $L_1$  и  $L_3$  обеспечивает выполнение следующих вложений:

$$\begin{aligned} T_u^C &\subseteq T_u^F, & T_\sigma^C &\subseteq T_\sigma^F, \\ \Omega_{\sigma_{11}}^C &\subseteq \Omega_{\sigma_{11}}^F, & \Omega_{\sigma_{13}}^C &\subseteq \Omega_{\sigma_{13}}^F, \\ \Omega_{u_1}^C &\subseteq \Omega_{u_1}^F, & \Omega_{u_3}^C &\subseteq \Omega_{u_3}^F, \end{aligned} \quad (1.22)$$

то есть каждому узлу грубой сетки соответствует один узел мелкой сетки, что явля-

ется принципиально важным при разработке алгоритма.

Сеточные функции удобно определить по следующим правилам:  
на грубой сетке

$$\begin{aligned}(u_1^C)_{IJ}^N &= u_1(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_u^C \times \Omega_{u_1}^C, \\(u_2^C)_{IJ}^N &= u_2(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_u^C \times \Omega_{u_2}^C, \\(\sigma_{11}^C)_{IJ}^N &= \sigma_{11}(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_\sigma^C \times \Omega_{\sigma_{11}}^C, \\(\sigma_{33}^C)_{IJ}^N &= \sigma_{33}(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_\sigma^C \times \Omega_{\sigma_{33}}^C, \\(\sigma_{13}^C)_{IJ}^N &= \sigma_{13}(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_\sigma^C \times \Omega_{\sigma_{13}}^C,\end{aligned}$$

на мелкой сетке

$$\begin{aligned}(u_1^F)_{IJ}^N &= u_1(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_u^F \times \Omega_{u_1}^F, \\(u_2^F)_{IJ}^N &= u_2(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_u^F \times \Omega_{u_2}^F, \\(\sigma_{11}^F)_{IJ}^N &= \sigma_{11}(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_\sigma^F \times \Omega_{\sigma_{11}}^F, \\(\sigma_{33}^F)_{IJ}^N &= \sigma_{33}(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_\sigma^F \times \Omega_{\sigma_{33}}^F, \\(\sigma_{13}^F)_{IJ}^N &= \sigma_{13}(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_\sigma^F \times \Omega_{\sigma_{13}}^F,\end{aligned}$$

в переходной зоне

$$\begin{aligned}(u_1^T)_{IJ}^N &= u_1(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_u^F \times \Omega_{u_1}^C, \\(u_2^T)_{IJ}^N &= u_2(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_u^F \times \Omega_{u_2}^C, \\(\sigma_{11}^T)_{IJ}^N &= \sigma_{11}(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_\sigma^F \times \Omega_{\sigma_{11}}^C, \\(\sigma_{33}^T)_{IJ}^N &= \sigma_{33}(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_\sigma^F \times \Omega_{\sigma_{33}}^C, \\(\sigma_{13}^T)_{IJ}^N &= \sigma_{13}(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J), & (t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T_\sigma^F \times \Omega_{\sigma_{13}}^C.\end{aligned}$$

При этом конечно-разностные операторы вводятся следующим образом:

на грубой сетке

$$\begin{aligned}D_t^C[F]_{I,J}^N &= \frac{F_{I,J}^{N+1/2} - F_{I,J}^{N-1/2}}{\tau} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{I,J}^N + O(\tau^2), \\(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T^C \times \Omega^C,\end{aligned}\tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}D_1^C[F]_{I,J}^N &= \frac{F_{I+1/2,J}^N - F_{I-1/2,J}^N}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{I,J}^N + O(h_1^2), \\D_3^C[F]_{I,J}^N &= \frac{F_{I,J+1/2}^N - F_{I,J-1/2}^N}{h_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{I,J}^N + O(h_3^2), \\(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) &\in T^C \times \Omega^C,\end{aligned}\tag{1.24}$$

где  $f$  - достаточно гладкая функция,  $F$  - соответствующая ей сеточная функция; на мелкой сетке

$$D_t^F [F]_{I,J}^N = \frac{F_{I,J}^{N+\frac{1}{2K}} - F_{I,J}^{N-\frac{1}{2K}}}{\tau/K} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{I,J}^N + O(\tau^2), \quad (1.25)$$

$$(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) \in T^F \times \Omega^F,$$

$$D_1^F [f]_{I,J}^N = \frac{F_{I+\frac{1}{2L_1},J}^N - F_{I-\frac{1}{2L_1},J}^N}{h_1/L_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{I,J}^N + O(h_1^2),$$

$$D_3^F [f]_{I,J}^N = \frac{F_{I,J+\frac{1}{2L_3}}^N - F_{I,J-\frac{1}{2L_3}}^N}{h_3/L_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{I,J}^N + O(h_3^2), \quad (1.26)$$

$$(t^N, (x_1)_I, (x_3)_J) \in T^F \times \Omega^F.$$

С использованием введенных обозначений стандартная схема на сдвинутых сетках, аппроксимирующая систему уравнений динамической теории упругости, записывается в следующем виде (пример для грубой сетки по пространству и времени):

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{I,J} D_t^C [u_1^C]_{I,J}^N &= D_1^C [\sigma_{11}^C]_{I,J}^N + D_3^C [\sigma_{13}^C]_{I,J}^N, \\ (t, x_1, x_3) &\in T_\sigma^C \times \Omega_{u_1}^C, \\ \hat{\rho}_{I,J} D_t^C [u_3^C]_{I,J}^N &= D_1^C [\sigma_{13}^C]_{I,J}^N + D_3^C [\sigma_{33}^C]_{I,J}^N, \\ (t, x_1, x_3) &\in T_\sigma^C \times \Omega_{u_2}^C, \\ D_t^C [\sigma_{11}^C]_{I,J}^N &= (\hat{\lambda}_{I,J} + 2\hat{\mu}_{I,J}) D_1^C [u_1^C]_{I,J}^N + \hat{\lambda}_{I,J} D_3^C [u_3^C]_{I,J}^N, \\ (t, x_1, x_3) &\in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{11}}^C, \\ D_t^C [\sigma_{33}^C]_{I,J}^N &= \hat{\lambda}_{I,J} D_1^C [u_1^C]_{I,J}^N + (\hat{\lambda}_{I,J} + 2\hat{\mu}_{I,J}) D_3^C [u_3^C]_{I,J}^N, \\ (t, x_1, x_3) &\in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{11}}^C, \\ D_t^C [\sigma_{13}^C]_{I,J}^N &= \hat{\mu}_{I,J} D_1^C [u_3^C]_{I,J}^N + \hat{\mu}_{I,J} D_3^C [u_1^C]_{I,J}^N, \\ (t, x_1, x_3) &\in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{13}}^C. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Схема на мелкой сетке может быть получена из приведенной выше заменой верхнего индекса  $C$  в обозначениях переменных, операторов и точек сетки - на  $F$ . Аналогично для схемы в переходной зоне - замена верхнего индекса  $C$  в обозначениях операторов, аппроксимирующих производные по времени, и в обозначениях сеток по времени на индекс  $F$ , а в переменных - на индекс  $T$ .

После введения дискретизаций и построения соответствующих конечно-разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений динамической теории упру-

гости, задачу разработки алгоритма пространственно-временного измельчения сеток можно формализовать, разбив на две независимые задачи.

**Задача 1. Измельчение шага по времени.** Пусть в области  $Q^C = \{t > 0, x_1 \in \mathbb{R}, x_3 < J_0 h_3\}$  введена грубая сетка  $G^C = T^C \times \Omega^C$ , в области  $Q^T = \{t > 0, x_1 \in \mathbb{R}, J_0 h_3 < x_3 < J_1 h_3\}$  введена грубая сетка по пространству и мелкая по времени -  $G^T = T^F \times \Omega^C$  и система уравнений динамической теории упругости аппроксимирована с использованием стандартной схемы на сдвинутых сетках. Пусть при этом решение известно на всех временных слоях вплоть до целого слоя  $t = t^n$ . Необходимо разработать алгоритм пересчета решения на следующий временной слой  $t = t^{n+1}$  в рассматриваемой расчетной области.

**Задача 2. Измельчение шага по пространству.** Пусть в области  $Q^T = \{t > 0, x_1 \in \mathbb{R}, J_0 h_3 < x_3 < J_1 h_3\}$  введена грубая сетка по пространству и мелкая по времени -  $G^T = T^F \times \Omega^C$ , в области  $Q^F = \{t > 0, x_1 \in \mathbb{R}, J_1 h_3 < x_3\}$  введена мелкая сетка как по пространству, так и по времени:  $G^F = T^F \times \Omega^F$  и система уравнений динамической теории упругости аппроксимирована с использованием стандартной схемы на сдвинутых сетках. Пусть при этом решение известно на всех временных слоях вплоть до целого слоя  $t = t^{n+k/K}$ . Необходимо разработать алгоритм пересчета решения на следующий временной слой  $t = t^{n+(k+1)/K}$  в рассматриваемой расчетной области.

На схематическом представлении декомпозиции расчетной области - ее проекции на плоскость  $(t, x_3)$  (на рис. 1.7), - видно, что построение формул для расчета решения проводится для случая, когда  $J_0$  - целое, то есть интерфейс, на котором выполняется измельчение сетки по времени, проходит через целые узлы сетки, а  $J_1$  - полуцелое, то есть интерфейс, на котором применяется измельчение сетки по пространству, проходит через полуцелые узлы сетки. Такой выбор не принципиален, и положения интерфейсов фиксируются лишь для определенности.

#### 1.4.2.1 Измельчение шага по времени в двумерной постановке

При решении задачи 1 предполагается, что грубая по времени сетка с шагом  $\tau$  введена при  $x_3 < J_0 h_3$ , а сетка с шагом  $\tau/K$  - при  $x_3 > J_0 h_3$ , число  $K$  - нечетное

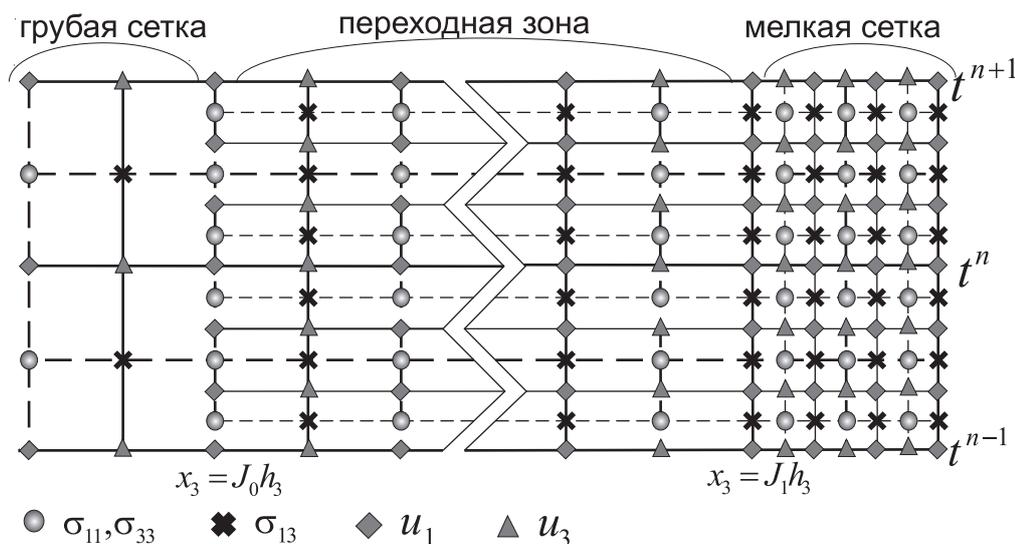


Рисунок 1.7 – Схематическое представление сетки при локальном измельчении

положительное. Шаги сетки по пространству - одинаковые. Для расчета решения в каждой из областей используется схема (1.27) на соответствующей сетке. Аналогично рассуждениям, приведенным в предыдущем разделе, для расчета решения на интерфейсе используются конечно-разностные соотношения на вложенных временных шаблонах. При этом часть компонент волнового поля вычисляется по формулам, аппроксимирующим уравнения первого порядка, а часть - по формулам для уравнения второго порядка. Как и в предыдущем разделе, рассматриваются два различных случая:

- расчет решения во временном интервале  $t \in (t^n, t^{n+1/2}]$  с использованием для расчета компонент тензора напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{33}$  схемы для уравнений первого порядка, а для  $u_1$  - схемы для уравнения второго порядка;
- расчет решения во временном интервале  $t \in (t^{n+1/2}, t^{n+1}]$  с использованием для расчета компоненты вектора скорости  $u_1$  схемы для уравнений первого порядка, а для  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{33}$  - схемы для уравнения второго порядка.

**Расчет решения во временном интервале  $t \in (t^n, t^{n+1/2}]$ .** Считается, что во всех точках по пространству, включая интерфейс между сетками, решение известно вплоть до временного слоя  $t^n = n\tau$ , где  $n$  - целое. Расчет компонент тензора напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{33}$  внутри рассматриваемого временного интервала не представляет

сложности, поскольку используется конечно-разностная аппроксимация уравнений первого порядка на вложенных шаблонах по времени, схематическое представление которых приведено на рис. 1.8:

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma_{11})_{i,J_0}^{n+(2k-1)/2K} - (\sigma_{11})_{i,J_0}^{n-(2k-1)/2K}}{(2k-1)\tau/2K} &= (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{i,J_0} D_1^C [u_1]_{i,J_0}^n - \hat{\lambda}_{i,J_0} D_3^C [u_3]_{i,J_0}^n, \\ \frac{(\sigma_{33})_{i,J_0}^{n+(2k-1)/2K} - (\sigma_{33})_{i,J_0}^{n-(2k-1)/2K}}{(2k-1)\tau/2K} &= \hat{\lambda}_{i,J_0} D_1^C [u_1]_{i,J_0}^n - (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{i,J_0} D_3^C [u_3]_{i,J_0}^n, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$(t^n, (x_1)_i, (x_3)_{J_0}) \in T_u^C \times \Omega_{\sigma_u}^C,$$

где  $k = 1, \dots, (K+1)/2$ ,  $K$  - коэффициент измельчения по времени.

Для расчета компоненты вектора скорости  $u_1$  необходим переход к уравнению второго порядка с последующей аппроксимацией на вложенных шаблонах по времени. Уравнение второго порядка для расчета  $u_1$  может быть получено исключением компонент тензора напряжений из первого уравнения системы (1.13) [16]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \quad (1.29)$$

Для аппроксимации пространственной части этого уравнения используется схема на сдвинутых (по пространству) сетках, которая может быть получена исключением компонент тензора напряжений из уравнений для стандартной схемы на сдвинутых сетках, как следствие, эта схема сохраняет дисперсионные свойства стандартной схемы на сдвинутых сетках, а ее локальное использование не вносит дополнительной ошибки в решение. Для аппроксимации производной по времени используются вло-

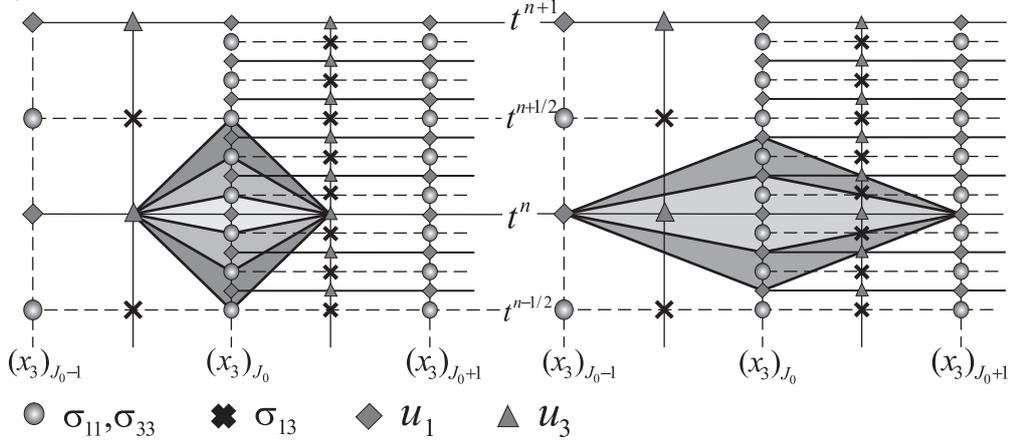


Рисунок 1.8 – Двумерное представление схемы на вложенных шаблонах для расчета решения со слоя  $t^n$  на слой  $t^{n+1/2}$ . Шаблоны для пересчета напряжений приведены слева, для пересчета скоростей - справа.

женные шаблоны (рис. 1.8):

$$\begin{aligned}
& \hat{\rho}_{i+1/2, J_0} \frac{(u_1)_{i+1/2, J_0}^{n+k/K} - 2(u_1)_{i+1/2, J_0}^n + (u_x)_{i+1/2, J_0}^{n-k/K}}{(k\tau/K)^2} = \\
& = \frac{(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{i+1, J_0} D_1^C [u_1]_{i+1, J_0}^n - (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{i, J_0} D_1^C [u_1]_{i, J_0}^n +}{h_1} + \\
& \quad + \frac{\hat{\lambda}_{i+1, J_0} D_3^C [u_3]_{i+1, J_0}^n - \hat{\lambda}_{i, J_0} D_3^C [u_3]_{i, J_0}^n +}{h_1} + \\
& \quad + \frac{\hat{\mu}_{i+1/2, J_0+1/2} D_1^C [u_3]_{i+1/2, J_0+1/2}^n - \hat{\mu}_{i+1/2, J_0-1/2} D_1^C [u_3]_{i+1/2, J_0-1/2}^n +}{h_3} + \\
& \quad + \frac{\hat{\mu}_{i+1/2, J_0+1/2} D_3^C [u_1]_{i+1/2, J_0+1/2}^n - \hat{\mu}_{i+1/2, J_0-1/2} D_3^C [u_1]_{i+1/2, J_0-1/2}^n}{h_3}, \\
& \quad (t^n, (x_1)_{i+1/2}, (x_3)_{J_0}) \in T_u^C \times \Omega_{u_1}^C,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

где  $k = 1, \dots, (K-1)/2$ ,  $K$  нечетное.

**Расчет решения во временном интервале  $t \in (t^{n+1/2}, t^{n+1}]$ .** Внутри этого интервала расчет компоненты вектора скорости  $u_1$  на интерфейсе  $j = J_0$  проводится с использованием аппроксимации уравнения первого порядка на вложенных шаблонах

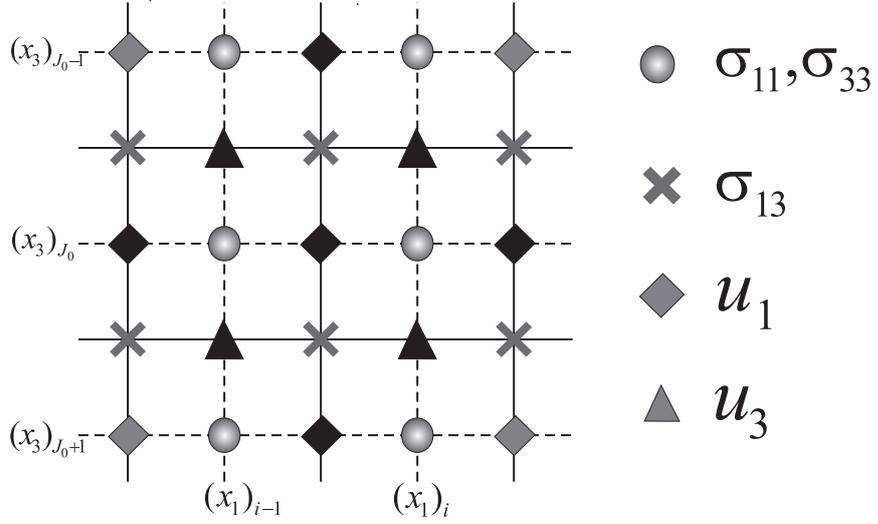


Рисунок 1.9 – Пространственный шаблон используемый для аппроксимации уравнения второго порядка, при измельчении шага по времени. Черным выделены точки, вовлеченные в вычисления.

по времени (рис. 1.10):

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_{i+1/2, J_0} &= \frac{(u_1)_{i+1/2, J_0}^{n+1/2+(2k-1)/2K} - (u_1)_{i+1/2, J_0}^{n+1/2-(2k-1)/2K}}{(2k-1)\tau/2K} = \\
 &= D_1^C [\sigma_{11}]_{i+1/2, J_0}^{n+1/2} - D_3^C [\sigma_{13}]_{i+1/2, J_0}^{n+1/2}, \\
 (t^{n+1/2}, (x_1)_{i+1/2}, (x_3)_{J_0}) &\in T_\sigma^C \times \Omega_{u_1}^C,
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

где  $k = 1, \dots, (K+1)/2$ .

Для расчета компонент  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{33}$  тензора напряжений необходим переход к уравнениям второго порядка, который выполняется исключением компонент вектора скорости из уравнений (1.13):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right), \\
 \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial t^2} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right).
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Как и в предыдущем случае, полученные уравнения аппроксимируются схемой на сдвинутых сетках по пространству и вложенных шаблонах по времени, что позволяет сохранить дисперсионные свойства. В результате схема, аппроксимирующая первое

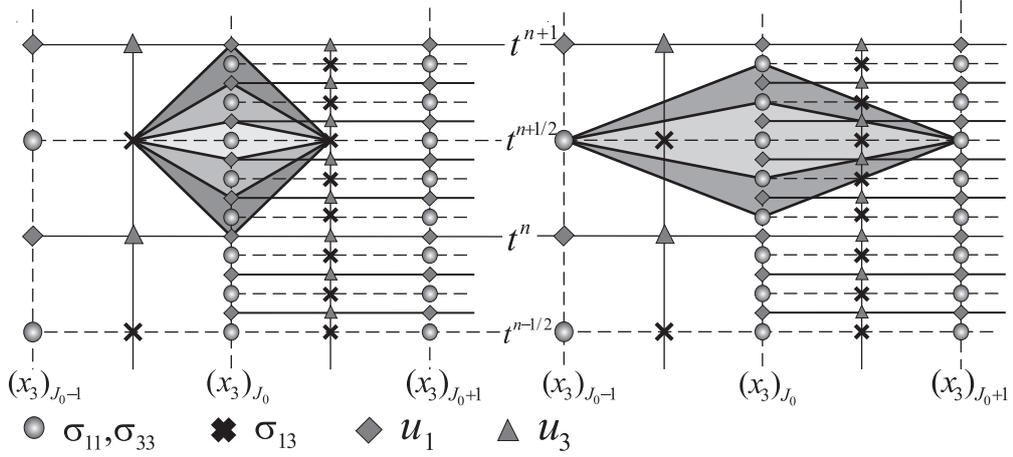


Рисунок 1.10 – Двумерное представление схемы на вложенных шаблонах для расчета решения со слоя  $t^{n+1/2}$  на слой  $t^{n+1}$ . Шаблоны для пересчета горизонтальной компоненты скорости приведены слева, для пересчета напряжений - справа.

из представленных, уравнений принимает вид (рис. 1.10):

$$\begin{aligned}
& \frac{(\sigma_{11})_{i,J_0}^{n+1/2+k/K} - 2(\sigma_{11})_{i,J_0}^{n+1/2} + (\sigma_{11})_{i,J_0}^{n+1/2-k/K}}{(k\tau/K)^2} = \\
& = (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{i,J_0} \frac{\hat{\rho}_{i+1/2,J_0}^{-1} D_1^C [\sigma_{11}]_{i+1/2,J_0}^{n+1/2} - \hat{\rho}_{i-1/2,J_0}^{-1} D_1^C [\sigma_{11}]_{i-1/2,J_0}^{n+1/2}}{h_1} + \\
& + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{i,J_0} \frac{\hat{\rho}_{i+1/2,J_0}^{-1} D_3^C [\sigma_{13}]_{i+1/2,J_0}^{n+1/2} - \hat{\rho}_{i-1/2,J_0}^{-1} D_3^C [\sigma_{13}]_{i-1/2,J_0}^{n+1/2}}{h_1} + \\
& + \hat{\lambda}_{i,J_0} \frac{\hat{\rho}_{i,J_0+1/2}^{-1} D_1^C [\sigma_{13}]_{i,J_0+1/2}^{n+1/2} - \hat{\rho}_{i,J_0-1/2}^{-1} D_1^C [\sigma_{13}]_{i,J_0-1/2}^{n+1/2}}{h_3} + \\
& + \hat{\lambda}_{i,J_0} \frac{\hat{\rho}_{i,J_0+1/2}^{-1} D_3^C [\sigma_{33}]_{i,J_0+1/2}^{n+1/2} - \hat{\rho}_{i,J_0-1/2}^{-1} D_3^C [\sigma_{33}]_{i,J_0-1/2}^{n+1/2}}{h_3}, \\
& (t^{n+1/2}, (x_1)_i, (x_3)_{J_0}) \in T_\sigma^C \times \Omega_{\sigma_{11}}^C,
\end{aligned} \tag{1.33}$$

где  $k = 1, \dots, (K - 1)/2$ . Уравнение для расчета  $\sigma_{zz}$  может быть получено из представленного выше соответствующей заменой коэффициентов и компонент волнового поля.

Следует уточнить, что и здесь все рассмотрения и построения приводятся применительно к схеме на сдвинутых сетках, аппроксимирующей систему уравнений динамической теории упругости, [373], [243], [28], [44], [252]. Однако предлагаемый подход - аппроксимация на вложенных шаблонах - применима для широкого класса задач и методов их численного решения, основным требованием, определяющим

его применимость, является решение линейных гиперболических уравнений с использованием явных по времени и локальных по пространству численных методов. Например, уравнения акустики и уравнения Максвелла, как для изотропных так и для анизотропных сред. Возможно также решение уравнений второго порядка, как скалярных, так и векторных. К численным методам, допускающим применение такого подхода относятся стандартные схемы на сдвинутых сетках, в частности схема Йи [385] для системы уравнений Максвелла в изотропной среде, схемы на частично сдвинутых сетках, такие как схема Лебедева [237], [36], в применении к уравнениям теории упругости [93], [245], [110] и уравнениям Максвелла [152] в анизотропной среде. Этот подход обобщается также на метод конечных объемов [389], [390], разрывный метод Галеркина [82] и др.

#### 1.4.2.2 Измельчение шага по пространству в двумерной постановке

При решении задачи 2 предполагается, что грубая по пространству сетка с шагами  $h_1$  и  $h_3$  введена при  $x_3 \leq J_1 h_3$ , а сетка с шагами  $h_1/L_1$  и  $h_3/L_3$  - при  $x_3 > J_1 h_3$ , индекс  $J_1$  предполагается полуцелый, числа  $L_1$  и  $L_3$  - нечетные положительные. Шаги сетки по времени - одинаковые и равные  $\tau/K$ . На схематическом представлении пространственной сетки в окрестности границы  $x_3 = J_1 h_3$  (рис. 1.11) видно, что важным аспектом построения схемы с измельчением шага по пространству является "разделение" сеток: грубая сетка используется в области  $x_3 \leq J_1 h_3$ , в то время как мелкая сетка вводится в области  $x_3 \geq (J_1 + \frac{1}{L_3})h_3$ . Такой сдвиг позволяет в последующем использовать одномерную интерполяцию поля вдоль границы раздела для перехода с одной сетки на другую. Аналогичная техника используется, например, в работах [233] и [84]. Итак, задача 2 сводится к построению формул расчета решения на двух линиях сетки  $x_3 = J_1 h_3$  (грубая сетка) и  $x_3 = (J_1 + \frac{1}{2L_3})h_3$  (мелкая сетка), в то время как в остальных точках решение может быть рассчитано с использованием схемы (1.27).

**Переход с грубой сетки на мелкую.** Для расчета решения на линии  $x_3 = (J_1 + \frac{1}{2L_3})h_3$  во всех узлах мелкой сетки по направлению  $x_1$  используется стандартная конечно-разностная схема на сдвинутых сетках (1.27) с мелким шагом по

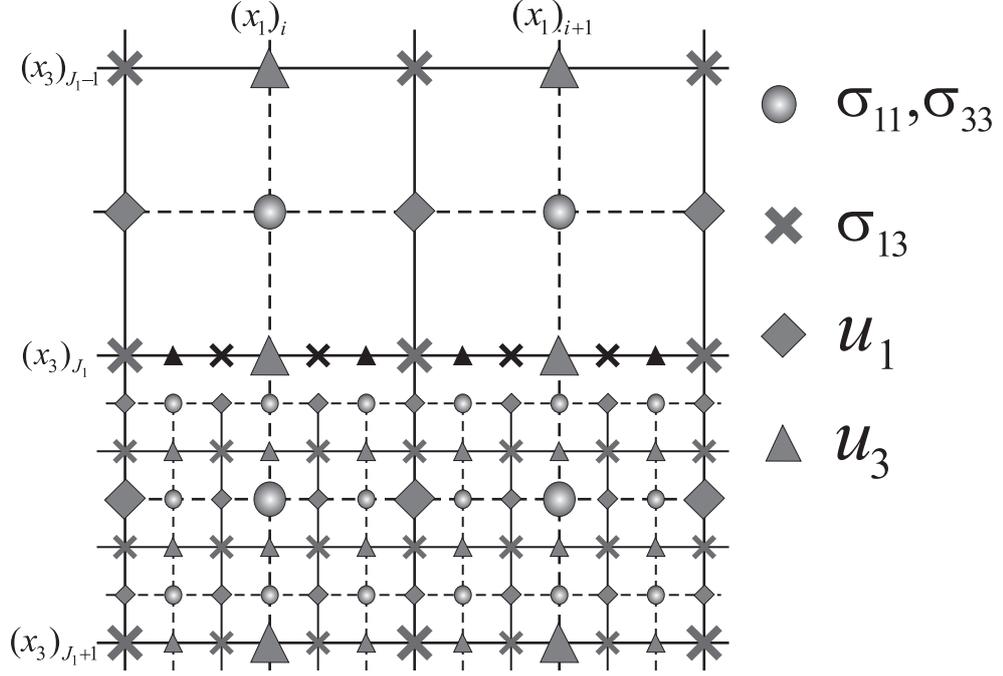


Рисунок 1.11 – Проекция сетки на плоскость  $(x_1, x_3)$  в окрестности границы пространственного измельчения сеток. Черным выделены переменные, используемые для расчета решения на мелкой сетке, но полученные интерполированием переменных с крупной сетки.

пространству [252]:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}} D_t^F [u_3]_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}}^N &= D_1^F [\tilde{\sigma}_{13}]_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}}^N + D_3^F [\sigma_{33}]_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}}^N, \\ (t^N, (x_1)_I, (x_3)_{J_1 + \frac{1}{2L_3}}) &\in T_\sigma^F \times \Omega_{u_3}^F, \\ D_t^F [\sigma_{11}]_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}}^N &= (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}} D_1^F [u_1]_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}}^N + \hat{\lambda}_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}} D_3^F [\tilde{u}_3]_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}}^N, \\ D_t^F [\sigma_{33}]_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}}^N &= \hat{\lambda}_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}} D_1^F [u_1]_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}}^N + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}} D_3^F [\tilde{u}_3]_{I, J_1 + \frac{1}{2L_3}}^N, \\ (t^N, (x_1)_I, (x_3)_{J_1 + \frac{1}{2L_3}}) &\in T_u^F \times \Omega_{\sigma_{11}}^F. \end{aligned}$$

Волнистая линия над переменными обозначает, что для их вычисления используется пролонгация решения (от английского *prolongation*) на пространство сеточных функций, определенных на мелкой сетке, основанное на быстром преобразовании Фурье (БПФ) [178], [298], [1]. В силу сдвига сеток на половину шага мелкой сетки в направлении  $x_3$ , достаточно ограничиться одномерной процедурой пролонгации по касательному направлению - вдоль линии  $x_3 = J_1 h_3$  (рис. 1.11). Отличие используемой в алгоритме процедуры пролонгации решения от интерполяции состоит в том,

что высокочастотная часть спектра исключается из рассмотрения, поэтому решение в узлах интерполяции не сохраняется. С одной стороны, такой подход позволяет уменьшить объем данных, которые передаются с одной сетки на другую [28], [333]. С другой стороны, исключение высоких частот служит низкочастотным фильтром, сглаживающим решение. Обоснованность такого сглаживания, правила выбора частотного диапазона и его влияние на решение обсуждается в работе [252]. Следует заметить, что необходимость сглаживания решения характерна и для классических многосеточных методов [345], применяемых для решения эллиптических и параболических задач.

**Переход с мелкой сетки на грубую.** Для расчета решения на линии  $x_3 = J_1 h_3$  используется стандартная схема на сдвинутых сетках (1.27) с грубым шагом по пространству:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{i,J_1} D_t^F [u_3]_{i,J_1}^N &= D_1^C [\sigma_{13}]_{i,J_1}^N + D_3^C [\check{\sigma}_{33}]_{i,J_1}^N, \\ (t^N, (x_1)_i, (x_3)_{J_1}) &\in T_\sigma^F \times \Omega_{u_3}^C, \\ D_t^F [\sigma_{13}]_{i+1/2,J_1}^N &= \hat{\mu}_{i+1/2,J_1} \left( D_1^C [u_3]_{i+1/2,J_1}^N + D_3 [\check{u}_1]_{i+1/2,J_1}^N \right), \\ (t^N, (x_1)_i, (x_3)_{J_1}) &\in T_u^F \times \Omega_{\sigma_{13}}^C. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Здесь символ  $\check{\phantom{x}}$  над переменными используется для того, чтобы подчеркнуть, что они могут отличаться от соответствующих компонент сеточных функций, определенных на мелкой сетке. В силу того что коэффициенты измельчения - нечетные целые числа, для пространственных сеток верны вложения  $\Omega_{\sigma_{33}}^C \subseteq \Omega_{\sigma_{33}}^F$  и  $\Omega_{u_1}^C \subseteq \Omega_{u_1}^F$  и каждой компоненте сеточной функций  $(\check{\sigma}_{33})_{i+1/2,J_1}$  соответствует компонента сеточной функции  $(\sigma_{33})_{i+1/2,J_1}$ , вычисляемая на мелкой сетке с использованием схемы (1.27). Поэтому самым простым алгоритмом перехода с мелкой сетки на грубую является инъективное сужение (от английского restriction)  $(\check{\sigma}_{33})_{i+1/2,J_1} = (\sigma_{33})_{i+1/2,J_1}$ . Однако этот подход может приводить к неустойчивости численного решения [345], [233], [103], [105]. В предлагаемом алгоритме [252] сужение решения основано на применении низкочастотных фильтров на основе БПФ.

### 1.4.3 Измельчение сеток метода в трехмерной постановке

Рассматривается система уравнений динамической теории упругости, записанная в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}, \\
\rho \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}, \\
\rho \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2},
\end{aligned} \tag{1.35}$$

где  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  - вектор скорости,  $\sigma_{ij}$  - компоненты тензора напряжений  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\rho$  - плотность,  $\lambda$  и  $\mu$  - параметры Ламэ.

Для аппроксимации этой системы уравнений применяется стандартная схема на сдвинутых сетках [373] с использованием двух разных сеток. Аналогично двумерной постановке, вводятся грубая (1.14) и мелкая (1.16) сетки по времени с шагами  $\tau$  и  $\tau/K$  соответственно, где коэффициент измельчения  $K$  - нечетное число. Грубая и мелкая сетки по пространству отличаются от введенных выше (1.15) и (1.17) наличием третьего пространственного направления:

$$\Omega^C = \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) | I_m = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots; m = 1, 2, 3\}, \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^F &= \{((x_1)_{I_1+l_1/L_1}, (x_2)_{I_2+l_2/L_2}, (x_3)_{I_3+l_3/L_3}) | \\
I_m &= 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots; l_m = 1, \dots, L_m; m = 1, 2, 3\}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Вводятся подсетки, в узлах которых определены различные компоненты вектора скорости и тензора напряжений. В частности, разбиение для грубой сетки при-

нимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Omega_{u_1}^C &= \{((x_1)_{i_1+1/2}, (x_2)_{i_2}, (x_3)_{i_3}) | i_m \in \mathbb{Z}; m = 1, 2, 3\}, \\
\Omega_{u_2}^C &= \{((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2+1/2}, (x_3)_{i_3}) | i_m \in \mathbb{Z}; m = 1, 2, 3\}, \\
\Omega_{u_3}^C &= \{((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2}, (x_3)_{i_3+1/2}) | i_m \in \mathbb{Z}; m = 1, 2, 3\}, \\
\Omega_{\sigma_{11}}^C &= \{((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2}, (x_3)_{i_3}) | i_m \in \mathbb{Z}; m = 1, 2, 3\}, \\
\Omega_{\sigma_{23}}^C &= \{((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2+1/2}, (x_3)_{i_3+1/2}) | i_m \in \mathbb{Z}; m = 1, 2, 3\}, \\
\Omega_{\sigma_{13}}^C &= \{((x_1)_{i_1+1/2}, (x_2)_{i_2}, (x_3)_{i_3+1/2}) | i_m \in \mathbb{Z}; m = 1, 2, 3\}, \\
\Omega_{\sigma_{12}}^C &= \{((x_1)_{i_1+1/2}, (x_2)_{i_2+1/2}, (x_3)_{i_3}) | i_m \in \mathbb{Z}; m = 1, 2, 3\}.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Аналогичное представление верно для мелкой сетки.

На построенных сетках вводятся конечно-разностные операторы по следующим правилам:

на грубой сетке

$$\begin{aligned}
D_t^C [F]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \frac{F_{I_1, I_2, I_3}^{N+1/2} - F_{I_1, I_2, I_3}^{N-1/2}}{\tau} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{I_1, I_2, I_3}^N + O(\tau^2), \\
(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in T^C \times \Omega^C,
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}
D_1^C [F]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \frac{F_{I_1+1/2, I_2, I_3}^N - F_{I_1-1/2, I_2, I_3}^N}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{I_1, I_2, I_3}^N + O(h_1^2), \\
D_2^C [F]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \frac{F_{I_1, I_2+1/2, I_3}^N - F_{I_1, I_2-1/2, I_3}^N}{h_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{I_1, I_2, I_3}^N + O(h_2^2), \\
D_3^C [F]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \frac{F_{I_1, I_2, I_3+1/2}^N - F_{I_1, I_2, I_3-1/2}^N}{h_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{I_1, I_2, I_3}^N + O(h_3^2), \\
(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in T^C \times \Omega^C,
\end{aligned} \tag{1.40}$$

где  $f$  - достаточно гладкая функция,  $F$  - соответствующая ей сеточная функция;

на мелкой сетке

$$\begin{aligned}
D_t^F [F]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \frac{F_{I_1, I_2, I_3}^{N+\frac{1}{2K}} - F_{I_1, I_2, I_3}^{N-\frac{1}{2K}}}{\tau} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{I_1, I_2, I_3}^N + O(\tau^2), \\
(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in T^F \times \Omega^F,
\end{aligned} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}
D_1^F [F]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \frac{F_{I_1 + \frac{1}{2L_1}, I_2, I_3}^N - F_{I_1 - \frac{1}{2L_1}, I_2, I_3}^N}{h_1/L_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{I_1, I_2, I_3}^N + O(h_1^2), \\
D_2^F [F]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \frac{F_{I_1, I_2 + \frac{1}{2L_2}, I_3}^N - F_{I_1, I_2 - \frac{1}{2L_2}, I_3}^N}{h_2/L_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{I_1, I_2, I_3}^N + O(h_2^2), \\
D_3^F [F]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \frac{F_{I_1, I_2, I_3 + \frac{1}{2L_3}}^N - F_{I_1, I_2, I_3 - \frac{1}{2L_3}}^N}{h_3/L_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{I_1, I_2, I_3}^N + O(h_3^2), \\
(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in T^F \times \Omega^F.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Используя введенные обозначения, стандартная схема на сдвинутых сетках, аппроксимирующая систему уравнений динамической теории упругости, записывается в виде (пример для грубой сетки по пространству и времени):

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3} D_t^C [u_1^C]_{I_1, I_2, I_3}^N &= D_1^C [\sigma_{11}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + D_2^C [\sigma_{12}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + D_3^C [\sigma_{13}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N, \\
(t, x_1, x_2, x_3) &\in T_\sigma^C \times \Omega_{u_1}^C, \\
\hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3} D_t^C [u_2^C]_{I_1, I_2, I_3}^N &= D_1^C [\sigma_{12}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + D_2^C [\sigma_{22}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + D_3^C [\sigma_{23}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N, \\
(t, x_1, x_2, x_3) &\in T_\sigma^C \times \Omega_{u_2}^C, \\
\hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3} D_t^C [u_3^C]_{I_1, I_2, I_3}^N &= D_1^C [\sigma_{13}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + D_2^C [\sigma_{23}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + D_3^C [\sigma_{33}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N, \\
(t, x_1, x_2, x_3) &\in T_\sigma^C \times \Omega_{u_3}^C, \\
D_t^C [\sigma_{11}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N &= (\hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3} + 2\hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3}) D_1^C [u_1^C]_{I_1, I_2, I_3}^N \\
&+ \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3} D_2^C [u_2^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3} D_3^C [u_3^C]_{I_1, I_2, I_3}^N, \\
(t, x_1, x_2, x_3) &\in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{11}}^C, \\
D_t^C [\sigma_{22}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3} D_1^C [u_1^C]_{I_1, I_2, I_3}^N \\
&+ (\hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3} + 2\hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3}) D_2^C [u_2^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3} D_3^C [u_3^C]_{I_1, I_2, I_3}^N, \\
(t, x_1, x_2, x_3) &\in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{22}}^C, \\
D_t^C [\sigma_{33}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3} D_1^C [u_1^C]_{I_1, I_2, I_3}^N \\
&+ \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3} D_2^C [u_2^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + (\hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3} + 2\hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3}) D_3^C [u_3^C]_{I_1, I_2, I_3}^N, \\
(t, x_1, x_2, x_3) &\in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{33}}^C, \\
D_t^C [\sigma_{23}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3} (D_2^C [u_3^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + D_3^C [u_2^C]_{I_1, I_2, I_3}^N), \\
(t, x_1, x_2, x_3) &\in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{23}}^C, \\
D_t^C [\sigma_{13}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3} (D_3^C [u_1^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + D_1^C [u_3^C]_{I_1, I_2, I_3}^N), \\
(t, x_1, x_2, x_3) &\in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{13}}^C, \\
D_t^C [\sigma_{12}^C]_{I_1, I_2, I_3}^N &= \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3} (D_1^C [u_2^C]_{I_1, I_2, I_3}^N + D_2^C [u_1^C]_{I_1, I_2, I_3}^N), \\
(t, x_1, x_2, x_3) &\in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{12}}^C,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Схема на мелкой сетке может быть получена из приведенной выше заменой верхнего индекса  $C$  в обозначениях переменных, операторов и точек сетки на  $F$ . Аналогично для схемы в переходной зоне - замена верхнего индекса  $C$  в обозначениях операторов, аппроксимирующих производные по времени, и в обозначениях сеток по времени на индекс  $F$ , а в переменных - на индекс  $T$ .

Постановка задачи пространственно-временного измельчения сеток, как и способ ее решения, аналогичны приведенным в предыдущем разделе, поэтому ниже приводятся лишь конечные формулы расчета решения при измельчении шага сетки по времени на границе  $x_3 = (x_3)_{I_3^0}$ , где  $I_3^0$  - целое число, и расчета решения при пространственном измельчении сетки на границе  $x_3 = (x_3)_{I_3^1}$ , где  $I_3^1$  - полуцелое.

#### 1.4.3.1 Измельчение шага по времени

На границе раздела сеток  $x_3 = (x_3)_{I_3^0}$ , где  $I_3^0$  - целое число, определены следующие компоненты волнового поля (рис. 1.1):  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $u_1$  и  $u_2$ . Для полноты представления алгоритма ниже приведены формулы расчета решения на интерфейсе с использованием техники вложенных шаблонов.

**Расчет решения во временном интервале  $t \in (t^n, t^{n+1/2}]$ .** При пересчете решения с целого на полуцелый слой по времени компоненты тензора напряжений вычисляются на основе аппроксимации уравнений первого порядка, компоненты век-

тора скорости - с использованием аппроксимации уравнений второго порядка.

$$\begin{aligned}
& \frac{(\sigma_{11})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+(2k-1)/2K} - (\sigma_{11})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n-(2k-1)/2K}}{(2k-1)\tau/2K} = (\hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0} + 2\hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0})D_1^C[u_1]_{I_1, I_2, I_3^0}^n \\
& \quad + \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0}D_3^C[u_3]_{I_1, I_2, I_3^0}^n + \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0}D_3^C[u_3]_{I_1, I_2, I_3^0}^n, \\
& \frac{(\sigma_{22})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+(2k-1)/2K} - (\sigma_{22})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n-(2k-1)/2K}}{(2k-1)\tau/2K} = \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0}D_1^C[u_1]_{I_1, I_2, I_3^0}^n \\
& \quad + (\hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0} + 2\hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0})D_3^C[u_3]_{I_1, I_2, I_3^0}^n + \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0}D_3^C[u_3]_{I_1, I_2, I_3^0}^n, \\
& \frac{(\sigma_{33})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+(2k-1)/2K} - (\sigma_{33})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n-(2k-1)/2K}}{(2k-1)\tau/2K} = \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0}D_1^C[u_1]_{I_1, I_2, I_3^0}^n \\
& \quad + \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0}D_3^C[u_3]_{I_1, I_2, I_3^0}^n + (\hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0} + 2\hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0})D_3^C[u_3]_{I_1, I_2, I_3^0}^n, \\
& (t^n, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^0}) \in T_u^C \times \Omega_{\sigma u}^C, \\
& \frac{(\sigma_{12})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+(2k-1)/2K} - (\sigma_{12})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n-(2k-1)/2K}}{(2k-1)\tau/2K} = \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0} \left( D_1^C[u_2]_{I_1, I_2, I_3^0}^n + D_1^C[u_2]_{I_1, I_2, I_3^0}^n \right), \\
& (t^n, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^0}) \in T_u^C \times \Omega_{\sigma_{12}}^C,
\end{aligned} \tag{1.44}$$

где  $k = 1, \dots, (K+1)/2$ ,  $K$  - коэффициент измельчения по времени. Верхние индексы в обозначениях переменных в этом уравнении опускаются, поскольку часть используемых переменных определена на грубой сетке по пространству и времени, и должна обозначаться индексом  $C$ , а часть определена на грубой сетке по пространству и мелкой по времени, и должна обозначаться  $T$ . При этом действие операторов, аппроксимирующих пространственные производные, определены на сеточных функциях как одного множества, так и второго.

Для расчета компонент вектора скорости  $u_1$  и  $u_2$  используются уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \\
\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right),
\end{aligned} \tag{1.45}$$

которые аппроксимируются по правилам:

$$\begin{aligned}
& \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3^0} \frac{(u_1)_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+k/K} - 2(u_1)_{I_1, I_2, I_3^0}^n + (u_1)_{I_1, I_2, I_3^0}^{n-k/K}}{(k\tau/K)^2} = \\
& = \frac{(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{I_1+1/2, I_2, I_3^0} D_1^C [u_1]_{I_1+1/2, I_2, I_3^0}^n - (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{I_1-1/2, I_2, I_3^0} D_1^C [u_1]_{I_1-1/2, I_2, I_3^0}^n}{h_1} + \\
& + \frac{\hat{\lambda}_{I_1+1/2, I_2, I_3^0} D_2^C [u_2]_{I_1+1/2, I_2, I_3^0}^n - \hat{\lambda}_{I_1-1/2, I_2, I_3^0} D_2^C [u_2]_{I_1-1/2, I_2, I_3^0}^n}{h_1} + \\
& + \frac{\hat{\lambda}_{I_1+1/2, I_2, I_3^0} D_3^C [u_3]_{I_1+1/2, I_2, I_3^0}^n - \hat{\lambda}_{I_1-1/2, I_2, I_3^0} D_3^C [u_3]_{I_1-1/2, I_2, I_3^0}^n}{h_1} + \\
& + \frac{\hat{\mu}_{I_1, I_2+1/2, I_3^0} D_1^C [u_2]_{I_1, I_2+1/2, I_3^0}^n - \hat{\mu}_{I_1, I_2-1/2, I_3^0} D_1^C [u_2]_{I_1, I_2-1/2, I_3^0}^n}{h_2} + \\
& + \frac{\hat{\mu}_{I_1, I_2+1/2, I_3^0} D_2^C [u_1]_{I_1, I_2+1/2, I_3^0}^n - \hat{\mu}_{I_1, I_2-1/2, I_3^0} D_2^C [u_1]_{I_1, I_2-1/2, I_3^0}^n}{h_2} + \\
& + \frac{\hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0+1/2} D_3^C [u_1]_{I_1, I_2, I_3^0+1/2}^n - \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0-1/2} D_3^C [u_1]_{I_1, I_2, I_3^0-1/2}^n}{h_3} + \\
& + \frac{\hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0+1/2} D_1^C [u_3]_{I_1, I_2, I_3^0+1/2}^n - \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0-1/2} D_1^C [u_3]_{I_1, I_2, I_3^0-1/2}^n}{h_3} \\
& (t^n, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^0}) \in T_u^C \times \Omega_{u_1}^C,
\end{aligned} \tag{1.46}$$

где  $k = 1, \dots, (K-1)/2$ ,  $K$  - нечетное. Второе уравнение аппроксимируется аналогично.

**Расчет решения во временном интервале  $t \in (t^{n+1/2}, t^{n+1}]$ .** Внутри этого интервала расчет компонент вектора скорости на интерфейсе  $I_3 = I_3^0$  проводится с использованием аппроксимации уравнения первого порядка на вложенных шаблонах по времени:

$$\begin{aligned}
& \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3^0} \frac{(u_1)_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2+(2k-1)/2K} - (u_1)_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2-(2k-1)/2K}}{(2k-1)\tau/2K} = \\
& = D_1^C [\sigma_{11}]_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2} + D_2^C [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2} + D_3^C [\sigma_{13}]_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2}, \\
& (t^{n+1/2}, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^0}) \in T_\sigma^C \times \Omega_{u_1}^C,
\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3^0} \frac{(u_2)_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2+(2k-1)/2K} - (u_2)_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2-(2k-1)/2K}}{(2k-1)\tau/2K} = \\
& = D_1^C [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2} + D_2^C [\sigma_{22}]_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2} + D_3^C [\sigma_{23}]_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2}, \\
& (t^{n+1/2}, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^0}) \in T_\sigma^C \times \Omega_{u_2}^C,
\end{aligned}$$

где  $k = 1, \dots, (K + 1)/2$  [252].

Для расчета компонент  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  и  $\sigma_{12}$  тензора напряжений используются уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\rho} \sum_{M=1}^3 \frac{\partial \sigma_{1M}}{\partial x_M} \right) + \\ &+ \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{\rho} \sum_{M=1}^3 \frac{\partial \sigma_{2M}}{\partial x_M} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{\rho} \sum_{M=1}^3 \frac{\partial \sigma_{3M}}{\partial x_M} \right), \\ \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\rho} \sum_{M=1}^3 \frac{\partial \sigma_{2M}}{\partial x_M} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{\rho} \sum_{M=1}^3 \frac{\partial \sigma_{1M}}{\partial x_M} \right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Уравнения на  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  получаются из уравнения (1.48) соответствующей заменой коэффициентов  $\lambda$  на  $\lambda + 2\mu$  и наоборот.

Аппроксимация приведенных уравнений строится с использованием вложенных шаблонов по времени:

$$\begin{aligned} &\frac{(\sigma_{11})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2+k/K} - 2(\sigma_{11})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2} + (\sigma_{11})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2-k/K}}{(k\tau/K)^2} = \\ &= (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})_{I_1, I_2, I_3^0} \sum_{M=1}^3 \frac{\hat{\rho}_{I_1+1/2, I_2, I_3^0}^{-1} D_M^C [\sigma_{1M}]_{I_1+1/2, I_2, I_3^0}^{n+1/2} - \hat{\rho}_{I_1-1/2, I_2, I_3^0}^{-1} D_M^C [\sigma_{1M}]_{I_1-1/2, I_2, I_3^0}^{n+1/2}}{h_1} + \\ &+ \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0} \sum_{M=1}^3 \frac{\hat{\rho}_{I_1, I_2+1/2, I_3^0}^{-1} D_M^C [\sigma_{2M}]_{I_1, I_2+1/2, I_3^0}^{n+1/2} - \hat{\rho}_{I_1, I_2-1/2, I_3^0}^{-1} D_M^C [\sigma_{2M}]_{I_1, I_2-1/2, I_3^0}^{n+1/2}}{h_2} + \\ &+ \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^0} \sum_{M=1}^3 \frac{\hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3^0+1/2}^{-1} D_M^C [\sigma_{3M}]_{I_1, I_2, I_3^0+1/2}^{n+1/2} - \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3^0-1/2}^{-1} D_M^C [\sigma_{3M}]_{I_1, I_2, I_3^0-1/2}^{n+1/2}}{h_3} + \\ &\quad (t^{n+1/2}, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^0}) \in T_\sigma^C \times \Omega_{\sigma_{11}}^C, \\ &\frac{(\sigma_{12})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2+k/K} - 2(\sigma_{12})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2} + (\sigma_{12})_{I_1, I_2, I_3^0}^{n+1/2-k/K}}{(k\tau/K)^2} = \\ &= \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0} \sum_{M=1}^3 \frac{\hat{\rho}_{I_1+1/2, I_2, I_3^0}^{-1} D_M^C [\sigma_{2M}]_{I_1+1/2, I_2, I_3^0}^{n+1/2} - \hat{\rho}_{I_1-1/2, I_2, I_3^0}^{-1} D_M^C [\sigma_{2M}]_{I_1-1/2, I_2, I_3^0}^{n+1/2}}{h_1} + \\ &+ \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^0} \sum_{M=1}^3 \frac{\hat{\rho}_{I_1, I_2+1/2, I_3^0}^{-1} D_M^C [\sigma_{1M}]_{I_1, I_2+1/2, I_3^0}^{n+1/2} - \hat{\rho}_{I_1, I_2-1/2, I_3^0}^{-1} D_M^C [\sigma_{1M}]_{I_1, I_2-1/2, I_3^0}^{n+1/2}}{h_2} + \\ &\quad (t^{n+1/2}, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^0}) \in T_\sigma^C \times \Omega_{\sigma_{12}}^C, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где  $k = 1, \dots, (K - 1)/2$ . Уравнения для расчета  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  могут быть получены из представленного выше соответствующей заменой коэффициентов и компонент вол-

нового поля.

### 1.4.3.2 Измельчение шага по пространству

Пусть грубая сетка по пространству с шагами  $h_1, h_2, h_3$  введена при  $x_3 \leq I_3^1 h_3$ , а сетка с шагами  $h_M/L_M$ ,  $M = 1, 2, 3$  - при  $x_3 > I_3^1 h_3$ , индекс  $I_3^1$  - полуцелый, коэффициенты измельчения  $L_M$  - нечетные положительные, шаги сетки по времени - одинаковые равные  $\tau/K$ . Решение на линии  $x_3 \leq I_3^1 h_3$  вычисляется по формулам, используемым на грубой сетке, но с процедурой сужения решения на основе сглаживания; решение на линии  $x_3 = (I_3^1 + \frac{1}{2L_3})h_3$  рассчитывается по формулам, используемым на мелкой сетке, с двумерной интерполяцией решения.

**Переход с грубой сетки на мелкую.** Для расчета решения на линии  $x_3 = (I_3^1 + \frac{1}{2L_3})h_3$  используется стандартная конечно-разностная схема на сдвинутых сетках (1.43) с мелким шагом по пространству:

$$\begin{aligned}
& \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N D_t^F [u_1]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N = D_1^F [\sigma_{11}]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N + \\
& \quad + D_2^F [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N + D_3^F [\tilde{\sigma}_{13}]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N, \\
& (t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}) \in T_\sigma^F \times \Omega_{u_1}^F, \\
& \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N D_t^F [u_2]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N = D_1^F [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N + \\
& \quad + D_2^F [\sigma_{22}]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N + D_3^F [\tilde{\sigma}_{23}]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N, \\
& (t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}) \in T_\sigma^F \times \Omega_{u_2}^F, \\
& D_t^F [\sigma_{11}]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N = \left( \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}} + 2\hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}} \right) D_1^F [u_1]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N + \\
& \quad + \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}} D_2^F [u_2]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N + \hat{\lambda}_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}} D_3^F [\tilde{u}_3]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N, \\
& (t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}) \in T_u^F \times \Omega_{\sigma_{11}}^F, \\
& D_t^F [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N = \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N \left( D_1^F [u_2]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N + D_2^F [u_1]_{I_1, I_2, I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}^N \right), \\
& (t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^1 + \frac{1}{2L_3}}) \in T_u^F \times \Omega_{\sigma_{12}}^F.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Волнистая линия над переменными означает, что для их вычисления используется интерполяция решения на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ) [178], [298], [1]. Уравнения для вычисления  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  могут быть получены из уравнения для

расчета  $\sigma_{11}$  соответствующей заменой коэффициентов.

**Переход с мелкой сетки на грубую.** Для расчета решения на линии  $x_3 = I_3^1 h_3$  используется стандартная схема на сдвинутых сетках (1.27) с грубым шагом по пространству:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3^1} D_t^F [u_3]_{I_1, I_2, I_3^1}^N &= D_1^C [\sigma_{13}]_{I_1, I_2, I_3^1}^N + D_2^C [\sigma_{23}]_{I_1, I_2, I_3^1}^N + D_3^C [\check{\sigma}_{33}]_{I_1, I_2, I_3^1}^N, \\
(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^1}) &\in T_\sigma^F \times \Omega_{u_3}^F, \\
D_t^F [\sigma_{13}]_{I_1, I_2, I_3^1}^N &= \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^1} \left( D_1^C [u_3]_{I_1, I_2, I_3^1}^N + D_3 [\check{u}_1]_{I_1, I_2, I_3^1}^N \right), \\
(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^1}) &\in T_u^F \times \Omega_{\sigma_{13}}^F, \\
D_t^F [\sigma_{23}]_{I_1, I_2, I_3^1}^N &= \hat{\mu}_{I_1, I_2, I_3^1} \left( D_2^C [u_3]_{I_1, I_2, I_3^1}^N + D_3 [\check{u}_2]_{I_1, I_2, I_3^1}^N \right), \\
(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3^1}) &\in T_u^F \times \Omega_{\sigma_{23}}^F,
\end{aligned} \tag{1.51}$$

где символ  $\check{\cdot}$  над переменными указывает что они получены с использованием низкочастотных фильтров на основе БПФ.

## 1.5 Анализ разработанного метода

### 1.5.1 Анализ коэффициентов отражения от границы раздела сеток

Исследование нефизичных коэффициентов отражения от границы раздела сеток предполагает явное построение этих коэффициентов с дальнейшим выполнением асимптотического анализа для определения скорости сходимости, а также численного анализа для определения величины этих отражений для характерных дискретизаций. Особое внимание при этом уделяется отдельно измельчению по времени и отдельно по пространству, поскольку, как показано в работе [243], одновременное измельчение всегда неустойчиво и не представляет практического интереса.

Рассматривается конечно-разностная схема (1.9) с условиями согласования на границе раздела сеток (1.11) и (1.12). Решение вне интерфейса, то есть при  $j < 0$  и

$j > 0$ , может быть представлено в виде плоской волны:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(t, x) \\ u(t, x) \end{pmatrix} &= \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kx)} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\omega t + kx)}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где  $\omega$  - временная частота, а  $k$  - волновое число (пространственная частота). При этом для решения на грубой сетке частота и волновое число связаны дисперсионным соотношением:

$$\frac{\sin \omega \tau / 2}{\tau / 2} = \pm \frac{\sin k_c h / 2}{h / 2},$$

следовательно волновое число имеет явное представление:

$$k_c = \pm \frac{2}{h} \sin^{-1} \left( \frac{h}{\tau} \sin(\omega \tau / 2) \right).$$

Детали дисперсионного анализа конечно-разностных схем приведены в работах [142, 144, 143, 243]. Необходимо формально зафиксировать ветвь квадратного корня в выражении для  $k_c$  для определения направления распространения волны, однако в представлении (1.52) этот знак уже зафиксирован и входит явно в показатель экспоненты. Следовательно, чтобы представление (1.52) стало решением системы (1.9), в выражении для  $k_c$  необходимо выбрать знак плюс.

Для решения на мелкой сетке связь частоты и волнового числа задается соотношением:

$$k_f = \frac{2L}{h} \sin^{-1} \left( \frac{K h}{L \tau} \sin \left[ \frac{\omega \tau}{2K} \right] \right).$$

В силу линейности изучаемого волнового процесса можно предположить, что временная частота одинакова в обоих случаях. Тогда, как показано в работах [143], [144], [145], для решения на грубой сетке выполняется соотношение:

$$k_c \left( \omega + \frac{4m\pi}{\tau} \right) = k_c(\omega)$$

для любого целого  $m$ . Однако для решения на мелкой сетке моды с номерами  $m =$

$0, 1, \dots, K-1$  являются независимыми. Для их учета вводится следующее обозначение:

$$k_f^q(\omega) = k_f \left( \omega + \frac{4\pi q}{\tau} + \frac{4K\pi m}{\tau} \right) = k_f(\omega_q),$$

где  $q = 0, \dots, K-1$ , а  $m$  - целое.

Описание исследования коэффициентов нефизичных отражений приводится на примере прохождения волны из области с грубой сеткой в область с мелкой сеткой. При этом результаты будут верны и для обратной ситуации.

Рассматривается плоская волна, распространяющаяся слева направо в области с грубой сеткой. После прохождения через границу раздела сеток она распадается на несколько независимых мод: отраженная волна с коэффициентом отражения  $R$ , истинная проходящая волна с волновым числом  $k_f^0$  и коэффициентом прохождения  $T^0$  и  $K-1$  артефактных проходящих волн с волновыми числами  $k^q$ ,  $q = 1, \dots, K-1$  и коэффициентами прохождения  $T^q$ . Тогда решение в области  $j < 0$  представляется в виде линейной комбинации падающей и отраженной волн:

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_c x)} + R \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_c x)},$$

а в области  $j > 0$  - в виде линейной комбинации проходящих волн:

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \sum_{q=0}^{K-1} T^q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i(\omega_p t - k_f^q x)}.$$

Для определения решения непосредственно на границе  $j = 0$  необходимо ввести в рассмотрение дополнительные переменные  $p_0^q$ :

$$p(t, 0) = \sum_{q=1}^{K-1} p_0^q e^{i\omega_q t}.$$

Подставив приведенные выше выражения в конечно-разностную схему (1.9), (1.11), (1.12) и исключив дополнительные переменные  $p_0^q$ , можно получить систему линейных алгебраических уравнений, связывающих коэффициенты отражения и прохож-

дения,

$$\begin{aligned}
 R - \sum_{q=0}^{K-1} T^q &= -1, \\
 \sum_{q=0}^{K-1} T^q \left( \frac{2iKh}{(2r+1)\tau} \sin \left( \omega_q \tau \frac{2r+1}{2K} \right) + e^{-ik_f^q h/2} \right) + \\
 &+ Re^{-ik_ch/2} = e^{ik_ch/2}, \\
 r &= 0, \dots, (K-1)/2 \\
 \sum_{q=0}^{K-1} T^q \left( \left[ \frac{2iKh}{r\tau} \right]^2 \sin^2 \left( \omega_q \tau \frac{r}{2K} \right) - e^{-ik_f^q h} + 2 \right) - \\
 &- Re^{-ik_ch} = e^{ik_ch} \\
 r &= 1, \dots, (K-1)/2.
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Эта система замкнута и может быть решена. Однако, прежде чем переходить к построению этого решения, следует провести асимптотический анализ и установить скорость сходимости коэффициентов отражения/прохождения для конечно-разностной постановки к коэффициентам для дифференциальной задачи, тем более что для этого не требуется явного знания решения.

### 1.5.1.1 Асимптотический анализ

Такой анализ позволяет оценить скорость сходимости численного решения к аналитическому, в рассматриваемом случае - коэффициентов отражения/прохождения при стремлении шага сетки к нулю. Система уравнений (1.53) включает два параметра (шага сетки): шаг по времени  $\tau$  и шаг по пространству  $h$ . Поэтому формально необходимо рассматривать решение при стремлении этих параметров к точке  $(0, 0)$ . Однако в силу линейности задачи и выбора схемы второго порядка аппроксимации как по времени, так и по пространству, рассмотрение достаточно ограничить случаем линейной зависимости между шагами, для чего в рассмотрение вводится число Куранта:

$$\alpha = \frac{\tau}{h} \in [0, 1]$$

и система (1.53) переписывается в компактной форме:

$$A(\tau)v(\tau) = b(\tau), \quad (1.54)$$

где  $A$  - матрица системы,  $v$  - вектор решения и  $b$  - вектор правых частей зависят от шага сетки. Для исследования поведения решения при  $\tau \rightarrow 0$  не требуется строить его в явном виде, достаточно воспользоваться разложением в ряд Тейлора каждой функции, входящей в систему (1.53), и сгруппировать по степеням  $\tau$ :

$$\begin{aligned} A(0)v(0) &= b(0), \\ \frac{dA}{d\tau}(0)v(0) + A(0)\frac{dv}{d\tau}(0) &= \frac{db}{d\tau}(0), \\ \frac{d^2A}{d\tau^2}(0)v(0) + \frac{dA}{d\tau}(0)\frac{dv}{d\tau}(0) + A(0)\frac{d^2v}{d\tau^2}(0) &= \frac{d^2b}{d\tau^2}(0). \\ \dots \end{aligned}$$

В результате могут быть сформулированы следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Если матрица  $A(0)$  невырождена и решение системы  $A(0)v(0) = b(0)$  совпадает с решением дифференциальной задачи, тогда решение системы (1.54) сходится к решению дифференциальной задачи как минимум с первым порядком по  $\tau$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

**Утверждение 2.** Если выполняется утверждение 1 и, более того, верно равенство  $\frac{dA}{d\tau}(0)v(0) = \frac{db}{d\tau}(0)$ , тогда  $\frac{dv}{d\tau}(0) \equiv 0$  и решение системы (1.54) сходится к решению дифференциальной задачи как минимум со вторым порядком по  $\tau$ , при  $\tau \rightarrow 0$ .

Итак, для доказательства второго порядка сходимости коэффициентов отражения и прохождения достаточно проверить эти утверждения для системы уравнений (1.53). Для доказательства первого порядка сходимости необходимо рассмотреть си-

стему уравнений  $A(0)v(0) = b(0)$ :

$$R(0) - \sum_{q=0}^{K-1} T^q(0) = -1,$$

$$\sum_{q=0}^{K-1} T^q(0) \left( \frac{2iK}{\alpha(2r+1)} \sin \left( \frac{2\pi q(2r+1)}{K} \right) + e^{-i\hat{k}^q} \right) +$$

$$+ R(0) = 1,$$

$$r = 0, \dots, (K-1)/2,$$

$$\sum_{q=0}^{K-1} T^q(0) \left( \left[ \frac{2iK}{\alpha r} \right]^2 \sin^2 \left( \frac{2\pi qr}{K} \right) - e^{-i2\hat{k}^q} + 2 \right) -$$

$$- R(0) = 1,$$

$$r=1, \dots, (K-1)/2,$$

где

$$\hat{k}^q = L \sin^{-1} \left( \frac{K}{L\alpha} \sin \left[ \frac{2\pi q}{K} \right] \right),$$

здесь  $q = 0, \dots, (K-1)/2$ . Детальное описание построения этой системы представлено в работе [243].

Несложно проверить, что матрица такой системы невырождена, следовательно система допускает единственное решение:

$$\begin{aligned} R(0) &= 0, & T^0(0) &= 1, \\ T^q(0) &= 0, & q &= 1, \dots, K-1. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Это решение в точности совпадает с решением дифференциальной задачи - коэффициент отражения равен нулю, а истинный коэффициент прохождения - единице. При этом коэффициенты прохождения для артефактных волн также равны нулю. Итак, решение системы (1.53) сходится к решению дифференциальной задачи как минимум с первым порядком. Для доказательства второго порядка сходимости, согласно

утверждению 2, необходимо рассмотреть систему уравнений  $\frac{dA}{d\tau}(0)v(0) = \frac{db}{d\tau}(0)$ :

$$\sum_{q=0}^{K-1} T^q(0) \left( 2 \cos \left( \frac{2\pi q(2r+1)}{K} \right) - e^{-i\hat{k}^q} \beta^q \right) +$$

$$-R(0) = 1$$

$$r = 0, \dots, (K-1)/2,$$

$$\sum_{q=0}^{K-1} T^q(0) \left( \frac{2iK}{r\alpha} \sin \left( \frac{4\pi qr}{K} \right) + e^{-i2\hat{k}^q} \beta^q \right) -$$

$$+R(0) = 1$$

$$r = 1, \dots, (K-1)/2,$$

где

$$\beta^q = \frac{\cos(2\pi q/K)}{\sqrt{1 - \left(\frac{K}{L\alpha} \sin[2\pi q/K]\right)^2}}.$$

Детальное описание построения этой системы представлено в работе [243].

Несложно показать, что приведенное выше равенство выполняется на решении  $v(0)$ , заданном формулами (1.55), то есть при  $T^0(0) = 1$ , а все остальные компоненты равны нулю. Это означает, что согласно утверждению 4, коэффициенты отражения/прохождения для конечно-разностной задачи сходятся к коэффициентам дифференциальной задачи как минимум со вторым порядком при  $\tau \rightarrow 0$ .

## 1.5.2 Численное исследование коэффициентов отражения и прохождения

### 1.5.2.1 Одномерная постановка

В предыдущем разделе было доказано, что нефизичные коэффициенты отражения/прохождения сходятся к нулю со вторым порядком при уменьшении шага сетки. Однако результаты асимптотического анализа не всегда являются достаточными, поскольку для реалистичных, достаточно грубых дискретизаций значения этих коэффициентов могут быть высокими. Например, в методе предложенном в работе [144], они могут достигать значения 0.1 при использовании сетки с 20 точками на длину

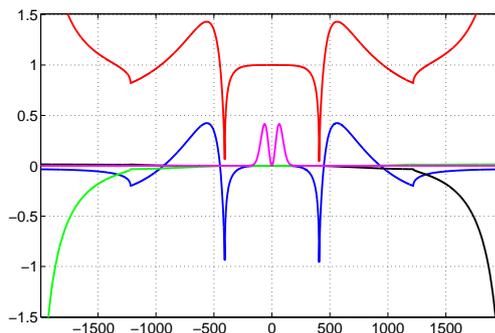


Рисунок 1.12 – Коэффициенты отражения/прохождения в зависимости от пространственной частоты для одновременного измельчения сеток с отношением шагов равным трем. Синяя линия соответствует коэффициенту отражения, красная - физическому коэффициенту прохождения, зеленая и черная - нефизическим коэффициентам прохождения, розовая линия представляет спектр зондирующего сигнала. Число Куранта - 0.3, число точек на длину волны на грубой сетке 20.

волны. Поэтому важным свойством предлагаемого подхода к локальному измельчению сеток является величина нефизических коэффициентов отражения/прохождения при использовании типичных дискретизаций - 20-50 точек на длину волны и чисел Куранта в пределах от 0.1 до 1. Для исследования коэффициентов отражения/прохождения система (1.53) решается численно для заданного диапазона изменения параметров. Вне зависимости от типа измельчения сеток: одновременное измельчение, измельчение только по времени, измельчение только по пространству, видно (рис. 1.12-1.14), что в пределах частотного диапазона, соответствующего спектру зондирующего сигнала, коэффициент прохождения и коэффициенты прохождения нефизических мод близки к нулю, в то время как коэффициент прохождения физической волны близок к единице. При расширении частотного диапазона ошибка быстро нарастает, однако на этих частотах целевой сигнал практически равен нулю, следовательно такой диапазон не представляет практического интереса. Важно, что в пределах всего представленного диапазона пространственных частот, вплоть до частот, соответствующих дискретизациям в две точки на длину волны, не наблюдается неограниченного роста коэффициентов отражения/прохождения, что можно рассматривать в качестве выполнения необходимого признака устойчивости метода.

Полученные коэффициенты отражения проверяются серией численных экспериментов. С использованием разработанного алгоритма численно моделируется рас-

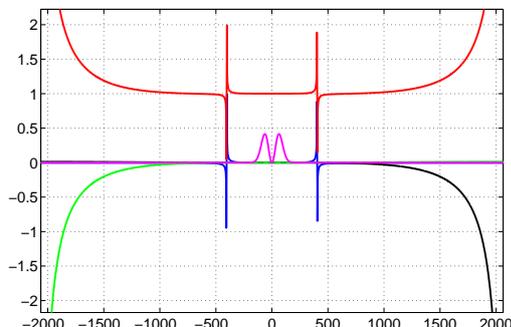


Рисунок 1.13 – Коэффициенты отражения/прохождения в зависимости от пространственной частоты для измельчения сеток по времени с отношением шагов равным трем. Синяя линия соответствует коэффициенту отражения, красная - физическому коэффициенту прохождения, зеленая и черная - нефизичным коэффициентам прохождения, розовая линия представляет спектр зондирующего сигнала. Число Куранта - 0.3, число точек на длину волны на грубой сетке 20.

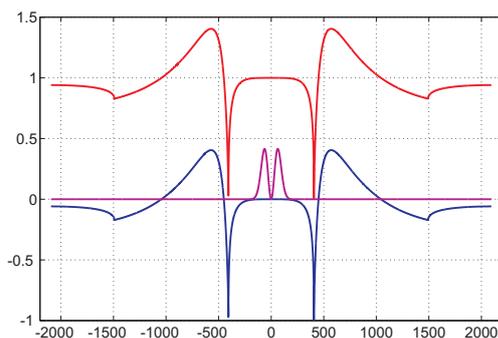


Рисунок 1.14 – Коэффициенты отражения/прохождения в зависимости от пространственной частоты для измельчения сеток по пространству с отношением шагов равным трем. Синяя линия соответствует коэффициенту отражения, красная - физическому коэффициенту прохождения, зеленая и черная - нефизичным коэффициентам прохождения, розовая линия представляет спектр зондирующего сигнала. Число Куранта - 0.3, число точек на длину волны на грубой сетке 20.

пространение плоской волны из области с грубой сеткой в область с мелкой сеткой и наоборот. После чего измеряется величина отражений, вызванных прохождением волны через границу раздела сеток. Коэффициенты отражения построены как отношение максимума амплитуды отраженной волны к максимуму амплитуды падающей волны. Полученные таким образом коэффициенты отражения сравниваются с коэффициентами, полученными в результате свертки решения системы (1.53) с зондирующим сигналом. На рисунках 1.15, 1.17 и 1.19 видно, что с увеличением числа точек на длину волны при дискретизации задачи коэффициенты отражения сходятся к нулю. При этом коэффициенты, измеренные при моделировании распространения волн и вычисленные с использованием свертки решения системы (1.53) с зондирующим сигналом, с высокой точностью совпадают. Важно, что эти коэффициенты ниже, чем оценки, полученные на основе дисперсионного анализа. В зависимости от типа измельчения поведение коэффициента отражения с изменением числа Куранта (рис. 1.16, 1.18 и 1.20) может различаться, однако, как и в предыдущем случае, измеренные коэффициенты отражения совпадают с рассчитанными на основе свертки решения системы (1.53) с зондирующим сигналом. Поведение численных коэффициентов аналогично поведению решения, полученному на основе дисперсионного анализа, но значения вычисленных коэффициентов ниже оценочных. Следовательно разработанный алгоритм локального измельчения сеток является слабоотражающим (в смысле определения 1) для типичных дискретизаций - число точек на длину волны от 20 до 50, число Куранта в интервале  $[0, 1]$ .

### **1.5.2.2 Численное исследование отражений от границы раздела сеток в двумерной постановке**

Как уже отмечалось выше, использование разных сеток в смежных подобластях модели приводит к появлению нефизичной границы, что влечет появление нефизичных отражений, обусловленных различием дисперсионных свойств дискретизованных задач. Так как представленный алгоритм ориентирован на расчет волновых полей в моделях со скоплениями мелкомасштабных неоднородностей, отклик которых в волновых полях составляет порядка 1% от энергии падающей волны, в качестве приемлемого уровня нефизичных отражений предлагается брать 0.1% от амплитуды

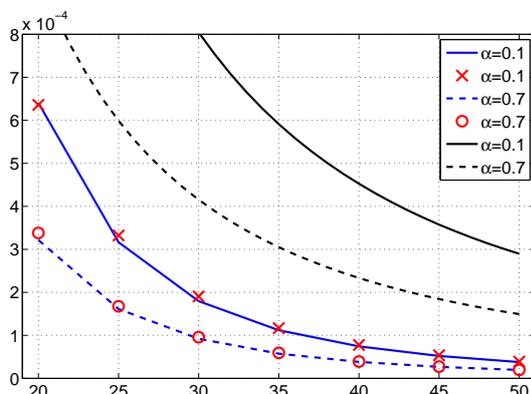


Рисунок 1.15 – Коэффициенты отражения для одновременного измельчения сеток в зависимости от числа точек на длину волны. Черные линии соответствует оценке на основе дисперсионного анализа, синие линии - коэффициенты отражения, полученные в результате решения системы (1.53), маркеры соответствуют результатам численного моделирования. Сплошные линии и крестики соответствуют числу Куранта равному 0.1, прерывистые линии и круги - числу Куранта 0.7.

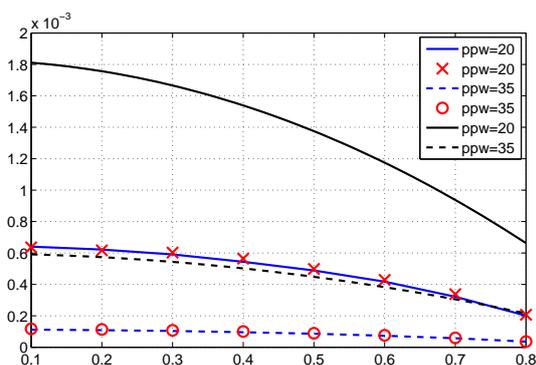


Рисунок 1.16 – Коэффициенты отражения для одновременного измельчения сеток в зависимости от числа Куранта. Черные линии соответствует оценке на основе дисперсионного анализа, синие линии - коэффициенты отражения, полученные в результате решения системы (1.53), маркеры соответствуют результатам численного моделирования. Сплошные линии и крестики соответствуют числу точек на длину волны равному 20, прерывистые линии и круги - 35.

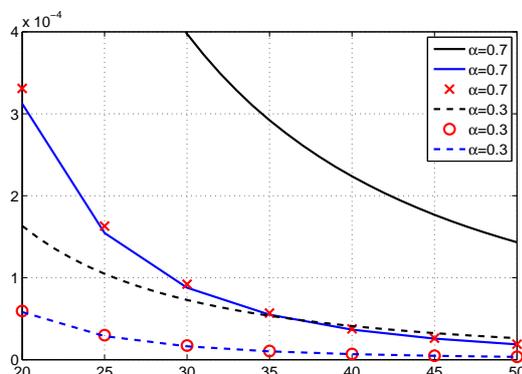


Рисунок 1.17 – Коэффициенты отражения для измельчения сеток по времени в зависимости от числа точек на длину волны. Черные линии соответствует оценке на основе дисперсионного анализа, синие линии - коэффициенты отражения, полученные в результате решения системы (1.53), маркеры соответствуют результатам численного моделирования. Сплошные линии и крестики соответствуют числу Куранта равному 0.1, прерывистые линии и круги - числу Куранта 0.7.

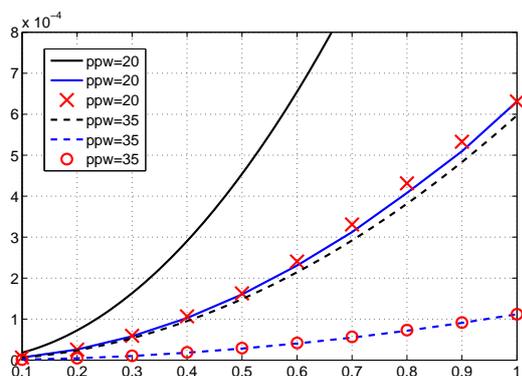


Рисунок 1.18 – Коэффициенты отражения для измельчения сеток по времени в зависимости от числа Куранта. Черные линии соответствует оценке на основе дисперсионного анализа, синие линии - коэффициенты отражения, полученные в результате решения системы (1.53), маркеры соответствуют результатам численного моделирования. Сплошные линии и крестики соответствуют числу точек на длину волны равному 20, прерывистые линии и круги - 35.

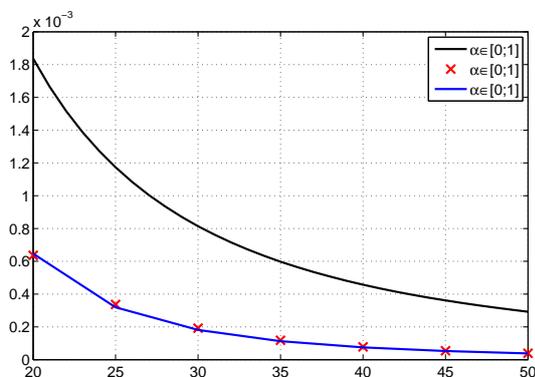


Рисунок 1.19 – Коэффициенты отражения для измельчения сеток по пространству в зависимости от числа точек на длину волны. Черные линии соответствует оценке на основе дисперсионного анализа, синие линии - коэффициенты отражения, полученные в результате решения системы (1.53), маркеры соответствуют результатам численного моделирования. Данные результаты верны для всех чисел Куранта из интервала  $[0, 1]$ .

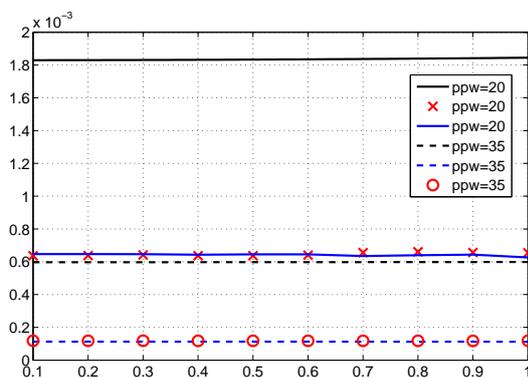


Рисунок 1.20 – Коэффициенты отражения для измельчения сеток по пространству в зависимости от числа Куранта. Черные линии соответствует оценке на основе дисперсионного анализа, синие линии - коэффициенты отражения, полученные в результате решения системы (1.53), маркеры соответствуют результатам численного моделирования. Сплошные линии и крестики соответствуют числу точек на длину волны равному 20, прерывистые линии и круги - 35.

ды падающей волны. Серия численных экспериментов показывает, с одной стороны, что алгоритм обеспечивает второй порядок сходимости коэффициентов нефизических отражений к нулю, при стремлении шага сетки к нулю, с другой стороны, демонстрирует, что для реалистичных дискретизаций (порядка 20 точек на длину волны) обеспечивает низкий уровень нефизических отражений.

Рассматривается область 6000 м по горизонтали и 2200 м по вертикали. Параметры среды:  $V_P = 4500$  м/с,  $V_S = 3000$  м/с и  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>. Измельчение шага по времени проводится в области  $\Omega^t = \{(x, z) : x \in [500; 5500], z \in [1100; 1600]\}$ , мелкий шаг по пространству используется в области  $\Omega^s = \{(x, z) : x \in [515; 5485], z \in [1115; 1585]\}$ . Источник типа объемного расширения располагается в точке  $x = 3000$  м и  $z = 600$  м. В качестве функции источника используется импульс Риккера с доминирующей частотой 30 Гц. Измельчение сетки проводится в 9 раз. Волновое поле, фиксируется на двух линиях наблюдения: линия 1 -  $x_3 = 850$  м и линия 2 -  $x_3 = 1350$  м (рис. 1.21). Решение рассчитывается на серии вложенных сеток с шагами грубой сетки 5, 2.5 и 1.25 м.

Для исключения отражений от границ расчетной области используется идеально-согласованный слой [104], [146] толщиной 40 точек, при этом области, в которых производится измельчение сеток, всегда могут быть отделены от границ расчетной области, поэтому взаимные эффекты измельчения и слабоотражающих граничных условий не рассматриваются. К тому же, подобный подход позволяет использовать измельчение в сочетании с любым методом ограничения расчетной области, такими как идеально-согласованные слои с расщеплением поля [104], [146], идеально-согласованные слои с оптимальной дискретизацией [293], [250], [42], идеально согласованные слои с комплексным сдвигом частоты [162], [163], слои, основанные на уравнениях типа свертки [227], многоосные слои [267], [19], [20] и др.

В качестве эталонного, то есть лишено нефизических отражений, рассматривается решение, рассчитанное на грубой сетке и зарегистрированное на линии 2 -  $x_3 = 1350$  м (рис 1.22 слева). Для выделения нефизических отражений рассматривается разность решений, рассчитанных как с измельчением сеток, так и без него, зарегистрированных на линии 1 -  $x_3 = 850$  м (рис. 1.22). На сейсмограммы эталонного решения, нормированного на себя, (рис. 1.23) и разностных сейсмограммах, нормиро-

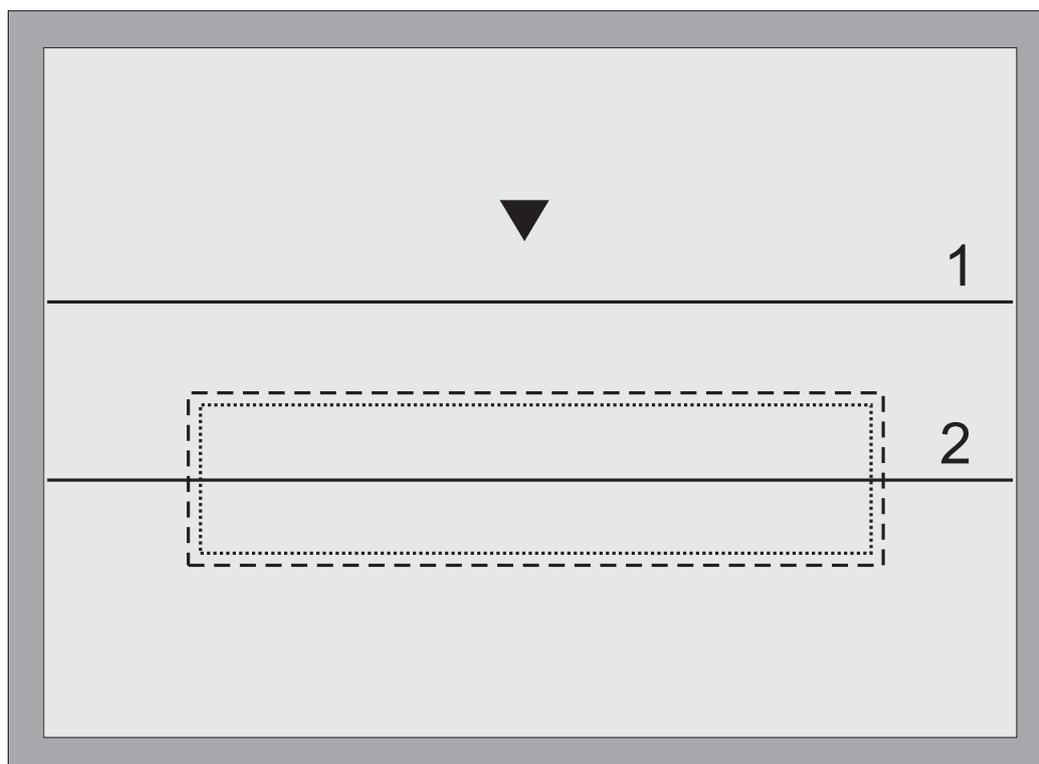


Рисунок 1.21 – Геометрия расчетной области для численного эксперимента по исследованию нефизичных отражений. Темным обозначен PML, пунктирная линия и точки обозначают интерфейсы измельчения сеток по времени и пространству соответственно. Отраженные волны фиксируются на линии 1, эталонное решение фиксируется на линии 2

ванных на эталонное решение, содержащих лишь нефизичные отражения для разных дискретизаций (рис. 1.24-1.26), видно, что амплитуды нефизичных отражений снижаются в четыре раза, когда шаг сетки уменьшается вдвое, что подтверждает второй порядок сходимости. С другой стороны, даже для сетки с шагом 5 м, то есть при дискретизации порядка 10 точек на минимальную длину волны, уровень нефизичных отражений не превосходит  $10^{-3}$  от амплитуды падающей волны, что позволяет считать предлагаемый алгоритм слабоотражающим.

### 1.5.3 Теоретический анализ устойчивости

Как показано в работе [143], неустойчивость алгоритмов, основанных на локальном измельчении сеток, может быть вызвана двумя факторами. Первый - некорректность условий согласования на границе раздела сеток, в этом случае неустойчивость

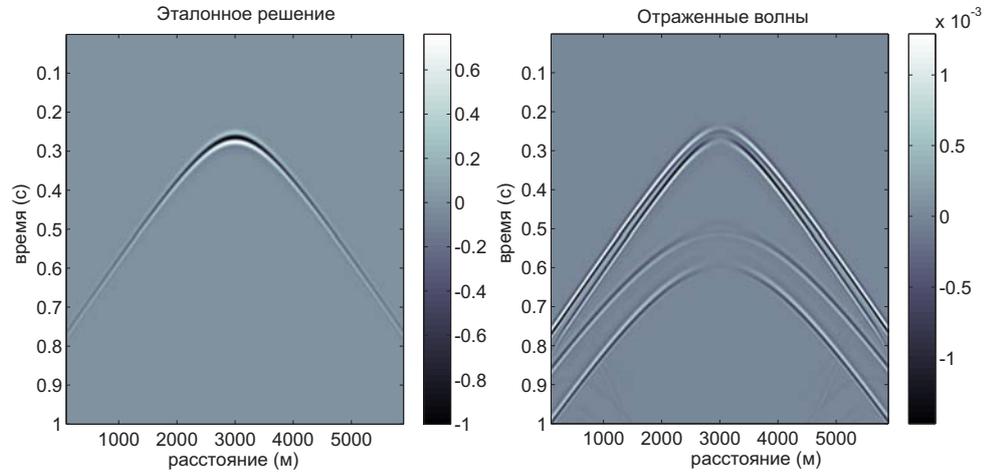


Рисунок 1.22 – Эталонное решение, зарегистрированное на линии  $x_3 = 1350$  м. (слева). Отраженное волновое поле, зарегистрированное на линии  $x_3 = 850$  м. (справа)

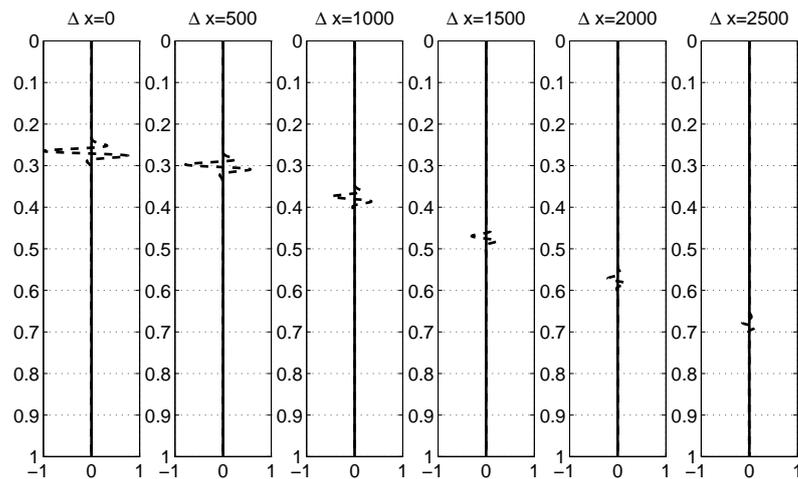


Рисунок 1.23 – Трассы для разных выносов. Пунктирной линией обозначается эталонное решение, сплошной линией - отраженное волновое поле

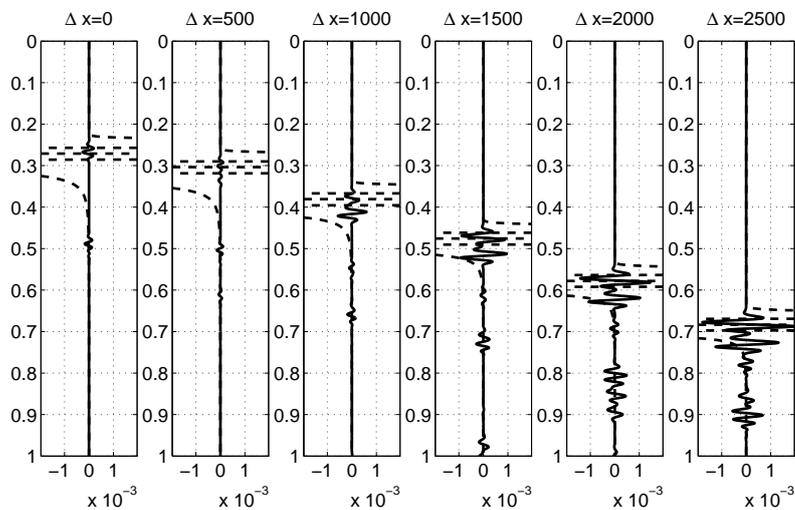


Рисунок 1.24 – Трассы с усилением для разных выносов, рассчитанные с использованием крупной сетки с шагом 5 м. Пунктирной линией обозначается эталонное решение, сплошной линией - отраженное волновое поле

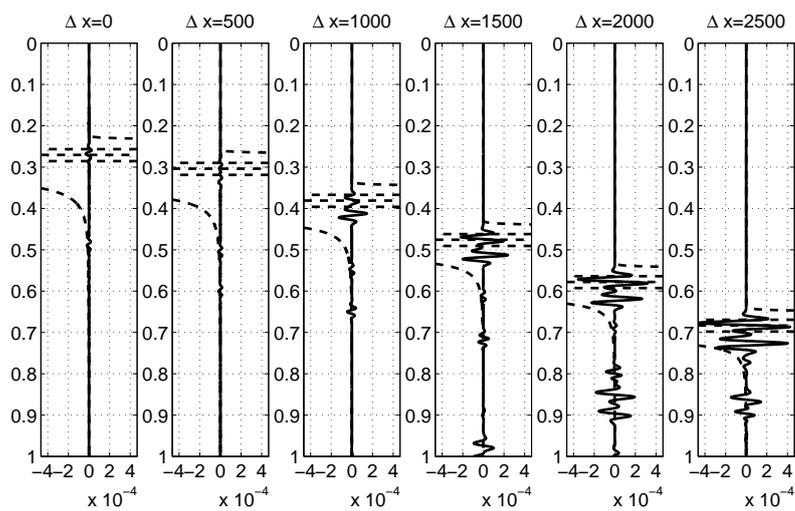


Рисунок 1.25 – Трассы с усилением для разных выносов, рассчитанные с использованием крупной сетки с шагом 2.5 м. Пунктирной линией обозначается эталонное решение, сплошной линией - отраженное волновое поле

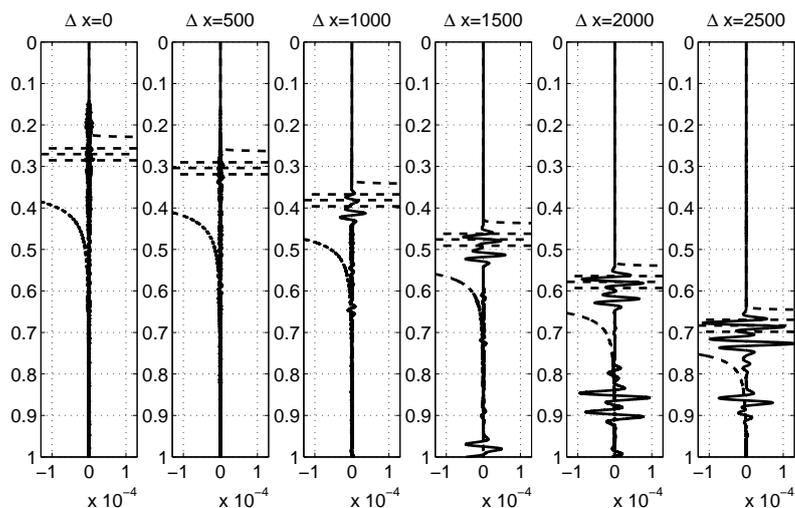


Рисунок 1.26 – Трассы с усилением для разных выносов, рассчитанные с использованием крупной сетки с шагом 1.25 м. Пунктирной линией обозначается эталонное решение, сплошной линией - отраженное волновое поле

проявляется даже при однократном прохождении волны через эту границу. Вторым фактором - многократное прохождение волн через границу раздела сеток, обусловленное наличием физических границ в модели.

Неустойчивость первого типа можно определить аналитически с использованием определителя Лопатинского [232], [317], [318]. Детальное обсуждение этого подхода в применении к задаче локального измельчения сеток для волнового уравнения представлено, в частности, в работе [109], где показано, что разностная задача измельчения сеток на основе техники вложенных шаблонов является корректной. То есть, в случае однократного прохождения волны через границу раздела сеток решение является устойчивым.

Неустойчивость второго типа проявляется в моделях с дополнительными границами, в таком случае всегда возникают моды, распространяющиеся между границей раздела сеток и физической границей. Именно эти решения могут быть неустойчивыми. Их детальное описание и исследование для алгоритма, основанного на интерполяции по времени, представлено в работе [143]. Для исследования такого типа неустойчивости используется известный необходимый спектральный признак устойчивости конечно-разностной схемы для начально-краевой задачи [53], [13]:

*Если схема устойчива, тогда все собственные числа  $\lambda$  оператора перехода лежат*

в единичном круге:  $|\lambda| \leq 1$ .

Схема (1.9) для одномерной постановки задачи измельчения сеток рассматривается в предположении, что  $j = -J, \dots, J$  с нулевыми граничными условиями. Граница раздела сеток задается в точке  $j = 0$ . После этого строятся операторы перехода для разных типов измельчения сеток и вычисляются их собственные значения для разных  $J$ . В результате установлено, что алгоритм, основанный на одновременном измельчении сеток, то есть при  $K \neq 1$  и  $L \neq 1$ , всегда неустойчив, поскольку существуют собственные значения, лежащие вне единичного круга (рис. 1.27).

В случае, если измельчение проводится отдельно, либо только по пространству, либо только по времени, собственные числа оператора перехода всегда лежат на единичной окружности при условии, что число Куранта меньше единицы (рис. 1.27). Аналогичное распределение спектра характерно и для поэтапного измельчения сеток, то есть когда измельчение по времени и по пространству проводится в различных точках  $j = j_t$  и  $j = j_s$  соответственно, при этом  $j_t < j_s$ .

В дополнение к исследованию необходимого признака устойчивости проведены серии численных экспериментов, в которых рассчитывается решение на больших временах. Рассматривается пространственный интервал  $[0, 10\lambda]$ , где  $\lambda$  - доминирующая длина волны. Временной интервал выбирается  $10^6$  периодов волны. Измельчение сеток проводится в точке  $5\lambda$  в случае одновременного измельчения и в точках  $5\lambda$  и  $5.5\lambda$  - для последовательного измельчения. При одновременном измельчении наблюдается рост энергии на относительно небольших временах - десятикратное увеличение энергии к моменту времени 10 периодов. В экспериментах с последовательным измельчением сеток роста энергии не наблюдается [243].

#### 1.5.4 Численный анализ устойчивости

Несмотря на детальный анализ устойчивости алгоритма измельчения сеток в одномерной постановке в случае, если размерность пространства выше единицы, возможно проявление неустойчивости, связанной с измельчением шага по пространству [233], [103], [252].

Для исследования неустойчивых мод проведены серии численных эксперимен-

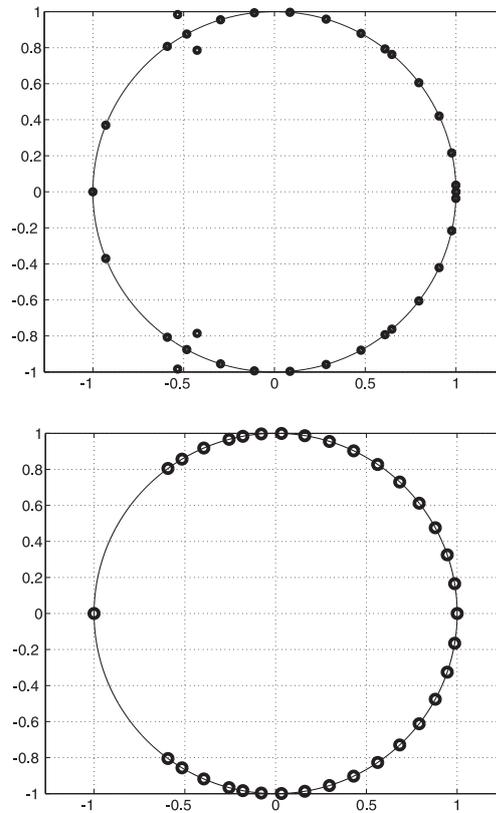


Рисунок 1.27 – Спектр оператора перехода для одновременного измельчения сеток (вверху) и последовательного измельчения сеток (внизу)

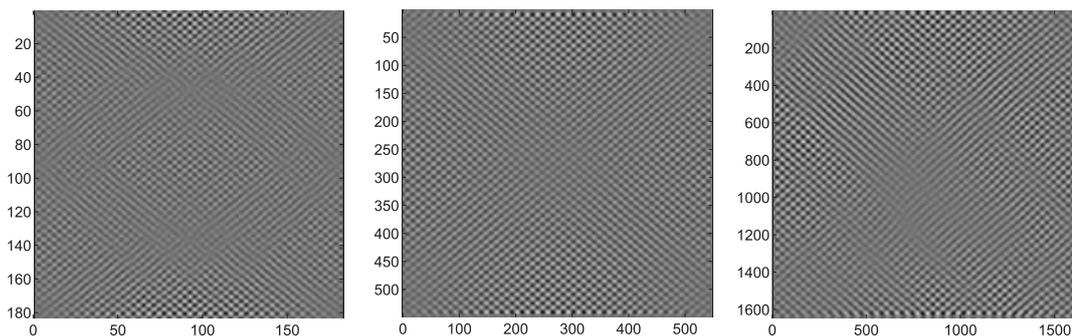


Рисунок 1.28 – Проявление неустойчивости в области мелкой сетки для измельчения в 3, 9 и 27 раз. Размеры областей приведены в точках мелкой сетки.

тов. Рассматривается однородная изотропная среда с параметрами  $V_P = 4500$  м/с,  $V_S = 3000$  м/с и  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>. Расчетная область - квадрат со стороной 2000 м. Основная (грубая) дискретизация области проводится с шагом 2.5 м. Область с пространственным измельчением сетки определяется по правилу  $\Omega^s = \{(x_1, x_3) : x_1 \in [1000, 1150], x_3 \in [1000, 1150]\}$ . При этом размер области  $\Omega^s$  составляет  $60 \times 60$  точек грубой сетки. Параметры эксперимента: частота зондирующего сигнала - импульс Риккера с центральной частотой 5-40 Гц с шагом 5 Гц; коэффициенты измельчения шагов сетки - от 3 до 27 с шагом 2, то есть рассматриваются все возможные коэффициенты измельчения в этом диапазоне. При этом измельчение шага по времени не производится.

В результате расчетов отчетливо проявляется неустойчивость в области  $\Omega^s$  для коэффициентов измельчения в 3, 9, 27 (рис. 1.28). Видно, что неустойчивые решения - высокочастотные моды, спектр которых сосредоточен в окрестности частот  $f_1 \approx \frac{2}{h_1}$  и  $f_3 \approx \frac{2}{h_3}$ , где  $h_1$  и  $h_3$  - шаги грубой сетки. То есть вне зависимости от частоты зондирующего сигнала и коэффициентов измельчения инъективное сужение решения с мелкой сетки на грубую приводит к появлению неустойчивых мод, с частотой, близкой к предельной частоте грубой сетки. Для проверки этого утверждения вычисляются БПФ (быстрое преобразование Фурье) спектры решений, примеры которых приведены на рис. 1.29. Следует заметить, что БПФ применяется к решениям на мелких сетках, однако во всех случаях спектры локализуются в окрестности 60-й моды по каждой компоненте волнового вектора, то есть наивысшей частоты, допускаемой используемой грубой сеткой.

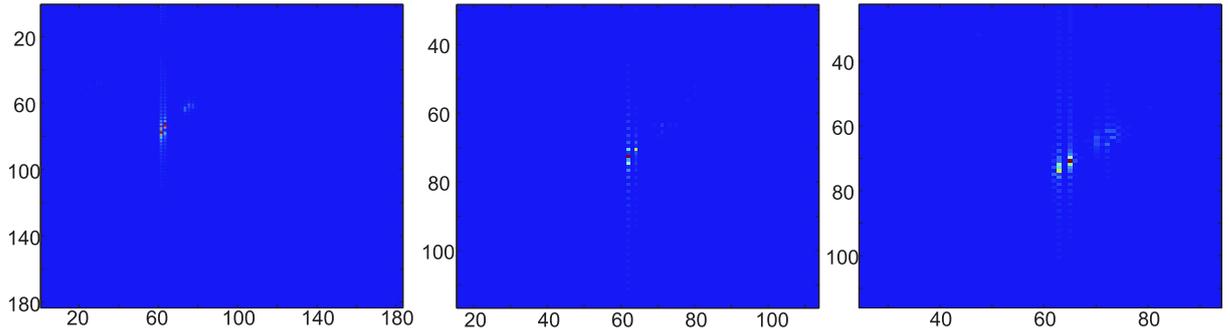


Рисунок 1.29 – БПФ спектр решения на мелкой сетке после развития неустойчивости при использовании измельчения в 3 (слева), в 9 (по центру) и в 27 (справа) раз.

Для устранения таких мод и стабилизации алгоритма используется низкочастотный фильтр на основе БПФ для построения сужения решения [252]. В силу того что рассматриваются конечно-разностные схемы второго порядка аппроксимации, для обеспечения достаточной точности расчетов используются сетки с не менее чем 10 точками на минимальную длину волны [142]. В результате информативными являются не более 30% БПФ спектра - низкочастотная часть, в то время как высокочастотная часть пренебрежимо мала, что отчетливо видно на рис. 1.30. Однако неустойчивые моды - высокочастотные решения (рис. 1.30), поэтому построение низкочастотного фильтра, подавляющего высокие частоты не представляет сложности. Достаточно в качестве такого фильтра использовать следующие сглаживание (черная линия на рис. 1.30):

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < \xi_1, \\ \varphi(\xi), & \xi \in [\xi_1; \xi_2], \\ 0, & \xi > \xi_2, \end{cases}$$

где  $\xi$  - параметр БПФ, а

$$\varphi(\xi) = 0.5 \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi(\xi_2 - \xi_1 - \xi)}{\xi_2 - \xi_1} \right) \right], \quad \xi \in [0, \xi_2 - \xi_1].$$

Здесь  $\xi_1$  и  $\xi_2$  - границы интервала плавного подавления решения. Границы интервала выбираются по результатам серии численных экспериментов, а в настоящей реализации алгоритма используются  $\xi_1 = \frac{1}{3}\xi_{\max}$ ,  $\xi_2 = \frac{2}{3}\xi_{\max}$ , где  $\xi_{\max}$  - максимальная частота

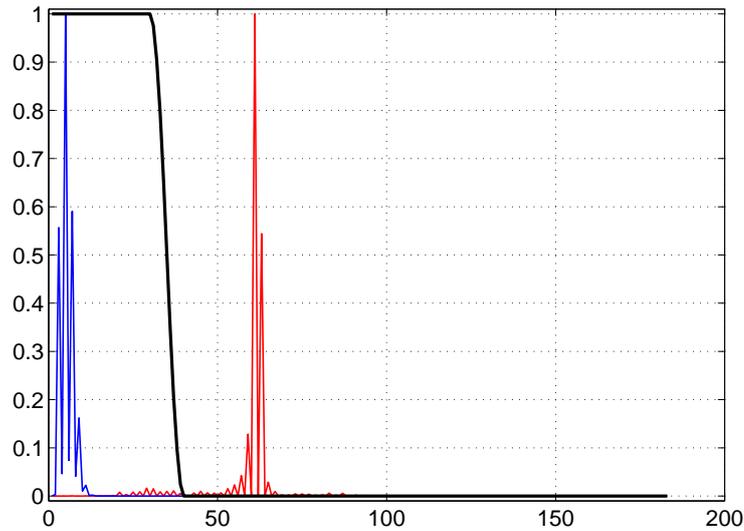


Рисунок 1.30 – Пример БПФ спектра решения (синий) и неустойчивых мод (красный) на границе измельчения сеток. Черная линия представляет низкочастотный фильтр.

на грубой сетке, как показано на рис. 1.30.

## 1.6 Применение метода для решения прикладных задач

### 1.6.1 Расчет волновых полей в среде с карстовыми скоплениями

Описанный выше алгоритм применяется для расчета волновых полей в двумерной модели среды, содержащей карстовые скопления в тонкослоистой пачке (рис. 1.31). Такая модель характерна для карбонатных резервуаров, где углеводороды аккумулируются в карстах, характерный размер которых составляет порядка 0.1-0.5 м, а транспорт флюида обеспечивается системой трещин - коридорами трещиноватости. Цель эксперимента - определение особенностей волновых полей, связанных с наличием каверн, и возможности их выделения на фоне регулярного сигнала - отраженных волн от границ слоев.

В качестве базовой модели вмещающей среды выбирается однородная изотроп-

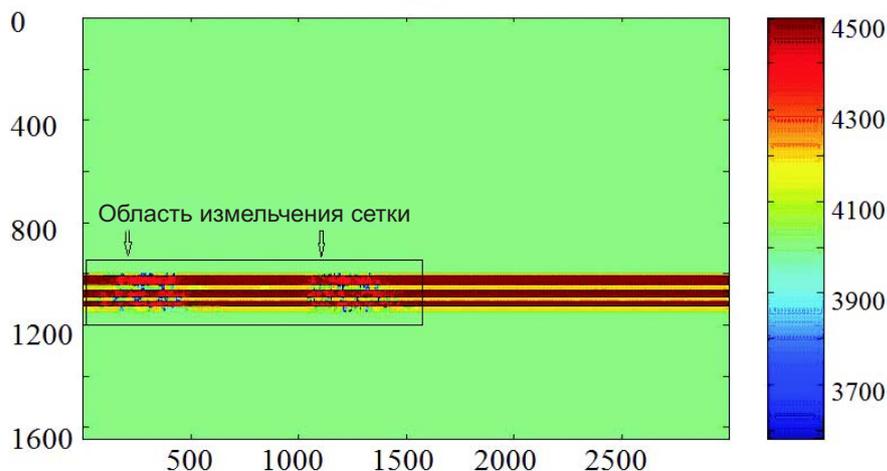


Рисунок 1.31 – Двумерная модель кавернозно-трещиноватого резервуара углеводородов в однородной вмещающей среде

ная упругая среда со скоростями  $V_P = 4000$  м/с,  $V_S = 2850$  м/с и плотностью  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>. В тонкослоистой пачке скорости варьируются в пределах  $3600 \leq V_P \leq 4500$  м/с,  $2500 \leq V_S \leq 3000$  м/с, плотность предполагается постоянной 2800 кг/м<sup>3</sup>. Источник типа центра объемного расширения располагается на свободной поверхности при  $x_1 = 900$  м. В качестве сигнала используется импульс Рикера с доминирующей частотой 25 Гц. Для дискретизации расчетной области используется сетка с шагами  $h_1 = h_3 = 2.5$  м, что составляет порядка 20 точек на минимальную длину волны. Для описания строения кавернозного резервуара в области  $[10; 1500] \times [900; 1200]$  м вводится мелкая сетка с шагом 0.1 м по каждому пространственному направлению, аналогично локально выбирается шаг по времени - в 25 раз меньше шага в грубой дискретизации (рис. 1.31).

На сейсмограммах по результатам расчета волнового поля (рис. 1.32) отчетливо видны волны, рассеянные на скоплениях мелкомасштабных неоднородностей.

## 1.6.2 Моделирование взаимодействия волн с границей раздела газ-вода в трещине гидроразрыва

Цель эксперимента - оценка возможности выделения газовойдынного контакта в трещине гидроразрыва пласта по данным межскважинного просвечивания.

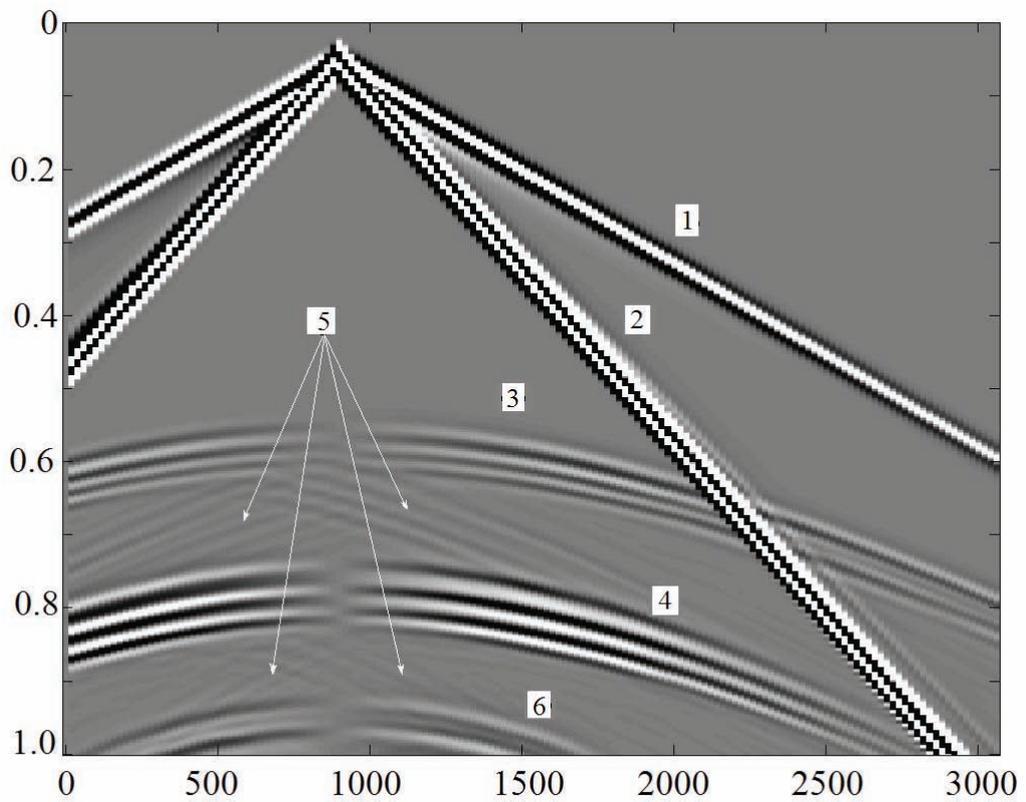


Рисунок 1.32 – Сейсмограмма, зарегистрированная на свободной поверхности для модели с карстовыми включениями. Цифрами обозначены следующие волны: 1 - прямая продольная волна, 2 - прямая поперечная волна и волна Релея, 3 и 4 - отраженные PP- и PS-волны, 5 - PP- и PS-рассеяние и 6 - отраженная SP-волна.

### 1.6.2.1 Актуальность задачи

Поскольку сланцы - низкопроницаемы, разработка месторождений газа в них в настоящее время осуществляется методом гидроразрыва пласта (ГРП) так как иными щадящими способами приток газа не обеспечивается. Причем предполагается, что приток из породы обеспечивается лишь в непосредственной близости от поверхности трещины - порядка нескольких сантиметров. При этом согласно данным микросейсмического мониторинга [189], трещины гидроразрыва простираются на несколько сот метров от ствола скважины, и именно на основе этих данных проводятся оценки продуктивности скважин. Однако, после ГРП большая часть используемой жидкости, примерно 80% объема, остается в пласте, блокируя приток газа в трещину, как показано на схематическом представлении модели в окрестности скважины (рис. 1.33). При этом идеальным считается случай (рис. 1.33 слева), когда трещины гидроразрывов образуют регулярную систему так, что в каждую из них поступает весь газ из объема, ограниченного пунктирными линиями. Однако в качестве реалистичного рассматривается случай, когда большая часть газа из продуктивного пласта заблокирована из-за обводнения трещин гидроразрыва (рис. 1.33 справа). В результате оценка запасов газа, по данным микросейсмического мониторинга, оказывается существенно завышенной. Поэтому определение границ газовой контактной зоны непосредственно в трещине гидроразрыва с использованием сейсмических методов и, в частности, метода межскважинного просвечивания актуально. При этом определение влияния газовой контактной зоны в трещине гидроразрыва на сейсмические волновые поля проводится методом полномасштабного численного моделирования.

### 1.6.2.2 Постановка задачи

Построение сейсмогеологической модели среды для исследования взаимодействия сейсмических волн с границей раздела газ-вода в трещинах гидроразрыва выполняется в два этапа. Первый - определение геометрии объектов, положения скважин и трещин гидроразрывов согласно стандартным схемам, используемым при разработке месторождений сланцевого газа. Второй - построение обоснованной с точки зрения физики горных пород макроскоростной модели упругой среды, описывающей рас-

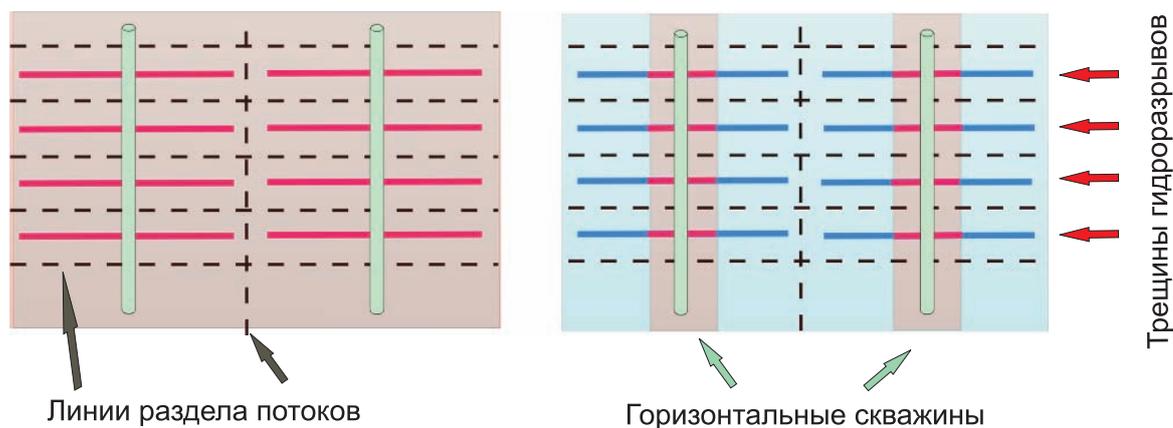


Рисунок 1.33 – Схематическое представление организации добычи сланцевого газа - система горизонтальных скважин и трещин гидроразрывов. Слева - идеальный случай, при котором обеспечивается приток из всего продуктивного пласта, справа - случай, при котором большая часть трещин гидроразрыва обводнена так, что приток обеспечивается лишь из околоскважинного пространства (выделено цветом)

пространение сейсмических волн в пористой микронеоднородной флюидонасыщенной среде.

Для разработки месторождения сланцевого газа используется система горизонтальных скважин, пробуренных в направлении, нормальном к направлению максимальных напряжений в породе. Расстояние между скважинами составляет 150 м. В каждой скважине проводится серия гидроразрывов пласта с шагом 15 м. Поскольку предполагается моделирование процесса распространения волновых полей между двумя соседними скважинами, рассматривается модель, включающая в себя две скважины и три трещины гидроразрыва. Размеры модели: 200 м в направлении, нормальном к осям скважин, и 60 м вдоль скважины. Предполагается, что скважины и трещины гидроразрывов на расстоянии до 30 м от ствола скважины заполнены смесью газа и воды в следующем объемном соотношении: 70 % газа, 30% воды. На расстоянии 36 м от ствола начинается зона с полным обводнением - "поровое" пространство в трещине ГРП заполнено водой. Соответственно в интервале 30-36 м от ствола - переходная зона, в которой "поровое" пространство заполнено смесью газа и воды так, что объемная доля газа линейно увеличивается от 0 до 70 % (рис. 1.34). Причем рассматриваются обсаженные скважины, то есть в модели учитывается наличие стальной колонны и цементаци: диаметр скважины 15 см, толщина стальной

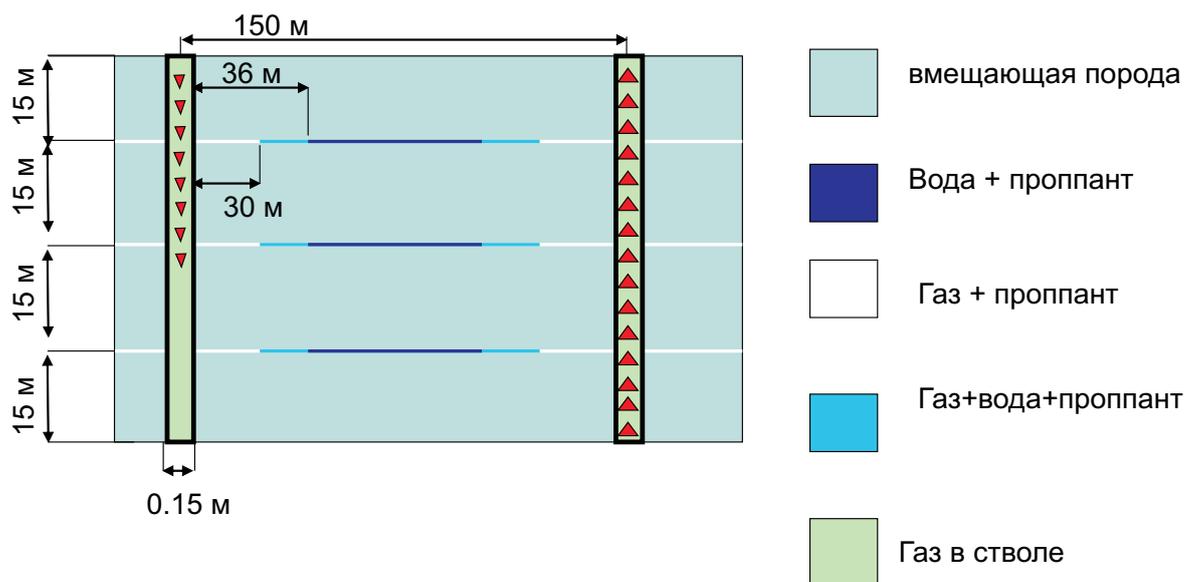


Рисунок 1.34 – Схематическое представление модели, используемой для расчета волновых полей при межскважинном просвечивании.

колонны 1 см, толщина цемента 2 см, толщина трещины гидроразрыва 1 см.

Затем задаются сейсмические параметры. В качестве вмещающей породы рассматриваются сланцы, свойства которых хорошо изучены [357], [375], в частности используются следующие значения:  $V_p = 3000$  м/с,  $V_s = 1200$  м/с и плотность  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>. В модели учитывается наличие стальной обсадной колонны -  $V_p = 5700$  м/с,  $V_s = 3100$  м/с,  $\rho = 7900$  кг/м<sup>3</sup>, цементажа -  $V_p = 4200$  м/с,  $V_s = 2400$  м/с,  $\rho = 1500$  кг/м<sup>3</sup>. Предполагается, что скважины заполнены смесью газа и воды с объемными долями 70 и 30 % соответственно, при удалении от скважины (в переходной зоне от 30 до 36 м от оси скважины) концентрация газа в смеси падает до нуля. Для определения эффективных сейсмических параметров рассматриваемых смесей используется осреднение при условии постоянства давления [263]. Распределение скорости акустических волн и плотности в смеси в зависимости от концентрации газа приведено на рис. 1.35. Используются следующие параметры флюида в скважинах:  $V_p = 600$  м/с,  $\rho = 300$  кг/м<sup>3</sup>.

Известно, что при ГРП в трещину закачивается проппант - традиционно песок и более крупные объекты (керамические шарики), которые обеспечивают "раскрытость" трещины после прекращения нагнетания давления жидкости. Такое заполнение пространства внутри трещины обеспечивает достаточно высокую проницаемость.

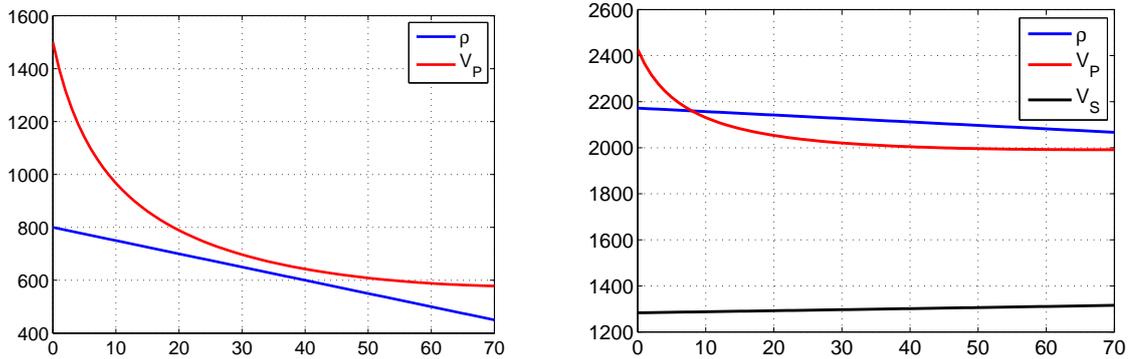


Рисунок 1.35 – Зависимость параметров эффективной среды от концентрации газа в смеси газ-вода. Слева - параметры смеси, справа - параметры модели, полученной методом Гассмана.

С точки зрения построения модели это означает, что пространство внутри трещин гидроразрыва следует рассматривать в виде модели упругой высокопористой среды, заполненной флюидом. Понятно, что измельчение сетки для явного учета строения порового пространства с характерным размером зерен пропанта от 0.1 мм до 5.0 мм нецелесообразно, а нужен переход к эффективным макроскоростным моделям среды с поровым пространством, заполненным флюидом. Здесь рассмотрения ограничиваются классической моделью Гассмана [184], [263]. В отличие от теории Био пороупругих сред [114], [115], использование модели Гассмана не предполагает перехода к более сложным математическим моделям, а лишь аппроксимацию параметров модели изотропной упругой среды, при этом не учитывается часть физических эффектов, связанных с распространением волн в пороупругих средах, таких как наличие дополнительной волны Био, дисперсия и диссипация волн [114], [115], [226]. С одной стороны, учет этих эффектов не является частью исследования. С другой стороны, моделирование волновых процессов в пороупругих средах существенно более сложная, с вычислительной точки зрения, задача [127], [262], решение которой целесообразно лишь в случае, если изучаемый - моделируемый - процесс напрямую связан с медленной волной Био или с частотной зависимостью модели. Основным интересом представляет рассеяние регулярных объемных сейсмических волн на границах раздела газ-вода в трещине гидроразрыва. В таком случае модель Гассмана является достаточной для определения распределения упругих параметров среды

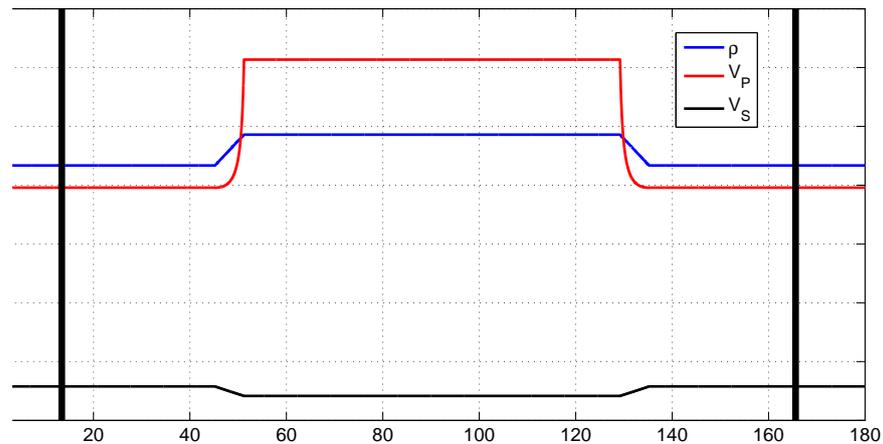


Рисунок 1.36 – Параметры среды в направлении, нормальном к осям скважин, вдоль линии, проходящей через трещину. Черными вертикальными линиями обозначены позиции скважин

внутри трещин гидроразрыва в зависимости от состава флюида, заполняющего поровое пространство (рис. 1.35). Установлено, что наибольшее влияние концентрация газа оказывает на скорости продольных волн, в то время как плотность и скорость поперечных волн практически не изменяются (рис. 1.35). На графике зависимости параметров модели в трещине гидроразрыва от геометрии модели (рис. 1.36) видно, что скорость продольной волны в эффективной модели зависит от концентрации газа нелинейно, а изменчивость очень высокая в окрестности малых концентраций. Это значит, что на интервале 3 м (менее 0.25 длины волны) перепад скорости составляет почти 20%.

### 1.6.2.3 Результаты моделирования

Расчеты проводятся с использованием локального пространственно-временного измельчения сеток в окрестностях трещин гидроразрывов. Всего таких зон выделено три. Шаги грубой сетки составляют 1 см, шаги мелкой сетки - 2 мм, то есть дискретизация трещины по толщине составляет 5 точек. Источники акустических волн располагаются на оси левой скважины, в качестве зондирующего сигнала выбирается импульс Риккера с доминирующей частотой 200 Гц. Волновые поля рассчитываются как для полной модели с обводнением удаленной части трещин гидроразрыва, так и

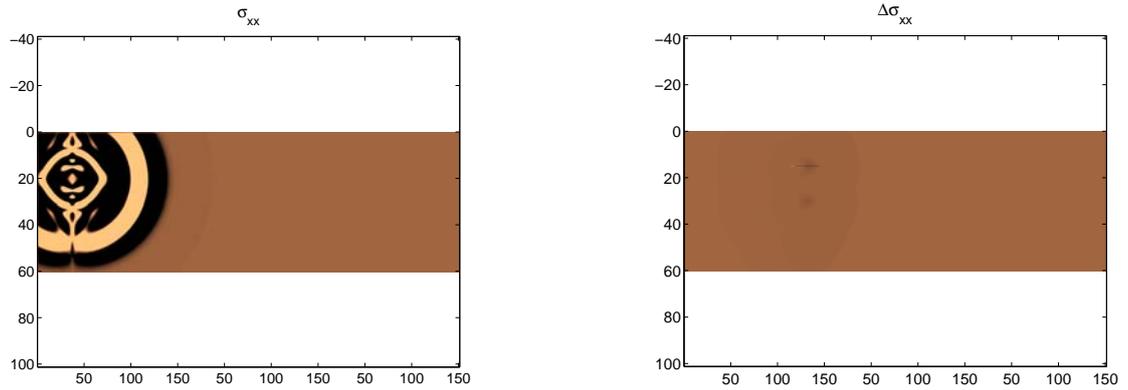


Рисунок 1.37 – Моментальный снимок волнового поля в полной модели (слева), разность между волновыми полями для полной модели и для модели с газозаполненными трещинами (справа)

для упрощенной модели, в которой трещины гидроразрыва предполагаются заполненными газом (70 % газа, 30 % воды). Итак, исследуется влияние именно наличия зоны обводнения на процесс распространения сейсмических волн. На моментальных снимках волновых полей в разные моменты времени и разности между полями в полной модели и в модели с газозаполненными трещинами (рис. 1.37 - 1.39) прослеживается влияние обводнения трещины. Однако на сейсмограммах, зарегистрированных в правой скважине, данный эффект выделить гораздо сложнее (рис. 1.40). Из анализа разностной сейсмограммы (рис. 1.40 справа) можно сделать лишь качественные оценки о том, что наибольшее проявление обводнения в волновых полях наблюдается в динамике распространения прямых волн, а не в рассеянии энергии на контакте газ-вода. Детальный анализ трасс, зарегистрированных сейсмограмм (рис. 1.41 и 1.42) показывает, что различие во временах вступления и амплитудах этих волн для двух рассматриваемых моделей составляет менее 1%. Учитывая тот факт, что уровень помех в реальных сейсмических данных, включая данные межскважинного просвечивания, зачастую превышает 1 %, можно утверждать, что проявление обводнения в трещинах гидроразрыва в волновых сейсмических полях является пренебрежимо малым.

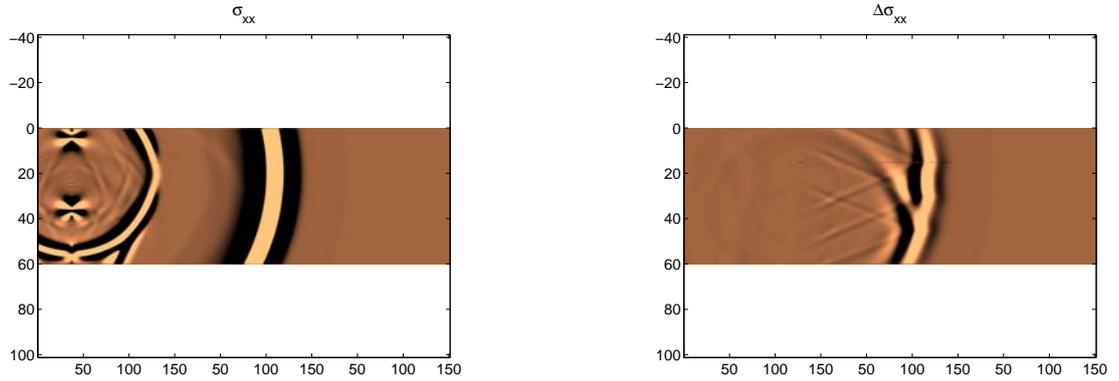


Рисунок 1.38 – Моментальный снимок волнового поля в полной модели (слева), разность между волновыми полями для полной модели и для модели с газозаполненными трещинами (справа)

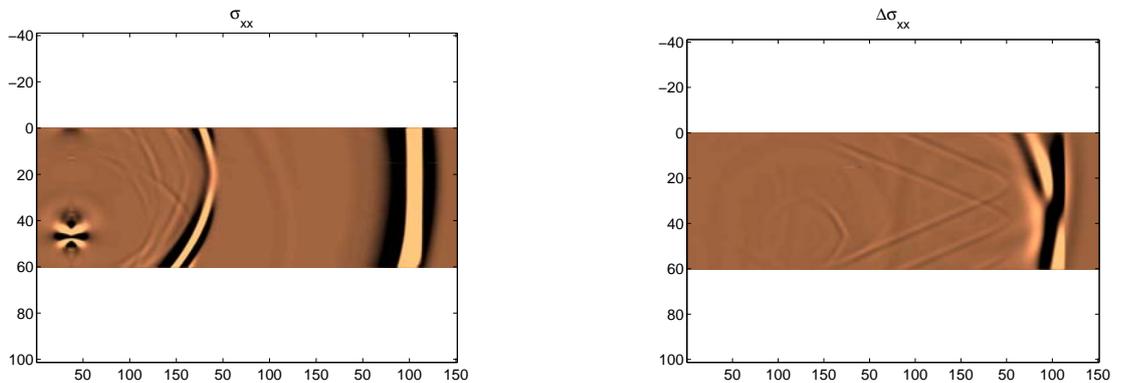


Рисунок 1.39 – Моментальный снимок волнового поля в полной модели (слева), разность между волновыми полями для полной модели и для модели с газозаполненными трещинами (справа)

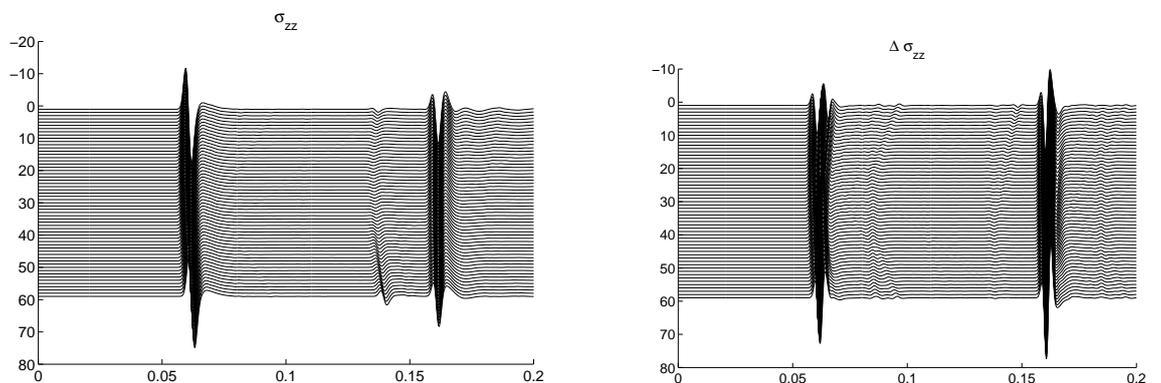


Рисунок 1.40 – Давление, зарегистрированное в правой скважине (слева), разность сейсмограмм для полной модели и модели с газозаполненными трещинами (справа). По горизонтальной оси отложено время в секундах, по вертикальной - координата положения приемника на оси скважины

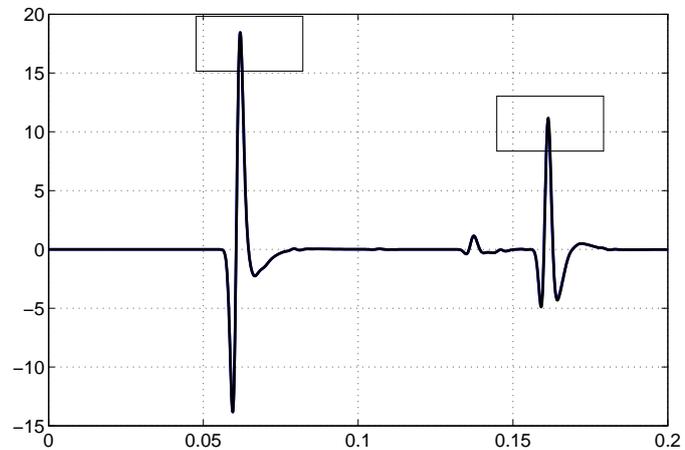


Рисунок 1.41 – Трасса, записанная в правой скважине. Черная линия соответствует решению в модели с обводнением, синяя - в модели с газозаполненными трещинами гидроразрыва. Прямоугольниками выделены части графика, увеличенные на рис. 1.42.

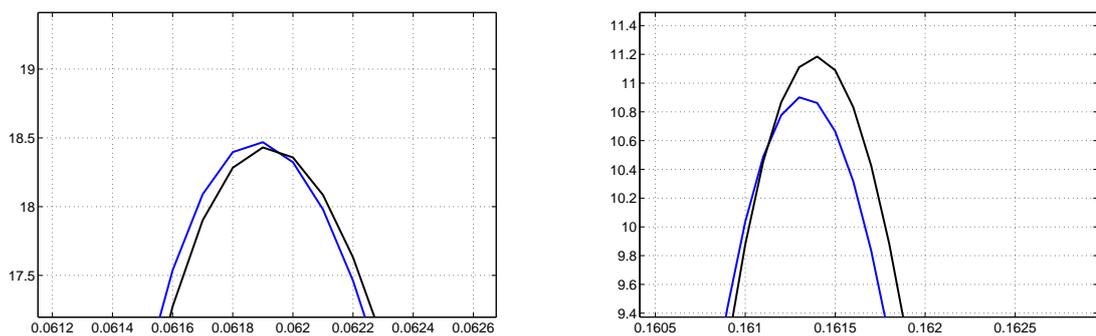


Рисунок 1.42 – Давление, зарегистрированное в правой скважине (слева), разность сейсмограмм для полной модели и модели с газозаполненными трещинами гидроразрыва (справа). По горизонтальной оси отложено время в секундах, по вертикальной - координата положения приемника на оси скважины.

### 1.6.3 Оценка влияния флюидонасыщения мелкомасштабных неоднородностей на интенсивность рассеяния

Это исследование выполняется для определения особенностей распространения волновых полей в моделях, содержащих мелкомасштабные включения с разным заполнением кавернозно-трещиноватого пространства. В частности, для выделения флюидонасыщенных и минерализованных каверн и трещин по результатам обработки и интерпретации рассеянной компоненты волнового поля путем построения и изучения реалистичной сейсмогеологической модели среды с учетом физических свойств пород и проведения полномасштабных расчетов волновых полей. Обработка и интерпретация данных с выделением характерных признаков флюидонасыщения проводилась специалистами ООО "РН-КрасноярскНИПИнефть", в частности Мерзликиной А.С. и детально обсуждается в работах [259], [368]. Ниже результаты обработки и интерпретации используются лишь как иллюстративный материал.

#### 1.6.3.1 Построение модели

Построение реалистичной сейсмогеологической модели среды выполняется в два этапа. Первый - разработка макроскоростной модели, описывающей распределение основных горизонтов и сейсмических параметров в слоях. Такая модель предоставлена специалистами ООО "РН-КрасноярскНИПИнефть". Затем - введение в модель скоплений мелкомасштабных неоднородностей, характерные размеры и положение которых задаются. Используются следующие размеры: 4 км в направлении, параллельном характерной ориентации каверн/трещин, в дальнейших обозначениях - ось  $X$ , 3 км в направлении, нормальном к трещинам, далее - ось  $Y$ , и 3 км в глубину - ось  $Z$ . Модель включает 11 субгоризонтальных слоев, скорости продольных волн в которых варьируются от 4500 м/с до 6500 м/с, что характерно для карбонатных отложений ( рис. 1.43-1.46).

Далее в макроскоростную модель вводятся мелкомасштабные неоднородности размером  $1.0 \times 0.25 \times 1.0$  м. Важно, что в сеточную модель неоднородности вводятся локально. То есть макроскоростная модель дискретизована с шагом 3.75 м. Для

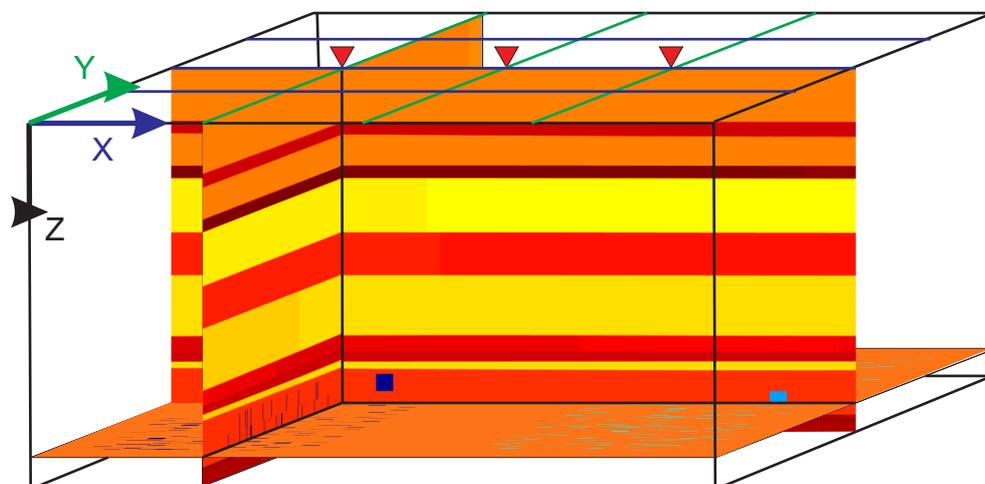


Рисунок 1.43 – Общий вид модели для изучения влияния флюидонасыщения на интенсивность рассеяния. Флюидонасыщенные включения обозначены темно-синим цветом, минерализованные - голубым

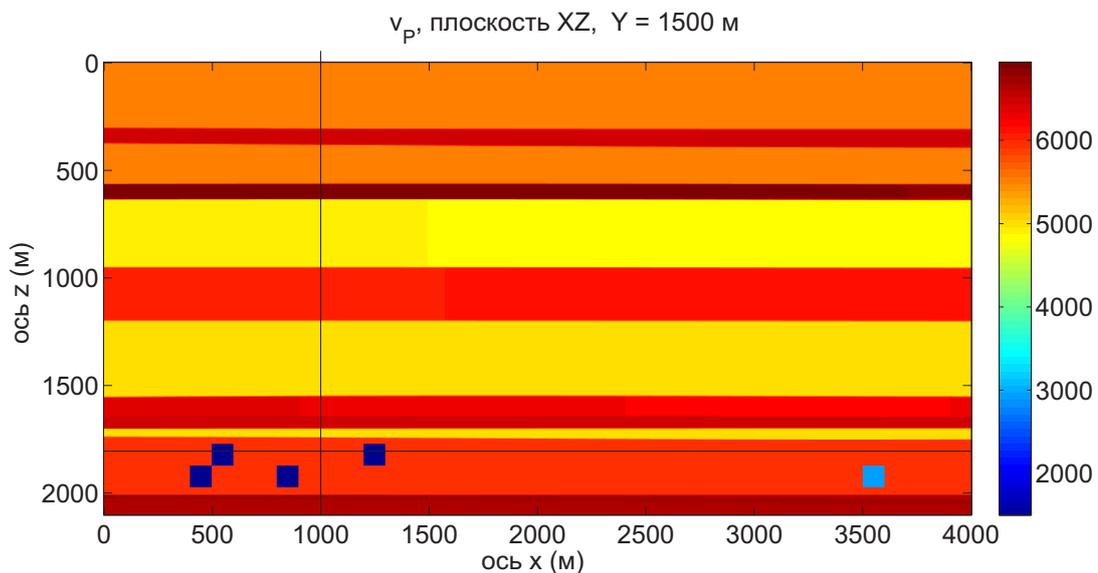


Рисунок 1.44 – Вид модели для изучения влияния флюидонасыщения на интенсивность рассеяния в плоскости XZ параллельной трещиноватости. Флюидонасыщенные включения обозначены темно-синим цветом, минерализованные - голубым

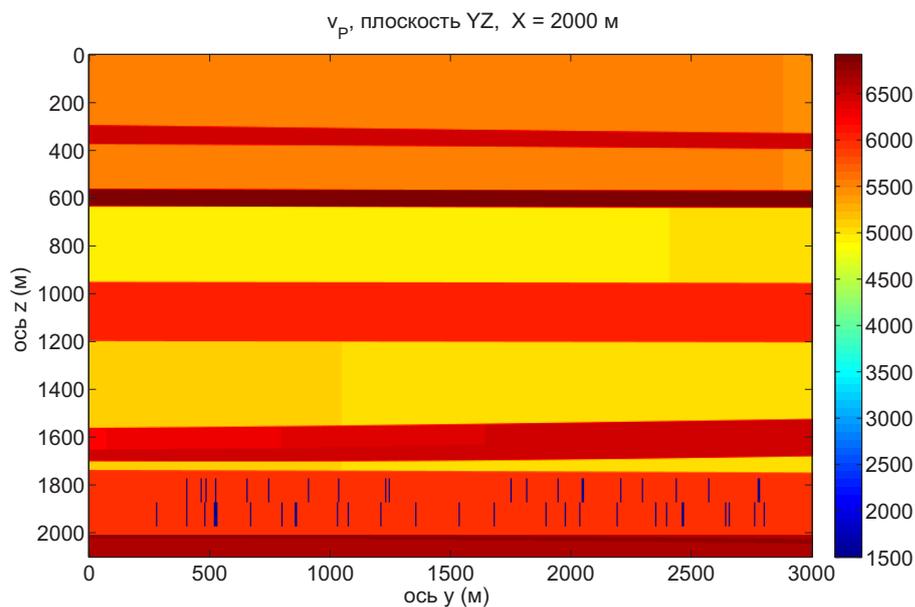


Рисунок 1.45 – Вид моделей для изучения влияния флюидонасыщения на интенсивность рассеяния в плоскости YZ - нормальной к трещинам. Флюидонасыщенные включения обозначены темно-синим цветом, минерализованные - голубым.

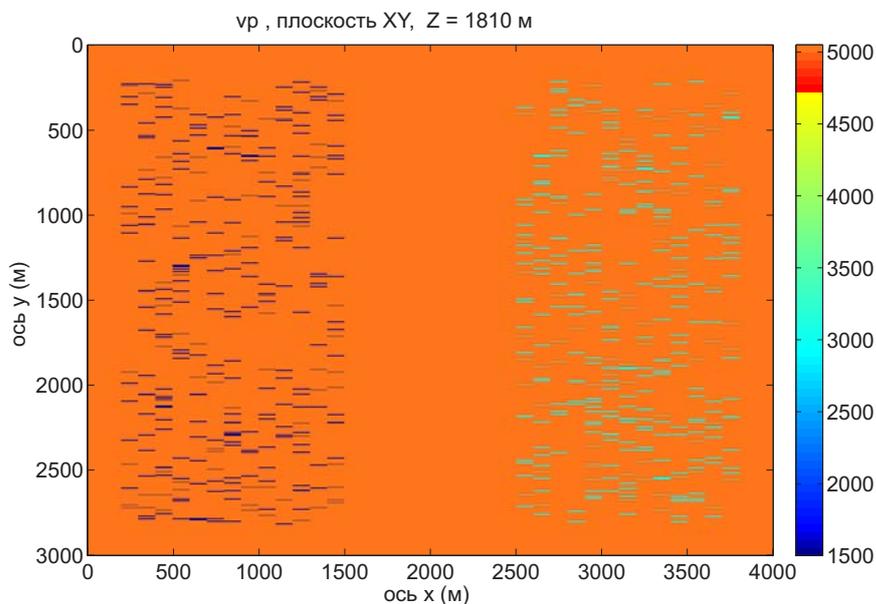


Рисунок 1.46 – Вид резервуара в горизонтальной плоскости для изучения влияния флюидонасыщения на интенсивность рассеяния. Флюидонасыщенные включения обозначены темно-синим цветом, минерализованные - голубым.

дискретизации резервуара (части модели, содержащей скопления неоднородностей) применяется сетка с шагом 0.25 м и именно на этой сетке локально вводятся неоднородности. Распределение неоднородностей задается равномерным с вероятностью, обеспечивающей объемную концентрацию неоднородностей 5%.

Для определения свойств неоднородностей как минерализованных, так и флюидонасыщенных используется модель Гассмана [184]. При этом параметры эффективной идеально упругой среды вычисляются по физическим параметрам скелета пористой породы и флюида, заполняющего поровое пространство, по следующим формулам:

$$\frac{K_{sat}}{K_G - K_{sat}} = \frac{K_{dry}}{K_G - K_{dry}} + \frac{K_{fl}}{\varphi(K_G - K_{fl})}, \quad (1.56)$$

$$\mu_{sat} = \mu_{dry}, \quad \rho_{sat} = \varphi\rho_{fl} + (1 - \varphi)\rho_{dry},$$

где  $K = \lambda + 2/3\mu$  - модуль всестороннего сжатия,  $\mu$  - модуль сдвига (один из параметров Ламэ),  $\rho$  - плотность,  $\varphi$  - пористость [263]. Используемые индексы: *sat* - эффективные параметры для флюидонасыщенной среды, *dry* - параметры сухой породы, *G* - параметры зерен, образующих пористую породу, *fl* - параметры флюида, заполняющего поровое пространство.

Здесь предпосылкой является то, что неоднородности указанной природы и размеров - каверны и трещины - всегда заполнены высокопористым упругим материалом, а скелет порового пространства, заполняющего каверны и трещины, сформирован из зерен вмещающей породы. В таком случае заполнение пространства происходило разрушенными в результате закритических деформаций обломками породы. Такое предположение подтверждается результатами исследований в области геомеханики приразломных зон [173], [153]. Исходя из этого задаются петрофизические параметры зерен пористой среды, заполняющей включения, и параметры флюида. Однако для построения модели среды, заполняющей неоднородности, необходимо, согласно формулам (1.56), задать параметры сухой пористой породы. Для оценки этих параметров используется эмпирическая модель [68]:

$$K_{dry} = K_G(1 - \varphi)^{\frac{3}{1-\varphi}}, \quad \mu_{dry} = \frac{K_{dry}}{K_G}\mu_G, \quad \rho_{dry} = \rho_G(1 - \varphi). \quad (1.57)$$

Для описания зерен используются параметры (на 15% выше аналогичных парамет-

ров вмещающей среды):  $K_G = 80$  ГПа,  $\mu_G = 47,7$  ГПа,  $\rho_G = 2840$  кг/м<sup>3</sup>,  $\varphi = 0.3$ . Тогда параметры сухой породы принимают следующие значения:  $K_G = 17$  ГПа,  $\mu_G = 10$  ГПа,  $\rho_G = 2000$  кг/м<sup>3</sup>. Модель флюидонасыщенной породы рассчитывается в предположении полного заполнения порового пространства нефтью (скорость волн  $V_{fl} = 1500$  м/с, плотность  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>):  $K_{sat} = 8$  ГПа,  $\mu_G = 10$  ГПа,  $\rho_G = 1680$  кг/м<sup>3</sup>, что соответствует сейсмическим скоростям:  $V_p = 3570$  м/с,  $V_s = 2440$  м/с.

Модель для минерализованных трещин рассчитывается в предположении, что заполняющая порода состоит из тех же зерен, однако с существенно более плотной упаковкой - меньшей пористостью, что также согласуется с геомеханическими моделями приразломных зон [173], [153]. В этом случае в минерализованных трещинах пористость предполагается 3%, что соответствует значениям сейсмических скоростей в минерализованных трещинах:  $V_p = 6800$  м/с,  $V_s = 3940$  м/с, и плотности  $\rho = 2755$  кг/м<sup>3</sup>.

### 1.6.3.2 Рассчитанные волновые поля

Расчет волновых полей в полученной модели проводится для серии источников, расположенных на свободной поверхности на линии  $Y = 1500$  м. Шаг приемников по направлению  $X$  составляет 200 м. Моделируется воздействие источника типа вертикальной силы с импульсом Риккера с доминирующей частотой 30 Гц в качестве функции источника. Для сравнительного анализа наибольший интерес представляют три основных положения источников в точках  $X = 1000$  м - непосредственно над флюидонасыщенными включениями,  $X = 2000$  м - между скоплениями флюидонасыщенных и минерализованных включений и  $X = 3000$  м - над минерализованными включениями. Рассматриваемые положения источников обозначены красными треугольниками на рис. 1.43. (Расчеты выполнялись д.ф.-м.н. Г.В. Решетовой с использованием разработанной ею научно-исследовательской версии программного обеспечения с использованием кластера Сибирского суперкомпьютерного центра.)

Рассчитанные волновые поля (рис. 1.47-1.49), зарегистрированные на уровне резервуара, позволяют наблюдать процесс взаимодействия сейсмических волн с мелко-масштабными неоднородностями. Видно, что часть энергии оказывается "зажатой" в трещине. Эта энергия порождает продолжительные по времени вторичные колеба-

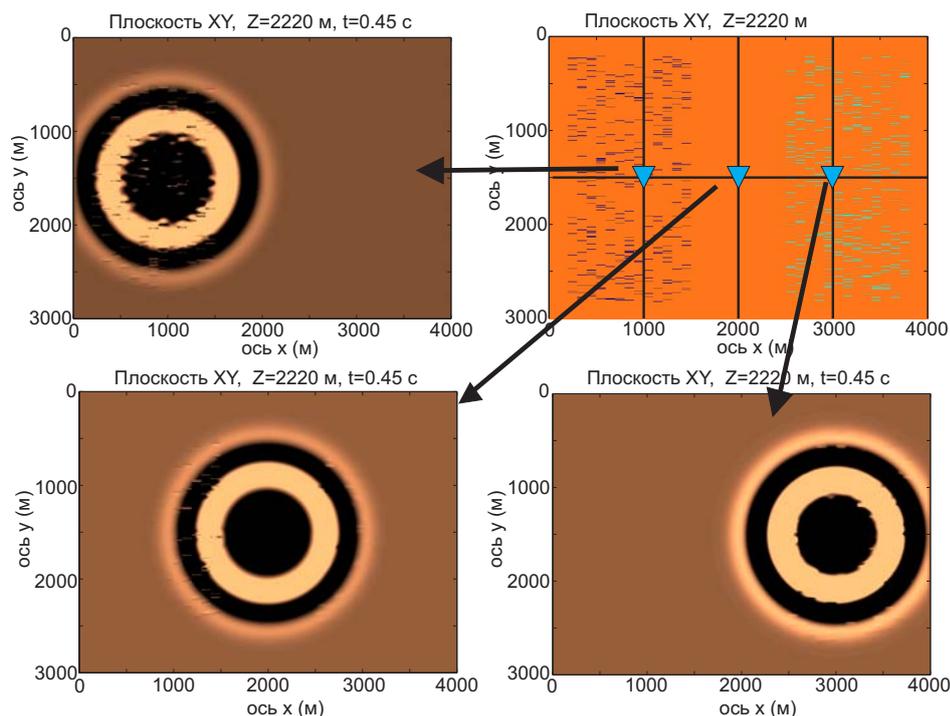


Рисунок 1.47 – Схема системы наблюдений и волновые поля, зарегистрированные на уровне резервуара в момент времени  $t = 0.45$  с для разных положений источников

ния, что приводит к переизлучению сейсмических волн в среду (рис. 1.50-1.52).

Для изучения проявлений неоднородностей в волновых полях проводится две серии экспериментов: рассчитывается поле в модели со скоплениями неоднородностей и без них. После чего анализируется разность зарегистрированных на поверхности волновых полей. На сейсмограммах, зарегистрированных на линии наблюдения, параллельной трещинам (рис. 1.53), и на разностных сейсмограммах, не содержащих прямых и отраженных волн (рис. 1.54), видно, что энергия рассеянной компоненты при взаимодействии волн с флюидонасыщенной структурой существенно выше, чем при взаимодействии с минерализованными трещинами, сейсмический отклик от флюидонасыщенной структуры продолжительнее по времени.

### 1.6.3.3 Обработки данных полевых наблюдений

Обработка и интерпретации как синтетических, так и полевых данных выполнены в ООО "РН-КрасноярскНИПИнефть" Мерзликиной А.С., и детально обсуждаются в работах [259], [368]. Здесь они используются лишь как иллюстративный материал. Выделение рассеянной компоненты поля проводится методом несимметричного

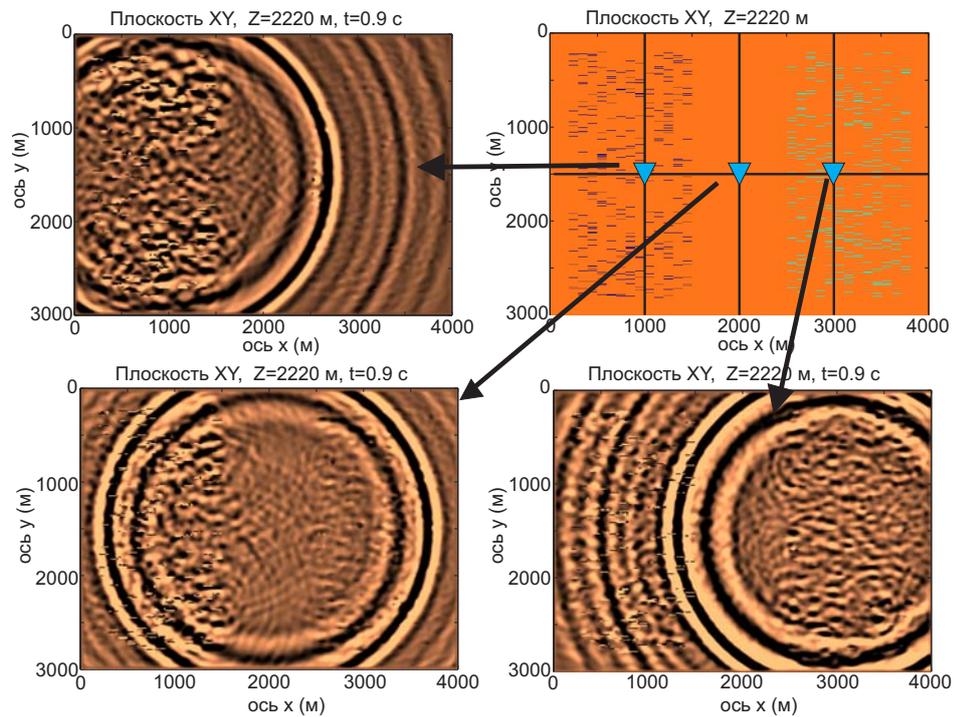


Рисунок 1.48 – Схема системы наблюдений и волновые поля, зарегистрированные на уровне резервуара в момент времени  $t = 0.9$  с для разных положений источников

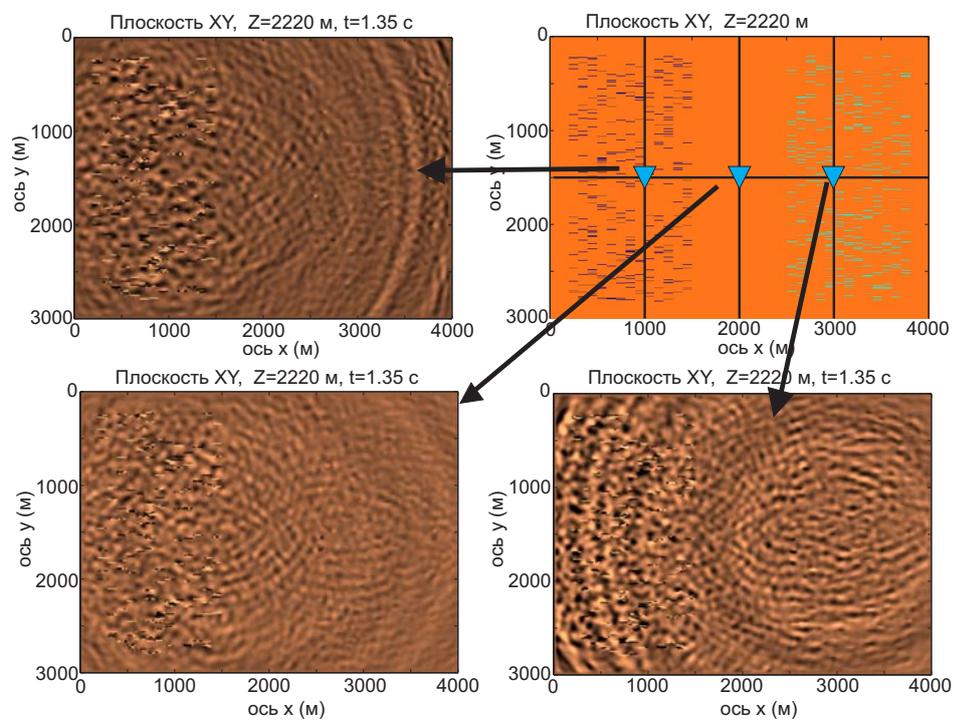


Рисунок 1.49 – Схема системы наблюдений и волновые поля, зарегистрированные на уровне резервуара в момент времени  $t = 1.35$  с для разных положений источников

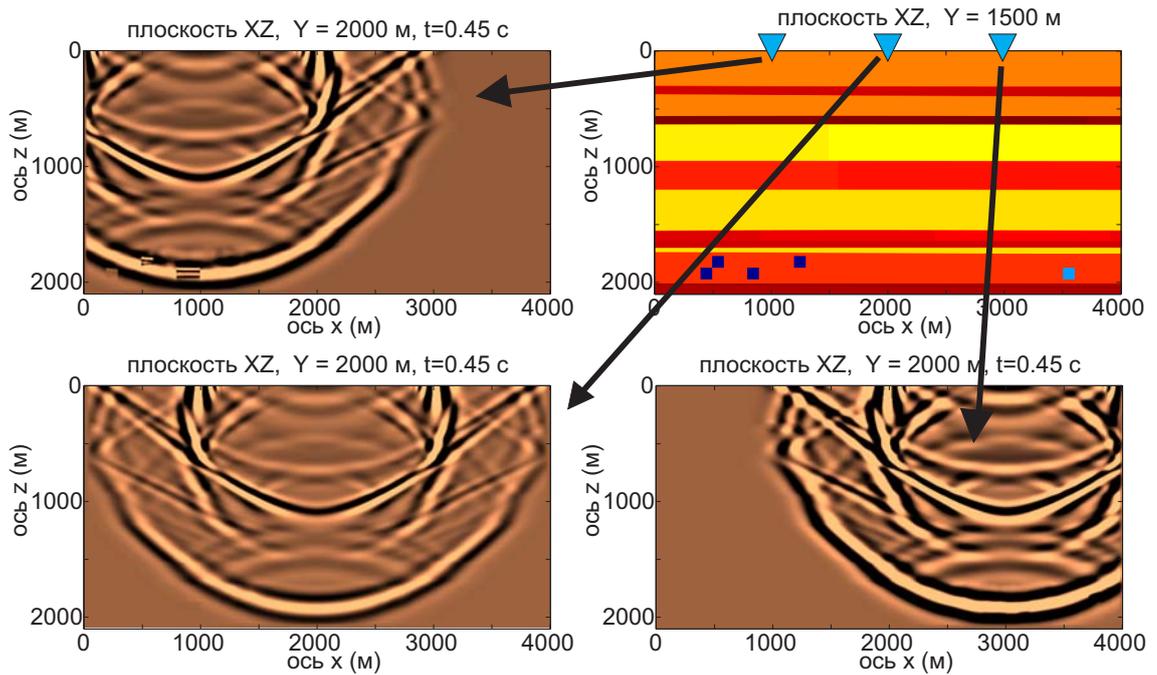


Рисунок 1.50 – Схема системы наблюдений и волновые поля, зарегистрированные на вертикальной плоскости, параллельной трещинам, в момент времени  $t = 0.45$  с для разных положений источников

суммирования [216] и [335]. На временном сейсмическом разрезе (рис. 1.55) отчетливо прослеживаются повышенные значения энергии рассеянных волн, при этом аномалия имеет характерную вытянутую по времени форму, что как раз и связано с продолжительным временным откликом флюидонасыщенной среды на сейсмическое воздействие. Аналогичные аномалии выделяются на полевых данных Юрубчено-Тохомского лицензионного участка (рис. 1.56). В ООО "РН-КрасноярскНИПИнефть" выполнено картирование энергии многократного рассеяния, с использованием которого, в совокупности с данными обработки и интерпретации регулярной компоненты поля, оконтурены перспективные нефтегазоносные участки (рис. 1.57), что в дальнейшем подтверждено результатами разведочного бурения (рис. 1.58).

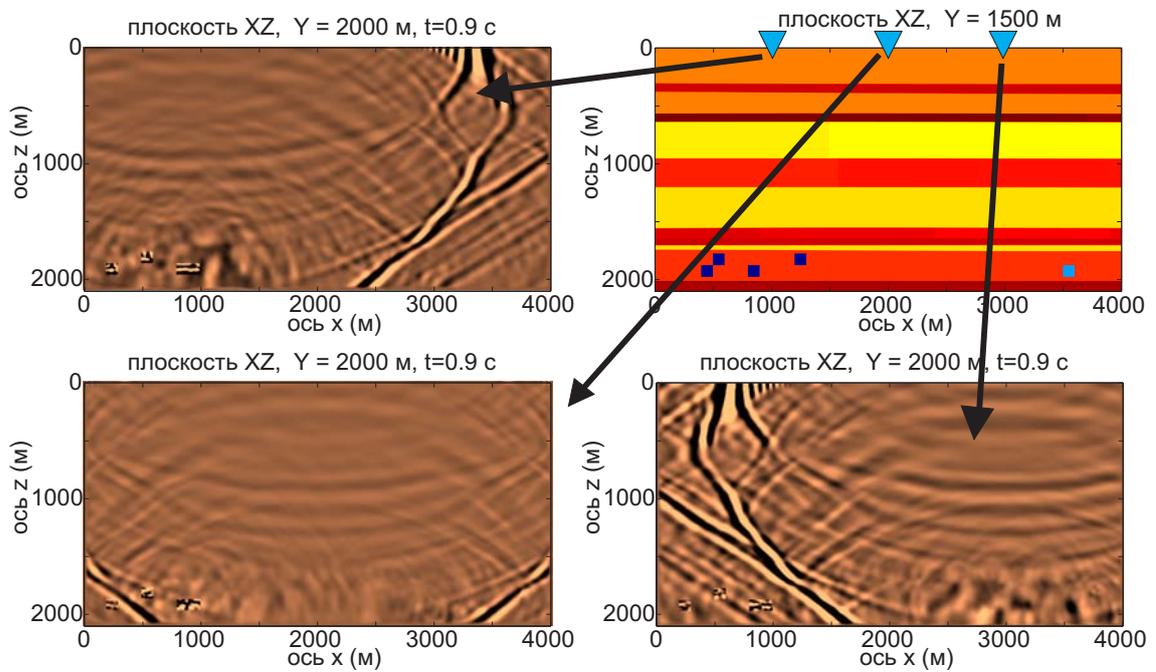


Рисунок 1.51 – Схема системы наблюдений и волновые поля, зарегистрированные на вертикальной плоскости, параллельной трещинам, в момент времени  $t = 0.9$  с для разных положений источников.

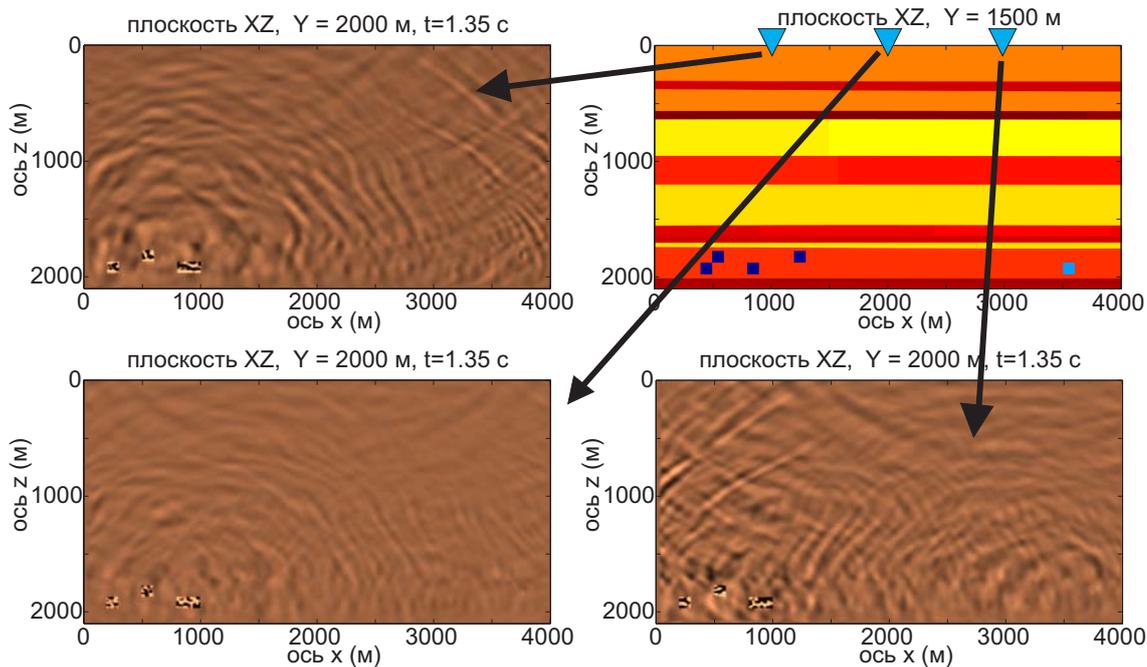


Рисунок 1.52 – Схема системы наблюдений и волновые поля, зарегистрированные на вертикальной плоскости, параллельной трещинам, в момент времени  $t = 1.35$  с для разных положений источников

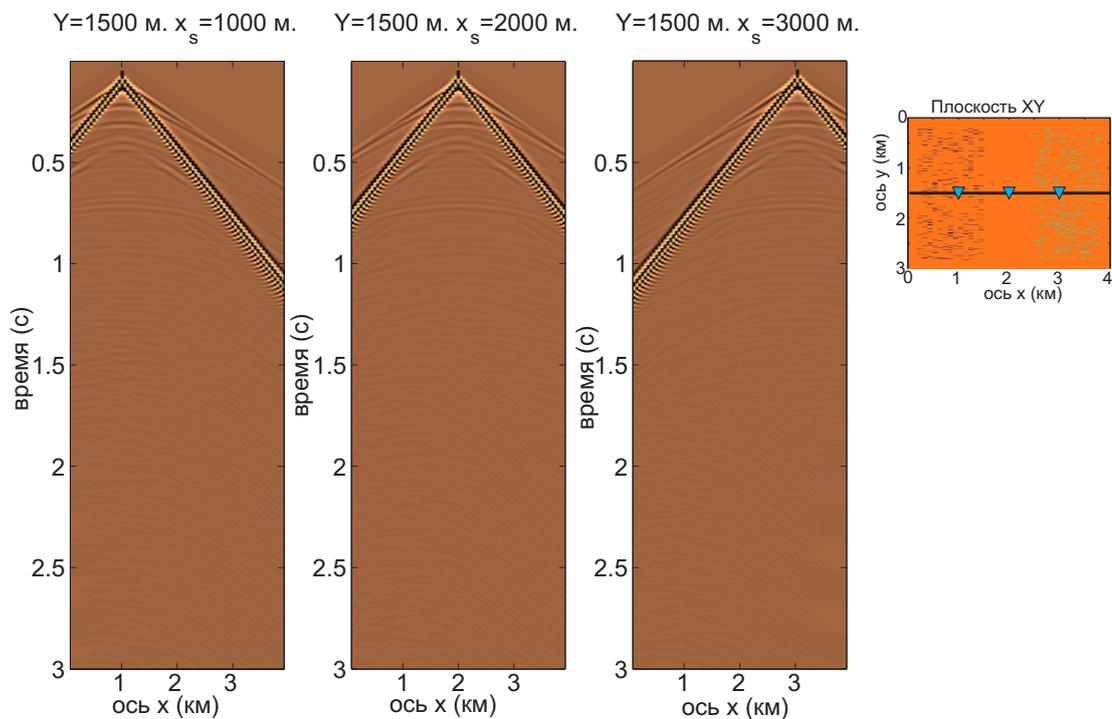


Рисунок 1.53 – Схема системы наблюдений и сейсмограммы (вертикальная компонента вектора скорости), зарегистрированные на линии  $Y = 1500$  м для разных положений источников

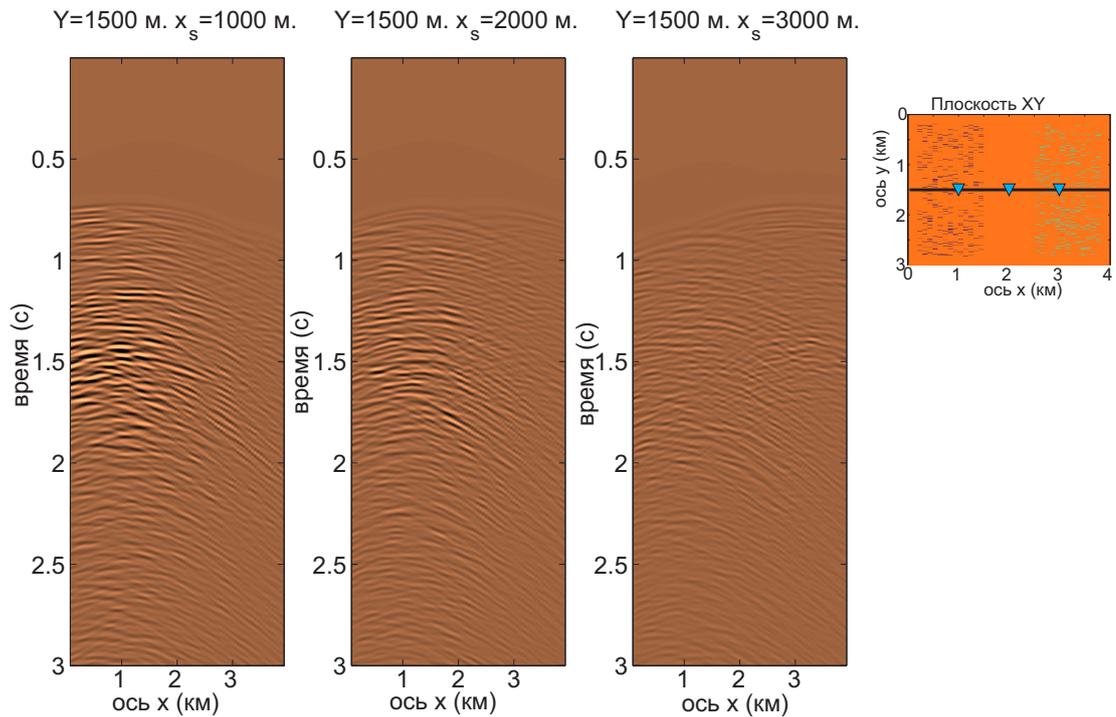


Рисунок 1.54 – Схема системы наблюдений и разностные сейсмограммы (вертикальная компонента вектора скорости), зарегистрированные на линии  $Y = 1500$  м для разных положений источников

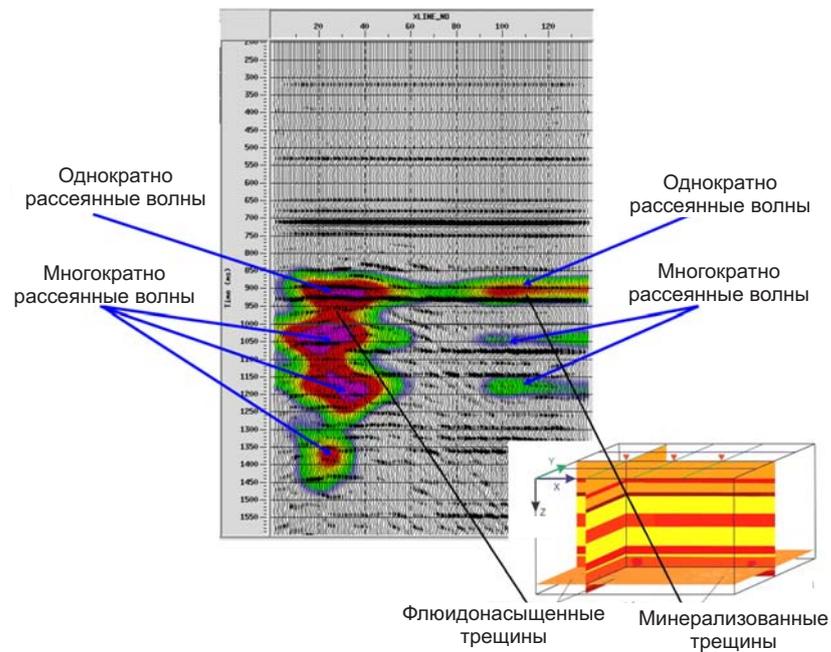


Рисунок 1.55 – Временной сейсмический разрез, полученный по данным моделирования, приведенным в предыдущем разделе. Цветом указана амплитуда рассеянной компоненты волнового поля в условных единицах.

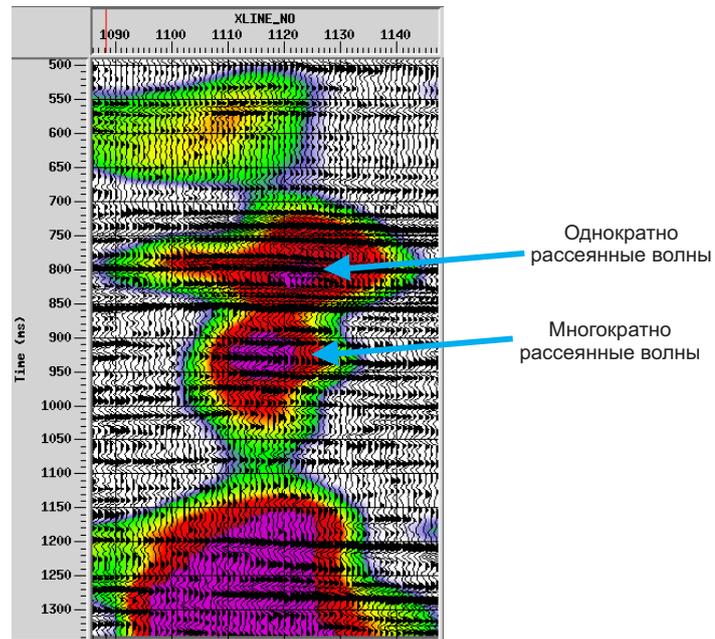


Рисунок 1.56 – Временной сейсмический разрез, полученный по данным полевых сейсмических наблюдений на Юрубчено-Тохомском лицензионном участке. Цветом указана амплитуда рассеянной компоненты волнового поля в условных единицах.

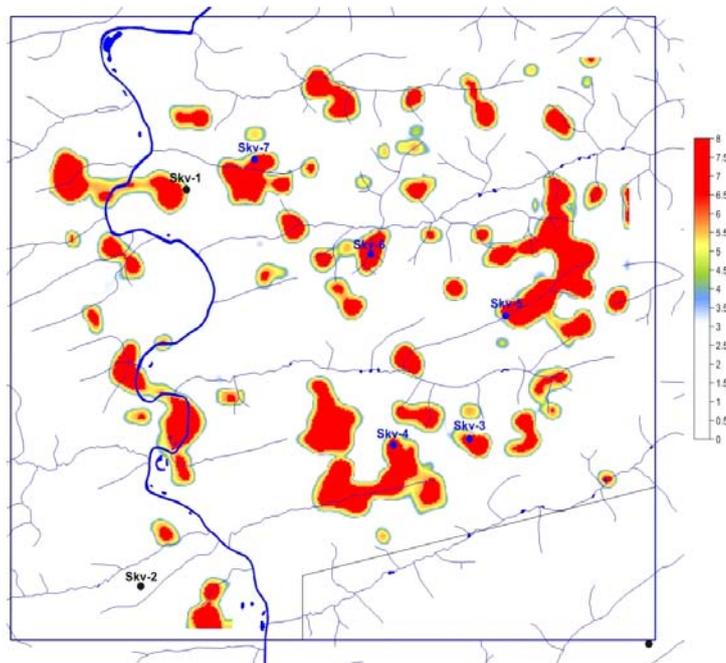


Рисунок 1.57 – Карта распределения интенсивности множественного рассеяния (в условных единицах) на Юрубчено-Тохомском лицензионном участке.

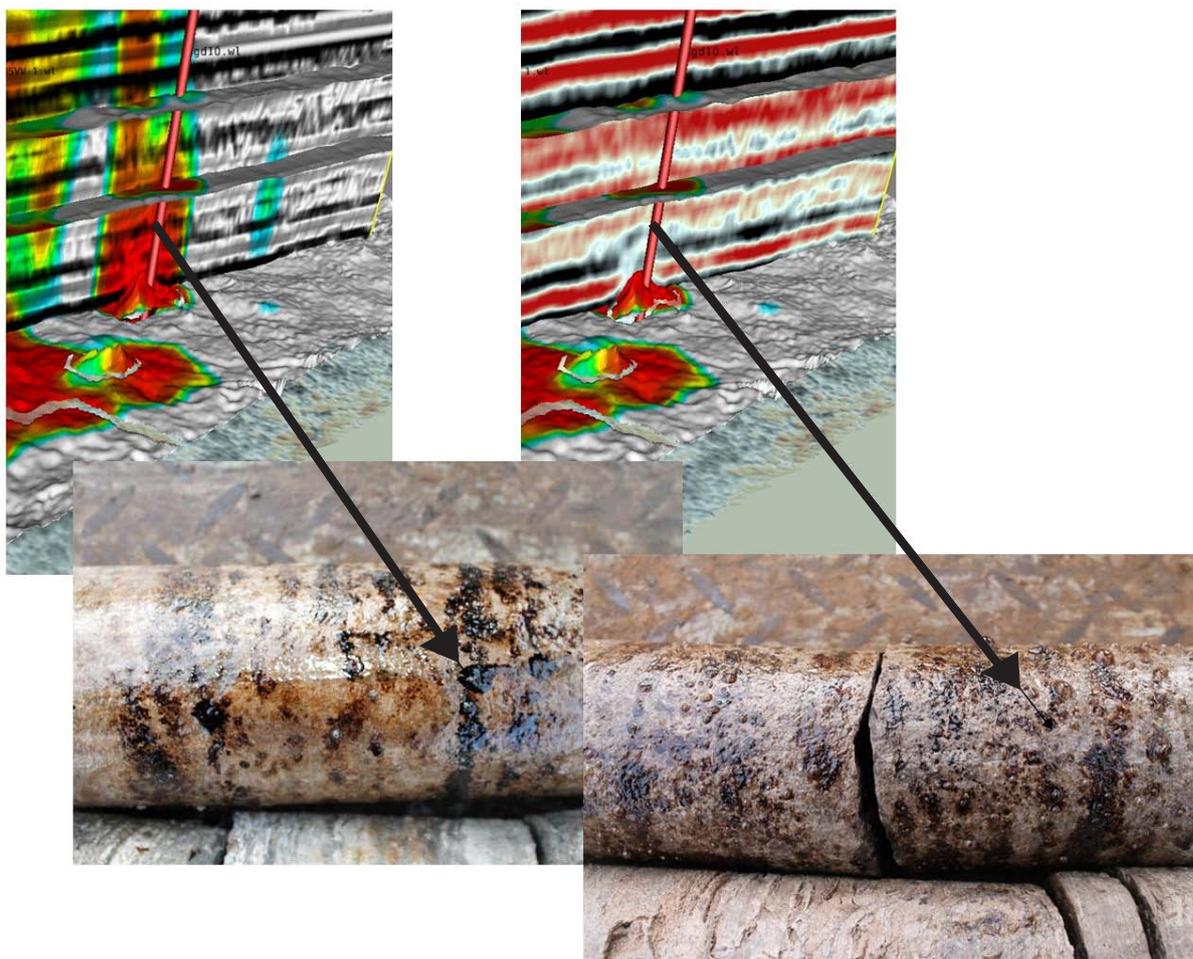


Рисунок 1.58 – Образцы керна с признаками нефтенасыщения, полученного в результате разведочного бурения по данным картирования интенсивности многократного рассеяния сейсмических полей.

## Глава 2

# Разработка метода и алгоритмов расчета волновых полей сейсмических в средах с анизотропными включениями

### 2.1 Изученность решения задачи

Сейсмическая анизотропия - зависимость скоростей сейсмических волн от направления - широко распространенное свойство, учет которого необходим при обработке сейсмических данных [16], [381]. Наличие анизотропии может быть обусловлено широким набором факторов, начиная от структуры кристаллической решетки минералов и заканчивая мезомасштабными неоднородностями, такими как тонкослоистые пропластки мощностью до одной пятой длины волны. Если же говорить о причинах анизотропии, оказывающей наибольшее влияние на сейсмические волновые поля, то следует выделить прежде всего породы с преимущественной ориентацией зерен либо породы, обладающие плитчатой отдельностью, характерной, например, для глинистых сланцев [375], [75], [342]. Наличием тонкослоистых пропластков приводит к различию скорости распространения в направлении, нормальном залегаению, и скорости распространения волн вдоль слоев. Этот эффект детально исследован теоретически [95], [321], [392], [191] экспериментально [133] и численно [78],

[290]. Наибольший практический интерес представляет сейсмическая анизотропия, связанная с наличием ориентированной трещиноватости в пласте, поскольку именно по этой зависимости скорости от направления распространения волн можно судить об ориентации трещин, об их распределении, возможном флюидонасыщении и, как следствие, о фильтрационно-емкостных свойствах коллектора. Однако здесь следует отметить, тот факт, что, в отличие от тонкослоистых пропластков, где теоретические модели эффективных анизотропных сред верифицированы как лабораторно, так и численно, в случае трещиноватых сред известен ряд моделей [52], [3], [210], [147], [219], [323], [188], [207] и др., которые однозначно выделяют лишь направление оси симметрии получаемой трансверсально-изотропной среды, в то время как получаемые значения сейсмических скоростей варьируются в весьма широком диапазоне. В частности, в работе [67] на основе прямого численного моделирования показано, что ни одна из рассматриваемых моделей не является достаточно точной макроскоростной аппроксимацией исходной трещиноватой среды, что, как следствие, приводит к искажению коэффициентов отражения от трещиноватого слоя. Еще одним важным физическим свойством, определяющим наличие анизотропии в среде, является предварительное напряженное состояние, отличное от гидростатического. Лабораторные исследования, подтверждающие такого рода эффекты, представлены, например, в работах [330], [140], а численные исследования выполнены Е.В. Лысем [5]. Подобные локальные аномалии распределения напряжений в среде могут возникать в окрестности скважин из-за локальной разгрузки породы [334], [380], [346], [79] или при наличии интрузий с существенно отличными от вмещающей породы механическими свойствами, таких как соляные диапиры [327].

Приведенные примеры говорят об актуальности задачи численного моделирования волновых процессов в анизотропных упругих средах. Традиционно такое моделирование проводится во временной области с использованием явных по времени подходов, вне зависимости от способа аппроксимации пространственной части оператора [371]. В этом случае, в отличие от неявных схем или построения решения в частотной области, не нужно решать систему линейных алгебраических уравнений на каждом шаге по времени или для каждой отдельной частоты. В результате вычислительная сложность алгоритма, число операций, объем необходимой для решения оперативной

памяти и время вычислений для явных по времени алгоритмов существенно ниже, чем для неявных и для алгоритмов в частотной области, даже с использованием таких технологий решения систем алгебраических уравнений, как аппроксимации матрицами малого ранга [194], [54], [8]. При аппроксимации пространственной части оператора, как уже отмечалось, возможно использование любого известного сеточного метода: метода конечных разностей [74], [348], [373], [238], [316]; метода конечных элементов, особенно с диагонализацией матрицы масс или mass-lumped [100], [388]; метода спектральных элементов, получившего большое распространение в приложении к задачам сейсмологии [228], [363]; метода конечных объемов [389], [390], [121]; сеточно-характеристических методов [50], [9], [25], [24], [38], [39]; разрывного метода Галеркина [205], [190], [276], [82], [222], [166], [41]. При всем многообразии численных методов и реализованных на их основе алгоритмов наиболее эффективным и широко применимым остается метод конечных разностей. Связано это прежде всего с тем, что все иные методы требуют построения тетрагональной сетки, которая с достаточной точностью описывала бы положения, по крайней мере, основных интерфейсов в модели, в то время как метод конечных разностей позволяет использовать регулярные параллелепипедальные сетки, сохраняя при этом приемлемую точность [371], [62], [289]. Более того, использование метода конечных разностей позволяет легко проводить распараллеливание алгоритма на основе метода декомпозиции расчетной области, при котором используются геометрические критерии разбиения на параллелепипедальные подобласти [288], [11], [10].

Среди конечно-разностных схем, применяемых для расчета волновых полей в упругих средах, прежде всего следует выделить стандартную схему на сдвинутых сетках, аппроксимирующую систему уравнений динамической теории упругости в случае изотропной среды [372], [373], [238]. В применении к сейсмическому моделированию подход получил широкое распространение с середины 80-х годов прошлого столетия, хотя полный аналог схемы на сдвинутых сетках для уравнений Максвелла был представлен еще в 1966 году в работе [385]. Тем не менее в настоящее время именно стандартная схема на сдвинутых сетках остается наиболее часто используемым инструментом при моделировании волновых процессов в изотропных упругих средах, а также в трансверсально-изотропных и средах с орторомбической симмет-

рией, если оси симметрии этих сред совпадают с осями координат [298], [45], [270], [62], [58]. Обусловлено это тем, что в указанных случаях тензор жесткости, определяющий свойства среды, имеет блочно-диагональную структуру, что позволяет представить закон Гука как набор из четырех независимых систем уравнений, а как следствие, открывается возможность их формального рассмотрения в разных узлах сетки. Если же симметрия среды ниже и тензор жесткости теряет специфическую структуру, то применение стандартной схемы на сдвинутых сетках приведет к необходимости интерполяции компонент поля, а как следствие, снижению точности вычислений. Детально эта проблема обсуждается в работе [215]. Для преодоления указанной трудности предлагаются две схемы на частично сдвинутых сетках: схема на повернутых сетках [316] и схема Лебедева [36]. Следует отметить, что схема Лебедева была предложена в 1964 году для построения разностных аналогов ортогональных разложений дифференциальных операторов, а в приложении к задачам геофизики ее предложил использовать В. Друскин с соавторами [152], [93]. Принцип, лежащий в основе обеих схем, - определение всех компонент заданного тензора в одних и тех же точках сетки, в то время как все компоненты другого тензора могут быть определены в иных точках пространства. Указанные схемы отличаются взаимным расположением узлов сетки, в которых определены все компоненты тензора напряжений и все компоненты вектора скоростей смещений. В результате возникает отличие в дисперсионных свойствах этих двух подходов, как следствие - в выборе шага сетки и в вычислительной сложности алгоритмов, основанных на их применении. При этом схема Лебедева требует на 30% меньше объема оперативной памяти, чем схема на повернутых сетках, для проведения моделирования с заданной точностью [245] и [110]. Сравнение схемы Лебедева со стандартной схемой на сдвинутых сетках показывает, что схема Лебедева требует в точности в четыре раза больше вычислительных ресурсов, чем стандартная схема на сдвинутых сетках. Более того, в случае изотропной среды схема Лебедева распадается на четыре независимые стандартные схемы на сдвинутых сетках [43]. В работе [43] методом дифференциального приближения [59] показано, что схема Лебедева аппроксимирует существенно более широкую систему уравнений, чем исходная система динамической теории упругости. Расширенная система обладает набором из 24 характеристик (12 типов волн), в то

время как исходная - лишь шестью (три типа волн). Важно отметить, что артефактные решения связаны с истинными волнами и определены во всех точках сетки, что существенно осложняет их выделение и исключение. Здесь следует отметить, что геометрия схемы Лебедева такова, что объединением сеток двух независимых схем Лебедева, смещенных друг относительно друга на полшага сетки по одному из пространственных направлений, является классическая несдвинутая сетка. В результате использование классической схемы на несдвинутых сетках требует в два раза больше вычислительных ресурсов, чем применение схемы Лебедева в случае аппроксимации системы уравнений динамической теории упругости, записанной в терминах скоростей и напряжений. Сравнение различных конечно-разностных схем, применяемых для сейсмического моделирования, приведено в серии работ профессора П. Мокзо [61], [271], [291]. Учитывая результаты дисперсионного анализа и оценки вычислительной сложности алгоритмов, можно говорить о том, что схема Лебедева является в настоящее время наиболее эффективным инструментом для расчета сейсмических полей [245], [110], однако в сравнении со стандартной схемой на сдвинутых сетках она чрезвычайно ресурсоемка. При этом зачастую анизотропия проявляется в среде достаточно локально, например в трещиноватом резервуаре, погруженном в изотропное вмещающее пространство. Поэтому алгоритм, комбинирующий схему Лебедева со стандартной схемой на сдвинутых сетках так, чтобы схема Лебедева использовалась лишь в небольшой части модели, содержащей анизотропную формацию, предложен в работах [247], [6], [288], при этом объединение схем проводится минимизацией нефизичных коэффициентов отражения от границы раздела подобластей, в которых используются разные схемы.

Приведенные выше рассуждения про порядок аппроксимации уравнений динамической теории упругости и дисперсионный анализ различных конечно-разностных схем применимы только в случае, если рассматриваются однородные среды, в то время как реалистичные сейсмогеологические модели всегда содержат резкоконтрастные границы раздела, на которых коэффициенты уравнений претерпевают разрыв. Численное решение в окрестности таких разрывов заслуживает отдельного рассмотрения. Все численные методы можно разделить на два класса в зависимости от того, как аппроксимируется уравнение в окрестности разрыва коэффициентов. Первый

класс - методы, основанные на точном описании границы раздела и явной аппроксимации условий на контакте. Однако такой подход сложно реализуем, поскольку число интерфейсов может измеряться сотнями, могут присутствовать всевозможные структурные нарушения пластов и их выклинивания, что приводит к пересечению интерфейсов и чрезвычайно затрудняет построение сеток. Примеры реализации подобных подходов приведены в работах [199], [200], [350], [339], [160], [21]. Принципиально иным классом методов являются однородные схемы (важно отметить, что в англоязычной литературе используется противоположный термин *heterogeneous*), идея которых состоит в том, чтобы использовать одинаковые формулы во всей расчетной области, но модифицировать специальным образом коэффициенты модели в окрестности границ раздела. В частности, эта идея применительно к одномерному уравнению второго порядка приводится и детально анализируется в работе [53] и названа "методом баланса". В применении к уравнениям динамической теории упругости, записанным в виде системы уравнений второго порядка, построение подходящих модификаций коэффициентов для конечно-разностных схем бурно обсуждается в 80-90-х годах прошлого века, в частности, интерес представляют работы [235], [343]. Впоследствии в употребление вошла "стандартная схема на сдвинутых сетках" [373], для которой модификации коэффициентов предлагаются в работах [62], [272], [249], [141], [344], [193], [192]. Здесь следует особо отметить три первые работы. В статье [62] авторы рассматривают стандартную схему на сдвинутых сетках, а границы раздела в среде предполагаются совпадающими с линиями сетки (границами ячеек сетки). В этом случае, основываясь на методе баланса [53], авторами показано, что для сохранения второго порядка сходимости необходимо использовать среднее арифметическое для модификации плотности и среднее гармоническое для модификации сдвигового модуля. В работе [272] предлагается подход, позволяющий проводить модификацию коэффициентов схемы в окрестности интерфейса, пересекающего ячейку сетки, в том числе и для наклонных интерфейсов. Он основан на методе осреднения тонкослоистых пачек [95], [321], что приводит к локальному использованию эффективных анизотропных моделей. Следует отметить, что если исходная модель изотропна, то результирующая модифицированная модель будет трансверсально-изотропной с осью симметрии, ортогональной интерфейсу. В резуль-

тате для границ раздела, параллельных линиям сетки, данный подход можно рассматривать как естественное обобщение метода баланса, при этом все еще возможно использование стандартной схемы на сдвинутых сетках [373]. Если же рассматривается наклонный интерфейс, результирующий тензор жесткости в системе координат, с которой связана сетка, не будет иметь блочно-диагональной структуры, то есть возникает необходимость использования более сложных алгоритмов, например схемы Лебедева или схемы на повернутых сетках, локально в окрестности границы, что достаточно тяжело реализуемо. Еще одним подходом к построению модификаций коэффициентов схемы является требование сохранения скорости сходимости коэффициентов отражения/прохождения конечно-разностных решений в виде плоских волн при прохождении через интерфейс, предложенный в работах [249], [299], [301]. Этот подход представлен только для интерфейсов, параллельных линиям сетки, его достоинством является возможность формального доказательства второго порядка сходимости там, где он достигается. В дополнение, этот подход позволяет проводить построение модификаций на границах контакта жидкость-упругая среда, где предыдущие методы неприменимы. Указанные выше сложности с модификацией коэффициентов схемы в окрестности интерфейсов наиболее актуальны для стандартной схемы на сдвинутых сетках и схемы Лебедева, где, если граница раздела даже совпадает с линией сетки, требуется модификация компонент тензора жесткости [245], [62], [271]. Отличительной особенностью схемы на повернутых сетках является отсутствие необходимости модифицирования тензора жесткости в случае, если граница раздела совпадает с линией сетки. Именно это ее свойство постулируется в качестве основного достоинства, поскольку в случае границы раздела жидкость-упругость такая схема не требует никаких специальных модификаций, а, как следствие, ожидается, что она сохраняет по крайней мере второй порядок сходимости. Однако, как показано в работе [289] по результатам численных экспериментов, наличие границы раздела жидкость-упругость понижает до первого порядок сходимости решения как для схемы Лебедева, так и для схемы на повернутых сетках.

Задачей, заслуживающей отдельного внимания при моделировании волновых процессов, особенно в анизотропных средах, является ограничение расчетной области, или построение слабоотражающих граничных условий. В геофизике прак-

тический интерес представляет численное моделирование волновых процессов в трехмерно-неоднородных анизотропных упругих средах. Расчет волновых полей проводится в ограниченной подобласти неограниченной области. В связи с этим возникает необходимость введения искусственных слабоотражающих граничных условий для ограничения расчетной области. В настоящее время известно достаточно большое количество подходов к построению таких условий [196], [365]. Идеей, лежащей в основе первого класса граничных условий, является требование равенства нулю возмущения, распространяющегося вдоль "приходящей" характеристики. В результате могут быть получены граничные условия третьего рода, в которые входит оператор Пуанкаре-Стеклова (Dirichlet-to-Neumann map) для дополнения расчетной области. В случае, если решается скалярное волновое уравнение в однородной среде, этот оператор имеет достаточно простой вид в частотной области, однако в физическом пространстве он является нелокальным псевдодифференциальным оператором как по времени, так и по пространственным направлениям, касательным к границе. Методы, основанные на работе непосредственно с получаемым оператором, называются "нелокальные слабоотражающие граничные условия". Один из способов работы с такими операторами - разделение на пространственную и временную часть, после чего пространственная часть аппроксимируется с использованием спектральных методов, а для учета временной части используется аппроксимация экспонентами [77], [76], [256], [204]. Этот подход является достаточно эффективным с вычислительной точки зрения, однако применим только в случае сферических границ и однородной модели, по крайней мере в окрестности границы. Более того его обобщение для уравнений динамической теории упругости к настоящему моменту неизвестно. Другой подход к построению нелокальных условий представлен в работах [338], [300], [337], [340], [55], идея которого состоит в предварительном решении задачи для внешности расчетной области, расширенной достаточно, чтобы отражения от ее внешних границ не вернулись в целевую область за расчетное время, и использовании полученного решения на границе. Ясно, что, если решение для внешности построено, то такие условия не требуют сколько-нибудь значимых вычислительных затрат. Более того, такие условия применимы к гиперболическим задачам вне зависимости от сложности модели, включая, что важно, уравнения динамической теории упругости для анизотропной

среды. Однако основным недостатком указанного подхода, который не позволяет применять метод для решения реалистичных задач, является необходимость пересчета граничных условий всякий раз, когда меняется модель среды. Причем этот расчет является существенно (в несколько раз) более ресурсоемким, чем построение решения внутри расчетной области. Еще одним подходом к построению слабоотражающих граничных условий является локализация оператора Пуанкаре-Стеклова. Идея этого метода состоит в построении рациональной аппроксимации оператора в частотной области, после чего действие обратного преобразования Фурье может быть вычислено аналитически. При этом здесь существуют две возможности - работа непосредственно с полиномами высоких степеней, возникающими в числителе и знаменателе аппроксимирующей функции, либо представление аппроксимаций в виде суммы рациональных функций с полиномами не выше первой степени в знаменателе. В первом случае могут быть получены граничные условия, содержащие производные высокого порядка как по пространству, так и по времени [169]. Однако использование таких граничных условий высокого порядка (выше второго) приводит к неустойчивости. Во втором случае, после введения дополнительных переменных, оператор факторизуется на произведение набора дифференциальных операторов первого порядка [87], [101], [187]. Общей трудностью поглощающих граничных условий является сложность обобщения на систему уравнений динамической теории упругости.

Принципиально иная идея лежит в основе метода идеально согласованных слоев, или PML (от английского Perfectly Matched Layers). Данный подход предполагает окружение расчетной области слоем со специфическими нефизичными свойствами, обеспечивающими экспоненциальное затухание решения по мере распространения в нем и отсутствие отражений от границы раздела слой - целевая область. Впервые такая задача была сформулирована и решена в приложении к системе уравнений Максвелла в работе [104]. Этот подход обладает рядом преимуществ: простота построения и реализации, применимость для широкого класса моделей, высокая эффективность - толщина слоя не более 10 точек, то есть менее 10% от объема задачи. На сегодня этот подход детально изучен и развит. Так, в работе [146] представлен алгоритм построения демпфирующих функций, минимизирующих толщину погло-

щающего слоя. В дальнейшем предлагаются многочисленные модификации этого подхода, направленные на упрощение реализации, подавление эванисцентных мод и прочее [85], [87], [206], [353]. Из всего многообразия модификаций PML следует упомянуть следующие. Во-первых, введение дополнительного комплексного сдвига частоты при замене переменных, используемой в PML. Такой подход и получил соответствующее название - complex frequency shifted PML или CFS-PML [162], [163]. Введение сдвига позволяет избежать накопления низкочастотной ошибки, проявляющейся на больших временах расчета. Во-вторых, локализация свертки по времени [227], [260]. При построении стандартного PML вводится комплексная замена переменных только по направлению, нормальному границе раздела, притом применяется она в частотной области. Для построения дифференциальных уравнений во временной области необходимо расщепление переменных поля на сумму двух составляющих, в результате число переменных в PML удваивается по сравнению с числом переменных в исходных уравнениях. Сверточная формулировка [227], [260] только формально позволяет обойти увеличение переменных. На самом же деле, это увеличение происходит позднее, уже во временной области, когда вводятся дополнительные переменные для локализации свертки. В-третьих, принципиально иным является подход к оптимизации PML, предложенный в работе [293]. Идея этого подхода состоит в том, что для построения PML применяется чисто мнимая замена переменных, как показано в этой работе, такая замена является оптимальной. После чего решение задачи в PML аппроксимируется с использованием оптимальных рациональных аппроксимаций аналогично тому, как происходит построение локальных поглощающих граничных условий [169], [101], но вместо введения дополнительных переменных и дифференциальных соотношений на них на границе, вводятся узлы оптимальной или спектрально-согласованной сетки [165], [90], [91], [164] так, что решение полученной дискретизованной задачи в точности совпадает с используемой рациональной аппроксимацией. В результате такой подход обеспечивает экспоненциальную сходимость в зависимости от числа узлов, что позволяет использовать от 3 до 5 узлов сетки для получения приемлемого результата, а число неизвестных (компонент поля) в PML не увеличивается. Обобщения данного подхода на систему уравнений динамической теории упругости представлены в [42], [250]. Распространенность этот метод

не получил по двум причинам. Во-первых, сложность построения рациональной аппроксимации и спектрально-согласованных сеток, соответствующих этой аппроксимации. Во-вторых, при построении аппроксимируется оператор Пуанкаре-Стеклова для дифференциальной задачи, а в целевой области применяется конечно-разностная аппроксимация, в результате на границе возникают отражения (порядка 1% от падающей волны), обусловленные ошибкой аппроксимации уравнений в целевой области, которые невозможно подавить, увеличивая число точек в РМЛ.

Несмотря на все достижения в оптимизации РМЛ, одна из основных сложностей, связанная с использованием слабоотражающих граничных условий, все еще остается нерешенной - устойчивость РМЛ при моделировании волновых процессов в анизотропных средах. Первое детальное исследование этой проблемы представлено в работе [102], где показано, что в случае если проекции вектора медленности и вектора групповой скорости на направление, в котором строится РМЛ, имеют разный знак, то получаемая задача Коши некорректна и допускает экспоненциально растущие решения. В однородной изотропной среде таких ситуаций возникнуть не может, поскольку там направления указанных векторов всегда совпадают, однако в анизотропной среде могут возникать каустики волновых фронтов, где направления векторов существенно различаются, примеры таких моделей сред приведены в работах [102], [19], [45]. В течение последних десяти лет предложен ряд подходов к построению слабоотражающих граничных условий, направленных на преодоление указанной трудности. Например, уже упоминавшиеся прозрачные нелокальные граничные условия [338], [300], [337], когда для построения условий решается задача во внешности расчетной области. На аналогичных принципах основан подход расширения расчетной области с последующим применением спектрально-согласованных сеток для снижения вычислительных затрат [45], [251], [90], [93]. Указанные методы универсальны и применимы для сред с любым типом анизотропии, однако они чрезвычайно ресурсоемки, что делает их неприменимыми для решения реалистичных задач. Отдельно следует отметить методы, связанные с построением локальных граничных условий [101], условий, основанных на конечно-элементных аналогах спектрально-согласованных сеток [319], [320] и др. Эти работы посвящены построению условий для скалярных задач либо для системы уравнений Максвелла, где труд-

ности с устойчивостью PML связаны с наклоном оси симметрии среды относительно используемой системы координат [102]. Большинство из них основаны на коррекции наклона. В анизотропной упругой среде такие методы не позволяют избавиться от сложности, поскольку нарушение необходимого условия устойчивости PML (разнонаправленность векторов медленности и групповой скорости) в большинстве случаев связано не с наклоном кристаллографических осей относительно системы координат, а с более сложным поведением индикатрис скоростей. Способом, получившим наибольшее распространение при моделировании волн в анизотропных упругих средах, является многоосный идеально согласованный слой, или MPML (от английского Multi-axial PML), предложенный в работе [267]. Идея его состоит в применении замены переменных не только по направлению, нормальному к границе раздела PML - целевая область, но и по касательным направлениям, но выбирать их с некоторым, достаточно малым весом. Следует отметить, что если замены по всем направлениям совпадают, этот способ эквивалентен методу, в англоязычной литературе называемому sponge layer [331], или, что то же самое, методу с введением в уравнения членов более низкого порядка. В результате получаемая задача Коши остается корректной для любой модели среды. Однако, как показано в работе [19], наличие демпфирования в касательных направлениях приводит к отражению волн от границы раздела MPML - целевая область, которые линейно зависят от величины касательного демпфинга. В результате возникает задача построения оптимального набора демпфирующих множителей для MPML, то есть такого, который обеспечивает устойчивость, но минимизирует отражения [20]. В силу простоты реализации и универсальности этот способ получает широкое распространение, хотя, в сравнение со стандартными формулировками PML, он требует больших вычислительных затрат, а отражения от границы раздела MPML - целевая область выше, чем у стандартного PML.

## 2.2 Постановка задачи

Рассматривается система уравнений динамической теории упругости, записанная в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  - вектор скоростей смещений,  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{kl}$  - компоненты тензоров напряжений и деформаций,  $\rho$  - объемная плотность,  $C_{ijkl}$  - компоненты тензора упругих модулей или тензора жесткости [29]. Если не оговорено противного, предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Система уравнений (2.1) обладает следующими свойствами ([16], [381]):

- тензоры напряжений и деформаций симметричные, то есть

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk};$$

- тензор упругих модулей обладает следующим набором симметрий

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij};$$

- тензор упругих модулей положительно определенный, то есть для любого симметричного тензора  $\xi_{ij}$  верно

$$C_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq \alpha \|\xi_{ij}\|^2, \quad \alpha > 0.$$

Указанные свойства симметрии тензоров позволяют упростить уравнения (2.1), заменив тензор четвертого ранга тензором второго ранга. Если ввести отображение

$p : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , действующее по правилу:

$$\begin{aligned} p(1, 1) &= 1, & p(2, 3) &= p(3, 2) = 4, \\ p(2, 2) &= 2, & p(1, 3) &= p(3, 1) = 5, \\ p(3, 3) &= 3, & p(1, 2) &= p(2, 1) = 6, \end{aligned}$$

то система (2.1) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{13}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{23}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{33}}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Начальные условия предполагаются нулевыми:

$$\begin{aligned} u_i|_{t=0} &= 0, & i &= 1, 2, 3; \\ \sigma_{ij}|_{t=0} &= 0, & i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Типичной является постановка задачи в области  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_3 \geq 0$ . Поверхность  $x_3 = 0$  предполагается свободной от внешних нагрузок:

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{23}|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0.$$

На бесконечности предполагаются условия предельного поглощения, обеспечивающие ограниченность решения. При численном моделировании расчеты проводятся в ограниченной области, что приводит к необходимости построения слабоотражающих граничных условий, обеспечивающих малость отражений от границ расчетной области, с аппроксимацией решения исходной задачи решением задачи в ограничен-

ной области. Известно несколько способов построения таких условий для изотропной среды, однако при анизотропии применение слабоотражающих граничных условий может приводить к неустойчивости решения. Поэтому предлагается использовать метод многоосных идеально согласованных слоев [267], [19], [158], при этом решается задача оптимизации этих слоев с целью понижения нефизичных отражений от границ расчетной области при сохранении устойчивости решения.

Система уравнений 2.2 решается методом конечных разностей на частично разнесенных сетках [36]. Однако такая общая постановка является чрезвычайно ресурсоемкой по сравнению со схемами на разнесенных сетках, когда компоненты одного вектора могут использоваться в разных узлах (1.4). Поэтому в этой главе решается задача разработки алгоритма, комбинирующего две конечно-разностные схемы так, что схема Лебедева или схема на частично разнесенных сетках применяется в области, содержащей анизотропные включения, в то время как в основной части расчетной области применяется схема на разнесенных сетках (1.4).

## **2.3 Исследование конечно-разностных схем для расчета волновых полей в анизотропных средах**

В настоящее время известен ряд способов моделирования волновых процессов в анизотропных средах с использованием разных численных методов. Наиболее распространенным в силу высокой вычислительной эффективности, простоты параллельной реализации и применимости к средам любой сложности является метод конечных разностей [371]. Среди всего многообразия конечно-разностных схем для исследования выбираются лишь схемы, ориентированные на решение системы уравнений линейной динамической теории упругости для анизотропных сред. В этом случае рассмотрение достаточно ограничить схемами второго порядка точности, но существенно отличными сетками и, как следствие, пространственными шаблонами, в частности, схемой Лебедева [36], [93], [245] и схемой на повернутых сетках [316]. При этом удобно проводить рассмотрение двух- и трехмерной постановок отдельно.

## 2.3.1 Аппроксимация, устойчивость, численная дисперсия

### 2.3.1.1 Двумерная постановка

Рассматривается система динамической теории упругости в двумерной постановке, записанная в декартовой системе координат в дивергентной форме:

$$\begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \vec{u} \\ \partial_t \vec{\sigma} \end{pmatrix} - \sum_{m=1}^2 \begin{pmatrix} 0 & A_m \\ A_m^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_m \vec{u} \\ \partial_m \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_u \\ \vec{f}_\sigma \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где  $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$  - вектор скоростей смещений,  $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$  - векторная запись тензора напряжений,  $\rho$  - плотность среды,  $S$  - тензор податливости (обратный к тензору жесткости  $C$ ) [16], [381], который является симметричным положительно определенным. В последующем используются обозначения:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} = C^{-1}.$$

Важными являются два частных случая: ортотропная среда и изотропная среда. Если оси симметрии ортотропной среды совпадают с осями координат, тензор жесткости имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Для построения конечно-разностной аппроксимации системы уравнений (2.3) удобно ввести сетки с разнесенными узлами: с целыми  $(x_m)_{i_m} = i_m h_m$  и полуцелыми  $(x_m)_{i_m+1/2} = (i_m + 1/2)h_m$  узлами по каждому пространственному направлению, а также по времени  $t^n = \tau n$  и  $t^{n+1/2} = \tau(n + 1/2)$ , индексы, записанные строчными буквами, целые. Параметры  $h_m$  и  $\tau$  обозначают шаги по пространственным направлениям и времени соответственно. На введенных сетках удобно определить операторы

центральных разностей:

$$D_t[g]_{i_1, i_2}^n = \frac{g_{i_1, i_2}^{n+1/2} - g_{i_1, i_2}^{n-1/2}}{\tau} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{i_1, i_2}^n + O(\tau^2), \quad (2.5)$$

$$D_1^L[g]_{i_1, i_2}^n = \frac{g_{i_1+1/2, i_2}^n - g_{i_1-1/2, i_2}^n}{h_1} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{i_1, i_2}^n + O(h_1^2), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} D_1^R[g]_{i_1, i_2}^n &= \frac{1}{2} \frac{g_{i_1+1/2, i_2+1/2}^n - g_{i_1-1/2, i_2-1/2}^n}{h_1} + \frac{1}{2} \frac{g_{i_1+1/2, i_2-1/2}^n - g_{i_1-1/2, i_2+1/2}^n}{h_1} = \\ &= \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{i_1, i_2}^n + O(h_1^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Операторы, аппроксимирующие производные по второму пространственному направлению, могут быть получены из (2.6) и (2.7) перестановкой индексов.

Используя введенные операторы, строятся три наиболее широко применимые схемы, аппроксимирующие систему динамической теории упругости (2.3). Первая схема - стандартная схема на сдвинутых сетках [258], [372], [373], которая применяется в случае, если среда изотропная или ортотропная, что связано с блочно-диагональной структурой тензора жесткости (2.4). Вторая схема, применяемая для анизотропных моделей сред, - схема Лебедева [237], [36], [152], [93] и третья схема - схема на повернутых сетках [316], [315].

**Стандартная схема на сдвинутых сетках.** Для построения этой схемы необходимо определить разные компоненты поля в разных узлах по пространству, после чего воспользоваться операторами (2.5) и (2.6) для аппроксимации производных:

$$\begin{aligned} (\hat{\rho})_{i_1+1/2, i_2} D_t[u_1]_{i_1+1/2, i_2}^{n-1/2} &= D_1^L[\sigma_{11}]_{i_1+1/2, i_2}^{n-1/2} + D_2^L[\sigma_{12}]_{i_1+1/2, i_2}^{n-1/2}, \\ (\hat{\rho})_{i_1, i_2+1/2} D_t[u_2]_{i_1, i_2+1/2}^{n-1/2} &= D_1^L[\sigma_{12}]_{i_1, i_2+1/2}^{n-1/2} + D_2^L[\sigma_{22}]_{i_1, i_2+1/2}^{n-1/2}, \\ D_t[\sigma_{11}]_{i_1, i_2}^n &= (\hat{c}_{11})_{i_1, i_2} D_1^L[u_1]_{i_1, i_2}^n + (\hat{c}_{12})_{i_1, i_2} D_2^L[u_2]_{i_1, i_2}^n, \\ D_t[\sigma_{22}]_{i_1, i_2}^n &= (\hat{c}_{12})_{i_1, i_2} D_1^L[u_1]_{i_1, i_2}^n + (\hat{c}_{22})_{i_1, i_2} D_2^L[u_2]_{i_1, i_2}^n, \\ D_t[\sigma_{12}]_{i_1+1/2, i_2+1/2}^n &= (\hat{c}_{33})_{i_1+1/2, i_2+1/2} \left( D_1^L[u_2]_{i_1+1/2, i_2+1/2}^n + D_2^L[u_1]_{i_1+1/2, i_2+1/2}^n \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из геометрии сетки (рис. 2.1) видно, что симметрия шаблонов обеспечивает второй порядок аппроксимации в случае постоянных коэффициентов. Схема условно устой-

чива при:

$$\Psi = \tau \left[ \max_{\alpha} v_P(\alpha) \right] \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}} \leq 1, \quad (2.9)$$

где  $\Psi$  - число Куранта, а  $v_P$  - фазовая скорость продольной волны в среде. В силу того что модель может быть анизотропна (ортотропна), скорость зависит от направления распространения, что требует выбора максимально возможной скорости для построения условия устойчивости. В случае использования равных шагов по пространственным направлениям данное условие принимает вид [373]:

$$\Psi = \frac{\sqrt{2}\tau [\max_{\alpha} v_P(\alpha)]}{h} \leq 1. \quad (2.10)$$

Численная дисперсия, допускаемая этой схемой (относительная ошибка фазовой скорости), определяется по следующей формуле [141], [142]:

$$\frac{v^{fd}}{v} = \frac{\sqrt{2}N}{\gamma_{P,S}\Psi\pi} \arcsin \left( \frac{\gamma_{P,S}\Psi}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2 \left( \frac{\pi \cos(\alpha)}{N} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi \sin(\alpha)}{N} \right)} \right), \quad (2.11)$$

где  $\alpha$  - угол, определяющий направление распространения волны,  $N = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|h}$  - число точек на длину волны,  $\mathbf{k}$  - волновой вектор,  $h = h_1 = h_2$  - пространственный шаг сетки,  $\Psi$  - число Куранта, определяемое соотношением (2.9),  $\gamma_{P,S}$  - безразмерный параметр:  $\gamma_S = v_S/v_P < 1$  и  $\gamma_P = v_P/v_P = 1$ , определяющий величину отношения поперечной и продольной скоростей волн в среде.

В случае неоднородной среды возникает необходимость вычисления коэффициентов схемы для использования в заданных точках, именно поэтому в приведенной схеме (2.8) используются крышки над параметрами модели, чтобы подчеркнуть, что их построение требует отдельных процедур. Традиционно при использовании стандартной схемы на сдвинутых сетках предполагается, что коэффициенты - достаточно гладкие ограниченные функции внутри ячейки сетки, более того, достаточно ограничиться рассмотрением постоянных внутри ячейки сетки коэффициентов. При этом под ячейкой понимается прямоугольник с вершинами в дробных узлах по обоим пространственным направлениям:  $C^L = [(x_1)_{i_1-1/2}; (x_1)_{i_1+1/2}] \times [(x_2)_{i_2-1/2}; (x_2)_{i_2+1/2}]$  (рис. 2.1). В этом случае для построения коэффициентов схемы на границах ячейки до-

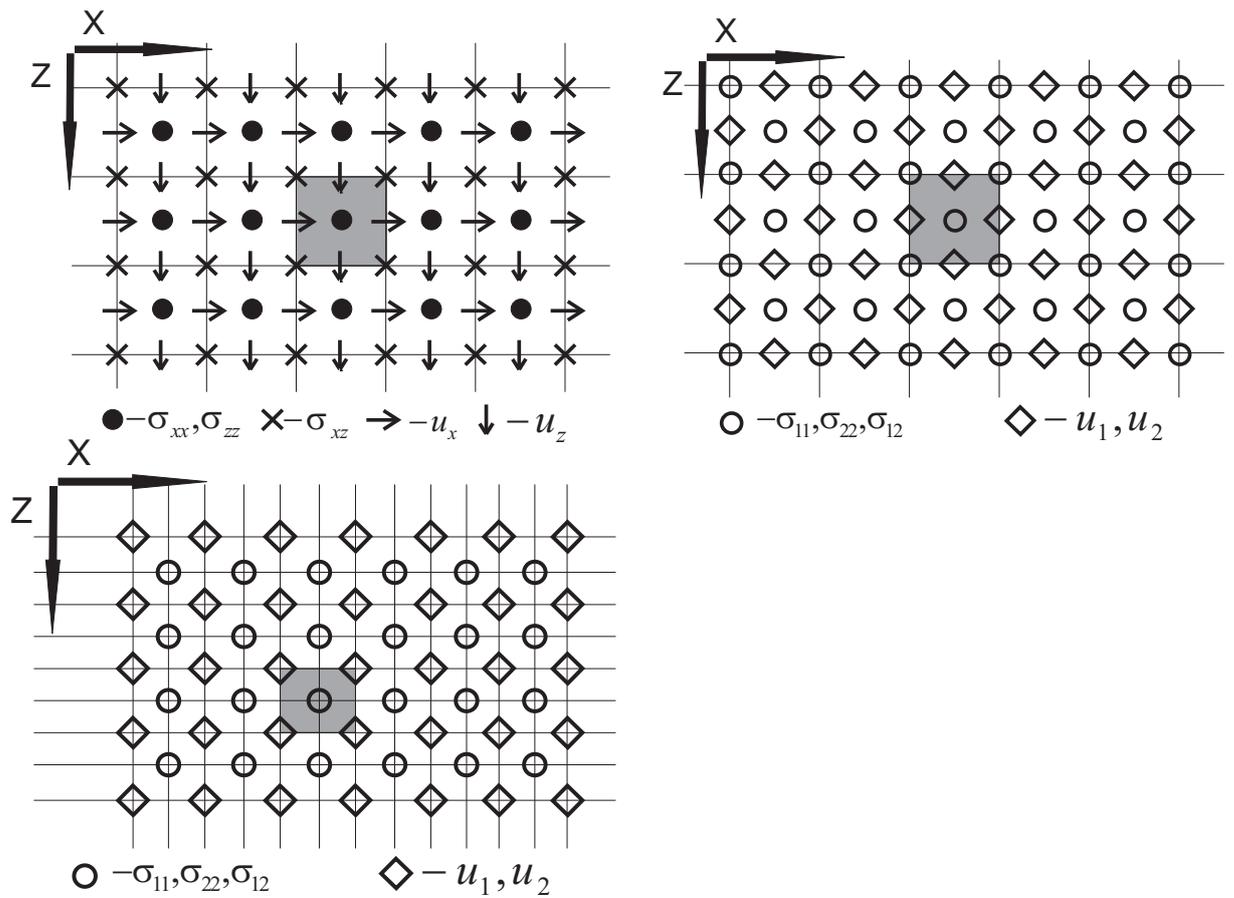


Рисунок 2.1 – Сетки для стандартной схемы на сдвинутых сетках (слева вверху), схемы Лебедева (справа вверху), схемы на повернутых сетках (слева внизу). Ячейки сеток, в которых определяются параметры модели, обозначены серым цветом

статочно воспользоваться методом баланса [53], в результате могут быть получены следующие формулы:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{i_1+1/2, i_2} &= \frac{1}{2} (\rho_{i_1+1, i_2} + \rho_{i_1, i_2}), \\ \hat{\rho}_{i_1, i_2+1/2} &= \frac{1}{2} (\rho_{i_1, i_2+1} + \rho_{i_1, i_2}),\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$(\hat{c}_{33})_{i_1+1/2, i_2+1/2} = 4 \left( \frac{1}{(c_{33})_{i_1, i_2}} + \frac{1}{(c_{33})_{i_1+1/2, i_2}} + \frac{1}{(c_{33})_{i_1, i_2+1/2}} + \frac{1}{(c_{33})_{i_1+1/2, i_2+1/2}} \right)^{-1}. \quad (2.13)$$

**Схема Лебедева.** Для построения схемы Лебедева, аппроксимирующей систему уравнений динамической теории упругости (2.3) для всех физически обоснованных типов анизотропии, удобно ввести частично сдвинутые сетки, определяемые по правилу:

$$\begin{aligned}\Omega_u^L &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) | I_1 + I_2 \notin \mathbb{Z}\} = \{((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2+1/2})\} \cup \{((x_1)_{i_1+1/2}, (x_2)_{i_2})\}, \\ \Omega_\sigma^L &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) | I_1 + I_2 \in \mathbb{Z}\} = \{((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2})\} \cup \{((x_1)_{i_1+1/2}, (x_2)_{i_2+1/2})\}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Здесь и далее предполагается, что индексы, записанные строчными буквами, - целые; индексы, записанные прописными, могут быть как целыми, так и полуцелыми. После этого все компоненты вектора скорости определяются в узлах из множества  $\Omega_u^L$ , а все компоненты тензора напряжений - на сетке  $\Omega_\sigma^L$  (рис. 2.1). Такая геометрия сетки позволяет использовать операторы (2.5) и (2.6) для аппроксимации производных в системе (2.3), в результате схема Лебедева представляется в виде:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{I_1, I_2} D_t [u_1]_{I_1, I_2}^{n-1/2} &= D_1^L [\sigma_{11}]_{I_1, I_2}^{n-1/2} + D_2^L [\sigma_{12}]_{I_1, I_2}^{n-1/2}, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in \Omega_u^L, \\ \hat{\rho}_{I_1, I_2} D_t [u_2]_{I_1, I_2}^{n-1/2} &= D_1^L [\sigma_{12}]_{I_1, I_2}^{n-1/2} + D_2^L [\sigma_{22}]_{I_1, I_2}^{n-1/2}, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in \Omega_u^L, \\ \begin{pmatrix} D_t [\sigma_{11}]_{I_1, I_2}^n \\ D_t [\sigma_{22}]_{I_1, I_2}^n \\ D_t [\sigma_{12}]_{I_1, I_2}^n \end{pmatrix} &= \hat{C}_{I_1, I_2} \begin{pmatrix} D_1^L [u_1]_{I_1, I_2} \\ D_2^L [u_2]_{I_1, I_2} \\ D_1^L [u_2]_{I_1, I_2} + D_2^L [u_1]_{I_1, I_2} \end{pmatrix}, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in \Omega_\sigma^L.\end{aligned}\quad (2.15)$$

В силу того что при построении схемы Лебедева используются те же операторы, что и для стандартной схемы на сдвинутых сетках, ее свойства (аппроксимация, устойчивость, численная дисперсия) полностью совпадают со свойствами стандартной схемы на сдвинутых сетках (2.9), (2.10), (2.11). Данный факт будет обсуждаться ниже в разделе, посвященном комбинированию этих двух схем.

В случае неоднородной среды применение метода баланса для схемы Лебедева позволяет вычислять лишь значения плотности на границах ячейки сетки, причем формулы для их вычисления совпадают с формулами, используемыми для стандартной схемы на сдвинутых сетках (2.12). Применение такой техники для расчета компонент тензора жесткости в углах ячейки невозможно в силу того, что на границах ячейки некоторые компоненты тензора напряжений, например  $\sigma_{11}$  на границе  $x_2 = const$ , претерпевают разрыв. Поэтому для модификации тензора жесткости используются формулы, аналогичные формулам осреднения тонкослоистых пачек.

Для примера достаточно рассмотреть закон Гука в окрестности горизонтального интерфейса. В этом случае компоненты  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  и  $\varepsilon_{11}$  непрерывны при переходе через границу, в то время как остальные компоненты претерпевают разрыв. Переупорядочив уравнения в законе Гука, можно получить:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma^N}{\sigma^T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & c_{12} \\ c_{23} & c_{33} & c_{13} \\ c_{12} & c_{13} & c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{NN} & C^{NT} \\ C^{TN} & C^{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^N \\ \varepsilon^T \end{pmatrix}.$$

После решения этих уравнений относительно разрывных компонент поля  $\sigma^T$  и  $\varepsilon^N$  применяются интегральные осреднения по ячейке:

$$\begin{aligned} \langle \sigma^T \rangle &= \langle C^{TT} - C^{TN}(C^{NN})^{-1}C^{NT} \rangle \varepsilon_{I_1, I_2}^T + \langle C^{TN}(C^{NN})^{-1} \rangle \sigma_{I_1, I_2}^N \\ \langle \varepsilon^N \rangle &= - \langle (C^{NN})^{-1}C^{NT} \rangle \varepsilon_{I_1, I_2}^T + \langle (C^{NN})^{-1} \rangle \sigma_{I_1, I_2}^N, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\langle \rangle$  означает интегральное осреднение по ячейке, а  $\sigma_{I_1, I_2}^N$  и  $\varepsilon_{I_1, I_2}^T$  - значения соответствующих функций в центрах ячеек. После решения системы относительно напряжений получают модифицированные компоненты тензора жесткости.

**Схема на повернутых сетках.** Для построения третьей из рассматриваемых конечно-разностных схем - схемы на повернутых сетках - необходимо ввести сетку по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \Omega_\sigma^R &= \{((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2})\}, \\ \Omega_u^R &= \{((x_1)_{i_1+1/2}, (x_2)_{i_2+1/2})\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь предполагается, что индексы, записанные прописными буквами - целые ( рис. 2.1). С использованием конечно-разностных операторов (2.5) и (2.7) схема на повернутых сетках записывается в виде:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{I_1, I_2} D_t [u_1]_{I_1, I_2}^{n-1/2} &= D_1^R [\sigma_{11}]_{I_1, I_2}^{n-1/2} + D_2^R [\sigma_{12}]_{I_1, I_2}^{n-1/2}, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in \Omega_u^R, \\ \hat{\rho}_{I_1, I_2} D_t [u_2]_{I_1, I_2}^{n-1/2} &= D_1^R [\sigma_{12}]_{I_1, I_2}^{n-1/2} + D_2^R [\sigma_{22}]_{I_1, I_2}^{n-1/2}, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in \Omega_u^R, \\ \begin{pmatrix} D_t [\sigma_{11}]_{I_1, I_2}^n \\ D_t [\sigma_{22}]_{I_1, I_2}^n \\ D_t [\sigma_{12}]_{I_1, I_2}^n \end{pmatrix} &= \hat{C}_{I_1, I_2} \begin{pmatrix} D_1^R [u_1]_{I_1, I_2} \\ D_2^R [u_2]_{I_1, I_2} \\ D_1^R [u_2]_{I_1, I_2} + D_2^R [u_1]_{I_1, I_2} \end{pmatrix}, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in \Omega_\sigma^R. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для данной схемы верны следующие соотношения: число Куранта

$$\Psi^R = \frac{\tau [\max_\alpha v_P(\alpha)]}{\min(h_1, h_2)} \leq 1, \quad (2.19)$$

что в случае использования равных шагов упрощается до выражения

$$\Psi^R = \frac{\tau [\max_\alpha v_P(\alpha)]}{h} \leq 1. \quad (2.20)$$

Численная дисперсия, допускаемая этой схемой (относительная ошибка фазовой скорости), определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \frac{v^{fd}}{v} &= \frac{N}{\gamma_{P,S} \Psi^R \pi} \times \\ &\times \arcsin \left( \gamma_{P,S} \Psi^R \sqrt{\sin \left( \frac{\pi \cos(\alpha)}{\sqrt{2N}} \right) \cos \left( \frac{\pi \sin(\alpha)}{\sqrt{2N}} \right) + \sin \left( \frac{\pi \sin(\alpha)}{\sqrt{2N}} \right) \cos \left( \frac{\pi \cos(\alpha)}{\sqrt{2N}} \right)} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Несложно заметить, что замена переменных  $\beta = \alpha + \pi/4$  и  $l = \sqrt{2}h$  переводит дисперсионное соотношение (2.21) в дисперсионное соотношение для схемы Лебедева (2.11). Аналогично для чисел Куранта. Это означает, что схема на повернутых сетках и схема Лебедева эквивалентны, если используются для расчета решения в однородной среде. При наличии неоднородности среды с интерфейсами, совпадающими с границами ячейки сетки (на рис. 2.1), модификация коэффициентов схемы на повернутых сетках подразумевает лишь пересчет плотности, в то время как компоненты тензора жесткости используются только в центре ячеек. Для модификации

плотности достаточно воспользоваться методом баланса [53]:

$$\hat{\rho}_{i_1+1/2, i_2+1/2} = \frac{1}{4} (\rho_{i_1, i_2} + \rho_{i_1+1/2, i_2} + \rho_{i_1, i_2+1/2} + \rho_{i_1+1/2, i_2+1/2}). \quad (2.22)$$

Это свойство схемы на повернутых сетках традиционно рассматривается как ее основное преимущество, особенно при моделировании волновых полей в средах, содержащих прослойки с жидкостью [316], [315], [117], [176]. Однако, как показано в следующем разделе, данное обстоятельство не влияет на скорость сходимости численного решения при наличии границы раздела жидкость - упругость.

### 2.3.1.2 Трехмерная постановка

Рассматривается система динамической теории упругости в трехмерной постановке, записанная в декартовой системе координат в дивергентной форме:

$$\begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \vec{u} \\ \partial_t \vec{\sigma} \end{pmatrix} - \sum_{m=1}^3 \begin{pmatrix} 0 & A_m \\ A_m^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_m \vec{u} \\ \partial_m \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_u \\ \vec{f}_\sigma \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

где  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  - вектор скоростей смещений,  $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T$  - векторная запись тензора напряжений,  $\rho$  - плотность среды,  $S$  - тензор податливости, обратный к тензору жесткости  $C$ , [16], [381], то есть  $S = C^{-1}$ , симметричный положительно определенный.

Важными являются два частных случая: среда с орторомбической симметрией и изотропная среда. В первом случае, если оси симметрии среды совпадают с осями координат, тензор жесткости имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Частными случаями орторомбической симметрии являются модели трансверсально-изотропной и кубической симметрии, в которых существуют дополнительные связи на элементы тензора жесткости [16].

Для построения конечно-разностной аппроксимации системы уравнений (2.23) вводятся сетки с разнесенными узлами: с целыми  $(x_m)_{i_m} = i_m h_m$  и полуцелыми  $(x_m)_{i_m+1/2} = (i_m + 1/2)h_m$  узлами по каждому пространственному направлению, а также по времени  $t^n = \tau n$  и  $t^{n+1/2} = \tau(n + 1/2)$ . В этих обозначениях индексы, записанные строчными буквами, - целые, параметры  $h_m$  и  $\tau$  - шаги по пространственным направлениям и времени соответственно. На введенных сетках удобно определить операторы центральных разностей:

$$D_t[g]_{i_1, i_2, i_3}^n = \frac{g_{i_1, i_2, i_3}^{n+1/2} - g_{i_1, i_2, i_3}^{n-1/2}}{\tau} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{i_1, i_2, i_3}^n + O(\tau^2), \quad (2.25)$$

$$D_1^L[g]_{i_1, i_2, i_3}^n = \frac{g_{i_1+1/2, i_2, i_3}^n - g_{i_1-1/2, i_2, i_3}^n}{h_1} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{i_1, i_2, i_2}^n + O(h_1^2), \quad (2.26)$$

$$A_{23}[g]_{i_1+1/2, i_2, i_3}^n = 0.25(g_{i_1+1/2, i_2+1/2, i_3+1/2}^n + g_{i_1+1/2, i_2-1/2, i_3+1/2}^n + g_{i_1+1/2, i_2+1/2, i_3-1/2}^n + g_{i_1+1/2, i_2-1/2, i_3-1/2}^n), \quad (2.27)$$

$$D_1^R[g]_{i_1, i_2, i_3}^n = \frac{A_{23}[g]_{i_1+1/2, i_2, i_3}^n - A_{23}[g]_{i_1-1/2, i_2, i_3}^n}{h_1} = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{i_1, i_2, i_3}^n + O(h_1^2).$$

Операторы, аппроксимирующие производные по другим пространственным направлениям, могут быть получены из соотношений (2.26) и (2.27) циклической перестановкой индексов.

Используя введенные операторы, можно построить три наиболее широко применимые схемы, аппроксимирующие систему уравнений динамической теории упругости (2.23). Первая схема - стандартная схема на сдвинутых сетках [258], [372], [373], которая применяется в случае, если среда изотропная или ортотропная, что связано с блочно-диагональной структурой тензора жесткости (2.24). Вторая схема применяется для анизотропных моделей сред - схема Лебедева [237], [36], [152], [93] и третья схема, также ориентированная на расчет волновых полей в анизотропных средах - схема на повернутых сетках [316], [315].

**Стандартная схема на сдвинутых сетках.** Для построения этой схемы необходимо определить разные компоненты поля в разных узлах по пространству (рис. 2.2), после чего воспользоваться операторами (2.25) и (2.26) для аппроксимации производных:

$$\begin{aligned}
(\hat{\rho})_{i_1+1/2, i_2, i_3} D_t[u_1]_{i_1+1/2, i_2, i_3}^{n-1/2} &= D_1^L[\sigma_{11}]_{i_1+1/2, i_2, i_3}^{n-1/2} + D_2^L[\sigma_{12}]_{i_1+1/2, i_2, i_3}^{n-1/2} + D_3^L[\sigma_{13}]_{i_1+1/2, i_2, i_3}^{n-1/2}, \\
(\hat{\rho})_{i_1, i_2+1/2, i_3} D_t[u_2]_{i_1, i_2+1/2, i_3}^{n-1/2} &= D_1^L[\sigma_{12}]_{i_1, i_2+1/2, i_3}^{n-1/2} + D_2^L[\sigma_{22}]_{i_1, i_2+1/2, i_3}^{n-1/2} + D_3^L[\sigma_{23}]_{i_1, i_2+1/2, i_3}^{n-1/2}, \\
(\hat{\rho})_{i_1, i_2, i_3+1/2} D_t[u_3]_{i_1, i_2, i_3+1/2}^{n-1/2} &= D_1^L[\sigma_{13}]_{i_1, i_2, i_3+1/2}^{n-1/2} + D_2^L[\sigma_{23}]_{i_1, i_2, i_3+1/2}^{n-1/2} + D_3^L[\sigma_{33}]_{i_1, i_2, i_3+1/2}^{n-1/2}, \\
D_t[\sigma_{11}]_{i_1, i_2, i_3}^n &= (\hat{c}_{11})_{i_1, i_2, i_3} D_1^L[u_1]_{i_1, i_2, i_3}^n + (\hat{c}_{12})_{i_1, i_2, i_3} D_2^L[u_2]_{i_1, i_2, i_3}^n + (\hat{c}_{13})_{i_1, i_2, i_3} D_3^L[u_3]_{i_1, i_2, i_3}^n, \\
D_t[\sigma_{22}]_{i_1, i_2, i_3}^n &= (\hat{c}_{12})_{i_1, i_2, i_3} D_1^L[u_1]_{i_1, i_2, i_3}^n + (\hat{c}_{22})_{i_1, i_2, i_3} D_2^L[u_2]_{i_1, i_2, i_3}^n + (\hat{c}_{23})_{i_1, i_2, i_3} D_3^L[u_3]_{i_1, i_2, i_3}^n, \\
D_t[\sigma_{33}]_{i_1, i_2, i_3}^n &= (\hat{c}_{13})_{i_1, i_2, i_3} D_1^L[u_1]_{i_1, i_2, i_3}^n + (\hat{c}_{23})_{i_1, i_2, i_3} D_2^L[u_2]_{i_1, i_2, i_3}^n + (\hat{c}_{33})_{i_1, i_2, i_3} D_3^L[u_3]_{i_1, i_2, i_3}^n, \\
D_t[\sigma_{23}]_{i_1, i_2+1/2, i_3+1/2}^n &= (\hat{c}_{44})_{i_1, i_2+1/2, i_3+1/2} \left( D_2^L[u_3]_{i_1, i_2+1/2, i_3+1/2}^n + D_3^L[u_2]_{i_1, i_2+1/2, i_3+1/2}^n \right), \\
D_t[\sigma_{13}]_{i_1+1/2, i_2, i_3+1/2}^n &= (\hat{c}_{55})_{i_1+1/2, i_2, i_3+1/2} \left( D_3^L[u_1]_{i_1+1/2, i_2, i_3+1/2}^n + D_1^L[u_3]_{i_1+1/2, i_2, i_3+1/2}^n \right), \\
D_t[\sigma_{12}]_{i_1+1/2, i_2+1/2, i_3}^n &= (\hat{c}_{66})_{i_1+1/2, i_2+1/2, i_3} \left( D_1^L[u_2]_{i_1+1/2, i_2+1/2, i_3}^n + D_2^L[u_1]_{i_1+1/2, i_2+1/2, i_3}^n \right).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Как видно из построения, эта схема обеспечивает второй порядок аппроксимации в случае постоянных коэффициентов. Схема условно устойчива при:

$$\Psi = \tau \left[ \max_{\alpha} v_P(\alpha) \right] \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2}} \leq 1, \tag{2.29}$$

где  $\Psi$  - число Куранта, а  $v_P$  - фазовая скорость продольной волны в среде. В модели среды с анизотропией скорость зависит от направления распространения, что требует выбора максимально возможной скорости для построения оценок в условии устойчивости. При использования равных шагов по пространственным направлениям это условие принимает вид [373]:

$$\Psi = \frac{\sqrt{3}\tau [\max_{\alpha} v_P(\alpha)]}{h} \leq 1. \tag{2.30}$$

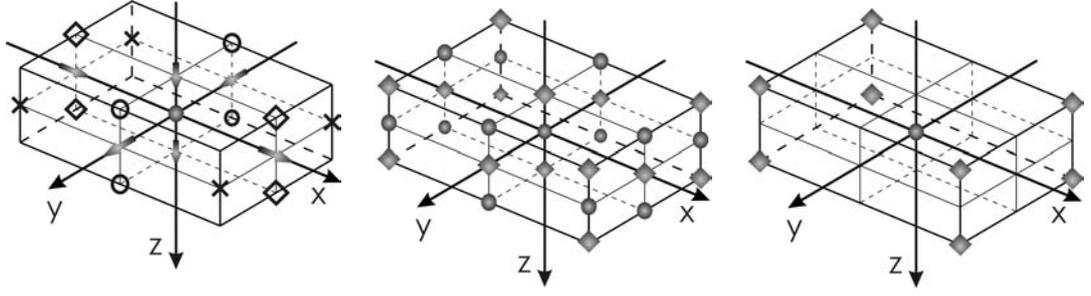


Рисунок 2.2 – Сетки для стандартной схемы на сдвинутых сетках (слева), схемы Лебедева (в центре), схемы на повернутых сетках (справа)

Численная дисперсия, допускаемая этой схемой (относительная ошибка фазовой скорости), определяется по следующей формуле [141], [142], [245]:

$$\begin{aligned} \frac{v^{fd}}{v} &= \frac{\sqrt{3}N}{\gamma_{P,S}\Psi\pi} \arcsin \left( \frac{\gamma_{P,S}\Psi}{\sqrt{3}} \sqrt{\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2} \right), \\ \tilde{k}_1 &= \sin \left( \frac{\pi \cos(\alpha) \cos(\beta)}{N} \right), \\ \tilde{k}_2 &= \sin \left( \frac{\pi \cos(\alpha) \sin(\beta)}{N} \right), \\ \tilde{k}_3 &= \sin \left( \frac{\pi \sin(\alpha)}{N} \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - углы, определяющие направление распространения волны,  $N = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|h}$  - число точек на длину волны,  $\mathbf{k}$  - волновой вектор,  $h = h_1 = h_2 = h_3$  - пространственный шаг сетки,  $\Psi$  - число Куранта, определяемое соотношением (2.29),  $\gamma_{P,S}$  - безразмерный параметр:  $\gamma_S = v_S/v_P < 1$  и  $\gamma_P = v_P/v_P = 1$ , определяющий величину отношения поперечной и продольной скоростей волн в среде. Это соотношение верно для изотропной среды, где скорости поперечных волн совпадают.

Как и в двумерной постановке, здесь предполагается, что коэффициенты уравнений определены в точках с целыми индексами - центрах ячеек, поэтому возникает необходимость вычисления коэффициентов схемы в тех точках, в которых они необходимы для построения схемы. В частности, плотность вычисляется на гранях ячейки как среднее арифметическое значений в соседних ячейках, аналогично формуле ((2.12)). Компоненты тензора жесткости  $c_{44}$ ,  $c_{55}$  и  $c_{66}$  вычисляются на ребрах ячеек как среднее гармоническое значений в соседних ячейках, аналогично формулам (2.13).

**Схема Лебедева.** Для построения схемы Лебедева, аппроксимирующей систему уравнений динамической теории упругости (2.23) для всех физически обоснованных типов анизотропии, вводятся частично сдвинутые сетки, определяемые по правилу

$$\begin{aligned}\Omega_u^L &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) | I_1 + I_2 + I_3 \notin \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_\sigma^L &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) | I_1 + I_2 + I_3 \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Здесь и далее предполагается, что индексы, записанные строчными буквами, - целые; индексы, записанные прописными, могут быть как целыми, так и полуцелыми. После этого все компоненты вектора скорости определяются в узлах из множества  $\Omega_u^L$ , а все компоненты тензора напряжений - на сетке  $\Omega_\sigma^L$  (рис. 2.2). Такая геометрия сетки позволяет использовать операторы (2.25) и (2.26) для аппроксимации производных в системе (2.23), в результате схема Лебедева представляется в виде:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3} D_t [u_1]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} &= D_1^L [\sigma_{11}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_2^L [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_3^L [\sigma_{13}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2}, \\ \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3} D_t [u_2]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} &= D_1^L [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_2^L [\sigma_{22}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_3^L [\sigma_{23}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2}, \\ \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3} D_t [u_3]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} &= D_1^L [\sigma_{13}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_2^L [\sigma_{23}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_3^L [\sigma_{33}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2}, \\ ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_u^L, \\ \begin{pmatrix} D_t [\sigma_{11}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{22}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{33}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{23}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{13}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3}^n \end{pmatrix} &= \hat{C}_{I_1, I_2, I_3} \begin{pmatrix} D_1^L [u_1]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_2^L [u_2]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_3^L [u_3]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_2^L [u_3]_{I_1, I_2, I_3} + D_3^L [u_2]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_3^L [u_1]_{I_1, I_2, I_3} + D_1^L [u_3]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_1^L [u_2]_{I_1, I_2, I_3} + D_2^L [u_1]_{I_1, I_2, I_3} \end{pmatrix}, \\ ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_\sigma^L.\end{aligned}\quad (2.33)$$

В силу того, что при построении схемы Лебедева используются те же самые операторы, что и для стандартной схемы на сдвинутых сетках, ее свойства (аппроксимация, устойчивость, численная дисперсия) полностью совпадают со свойствами стандартной схемы на сдвинутых сетках (2.29), (2.30), (2.31). Более того, несложно заметить, что в случае изотропной или ортотропной среды схема Лебедева распадается на четыре независимые стандартные схемы на сдвинутых сетках [6].

В случае неоднородной среды формулы построения коэффициентов схемы совпадают с формулами для двумерной задачи - используется осреднение коэффициентов для слоистой среды, полученное в работе [321].

**Схема на повернутых сетках.** Для построения третьей из рассматриваемых конечно-разностных схем - схемы на повернутых сетках - вводится сетка (рис. 2.2):

$$\begin{aligned}\Omega_\sigma^R &= \{((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2}), (x_3)_{i_3})\}, \\ \Omega_u^R &= \{((x_1)_{i_1+1/2}, (x_2)_{i_2+1/2}), (x_3)_{i_3+1/2})\}.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Здесь предполагается, что индексы, записанные прописными буквами - целые. С использованием конечно-разностных операторов (2.25) и (2.27) схему на повернутых сетках можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3} D_t [u_1]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} &= D_1^R [\sigma_{11}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_2^R [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_3^R [\sigma_{13}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2}, \\ \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3} D_t [u_2]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} &= D_1^R [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_2^R [\sigma_{22}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_3^R [\sigma_{23}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2}, \\ \hat{\rho}_{I_1, I_2, I_3} D_t [u_3]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} &= D_1^R [\sigma_{13}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_2^R [\sigma_{23}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} + D_3^R [\sigma_{33}]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2}, \\ ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_u^R, \\ \begin{pmatrix} D_t [\sigma_{11}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{22}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{33}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{23}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{13}]_{I_1, I_2, I_3}^n \\ D_t [\sigma_{12}]_{I_1, I_2, I_3}^n \end{pmatrix} &= \hat{C}_{I_1, I_2, I_3} \begin{pmatrix} D_1^R [u_1]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_2^R [u_2]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_3^R [u_3]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_2^R [u_3]_{I_1, I_2, I_3} + D_3^R [u_2]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_3^R [u_1]_{I_1, I_2, I_3} + D_1^R [u_3]_{I_1, I_2, I_3} \\ D_1^R [u_2]_{I_1, I_2, I_3} + D_2^R [u_1]_{I_1, I_2, I_3} \end{pmatrix}, \\ ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_\sigma^R.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Как показано в работах [316], [245], [110], для этой схемы число Куранта

$$\Psi^R = \frac{\tau [\max_{\alpha, \beta} v_P(\alpha, \beta)]}{\min(h_1, h_2, h_3)} \leq 1, \quad (2.36)$$

что в случае использования равных шагов упрощается в

$$\Psi^R = \frac{\tau [\max_{\alpha, \beta} v_P(\alpha, \beta)]}{h} \leq 1. \quad (2.37)$$

Численная дисперсия, допускаемая этой схемой (относительная ошибка фазовой скорости), определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \frac{v^{fd}}{v} &= \frac{N}{\gamma_{P,S}\Psi^R\pi} \arcsin \left( \gamma_{P,S}\Psi^R \sqrt{\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2} \right), \\ \tilde{k}_1 &= \sin \left( \frac{\pi \cos(\alpha) \cos(\beta)}{N} \right) \cos \left( \frac{\pi \cos(\alpha) \sin(\beta)}{N} \right) \cos \left( \frac{\pi \sin(\alpha)}{N} \right), \\ \tilde{k}_2 &= \cos \left( \frac{\pi \cos(\alpha) \cos(\beta)}{N} \right) \sin \left( \frac{\pi \cos(\alpha) \sin(\beta)}{N} \right) \cos \left( \frac{\pi \sin(\alpha)}{N} \right), \\ \tilde{k}_3 &= \cos \left( \frac{\pi \cos(\alpha) \cos(\beta)}{N} \right) \cos \left( \frac{\pi \cos(\alpha) \sin(\beta)}{N} \right) \sin \left( \frac{\pi \sin(\alpha)}{N} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

В отличие от двумерной постановки в трехмерном случае не существует эквивалентности между дисперсионными соотношениями для стандартной схемы на сдвинутых сетках (схемы Лебедева) и схемы на повернутых сетках. В этом случае требуется дополнительный сравнительный анализ приведенных схем, представленный в работе [245]. Прежде чем переходить к такому анализу, следует уточнить, что в случае неоднородной среды для схемы на повернутых сетках необходимо модифицировать лишь плотность среды, которая вычисляется как среднее арифметическое значений в прилегающих ячейках сетки.

### **Сравнительный анализ схемы Лебедева и схемы на повернутых сетках.**

В трехмерной постановке не существует соответствия между дисперсионными соотношениями для схемы Лебедева и схемы на сдвинутых сетках, как следствие - для оценки вычислительной сложности и ресурсоемкости алгоритмов, на них основанных, требуется дополнительный анализ, который позволит определить соотношения на шаги сеток, обеспечивающие примерно одинаковый уровень численной дисперсии. Удобно ввести в рассмотрение величину дисперсионной ошибки:

$$\varepsilon(\alpha, \beta, N, \psi) = 1 - \frac{v^{fd}}{v},$$

где  $v^{fd}$  определяется либо формулой (2.31), в этом случае используется обозначение  $\varepsilon^L$ , либо формулой (2.38), тогда ошибка обозначается как  $\varepsilon^R$ .

Несложно показать, что для схем второго порядка аппроксимации по времени и по пространству значение фазовой скорости конечно-разностного решения всегда ниже, чем значение скорости дифференциальной задачи. Это означает, что функции

$\varepsilon^*(\alpha, \beta, N, \psi) \geq 0$  для всех физически обоснованных значений аргументов. Более того, ошибка - монотонная функция аргументов  $N$  числа точек на длину волны и  $\psi$  числа Куранта. Поэтому можно рассмотреть зависимость ошибки от направления распространения волны для фиксированных значений прочих параметров. Согласно результатам, представленным в работе [245], выделяются два набора экстремальных направлений:

$$\begin{aligned} P^L &= \{(\alpha, \beta) = (0, \frac{\pi m}{2})\} \cup \{(\alpha, \beta) = (\frac{\pi}{2} + \pi n, \forall)\}, \\ P^R &= \left\{(\alpha, \beta) = \left(\arcsin \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right] + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где  $n$  и  $m$  - целые числа. При этом выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned} \varepsilon^L((\alpha, \beta) \in P^R, N, \psi) &\leq \varepsilon^L(\alpha, \beta, N, \psi) \leq \varepsilon^L((\alpha, \beta) \in P^L, N, \psi), \\ \varepsilon^R((\alpha, \beta) \in P^L, N, \psi) &\leq \varepsilon^R(\alpha, \beta, N, \psi) \leq \varepsilon^R((\alpha, \beta) \in P^R, N, \psi). \end{aligned}$$

С учетом представленных оценок проводится дальнейшее исследование ошибки, только в экстремальных направлениях. В частности, асимптотический анализ при больших  $N$  приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{max}^L &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3}\psi^2\gamma^2\right) + O\left(\frac{1}{N^4}\right), & \varepsilon_{min}^L &= \frac{1}{18} \left(1 - \psi^2\gamma^2\right) + O\left(\frac{1}{N^4}\right), \\ \varepsilon_{max}^R &= \frac{7}{18} \left(1 - \frac{3}{7}\psi^2\gamma^2\right) + O\left(\frac{1}{N^4}\right), & \varepsilon_{min}^R &= \frac{1}{6} \left(1 - \psi^2\gamma^2\right) + O\left(\frac{1}{N^4}\right). \end{aligned}$$

Из приведенных выражений следует, что, начиная с некоторого  $N$ , выполняются соотношения:

$$\varepsilon^L\left(\alpha, \beta, \frac{N}{\sqrt{2}}, \psi\right) \leq \varepsilon^R(\alpha, \beta, N, \psi) \leq \varepsilon^L\left(\alpha, \beta, \frac{N}{\sqrt{3}}, \psi\right).$$

Полученные выражения означают, что для достижения примерно одинаковой ошибки фазовой скорости при расчете решения схемой Лебедева и схемой на сдвинутых сетках необходимо выполнение следующего соотношения на шаги сеток (число точек на длину волны):

$$\frac{h^L}{\sqrt{3}} \leq h^R \leq \frac{h^L}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2}N^L \leq N^R \leq \sqrt{3}N^L. \quad (2.40)$$

Это соотношение означает, что шаг сетки для схемы на повернутых сетках всегда должен быть меньше, чем для схемы Лебедева, для достижения примерно одинаковой точности. При этом, если учесть, что уменьшение пространственного шага в  $\sqrt{3}$  раз приводит к росту числа узлов сетки в  $3\sqrt{3} \approx 4.5$  раза, то можно получить оценку на объем оперативной памяти  $\Pi^R$  и  $\Pi^L$ , необходимой для хранения переменных поля при проведении расчетов с применением каждой из рассматриваемых схем:

$$\frac{1}{3}\Pi^R \leq \Pi^L \leq \frac{2}{3}\Pi^R.$$

Из этого следует, что схема Лебедева требует в 1.5-3 раза меньшего объема оперативной памяти, чем схема на повернутых сетках, для моделирования волновых процессов в анизотропных упругих средах. Более того, аналогично с двумерной постановкой в случае анизотропии с симметрией не ниже орторомбической, схема Лебедева распадается на четыре независимых стандартных схемы на сдвинутых сетках, что позволяет еще больше сократить потребности в вычислительных ресурсах. В дополнение, схема Лебедева полностью наследует дисперсионные свойства стандартной схемы на сдвинутых сетках, в результате ее с высокой эффективностью можно комбинировать с указанной схемой.

### 2.3.2 Сходимость численного решения в моделях с контрастными границами

Свойства конечно-разностных схем, такие как аппроксимация и устойчивость, исследуются для случаев однородной среды - модели с постоянными коэффициентами. Однако применяются конечно-разностные схемы для расчета волновых полей в сложноустроенных неоднородных средах, то есть для уравнений с разрывными коэффициентами. При этом зачастую не удается доказать, что порядок аппроксимации уравнений выше первого, хотя в ряде случаев скорость сходимости численного решения может быть второго порядка [249], [62]. Поэтому необходимо проведение численного анализа скорости сходимости решений, получаемых при расчете волновых полей стандартной схемой на сдвинутых сетках, схемой Лебедева и схемой на

повернутых сетках. Рассматриваются три практически значимые случая:

- горизонтальная граница раздела слоев, совпадающая с линией сетки (границей ячейки);
- плоская наклонная граница раздела слоев;
- контакт трех блоков с разными свойствами (рис. 2.7).

Скорость сходимости решения рассчитывается на серии вложенных сеток с шагами  $h_k = 2^{-k}h_0$ , где  $h_0 = 1$  м. Измельчение шага проводится вплоть до  $h_7 = h_0/128 \approx 8$  мм. После чего для каждой пары решений, вычисленных на сетках с последовательными номерами, рассчитывается относительная ошибка в норме  $L_2$ :

$$\epsilon_k = \|v_k - v_{k-1}\|_2 / \|v_k\|_2 \quad (2.41)$$

и строятся показатели сходимости:

$$\delta_k = \epsilon_k / \epsilon_{k-1}. \quad (2.42)$$

Для линейных конечно-разностных операторов, аппроксимирующих линейные дифференциальные операторы, верно соотношение [53], [13]:

$$\delta_k \approx \left( \frac{h_k}{h_{k+1}} \right)^\gamma, \quad (2.43)$$

где  $\gamma$  - порядок сходимости конечно-разностного решения. В представленных экспериментах отношение шагов равно двум, то есть  $h_k/h_{k+1} = 2$ , следовательно, если решение сходится со вторым порядком, то показатель близок к четырем, то есть  $\delta_k \approx 4$ , в случае понижения скорости сходимости до первого порядка ожидается, что  $\delta_k \approx 2$ .

Во всех экспериментах используются сочетания моделей сред со следующими параметрами:

- изотропная упругая среда 1 (IS1):  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup>,  $v_p = 1900$  м/с,  $v_s = 1200$  м/с;
- изотропная упругая среда 2 (IS2):  $\rho = 2200$  кг/м<sup>3</sup>,  $v_p = 2400$  м/с,  $v_s = 1400$  м/с;

- изотропная упругая среда 3 (IS3):  $\rho = 1600 \text{ кг/м}^3$ ,  $v_p = 1600 \text{ м/с}$ ,  $v_s = 900 \text{ м/с}$ ;
- идеальная жидкость (IF):  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $v_p = 1500 \text{ м/с}$ ,  $v_s = 0 \text{ м/с}$ ;
- анизотропная упругая среда 1 (AS1):  $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 3.6 & 1.8 & -0.9 \\ 1.8 & 3.24 & 0 \\ -0.9 & 0 & 2.7 \end{pmatrix} \times 10^9 \text{ кг}\cdot\text{с/м};$$

- изотропная упругая среда 2 (AS2):  $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 4.4 & 2.2 & 2.2 \\ 2.2 & 6.6 & 2.2 \\ 2.2 & 2.2 & 4.4 \end{pmatrix} \times 10^9 \text{ кг}\cdot\text{с/м};$$

- изотропная упругая среда 3 (AS3):  $\rho = 1600 \text{ кг/м}^3$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 1.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 2.4 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1.6 \end{pmatrix} \times 10^9 \text{ кг}\cdot\text{с/м}.$$

В качестве тестовых рассматриваются начально-краевые задачи с нулевыми правыми частями. Возмущение задается в виде начальных данных:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, & u_2 &= 0, \\ \sigma_{12} &= 0, & \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \exp\{-0.1((x_1 - x_1^s)^2 + (x_2 - x_2^s)^2)\}. \end{aligned}$$

Недиссипативные граничные условия для каждой из рассмотренных схем вводятся индивидуально, исходя из геометрии сеток. В частности, на вертикальной границе  $x_1 = (x_1)_{i_1+1/2}^0$  используются следующие условия:

- для стандартной схемы -  $u_1 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ;
- для схемы на повернутых сетках -  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ;

- для схемы Лебедева -  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ,  $\sigma_{11} = 0$ .

Для каждой из схем приведенные переменные определены непосредственно на указанной границе, как следствие - граничные условия удовлетворяются точно. Здесь следует отметить переопределенность условий для схемы Лебедева, однако, как показано в работах [247], [248], [43], [246] схема Лебедева аппроксимирует более широкую систему уравнений, чем система уравнений динамической теории упругости, которая обладает большим числом характеристик. Откуда следует, что в двумерной постановке число граничных условий необходимо удвоить для корректной постановки краевой задачи.

Размеры расчетной области фиксируются для всех экспериментов и составляют 3000 м в каждом направлении. Источник располагается в точке с координатами  $x_1^s = 1500$  м и  $x_2^s = 750$  м.

Для построения коэффициентов конечно-разностных схем в окрестности интерфейсов используются следующие способы:

- Граница раздела упругих изотропных слоев. Для стандартной схемы на сдвинутых сетках [372] и схемы на повернутых сетках [316] применяется метод баланса [53], для схемы Лебедева [36] используется осреднение тонкослоистых пачек [95].
- Граница раздела анизотропных слоев. Для схемы на повернутых сетках [316] применяется метод баланса [53], для схемы Лебедева [36] используется осреднение тонкослоистых пачек [321].
- Граница раздела упругая среда - жидкость. Для всех рассматриваемых схем применяется метод, основанный на анализе коэффициентов отражения [245], [301], [299].

### 2.3.2.1 Горизонтальная граница раздела

Первая серия экспериментов проводится для модели с одной горизонтальной границей раздела, расположенной на уровне  $x_2 = 1500$  м. Серия состоит из четырех наборов экспериментов: граница раздела двух изотропных упругих слоев, граница

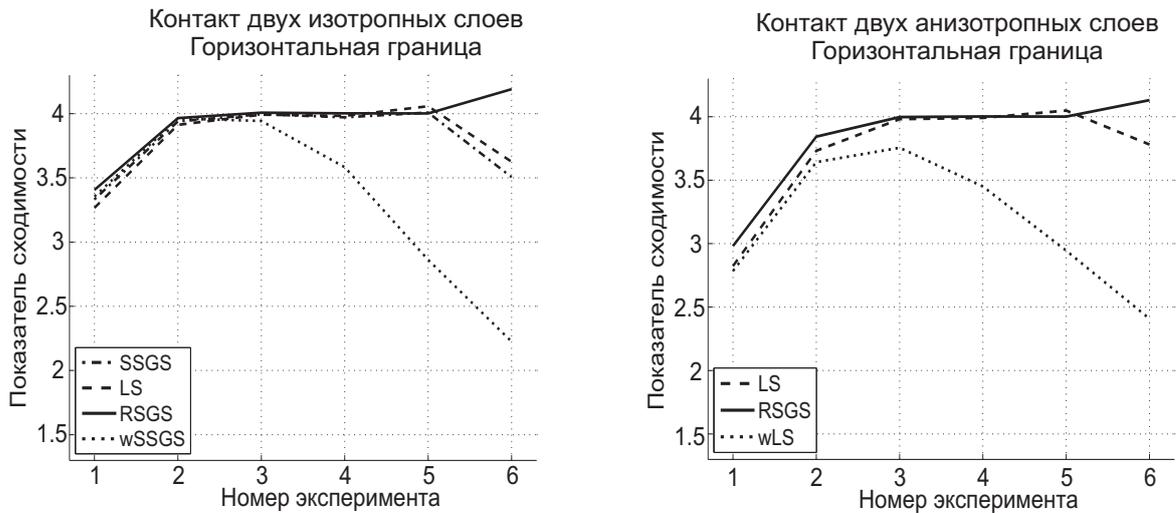


Рисунок 2.3 – Показатель сходимости конечно-разностных решений для моделей с горизонтальной границей, разделяющей изотропные (слева) и анизотропные (справа) упругие слои. SSGS - стандартная схема на сдвинутых сетках, RSGS - схема на повернутых сетках, LS - схема Лебедева, wLS и wSSGS - соответствующие схемы, без модификации коэффициентов.

раздела двух анизотропных слоев, граница раздела жидкость - упругая среда (изотропная и анизотропная).

В случае контакта изотропных упругих слоев в верхней части модели используется модель IS1, в нижней части - IS2. Аналогично для контакта двух анизотропных слоев: в верхней части - AS1, в нижней части - AS2. Из анализа графиков, приведенных на рис. 2.3, видно, что в случае горизонтальной границы раздела двух упругих слоев (изотропных или анизотропных) каждая из рассматриваемых схем сохраняет второй порядок сходимости при использовании подходящей модификации коэффициентов конечно-разностной схемы. Для иллюстрации необходимости проведения такой модификации на рис. 2.3 приведены также индикаторы сходимости для стандартной схемы на сдвинутых сетках и схемы Лебедева, которые применяются без модификации коэффициентов. Видно, что в этом случае скорость сходимости падает до первого порядка.

В случае контакта жидкость - упругая среда эксперименты проводятся с использованием модели идеальной жидкости IF в нижней части расчетной области и моделей IS1 или AS1 (для изотропной и анизотропной сред соответственно) в верхней части расчетной области, для источника, полностью погруженного в упругую

среду. В этом случае только стандартная схема на сдвинутых сетках сохраняет второй порядок сходимости (рис. 2.4), если непосредственно на контакте жидкости с упругим слоем  $\mu = 0$ . В остальных случаях - при использовании схемы Лебедева, схемы на повернутых сетках и стандартной схемы на сдвинутых сетках без модификации коэффициентов - порядок сходимости падает до первого. Это особенно важно в отношении схемы на повернутых сетках, применение которой в описанном случае требует лишь модификации плотности, а не тензора жесткости, и которая считается наиболее точной для учета контакта жидкость-упругая среда [316], [315]. Одной из физических причин понижения порядка сходимости можно считать тот факт, что на контакте жидкость-упругая среда нормальная компонента вектора скорости является непрерывной, в то время как касательная компонента может претерпевать разрыв. В случае использования стандартной схемы на сдвинутых сетках, при условии что интерфейс совпадает с линиями сетки (границами ячеек), на интерфейсе определена именно нормальная компонента, в то время как касательная компонента вектора скорости смещена на полшага вглубь слоев. Как следствие, сеточная функция, соответствующая этой компоненте, претерпевает разрыв непосредственно на интерфейсе. В случае использования схемы Лебедева или схемы на повернутых сетках на границах ячеек определены все компоненты вектора скорости, в результате разрывы касательных компонент вектора скорости на интерфейсе не допускаются, что приводит к аппроксимации условий проскальзывания с первым порядком.

### 2.3.2.2 Наклонная граница

Вторая серия экспериментов проводится для модели с одной плоской наклонной границей раздела, угол наклона составляет  $30^\circ$  по отношению к горизонтали. При этом в качестве точной модели рассматривается именно модель с наклонным интерфейсом без ее предварительной дискретизации на какой бы то ни было сетке.

Расчеты проводятся для контакта двух изотропных слоев IS1 в верхней части модели и IS2 - в нижней части и контакта двух изотропных слоев AS1 в верхней части модели и AS2 - в нижней части. Вне зависимости от типа упругой среды и способа модификации коэффициентов конечно-разностных схем в окрестности границы раздела, скорость сходимости численного решения не выше первого порядка

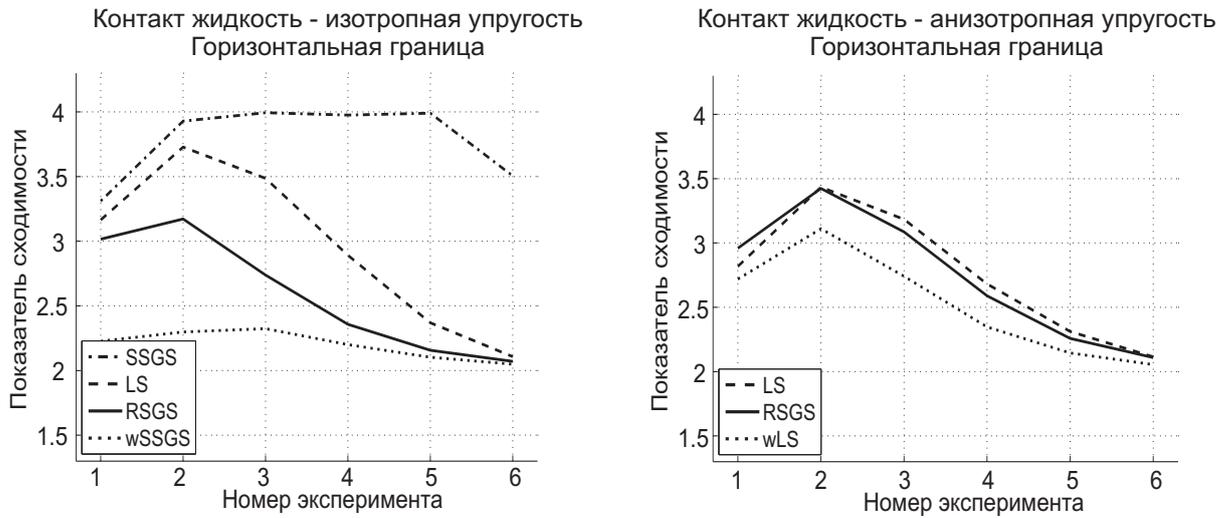


Рисунок 2.4 – Показатель сходимости конечно-разностных решений для моделей с горизонтальной границей раздела жидкость-упругая среда (изотропная - слева, анизотропная - справа). SSGS - стандартная схема на сдвинутых сетках, RSGS - схема на повернутых сетках, LS - схема Лебедева, wLS и wSSGS - соответствующие схемы без модификации коэффициентов.

(рис. 2.5). Аналогичные результаты получены при расчете решения в модели с наклонной границей раздела между жидкостью и упругой средой (рис. 2.6). В этом эксперименте основной ошибкой, связанной с аппроксимацией дифференциального оператора, является "ступенчатое" приближение границы раздела. Это означает, что проекция модели на сетку осуществляется с первым порядком, что приводит к первому порядку сходимости численного решения.

### 2.3.2.3 Контакт трех блоков

Третья серия экспериментов проводится для модели, составленной из трех блоков так, что в верхней части модели при  $x_2 < 1500$  м рассматривается однородная среда - идеальная жидкость IF, изотропная упругая IS1, или анизотропная упругая AS1, в зависимости от эксперимента. В нижней части, при  $x_2 > 1500$  м, модель разделена на два блока, один -  $x_1 < 1500$  м, заполненный либо изотропной, либо анизотропной упругой средой с параметрами IS2 или AS2 соответственно, второй -  $x_1 > 1500$  м, заполненный либо изотропной средой IS3, либо анизотропной средой AS3 (рис. 2.7). Такие модели, в которых присутствуют только горизонтальные и вертикальные границы, представляют практический интерес по двум причинам. Во-первых,

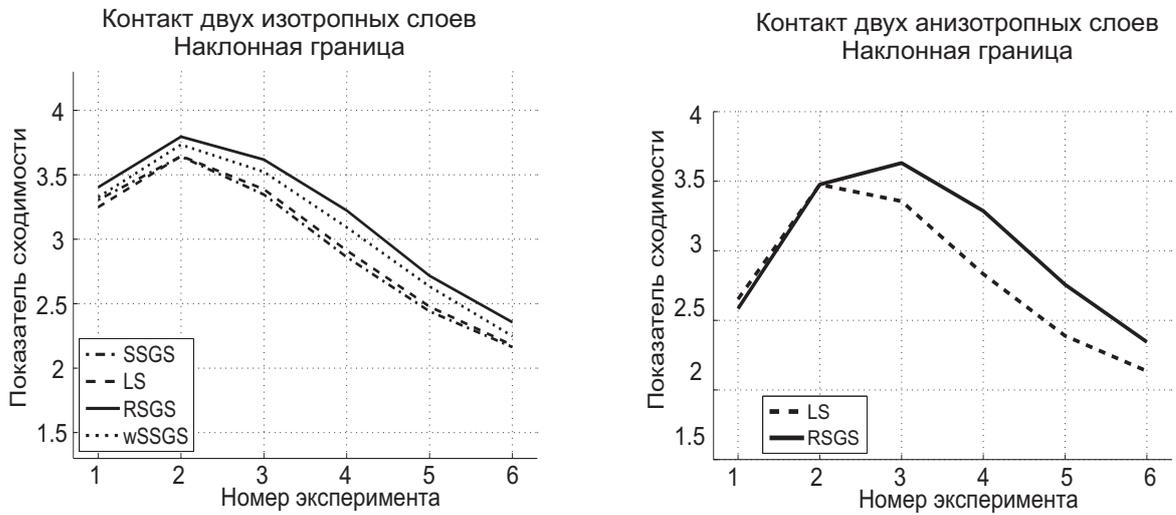


Рисунок 2.5 – Показатель сходимости конечно-разностных решений для моделей с наклонной границей, разделяющей изотропные (слева) и анизотропные (справа) слои. SSGS - стандартная схема на сдвинутых сетках, RSGS - схема на повернутых сетках, LS - схема Лебедева.

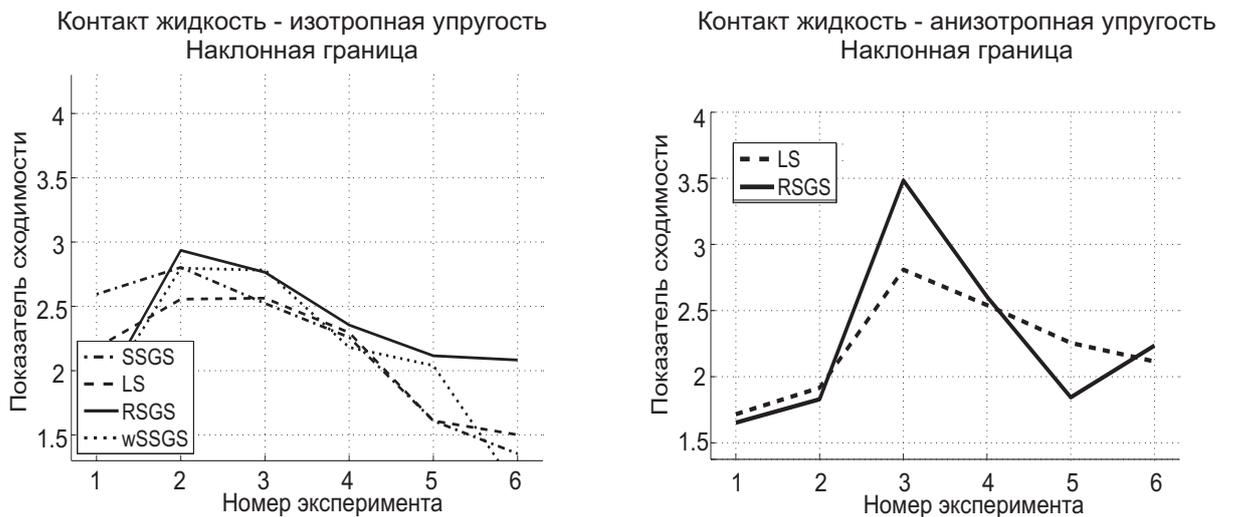


Рисунок 2.6 – Показатель сходимости конечно-разностных решений для моделей с наклонной границей раздела жидкость - упругая среда: изотропная (слева) и анизотропная (справа). SSGS - стандартная схема на сдвинутых сетках, RSGS - схема на повернутых сетках, LS - схема Лебедева.

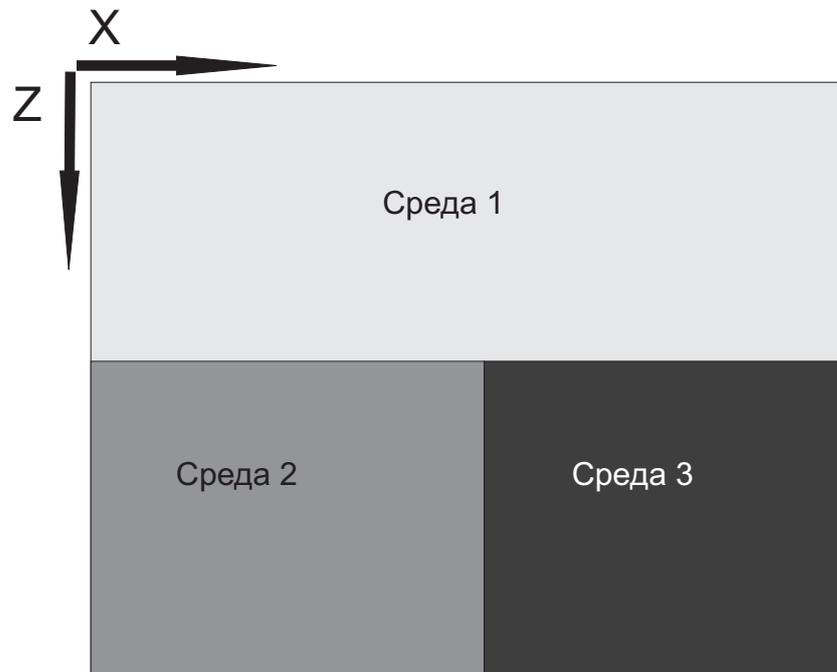


Рисунок 2.7 – Схематическое изображение модели среды, состоящей из трех блоков

в силу распространенности, например, модели околоскважинного пространства при рассмотрении вертикальных скважин [298], [251], [45]. Во-вторых, такие модели могут рассматриваться как исходные точные модели среды, поскольку стандартным способом задания моделей является определение параметров среды на некоторой зачастую достаточно грубой сетке (порядка 2-4 точек на длину волны). Такие модели в принципе содержат только горизонтальные и вертикальные границы, и начальное строение среды, со всеми сложными интерфейсами, однозначно восстановить по этим данным невозможно. При использовании таких моделей шаг сетки обычно уменьшается примерно до дискретизаций 10-30 точек на длину волны, но модель при этом не уточняется. Формально можно поставить задачу уточнения строения модели при измельчении сетки, однако она не имеет однозначного решения, а получаемые аппроксимации интерфейсов будут не точнее уже заданных на грубой сетке. В результате расчеты проводятся для блочных моделей сред, не зависящих от шага сетки. Самым простым примером такой модели как раз и является рассматриваемая модель среды из трех блоков.

Показатели сходимости конечно-разностных решений для модели среды, состоящей из трех блоков (рис. 2.8 и 2.9), свидетельствуют, что скорость сходимости

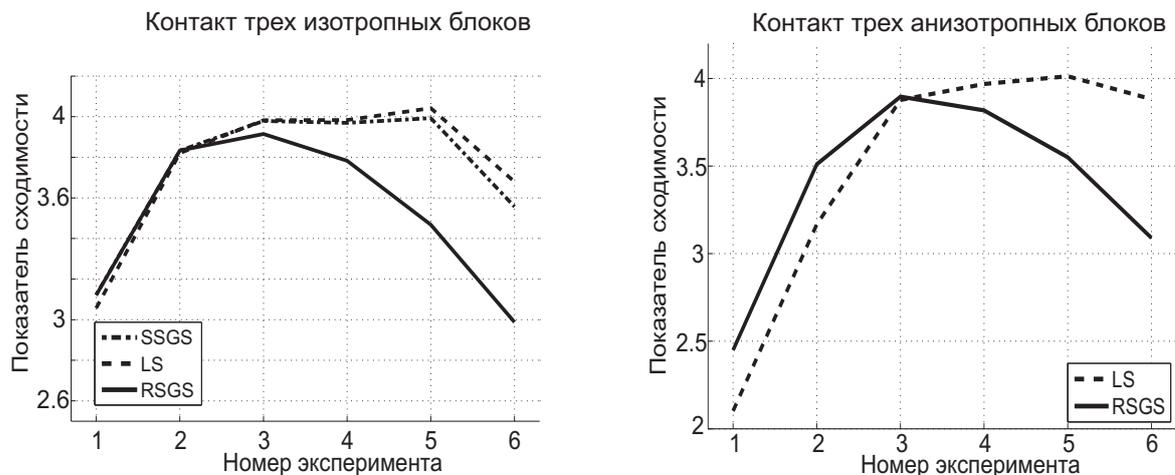


Рисунок 2.8 – Показатель сходимости конечно-разностных решений для моделей, состоящих из трех блоков, заполненных упругой средой (изотропной - слева и анизотропной - справа). SSGS - стандартная схема на сдвинутых сетках, RSGS - схема на повернутых сетках, LS - схема Лебедева.

решений такая же, как и в случае среды с одной горизонтальной границей раздела. Исключение составляет лишь схема на повернутых сетках, демонстрирующая понижение порядка.

Результаты экспериментов свидетельствуют, что все рассматриваемые схемы - стандартная схема на сдвинутых сетках [373], схема на повернутых сетках [316] и схема Лебедева [36], [245] - сохраняют второй порядок сходимости только в случае границ, совпадающих с границами ячеек сетки. При этом на контакте жидкости и упругой среды второй порядок сходимости сохраняет лишь стандартная схема на сдвинутых сетках, в то время как более сложные подходы демонстрируют понижение скорости сходимости.

### 2.3.3 Ограничение расчетной области

#### 2.3.3.1 Постановка задачи

Для ограничения расчетной области при моделировании волновых процессов используется метод идеально-согласованных слоев, или PML [104]. На сегодня известны различные модификации PML, в частности, внимания заслуживает PML с комплексным сдвигом частоты, или CFS-PML [162], [163], использование которого избавляет от слабозатухающих низкочастотных мод. Однако здесь PML рассмат-

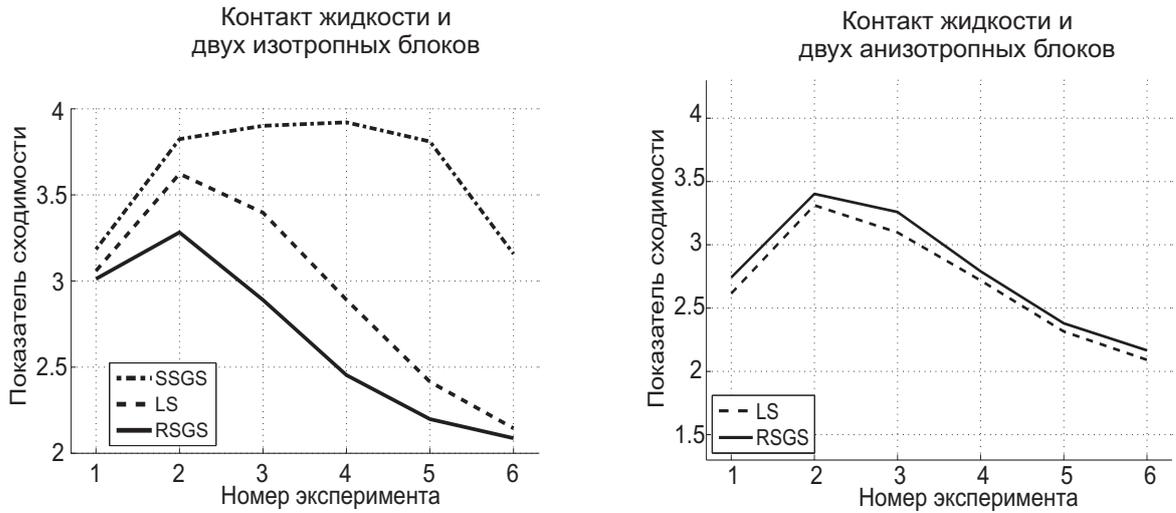


Рисунок 2.9 – Показатель сходимости конечно-разностных решений для моделей, содержащих слой жидкости и два блока с упругой средой (изотропной - слева и анизотропной - справа). SSGS - стандартная схема на сдвинутых сетках, RSGS - схема на повернутых сетках, LS - схема Лебедева.

ривается лишь в исходной формулировке, поскольку все представленные для него результаты легко обобщаются на CFS-PML.

Пусть в области  $\{t > 0, x \in \mathbb{R}^2\}$  задана линейная гиперболическая система уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x, t) \quad (2.44)$$

с некоторыми начальными условиями вида  $u(t = 0) = g(x)$  и условиями на бесконечности, обеспечивающими отсутствие волн, приходящих из бесконечности. Предполагается также, что носители функций  $f(x, t)$  и  $g(x)$  ограниченные и лежат внутри целевой области  $\Omega_{trg} = \{x \in [x_1^{min}, x_1^{max}] \times [x_2^{min}, x_2^{max}]\}$ . Следует отметить, что такое представление является общим и включает в себя систему уравнений акустики, динамической теории упругости, уравнений Максвелла и др. в зависимости от выбора матриц  $A_1$  и  $A_2$  [15], [16].

Задача ограничения расчетной области состоит в следующем: в области  $\Omega_{comp} = [x_1^{MIN}, x_1^{MAX}] \times [x_2^{MIN}, x_2^{MAX}]$ , такой что  $\Omega_{comp} \subseteq \Omega_{trg}$ , сформулировать задачу, решение которой с достаточной точностью совпадает с решением исходной задачи внутри целевой области  $\Omega_{trg}$ . Суть метода идеально согласованных слоев

в том, что в целевой области  $\Omega_{trg}$  решается исходная система уравнений (2.44), а в области  $\Omega_{comp}/\Omega_{trg}$  - в дополнении до всей расчетной области применяется комплексная замена переменных в системе (2.44), которая обеспечивает затухание решения. При этом параметры замены переменных и толщина слоя определяются из условия минимизации ошибки или, что то же самое, из условия минимизации нефизичных отражений. Впервые этот подход предлагается в работе [104], где в качестве замены переменных используется следующая (для PML в направлении оси  $x_1$ ):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mapsto \left(1 + \frac{d_1(x_1)}{i\omega}\right) \frac{\partial}{\partial x_1},$$

применение которой во временной области приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} + d_1 u^1 - A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial t} - A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad (2.45)$$

где  $u = u^1 + u^2$ . Выбор оптимального демпфирующего параметра предложен в работе [146].

Позднее предложен подход, основанный на комплексном сдвиге частоты, использование которого позволяет избавиться от неустойчивости, связанной с низкочастотными модами [162], [163], в этом случае замена переменных принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mapsto \frac{i\omega + d_1(x_1) + \alpha}{i\omega + \alpha} \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Следует подчеркнуть, что основной интерес представляет применение PML при моделировании волновых процессов в анизотропных средах и связанные с этим проблемы с устойчивостью. В этом случае отличий между классическим PML и CFS-PML нет.

Неустойчивость PML в применении к задачам расчета решения для анизотропных сред впервые сформулирована и исследована в работе [102]. Также в этой работе сформулирован необходимый признак устойчивости PML для анизотропных сред: для устойчивости необходимо, чтобы проекции векторов медленности и групповой скорости волны на направление PML имели одинаковый знак. Это условие сформулировано в терминах свойств среды и не включает в себя параметры PML,

следовательно модификация параметров РМЛ никак не влияет на устойчивость, и требуется принципиально иное решение. В 2008 году в работе [267] предложен многоосный РМЛ, или МРМЛ, при построении которого в каком-либо пространственном направлении, например  $x_1$ , проводится комплексная замена для всех пространственных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \mapsto \left(1 + \frac{d_1(x_1)}{i\omega}\right) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \mapsto \left(1 + \frac{d_2(x_1)}{i\omega}\right) \frac{\partial}{\partial x_2},$$

что приводит к следующей системе уравнений во временной области:

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} + d_1 u^1 - A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial t} + d_2 u^2 - A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0. \quad (2.46)$$

Несложно заметить, что при  $d_2 \equiv 0$  многоосный РМЛ сводится к стандартному РМЛ [104], а при  $d_2 \equiv d_1$ , если избавиться от расщепления переменных, способ эквивалентен введению младшего члена в исходную систему уравнений [59], в англоязычной литературе такой подход известен как *sponge layer* [331]. При этом, с одной стороны, введение дополнительного параметра позволяет ослабить необходимое условие устойчивости МРМЛ для анизотропных сред [267], [20], [158], по крайней мере при  $d_2 \equiv d_1$  задача будет корректна. С другой стороны, наличие касательного демпфинга приводит к увеличению нефизичных отражений [19], [157]. Поэтому возникает задача минимизации касательного демпфинга, обеспечивающего устойчивость для заданной модели среды.

### 2.3.3.2 Необходимое условие устойчивости

Для проведения дальнейших рассуждений необходимо напомнить следующие определения и ввести соответствующие обозначения:

- фазовая скорость  $v = \frac{\omega(\vec{k})}{|\vec{k}|}$ ,
- вектор медленности  $\vec{S} = \frac{\vec{k}}{\omega}$ ,
- вектор групповой скорости  $\vec{V}_g = \nabla_k \omega(k)$ ,
- нормализованный волновой вектор  $\vec{K} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ .

В этих обозначениях  $\omega$  - временная частота,  $\vec{k}$  - волновой вектор, параметры, определяющие решение в виде плоской волны:

$$u = U_0 e^{i(\omega t - (\vec{k}, x))}.$$

Подстановкой решения в виде плоской волны в исходную систему (2.44) и систему уравнений на МРМЛ (2.46) находятся дисперсионные соотношения, связывающие частоту и волновой вектор в исходной задаче:

$$F(\omega, \vec{k}) = \det(\omega I + k_1 A_1 + k_2 A_2) = 0, \quad (2.47)$$

и в МРМЛ:

$$F_{pml}(\omega, \vec{k}) = F\left(\omega, \frac{k_1}{1 - id_1/\omega}, \frac{k_2}{1 - id_2/\omega}\right) = 0. \quad (2.48)$$

Соотношение в РМЛ получается заменой переменных. Здесь и далее предполагается, что частота  $\omega$  отделена от нуля.

По определению система (2.46) устойчива, если выполняется условие:

$$\forall \vec{k} \quad \forall \omega_m(\vec{k}) \quad \Im \omega_m(\vec{k}) \geq 0.$$

Далее рассматриваются только высокочастотные решения, или, что то же самое, малые демпфинги, для которых выполняется соотношение  $\varepsilon_j = \frac{d_j}{|k|} \ll 1$ . С использованием введенных обозначений для фазовой скорости и нормализованного волнового вектора дисперсионное соотношение (2.48) записывается в виде:

$$F_{pml}(\omega, \vec{k}, \vec{\varepsilon}) = F\left(v(\vec{K}, \vec{\varepsilon}), \frac{K_1}{1 - i\varepsilon_1/v(\vec{K}, \vec{\varepsilon})}, \frac{K_2}{1 - i\varepsilon_2/v(\vec{K}, \vec{\varepsilon})}\right).$$

Используя разложение фазовой скорости в ряд Тейлора в окрестности точки  $|\varepsilon| = 0$ , представление для фазовой скорости записывается в следующем виде:

$$v(\vec{K}, \vec{\varepsilon}) = v(\vec{K}) + \varepsilon_1 \frac{\partial v(\vec{K}, \vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial v(\vec{K}, \vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_2} + O(|\varepsilon|^2).$$

Для вычисления производных по  $\varepsilon_j$  используется теорема о неявной функции:

$$\frac{\partial v(\vec{K}, \vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_j} = - \left( \frac{\partial F_{pml}(v, \vec{K})}{\partial K_1} \frac{\partial K_1}{\partial \varepsilon_j} + \frac{\partial F_{pml}(v, \vec{K})}{\partial K_2} \frac{\partial K_2}{\partial \varepsilon_j} \right) \left( \frac{\partial F_{pml}(v, \vec{K})}{\partial v} \right)^{-1}. \quad (2.49)$$

Принимая во внимание определение групповой скорости:

$$V_g^j = \frac{\partial \omega}{\partial k_j} = \frac{\partial v(\vec{K})}{\partial K_j} = - \frac{\partial F(v, \vec{K})}{\partial K_j} \left( \frac{\partial F(v, \vec{K})}{\partial v} \right)^{-1},$$

выражение (2.49) переписывается как

$$\frac{\partial v(\vec{K}, \vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_j} \Big|_{|\vec{\varepsilon}|=0} = V_g^1 \frac{\partial K_1}{\partial \varepsilon_j} \Big|_{|\vec{\varepsilon}|=0} + V_g^2 \frac{\partial K_2}{\partial \varepsilon_j} \Big|_{|\vec{\varepsilon}|=0}. \quad (2.50)$$

С использованием введенных обозначений получено равенство:

$$\frac{\partial K_i}{\partial \varepsilon_j} \Big|_{|\vec{\varepsilon}|=0} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ S_j & \text{for } i = j \end{cases},$$

где  $S_j$  - компоненты вектора медленности. После подстановки полученных значений в выражение (2.50), равенства, определяющие производные фазовой скорости по параметрам PML, записываются в виде:

$$\frac{\partial v(\vec{K}, \vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_j} \Big|_{|\vec{\varepsilon}|=0} = iV_g^j(\vec{K})S_j(\vec{K}).$$

В результате фазовая скорость для решения в виде плоской волны в MPML представляется в виде:

$$v(\vec{K}, \vec{\varepsilon}) = v(\vec{K}) + i\varepsilon_1 V_1(\vec{K})S_1(\vec{K}) + i\varepsilon_2 V_2(\vec{K})S_2(\vec{K}) + O(|\varepsilon|^2),$$

что позволяет сформулировать необходимое условие устойчивости MPML: Для устойчивости MPML (2.46) для гиперболической системы уравнений (2.44) необходимо выполнение следующего условия:

$$\forall \vec{K} \quad \varepsilon_1 V_1(\vec{K})S_1(\vec{K}) + \varepsilon_2 V_2(\vec{K})S_2(\vec{K}) \geq 0,$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  - нормализованные нормальный и касательный демпфинги. Если, более того, демпфинги линейно связаны, то есть  $\varepsilon_2 = \beta\varepsilon_1$ , то условие представляется в виде:

$$\forall \vec{K} \quad V_1(\vec{K})S_1(\vec{K}) + \beta V_2(\vec{K})S_2(\vec{K}) \geq 0.$$

В частности, если  $d_2 = 0$  ( $\beta = 0$ ), полученный необходимый признак устойчивости совпадает с признаком, сформулированным в работе [102].

### 2.3.3.3 Численные эксперименты

Цель экспериментов - численное исследование устойчивости МРМЛ для анизотропных сред в зависимости от выбора касательного демпфинга. Все эксперименты проводятся для двумерной системы уравнений линейной теории упругости. В качестве тестовых взяты две модели ортотропной среды [16], [381], [102] со следующими параметрами:

- Модель I -  $c_{11} = 4.0$  кг·с/м,  $c_{22} = 20$  кг·с/м,  $c_{33} = 2.0$  кг·с/м,  $c_{12} = 7.5$  кг·с/м,  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>;
- Модель II -  $c_{11} = 6.43 \cdot 10^{10}$  кг·с/м,  $c_{22} = 3.86 \cdot 10^{10}$  кг·с/м,  $c_{33} = 1.06 \cdot 10^{10}$  кг·с/м,  $c_{12} = 3.81 \cdot 10^{10}$  кг·с/м,  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>.

Здесь  $c_{ij}$  - компоненты тензора жесткости,  $\rho$  - плотность среды. Модель I приводится в работе [102] и является общепризнанной моделью для тестирования слабоотражающих граничных условий для анизотропных упругих сред. Модель II характерна для глинистых сланцев [357], [375]. Индикатрисы медленности и групповой скорости для моделей I и II, приведенные на рис. 2.10 и 2.11 соответственно, демонстрируют характерный признак нарушения необходимого условия устойчивости [102] для классического РМЛ [104] - наличие каустик в направлениях главных осей на индикатрисах групповой скорости. Именно на этих каустиках направление вектора групповой скорости существенно отличается от направления вектора медленности. В этом случае мнимая часть фазовой скорости волн в классическом РМЛ отрицательна, что явно прослеживается на рис. 2.12 и 2.13. С использованием необходимого признака устойчивости МРМЛ получены оценки стабилизирующих параметров МРМЛ: для модели

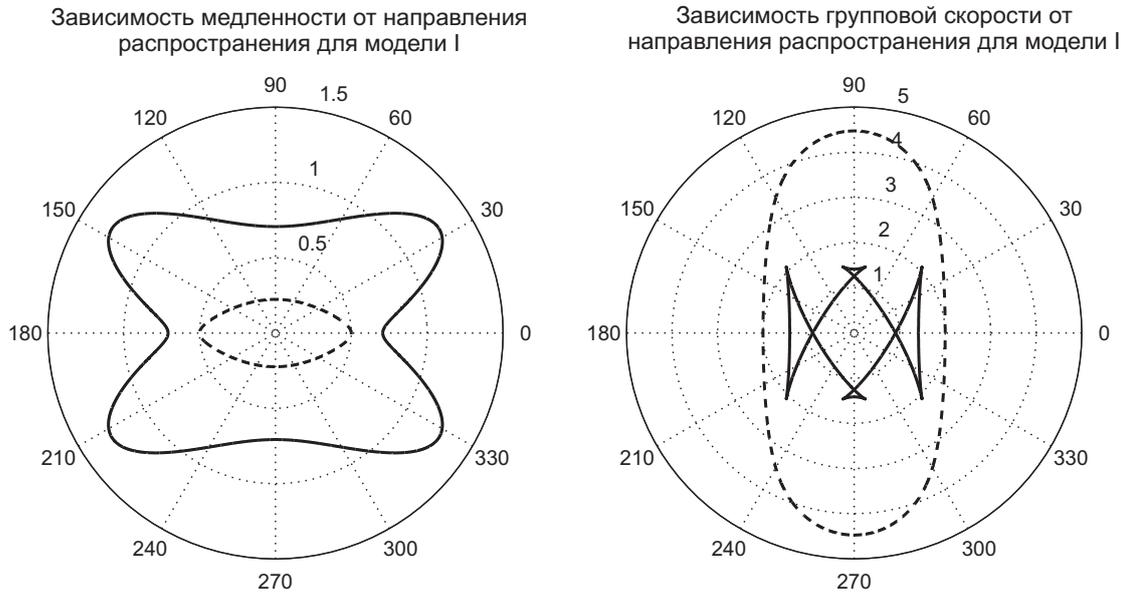
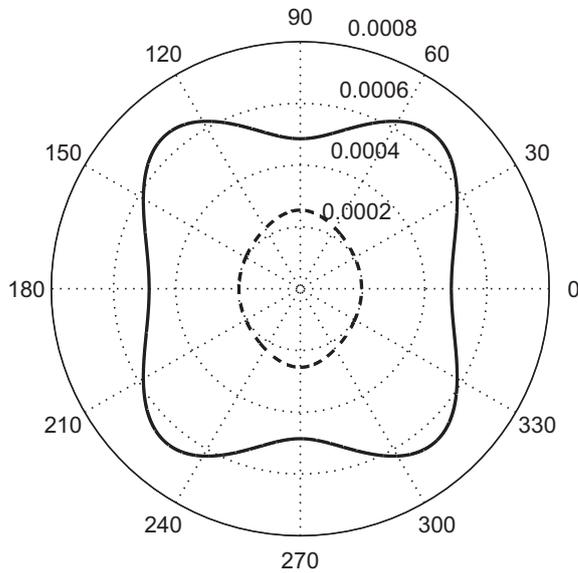


Рисунок 2.10 – Слева - зависимость медленности, справа - групповой скорости от направления распространения волны для модели I. Пунктирная линия соответствует qP-волне, сплошная - qS.

I -  $\beta_1 = 0.104$  и  $\beta_2 = 0.256$  для MPML в направлении  $x_1$  и  $x_2$  соответственно; для модели II -  $\beta_1 = 0.0883$ ,  $\beta_2 = 0.0724$ . В данных обозначениях  $\beta_j$  - коэффициент пропорциональности между касательным и нормальным демпфингом при построении MPML в направлении  $x_j$ .

Для численного исследования устойчивости моделирование волновых процессов в однородной анизотропной среде проводится в области  $[0, 5\lambda_0] \times [0, 5\lambda_0]$  для первой модели и  $[0, 10\lambda_0] \times [0, 10\lambda_0]$  - для второй модели, где  $\lambda_0$  - максимальная длина волны, соответствующая доминирующей частоте источника. В качестве функции источника используется импульс Риккера с доминирующей частотой 30 Гц. Источник располагается в центре расчетной области. Пространственная дискретизация составляет 40 точек на минимальную длину волны, число Куранта  $\Psi = 0.7$ . На мгновенных снимках волнового поля (рис. 2.14 и 2.15) видно, что использование классического PML приводит к возникновению и разлиту неустойчивости, в то время как MPML с построенными стабилизирующими параметрами остается устойчивым.

Зависимость медленности от направления распространения для модели II



Зависимость групповой скорости от направления распространения для модели II

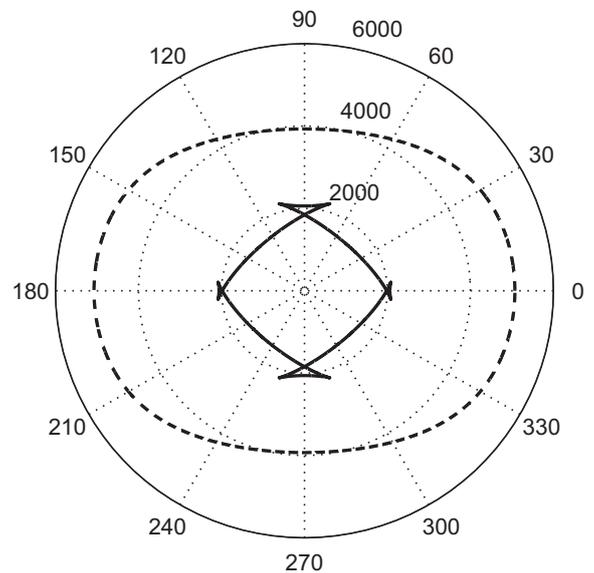
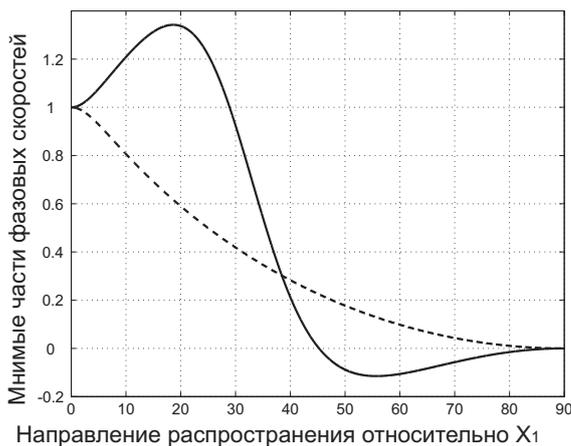


Рисунок 2.11 – Слева - зависимость медленности, справа - групповой скорости от направления распространения волны для модели II. Пунктирная линия соответствует qP-волне, сплошная - qS.

PML в направлении  $x_1$



PML в направлении  $x_2$

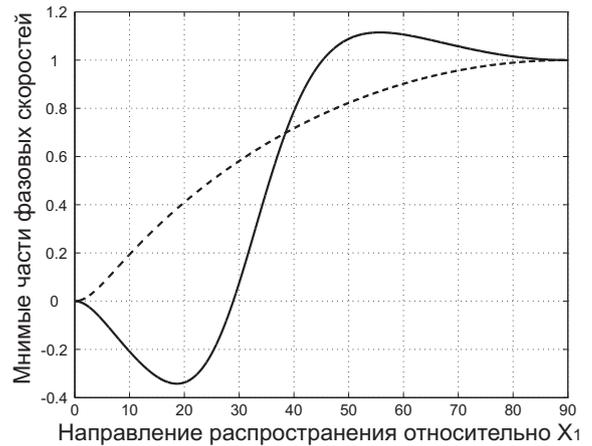


Рисунок 2.12 – Зависимость мнимой части фазовой скорости (показателя устойчивости) от направления распространения волны для модели I для классического PML. Слева - для PML в направлении  $x_1$ , справа -  $x_2$ . Пунктирная линия соответствует qP-волне, сплошная - qS.

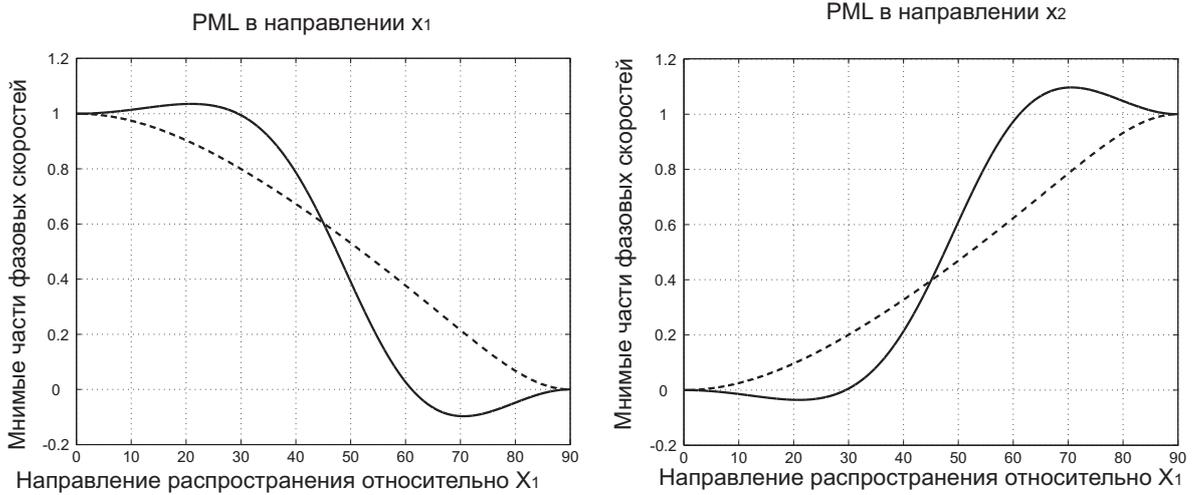


Рисунок 2.13 – Зависимость мнимой части фазовой скорости (показателя устойчивости) от направления распространения волны для модели II для классического PML. Слева - для PML в направлении  $x_1$ , справа -  $x_2$ . Пунктирная линия соответствует qP-волне, сплошная - qS.

## 2.3.4 Нефизичные решения в виде плоских волн

### 2.3.4.1 Двумерная постановка

Схема Лебедева, как и большинство численных схем, допускает наличие нефизичных высокочастотных мод с длиной волны  $\lambda = 2h$ , где  $h$  - шаг сетки. Такие моды в англоязычной литературе называют plus-minus modes [142], [86]. При этом геометрия сетки для схемы Лебедева такова, что эти моды полностью независимы, и при разработке алгоритмов моделирования волновых процессов с использованием схемы Лебедева необходимо учитывать наличие у получаемой разностной системы более широкого набора характеристик, чем у исходной системы уравнений динамической теории упругости, в частности возникает задача постановки и аппроксимации граничных и начальных условий, а также правой части [43], [248].

Система уравнений динамической теории упругости, записанная в дивергентной форме (2.3):

$$\begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \vec{u} \\ \partial_t \vec{\sigma} \end{pmatrix} - \sum_{m=1}^2 \begin{pmatrix} 0 & A_m \\ A_m^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_m \vec{u} \\ \partial_m \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_u \\ \vec{f}_\sigma \end{pmatrix},$$

обладает набором из пяти характеристик, так что ее дисперсионное соотношение

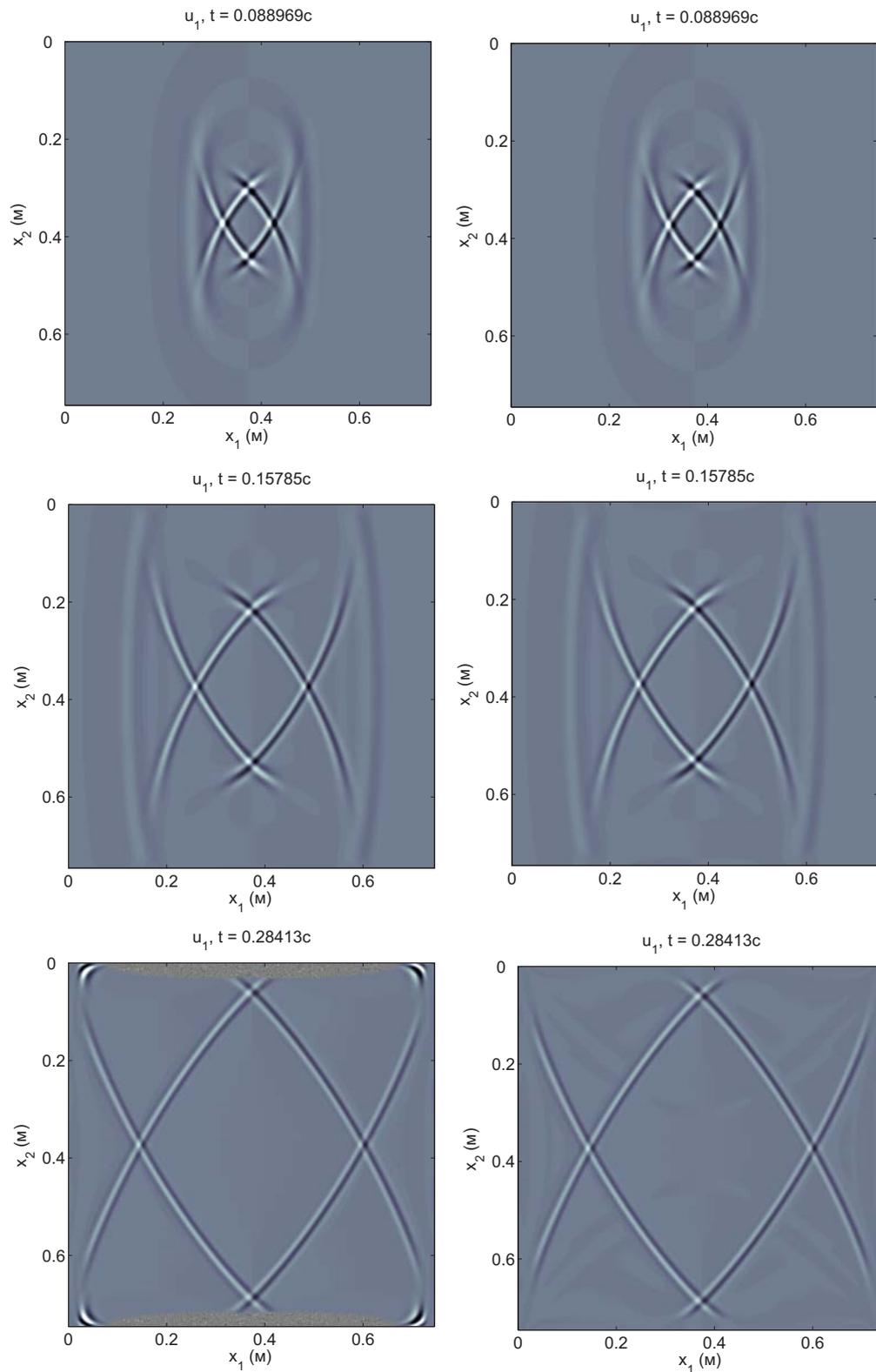


Рисунок 2.14 – Снимки волнового поля ( $u_1$ ) для модели I в разные моменты времени. Снимки слева соответствуют классическому PML. Снимки справа соответствуют MPML для  $\beta_1 = 0.104$ ,  $\beta_2 = 0.256$ .

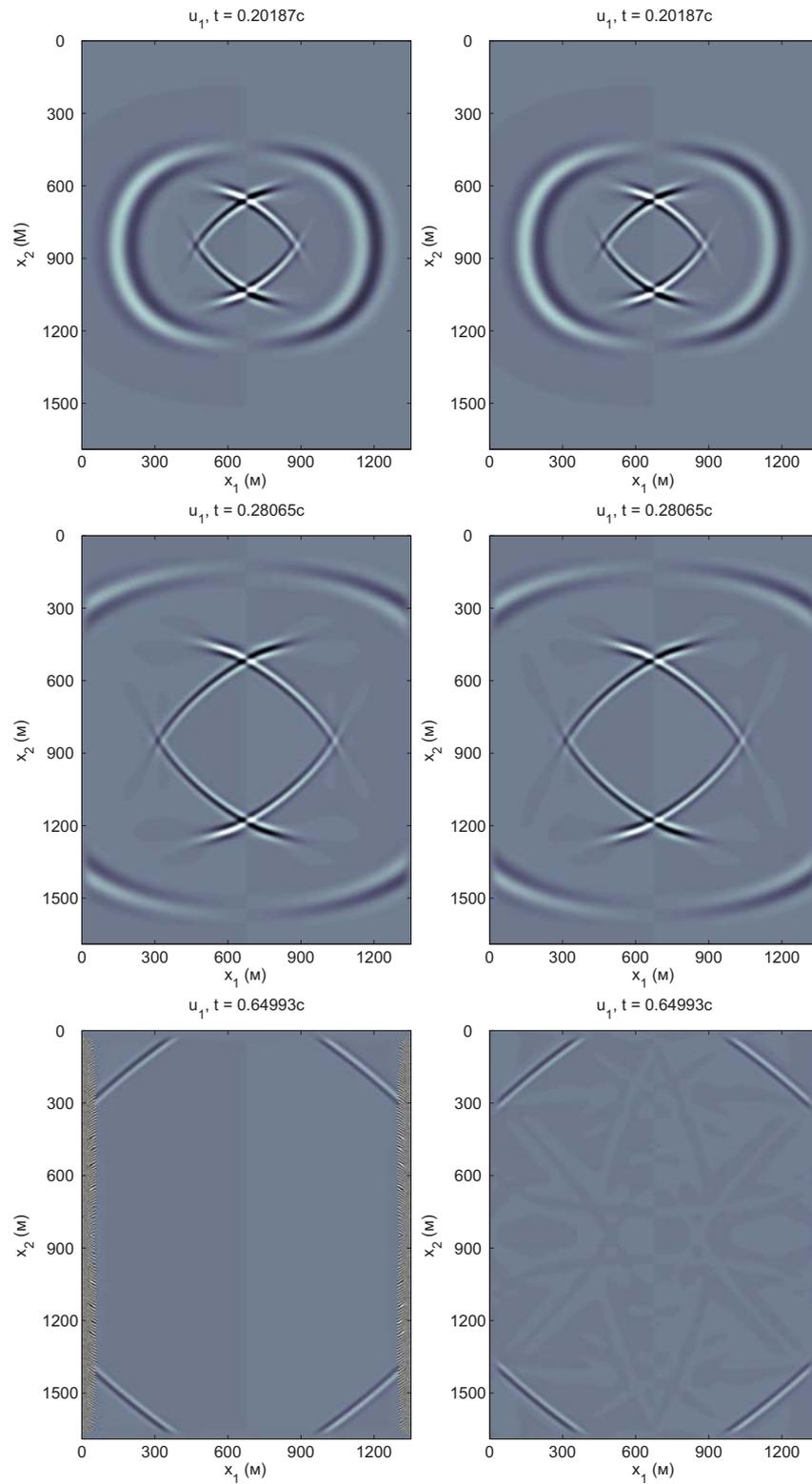


Рисунок 2.15 – Снимки волнового поля ( $u_1$ ) для модели II в разные моменты времени. Снимки слева соответствуют классическому PML. Снимки справа соответствуют MPML для  $\beta_1 = 0.0883$ ,  $\beta_2 = 0.0724$ .

может быть записано в виде [29], [15], [16]:

$$D_+ = i\omega (\omega^2 - V_{qP}^2(\alpha)(k_1^2 + k_2^2)) (\omega^2 - V_{qS}^2(\alpha)(k_1^2 + k_2^2)), \quad (2.51)$$

где  $\omega$  - временная частота,  $\vec{k} = (k_1, k_2)^T$  - волновой вектор,  $\alpha = \arctan(k_2/k_1)$  - угол, определяющий направление распространения,  $V_{qP}$  и  $V_{qS}$  - фазовые скорости волн, в общем случае зависящие от направления распространения. Здесь используются традиционные обозначения для скоростей  $qP$  и  $qS$  для квазипродольной и квазипоперечной волн, однако в общем случае данное деление является условным.

Если среда изотропна, зависимости скорости волны от направления распространения нет, а решение в виде плоской волны записывается в явном виде. Решение для продольной, или P-волны:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = B_P \begin{pmatrix} U_0^{P+} \\ \Sigma_0^{P+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{P+} x_1 - k_2^{P+} x_2)}, \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} U_0^{P+} \\ \Sigma_0^{P+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^{P+} \\ n_2^{P+} \\ -(\lambda + 2\mu)(n_1^{P+})^2 - \lambda(n_2^{P+})^2 \\ -\lambda(n_1^{P+})^2 - (\lambda + 2\mu)(n_2^{P+})^2 \\ -2\mu n_1^{P+} n_2^{P+} \end{pmatrix},$$

где  $B_P$  - некоторая константа,  $n_1^{P+}$  и  $n_2^{P+}$  - компоненты вектора медленности  $n_j = k_j/\omega$ , а частота связана с волновым вектором соотношением  $\omega^2 - v_P^2 |\vec{k}|^2 = 0$ . Решение

для поперечной или S-волны есть

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = B_S \begin{pmatrix} U_0^{S+} \\ \Sigma_0^{S+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{S+} x_1 - k_2^{S+} x_2)}, \quad (2.53)$$

$$\begin{pmatrix} U_0^{S+} \\ \Sigma_0^{S+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2^{S+} \\ -n_1^{S+} \\ -2\mu n_1^{S+} n_2^{S+} \\ 2\mu n_1^{S+} n_2^{S+} \\ \mu((n_1^{S+})^2 - (n_2^{S+})^2) \end{pmatrix},$$

где  $B_S$  - константа,  $n_1^{S+}$  и  $n_2^{S+}$  - компоненты вектора медленности  $n_j = k_j/\omega$ , а частота связана с волновым вектором соотношением:  $\omega^2 - v_S^2 |\vec{k}|^2 = 0$ . Значение возникающего здесь знака плюс в обозначениях объясняется ниже.

Для построения решения в виде плоской волны для системы уравнений, получаемых в результате аппроксимации уравнений динамической теории упругости схемой Лебедева, вводятся дополнительные обозначения и разбиение сетки:

$$\begin{aligned} \Omega_\sigma^1 &= \{(x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2} | I_1 \in \mathbb{Z}, I_2 \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_\sigma^2 &= \{(x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2} | I_1 \notin \mathbb{Z}, I_2 \notin \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_u^1 &= \{(x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_1} | I_1 \notin \mathbb{Z}, I_2 \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_u^2 &= \{(x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_1} | I_1 \in \mathbb{Z}, I_2 \notin \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Это разбиение эквивалентно представлению сетки для схемы Лебедева в виде комбинации двух сеток для стандартной схемы на сдвинутых сетках.

После определения сеточных функций  $\sigma^l$  и  $u^l$ ,  $l = 1, 2$  в узлах с соответствующими верхними индексами в обозначениях схема Лебедева (2.15) переписывается в

виде:

$$\begin{aligned}
\rho I D_t[u^1]^{n+1/2} &= D_1^L[\sigma^1]^{n+1/2} + D_2^L[\sigma^2]^{n+1/2}, & x \in \Omega_u^1, \\
\rho I D_t[u^2]^{n+1/2} &= D_1^L[\sigma^2]^{n+1/2} + D_2^L[\sigma^1]^{n+1/2}, & x \in \Omega_u^2, \\
S D_t[\sigma^1]^n &= D_1^L[u^1]^n + D_2^L[u^2]^n, & x \in \Omega_\sigma^1, \\
S D_t[\sigma^2]^n &= D_1^L[u^2]^n + D_2^L[u^1]^n, & x \in \Omega_\sigma^2,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

где  $D_m^L$  - конечно-разностные операторы, аппроксимирующие частные производные вдоль соответствующих пространственных направлений.

Используя метод дифференциальных приближений [59], несложно показать, что первое дифференциальное приближение полученной конечно-разностной схемы есть:

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \rho I & 0 \\ 0 & D_S \end{array} \right) \partial_t - \sum_{m=1}^2 \left( \begin{array}{cc} 0 & \mathbf{A}_m \\ \mathbf{A}_m^T & 0 \end{array} \right) \partial_m \right) \begin{pmatrix} U \\ \Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_U \\ F_\Sigma \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

где  $U = ((u^1)^T, (u^2)^T)^T$ ,  $\Sigma = ((\sigma^1)^T, (\sigma^2)^T)^T$ ,  $F_U = ((f_u^1)^T, (f_u^2)^T)^T$ ,  $F_\Sigma = ((f_\sigma^1)^T, (f_\sigma^2)^T)^T$ ,

а

$$D_S = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

После замены переменных:

$$\begin{pmatrix} u^- \\ u^+ \\ \sigma^- \\ \sigma^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -I & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -I \\ 0 & 0 & I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

система (2.55) распадается на две независимые подсистемы:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t u^+ \\ \partial_t \sigma^+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u^+ \\ \partial_1 \sigma^+ \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_2 u^+ \\ \partial_2 \sigma^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u^+ \\ f_\sigma^+ \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t u^- \\ \partial_t \sigma^- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 u^- \\ \partial_1 \sigma^- \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ A_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_2 u^- \\ \partial_2 \sigma^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u^- \\ f_\sigma^- \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Первая подсистема совпадает с системой уравнений динамической теории упругости (2.3), вторая - отличается знаком перед производными по направлению  $x_2$ .

Дисперсионное соотношение, определяющее связь между частотами при построении решения в виде плоских волн для системы (2.55), в точности совпадает с соотношением для системы (2.57), которое, в свою очередь, может быть получено как произведение дисперсионных соотношений каждой из подсистем (2.57):

$$\begin{aligned}
D &= D_+(\omega, k_1, k_2) D_+(\omega, k_1, -k_2) = D_+(\omega, k_1, k_2) D_-(\omega, k_1, k_2) \equiv \\
&\equiv \omega^2 \left[ \omega^2 - v_P^2(\alpha) |\vec{k}|^2 \right] \left[ \omega^2 - v_S^2(\alpha) |\vec{k}|^2 \right] \times \\
&\times \left[ \omega^2 - v_P^2(-\alpha) |\vec{k}|^2 \right] \left[ \omega^2 - v_S^2(-\alpha) |\vec{k}|^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Построенное дисперсионное соотношение показывает, что система (2.55) обладает набором из десяти характеристик (включая две вертикальные  $\omega = 0$ ), в то время как система уравнений динамической теории упругости обладает лишь пятью, включая одну вертикальную. При этом фазовые скорости распространения нефизичных решений отличаются от скоростей истинных решений зависимостью от направления. Понятно, что для устранения нефизичных мод из решения необходимо корректное задание правых частей, начальных и граничных условий. В частности, необходимо выполнение условия  $f_u^- \equiv 0$ ,  $f_\sigma^- \equiv 0$ , аналогично - для начальных и граничных условий [93], [248].

В случае изотропной среды, где нет зависимости скорости от направления, по-

лучаемые два набора решений кинематически неразличимы, однако получаемые решения отличны:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = B_P \begin{pmatrix} U_0^{P-} \\ \Sigma_0^{P-} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{P-} x_1 - k_2^{P-} x_2)}, \quad (2.58)$$

$$\begin{pmatrix} U_0^{P-} \\ \Sigma_0^{P-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^{P-} \\ -n_2^{P-} \\ -(\lambda + 2\mu)(n_1^{P-})^2 - \lambda(n_2^{P-})^2 \\ -\lambda(n_1^{P-})^2 - (\lambda + 2\mu)(n_2^{P-})^2 \\ 2\mu n_1^{P-} n_2^{P-} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = B_S \begin{pmatrix} U_0^{S-} \\ \Sigma_0^{S-} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{S-} x_1 - k_2^{S-} x_2)}, \quad (2.59)$$

$$\begin{pmatrix} U_0^{S-} \\ \Sigma_0^{S-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_2^{S-} \\ -n_1^{S-} \\ 2\mu n_1^{S-} n_2^{S-} \\ -2\mu n_1^{S-} n_2^{S-} \\ \mu((n_1^{S-})^2 - (n_2^{S-})^2) \end{pmatrix}.$$

Индексы  $P-$ ,  $S-$  используются, чтобы подчеркнуть, что решение удовлетворяет второй подсистеме из (2.57).

### 2.3.4.2 Трехмерная постановка

Как и в двумерной постановке, прежде чем переходить к описанию алгоритма, комбинирующего схему Лебедева со стандартной схемой на сдвинутых сетках, необходимо построить нефизичные решения, допускаемые схемой Лебедева. Рассматрива-

ется система уравнений динамической теории упругости, записанная в дивергентной форме в декартовой системе координат (2.23):

$$\begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \vec{u} \\ \partial_t \vec{\sigma} \end{pmatrix} - \sum_{m=1}^3 \begin{pmatrix} 0 & A_m \\ A_m^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_m \vec{u} \\ \partial_m \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_u \\ \vec{f}_\sigma \end{pmatrix},$$

матрицы  $A_m$  имеют следующий вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для упрощения удобно ввести новые обозначения:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & A_j \\ A_j^* & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix}$$

и переписать систему (2.23) в следующем виде:

$$\mathbf{S} \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{m=1}^3 \mathbf{A}_m \frac{\partial w}{\partial x_m} = 0. \quad (2.60)$$

Дисперсионное соотношение для этой системы уравнений хорошо известно и может быть представлено как:

$$\begin{aligned} D^{++}(\vec{k}) &= D(k_1, k_2, k_3) = \\ &= C\omega \left[ \omega^2 - v_{qP}^2 \left( \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right) |\vec{k}|^2 \right] \left[ \omega^2 - v_{qS1}^2 \left( \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right) |\vec{k}|^2 \right] \left[ \omega^2 - v_{qS2}^2 \left( \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right) |\vec{k}|^2 \right], \end{aligned}$$

где  $v_{qP}$ ,  $v_{qS1}$  и  $v_{qS2}$  - фазовые скорости квазипродольной и двух квазипоперечных волн. Схема Лебедева (2.33) также записывается в конечно-разностной дивергентной форме:

$$\begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_t[u]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} \\ D_t[\sigma]_{I'_1, I'_2, I'_3}^n \end{pmatrix} - \sum_{m=1}^3 \begin{pmatrix} 0 & A_m \\ A_m^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_m^L[u]_{I'_1, I'_2, I'_3}^n \\ D_m^L[\sigma]_{I_1, I_2, I_3}^{n-1/2} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.61)$$

где  $((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) \in \Omega_u^L$  и  $((x_1)_{I'_1}, (x_2)_{I'_2}, (x_3)_{I'_3}) \in \Omega_\sigma^L$ .

Для построения дифференциального приближения схемы Лебедева и вычисления полного дисперсионного соотношения вводится разбиение сеток  $\Omega_u^L$  и  $\Omega_\sigma^L$ , как представлено в работах [248], [43]:

$$\begin{aligned} \Omega_\sigma^1 &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) \in \Omega_\sigma^L | I_1 \in \mathbb{Z}, I_2 \in \mathbb{Z}, I_3 \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_\sigma^2 &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) \in \Omega_\sigma^L | I_1 \notin \mathbb{Z}, I_2 \notin \mathbb{Z}, I_3 \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_\sigma^3 &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) \in \Omega_\sigma^L | I_1 \notin \mathbb{Z}, I_2 \in \mathbb{Z}, I_3 \notin \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_\sigma^4 &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) \in \Omega_\sigma^L | I_1 \in \mathbb{Z}, I_2 \notin \mathbb{Z}, I_3 \notin \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_u^1 &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) \in \Omega_u^L | I_1 \notin \mathbb{Z}, I_2 \in \mathbb{Z}, I_3 \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_u^2 &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) \in \Omega_u^L | I_1 \in \mathbb{Z}, I_2 \notin \mathbb{Z}, I_3 \in \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_u^3 &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) \in \Omega_u^L | I_1 \in \mathbb{Z}, I_2 \in \mathbb{Z}, I_3 \notin \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_u^4 &= \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) \in \Omega_u^L | I_1 \notin \mathbb{Z}, I_2 \notin \mathbb{Z}, I_3 \notin \mathbb{Z}\}, \\ \Omega_\sigma^L &= \bigcup_{l=1}^4 \Omega_\sigma^l, \\ \Omega_u^L &= \bigcup_{l=1}^4 \Omega_u^l, \end{aligned}$$

На каждой из полученных сеток определяются соответствующие компоненты поля, например,  $\sigma^l$  компоненты тензора напряжений - в точках сетки  $\Omega_\sigma^l$ . С использованием

введенных обозначений схема Лебедева записывается в расширенной форме:

$$\begin{aligned}
\rho ID_t[u^1]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_1^* D_1^L[\sigma^1]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_2^* D_2^L[\sigma^2]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_3^* D_3^L[\sigma^3]_{I_1, I_2, I_3}^N &= 0, \\
N \notin \mathbb{Z}, ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_u^1, \\
\rho ID_t[u^2]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_1^* D_1^L[\sigma^2]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_2^* D_2^L[\sigma^1]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_3^* D_3^L[\sigma^4]_{I_1, I_2, I_3}^N &= 0, \\
N \notin \mathbb{Z}, ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_u^2, \\
\rho ID_t[u^3]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_1^* D_1^L[\sigma^3]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_2^* D_2^L[\sigma^4]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_3^* D_3^L[\sigma^1]_{I_1, I_2, I_3}^N &= 0, \\
N \notin \mathbb{Z}, ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_u^3, \\
\rho ID_t[u^4]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_1^* D_1^L[\sigma^4]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_2^* D_2^L[\sigma^3]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_3^* D_3^L[\sigma^2]_{I_1, I_2, I_3}^N &= 0, \\
N \notin \mathbb{Z}, ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_u^4, \\
SD_t[\sigma^1]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_1 D_1^L[u^1]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_2 D_2^L[u^2]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_3 D_3^L[u^3]_{I_1, I_2, I_3}^N &= 0, \\
N \in \mathbb{Z}, ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_\sigma^1, \\
SD_t[\sigma^2]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_1 D_1^L[u^2]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_2 D_2^L[u^1]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_3 D_3^L[u^4]_{I_1, I_2, I_3}^N &= 0, \\
N \in \mathbb{Z}, ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_\sigma^2, \\
SD_t[\sigma^3]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_1 D_1^L[u^3]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_2 D_2^L[u^4]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_3 D_3^L[u^1]_{I_1, I_2, I_3}^N &= 0, \\
N \in \mathbb{Z}, ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_\sigma^3, \\
SD_t[\sigma^4]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_1 D_1^L[u^4]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_2 D_2^L[u^3]_{I_1, I_2, I_3}^N - A_3 D_3^q[u^2]_{I_1, I_2, I_3}^N &= 0, \\
N \in \mathbb{Z}, ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}, (x_3)_{I_3}) &\in \Omega_\sigma^4.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Такое представление схемы Лебедева приводит к следующему первому дифференциальному приближению [59]:

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \rho E_{12} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{r=1}^3 \left( \begin{array}{cc} 0 & \mathbf{A}_r^* \\ \mathbf{A}_r & 0 \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \left[ \begin{array}{c} U \\ \Sigma \end{array} \right] = 0 + O(\tau^2, h_r^q), \tag{2.63}$$

где  $U = ((u^1)^T, (u^2)^T, (u^3)^T, (u^4)^T)^T$ , аналогичное представление верно для  $\Sigma$ . Матрицы, входящие в формулу, имеют вид:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & A_2 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

где  $S$  - тензор податливости, а матрицы  $A_m$  определены выше. После применения замены переменных

$$\begin{pmatrix} u^{--} \\ u^{+-} \\ u^{-+} \\ u^{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 & -I_3 & -I_3 & I_3 \\ I_3 & I_3 & -I_3 & -I_3 \\ I_3 & -I_3 & I_3 & -I_3 \\ I_3 & I_3 & I_3 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

(аналогично для  $\Sigma$ ) система (2.63) распадается на 4 независимых системы:

$$\begin{aligned} \left( \hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} u^{--} \\ \sigma^{--} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u^{+-} \\ \sigma^{+-} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u^{-+} \\ \sigma^{-+} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u^{++} \\ \sigma^{++} \end{pmatrix} \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} f_u^{--} \\ f_\sigma^{--} \\ f_u^{+-} \\ f_\sigma^{+-} \\ f_u^{-+} \\ f_\sigma^{-+} \\ f_u^{++} \\ f_\sigma^{++} \end{pmatrix}, \\ \left( \hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) & \\ \left( \hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) & \\ \left( \hat{S} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \hat{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \hat{A}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) & \end{aligned} \quad (2.65)$$

Дисперсионное соотношение исходной системы (2.63) в точности совпадает с дисперсионным соотношением для системы (2.65), которое представляется в виде:

$$\begin{aligned} D(\vec{k}) &= D^{++}(k_1, -k_2, -k_3) D^{++}(k_1, k_2, -k_3) D^{++}(k_1, -k_2, k_3) D^{++}(k_1, k_2, k_3) = \\ &= D^{--}(\vec{k}) D^{+-}(\vec{k}) D^{-+}(\vec{k}) D^{++}(\vec{k}). \end{aligned}$$

Это представление означает, что схема Лебедева аппроксимирует систему уравнений, обладающую 24 характеристиками так, что шесть из них совпадают с характеристиками системы уравнений динамической теории упругости, а остальные являются нефизическими модами. Здесь и далее истинные решения обозначаются верхним

индексом  $++$ , остальные - индексами  $+-$ ,  $-+$  и  $--$ . Чтобы установить связь между решениями расщепленной системы (2.65) и решениями исходной системы (2.63) применяется обратная замена переменных:

$$\begin{aligned} g^1 &= 0.25(g^{++} + g^{-+} + g^{+-} + g^{--}), \\ g^2 &= 0.25(g^{++} - g^{-+} + g^{+-} - g^{--}), \\ g^3 &= 0.25(g^{++} + g^{-+} - g^{+-} - g^{--}), \\ g^4 &= 0.25(g^{++} - g^{-+} - g^{+-} + g^{--}), \end{aligned} \tag{2.66}$$

где  $g$  - произвольная функция.

**Численный эксперимент.** Для подтверждения наличия нефизичных мод в численном решении, полученном с использованием схемы Лебедева, проводится численный эксперимент: моделируется распространение волн в трансверсально-изотропной среде с наклонной осью симметрии. Для задания модели используются параметры Томпсона [357]:

$$\begin{aligned} \rho &= 2570 \text{ kg/m}^3, \quad v_P = 4450 \text{ m/s}, \quad v_S = 2585 \text{ m/s}, \\ \varepsilon &= 0.091, \quad \gamma = 0.046, \quad \delta = 0688, \end{aligned}$$

где  $\rho$  - плотность,  $v_P$  и  $v_S$  - скорости продольной и поперечной волн в направлении оси симметрии среды,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  - параметры Томпсона, характеризующие интенсивность анизотропии. Групповые скорости всех трех волн для данной модели среды приведены на рис. 2.16.

Для иллюстрации изучаемого эффекта проявления нефизичных мод предполагается, что ось симметрии среды наклонена на  $60^\circ$  относительно координатной оси  $x_3$  и повернута на  $30^\circ$  от оси  $x_1$  (рис. 2.17).

Для упрощения волновой картины используется источник типа центра расширения, что исключает возникновение быстрой поперечной волны. Источник располагается в центре расчетной области, а решение фиксируется в горизонтальной плоскости  $x_3 = 2400$  м в момент времени  $t = 1$  с. Такая геометрия эксперимента позволяет наблюдать все решения: один набор физичных мод и три набора артефактных ре-

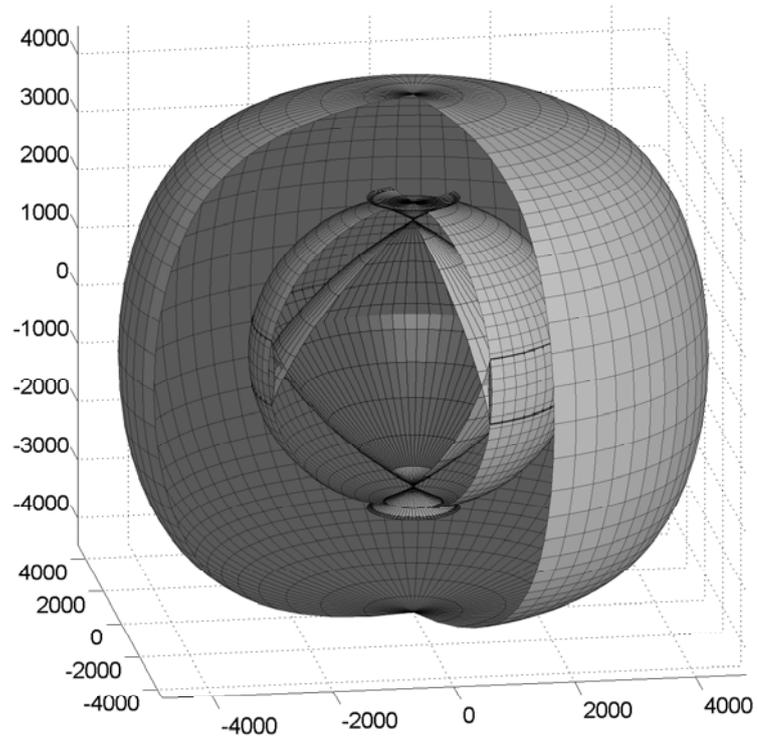


Рисунок 2.16 – Групповые скорости волн в рассматриваемой модели трансверсально-изотропной среды

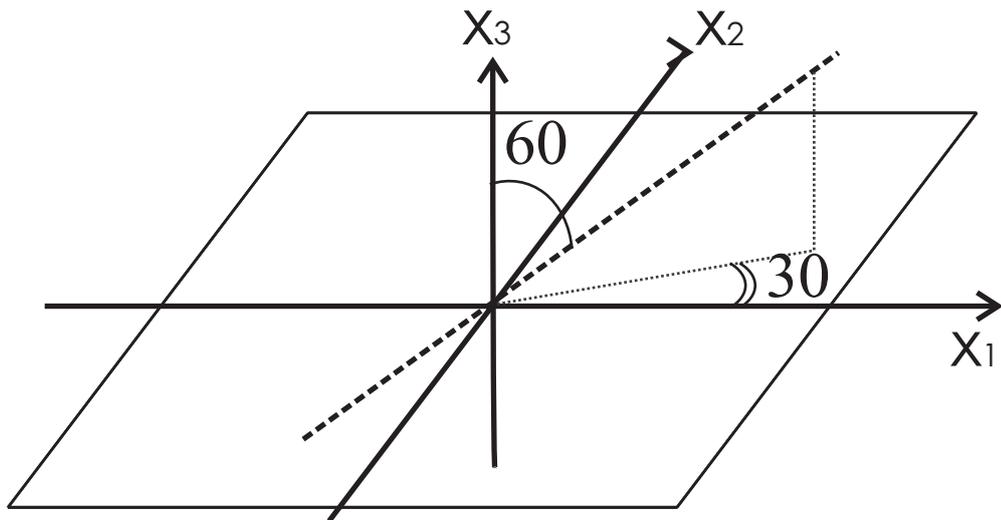


Рисунок 2.17 – Ориентация оси симметрии трансверсально-изотропной среды относительно используемой системы координат

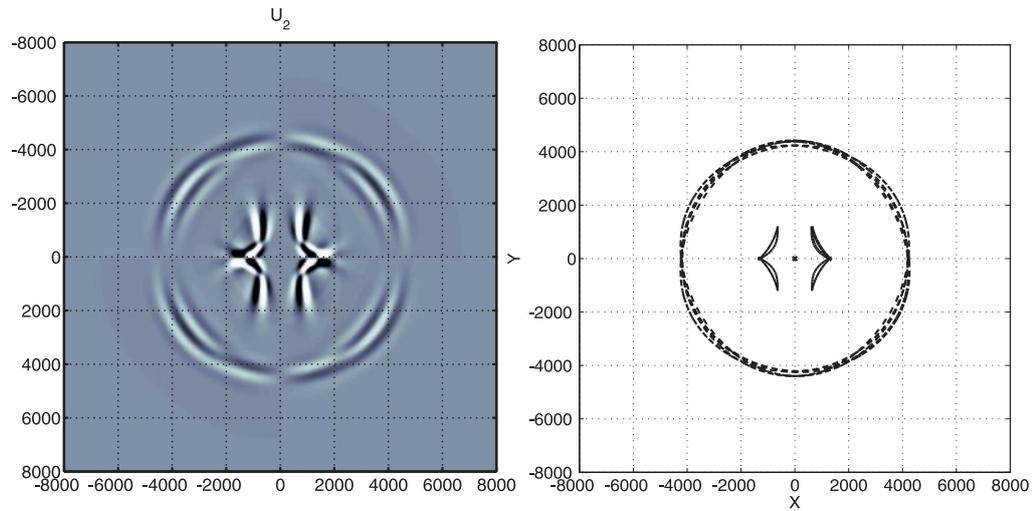


Рисунок 2.18 – Мгновенный снимок волнового поля для эксперимента с источником, излучающим как физические, так и нефизические моды (слева), сечение соответствующей плоскостью поверхностей групповых скоростей (справа). Сплошные линии соответствуют квазиперечным волнам, штрихованные - квазипродольным

шений.

Первый расчет проводится с применением источника, допускающего все типы решений с одинаковой интенсивностью. Расчеты показывают, что в волновой картине устойчиво проявляются восемь волн: четыре квазипродольных и четыре квазиперечных (рис. 2.18). При этом положение фронтов в точности совпадает с индикатрисами групповых скоростей в рассматриваемой плоскости. Во втором расчете источник выбирается таким образом, чтобы минимизировать энергию артефактных решений, в результате на мгновенном снимке волнового поля присутствуют лишь физические моды (на рис. 2.19).

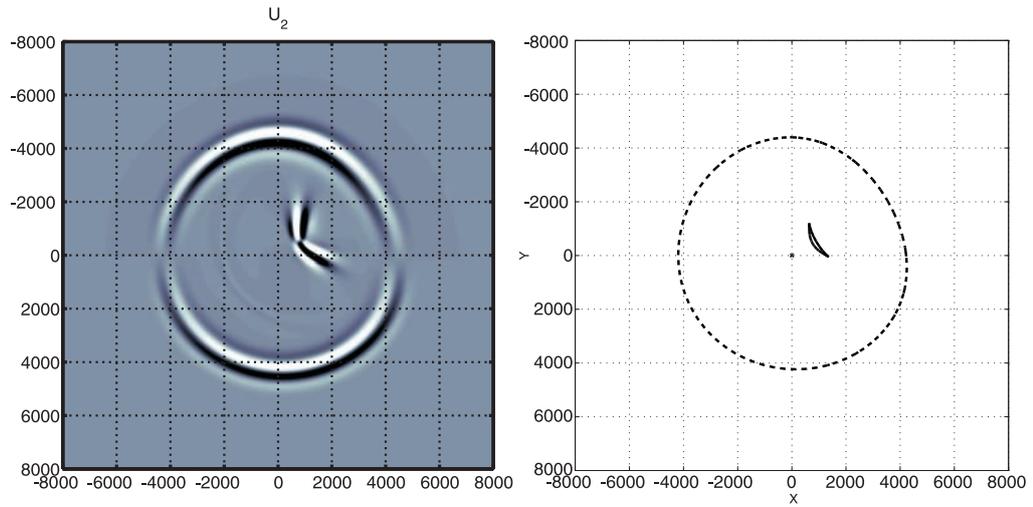


Рисунок 2.19 – Мгновенный снимок волнового поля для эксперимента с источником, излучающим только физические моды (слева), сечение соответствующей плоскостью поверхностей групповых скоростей (справа). Сплошная линия соответствуют квазипоперечной волне, штрихованная - квазипродольной

## 2.4 Комбинирование схемы Лебедева и стандартной схемы на сдвинутых сетках

### 2.4.1 Алгоритм комбинирования конечно-разностных схем в двумерной постановке

#### 2.4.1.1 Дифференциальная постановка

Пусть в области  $x_2 < h_2/2$  определена система уравнений (2.55) с нулевыми начальными условиями и подходящими условиями на бесконечности. В области  $x_2 > h_2/2$  задана система уравнений динамической теории упругости (2.3), также с нулевыми начальными и подходящими условиями на бесконечности. Необходимо построить корректные условия согласования на границе раздела  $x_2 = h_2/2$ . Такие условия должны обеспечивать равенство нулю коэффициентов отражения при прохождении физических волн через границу раздела, но предотвращать прохождение нефизических мод из области  $x_2 < h_2/2$  в область  $x_2 > h_2/2$ .

Основываясь на результатах, приведенных в предыдущем разделе, в качестве

таких условий используются следующие:

$$\begin{aligned} u_1^v &= u_1^+, & \sigma_{22}^v &= \sigma_{22}^+, & u_2^- &= 0, \\ u_2^v &= u_2^+, & \sigma_{12}^v &= \sigma_{12}^+, & \sigma_{12}^- &= 0, \end{aligned} \quad (2.67)$$

где переменные с верхним индексом  $v$  определены в области  $x_2 \leq h_2/2$ , а переменные с индексами  $+$  или  $-$  соответствуют переменным из системы (2.55), определенной при  $x_2 > h_2/2$ . Условия в первых двух столбцах обеспечивают непрерывность вектора скорости и нормальных компонент тензора напряжений для физических мод на границе при прохождении волн через интерфейс. Условия в третьем столбце обеспечивают полное отражение нефизических мод.

В силу того что функции  $f^\pm$  не используются в схеме Лебедева в явном виде, необходимо переписать приведенные выше уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1^v &= u_1^1 + u_1^2, & u_2^v &= 2u_2^1 = 2u_2^2, \\ \sigma_{22}^v &= \sigma_{22}^1 + \sigma_{22}^2, & \sigma_{12}^v &= 2\sigma_{12}^1 = 2\sigma_{12}^2. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Корректность начально-краевой задачи с указанными граничными условиями может быть доказана с использованием метода определителя Лопатинского [317], [318], [232]. Прежде чем переходить к аппроксимации полученных уравнений, детально исследуются коэффициенты отражения/прохождения плоских волн на полученной границе раздела. При падении объемной волны любого типа на границу  $x_2 = h_2/2$  возникает шесть волн: две - распространяющиеся вверх в области  $x_2 < h_2/2$ , две физические моды, распространяющиеся вниз в области  $x_2 > h_2/2$ , и две нефизические моды, распространяющиеся вниз в области  $x_2 > h_2/2$ . При этом в качестве начального возмущения - падающей волны - рассматривается суперпозиция всех возможных приходящих волн. В этом случае решение в окрестности границы записывается в виде:

при  $x_2 < h_2/2$ :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} &= R_p \begin{pmatrix} U_{down}^{P+} \\ \Sigma_{down}^{P+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{P+} x_1 - k_2^{P+} x_2)} + \\
&+ R_s \begin{pmatrix} U_{down}^{S+} \\ \Sigma_{down}^{S+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{S+} x_1 - k_2^{S+} x_2)} + \\
&+ A_p \begin{pmatrix} U_{up}^{P+} \\ \Sigma_{up}^{P+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{P+} x_1 + k_2^{P+} x_2)} + \\
&+ A_s \begin{pmatrix} U_{up}^{S+} \\ \Sigma_{up}^{S+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{S+} x_1 + k_2^{S+} x_2)};
\end{aligned}$$

при  $x_2 > h_2/2$ :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} &= R_p^+ \begin{pmatrix} U_{up}^{P+} \\ \Sigma_{up}^{P+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{P+} x_1 + k_2^{P+} x_2)} + \\
&+ R_s^+ \begin{pmatrix} U_{up}^{S+} \\ \Sigma_{up}^{S+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{S+} x_1 + k_2^{S+} x_2)} + \\
&+ R_p^- \begin{pmatrix} U_{up}^{P-} \\ \Sigma_{up}^{P-} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{P-} x_1 + k_2^{P-} x_2)} + \\
&+ R_s^- \begin{pmatrix} U_{up}^{S-} \\ \Sigma_{up}^{S-} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{S-} x_1 + k_2^{S-} x_2)} + \\
&+ B_p^+ \begin{pmatrix} U_{down}^{P+} \\ \Sigma_{down}^{P+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{P+} x_1 - k_2^{P+} x_2)} + \\
&+ B_s^+ \begin{pmatrix} U_{down}^{S+} \\ \Sigma_{down}^{S+} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{S+} x_1 - k_2^{S+} x_2)} + \\
&+ B_p^- \begin{pmatrix} U_{down}^{P-} \\ \Sigma_{down}^{P-} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{P-} x_1 - k_2^{P-} x_2)} + \\
&B_s^- \begin{pmatrix} U_{down}^{S-} \\ \Sigma_{down}^{S-} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1^{S-} x_1 - k_2^{S-} x_2)}.
\end{aligned}$$

В этих обозначениях  $R_p$ ,  $R_s$ ,  $R_p^+$  и т.д. - коэффициенты линейной комбинации падающих волн, например, случай  $R_p = 1$ , а все остальные коэффициенты - нули - соответствуют падению продольной волны на границу раздела из верхней подоб-

ласти. Коэффициенты  $A_p$ ,  $A_s$ ,  $B_p^+$  и т.д. - коэффициенты отражения/прохождения. Индексы *up* и *down* используются, чтобы подчеркнуть направление распространения волны и выбрать нужный знак в компонентах волнового вектора.

Из явных выражений для решений в виде плоских волн (2.52), (2.53), (2.58), (2.59) в предположении положительности  $k_2$  следуют равенства для Р-волн:

$$\begin{pmatrix} U_{up}^{P+} \\ \Sigma_{up}^{P+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{down}^{P-} \\ \Sigma_{down}^{P-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{P-} \\ \Sigma^{P-} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} U_{up}^{P-} \\ \Sigma_{up}^{P-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{down}^{P+} \\ \Sigma_{down}^{P+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{P+} \\ \Sigma^{P+} \end{pmatrix}.$$

Аналогичные равенства верны и для поперечных волн.

Подстановка явных выражений для решений в виде плоских волн (2.52), (2.53), (2.58), (2.59) в условия согласования (2.68) с использованием приведенных выше соотношений позволяет выписать набор систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов отражения/прохождения  $A_p$ ,  $A_s$ ,  $B_p^\pm$  и  $B_s^\pm$ :

$$\begin{pmatrix} u_2^{P-} & u_2^{S-} & -u_2^{P+} & -u_2^{S+} & u_2^{P-} & u_2^{S-} \\ u_2^{P-} & u_2^{S-} & -u_2^{P+} & -u_2^{S+} & -u_2^{P-} & -u_2^{S-} \\ u_1^{P-} & u_1^{S-} & -u_1^{P+} & -u_1^{S+} & 0 & 0 \\ \sigma_{12}^{P-} & \sigma_{12}^{S-} & -\sigma_{12}^{P+} & -\sigma_{12}^{S+} & \sigma_{12}^{P-} & \sigma_{12}^{S-} \\ \sigma_{12}^{P-} & \sigma_{12}^{S-} & -\sigma_{12}^{P+} & -\sigma_{12}^{S+} & -\sigma_{12}^{P-} & -\sigma_{12}^{S-} \\ \sigma_{22}^{P-} & \sigma_{22}^{S-} & -\sigma_{22}^{P+} & -\sigma_{22}^{S+} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_p \\ A_s \\ B_p^+ \\ B_s^+ \\ B_p^- \\ B_s^- \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -u_2^{P+} & -u_2^{S+} & u_2^{P-} & u_2^{S-} & u_2^{P-} & -u_2^{S-} \\ -u_2^{P+} & -u_2^{S+} & u_2^{P-} & u_2^{S-} & -u_2^{P-} & u_2^{S-} \\ -u_1^{P+} & -u_1^{S+} & u_1^{P-} & u_1^{S-} & 0 & 0 \\ -\sigma_{12}^{P+} & -\sigma_{12}^{S+} & \sigma_{12}^{P-} & \sigma_{12}^{S-} & \sigma_{12}^{P-} & -\sigma_{12}^{S-} \\ -\sigma_{12}^{P+} & -\sigma_{12}^{S+} & \sigma_{12}^{P-} & \sigma_{12}^{S-} & -\sigma_{12}^{P-} & \sigma_{12}^{S-} \\ -\sigma_{22}^{P+} & -\sigma_{22}^{S+} & \sigma_{22}^{P-} & \sigma_{22}^{S-} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_p \\ R_s \\ R_p^+ \\ R_s^+ \\ R_p^- \\ R_s^- \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

где  $u_j^{P\pm}$ ,  $u_j^{S\pm}$ ,  $\sigma_{ij}^{P\pm}$  и  $\sigma_{ij}^{S\pm}$  - компоненты соответствующих векторов поляризации, введенные выше. Рассматривая отдельно падение волны каждого типа, можно постро-

ить шесть соответствующих решений, однако задача может быть сформулирована в матричной форме:

$$MY = R,$$

где  $M$  - матрица системы,  $R$  - матрица правых частей, а  $Y$  - матрица неизвестных коэффициентов отражения/прохождения.

Легко показать, что матрица  $M$  невырождена для всех волновых векторов за исключением  $\mathbf{k} = (k_1, 0)^T$ , который соответствует распространению волны вдоль границы раздела. Это направление можно исключить из рассмотрения, поскольку предполагается, что среда в окрестности границы раздела однородна, а источники достаточно удалены от границы. Воспользовавшись явным представлением решения (2.52), (2.53), (2.58), (2.59), можно получить соотношения на компоненты векторов поляризации:

$$\begin{aligned} u_1^{P-} &= u_1^{P+}, & u_2^{P-} &= -u_2^{P+}, \\ u_1^{S-} &= -u_1^{S+}, & u_2^{S-} &= u_2^{S+}, \\ \sigma_{12}^{P-} &= -\sigma_{12}^{P+}, & \sigma_{22}^{P-} &= \sigma_{22}^{P+}, \\ \sigma_{12}^{S-} &= \sigma_{12}^{S+}, & \sigma_{22}^{S-} &= -\sigma_{22}^{S+}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

которые позволяют обратить матрицу  $M$  аналитически, и записать решение системы:

$$Y = M^{-1}R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Из этого представления следует, что в случае падения на границу раздела физической моды как со стороны области, где используется система уравнений динамической теории упругости, так и со стороны подобласти, где задана система (2.55), эта волна проходит через интерфейс без отражений или конвертаций. В случае падения волны, отвечающей нефизической моде, она полностью отражается с коэффициентом  $\pm 1$  без конвертаций в волны иного типа.

### 2.4.1.2 Конечно-разностная постановка

Пусть в области  $z < h_z/2$  используется стандартная схема на сдвинутых сетках, а в области  $z > h_z/2$  применяется схема Лебедева. Границей раздела сеток предполагается линия  $z = h_z/2$ , на которой определены компоненты  $\sigma_{12}$  и  $u_2$  для стандартной схемы на сдвинутых сетках. Выбор интерфейса, проходящего через полуцелые узлы сетки, сделан с целью упрощения рассуждений, однако полученные ниже формулы применимы и к случаю границы раздела, совпадающей с целыми узлами сетки.

На рассматриваемом интерфейсе определены семь компонент сеточных векторных полей:

$$(u_2^v)_{i,1/2}^n, (\sigma_{12}^v)_{i+1/2,1/2}^n, (u_k^2)_{i,1/2}^n, (\sigma_{kl}^2)_{i+1/2,1/2}^n,$$

где  $k, l = 1, 2$ , верхний индекс  $v$  используется для компонент, определенных на сетке для стандартной схемы на сдвинутых сетках, в то время как верхние индексы 1 и 2 соответствуют компонентам решения на схеме Лебедева. Для построения формул расчета решения на границе раздела сеток удобно использовать метод неопределенных коэффициентов [13], [53], которые выбираются так, чтобы выполнялись следующие условия:

- длина шаблона в направлении  $x_2$  не превосходит  $3/2h_2$ ;
- коэффициенты отражения/прохождения аппроксимируются не ниже чем вторым для физических мод и не ниже чем с первым - для нефизических мод.

Такой выбор требования обусловлен тем, что нефизические моды исходно являются ошибкой аппроксимации второго порядка малости [93], [248]. В результате второе условие обеспечивает третий порядок малости ошибок, связанных с прохождением нефизических волн через границу раздела сеток.

Уравнения для построения решения на границе записываются в виде:

$$\begin{aligned}
\rho D_t [u_{2,i,1/2}^v]^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{12,i,1/2}^v]^{n-1/2} + \\
&+ \frac{\alpha_{3/2} (\sigma_{22}^2)_{i,3/2}^{n-1/2} + \alpha_1 (\sigma_{22}^1)_{i,1}^{n-1/2} + \alpha_{1/2} (\sigma_{22}^2)_{i,1/2}^{n-1/2} + \alpha_0 (\sigma_{22}^v)_{i,0}^{n-1/2}}{h_2}, \\
\rho D_t [u_{1,i,1/2}^2]^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{11,i,1/2}^2]^{n-1/2} + \\
&+ \frac{\beta_1 (\sigma_{12}^1)_{i,1}^{n-1/2} + \beta_{1/2} (\sigma_{12}^v)_{i,1/2}^{n-1/2} + \beta_{-1/2} (\sigma_{12}^v)_{i,-1/2}^{n-1/2}}{h_2}, \\
(u_2^2)_{i,1/2}^n &= 0.5 (u_2^v)_{i,1/2}^n,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
D_t [\sigma_{12,i+1/2,1/2}^v]^n &= \mu D_1 [u_{2,i+1/2,1/2}^v]^n + \\
&+ \mu \frac{\alpha_{3/2} (u_1^2)_{i+1/2,3/2}^n + \alpha_1 (u_1^1)_{i+1/2,1}^n + \alpha_{1/2} (\dot{u}_1^2)_{i+1/2,1/2}^n + \alpha_0 (u_1^v)_{i+1/2,0}^n}{h_2}, \\
D_t [\sigma_{22,i+1/2,1/2}^2]^n &= (\lambda + 2\mu) D_1 [u_{1,i+1/2,1/2}^2]^n + \\
&+ \lambda \frac{\beta_1 (u_2^1)_{i+1/2,1}^n + \beta_{1/2} (\dot{u}_2^v)_{i+1/2,1/2}^n + \beta_{-1/2} (\dot{u}_2^v)_{i+1/2,-1/2}^n}{h_2}, \\
D_t [\sigma_{11,i+1/2,1/2}^2]^n &= \lambda D_1 [u_{1,i+1/2,1/2}^2]^n + \\
&+ (\lambda + 2\mu) \frac{\beta_1 (u_2^1)_{i+1/2,1}^n + \beta_{1/2} (\dot{u}_2^v)_{i+1/2,1/2}^n + \beta_{-1/2} (\dot{u}_2^v)_{i+1/2,-1/2}^n}{h_2}.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Операторы, аппроксимирующие производные  $D_t$  и  $D_1$ , определяются по формулам (2.5) и (2.6). Символ  $\iota$ , используемый над переменными, означает, что в приведенных формулах используются компоненты поля, интерполированные по касательному направлению. Достаточно предположить, что интерполирование проводилось с некоторой заданной точностью, то есть переменные могут быть представлены в виде:  $\sigma_{12}^v = \sigma_{12}^v(1 + \delta_{12})$ ,  $\sigma_{22}^2 = \sigma_{22}^2(1 + \delta_{22})$ ,  $\dot{u}_2^v = u_2^v(1 + \delta_2)$ ,  $\dot{u}_1^2 = u_1^2(1 + \delta_1)$ , где  $\delta_{kl}$  - ошибка интерполяции. В дальнейших рассуждениях предполагается, что ошибка интерполяции стремится к нулю с порядком  $m$ , то есть  $\delta_{kl} = O(h_1^m)$ .

Аналогично рассуждениям, приведенным выше для дифференциальной постановки, в случае использования метода конечных разностей решение можно искать в виде плоской волны. При этом для рассматриваемых схем дисперсионные соотношения будут совпадать с соотношениями для соответствующих дифференциальных задач с точностью до замены  $\omega$  на  $\hat{\omega}$  и  $k_j$  на  $\hat{k}_j$ , где

$$\hat{\omega} = \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\tau}, \quad \hat{k}_j = \frac{2 \sin(k_j h_j/2)}{h_j}.$$

При этом вектора поляризации для конечно-разностных решений могут быть получены из векторов поляризации решений дифференциальных (2.52), (2.53), (2.58) и (2.59) аналогичной заменой переменных. В результате для конечно-разностной задачи рассматривается падение разных типов волн на границу раздела сеток, после чего выписывается набор систем линейных алгебраических уравнений для отыскания конечно-разностных коэффициентов отражения/прохождения. Удобно воспользоваться обозначениями, аналогичными предыдущим, и записать задачу в виде:

$$\hat{M}(h_2)\hat{Y}(h_2) = \hat{R}(h_2), \quad (2.74)$$

где  $\hat{M}$  - матрица системы,  $\hat{Y}$  - матрица неизвестных,  $\hat{R}$  - матрица правых частей, каждая из которых зависит от шагов сетки.

Для исследования скорости сходимости коэффициентов отражения/прохождения к аналогичным коэффициентам для дифференциальной задачи рассматривается разложение системы по степеням малости по  $h_2$ :

$$\begin{aligned} \hat{M}(0)\hat{Y}(0) &= \hat{R}(0), \\ \frac{d\hat{M}}{dh_2}(0)\hat{Y}(0) + \hat{M}(0)\frac{d\hat{Y}}{dh_2}(0) &= \frac{d\hat{R}}{dh_2}(0), \\ \frac{d^2\hat{M}}{dh_2^2}(0)\hat{Y}(0) + \frac{d\hat{M}}{dh_2}(0)\frac{d\hat{Y}}{dh_2}(0) + \hat{M}(0)\frac{d^2\hat{Y}}{dh_2^2}(0) &= \frac{d^2\hat{R}}{dh_2^2}(0), \\ &\dots \end{aligned}$$

что позволяет сформулировать следующие утверждения:

**Утверждение 3.** Если матрица  $\hat{M}(0)$  невырождена и решение системы  $\hat{M}(0)\hat{Y}(0) = \hat{R}(0)$  совпадает с решением системы для дифференциальной задачи, то есть  $\hat{Y}(0) = Y$ , тогда имеет место первый порядок сходимости решения конечно-разностной задачи к решению дифференциальной задачи, то есть  $\|\hat{Y}(h_2) - Y\| = O(h_2)$ .

**Утверждение 4.** Если утверждение 3 верно и равенства  $\frac{d^l\hat{M}}{dh_2^l}(0)\hat{Y}(0) = \frac{d^l\hat{R}}{dh_2^l}(0)$  выполняются для всех  $l = 1, \dots, L$ , тогда  $\frac{d^l\hat{Y}}{dh_2^l}(0) \equiv 0$  и решение конечно-разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи с порядком не ниже  $L + 1$ .

Соответственно построение коэффициентов конечно-разностных соотношений (2.72) и (2.73) сводится к удовлетворению утверждения 3 для всех типов волн и утверждения 4 при  $L = 2$  для физических мод.

Прежде всего необходимо построить матрицу система  $\hat{M}$  и матрицу правых частей  $\hat{R}$ . Для этого достаточно рассмотреть конечно-разностные аналоги первых трех уравнений из системы (2.69), которые могут быть получены из уравнений (2.72) подстановкой в них решения в виде плоской волны:

$$\begin{aligned}
& \hat{A}_p \hat{u}_2^{P-} e^{ik_2^P h_2/2} + \hat{A}_s \hat{u}_2^{S-} e^{ik_2^S h_2/2} - \\
& - \left( \hat{B}_p^+ \hat{u}_2^{P+} - \hat{B}_p^- \hat{u}_2^{P-} \right) e^{-ik_2^P h_2/2} - \\
& - \left( \hat{B}_s^+ \hat{u}_2^{S+} - \hat{B}_s^- \hat{u}_2^{S-} \right) e^{-ik_2^S h_2/2} = \\
& = -R_p \hat{u}_2^{P+} e^{-ik_2^P h_2/2} - R_s \hat{u}_2^{S+} e^{-ik_2^S h_2/2} + \\
& + \left( R_p^+ \hat{u}_2^{P-} - R_p^- \hat{u}_2^{P+} \right) e^{ik_2^P h_2/2} + \\
& + \left( R_s^+ \hat{u}_2^{S-} - R_s^- \hat{u}_2^{S+} \right) e^{ik_2^S h_2/2},
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{A}_p 2\hat{u}_2^{P-} c_p(h_2) + \hat{A}_s 2\hat{u}_2^{S-} c_s(h_2) + \\
& + \left( \hat{B}_p^+ \hat{u}_2^{P+} + \hat{B}_p^- \hat{u}_2^{P-} \right) \left[ 1 + (\beta_1 - 1) e^{-ik_2^P h_2} \right] + \\
& + \left( \hat{B}_s^+ \hat{u}_2^{S+} + \hat{B}_s^- \hat{u}_2^{S-} \right) \left[ 1 + (\beta_1 - 1) e^{-ik_2^S h_2} \right] = \\
& = -R_p 2\hat{u}_2^{P+} \bar{c}_p(h_2) - R_s 2\hat{u}_2^{S+} \bar{c}_s(h_2) - \\
& - \left( R_p^+ \hat{u}_2^{P-} + R_p^- \hat{u}_2^{P+} \right) \left[ 1 + (\beta_1 - 1) e^{ik_2^P h_2} \right] - \\
& - \left( R_s^+ \hat{u}_2^{S-} + R_s^- \hat{u}_2^{S+} \right) \left[ 1 + (\beta_1 - 1) e^{ik_2^S h_2} \right],
\end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{A}_p 2\hat{u}_1^{P-} \left[ e^{ik_2^P h_2} - \alpha_0 - 1 \right] + \hat{A}_s 2\hat{u}_1^{S-} \left[ e^{ik_2^S h_2} - \alpha_0 - 1 \right] - \\
& - \hat{B}_p^+ \hat{u}_1^{P+} e^{-ik_2^P h_2} a_p(h_2) - \hat{B}_s^+ \hat{u}_1^{S+} e^{-ik_2^S h_2} a_s(h_2) - \\
& - \hat{B}_p^- \hat{u}_1^{P-} e^{-ik_2^P h_2} b_p(h_2) - \hat{B}_s^- \hat{u}_1^{S-} e^{-ik_2^S h_2} b_s(h_2) = \\
& = -R_p 2\hat{u}_1^{P+} \left[ e^{-ik_2^P h_2} - \alpha_0 - 1 \right] - \\
& - R_s 2\hat{u}_1^{S+} \left[ e^{-ik_2^S h_2} - \alpha_0 - 1 \right] + \\
& + R_p^+ \hat{u}_1^{P-} e^{ik_2^P h_2} \bar{a}_p(h_2) + R_s^+ \hat{u}_1^{S-} e^{ik_2^S h_2} \bar{a}_s(h_2) \\
& + R_p^- \hat{u}_1^{P+} e^{ik_2^P h_2} \bar{b}_p(h_2) + R_s^- \hat{u}_1^{S+} e^{ik_2^S h_2} \bar{b}_s(h_2),
\end{aligned} \tag{2.77}$$

где

$$\begin{aligned}
a_p(h_2) &= \alpha_1 + \alpha_{3/2}(1 + \delta)e^{-ik_2^P h_2/2} + \alpha_{1/2}(1 + \delta)e^{ik_2^P h_2/2}, \\
a_s(h_2) &= \alpha_1 + \alpha_{3/2}(1 + \delta)e^{-ik_2^S h_2/2} + \alpha_{1/2}(1 + \delta)e^{ik_2^S h_2/2}, \\
b_p(h_2) &= \alpha_1 - \alpha_{3/2}(1 + \delta)e^{-ik_2^P h_2/2} - \alpha_{1/2}(1 + \delta)e^{ik_2^P h_2/2}, \\
b_s(h_2) &= \alpha_1 - \alpha_{3/2}(1 + \delta)e^{-ik_2^S h_2/2} - \alpha_{1/2}(1 + \delta)e^{ik_2^S h_2/2}, \\
c_p(h_2) &= (1 + \delta) \left[ \beta_{1/2}e^{ik_2^P h_2/2} + \beta_{-1/2}e^{-ik_2^P h_2/2} \right], \\
c_s(h_2) &= (1 + \delta) \left[ \beta_{1/2}e^{ik_2^S h_2/2} + \beta_{-1/2}e^{-ik_2^S h_2/2} \right].
\end{aligned}$$

В данных обозначениях  $\hat{A}_p$  и т.д. - конечно-разностные аналоги соответствующих коэффициентов дифференциальной задачи. Обозначения  $\bar{a}_{p,s}$ ,  $\bar{b}_{p,s}$ ,  $\bar{c}_{p,s}$  используются для комплексного сопряжения переменных  $a_{p,s}$ ,  $b_{p,s}$  и  $c_{p,s}$  соответственно. Параметр  $\delta$  - ошибка интерполяции, которая убывает как  $h_1^q$ . Недостающие три уравнения отличаются от приведенных заменой  $u_2$  на  $\sigma_{12}$  и  $u_1$  на  $\sigma_{22}$ .

Для обеспечения первого порядка сходимости необходимо выполнение утверждения 3, в котором рассматривается полученная система уравнений в точке  $h_2 = 0$ .

В этом случае

$$\hat{M}(0) = \begin{pmatrix} u_2^{P-} & u_2^{S-} & -u_2^{P+} & -u_2^{S+} & u_2^{P-} & u_2^{S-} \\ 2cu_2^{P-} & 2cu_2^{S-} & \beta_1 u_2^{P+} & \beta_1 u_2^{S+} & \beta_1 u_2^{P-} & \beta_1 u_2^{S-} \\ -2\alpha_0 u_1^{P-} & -2\alpha_0 u_1^{S-} & -a u_1^{P+} & -a u_1^{S+} & -b u_1^{P-} & -b u_1^{S-} \\ \sigma_{12}^{P-} & \sigma_{12}^{S-} & -\sigma_{12}^{P+} & -\sigma_{12}^{S+} & \sigma_{12}^{P-} & \sigma_{12}^{S-} \\ 2c\sigma_{12}^{P-} & 2c\sigma_{12}^{S-} & \beta_1 \sigma_{12}^{P+} & \beta_1 \sigma_{12}^{S+} & \beta_1 \sigma_{12}^{P-} & \beta_1 \sigma_{12}^{S-} \\ -2\alpha_0 \sigma_{22}^{P-} & -2\alpha_0 \sigma_{22}^{S-} & -a \sigma_{22}^{P+} & -a \sigma_{22}^{S+} & -b \sigma_{22}^{P-} & -b \sigma_{22}^{S-} \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}(0) = \begin{pmatrix} -u_2^{P+} & -u_2^{S+} & u_2^{P-} & u_2^{S-} & -u_2^{P+} & -u_2^{S+} \\ -2cu_2^{P+} & -2cu_2^{S+} & -\beta_1 u_2^{P-} & -\beta_1 u_2^{S-} & -\beta_1 u_2^{P+} & -\beta_1 u_2^{S+} \\ 2\alpha_0 u_1^{P+} & 2\alpha_0 u_1^{S+} & a u_1^{P-} & a u_1^{S-} & b u_1^{P+} & b u_1^{S+} \\ -\sigma_{12}^{P+} & -\sigma_{12}^{S+} & \sigma_{12}^{P-} & \sigma_{12}^{S-} & -\sigma_{12}^{P+} & -\sigma_{12}^{S+} \\ -2c\sigma_{12}^{P+} & -2c\sigma_{12}^{S+} & -\beta_1 \sigma_{12}^{P-} & -\beta_1 \sigma_{12}^{S-} & -\beta_1 \sigma_{12}^{P+} & -\beta_1 \sigma_{12}^{S+} \\ 2\alpha_0 \sigma_{22}^{P+} & 2\alpha_0 \sigma_{22}^{S+} & a \sigma_{22}^{P-} & a \sigma_{22}^{S-} & b \sigma_{22}^{P+} & b \sigma_{22}^{S+} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a &= a_{p,s}(0) = \bar{a}_{p,s}(0) = \alpha_1 + \alpha_{3/2} + \alpha_{1/2}, \\ b &= b_{p,s}(0) = \bar{b}_{p,s}(0) = \alpha_1 - \alpha_{3/2} - \alpha_{1/2}, \\ c &= c_{p,s}(0) = \bar{c}_{p,s}(0) = \beta_{1/2} + \beta_{-1/2}. \end{aligned}$$

Несложно показать, что полученная матрица невырождена при углах падения волны, отличных от  $\pi/2$ , соответственно существует и единственное решение рассматриваемого набора систем. Однако, чтобы избежать обращения матрицы  $\hat{M}(0)$ , для обеспечения первого порядка сходимости достаточно потребовать выполнения равенства  $\hat{M}(0)Y = \hat{R}(0)$  на решении дифференциальной задачи. Подстановка соответствующих решений дифференциальной задачи приводит к следующим соотношениям на коэффициенты схемы:

- при падении физических мод на границу раздела рассматриваются только первые четыре столбца правых частей и решений, что приводит к необходимости выполнения двух уравнений на  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_{3/2} + \alpha_{1/2} &= 0, \\ \beta_1 + 2\beta_{1/2} + 2\beta_{-1/2} &= 0. \end{aligned} \tag{2.78}$$

- Случай падения нефизической продольной волны соответствует рассмотрению пятого столбца правых частей и решений, что приводит к уравнению:

$$\alpha_1 - \alpha_{3/2} - \alpha_{1/2} = 0. \tag{2.79}$$

- В случае падения нефизической поперечной волны получаемые уравнения выполняются для любых параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

Для обеспечения более высокого порядка сходимости решения, отвечающего физическим модам, необходимо воспользоваться утверждением 4 и обеспечить выполнение равенств:

$$\frac{d\hat{M}}{dh_2}(0)Y' = \frac{d\hat{R}'}{dh_2}(0), \quad \frac{d^2\hat{M}}{dh_2^2}(0)Y' = \frac{d^2\hat{R}'}{dh_2^2}(0). \tag{2.80}$$

В этих обозначениях штрихи используются для того, чтобы подчеркнуть, что рассматриваются только первые четыре столбца соответствующих матриц, отвечающие

физичным решениям. Из первого соотношения (2.80), обеспечивающего второй порядок сходимости, следуют два уравнения на параметры схемы:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_{3/2} + \frac{1}{2}\alpha_{1/2} &= 2, \\ \beta_1 + \beta_{1/2} - \beta_{-1/2} &= 1.\end{aligned}\tag{2.81}$$

Выполнение второго соотношения из равенства (2.80) обеспечивается при удовлетворении равенств:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \frac{9}{4}\alpha_{3/2} + \frac{1}{4}\alpha_{1/2} &= 2, \\ \beta_1 - \frac{1}{2}\beta_{1/2} - \frac{1}{2}\beta_{-1/2} &= 1.\end{aligned}\tag{2.82}$$

С использованием полученных выше соотношений на коэффициенты схемы составляются замкнутые системы линейных алгебраических уравнений для их построения:

$$\begin{cases} 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_{3/2} + \alpha_{1/2} = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_{3/2} - \alpha_{1/2} = 0, \\ \alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_{3/2} + \frac{1}{2}\alpha_{1/2} = 2, \\ \alpha_1 + \frac{9}{4}\alpha_{3/2} + \frac{1}{4}\alpha_{1/2} = 2, \end{cases}\tag{2.83}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_{1/2} + 2\beta_{-1/2} = 0, \\ \beta_1 + \beta_{1/2} - \beta_{-1/2} = 1, \\ \beta_1 - \frac{1}{2}\beta_{1/2} - \frac{1}{2}\beta_{-1/2} = 1. \end{cases}\tag{2.84}$$

Решение которых есть:

$$\alpha_{3/2} = \frac{2}{7}, \quad \alpha_1 = \frac{8}{7}, \quad \alpha_{1/2} = \frac{6}{7}, \quad \alpha_0 = -\frac{8}{7},\tag{2.85}$$

$$\beta_1 = \frac{4}{3}, \quad \beta_{1/2} = -\frac{1}{2}, \quad \beta_{-1/2} = -\frac{1}{6}.\tag{2.86}$$

Полученные коэффициенты разностных соотношений, используемых на границе склейки сеток, обеспечивают второй порядок сходимости коэффициентов отражения/прохождения для физичных мод и первый - для решений нефизичной природы. При этом необходимо, чтобы интерполяция по касательному направлению выполнялась как минимум с третьим порядком точности. Отдельно следует подчеркнуть, что понижение скорости сходимости коэффициентов отражения для нефизичных мод не

приводит к ухудшению сходимости решения в целом, поскольку такие моды являются артефактными и подавляются дополнительно, например, выбором корректных граничных условий, начальных условий и правых частей, как описано в работах [93], [248].

## 2.4.2 Разработка алгоритма в трехмерной постановке

### 2.4.2.1 Явное представление решения в виде плоских волн для изотропной среды

Для дальнейшего комбинирования схемы Лебедева со стандартной схемой на сдвинутых сетках необходимо не только знание фазовых скоростей нефизичных мод, но и их вектора поляризации. Учитывая, что комбинирование схем происходит в области, где среда изотропна, достаточно ограничиться построением решений именно для такой среды.

Плоская волна - это решение вида

$$\begin{pmatrix} u \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3)},$$

где круговая частота  $\omega$  и волновой вектор  $\vec{k}$  удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\omega^3(\omega^2 - V_P^2|\vec{k}|^2)(\omega^2 - V_S^2|\vec{k}|^2)^2 = 0,$$

где  $V_P$  и  $V_S$  - скорости продольной и поперечной волн, соответственно. В случае изотропной среды система уравнений динамической теории упругости допускает одно решение в виде продольной волны и два решения в виде волн поперечных, однако разделить два последних решения невозможно (собственные вектора, отвечающие кратному собственному числу), поэтому выбор векторов поляризации для поперечных волн проводится исходя из условия максимального упрощения выкладок.

Сначала необходимо ввести компоненты волнового вектора, вектора медленно-

сти и нормализованного волнового вектора:

$$\begin{aligned} k_1 &= |k| \cos(\alpha) \cos(\beta), & k_2 &= |k| \cos(\alpha) \sin(\beta), & k_3 &= |k| \sin(\alpha), \\ s_1^A &= \cos(\alpha) \cos(\beta)/V_A, & s_2^A &= \cos(\alpha) \sin(\beta)/V_A, & s_3^A &= \sin(\alpha)/V_A, \\ n_1 &= \cos(\alpha) \cos(\beta), & n_2 &= \cos(\alpha) \sin(\beta), & n_3 &= \sin(\alpha), \end{aligned}$$

где  $A$  обозначает тип волны, углы  $\alpha$  и  $\beta$  используются для определения направления распространения.

В зависимости от типа волны компоненты вектора поляризации представляются в виде:

$$\begin{aligned} L^{++} &= \begin{pmatrix} q_1^A V_A \\ q_2^A V_A \\ q_3^A V_A \\ -(\lambda + 2\mu)q_1^A n_1 - \lambda q_2^A n_2 - \lambda q_3^A n_3 \\ -\lambda q_1^A n_1 - (\lambda + 2\mu)q_2^A n_2 - \lambda q_3^A n_3 \\ -\lambda q_1^A n_1 - \lambda q_2^A n_2 - (\lambda + 2\mu)q_3^A n_3 \\ -\mu q_2^A n_3 - \mu q_3^A n_2 \\ -\mu q_1^A n_3 - \mu q_3^A n_1 \\ -\mu q_2^A n_1 - \mu q_1^A n_2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - (\vec{k}^A, \vec{x}))} = \\ &= \begin{pmatrix} u_1^A & u_2^A & u_3^A & \sigma_{11}^A & \sigma_{22}^A & \sigma_{33}^A & \sigma_{23}^A & \sigma_{13}^A & \sigma_{12}^A \end{pmatrix}^T e^{i(\omega t - k_1^A x_1 - k_2^A x_2 - k_3^A x_3)} \end{aligned}$$

где вектора  $q^P$ ,  $q^{S1}$  и  $q^{S2}$  представляются в виде:

$$\begin{aligned} q_1^P &= \cos(\alpha) \cos(\beta), & q_2^P &= \cos(\alpha) \sin(\beta), & q_3^P &= \sin(\alpha), \\ q_1^{S1} &= \sin(\alpha) \cos(\beta), & q_2^{S1} &= \sin(\alpha) \sin(\beta), & q_3^{S1} &= -\cos(\alpha), \\ q_1^{S2} &= -\sin(\beta), & q_2^{S2} &= \cos(\beta), & q_3^{S2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Необходимо определить направление распространения волны относительно направления  $x_3$ , для этого удобно зафиксировать знак компоненты  $k_3$  волнового вектора. Пусть для определенности  $k_3 \geq 0$ , а волна называется нисходящей, если знак перед  $k_3$  в показателе экспоненты отрицательный, иначе волна является восходящей.

Для нефизических мод решения в виде плоских волн имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 L^{-+} &= \begin{pmatrix} q_1^A V_A \\ -q_2^A V_A \\ q_3^A V_A \\ -(\lambda + 2\mu)q_1^A n_1 - \lambda q_2^A n_2 - \lambda q_3^A n_3 \\ -\lambda q_1^A n_1 - (\lambda + 2\mu)q_2^A n_2 - \lambda q_3^A n_3 \\ -\lambda q_1^A n_1 - \lambda q_2^A n_2 - (\lambda + 2\mu)q_3^A n_3 \\ +\mu q_2^A n_3 + \mu q_3^A n_2 \\ -\mu q_1^A n_3 - \mu q_3^A n_1 \\ +\mu q_2^A n_1 + \mu q_1^A n_2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - (\vec{k}^A, \vec{x}))} = \\
 &= \begin{pmatrix} u_1^A & -u_2^A & u_3^A & \sigma_{11}^A & \sigma_{22}^A & \sigma_{33}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{13}^A & -\sigma_{12}^A \end{pmatrix}^T e^{i(\omega t - k_1^A x_1 - k_2^A x_2 - k_3^A x_3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L^{+-} &= \begin{pmatrix} q_1^A V_A \\ q_2^A V_A \\ -q_3^A V_A \\ -(\lambda + 2\mu)q_1^A n_1 - \lambda q_2^A n_2 - \lambda q_3^A n_3 \\ -\lambda q_1^A n_1 - (\lambda + 2\mu)q_2^A n_2 - \lambda q_3^A n_3 \\ -\lambda q_1^A n_1 - \lambda q_2^A n_2 - (\lambda + 2\mu)q_3^A n_3 \\ +\mu q_2^A n_3 + \mu q_3^A n_2 \\ +\mu q_1^A n_3 + \mu q_3^A n_1 \\ -\mu q_2^A n_1 - \mu q_1^A n_2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - (\vec{k}^A, \vec{x}))} = \\
 &= \begin{pmatrix} u_1^A & u_2^A & -u_3^A & \sigma_{11}^A & \sigma_{22}^A & \sigma_{33}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{12}^A \end{pmatrix}^T e^{i(\omega t - k_1^A x_1 - k_2^A x_2 - k_3^A x_3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{--} &= \begin{pmatrix} q_1^A V_A \\ -q_2^A V_A \\ -q_3^A V_A \\ -(\lambda + 2\mu)q_1^A n_1 - \lambda q_2^A n_2 - \lambda q_3^A n_3 \\ -\lambda q_1^A n_1 - (\lambda + 2\mu)q_2^A n_2 - \lambda q_3^A n_3 \\ -\lambda q_1^A n_1 - \lambda q_2^A n_2 - (\lambda + 2\mu)q_3^A n_3 \\ -\mu q_2^A n_3 - \mu q_3^A n_2 \\ +\mu q_1^A n_3 + \mu q_3^A n_1 \\ +\mu q_2^A n_1 + \mu q_1^A n_2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - (\vec{k}^A, \vec{x}))} = \\
&= \begin{pmatrix} u_1^A & -u_2^A & -u_3^A & \sigma_{11}^A & \sigma_{22}^A & \sigma_{33}^A & \sigma_{23}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{12}^A \end{pmatrix}^T e^{i(\omega t - k_1^A x_1 - k_2^A x_2 - k_3^A x_3)}.
\end{aligned}$$

Для построения формул комбинирования схемы Лебедева и стандартной схемы на сдвинутых сетках необходимо также привести явные формулы для восходящих волн:

$$W^{++} = \begin{pmatrix} u_1^A & u_2^A & -u_3^A & \sigma_{11}^A & \sigma_{22}^A & \sigma_{33}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{12}^A \end{pmatrix}^T e^{i(\omega t - k_1^A x_1 - k_2^A x_2 + k_3^A x_3)},$$

$$W^{-+} = \begin{pmatrix} u_1^A & -u_2^A & -u_3^A & \sigma_{11}^A & \sigma_{22}^A & \sigma_{33}^A & \sigma_{23}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{12}^A \end{pmatrix}^T e^{i(\omega t - k_1^A x_1 - k_2^A x_2 + k_3^A x_3)},$$

$$W^{+-} = \begin{pmatrix} u_1^A & u_2^A & u_3^A & \sigma_{11}^A & \sigma_{22}^A & \sigma_{33}^A & \sigma_{23}^A & \sigma_{13}^A & \sigma_{12}^A \end{pmatrix}^T e^{i(\omega t - k_1^A x_1 - k_2^A x_2 + k_3^A x_3)},$$

$$W^{--} = \begin{pmatrix} u_1^A & -u_2^A & u_3^A & \sigma_{11}^A & \sigma_{22}^A & \sigma_{33}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{13}^A & -\sigma_{12}^A \end{pmatrix}^T e^{i(\omega t - k_1^A x_1 - k_2^A x_2 + k_3^A x_3)}.$$

#### 2.4.2.2 Коэффициенты отражения/прохождения в дифференциальной постановке

Как и в двумерном случае, комбинирование схемы Лебедева и схемы на сдвинутых сетках предлагается проводить на основе аппроксимации коэффициентов отражения/прохождения, более того, эти коэффициенты явно строить не нужно, достаточно рассмотреть поведение матрицы системы уравнений, их определяющей, при стремлении к нулю шага сетки. Пусть схема на сдвинутых сетках используется для аппроксимации системы уравнений динамической теории упругости в области  $z < 0$ , при этом в области  $z > 0$  применяется схема Лебедева, аппроксимирующая, как

показано выше, модифицированную систему (2.63). В силу того что система (2.63) допускает более широкий набор решений, чем система уравнений упругости, естественными условиями согласования, обеспечивающими беспрепятственное прохождение физических мод через границу  $z = 0$ , и полное отражение нефизических мод на этой границе являются следующие:

$$\sigma^V \cdot n|_{z=0} = \sigma^{++} \cdot n|_{z=0}, \quad u^V|_{z=0} = u^{++}|_{z=0}.$$

$$u_3^{+-} = u_3^{-+} = u_3^{--} = 0|_{z=0},$$

$$\sigma_{23}^{+-} = \sigma_{23}^{-+} = \sigma_{23}^{--} = 0|_{z=0},$$

$$\sigma_{13}^{+-} = \sigma_{13}^{-+} = \sigma_{13}^{--} = 0|_{z=0}.$$

С использованием определителя Лопатинского [317], [318] можно показать корректность получаемой начально-краевой задачи.

В силу того что в схеме Лебедева используются переменные  $W^j$ , являющиеся линейной комбинацией переменных  $W^{++}$ ,  $W^{+-}$  и т.д., условия согласования переписываются с виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^V &= 4\sigma_{23}^1 = 4\sigma_{23}^2 = 4\sigma_{23}^3 = 4\sigma_{23}^4, \\ \sigma_{13}^V &= 4\sigma_{13}^1 = 4\sigma_{13}^2 = 4\sigma_{13}^3 = 4\sigma_{13}^4, \\ u_3^V &= 4u_3^1 = 4u_3^2 = 4u_3^3 = 4u_3^4, \\ \sigma_{33}^V &= \sigma_{33}^1 + \sigma_{33}^2 + \sigma_{33}^3 + \sigma_{33}^4, \\ u_1^V &= u_3^1 + u_1^2 + u_1^3 + u_1^4, \\ u_2^V &= u_2^1 + u_2^2 + u_2^3 + u_2^4. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Для построения матрицы для нахождения коэффициентов отражения/прохождения рассматриваются 15 возможных ситуаций: падение трех разных волн из области, в которой используется стандартная схема на сдвинутых сетках, падение трех физических мод из области, в которой применяется схема Лебедева, падение девяти разных нефизических мод из области со схемой Лебедева.

Вне зависимости от типа волны, падающей на границу  $z = 0$ , она всегда порождает 15 независимых волн, три из которых восходящие, распространяющиеся в области со стандартной схемой на сдвинутых сетках, остальные 12 - нисходящие волны в области, в которой применяется схема Лебедева. Поэтому удобно рассматривать

падение всех возможных волн одновременно, точнее, рассматривать их линейную комбинацию. В результате решение в окрестности интерфейса записывается в виде:

$$\begin{aligned} V^V &= \sum_{A=1}^3 R_A^V L_A^{++} + \sum_{A=1}^3 B_A^V W_A^{++}, \\ V^L &= \sum_{k=1}^4 \sum_{A=1}^3 R_A^k W_A^k + \sum_{k=1}^4 \sum_{A=1}^3 B_A^k L_A^k, \end{aligned} \quad (2.89)$$

где первое уравнение определяет решение в области со схемой на сдвинутых сетках, а второе - в области со схемой Лебедева. Переменные  $R_A^*$  - вектор, состоящий из коэффициентов линейной комбинации падающих волн, определяют правую часть системы уравнений, в то время как  $B_A^*$  - компоненты вектора неизвестных коэффициентов отражения/прохождения. Индекс  $A$  используется для обозначения типа волны, в то время как верхние индексы  $V$  и  $++$  обозначают тип моды для схемы на сдвинутых сетках и схемы Лебедева соответственно. В дополнение используются верхние индексы  $k = 1, 2, 3, 4$  для обозначения компоненты решения на схеме Лебедева. Подстановкой приведенных выражений в условия согласования можно получить соотношения:

$$\begin{aligned} &\sum_{A \in \{P, S1, S2\}} B_A^V W_A^{++} - \sum_{k=1}^4 \sum_{A \in \{P, S1, S2\}} B_A^k L_A^k = \\ &= - \sum_{A \in \{P, S1, S2\}} R_A^V L_A^{++} + \sum_{k=1}^4 \sum_{A \in \{P, S1, S2\}} R_A^k W_A^k. \end{aligned}$$

Используя приведенную выше связь между  $W^k$  и  $W^{\pm\pm}$ , полученная система уравне-

ний может быть записана в матричной форме:

$$\begin{pmatrix}
 -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A \\
 -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A \\
 -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A \\
 -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A \\
 \hline
 -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A \\
 -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A \\
 -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A \\
 -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A \\
 \hline
 -u_3^A & -u_3^A & -u_3^A & u_3^A & u_3^A \\
 -u_3^A & -u_3^A & u_3^A & u_3^A & -u_3^A \\
 -u_3^A & -u_3^A & -u_3^A & -u_3^A & -u_3^A \\
 -u_3^A & -u_3^A & u_3^A & -u_3^A & u_3^A \\
 \hline
 \sigma_{33}^A & -\sigma_{33}^A & 0 & 0 & 0 \\
 u_2^A & -u_2^A & 0 & 0 & 0 \\
 u_1^A & -u_1^A & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 B_P^V \\
 B_{S_1}^V \\
 B_{S_2}^V \\
 \hline
 B_P^{L++} \\
 B_{S_1}^{L++} \\
 B_{S_2}^{L++} \\
 \hline
 B_P^{L-+} \\
 B_{S_1}^{L-+} \\
 \hline
 B_{S_2}^{L-+} \\
 B_P^{L+-} \\
 B_{S_1}^{L+-} \\
 B_{S_2}^{L+-} \\
 \hline
 B_P^{L--} \\
 B_{S_1}^{L--} \\
 B_{S_2}^{L--}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A \\
 -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A \\
 -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & \sigma_{23}^A \\
 -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A & -\sigma_{23}^A \\
 \hline
 -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A \\
 -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A \\
 -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A \\
 -\sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A & -\sigma_{13}^A & \sigma_{13}^A \\
 \hline
 -u_3^A & -u_3^A & -u_3^A & u_3^A & u_3^A \\
 -u_3^A & -u_3^A & u_3^A & u_3^A & -u_3^A \\
 -u_3^A & -u_3^A & -u_3^A & -u_3^A & -u_3^A \\
 -u_3^A & -u_3^A & u_3^A & -u_3^A & u_3^A \\
 \hline
 -\sigma_{33}^A & \sigma_{33}^A & 0 & 0 & 0 \\
 -u_2^A & u_2^A & 0 & 0 & 0 \\
 -u_1^A & u_1^A & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 R_P^V \\
 R_{S_1}^V \\
 R_{S_2}^V \\
 \hline
 R_P^{L++} \\
 R_{S_1}^{L++} \\
 R_{S_2}^{L++} \\
 \hline
 R_P^{L-+} \\
 R_{S_1}^{L-+} \\
 \hline
 R_{S_2}^{L-+} \\
 R_P^{L+-} \\
 R_{S_1}^{L+-} \\
 R_{S_2}^{L+-} \\
 \hline
 R_P^{L--} \\
 R_{S_1}^{L--} \\
 R_{S_2}^{L--}
 \end{pmatrix}
 .$$

Далее удобно использовать краткую запись системы:

$$M_B B = M_R R, \quad (2.90)$$

где  $M_B$  и  $M_R$  - матрицы, введенные выше. Для решения полученной системы следует подействовать преобразованием

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

слева, при этом

$$TM_B B = M'_B B = TM_R R = M'_R R,$$

где

$$M'_B = TM_B = \begin{pmatrix} -4\sigma_{23}^A & -4\sigma_{23}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sigma_{23}^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sigma_{23}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\sigma_{23}^A \\ -4\sigma_{13}^A & -4\sigma_{13}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\sigma_{13}^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sigma_{13}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\sigma_{13}^A \\ -4u_3^A & -4u_3^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4u_3^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4u_3^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4u_3^A \\ \sigma_{33}^A & -\sigma_{33}^A & 0 & 0 & 0 \\ u_2^A & -u_2^A & 0 & 0 & 0 \\ u_1^A & -u_1^A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M'_R = TM_R = \begin{pmatrix} -4\sigma_{23}^A & -4\sigma_{23}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sigma_{23}^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sigma_{23}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\sigma_{23}^A \\ -4\sigma_{13}^A & -4\sigma_{13}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\sigma_{13}^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sigma_{13}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\sigma_{13}^A \\ -4u_3^A & -4u_3^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4u_3^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4u_3^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4u_3^A \\ -\sigma_{33}^A & \sigma_{33}^A & 0 & 0 & 0 \\ -u_2^A & u_2^A & 0 & 0 & 0 \\ -u_1^A & u_1^A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Несложно заметить, что полученные матрицы  $M'_B$  и  $M'_R$  отличаются только перестановкой столбцов, то есть существует матрица перестановок  $K$ , приведенная ниже

$$K = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

такая что

$$M'_B K = M'_R, \quad M'_B = M'_R K,$$

где  $I$  - единичная матрица размером  $3 \times 3$ . В результате, если матрица  $M'_B$  невырождена, то для любой правой части (в том числе и для рассматриваемого набора правых частей) выполняется равенство

$$B = KR.$$

Из вида матрицы  $K$  немедленно следует, что в дифференциальной постановке построенные условия согласования обеспечивают прохождение физических мод через интерфейс с коэффициентом прохождения единица, в то время как артефактные моды полностью отражаются от границы раздела.

### 2.4.2.3 Коэффициенты отражения/прохождения для конечно-разностной задачи

Пусть в области  $z < z_{1/2}$  используется стандартная схема на сдвинутых сетках, а в области  $z > z_{1/2}$  применяется схема Лебедева. Для комбинирования указанных схем необходимо построить уравнения для расчета компонент волнового поля непосредственно на границе  $z = z_{1/2}$ , что включает в себя переменные  $u_3^V$ ,  $\sigma_{23}^V$  и  $\sigma_{13}^V$ , соответствующие стандартной схеме на сдвинутых сетках, и  $u^3$ ,  $u^4$ ,  $\sigma^3$  и  $\sigma^4$ , относящиеся к схеме Лебедева. Построение формул на интерфейсе предлагается проводить методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\rho D_t [u_3^V]_{i,j,1/2}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{13}^V]_{i,j,1/2}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{23}^V]_{i,j,1/2}^{n-1/2} + D_\alpha [\sigma_{33}]_{i,j,1/2}^{n-1/2}, \\
(u_3^3)_{i,j,1/2}^n &= 1/4 (u_3^V)_{i,j,1/2}^n, \\
\rho D_t [u_1^3]_{i,j,1/2}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{11}^3]_{i,j,1/2}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{12}^4]_{i,j,1/2}^{n-1/2} + D_\beta [\sigma_{13}]_{i,j,1/2}^{n-1/2}, \\
\rho D_t [u_2^3]_{i,j,1/2}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{12}^3]_{i,j,1/2}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{22}^4]_{i,j,1/2}^{n-1/2} + D_\gamma [\sigma_{23}]_{i,j,1/2}^{n-1/2}, \\
\rho D_t [u_1^4]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{11}^4]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{12}^3]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} + D_\delta [\sigma_{13}]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2}, \\
\rho D_t [u_2^4]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} &= D_1 [\sigma_{12}^4]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} + D_2 [\sigma_{22}^3]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} + D_\varepsilon [\sigma_{23}]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2}, \\
(u_3^3)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^n &= 1/4 (\tilde{u}_3^3)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^n,
\end{aligned}$$

где операторы  $D_\alpha$ ,  $D_\beta$ ,  $D_\gamma$  и  $D_\varepsilon$  представимы в виде:

$$h_3 D_\alpha [\sigma_{33}]_{i,j,1/2}^{n-1/2} = \alpha_0 (\sigma_{33}^V)_{i,j,0}^{n-1/2} + \alpha_{1/2}^3 (\hat{\sigma}_{33}^3)_{i,j,1/2}^{n-1/2} + \alpha_{1/2}^4 (\tilde{\sigma}_{33}^4)_{i,j,1/2}^{n-1/2} + \\ + \alpha_1^1 (\sigma_{33}^1)_{i,j,1/2}^{n+1/2} + \alpha_1^2 (\check{\sigma}_{33}^2)_{i,j,1/2}^{n+1/2} + \alpha_{3/2}^3 (\hat{\sigma}_{33}^3)_{i,j,3/2}^{n-1/2} + \alpha_{3/2}^4 (\tilde{\sigma}_{33}^4)_{i,j,3/2}^{n-1/2},$$

$$h_3 D_\beta [\sigma_{13}]_{i,j,1/2}^{n-1/2} = \beta_{-1/2} (\hat{\sigma}_{13}^V)_{i,j,-1/2}^{n-1/2} + \beta_{1/2}^3 (\hat{\sigma}_{13}^3)_{i,j,1/2}^{n-1/2} + \beta_{1/2}^4 (\tilde{\sigma}_{13}^4)_{i,j,1/2}^{n-1/2} + \\ + \beta_1^1 (\sigma_{13}^1)_{i,j,1/2}^{n+1/2} + \beta_1^2 (\check{\sigma}_{13}^2)_{i,j,1/2}^{n+1/2},$$

$$h_3 D_\gamma [\sigma_{23}]_{i,j,1/2}^{n-1/2} = \gamma_{-1/2} (\hat{\sigma}_{23}^V)_{i,j,-1/2}^{n-1/2} + \gamma_{1/2}^3 (\hat{\sigma}_{23}^3)_{i,j,1/2}^{n-1/2} + \gamma_{1/2}^4 (\tilde{\sigma}_{23}^4)_{i,j,1/2}^{n-1/2} + \\ + \gamma_1^1 (\sigma_{23}^1)_{i,j,1/2}^{n+1/2} + \gamma_1^2 (\check{\sigma}_{23}^2)_{i,j,1/2}^{n+1/2},$$

$$h_3 D_\delta [\sigma_{13}]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} = \delta_{-1/2} (\hat{\sigma}_{13}^V)_{i+1/2,j+1/2,-1/2}^{n-1/2} + \delta_{1/2}^3 (\hat{\sigma}_{13}^3)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} + \\ + \delta_{1/2}^4 (\tilde{\sigma}_{13}^4)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} + \delta_1^1 (\sigma_{13}^1)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n+1/2} + \delta_1^2 (\check{\sigma}_{13}^2)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n+1/2},$$

$$h_3 D_\varepsilon [\sigma_{23}]_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} = \varepsilon_{-1/2} (\hat{\sigma}_{23}^V)_{i+1/2,j+1/2,-1/2}^{n-1/2} + \varepsilon_{1/2}^3 (\hat{\sigma}_{23}^3)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} + \\ + \varepsilon_{1/2}^4 (\tilde{\sigma}_{23}^4)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n-1/2} + \varepsilon_1^1 (\sigma_{23}^1)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n+1/2} + \varepsilon_1^2 (\check{\sigma}_{23}^2)_{i+1/2,j+1/2,1/2}^{n+1/2},$$

В этих обозначениях  $\hat{f}$  используется для компонент, интерполированных в направлении  $x_1$ ,  $\check{f}$  - в направлении  $x_2$  и  $\tilde{f}$  используется для обозначения интерполяции по двум касательным направлениям. Здесь используется интерполяция, основанная на быстром преобразовании Фурье, которая предполагает спектральную сходимость, в результате ошибкой интерполяции можно пренебречь, считая, что все используемые переменные в необходимых точках определены точно. В результате можно опустить верхние индексы, означающие номер слоя по времени, а также индексы, указывающие на точки сетки вдоль касательных направлений. Более того, операторы  $D_\beta$  и  $D_\gamma$  отличаются только направлениями, по которым проводится интерполяция компонент поля, аналогично для операторов  $D_\delta$  и  $D_\varepsilon$ . В результате рассмотрение ограничивается набором из трех операторов  $D_\alpha$ ,  $D_\beta$  и  $D_\delta$ , а формулы, используемые для расчета

компонент вектора скорости на интерфейсе, представляются в виде:

$$\begin{aligned}
\rho D_t[u_3^V]_{1/2} &= D_1[\sigma_{13}^V]_{1/2} + D_2[\sigma_{23}^V]_{1/2} + D_\alpha[\sigma_{33}]_{1/2}, \\
(u_3^3)_{1/2} &= 1/4(u_3^V)_{1/2}, \\
\rho D_t[u_1^3]_{1/2} &= D_1[\sigma_{11}^3]_{1/2} + D_2[\sigma_{12}^4]_{1/2} + D_\beta[\sigma_{13}]_{1/2}, \\
\rho D_t[u_2^3]_{1/2} &= D_1[\sigma_{12}^3]_{1/2} + D_2[\sigma_{22}^4]_{1/2} + D_\beta[\sigma_{23}]_{1/2}, \\
\rho D_t[u_1^4]_{1/2} &= D_1[\sigma_{11}^4]_{1/2} + D_2[\sigma_{12}^3]_{1/2} + D_\delta[\sigma_{13}]_{1/2}, \\
\rho D_t[u_2^4]_{1/2} &= D_1[\sigma_{12}^4]_{1/2} + D_2[\sigma_{22}^3]_{1/2} + D_\delta[\sigma_{23}]_{1/2}, \\
(u_3^4)_{1/2} &= 1/4(u_3^V)_{1/2},
\end{aligned} \tag{2.91}$$

где

$$\begin{aligned}
h_3 D_\alpha[\sigma_{33}]_{1/2} &= \alpha_0(\sigma_{33}^V)_0 + \alpha_{1/2}^3(\sigma_{33}^3)_{1/2} + \alpha_{1/2}^4(\sigma_{33}^4)_{1/2} + \\
&+ \alpha_1^1(\sigma_{33}^1)_1 + \alpha_1^2(\sigma_{33}^2)_1 + \alpha_{3/2}^3(\sigma_{33}^3)_{3/2} + \alpha_{3/2}^4(\sigma_{33}^4)_{3/2}, \\
h_3 D_\beta[\sigma_{i3}]_{1/2} &= \beta_{-1/2}(\sigma_{i3}^V)_{-1/2} + \beta_{1/2}^3(\sigma_{i3}^3)_{1/2} + \beta_{1/2}^4(\sigma_{i3}^4)_{1/2} + \\
&+ \beta_1^1(\sigma_{i3}^1)_1 + \beta_1^2(\sigma_{i3}^2)_1, \\
h_3 D_\delta[\sigma_{i3}]_{1/2} &= \delta_{-1/2}(\sigma_{i3}^V)_{-1/2} + \delta_{1/2}^3(\sigma_{i3}^3)_{1/2} + \delta_{1/2}^4(\sigma_{i3}^4)_{1/2} + \\
&+ \delta_1^1(\sigma_{i3}^1)_1 + \delta_1^2(\sigma_{i3}^2)_1,
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Аналогично формулы для расчета компонент тензора напряжений записываются в виде:

$$\begin{aligned}
D_t[\sigma_{13}^V]_{1/2} &= \mu D_1[u_3^V]_{1/2} + \mu D_\alpha[u_1]_{1/2}, \\
D_t[\sigma_{23}^V]_{1/2} &= \mu D_2[u_3^V]_{1/2} + \mu D_\alpha[u_2]_{1/2}, \\
(\sigma_{13}^3)_{1/2} &= 1/4(\sigma_{13}^V)_{1/2}, \\
(\sigma_{13}^4)_{1/2} &= 1/4(\sigma_{13}^V)_{1/2}, \\
(\sigma_{23}^3)_{1/2} &= 1/4(\sigma_{23}^V)_{1/2}, \\
(\sigma_{23}^4)_{1/2} &= 1/4(\sigma_{23}^V)_{1/2}, \\
D_t[\sigma_{ii}^3]_{1/2} &= C_{ii11}D_1[u_1^3]_{1/2} + C_{ii22}D_2[u_2^4]_{1/2} + C_{ii33}D_\beta[u_3]_{1/2}, \\
D_t[\sigma_{12}^3]_{1/2} &= \mu D_1[u_2^3]_{1/2} + \mu D_2[u_1^4]_{1/2}, \\
D_t[\sigma_{ii}^4]_{1/2} &= C_{ii11}D_1[u_1^4]_{1/2} + C_{ii22}D_2[u_2^3]_{1/2} + C_{ii33}D_\delta[u_3]_{1/2}, \\
D_t[\sigma_{12}^4]_{1/2} &= \mu D_1[u_2^4]_{1/2} + \mu D_2[u_1^3]_{1/2},
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Построение неизвестных коэффициентов проводится по аналогии с двумерным случаем - рассматривается падение плоских волн всех типов как из области со стандартной схемой на сдвинутых сетках, так из области со схемой Лебедева. В результате можно получить набор систем уравнений вида:

$$\hat{M}_B(h, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\delta})\hat{B}(h) = \hat{M}_R(h, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\delta})R, \quad (2.94)$$

где  $\hat{M}_B$  и  $\hat{M}_R$  - матрицы коэффициентов, зависящие как от шагов сетки, так и от искоемых коэффициентов  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\delta}$ . Вектор  $R$  состоит из коэффициентов, определяющих линейную комбинацию падающих плоских волн, а вектор  $\hat{B}$  - вектор коэффициентов отражения/прохождения.

Чтобы конечно-разностные коэффициенты отражения/прохождения сходились к соответствующим коэффициентам для дифференциальной задачи при  $h \rightarrow 0$ , необходимо и достаточно, чтобы решение системы (2.94) при  $h = 0$  существовало и совпадало с решением системы уравнений для дифференциальной постановки. Аналогично с двумерным случаем: для выполнения указанных условий достаточно полного совпадения матриц  $\hat{M}_B(0)$  и  $M_B$  из формулы (2.90), аналогично для матриц  $\hat{M}_R(0)$  и  $M_R$ , что приводит к системе линейных уравнений на  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  и  $\vec{\delta}$ :

$$\begin{aligned} -4\beta_{-1/2} &= \beta_{1/2}^3 + \beta_{1/2}^4 + \beta_1^1 + \beta_1^2, \\ -4\delta_{-1/2} &= +\delta_{1/2}^3 + \delta_{1/2}^4 + \delta_1^1 + \delta_1^2, \\ -4\alpha_0 &= +\alpha_{1/2}^3 + \alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 + \alpha_1^2 + \alpha_{3/2}^3 + \alpha_{3/2}^4, \\ \alpha_{1/2}^3 - \alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 - \alpha_1^2 + \alpha_{3/2}^3 - \alpha_{3/2}^4 &= 0, \\ -\alpha_{1/2}^3 - \alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 + \alpha_1^2 - \alpha_{3/2}^3 - \alpha_{3/2}^4 &= 0, \\ -\alpha_{1/2}^3 + \alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 - \alpha_1^2 - \alpha_{3/2}^3 + \alpha_{3/2}^4 &. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Как и в двумерном случае, для нефизических мод достаточно обеспечить первый порядок сходимости, в то время, как для физических решений скорость сходимости должна быть не ниже третьего порядка. Это значит, что в случае рассмотрения

правых частей вида

$$R_p = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

необходимо выполнение равенств

$$\frac{d\hat{M}_B}{dh_3} \Big|_{h_3=0} B(0) = \frac{d\hat{M}_R}{dh_3} \Big|_{h_3=0} R_p, \quad \frac{d^2\hat{M}_B}{dh_3^2} \Big|_{h_3=0} B(0) = \frac{d^2\hat{M}_R}{dh_3^2} \Big|_{h_3=0} R_p.$$

В силу того что решение  $B(0)$  совпадает с решением дифференциальной задачи, оно представимо в виде

$$B(0) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таком случае для выполнения сформулированных выше равенств достаточно совпадения первых шести столбцов матриц  $\frac{d^j\hat{M}_B}{dh_3^j} \Big|_{h_3=0}$  и  $\frac{d^j\hat{M}_R}{dh_3^j} \Big|_{h_3=0}$ , что приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} -2\beta_{-1/2} &= -1/2\beta_{1/2}^3 - 1/2\beta_{1/2}^4 - \beta_1^1 - \beta_1^2 + 1, \\ 2\delta_{-1/2} &= +1/2\delta_{1/2}^3 + 1/2\delta_{1/2}^4 + \delta_1^1 + \delta_1^2 - 1, \\ 4 &= +1/2\alpha_{1/2}^3 + 1/2\alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 + \alpha_1^2 + 3/2\alpha_{3/2}^3 + 3/2\alpha_{3/2}^4, \\ -\beta_{-1/2} &= +1/4\beta_{1/2}^3 + 1/4\beta_{1/2}^4 + \beta_1^1 + \beta_1^2 - 1, \\ -\delta_{-1/2} &= +1/4\delta_{1/2}^3 + 1/4\delta_{1/2}^4 + \delta_1^1 + \delta_1^2 - 1, \\ 4 &= +1/4\alpha_{1/2}^3 + 1/4\alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 + \alpha_1^2 + 9/4\alpha_{3/2}^3 + 9/4\alpha_{3/2}^4. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Комбинируя полученные уравнения, можно составить системы для отыскания неопределенных коэффициентов конечно-разностной схемы, используемой на границе

раздела стандартной схемы на сдвинутых сетках и схемы Лебедева:

$$\begin{aligned}
4\beta_{-1/2} + \beta_{1/2}^3 + \beta_{1/2}^4 + \beta_1^1 + \beta_1^2 &= 0, \\
2\beta_{-1/2} - 1/2\beta_{1/2}^3 - 1/2\beta_{1/2}^4 - \beta_1^1 - \beta_1^2 &= -1, \\
\beta_{-1/2} + 1/4\beta_{1/2}^3 + 1/4\beta_{1/2}^4 + \beta_1^1 + \beta_1^2 &= 1,
\end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}
4\delta_{-1/2} + \delta_{1/2}^3 + \delta_{1/2}^4 + \delta_1^1 + \delta_1^2 &= 0, \\
2\delta_{-1/2} - 1/2\delta_{1/2}^3 - 1/2\delta_{1/2}^4 - \delta_1^1 - \delta_1^2 &= -1, \\
\delta_{-1/2} + 1/4\delta_{1/2}^3 + 1/4\delta_{1/2}^4 + \delta_1^1 + \delta_1^2 &= 1,
\end{aligned} \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1/2}^3 + \alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 + \alpha_1^2 + \alpha_{3/2}^3 + \alpha_{3/2}^4 + 4\alpha_0 &= 0, \\
\alpha_{1/2}^3 - \alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 - \alpha_1^2 + \alpha_{3/2}^3 - \alpha_{3/2}^4 &= 0, \\
\alpha_{1/2}^3 + \alpha_{1/2}^4 - \alpha_1^1 - \alpha_1^2 + \alpha_{3/2}^3 + \alpha_{3/2}^4 &= 0, \\
\alpha_{1/2}^3 - \alpha_{1/2}^4 - \alpha_1^1 + \alpha_1^2 + \alpha_{3/2}^3 - \alpha_{3/2}^4 &= 0, \\
1/2\alpha_{1/2}^3 + 1/2\alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 + \alpha_1^2 + 3/2\alpha_{3/2}^3 + 3/2\alpha_{3/2}^4 &= 4, \\
1/4\alpha_{1/2}^3 + 1/4\alpha_{1/2}^4 + \alpha_1^1 + \alpha_1^2 + 9/4\alpha_{3/2}^3 + 9/4\alpha_{3/2}^4 &= 4.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Прежде всего следует отметить, что системы уравнений для построения  $\beta$  и  $\gamma$  полностью совпадают, так что достаточно ограничиться решением лишь одной из них. При этом системы являются недоопределенными, поэтому для единственности решения необходимо сформулировать дополнительные требования, например, повышение порядка. Однако предлагается иной подход: коэффициенты  $\beta_{1/2}^3$  и  $\beta_{1/2}^4$  стоят перед конечно-разностными компонентами поля, соответствующими одной и той же компоненте поля в дифференциальной постановке, но определенными в разных точках пространства по направлениям, параллельным границе раздела сеток [247]. Поэтому естественным требованием является совпадение обсуждаемых коэффициентов, то есть  $\beta_{1/2}^3 = \beta_{1/2}^4 = \beta_{1/2}$ . Аналогично для  $\beta_1^1$  и  $\beta_1^2$ :  $\beta_1^1 = \beta_1^2 = \beta_1$ . В результате система (2.97) замыкается, и ее решение есть:

$$\beta_{-1/2} = -\frac{1}{12}, \quad \beta_{1/2} = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{2}{3}. \tag{2.100}$$

Подобные рассуждения применимы при построении решения систем (2.98) и (2.99). При этом несложно понять, что решение системы (2.98) совпадает с (2.100) с точно-

стью до замены  $\beta$  на  $\delta$ , а решение (2.99) есть

$$\alpha_{1/2} = \frac{6}{7}, \quad \alpha_1 = \frac{8}{7}, \quad \alpha_{3/2} = \frac{2}{7}, \quad \alpha_0 = -\frac{8}{7}. \quad (2.101)$$

## 2.5 Численный анализ метода

### 2.5.1 Прохождение волны из области со стандартной схемой на сдвинутых сетках в область со схемой Лебедева

Первая серия экспериментов проводится для исследования отражений, возникающих при падении продольной волны на границу раздела сеток в случае падения со стороны стандартной схемы на сдвинутых сетках. Размер расчетной области составляет  $1000 \times 1000$  м, дискретизованной с шагом 1 м. Модель среды - однородная изотропная с плотностью  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и скоростями продольной и поперечной волн  $V_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = 2500$  м/с и  $V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 1400$  м/с соответственно. Источник типа центра расширения располагается в точке с координатами  $x_1 = 500$  м,  $x_2 = 450$  м. Расчеты проводятся для набора правых частей, отличающихся частотным составом, в качестве функции источника используется импульс Риккера с центральной частотой 200, 100 и 50 Гц. В результате при сохранении физических размеров расчетной области и шага сетки расчеты проводятся для разных дискретизаций волнового поля - 12, 25 и 50 точек на длину волны (ppw). Расчетная область ограничивается идеально согласованными слоями, в частности применяется многоосный PML [267], [19], [20].

Этот набор экспериментов эквивалентен расчетам на серии вложенных сеток с отношением шагов два, что позволяет проводить исследование скорости сходимости, поскольку отношение ошибки на сетке с шагом  $h$  к ошибке на сетке с шагом  $h/2$  составляет  $2^\alpha$ , где  $\alpha$  - порядок сходимости. В качестве ошибки в рассматриваемом наборе экспериментов выступают нефизичные отражения от границы раздела сеток. Для выделения этих отражений для каждой правой части вычисляются два решения. Расчет первого проводится с использованием схемы Лебедева во всей расчетной области. Второй - с применением гибридного алгоритма, так что стандартная схе-

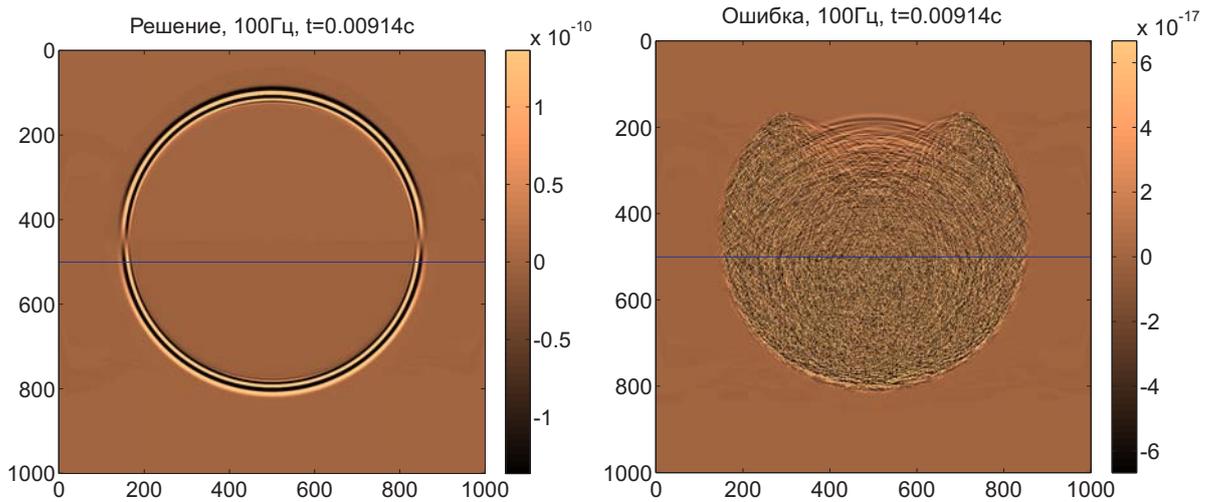


Рисунок 2.20 – Мгновенный снимок волнового поля, рассчитанного для зондирующего сигнала с частотой 100 Гц (слева). Модель однородная изотропная. Справа - абсолютная ошибка решения.

ма на сдвинутых сетках применяется при  $x_2 < 500$  м., а схема Лебедева - в нижней части модели, то есть при  $500 < x_2 < 1000$  м. В результате разность полученных волновых полей при  $x_2 < 500$  м содержит лишь отражения от границы раздела сеток. Мгновенный снимок волнового поля для эксперимента с частотой 100 Гц и абсолютная ошибка - разность между решениями, рассчитанными гибридным алгоритмом и схемой Лебедева, - приведены на рис. 2.20. Видно, что ошибка составляет  $10^{-6}$  от амплитуды решения, то есть находится на уровне машинной точности (расчеты проводились с одинарной точностью).

## 2.5.2 Прохождение физических решений из области со схемой Лебедева

### в область со стандартной схемой на сдвинутых сетках

Исследование прохождения волны из области со схемой Лебедева в область со стандартной схемой на сдвинутых сетках проводится по схожей схеме. Однако для формирования и разделения физических и нефизических решений на схеме Лебедева в модель вводится анизотропный слой. Размер расчетной области  $1200 \times 1200$  м. Модель - двухслойная:

- Изотропный слой с параметрами  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $V_P = 2500$  м/с и  $V_S = 1400$

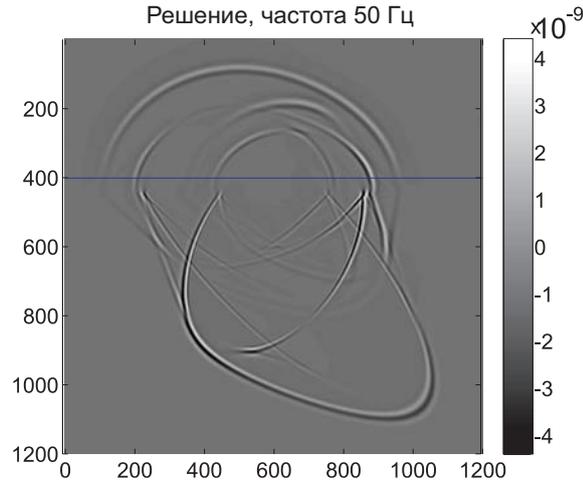


Рисунок 2.21 – Моментальный снимок волнового поля при численном моделировании падения физической моды из области со схемой Лебедева. Частота источника 50 Гц

м/с,  $x_2 < 450$  м;

– Анизотропный слой с параметрами  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times 10^9, \quad \text{кг/м/с}^2$$

при  $450 < x_2 < 1200$  м.

Стандартная схема на сдвинутых сетках используется при  $x_2 < 400$  м, а схема Лебедева - при  $x_2 > 400$  м. Точечный источник типа объемного расширения располагается в точке  $x_1 = 600$  м,  $x_2 = 600$  м. В качестве функции источника используется импульс Риккера с частотой 50,  $50\sqrt{2}$ , 100,  $100\sqrt{2}$  и 200 Гц. На моментальном снимке волнового поля для импульса с частотой 50 Гц (рис. 2.21 и 2.22) видно, что абсолютная ошибка - разность между решениями, вычисленными гибридным алгоритмом и схемой Лебедева, - для разных дискретизаций обусловлена только комбинированием конечно-разностных схем, поскольку остальные условия проведения расчетов одинаковы. Как следует из приведенных снимков волновых полей, ошибка - отражение - убывает в  $3 \approx 2\sqrt{2}$  раза при уменьшении шага в  $\sqrt{2}$  раза, что подтверждает сходимость коэффициентов отражения к нулю с третьим порядком.

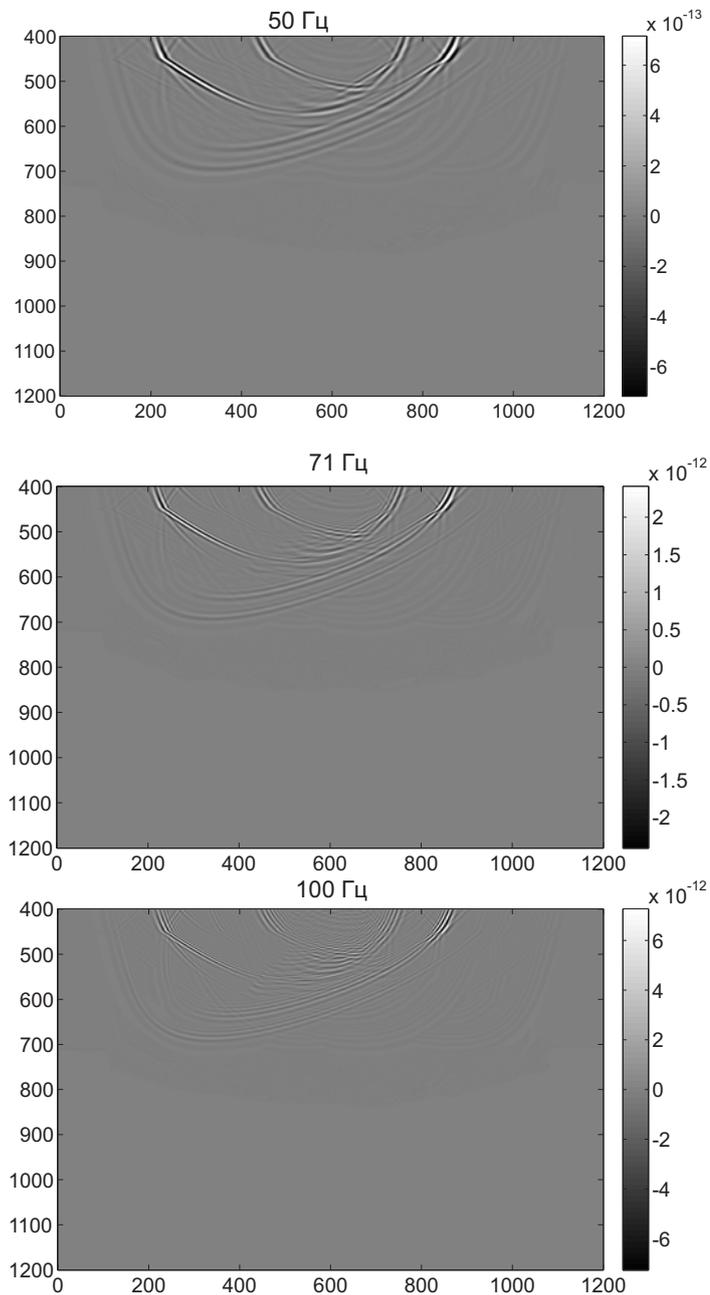


Рисунок 2.22 – Абсолютная ошибка в экспериментах, при численном моделировании падения волны (физического решения) из области со схемой Лебедева для частот 50,  $50\sqrt{2}$  и 100 Гц

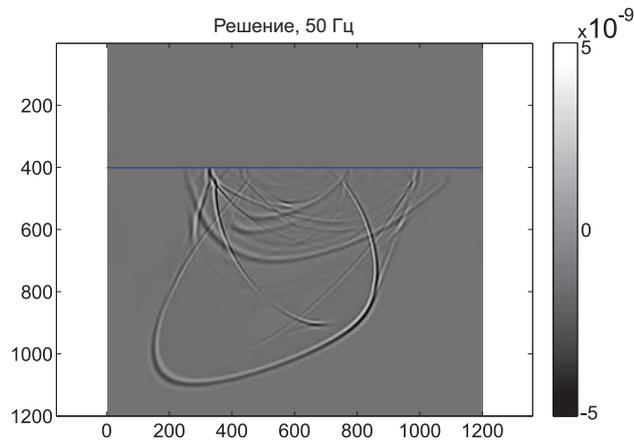


Рисунок 2.23 – Моментальный снимок волнового поля при численном моделировании падения нефизичной моды из области со схемой Лебедева. Частота источника 50 Гц

### 2.5.3 Прохождение нефизичных решений из области со схемой Лебедева

#### в область со стандартной схемой на сдвинутых сетках

Для моделирования падения нефизичных мод на границе раздела сеток проводится эксперимент, аналогичный предыдущему, с тем лишь отличием, что источник сконструирован так, чтобы излучать только нефизичные моды в анизотропной слое. Построение такого источника в деталях обсуждается в работах [93], [248], [43]. Ошибкой в этом случае являются волны, проходящие в область со стандартной схемой на сдвинутых сетках. Моментальный снимок волнового поля для этого эксперимента приведен на рис. 2.23. Решение в области, где применяется стандартная схема на сдвинутых сетках, приведено на рис. 2.24 для частот 50,  $50\sqrt{2}$  и 100 Гц. Согласно построению гибридного алгоритма, ошибка, вызванная прохождением нефизичных решений через границу раздела сеток, должна убывать с первым порядком, что подтверждается результатами, приведенным на рис. 2.24. Видно, что при уменьшении частоты в  $\sqrt{2}$  раз ошибка падает пропорционально, то есть в 1.4 раза. Здесь следует учитывать, что, согласно результатам, представленным в работах [93], [248], корректная аппроксимация правых частей обеспечивает второй порядок малости самих этих мод. В результате их прохождение через границу раздела не понижает общего порядка сходимости решения.

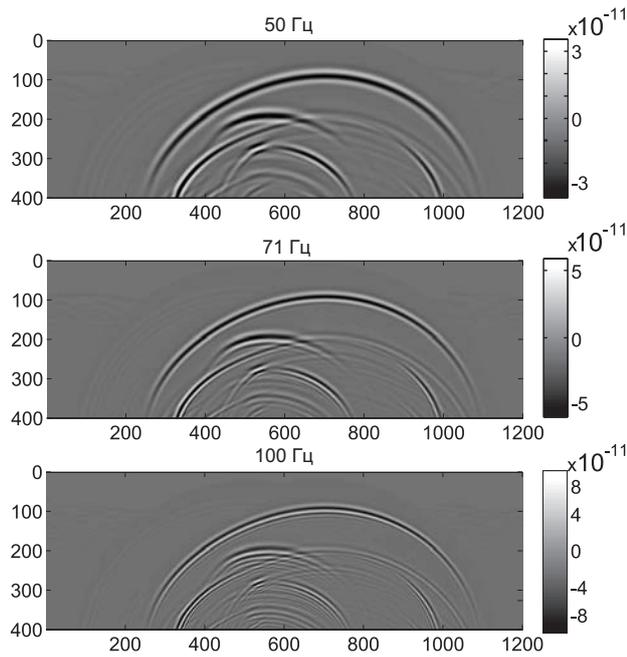


Рисунок 2.24 – Решение в области со стандартной схемой на сдвинутых сетках для эксперимента, в котором источник возбуждает только нефизичные моды на схеме Лебедева. Частота источника 50 Гц (вверху), 72 Гц (в середине), 100 Гц (внизу)

#### 2.5.4 Проявление нефизичных решений при наличии в модели анизотропного слоя

Серия экспериментов проводится для исследования ошибки при падении волны из области стандартной схемы на сдвинутых сетках для случая, когда в модели присутствует анизотропный слой. Рассматривается простейший пример модели – изотропная среда с горизонтальным анизотропным слоем, на который ориентирован гибридный алгоритм. При этом простота модели позволяет явно проследить ошибки, связанные с комплексированием разностных схем.

Размер модели составляет 3000 м по горизонтали и 2500 м по глубине. Шаг сетки – 1 м. Модель состоит из трех горизонтальных слоев:

- изотропные слои с параметрами:  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $V_P = 2500 \text{ м/с}$  и  $V_S = 1400 \text{ м/с}$  на глубинах  $x_2 < 1700 \text{ м}$  и  $x_2 > 2000 \text{ м}$ ;

– анизотропный слой с параметрами:  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ кг/м/с}^2,$$

$$1700 < x_2 < 2000 \text{ м.}$$

В представленном эксперименте стандартная схема на сдвинутых сетках используется в области  $x_2 \in [0, 1600]$  м, а схема Лебедева применяется при  $x_2 > 1600$  м, причем граница раздела сеток не совпадает с границами слоев, а схема Лебедева используется в более широкой области, чем та, которую занимает анизотропная формация.

Источник типа центра расширения располагается в точке  $x_1 = 1250$  м и  $x_2 = 1500$  м. В качестве функции источника рассматривается импульс Риккера с центральной частотой 25, 50 и 100 Гц, поэтому исследование скорости сходимости алгоритма проводится на фиксированной сетке. Решения рассчитываются как с использованием гибридного алгоритма, так и с применением схемы Лебедева во всей расчетной области (рис. 2.25). Из разности решений, рассчитанных с использованием схемы Лебедева и гибридного подхода (рис. 2.26), видно, что ошибка, вызванная комплексированием схем, уменьшается пропорционально квадрату частоты, что подтверждает второй порядок сходимости численного решения. Более того, из приведенных примеров следует, что для наиболее используемых дискретизаций, то есть порядка 20-50 точек на доминирующую длину волны, численные коэффициенты отражения не превосходят  $5 \cdot 10^{-3}$ , что является приемлемым уровнем помехи при расчете сейсмических волновых полей.

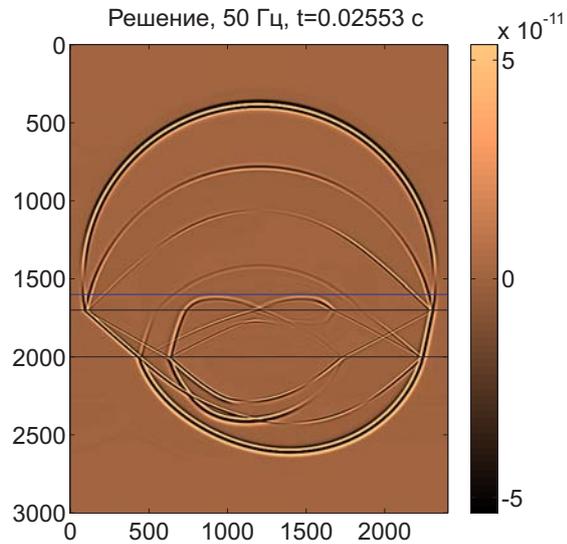


Рисунок 2.25 – Моментальный снимок волнового поля при моделировании падения волны из области стандартной схемы на сдвинутых сетках для модели с анизотропным слоем. Граница раздела сеток обозначена синей линией, границы слоя - черными линиями. Частота в источнике 50 Гц

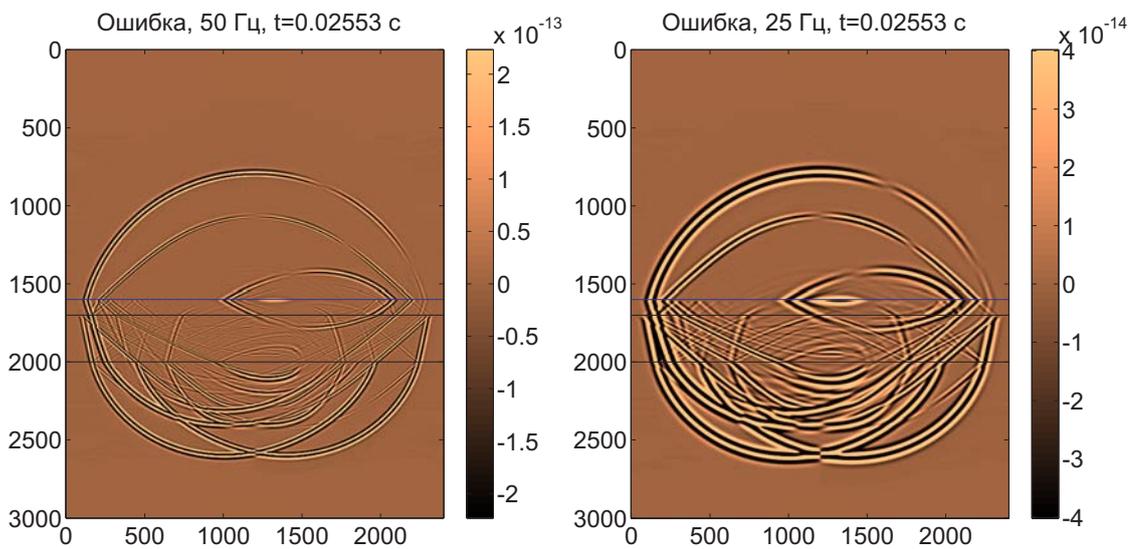


Рисунок 2.26 – Разность решений, рассчитанных с использованием схемы Лебедева и гибридного подхода для модели с анизотропным слоем. Слева - частота в источнике 50 Гц, справа - 25 Гц.

## 2.6 Применение метода для решения прикладных задач

### 2.6.1 Расчет волновых полей для модели Северного моря с анизотропным слоем

Расчет волновых полей в модели Гулфакс (район Северного моря) [355], в которой присутствуют анизотропные формации (рис. 2.27), проводится с использованием разработанного гибридного алгоритма. В качестве модели анизотропной среды рассматривается ортотропная среда с наклонной осью симметрии. Этот тип анизотропии один из наиболее простых (имеет наибольшее число элементов симметрии) [16], а ортотропная модель среды есть редукция трансверсально-изотропной либо орторомбической модели на двумерный случай при условии совпадения осей симметрии. Однако при отклонении осей симметрии ортотропной среды от координатных осей тензор жесткости перестает обладать специальной структурой. Поэтому, с вычислительной точки зрения, ортотропная среда ничем не отличается от общего случая анизотропии. При этом для ее физического описания удобно использовать параметры Томпсона [357]. Угол наклона оси симметрии ортотропной среды в приведенной модели составляет  $45^\circ$ . Важно отметить, что анизотропная формация представляется субгоризонтальным слоем.

Расчет волновых полей для представленной модели проводится как с применением гибридного алгоритма, так и с использованием схемы Лебедева во всей расчетной области. При применении гибридного алгоритма схема Лебедева используется в слое  $1490 < x_2 < 2050$  м. Моделирование проводится для источников, излучающих сигнал с центральной частотой 10 и 20 Гц. Шаг сетки составляет 5 м так, что в случае частоты 20 Гц дискретизация поля близка к 20 точкам на доминирующую длину волны.

Мгновенный снимок волнового поля (вертикальная компонента вектора скорости смещений), рассчитанного с использованием гибридного алгоритма в момент времени  $t = 1.2$  с, приведен на рис. 2.28. Из разности решений, вычисленных с использованием гибридного алгоритма и с применением только схемы Лебедева (рис.

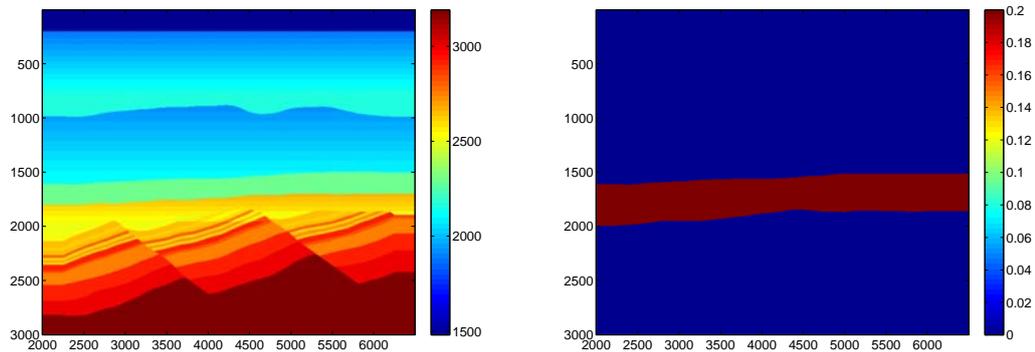


Рисунок 2.27 – Модель Гулфакс, слева - распределение скоростей продольных волн, справа - распределение значений параметра  $\varepsilon$ , характеризующего интенсивность анизотропии

2.29), видно, что уровень ошибки падает квадратично с уменьшением частоты (увеличением дискретизации поля). Более того, для реалистичных дискретизации - от 20 точек на доминирующую длину волны - ошибка не превосходит  $3 \cdot 10^{-3}$ .

Отдельно следует отметить, что на этой модели проводилась дополнительная верификация алгоритма и его тестирование для определения ускорения, которое обеспечивается комбинированием разных схем по сравнению с расчетом решения с применением схемы Лебедева. Решение рассчитывалось на коротком временном интервале до момента времени 0.2 с использованием схемы Лебедева в подобластях, занимающих от 10% до 50% расчетной области и схемой только Лебедева. После чего ускорение определялось как отношение времени, затраченного на расчет схемой Лебедева ко времени расчета гибридным алгоритмом. Теоретические оценки ускорения и экспериментальные значения приведены на рис. 2.30

## 2.6.2 Проявление анизотропии верхней части разреза в данных вертикального сейсмического профилирования

Анизотропия верхней части разреза может вносить существенные искажения в результаты обработки и интерпретации данных вертикального сейсмического профилирования в случае, если эти процедуры ориентированы на работу с изотропными моделями среды. В частности, при анализе поля обменных волн одним из основных

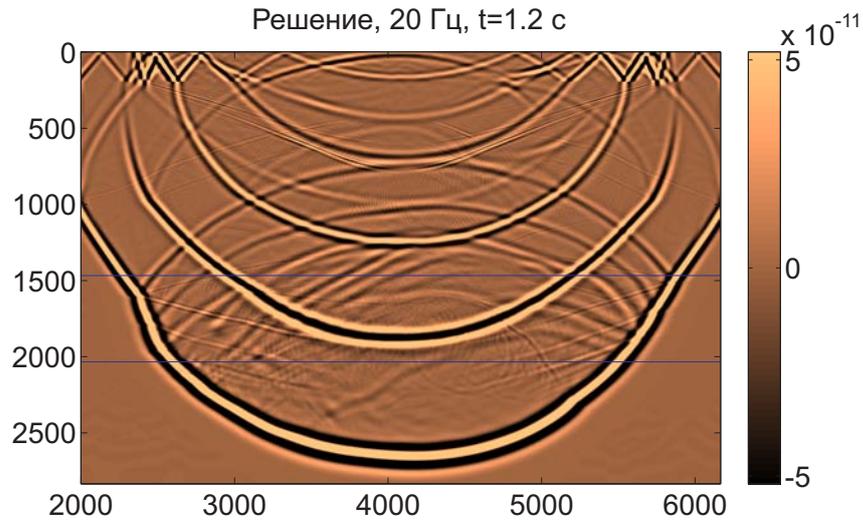


Рисунок 2.28 – Вертикальная компонента вектора скорости, рассчитанная гибридным алгоритмом в модели Гулфакс. Частота сигнала в источнике 20 Гц. Синие линии обозначают границы раздела сеток

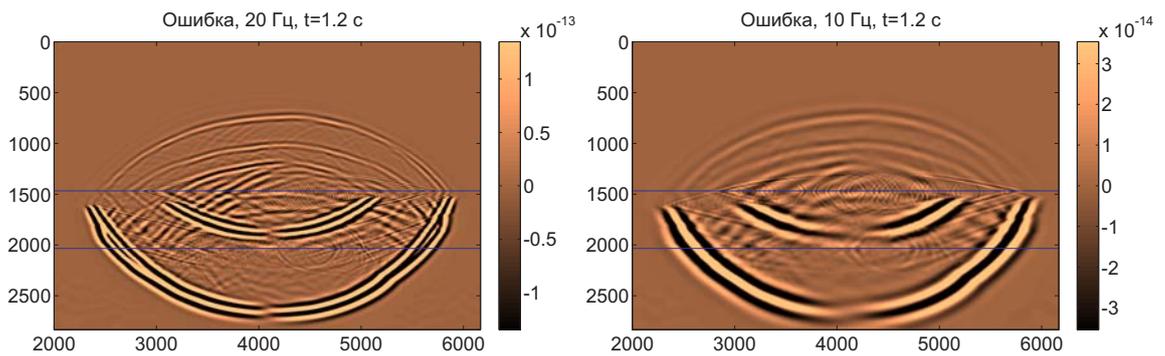


Рисунок 2.29 – Разность решений, рассчитанных с применением гибридного подхода и схемы Лебедева во всей расчетной области. Слева - частота 20 Гц, справа - 10 Гц

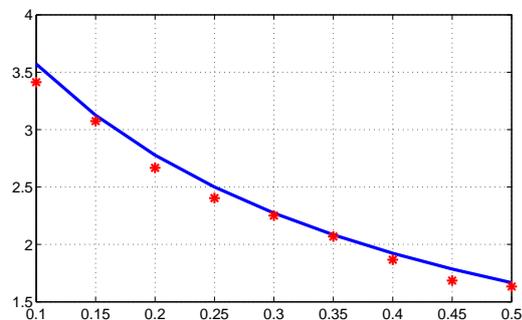


Рисунок 2.30 – Ускорение гибридного алгоритма по отношению к алгоритму, основанному на применении только схемы Лебедева, в зависимости от относительного объема анизотропной подобласти в процентах. Синяя линия соответствует теоретической оценке, красные маркеры - результаты экспериментальных измерений.

проявлений анизотропии считается расщепление квазипоперечных волн, в результате которого число обменных волн возрастает. Поэтому необходимо достоверно отделять волны, причиной проявления которых является анизотропия верхней части разреза, от волн, проявление которых связано с анизотропией трещиноватого резервуара. Более того, анизотропия верхней части разреза может существенно исказить как кинематику, так и динамику сигнала, что затрудняет анализ анизотропии целевых горизонтов [48], [56]. Для анализа указанных эффектов, а также для разработки и апробации процедур учета анизотропии верхней части разреза, которые проводятся в лаборатории многоволновой сейсморазведки Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН [221], [17], [18] было проведено моделирование волновых процессов в упрощенной модели Юрубчено-Тохомской зоны Восточной Сибири. Эта сейсмогеологическая модель состоит из пяти горизонтальных слоев, два из которых (один в верхней части разреза, второй - на уровне целевого горизонте) анизотропные - трансверсально-изотропные с горизонтальной осью симметрии. При этом направление оси симметрии среды для указанных слоев отличается, что характерно для этого региона:

- изотропный слой при  $0 \leq z \leq 100$  м;  $V_p = 1000$  м/с,  $V_s = 450$  м/с,  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup>;
- анизотропный слой в верхней части,  $100 \leq z \leq 600$  м;  $V_p = 3500$  м/с,  $V_s = 1750$  м/с,  $\rho = 2100$  кг/м<sup>3</sup>,  $\varepsilon = 0.105$ ,  $\delta = 0.033$ ,  $\gamma = 0.105$ , азимут оси симметрии (отсчитывается от оси  $x$ )  $30^\circ$ ;
- изотропный слой при  $600 \leq z \leq 1100$  м;  $V_p = 4000$  м/с,  $V_s = 2100$  м/с,  $\rho = 2400$  кг/м<sup>3</sup>;
- анизотропный слой на уровне целевого горизонта,  $1100 \leq z \leq 1600$  м;  $V_p = 5000$  м/с,  $V_s = 2450$  м/с,  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\varepsilon = 0.105$ ,  $\delta = 0.058$ ,  $\gamma = 0.105$ , азимут оси симметрии (отсчитывается от оси  $x$ )  $60^\circ$ ;
- изотропный слой при  $600 \leq z \leq 1100$  м;  $V_p = 4000$  м/с,  $V_s = 2100$  м/с,  $\rho = 2400$  кг/м<sup>3</sup>.

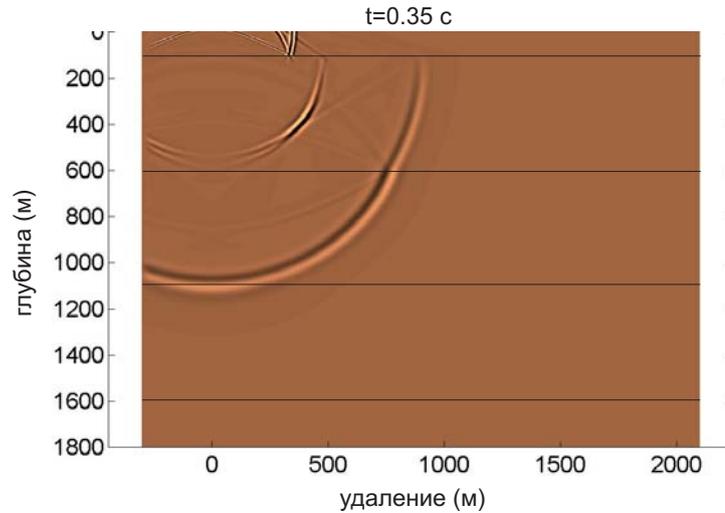


Рисунок 2.31 – Волновое поле в момент времени  $t = 0.35$  с в плоскости, проходящей через источник, для модели среды с двумя анизотропными слоями

Описание модели в анизотропных слоях приводится с использованием параметров Томсона [357], где скорости задаются вдоль оси симметрии трансверсально-изотропной среды.

Источник располагается на удалении 2 км от оси скважины на линии с нулевым азимутом, то есть на оси  $x$ . Волновые поля фиксируются на оси скважины с шагом 10 м. В качестве функции источника используется импульс Риккера с центральной частотой 30 Гц. Расчет проводится в области  $2.5 \times 4.5$  км в горизонтальных направлениях и 2 км в глубину. Со всех сторон используются условия М-PML [267], [19], [20]. Шаг сетки - 1 м.

На рис. 2.31 - 2.33 приведены моментальные снимки волнового поля  $\sigma_{xx}$  в плоскости  $Oxz$ , то есть в плоскости, содержащей линию приема и точку положения источника. Во втором и четвертом слоях отчетливо прослеживается расщепление поперечных волн, указывающее на наличии анизотропии. На сейсмограмме (Y-компонента скорости) (рис. 2.34) видно расщепление поперечных волн в верхнем анизотропном слое с их последующим распространением в виде обменных проходящих волн в более глубокие слои и дальнейшим расщеплением S-волн в нижнем анизотропном слое. Отдельно следует отметить наличие интенсивных обменных поперечных волн от подошвы анизотропных слоев, что обусловлено именно наличием анизотропии.

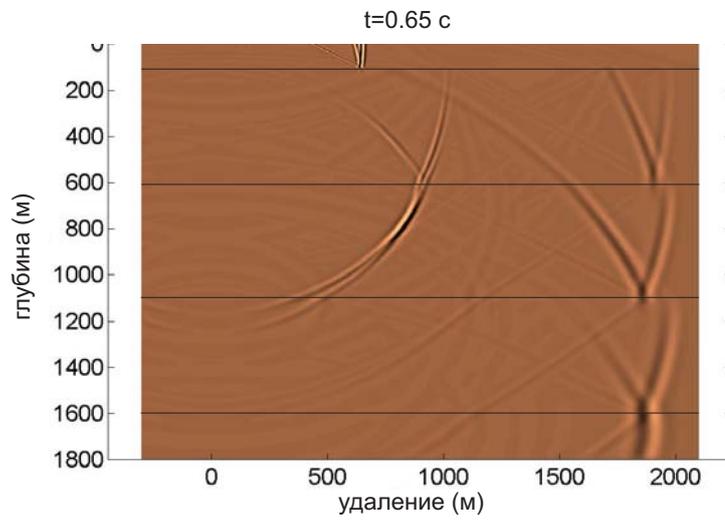


Рисунок 2.32 – Волновое поле в момент времени  $t = 0.65$  с в плоскости, проходящей через источник, для модели среды с двумя анизотропными слоями

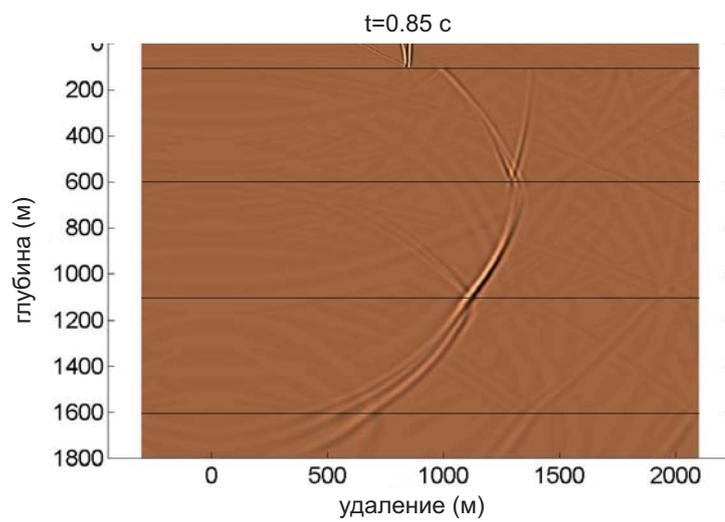


Рисунок 2.33 – Волновое поле в момент времени  $t = 0.85$  с в плоскости, проходящей через источник, для модели среды с двумя анизотропными слоями

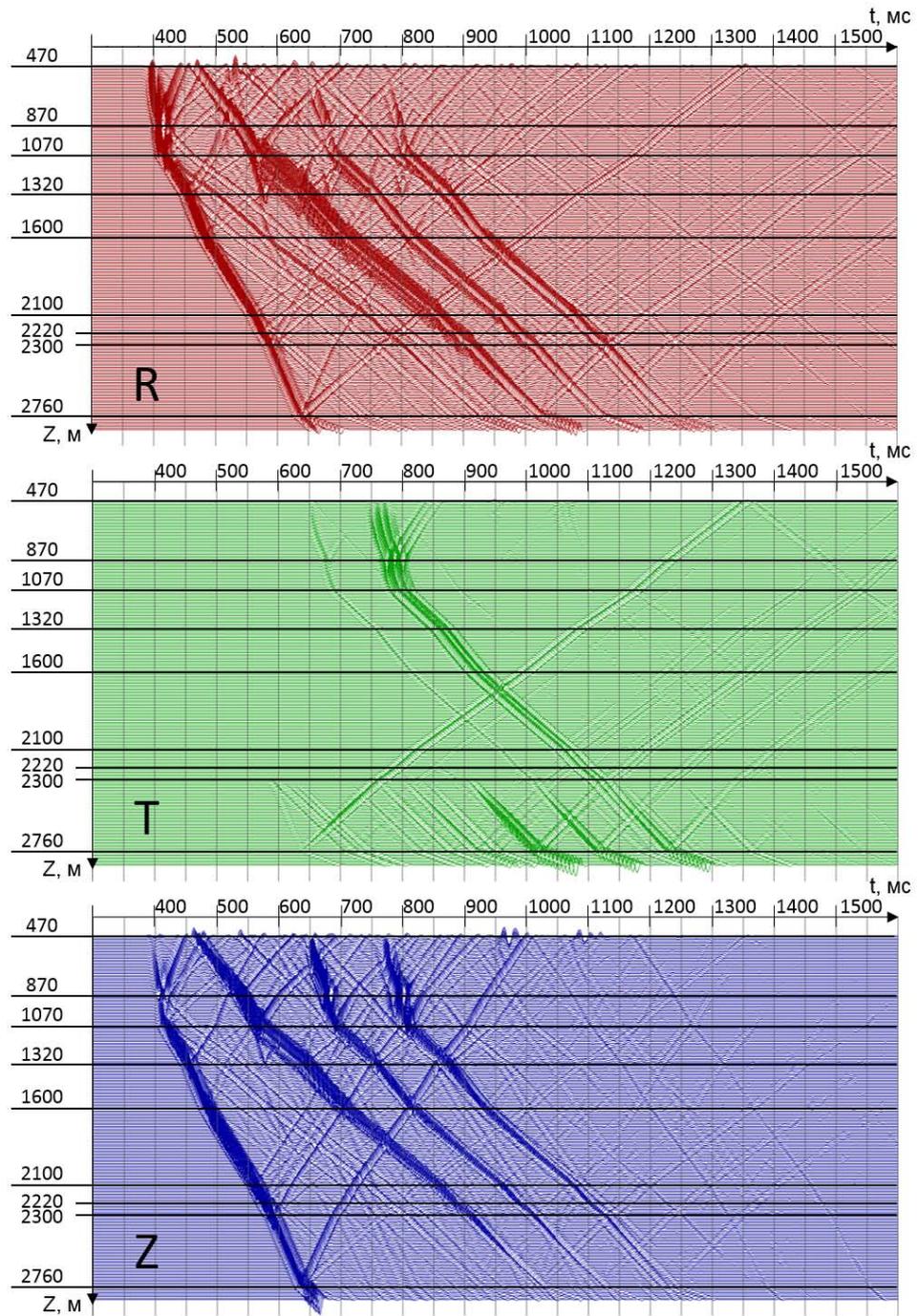


Рисунок 2.34 – Сейсмограммы, зарегистрированные на оси скважины (радиальная, касательная и вертикальная компоненты скорости)

## Глава 3

# Разработка алгоритма расчета волновых сейсмических полей в средах с вязкоупругими включениями

### 3.1 Аналитический обзор известных решений

Поглощение сейсмической энергии - затухание волн по мере распространения - широко распространенное явление в земной коре, обусловленное широким набором факторов и физических процессов. В частности, высокими значениями поглощения характеризуются слабоконсолидированные породы, такие как пески и почвы в верхней части разреза [305]. Породам, поровое пространство которых заполнено тяжелыми высоковязкими нефтями, особенно битумозным пескам, свойственно поглощение сейсмической энергии вплоть до значений коэффициента добротности порядка единицы [273], [150], [99], [351], [224], [172], [198]. Аномально высокое поглощение характерно для газовых резервуаров, вплоть до того, что наличие газовых шапок не позволяет проводить построение сейсмических изображений среды под ними. Этот эффект может быть связан, например, с фазовыми переходами газ-жидкость в результате перепада давления при распространении сейсмической волны [366], [132]. Еще одним примером физического процесса, возникновение и протекание которого

в среде может быть обусловлено распространением сейсмических волн и затратами сейсмической энергии, являются потоки флюидов, связанные с изменением порового давления. В настоящее время выделяют два вида потоков. Первый - переток флюида в поровом пространстве, или *squirt flow* [294], [292], [217], [274], [69], где интенсивность поглощения сейсмической энергии зависит от множества факторов, например, от капиллярных сил [308]. Однако для возникновения таких потоков требуется достаточно маленькая длина волны - высокая частота зондирующего сигнала. Поэтому такой механизм поглощения сейсмической энергии проявляется в основном в акустическом диапазоне частот, то есть на частотах порядка киллогерц [280], [156], [309], [286]. Второй вид потоков флюидов, способный вызвать существенное поглощение сейсмической энергии, - потоки в среде с мезомасштабной структурой: с кавернами, трещинами и коридорами трещиноватости. Именно этот вид потоков носит название "потоки, индуцированные сейсмическими волнами", или *wave induced fluid flows* (сокращенно *WIFF*), и проявляется этот эффект в сейсмическом диапазоне частот, то есть максимальное затухание волн наблюдается на частотах порядка 10 Гц [307], [280], [122], [326], [303], [361], [328]. Отдельно следует сказать о поглощении сейсмической энергии, связанном с рассеянием волны на мелкомасштабных неоднородностях, таких как каверны, скопления трещин и прочее [195]. Это далеко не полный перечень причин проявления поглощения сейсмической энергии в геологических средах, который говорит о важности и практической значимости учета диссипации сейсмической энергии в геологических средах и необходимости моделирования волновых процессов в средах с поглощением.

Поглощение сейсмической энергии в среде задается специальной сверточной формой закона Гука [32]. В общем случае анизотропной вязкоупругой среды предполагается, что каждая из компонент обобщенного тензора жесткости есть независимая функция времени или частоты, если рассмотрения проводятся в частотной области. Такая запись удобна с математической точки зрения, поскольку позволяет строить конечно-размерные аппроксимации системы уравнений и использовать численные методы для их решения, однако она достаточно сложна для физической интерпретации. В связи с этим известен ряд работ по построению физических параметризаций системы уравнений, описывающей распространение сейсмических волн

в среде с поглощением, включая изотропные среды, где вводится параметризация, связанная с типом волны. В частности, для модели изотропной среды традиционно вводятся поглощения для продольных и поперечных волн в виде мнимых частей скорости. После чего восстанавливается обобщенный тензор жесткости. Реализация такого подхода достаточно проста в случае изотропной среды, что связано с возможностью полного разделения системы уравнений динамической теории упругости на два независимых волновых уравнения путем введения потенциалов на основе теорем о разложении векторных полей. Другой интерпретацией возможности разделения решений в изотропной среде является независимость собственных векторов тензора Грина-Кристоффеля (векторов поляризации) от компонент тензора жесткости [16]. В результате вещественная и мнимая части собственных чисел тензора Грина-Кристоффеля (скорости и поглощения) однозначно связаны только с соответствующими компонентами тензора жесткости, что и позволяет однозначно вводить поглощение в изотропной среде заранее фиксируя его значения для каждой из волн. В случае анизотропной среды поглощение сейсмической энергии может быть связаны с рядом факторов, основным из которых является наличие систем ориентированных трещин, заполненных флюидом [213], [280], [122], [326], [94]. При этом возникают две задачи, связанные между собой. Первая - построение обобщенного тензора упругих модулей, такого, чтобы анизотропные свойства среды как по скоростям, так и по поглощениям обладали заданной симметрией и/или совпадали с данными измерений/наблюдений. Второй - введение "физической" параметризации тензора упругих модулей, по крайней мере для наиболее простых анизотропных сред, таких как трансверсально-изотропные и орторомбические. Причем обе задачи решаются в частотной области, где тензор упругих модулей представляется комплекснозначной функцией частоты, а свертка переписывается в виде произведения.

При решении первой задачи - построении обобщенного тензора упругих модулей по результатам измерений поглощений разных типов волн - интересны два подхода: основанный на методе малых возмущений собственных значений матрицы Грина-Кристоффеля и основанный на методе собственных напряжений/деформаций среды. Суть первого подхода состоит в следующем. Пусть вещественная часть тензора, определяющая скорости упругих волн в среде без поглощения (relaxed tensor)

или, что то же самое, определяющая упругие свойства среды при статической нагрузке, известна точно. В этом случае можно построить самосопряженный вещественный тензор Грина-Кристоффеля и его представление в базисе из собственных векторов, после чего рассматривать данные измерений или наблюдений поглощения в заданных направлениях для определенных волн в качестве возмущения собственных значений симметричной матрицы. Далее с использованием метода малых возмущений восстанавливается система линейных алгебраических уравнений, связывающая возмущения собственных чисел матрицы Грина-Кристоффеля с возмущением компонент тензора упругих модулей. Решением полученной системы восстанавливается обобщенный тензор жесткости, обеспечивающий с достаточной точностью заданный уровень поглощения каждой волны и симметрию среды по поглощению. Детально этот подход описан в работах [369], [370].

Второй подход основан на методе собственных напряжений/деформаций. Суть его состоит в исследовании собственных значений непосредственно тензора жесткости и анализе на их основе типа анизотропии среды [356], [265], [266], [119]. Соответственно в случае вязкоупругих сред предлагается сохранение собственных напряжений и деформаций (собственных векторов тензора упругих модулей), а возмущение вводить в собственные значения [125]. При обоснованности такого подхода с точки зрения механики сплошных сред его основным недостатком является чрезвычайная сложность связи собственных значений тензора жесткости со скоростями сейсмических волн, что и определяет ограниченность его применения.

При решении второй задачи, возникающей при рассмотрении сред с поглощением, - построении "физической" параметризации - исследование сводится к обобщению параметров, введенных для идеально упругих сред, на случай вязкоупругости. Как известно, в случае изотропных вязкоупругих сред традиционно используется четыре параметра для их описания: скорости волн на частотах, близких к нулю, и коэффициенты добротности (отношение вещественной части скорости к мнимой). Здесь предполагается, что добротность от частоты не зависит, хотя это условие далеко не всегда выполняется [280]. Эти параметры легко пересчитываются в компоненты тензора упругих модулей, более того, в случае изотропной среды это происходит непосредственно при расчете решения. В случае трансверсально-изотропных иде-

ально упругих сред широкую распространенность получили, например, параметры Томсона [357] - две скорости распространения волн вдоль оси симметрии бесконечного порядка, два параметра, характеризующих отношение скоростей в плоскости, нормальной к оси симметрии и в направлении вдоль этой оси, и один дополнительный параметр. В результате в работах [394], [296], [370], [310] предлагается обобщение этой параметризации на случай трансверсально-изотропных сред с поглощением. В случае орторомбической симметрии среды, как идеально-, так и вязкоупругой, И. Цванкиным также предпринимаются попытки обобщения параметров Томсона [364], [393]. Однако такой подход не находит широкого применения, поскольку в среде с орторомбической симметрией есть три выделенных направления - оси симметрии, скорости волн (всего шесть) в направлениях этих осей легко вычисляются по компонентам тензора жесткости, а остальные три параметра весьма сложны с точки зрения физической интерпретации. Выделение же какого-то одного направления и введение отношения скоростей, как в случае трансверсально-изотропных сред, не вполне обосновано и приводит лишь к усложнению описания модели.

При построении так называемых физически обоснованных моделей сред с поглощением отдельно следует упомянуть методы, связанные с осреднением свойств среды. Прежде всего внимания заслуживает подход к осреднению тонкослоистых пачек [95], [321] для изотропных и анизотропных идеально упругих пропластков соответственно. Обобщение этих способов на случай вязкоупругих слоев представлено, например, в работе [392]. Аналогичные техники применяются для осреднения параметров среды с ориентированной трещиноватостью, например, на основе метода линейного проскальзывания [322], [147], [94].

Все приведенные выше рассуждения относятся к физическому обоснованию необходимости учета поглощающих свойств среды и описанию модификации математической модели для учета таких эффектов, как сложная нелинейная зависимость поглощения от частоты, наличие анизотропии и прочее. По сути же, все рассуждения приводятся в рамках фиксированной математической модели, в которой линейная связь напряжений и деформаций определяется уравнениями типа свертки по времени. То есть в частотной области достаточно рассматривать произведение частотно-зависимого тензора упругих модулей на тензор деформаций для построения тензора

напряжений. При этом зависимость компонент тензора упругих модулей от частоты определяет физику процесса. Наиболее распространенные модели включают в себя постоянное затухание (мнимую часть тензора упругих модулей), наличие локальных максимумов у мнимой части, связанных, например, с потоками флюидов в поровом пространстве [280], [156], [309], [286] либо в мезомасштабной структуре пласта [303], [361], [328]. Иногда также рассматриваются модели с линейным ростом затухания с частотой, моделируя таким образом наличие Ньютоновской жидкости в порах [351]. При расчете волновых полей в вязкоупругой среде в частотной области учет особенностей зависимости поглощения от частоты не представляет трудности, отличие от идеально упругих сред может трактоваться как комплексный сдвиг частоты, что только улучшает свойства оператора, вне зависимости от способа аппроксимации пространственной части оператора. В частности, такой прием - комплексный сдвиг частоты - используется для построения предобуславливателя при итерационном решении уравнения Гельмгольца [170], [134], [295], [60], [182].

Однако в настоящее время решение системы уравнений динамической теории упругости во временной области предпочтительно в сравнении с частотной областью, поскольку позволяет использовать явные по времени схемы, а не решать системы уравнений [371]. При этом в случае вязкоупругих сред возникает необходимость аппроксимировать оператор типа свертки по времени, что требует полного хранения решения на всех слоях по времени от начального до расчетного момента. Очевидно, что подобный подход нереализуем в силу гигантских требований на объем оперативной памяти, необходимой для хранения решения и числа операций, требующихся для расчета интегралов по времени. Стандартным способом работы с подобного рода нелокальными операторами является их локализация. В этом случае ядро оператора в частотной области аппроксимируется рациональной функцией [92], [311]. После этого для перехода во временную область вводятся переменные памяти и уравнения на них. Такой подход к локализации широко распространен в вычислительной математике, в частности, он применяется для построения поглощающих граничных условий [169], сверточных идеально согласованных слоев [162]. Наиболее используемыми являются аппроксимации вида  $[L/L]$ ,  $[L/L + 1]$ ,  $[L + 1/L]$ , где целые числа в числителе и знаменателе обозначают степени соответствующих полиномов, теория

рациональных аппроксимаций описана, например, в [2], [46]. При локализации оператора для вязкоупругой среды используется аппроксимация вида  $[L/L]$ , которая приводит к обобщенной стандартной модели твердого тела, или GSLS (от английского Generalized Standard Linear Solid) [116], [32]. Основываясь на развитой теории рациональных аппроксимаций для большинства практически значимых моделей, достаточно использовать аппроксимацию третьего порядка, то есть  $[3/3]$ , что приводит к необходимости введения трех наборов переменных памяти и, как следствие, увеличению вычислительной сложности алгоритма по сравнению с моделированием волновых процессов в идеально упругой среде. При этом следует отметить, что выбор конечно-разностной схемы для расчета решения в вязкоупругой среде не отличается от выбора для среды без поглощения - в случае изотропии оптимальным является использование стандартной схемы на сдвинутых сетках [373], [129], [116], [118], [7], в случае анизотропии - использование схемы Лебедева [36], [245], либо схемы на повернутых сетках [316], [315], либо принципиально иных численных методов, таких как метод конечных элементов, конечных объемов, либо метод Галеркина [159], [80].

## 3.2 Постановка задачи

Система уравнений, описывающих распространение волн в среде с поглощением, или система уравнений вязкоупругости, записанная в декартовых координатах, имеет следующий вид [32]:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \\ \sigma_{ij} = G_{ijkl} * \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $u_i$  - компоненты вектора скоростей смещений,  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{kl}$  - компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно,  $\rho$  - массовая плотность,  $G_{ijkl}$  - компоненты тензора релаксации (обобщенный тензор жесткости) [32], [130]. В приведенных обозначениях предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Принципиальным отличием сред с поглощением от идеально упругих сред является зависимость тензора релаксации от времени и наличие свертки в обобщенном

законе Гука (третье уравнение системы (3.1)):

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (3.2)$$

При условии, что среда находится в покое в момент времени  $t \leq 0$ , этот оператор может рассматриваться как стандартный оператор свертки по времени.

Начальные условия предполагаются нулевыми:

$$\begin{aligned} u_i|_{t=0} &= 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ \sigma_{ij}|_{t=0} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Типичной является постановка задачи в области  $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0$ . Поверхность  $x_3 = 0$  предполагается свободной от внешних нагрузок:

$$\sigma_{13}|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{23}|_{x_3=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0.$$

На бесконечности предполагаются условия предельного поглощения, обеспечивающие ограниченность решения. При численном моделировании расчеты проводятся в ограниченной области, что приводит к необходимости построения слабоотражающих граничных условий, обеспечивающих малость отражений от границ расчетной области, таким образом аппроксимируется решение исходной задачи решением задачи в ограниченной области. При решении задачи моделирования волновых процессов в средах с вязкоупругими включениями используется классическая формулировка идеально согласованного слоя с расщеплением поля [104].

Расчет решения системы уравнений 3.1 проводится методом конечных разностей во временной области, что предполагает локализацию свертки по времени за счет введения дополнительных переменных памяти, что увеличивает размерность задачи и, как следствие, приводит к росту вычислительной сложности алгоритма. При этом характерные сейсмогеологические модели предполагают локальное проявление вязкоупругих свойств среды, в то время как большая часть модели с достаточной точностью описывается моделями идеально упругих сред. Поэтому для эффективного расчета волновых полей в таких моделях требуется разработка алгоритма,

комбинирующего конечно-разностные схемы для расчета решения в вязкоупругой и идеально упругой среде.

### 3.3 Исследование математических моделей вязкоупругих сред и их конечно-разностных аппроксимаций

#### 3.3.1 Обобщенная стандартная линейная модель твердого тела для трансверсально-изотропной среды

##### 3.3.1.1 Построение обобщенной стандартной линейной модели твердого тела

Использование системы уравнений (3.1) для численного моделирования волновых процессов во временной области чрезвычайно ресурсоемко, поскольку для расчета решения на заданном временном слое необходимо вычислять свертку по времени, что предполагает использование волнового поля во все предыдущие моменты времени. Стандартным является переход к аппроксимации модели (3.1) обобщенной стандартной линейной моделью твердого тела, или GSLS (от английского Generalized Standard Linear Solid) [32], который основан на локализации оператора свертки с использованием рациональной аппроксимации тензора релаксации в частотной области.

Построение обобщенной стандартной линейной модели твердого тела удобно проводить для одномерной постановки задачи (переход к трехмерной, в том числе анизотропной, модели вязкоупругой среды будет представлен ниже).

Рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma = g * \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Эту систему можно получить из системы (3.1), если предполагается распространение

плоской волны вдоль одного из координатных направлений в изотропной среде.

Дисперсионное соотношение для системы (3.3) принимает следующий вид:

$$\omega^2 - \hat{g}(\omega)/\rho k^2 = 0, \quad (3.4)$$

где  $\omega$  и  $k$  - временная и пространственная частоты,  $\hat{g}(\omega)$  - частотнозависимый комплекснозначный образ Фурье коэффициента  $g(t)$  [125], [369]. Далее для удобства рассуждений вводится в рассмотрение коэффициент добротности (или просто добротность) как относительная диссипация энергии в единичном объеме за единичный цикл [379]. Следуя работе [116], добротность удобно представить в виде

$$Q^{-1} = \frac{\text{Im}V^2}{\text{Re}V^2}, \quad V = \frac{\omega(k)}{|k|}, \quad (3.5)$$

где  $Q$  - коэффициент добротности,  $V$  - комплекснозначная фазовая скорость. Согласно результатам, представленным в работе [116], это представление является достаточно точным: ошибка в норме  $L_2$  между добротностью, введенной точным определением, и по формулам (3.5), не превышает 5% для  $Q \geq 10$ .

Для локализации оператора свертки и построения на этой основе обобщенной стандартной линейной модели твердого тела применяется известная техника рациональной аппроксимации подынтегральной функции [92], [311], [149]. Идея применения техники к уравнениям вязкоупругости состоит в построении подходящей рациональной аппроксимации функции  $\hat{g}(\omega)$ , то есть

$$\frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{g}(0)} \approx \frac{P^L(\omega)}{Q^M(\omega)} = [L/M](\omega),$$

где  $P^L(\omega)$  и  $Q^M(\omega)$  - полиномы степеней  $L$  и  $M$  соответственно. Выражение  $[L/M]$  используется для обозначения рациональной аппроксимации с указанными степенями полиномов в числителе и знаменателе соответственно [2]. Выражение  $\hat{g}(0)$  в точности соответствует значению функции  $\hat{g}(\omega)$  в точке  $\omega = 0$  и является вещественным. Подставив рациональную функцию в обобщенный закон Гука, в предположении, что нули знаменателя лежат вне рассматриваемого спектрального интервала, можно по-

лучить выражение:

$$Q^M(\omega)\hat{\sigma}(\omega) = P^N(\omega)\hat{\varepsilon}(\omega),$$

которое после применения обратного преобразования Фурье приводит к дифференциальному выражению вида [149]:

$$P^L\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[\sigma] = Q^M\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[\varepsilon].$$

Это выражение содержит производные высокого порядка по времени, что также усложняет его использование при моделировании волновых процессов, поскольку конечно-разностная аппроксимация подобных выражений требует хранения решения на большом количестве слоев по времени, более того, построение устойчивых конечно-разностных схем для уравнений высокого порядка - отдельная и весьма нетривиальная задача. Поэтому в каждой из названных выше задач степени полиномов в числителе и знаменателе отличаются не более чем на единицу, то есть используются аппроксимации вида  $[L/L]$ ,  $[L \pm 1/L]$ . Так, при построении обобщенной стандартной линейной модели твердого тела физически обоснованным выбором является аппроксимация вида  $[L/L]$ , поскольку в этом случае выполняется соотношение Крамерса-Кронгега [180]. В случае использования аппроксимаций вида  $[L/L]$  их можно переписать как сумму из  $L$  аппроксимаций вида  $[1/1]$ , в частности для построения обобщенной стандартной линейной модели используется следующее представление:

$$[L/L](\omega) = 1 - L + \sum_{l=1}^L \frac{1 + i\omega\tau_{\varepsilon,l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma,l}} = 1 + \sum_{l=1}^L \frac{i\omega(\tau_{\varepsilon,l} - \tau_{\sigma,l})}{1 + i\omega\tau_{\sigma,l}},$$

где параметры  $\tau_{\sigma,l}$  и  $\tau_{\varepsilon,l}$  - времена релаксации напряжений и деформаций соответственно. Подставляя данное выражение в закон Гука, вводя переменные памяти

$$\hat{r}_l = -\frac{\hat{g}(0)}{\tau_{\sigma,l}} \frac{\tau_{\varepsilon,l} - \tau_{\sigma,l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma,l}} i\omega \hat{\varepsilon}$$

и применяя обратное преобразование Фурье, можно получить уравнения, связываю-

щие напряжения и деформации:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \hat{g}(0) \left( 1 - L + \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{\varepsilon,l}}{\tau_{\sigma,l}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sum_{l=1}^L r_l, \\ \frac{\partial r_l}{\partial t} &= -\frac{1}{\tau_{\sigma,l}} \left( \hat{g}(0) \frac{\tau_{\varepsilon,l} - \tau_{\sigma,l}}{\tau_{\sigma,l}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + r_l \right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Уравнения (3.6) совместно с уравнениями движения и определением деформаций - первые два уравнения системы (3.3) - образуют замкнутую систему, которую называют "обобщенной стандартной линейной моделью твердого тела". При этом времена релаксации являются свободными параметрами, степенями свободы рациональной аппроксимации, и строятся из условия минимизации определенного функционала [92], [311].

### 3.3.1.2 $\tau$ - метод

Несложно оценить, что количество дополнительных переменных в уравнениях (3.6), по сравнению с аналогичными уравнениями для идеально упругих сред, составляет  $3L$ : включает в себя  $L$  переменных памяти и  $2L$  времен релаксации. Как показано в работе [116], для значений добротности больших десяти количество степеней свободы при построении рациональной аппроксимации можно сократить в два раза без существенного понижения качества аппроксимации. Авторами предлагается ввести переменную

$$\tau = \frac{\tau_{\varepsilon,l}}{\tau_{\sigma,l}} - 1,$$

в предположении, что она является константой для всех  $l = 1, \dots, L$ . В этом случае уравнения (3.6) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \hat{g}(0) (1 + \tau L) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sum_{l=1}^L r_l, \\ \frac{\partial r_l}{\partial t} &= -\frac{1}{\tau_{\sigma,l}} \left( \hat{g}(0) \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + r_l \right).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Этот подход получил широкое распространение в настоящее время [116], [118] и др.

### 3.3.1.3 Построение рациональной аппроксимации

Так как использование рациональной аппроксимации тензора релаксации (скалярной функции в одномерной постановке) позволяет локализовать оператор свертки по времени с помощью введения дополнительных переменных памяти и времен релаксации, то времена релаксации выступают в качестве коэффициентов рациональной функции, выбор которых определяет качество аппроксимации. При этом традиционно аппроксимация строится не для компонент тензора релаксации, а для добротности, поскольку именно она измеряется в ходе физических экспериментов и ее физический смысл понятен.

При рассмотрении обобщенной стандартной линейной модели твердого тела с применением  $\tau$ -метода (3.7) в частотной области связь напряжений и деформаций записывается в виде:

$$\sigma = \hat{g}(0) \left( 1 + \sum_{l=1}^L \frac{i\omega\tau_{\sigma,l}\tau}{1 + i\omega\tau_{\sigma,l}} \right) \varepsilon.$$

С использованием этого соотношения совместно с уравнениями движения и определением деформаций записывается дисперсионное соотношение и строится комплекснозначная фазовая скорость, которая по определению есть

$$V(\omega) = \frac{\omega}{|k|} = \sqrt{\frac{\hat{g}(0)}{\rho} \left( 1 + \sum_{l=1}^L \frac{i\omega\tau_{\sigma,l}\tau}{1 + i\omega\tau_{\sigma,l}} \right)}.$$

Учитывая определение коэффициента добротности через отношение вещественной и мнимой частей квадрата скорости, этот коэффициент для рассматриваемой модели представляется в виде:

$$\hat{Q}^{-1}(\omega, \tau, \tau_{\sigma,l}) = \frac{\sum_{l=1}^L \frac{\omega\tau_{\sigma,l}\tau}{1 + \omega^2\tau_{\sigma,l}^2}}{1 + \sum_{l=1}^L \frac{\omega^2\tau_{\sigma,l}^2\tau}{1 + \omega^2\tau_{\sigma,l}^2}}.$$

При достаточно высоких коэффициентах добротности  $Q^{-1} \ll 1$  это выражение можно с высокой точностью приблизить упрощенной записью [116]:

$$\hat{Q}^{-1}(\omega, \tau, \tau_{\sigma,l}) \approx \sum_{l=1}^L \frac{\omega\tau_{\sigma,l}\tau}{1 + \omega^2\tau_{\sigma,l}^2}.$$

Фактически задача построения обобщенной стандартной линейной модели твердого тела сведена к построению рациональной аппроксимации величины, обратной к добротности:

$$\min_{\tau, \tau_{\sigma, l}} \|Q^{-1}(\omega) - \hat{Q}^{-1}(\omega, \tau, \tau_{\sigma, l})\|_{L^2[\omega_{\min}, \omega_{\max}]}$$

Следует отметить ряд достоинств  $\tau$ -метода [116]. Во-первых, изменение рациональной функции внутри рассматриваемого спектрального интервала определяется набором параметров  $\tau_{\sigma, l}$ , при этом они не влияют на величину добротности, а только на отклонение аппроксимации от некоторой константы. Как следствие, этот набор параметров фиксирован и не зависит от величины добротности, то есть даже в случае неоднородной по поглощению среды эти параметры от пространственной координаты не зависят. Во-вторых, величина добротности определяется одним параметром  $\tau$ , который, в свою очередь, может зависеть от пространственной координаты. В результате использование  $\tau$ -метода в обобщенной стандартной линейной модели твердого тела, то есть применение уравнений (3.7), предполагает наличие  $L + 1$  дополнительного переменного в сравнении с моделью идеально упругого тела.

### 3.3.1.4 Обобщенная стандартная линейная модель

#### твердого тела для трансверсально-изотропной среды

Рассматривается модель трансверсально-изотропной среды с вертикальной осью симметрии, поскольку именно такая модель представляет в настоящее время наибольший интерес с геофизической точки зрения. При этом обобщенная стандартная линейная модель твердого тела в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{13}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{23}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\sigma_{33}}{\partial x_3}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \sum_{l=1}^L \begin{pmatrix} r_{11,l} \\ r_{22,l} \\ r_{33,l} \\ r_{23,l} \\ r_{13,l} \\ r_{12,l} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\tau_{\sigma,l} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} r_{11,l} \\ r_{22,l} \\ r_{33,l} \\ r_{23,l} \\ r_{13,l} \\ r_{12,l} \end{pmatrix} = -P_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{11,l} \\ r_{22,l} \\ r_{33,l} \\ r_{23,l} \\ r_{13,l} \\ r_{12,l} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

где матрицы  $G_m$ ,  $m = 1, 2$  задаются соотношениями:

$$P_m = \begin{pmatrix} g_{11}^m & g_{11}^m - 2g_{66}^m & g_{13}^m & 0 & 0 & 0 \\ g_{11}^m - 2g_{66}^m & g_{11}^m & g_{13}^m & 0 & 0 & 0 \\ g_{13}^m & g_{13}^m & g_{33}^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44}^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{44}^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{66}^m \end{pmatrix},$$

с элементами

$$g_{ij}^1 = C_{ij}(1 + L\tau_{ij}), \quad g_{ij}^2 = C_{ij}\tau_{ij},$$

где  $C_{ij}$  - компоненты невозмущенного тензора жесткости.

Прежде чем переходить к описанию построения конечно-разностной аппроксимации и разработке гибридного алгоритма, следует отметить два важных свойства системы уравнений (3.8) - (3.10). Во-первых, на любой достаточно гладкой кривой  $\Gamma$  выполняются условия согласования

$$[\vec{u}]|_{\Gamma} = 0, \quad [\sigma \cdot \vec{n}]|_{\Gamma} = 0, \quad (3.11)$$

где  $\vec{u}$  - вектор скоростей смещений,  $\sigma$  - тензор напряжений,  $\vec{n}$  - вектор внешней нормали,  $[f]_{\Gamma}$  - скачок функции на интерфейсе. Таким образом видно, что условия на контакте идеально упругих и вязкоупругих сред совпадают и в них не участвуют переменные памяти. Кроме того, при  $\tau^P = \tau^S = 0$ , система (3.8) - (3.10) совпадает с уравнениями динамической теории упругости для сред без поглощения, а переменные памяти тождественно равны нулю.

### 3.3.2 Конечно-разностная аппроксимация обобщенной стандартной линейной модели твердого тела

Следуя работам [159], [118], [92], [7], конечно-разностная аппроксимация для этой схемы строится на сдвинутых сетках с использованием следующих операторов:

$$\begin{aligned} D_t[f]_{I,J,K}^N &= \frac{f_{I,J,K}^{N+1/2} - f_{I,J,K}^{N-1/2}}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{I,J,K}^N + O(\Delta t^2), \\ A_t[f]_{I,J,K}^N &= \frac{f_{I,J,K}^{N+1/2} + f_{I,J,K}^{N-1/2}}{2} = f_{I,J,K}^N + O(\Delta t^2), \\ D_1[f]_{I,J,K}^N &= \frac{f_{I+1/2,J,K}^N - f_{I-1/2,J,K}^N}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{I,J,K}^N + O(h_1^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь  $\Delta t$  используется для обозначения шага по времени,  $h_1, h_2, h_3$  - шаги сетки по пространственным направлениям. Индексы, записанные заглавными буквами, могут принимать как целые, так и полуцелые значения, в то время как индексы, обозначенные строчными буквами, - всегда целые.

Используя введенные операторы, стандартную схему на сдвинутых сетках для системы (3.8) - (3.10) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \rho D_t[u_1]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} &= D_1[\sigma_{11}]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} + D_2[\sigma_{12}]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} + D_3[\sigma_{13}]_{i+1/2,j,k}^{n-1/2}, \\ \rho D_t[u_2]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} &= D_1[\sigma_{12}]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} + D_2[\sigma_{22}]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} + D_3[\sigma_{23}]_{i,j+1/2,k}^{n-1/2}, \\ \rho D_t[u_3]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} &= D_1[\sigma_{13}]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} + D_2[\sigma_{23}]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} + D_3[\sigma_{33}]_{i,j,k+1/2}^{n-1/2}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
D_t[\sigma_{11}]_{i,j,k}^n &= g_{11}^1 D_1[u_1]_{i,j,k}^n + (g_{11}^1 - 2g_{66}^1) D_2[u_2]_{i,j,k}^n + \\
&\quad + g_{13}^1 D_3[u_3]_{i,j,k}^n + \sum_{l=1}^L A_t[r_{11,l}]_{i,j,k}^n, \\
D_t[\sigma_{22}]_{i,j,k}^n &= (g_{11}^1 - 2g_{66}^1) D_1[u_1]_{i,j,k}^n + g_{33}^1 D_2[u_2]_{i,j,k}^n + \\
&\quad + g_{13}^1 D_3[u_3]_{i,j,k}^n + \sum_{l=1}^L A_t[r_{22,l}]_{i,j,k}^n, \\
D_t[\sigma_{33}]_{i,j,k}^n &= g_{13}^1 D_1[u_1]_{i,j,k}^n + g_{13}^1 D_2[u_2]_{i,j,k}^n + \\
&\quad + g_{33}^1 D_3[u_3]_{i,j,k}^n + \sum_{l=1}^L A_t[r_{33,l}]_{i,j,k}^n, \\
D_t[\sigma_{23}]_{i,j+1/2,k+1/2}^n &= g_{44}^1 D_3[u_2]_{i,j+1/2,k+1/2}^n + g_{44}^1 D_2[u_3]_{i,j+1/2,k+1/2}^n + \\
&\quad + \sum_{l=1}^L A_t[r_{23,l}]_{i,j+1/2,k+1/2}^n, \\
D_t[\sigma_{13}]_{i+1/2,j,k+1/2}^n &= g_{44}^1 D_1[u_3]_{i+1/2,j,k+1/2}^n + g_{44}^1 D_3[u_1]_{i+1/2,j,k+1/2}^n + \\
&\quad + \sum_{l=1}^L A_t[r_{13,l}]_{i+1/2,j,k+1/2}^n, \\
D_t[\sigma_{12}]_{i+1/2,j+1/2,k}^n &= g_{66}^1 D_2[u_1]_{i+1/2,j+1/2,k}^n + g_{66}^1 D_1[u_2]_{i+1/2,j+1/2,k}^n + \\
&\quad + \sum_{l=1}^L A_t[r_{12,l}]_{i+1/2,j+1/2,k}^n,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\sigma,l} D_t[r_{11,l}]_{i,j,k}^n &= -g_{11}^2 D_1[u_1]_{i,j,k}^n - (g_{11}^2 - 2g_{66}^2) D_2[u_2]_{i,j,k}^n - \\
&\quad - g_{13}^2 D_3[u_3]_{i,j,k}^n - \sum_{l=1}^L A_t[r_{11,l}]_{i,j,k}^n, \\
\tau_{\sigma,l} D_t[r_{11,l}]_{i,j,k}^n &= -(g_{11}^2 - g_{66}^2) D_1[u_1]_{i,j,k}^n - g_{33}^2 D_2[u_2]_{i,j,k}^n - \\
&\quad - g_{13}^2 D_3[u_3]_{i,j,k}^n - \sum_{l=1}^L A_t[r_{22,l}]_{i,j,k}^n, \\
\tau_{\sigma,l} D_t[r_{11,l}]_{i,j,k}^n &= -g_{13}^2 D_1[u_1]_{i,j,k}^n - g_{13}^2 D_2[u_2]_{i,j,k}^n - \\
&\quad - g_{33}^2 D_3[u_3]_{i,j,k}^n - \sum_{l=1}^L A_t[r_{33,l}]_{i,j,k}^n, \\
\tau_{\sigma,l} D_t[r_{11,l}]_{i,j+1/2,k+1/2}^n &= -g_{44}^2 D_3[u_2]_{i,j+1/2,k+1/2}^n - g_{44}^2 D_2[u_3]_{i,j+1/2,k+1/2}^n - \\
&\quad - \sum_{l=1}^L A_t[r_{23,l}]_{i,j+1/2,k+1/2}^n, \\
\tau_{\sigma,l} D_t[r_{11,l}]_{i+1/2,j,k+1/2}^n &= -g_{44}^2 D_1[u_3]_{i+1/2,j,k+1/2}^n - g_{44}^2 D_3[u_1]_{i+1/2,j,k+1/2}^n - \\
&\quad - \sum_{l=1}^L A_t[r_{13,l}]_{i+1/2,j,k+1/2}^n, \\
\tau_{\sigma,l} D_t[r_{11,l}]_{i+1/2,j+1/2,k}^n &= -g_{66}^2 D_2[u_1]_{i+1/2,j+1/2,k}^n - g_{66}^2 D_1[u_2]_{i+1/2,j+1/2,k}^n - \\
&\quad - \sum_{l=1}^L A_t[r_{12,l}]_{i+1/2,j+1/2,k}^n.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Хотя, при равенстве нулю параметров  $\tau^P$  и  $\tau^S$  система уравнений (3.10) вырождается, а переменные памяти тривиальны, такой подход не приводит к увеличению эффективности алгоритма, так как тривиальные уравнения будут решаться, а переменные хранятся в оперативной памяти. Чтобы избежать этого, используется схема, аппроксимирующая (3.8) - (3.10) только в областях с вязкоупругой средой, а в остальной части модели применяется схема без переменных памяти (3.8) - (3.9) [374].

### 3.4 Разработка алгоритма на основе комбинирования моделей идеально упругой и вязкоупругой сред

Математически, задача разработки алгоритма объединением конечно-разностных схем для систем уравнений идеально упругой и вязкоупругой сред достаточно проста. Согласно условиям сопряжения (3.11) переменные памяти могут терпеть разрыв на границе и условий их для согласования не требуется. Поэтому комбинирование схем, аппроксимирующих модели идеально и вязкоупругой среды, происходит без дополнительного пересчета или интерполяции решения на границе. Однако, расчет решения для моделей реалистичного размера требует использования вычислительных систем с распределенной памятью, на основе метода декомпозиции области. Комбинирование схем для идеально и вязкоупругой сред при использовании равномерного разбиения на подобласти приведет к разбалансировке загрузки процессоров, поскольку загрузка ядер, рассчитывающих решение в идеально упругой среде ниже часть времени они будут простаивать, а общее время счета не уменьшится.

Для минимизации машинного времени вводится ряд обозначений:

- Общее машинное время расчета  $T = tN^C$ , где  $t$  – время работы алгоритма (в английской литературе wall-clock time),  $N^C$  – число процессов равное числу задействованных процессорных ядер.
- Физический объем модели  $V$ , объем, заполненный вязкоупругой средой -  $V^1 = \alpha V$ , объем с идеально упругой средой  $V^2 = (1 - \alpha)V$ , где  $\alpha \in [0; 1]$ .
- Элементарный объем, решение внутри которого вычисляется одним ядром -  $\tilde{V}^1$  для вязкоупругой части модели, для идеально упругой -  $\tilde{V}^2 = \beta\tilde{V}^1$ , где  $\beta \in (0; \infty)$ .
- Число ядер, для вычисления решения в вязкоупругой части модели,  $N^1 = V^1/\tilde{V}^1 = \alpha\frac{V}{\tilde{V}^1}$ , в идеально упругой части  $N^2 = V^2/\tilde{V}^2 = \frac{1-\alpha}{\beta}\frac{V}{\tilde{V}^1}$ , тогда общее число ядер  $N^1 + N^2 = \left(\alpha + \frac{1-\alpha}{\beta}\right)\frac{V}{\tilde{V}^1}$ .

- Время, расчета вектора скорости в одной ячейке сетки -  $t_u$  (совпадает для упругой и вязкоупругой частей модели), время вычисления компонент тензора напряжений  $t_\sigma^1$  и  $t_\sigma^2$  для вязкоупругой и упругой частей модели соответственно; считается, что  $t_\sigma^2 = \gamma t_\sigma^1$ ,  $t_u = \delta t_\sigma^1$ , где  $\gamma \in [0; 1]$ ,  $\delta \in [0; 1]$ .
- Время вычисления компонент вектора скоростей смещений в элементарном объеме на одном шаге схемы по времени для упругой  $T_u^2 = t_u \tilde{V}^2 \varepsilon = \delta t_\sigma^1 \beta \tilde{V}^1 \varepsilon$  и вязкоупругой  $T_u^1 = t_u \tilde{V}^1 \varepsilon = \delta t_\sigma^1 \tilde{V}^1 \varepsilon$  частей, время расчета тензора напряжений для упругой  $T_\sigma^2 = \gamma t_\sigma^1 \beta \tilde{V}^1 \varepsilon$  и вязкоупругой  $T_\sigma^1 = t_\sigma^1 \tilde{V}^1 \varepsilon$  частей модели; рассматривается сетка с постоянными шагами, в результате, число ячеек сетки в заданном объеме пропорционально этому объему с коэффициентом  $\varepsilon$ .

Так как используются явные по времени конечно-разностные схемы на сдвинутых сетках, алгоритм имеет два типа точек синхронизации: первый – перед вычислением скоростей, второй – перед расчетом напряжений. Следовательно, общее машинное время для проведения моделирования записывается в виде формулы:

$$T = M [\max(T_u^1, T_u^2) + \max(T_\sigma^1, T_\sigma^2)] (N^1 + N^2),$$

где  $M$  – число шагов по времени,  $T_i^j$  – время расчета определенных частей волнового поля внутри элементарного объема на одном шаге по времени и  $N^j$  – число ядер, используемых для расчета. Формулу можно упростить:

$$T(\alpha, \beta) = M \varepsilon V t_\sigma^v [\delta \max(1, \beta) + \max(1, \gamma \beta)] \left( \alpha + \frac{1 - \alpha}{\beta} \right). \quad (3.16)$$

Тогда задача оптимального расщипления на подобласти сводится к минимизации: для заданного параметра  $\alpha$  и фиксированных параметров  $\gamma$  и  $\delta$  определить  $\beta$  такой, чтобы достигался

$$\min_{\beta \in (0; \infty)} T(\alpha, \beta).$$

Множитель  $M \varepsilon V t_\sigma^v$  влияет на общее время вычислений, но не затрагивает решения задачи минимизации, следовательно этот коэффициент можно считать равным единице. При этом значения параметров  $\gamma$  и  $\delta$  меньше единицы  $\gamma \in [0, 1]$  и  $\delta \in [0, 1]$ .

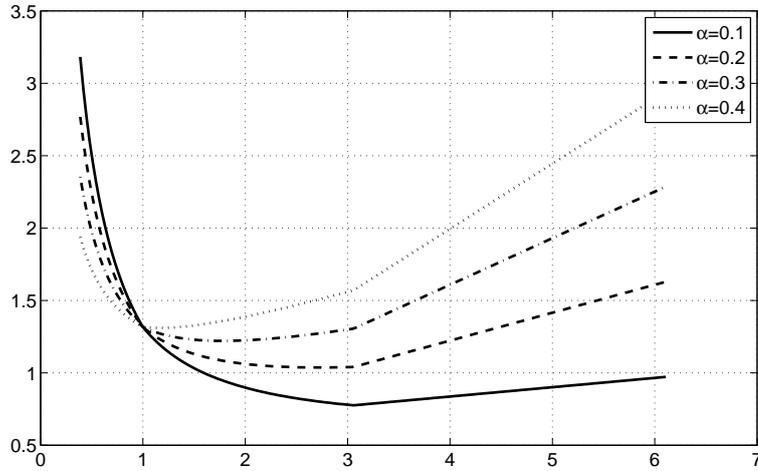


Рисунок 3.1 – Полное процессорное время в зависимости от отношения элементарных объемов для разных частей модели  $\beta = \tilde{V}^e / \tilde{V}^v$  и значений  $\alpha$ , относительного объема вязкоупругой части модели

На рис. 3.1 показана зависимость значения функции  $T(\alpha, \beta)$  от  $\beta$  для нескольких значений  $\alpha$ .

Задача минимизации решается аналитически, результатом являются следующие значения отношения элементарных объемов  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \beta &= 1/\gamma, & \text{при } \alpha &\leq \frac{\gamma^2}{\delta + \gamma^2}, \\ \beta &= \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha\delta}}, & \text{при } \frac{\gamma^2}{\delta + \gamma^2} < \alpha < \frac{1}{1+\delta}, \\ \beta &= 1, & \text{при } \alpha &\geq \frac{1}{1+\delta}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Первый случай в (3.17) относится к малому объему вязкоупругой части  $\alpha$ , тогда оптимальным является  $\beta$ , при котором для ядер, рассчитывающих решение в вязкоупругой части допускается простой, при полной загрузке ядер, вычисляющий поле в упругой части модели. Во втором случае минимум достигается при  $\beta \in [1, 1/\gamma]$ , как показано на рис. 3.2 для схемы второго порядка с параметрами  $\gamma = 0.327$  и  $\delta = 0.3163$  и схемы четвертого порядка с  $\gamma = 0.4725$  и  $\delta = 0.4455$ . Третий случай в соотношении (3.17) относится к моделям с преобладающей вязкоупругой частью, тогда эффективным является простой ядер, приписанных к упругой части модели.

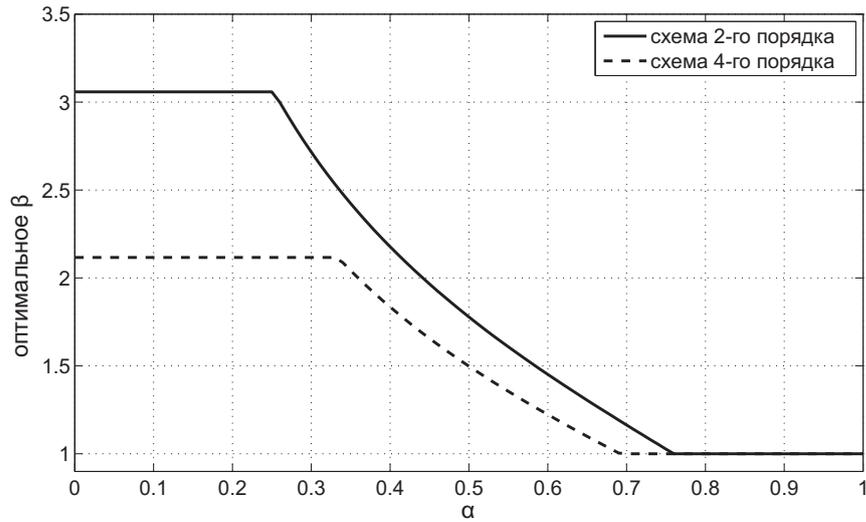


Рисунок 3.2 – Оптимальное отношение упругого и вязкоупругого элементарных объемов  $\beta$  в зависимости от относительного объема вязкоупругой части  $\alpha$  для схем второго (сплошная линия) и четвертого (пунктирная линия) порядков аппроксимации.

## 3.5 Численный анализ гибридного алгоритма

### 3.5.1 Оценка параметров балансировки

Оценки машинного времени (3.16) и оптимальная декомпозиция области (3.17) зависят от параметров  $\gamma$  и  $\delta$  – отношение времени расчета тензора напряжений и вектора скоростей смещений в упругой части модели ко времени расчета тензора напряжений в вязкоупругой части модели на точку сетки. Теоретически их построить нельзя, поэтому для их оценки проводятся численные эксперименты для схемы второго [373] и четвертого [238] порядков аппроксимации по пространству.

Для определения параметров  $\gamma$  и  $\delta$  для конкретной реализации алгоритма, проводится серия численных экспериментов в области  $1000 \times 300 \times 600$  точек, что соответствует  $100 \times 30 \times 60$  длин волн по направлениям  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  соответственно. Область разделена на 48 подобластей, решение в каждой из которых вычисляется одним ядром. Размеры подобластей по направлениям  $x_1$  и  $x_2$  фиксированы и составляют 250 и 150 точек соответственно, по вертикали - варьируются. Рассматривается два типа подобластей, в первом предполагается вязкоупругая среда, во втором - упругая. В экспериментах изменяется число точек по вертикали в первой и второй группах подобластей. В табл. 3.1 приводится: число точек сетки в разных подобла-

Таблица 3.1 – Времена расчета компонент решения на одном шаге конечно-разностной схемы  $t_u^e, t_u^v, t_\sigma^e, t_\sigma^v$  в зависимости от числа точек  $N^e$  и  $N^v$  в элементарных объемах. Три последних столбца – экспериментально оцененные параметры  $\gamma$  и  $\delta$ .

	$N^e$	$N^v$	$\beta$	$t_u^e$	$t_u^v$	$t_\sigma^e$	$t_\sigma^v$	$\gamma$	$\delta^e$	$\delta^v$
эксперимент 1	100	100	1.00	0.21	0.21	0.22	0.67	0.328	0.314	0.319
эксперимент 2	105	90	1.17	0.22	0.19	0.23	0.60	0.326	0.312	0.315
эксперимент 3	110	80	1.38	0.24	0.17	0.25	0.54	0.331	0.319	0.315
эксперимент 4	115	70	1.64	0.25	0.15	0.25	0.47	0.326	0.317	0.317
эксперимент 5	120	60	2.00	0.26	0.13	0.27	0.41	0.328	0.316	0.317
эксперимент 6	125	50	2.5	0.27	0.11	0.28	0.34	0.327	0.315	0.321
эксперимент 7	130	40	3.25	0.28	0.09	0.29	0.28	0.321	0.310	0.317
среднее								0.327	0.315	0.317

стях;  $\beta = \tilde{V}^2/\tilde{V}^1$  - отношение упругого и вязкоупругого элементарных объемов;  $t_u, t_\sigma^2$ ,  $t_\sigma^1$  – времена вычисления компонент вектора скоростей смещений и тензора напряжений для упругой и вязкоупругой частей модели;  $\gamma = t_\sigma^e/t_\sigma^v \cdot V^v/V^e$ ,  $\delta^e = t_u^e/t_\sigma^v \cdot V^v/V^e$  и  $\delta^v = t_u^v/t_\sigma^v$ . Во всех экспериментах проводится расчет решения до 1000 временных шагов с измерением и последующим осреднением времени выполнения каждого полушага по времени. Эти времена представляют только вычисления и не включают межпроцессорные обмены.

В результате получены значения параметров  $\gamma = 0.327$  и  $\delta = 0.3162$  для схемы второго порядка аппроксимации по пространству. Аналогично для для схемы четвертого порядка  $\gamma = 0.4725$  и  $\delta = 0.4455$ .

### 3.5.2 Распределение процессорного времени

Сначала выполняются эксперименты по верификации полученных оценок машинного времени [289]. Оптимальная декомпозиция области, т.е. выбор  $\beta = V^e/V^v$ , зависит от относительного объема вязкоупругой части модели. Для подтверждения полученных теоретических результатов проводятся три серии численных экспериментов, таких, что объем вязкоупругой части  $\alpha$  составляет 10, 40 и 90%. Таким образом каждый из случаев, представленных в соотношении (3.17) рассматривается отдельно. Расчеты выполняются для разных значений  $\beta$ . Экспериментально полученные времена масштабируются так, чтобы они совпали с оценочными для  $\beta = 1$ , для корректности сравнения теоретических и рассчитанных данных. При сравнении

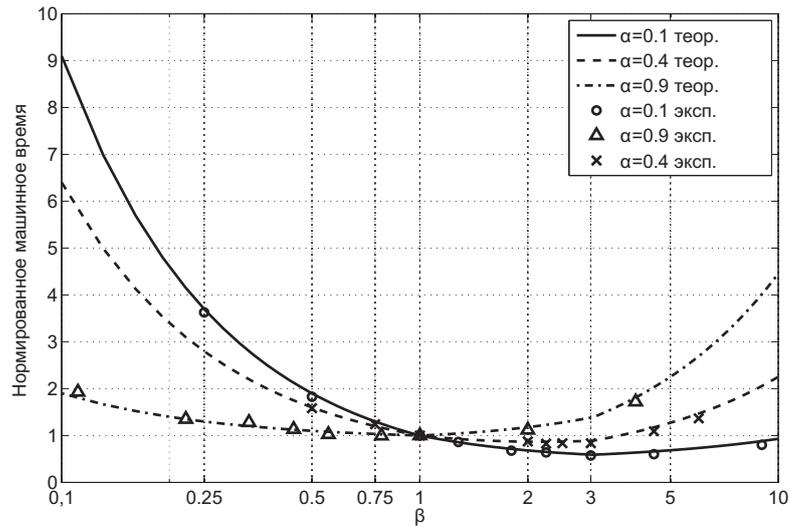


Рисунок 3.3 – Теоретические оценки процессорного времени (линии) и результаты численных экспериментов (маркеры) в зависимости от отношения упругого и вязкоупругого элементарных объемов  $\beta$  в логарифмической шкале

результатов для схемы второго порядка (рис. 3.3) с результатами для схемы четвертого порядка наблюдается совпадение теоретических и экспериментальных данных, подтверждающее теоретические оценки оптимального выбора декомпозиции области.

Полученные значения отношения элементарных объемов позволяют определить ускорение гибридного алгоритма в сравнении с алгоритмом, основанным на расчете решения для обобщенной стандартной линейной модели твердого тела во всей области. На графике зависимости ускорения от  $\alpha$  для схем второго и четвертого порядков (рис. 3.4) видно, что значение  $\alpha = 0$ , соответствующее чисто упругой модели, дает максимальное ускорение. Из теоретических оценок следует, что значение  $\alpha_0 = \frac{1}{\delta+1}$  такое, что для любого  $\alpha > \alpha_0$  оптимальным значением будет  $\beta = 1$ . Это значит, что элементарные объемы для упругой и вязкоупругой модели совпадают, и не нужно использовать гибридный алгоритм. Для практически интересных моделей - с вязкоупругой частью около 10% общего объема ускорение может достигать значения 1.7 (1.4 – для схемы четвертого порядка) относительно использования алгоритма, ориентированного на полную постановку.

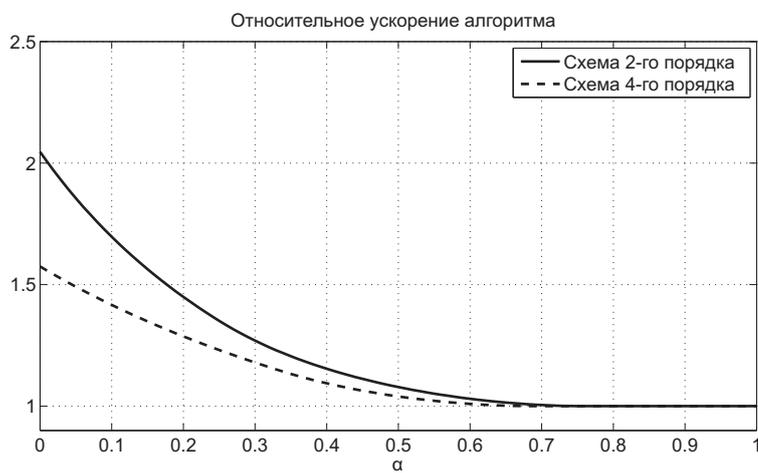


Рисунок 3.4 – Ускорение гибридного алгоритма относительно алгоритма для решения задачи в полной постановке в зависимости от доли вязкоупругой части модели  $\alpha$  для схем второго и четвертого порядков

## Глава 4

# Разработка метода и алгоритма расчета волновых сейсмических полей в средах с резкоконтрастными границами

### 4.1 Изученность задачи

Отдельной задачей, требующей детального рассмотрения, является расчет волновых полей в моделях, содержащих резкоконтрастные границы со сложной нерегулярной геометрией, таких, как свободная поверхность, морское дно, стенка скважины. Как показано в работах [347], [289], применение регулярных прямоугольных сеток для конечно-разностных схем при наличии резкоконтрастных границ, особенно границ между жидкостью (газом) и твердым телом, как правило, понижает скорость сходимости вплоть до первого порядка. При этом исследование скорости сходимости конечно-разностных решений при наличии в модели резкоконтрастных границ затрагивает в основном границы, совпадающие с линиями сетки либо параллельные им [62], [249], [53], [289] [271]. В случае наклонных или криволинейных границ применение прямоугольных сеток приводит к аппроксимации этих границ кусочно-постоянной или ступенчатой функцией, что дополнительно снижает скорость сходимости решения. Более того, ступенчатая аппроксимация границ приводит к возник-

новению дифракции волн на этих границах, которая является численной ошибкой [272], [41]. В случае, если источник находится в непосредственной близости от таких границ (свободная поверхность, стенка скважины), возникают поверхностные волны различной природы, например волны Релея и Лява для свободной поверхности [65], волна Стоунли на границе жидкость-упругость [285], [136], волна Крауклиса при наличии флюидозаполненной трещины [31], [229], [283], [179]. Такие волны-помехи зачастую весьма высокоэнергетичны и достаточно слабо затухают с удалением от источника. В результате многократное взаимодействие поверхностных волн со ступенчатой аппроксимацией границы приводит к множественной высокоэнергетической дифракции, конвертации в объемные волны и, как следствие, полному подавлению целевого сигнала. Более того, при использовании сейсмического мониторинга резервуаров [257] для оперативного контроля состояния резервуара и изменения его свойств при интенсификации добычи, или EOR (от английского enhancing of oil recovery procedures), методом вытеснения паром [148], [113], [223], [172], вытеснения водой [383], вытеснения углекислым газом и его захоронении [358], [312] и др. основная сложность - повторяемость условий эксперимента. Эффекты, связанные с вытеснением одного флюида в породе другим, чрезвычайно слабо проявляются в макроскопических свойствах породы, даже при условии вытеснения высоковязких нефтей паром [184], [139], [151], [150], и как следствие, в волновых сейсмических полях. При этом существует ряд факторов, не связанных с изменением свойств резервуара, способных внести существенную погрешность в сейсмические данные. Среди них можно выделить, например, смещение положений и ориентаций приемников и источников [359], [83], [284], которое может быть компенсировано использованием фиксированных расстановок. Еще одним фактором может выступать изменчивость физических свойств верхней части разреза, например изменение скорости распространения волн в слабоконсолидированных или нецементированных песках в зависимости от влажности или изменение скорости акустических волн в воде в зависимости от температуры [360], [112]. Отдельного внимания заслуживает изменение профиля свободной поверхности как при морских [236], [230], так и при наземных наблюдениях [284], [171], [244]. В частности, в работе [244] показано, что изменение профиля свободной поверхности для пустынной территории в пределах 0.5 м (стандартное отклонение)

с длиной корреляции возмущения порядка 10 м, что согласуется с данными наблюдения и моделирования изменчивости профиля дюн [168], приводит к различию в данных до 60%, что делает такие данные полностью непригодными для оценки изменчивости свойств резервуара и требует учета топографии свободной поверхности и компенсации эффектов, связанных с ее изменением с течением времени. Поэтому разработка алгоритма расчета волновых полей в моделях с резкоконтрастными нерегулярными границами чрезвычайно актуальна.

В настоящее время известен ряд подходов к расчету волновых полей в моделях, содержащих границы со сложной геометрией. Прежде всего следует отметить подход, основанный на использовании криволинейных координат, ассоциированных с наиболее контрастными границами в модели. Общие теоретические основы данного подхода представлены, например, в книге [57]. В качестве примеров использования данного подхода в задачах геофизики можно привести расчет поля акустического источника, расположенного в скважине, когда вычисления проводятся в цилиндрической системе координат, что позволяет точно описывать наиболее контрастную границу - стенку скважины [298], [297], [251], [45]. Следует отметить, что в приведенных примерах компоненты поля рассматриваются в цилиндрической системе координат, что позволяет сохранять структуру уравнений и использовать стандартную схему на сдвинутых сетках [373] для их аппроксимации. Более того, в приведенных примерах используется цилиндрическая система координат, способ построения сеток в которой и их свойства детально изучены, как и запись системы уравнений динамической теории упругости в этих координатах. В общем же случае переход к ортогональной системе координат, связанной с набором, пусть даже непересекающихся, поверхностей, является чрезвычайно сложной задачей. Поэтому применение криволинейных координат для расчета волновых полей в моделях со сложной топографией свободной поверхности традиционно предполагает лишь частичный переход к криволинейным координатам, связанным с основными интерфейсами. То есть вертикальные линии сетки остаются неизменными, в то время как горизонтальные деформируются, то есть используемая замена переменных применяется только к вертикальной координате. Более того, в этом случае замене подвергаются пространственные переменные и дифференциальные выражения, в то время как компоненты поля сохраняются в

декартовой системе координат [201], [199], [200], [350], [268], [339], [160], [21]. В результате происходит изменение структуры системы уравнений так, что, как и в случае анизотропных сред, требуется применение схем на частично сдвинутых сетках - схемы Лебедева [36], [245] либо схемы на повернутых сетках [316], что, как показано в работах [245], [110], приводит к существенному увеличению вычислительной сложности и ресурсоемкости алгоритма. При этом традиционно модели задаются на прямоугольной сетке, а применение криволинейных координат и соответствующих сеток вносит существенную ошибку в определение скоростной модели среды [62], [271]. Более того, такой подход предполагает отсутствие в модели интерфейсов с высокими градиентами, отсутствие пересечения границ и их чрезмерного сближения, в противном случае качество криволинейных сеток будет неприемлемо низким [57]. Другими двумя подходами к учету сложной геометрии резкоконтрастных границ являются метод погруженных границ [389], [269] (от английского *immersed boundary method*) и метод фиктивных узлов [197], [255]. Идеи этих способов близки, состоят в экстраполяции поля по нормали к границе и учете граничных условий для экстраполированного значения. Сложность в реализации этих способов - отсутствие априорных условий устойчивости получаемых численных алгоритмов. Из менее распространенных следует упомянуть бессеточные методы (*mesh-free*) [349]; метод конечных объемов [389], [390], [121], достаточно легко адаптируемый к рельефу, однако относительно низкого порядка аппроксимации; сеточно-характеристический метод [50], [9], [25], [24], [38], [39], обеспечивающий высокую точность и позволяющий решать даже нелинейные задачи, однако необоснованно дорогой, с вычислительной точки зрения, для решения линейных задач.

Принципиально иными являются алгоритмы, основанные на различных модификациях метода конечных элементов и метода Галеркина. К этому классу подходов следует отнести метод непрерывных конечных элементов [214], [100], [388], [352], [181], [354]. Эти способы основаны на построении решения в классе подходящих гладких функций, определенных на некоторой нерегулярной треугольной (тетраэдральной) сетке. Подобная свобода выбора сетки приводит к возможности описания границ кусочно-линейной функцией вместо кусочно-постоянной при использовании метода конечных разностей, то есть повышается гладкость аппроксимации интерфейса, что,

в свою очередь, существенно понижает интенсивность дифрагированных волн. Более того, известны модификации метода конечных элементов и разрывного метода Галеркина, в которых используются криволинейные сетки, что дополнительно повышает гладкость аппроксимации границы, однако требует больших вычислительных затрат и точного знания границы, что не всегда доступно [376], [386]. В классической непрерывной постановке метод конечных элементов в применении к решению гиперболических задач имеет два недостатка, не считая построения сетки. Во-первых, каждая базисная функция определяется в наборе ячеек сетки, что и обеспечивает их связь. В результате получаемая матрица масс разреженная, но не диагональная, поэтому для расчета решения на каждом шаге по времени необходимо обращаться матрицу, размер которой совпадает с общим числом степеней свободы задачи, то есть порядка  $10^9$ - $10^{12}$  для реалистичных задач. Для преодоления этой особенности метода широкое распространение получили способы, основанные на диагонализации матрицы масс [203], [202], [388] (в англоязычной литературе - mass-lumping), что делает алгоритм явным по времени, снижая точность. При расчете сейсмических полей, особенно в приложении к сейсмологии, широко распространена модификация этого способа, выделяемая в самостоятельный метод - метод спектральных элементов [228], [363], [37]. В качестве базисных функций в нем используются интерполяционные полиномы Лагранжа [1] с узлами интерполяции, совпадающими с узлами квадратуры Гаусса-Лаботто [1]. Поле этого интегрирование проводится с использованием квадратурных формул Гаусса-Лаботто, что и определяет диагональную структуру матрицы масс. Основной недостаток этого способа - сложность обобщения на треугольные и тетраэдральные сетки, что существенно сужает область его применимости и усложняет построение сетки. Следует заметить, что в методе конечных элементов решение ищется в виде линейной комбинации непрерывных базисных функций, в то время как система уравнений динамической теории упругости допускает решения, содержащие разрывные компоненты поля, например касательные компоненты тензора напряжений на границе раздела. В результате разработан ряд способов, аналогичных схемам на сдвинутых сетках, где разные компоненты поля определяются в разных "узлах" сетки, точнее, одни компоненты определены в вершинах ячеек, другие - на гранях, третьи - на ребрах [277]. Однако такой подход применяется в основном для

решения уравнений Максвелла и редко используется для уравнений динамической теории упругости.

Метод, который получил бурное развитие в последнее время, - разрывный метод Галеркина (DG - от английского discontinuous Galerkin), комбинирующий в себе свойства методов конечных объемов и конечных элементов [205], [190], [276], [82], [222], [166], [37]. Суть данного подхода в том, что решение строится в виде линейной комбинации разрывных базисных функций так, что внутри ячейки сетки решение (базисные функции) достаточно гладкое, а на границах ячеек терпит разрыв. В результате матрицы масс и жесткости являются блочно-диагональными и легко обратимыми, а обмен информацией между ячейками сетки происходит через численные потоки. При этом аппроксимация потоков через грани сетки может варьироваться, что приводит к изменениям дисперсионных свойств алгоритма. В частности, для систем уравнений первого порядка наиболее распространенными являются линейные аппроксимации потоков [205], включая схему центральных потоков [82] или схемы с односторонними потоками [71], и аппроксимации потоков, основанные на решении задачи о распаде разрыва [222], [166], [80], [81], [167]. Если необходимо решать систему уравнений второго порядка, применяется метод штрафных функций для построения потоков, обеспечивающий корректность постановки задачи [89], [190], [98], [367]. В отличие от классического метода конечных элементов этот метод обладает следующими выгодными свойствами. Во-первых, блочно-диагональной структурой матрицы масс, где размер блока совпадает с числом степеней свободы в одной ячейке сетки - от одного до 50. В результате матрица масс легко обратима, а метод относят к разряду "почти явных". Во-вторых, в качестве ячеек сетки для разрывного метода Галеркина могут выступать любые выпуклые многогранники, при этом обмен данными происходит через грани ячеек. В-третьих, он позволяет использовать локальные полностью независимые базисы в соседних ячейках, то есть размерности подпространств могут варьироваться в зависимости от постановки задачи, например, в областях с пониженной скоростью можно использовать метод более высокого порядка, чем в основной части модели [82], [253].

При всех указанных достоинствах разрывный метод Галеркина имеет и ряд недостатков, которые органичивают его применимость. Во-первых, сложность по-

строения сетки, которая может быть достаточно нерегулярной, но обязана аппроксимировать, по крайней мере, основные наиболее контрастные интерфейсы модели, в противном случае скорость сходимости решения падает до первой вне зависимости от размерности подпространств, в которых строится решение. Известны методы повышения точности в указанных предположениях, например, многомасштабный метод Галеркина [66], [282], [137], который скорее ориентирован на построение осреднений многомасштабных сред [183], либо метод интегрирования с весом для сред с непрерывно меняющимися скоростями. Однако указанные способы существенно усложняют алгоритм как на этапе построения матриц масс и жесткости, так и на этапе расчета решения. Во-вторых, разрывный метод Галеркина в сравнении с методом конечных разностей обладает более высокой вычислительной сложностью, и требует хранения большего объема вспомогательных данных. Более того, в отличие от конечно-разностных алгоритмов в методе Галеркина достаточно сложно реализовать векторные вычисления, что дополнительно снижает производительность алгоритмов, основанных на этом методе. Выводы о ресурсоемкости и вычислительной сложности алгоритмов моделирования волновых полей обычно делаются на основе дисперсионного анализа [142], позволяющего оценить ошибку фазовой скорости в зависимости от числа степеней свободы на длину волны, числа Куранта и прочее. Проведение такого анализа для метода конечных разностей, особенно при использовании регулярных равномерных сеток, является относительно простой задачей и неотъемлемой частью анализа конечно-разностных схем, как, например, в работах [245], [110]. Но для метода конечных элементов, и для разрывного метода Галеркина в частности, он сопряжен с рядом трудностей, таких как нерегулярность сеток, использование треугольных (тетраэдральных) сеток и пр. Отдельную сложность представляет аппроксимация уравнений динамической теории упругости, где в случае конечномерной аппроксимации возникает численная анизотропия, даже если исходная модель была изотропной. Кроме того, развитие методы конечных элементов получили в применении к решению скалярных волновых задач либо уравнений Максвелла, поэтому и анализ различных схем проводится в основном в применении к этим задачам, в то время как исследований, посвященных динамической теории, относительно немного. Применение дисперсионного анализа для разрывного метода

Галеркина и метода спектральных элементов в приложении к одномерной скалярной задаче представлено в работах [71], [70] с последующим обобщением на двумерный случай с использованием квадратной сетки [73], [72]. Однако следует отметить два важных момента. Во-первых, анализ сводится к исследованию асимптотического поведения решения при высоких значениях числа степеней свободы на длину волны [277], [279], [395], [384]. Это означает определение порядка, с которым сходится фазовая скорость численного решения в виде плоской волны к скорости решения дифференциальной задачи, что не означает аналогичную скорость сходимости решения. Другим предельным случаем являются так называемые высокочастотные пределы, когда дискретизация составляет менее трех ячеек сетки на длину волны. В этом случае качество решения обеспечивается за счет высокой размерности используемых для аппроксимации функциональных подпространств, но возникает проблема нефизичных мод в решении, которая детально исследуется в работах [302], [205], [279], [208], [329]. К тому же, реалистичные сейсмогеологические модели, особенно если речь идет о верхней части разреза, чрезвычайно неоднородны, с размерами неоднородностей порядка длины волны, что делает использование чрезвычайно грубых дискретизаций невозможным. Вторым аспектом, характерным для исследования дисперсионных свойств алгоритмов, основанных на методе конечных элементов и разрывном методе Галеркина, является работа с регулярными квадратными (кубическими) сеткам, в то время как для вычислений используются сетки треугольные. Анализ методов на треугольных сетках для скалярной задачи приведен в работах [155], [186], для уравнений Максвелла [277], [377], для системы уравнений динамической теории упругости [264], [40]. Отдельно следует упомянуть работы, в которых дисперсионные свойства разрывного метода Галеркина в применении к системе уравнений динамической теории упругости приводятся в сравнении со свойствами широко известных конечно-разностных схем. Так, в работах [291] и [61] приведен анализ дисперсионных свойств метода Галеркина для порядков базисных полиномов вплоть до третьего на квадратных (кубических) сетках в сравнении со свойствами стандартной схемы на сдвинутых сетках [373], и показано, что для высоких отношений  $V_P/V_S$  метод Галеркина быстро теряет точность. В работе [40] показано, что для задач сейсмического моделирования оптимальным является P2 формулировка мето-

да Галеркина (использование полиномов второй степени в качестве базисных функций), поскольку сочетает в себе достаточную точность (численная дисперсия не выше 0.05%) и вычислительную эффективность. Использование P1 формулировки приводит к недопустимо высокой численной дисперсии, в то время как P3 формулировка является чрезвычайно ресурсоемкой при использовании дискретизаций 3-20 ячеек сетки на длину волны, типичной для сейсмического моделирования. При этом даже использование P2 формулировки, близкой по дисперсионным свойствам к стандартной схеме четвертого порядка на сдвинутых стеках [238], требует выполнения существенно большего числа арифметических операций, чем указанная схема. Поэтому целесообразно локальное использование разрывного метода Галеркина в окрестности резкоконтрастных границ в сочетании со стандартной схемой на сдвинутых сетках, применяемой в основной части расчетной области.

Комбинирование метода конечных элементов с методом конечных разностей для уравнений Максвелла представлено, например, в работах [382], [278], [313], [135]. В силу специфики постановки задачи - один объект сложной формы, погруженный в однородную среду, и относительно небольших размеров решаемой задачи, авторы вводят нерегулярную сетку и используют метод конечных элементов непосредственно в окрестности границ тела. В результате полученные алгоритмы отличаются необоснованно высокой сложностью, особенно при параллельной реализации. В применении к задачам расчета сейсмических полей комбинирование метода конечных элементов и метода конечных разностей представлено в работе [181]. Здесь авторы ориентируются на реалистичные постановки задач для моделей со сложным строением верхней части. В результате, единственная граница, которая аппроксимируется с высокой точностью, - свободная поверхность, а численные методы комбинируются на нефизичном интерфейсе, окружающем параллелепипед. Аналогично комбинируется разрывный метод Галеркина со стандартной схемой на сдвинутых сетках [41], причем сопряжение численных методов проводится на горизонтальных интерфейсах, совпадающих с линиями сетки. Такой способ - аппроксимация только свободной поверхности - тем более оправдан, что именно на ней происходит высокоэнергетичная дифракция волны Релея, в то время как дифракция объемных волн на заглубленных границах существенно (на несколько порядков) ниже и не вносит существенной

помехи в данные.

## 4.2 Постановка задачи

Распространение сейсмических волн в изотропной идеально упругой среде в двумерной постановке описывается системой уравнений динамической теории упругости, которая в декартовой системе координат записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{12}}{\partial x_2}, \\ \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\sigma_{22}}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{22} \\ f_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Здесь  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  - вектор скоростей смещений,  $\sigma_{ij}$  - компоненты тензора напряжений,  $\rho$  - объемная плотность,  $\lambda$  и  $\mu$  - параметры Ламэ [35], [29].

Начальные условия предполагаются нулевыми:

$$\begin{aligned} u_i|_{t=0} &= 0, \quad i = 1, 2; \\ \sigma_{ij}|_{t=0} &= 0, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Считается, что система задана в области  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \geq X_2(x_1)$ , где  $X_2(x_1)$  - непрерывная функция  $x_1$ , поверхность  $x_2 = X_2(x_1)$  предполагается свободной от внешних нагрузок:

$$\sigma \cdot \vec{n}|_{x_2=X_2(x_1)} = 0,$$

где  $\vec{n}$  - вектор нормали к свободной поверхности. На бесконечности задаются условия предельного поглощения, обеспечивающие ограниченность решения. При численном моделировании расчеты проводятся в ограниченной области, что приводит к необходимости построения слабоотражающих граничных условий, обеспечивающих малость отражений от границ расчетной области, в частности, идеально согласованных слоев [104], [146], [267], [19], [20].

Расчет решения системы уравнений (4.1) в области, ограниченной криволиней-

ной границей, проводится разрывным методом Галеркина, позволяющим проводить дискретизацию расчетной области с использованием нерегулярных выпуклых многоугольников, в частности, используются треугольные сетки. Подобные дискретизации обеспечивают приемлемую точность аппроксимации криволинейных границ, однако требуют больших вычислительных затрат в сравнении с конечно-разностными методами на разнесенных сетках [271], [40], [242]. При этом их использование обосновано только в верхней, приповерхностной части модели. С целью снижения вычислительной сложности алгоритм разрабатывается на основе комбинирования разрывного метода Галеркина и конечно-разностной схемы на разнесенных сетках [241], [41], [332], [240]. В частности, применяется разрывный метод Галеркина с линейной аппроксимацией центральных потоков, а производные по времени аппроксимируются со вторым порядком с использованием метода конечных разностей на сдвинутых сетках. Это одна из наиболее простых модификаций разрывного метода Галеркина, однако полученные в работе результаты обобщаются на иные модификации разрывного метода Галеркина [367].

### 4.3 Исследование разрывного метода Галеркина в применении к расчету сейсмических полей

#### 4.3.1 Дискретизация системы уравнений динамической теории упругости разрывным методом Галеркина

Рассматривается система уравнений динамической теории упругости в двумерной постановке, записанная в декартовой системе координат в дивергентной форме [15]:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \sum_{j=1}^2 B_j \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x_j} &= 0, \\ A_2 \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} - \sum_{j=1}^2 B_j^* \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Матрицы  $A_1$  и  $A_2$  - самосопряженные, строго положительно определенные, а матрицы  $B_1$  и  $B_2$  не зависят от пространственных координат:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad A_2 = S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

где  $\rho$  - плотность,  $S$  - тензор податливости (обратный к тензору жесткости). Вектор  $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$  - скорость смещения,  $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$  - тензор напряжений, записанный в векторной форме [381].

Для дискретизации системы (4.2) с применением разрывного метода Галеркина необходимо, прежде всего, ввести некую полигональную сетку  $\mathcal{T}_h$  и обозначить через  $\mathcal{C}_h$ ,  $\mathcal{E}_h$  и  $\mathcal{N}_h$  множество ее ячеек (выпуклых многоугольников), границ и узлов соответственно. После чего необходимо определить скалярные базисные функции

$$\xi^k(\vec{x}) = \begin{cases} P^r(\vec{x}), & \vec{x} \in \mathcal{C}_h, \\ 0, & \vec{x} \notin \mathcal{C}_h, \end{cases}$$

где  $P^r$  - полином степени  $r$ . Такой выбор базисных функций традиционен, хотя существуют и другие способы, где в качестве базисных используются иные функциональные последовательности, например, плоские волны вдоль заданных направлений на наборе реперных частот. После определения скалярных базисных функций векторные функции могут быть получены как прямое произведение скалярного базиса с базисом, в котором определено волновое поле. Ниже используется сокращенное обозначение для базисных и тестовых функций  $\vec{\phi} = (\vec{\varphi}^T, \vec{\psi}^T)^T$ . Умножением системы

(4.2) на тестовые функции и интегрированием в  $\mathbf{R}^2$  можно получить выражение:

$$\begin{aligned} & \sum_{V_k \in \mathcal{C}_h} \int_{V_k} \left( \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{pmatrix} \right) dv + \\ & + \sum_{V_k \in \mathcal{C}_h} \int_{V_k} \sum_{j=1}^2 \left( \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{pmatrix} \right) dv - \\ & - \sum_{S_{km} \in \mathcal{E}_h} \int_{S_{km}} \left( \left\{ \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix} \right\}, \left[ \begin{pmatrix} 0 & B_{km} \\ B_{km}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varphi} \\ \vec{\psi} \end{pmatrix} \right] \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $V_k \in \mathcal{C}_h$  - ячейка сетки с номером  $k$ ,  $S_{km} \in \mathcal{E}_h$  - граница между ячейками с номерами  $k$  и  $m$ . Обозначение  $(,)$  используется для скалярного произведения в  $\mathbb{R}^5$ , обозначения  $\{ \}$  и  $[ \ ]$  применяются для среднего значения и скачка векторных функций на границе:

$$[B_{km}\vec{u}] = \sum_{j=1}^2 n_j^{km} B_j \vec{u}^k + \sum_{j=1}^2 n_j^{mk} B_j \vec{u}^m, \quad \{ \vec{u} \} = 0.5 (\vec{u}^k + \vec{u}^m),$$

где  $\vec{n}^{km}$  - единичный вектор нормали к границе  $S_{km} \in \mathcal{E}_h$ , направленный из ячейки с номером  $k$  в ячейку с номером  $m$ .

Важно, что полученная аппроксимация эллиптической части оператора является кососимметричной, то есть  $a(\vec{v}, \vec{\phi}) = -a(\vec{\phi}, \vec{v})$ , где  $a(,)$  - билинейная форма, составленная из двух последних слагаемых в формуле (4.3).

#### 4.3.1.1 Разложение по базисным функциям

Приведенное выражение является достаточно общим, и при его построении не используется разложение решения по базисным функциям. Итак, решение представимо в виде:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) &= \sum_{r=1}^2 \left( \sum_{k|V_k \in \mathcal{C}_h} \sum_{l=1}^d (U_r^k)_l(t) \xi_l^k(\vec{x}) \right) \vec{e}_r, \\ \vec{\sigma}(\vec{x}, t) &= \sum_{r=1}^3 \left( \sum_{k|V_k \in \mathcal{C}_h} \sum_{l=1}^d (\Sigma_r^k)_l(t) \xi_l^k(\vec{x}) \right) \vec{e}_r, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $\vec{e}_r$  - вектор стандартного базиса в  $\mathbb{R}^2$ , в котором записаны компоненты вектора скорости, либо в  $\mathbb{R}^3$  для вектора, составленного из компонент тензора напряжений,

$d$  - число степеней свободы в ячейке. Скалярные функции  $\xi_l^k$  представляются выражением:

$$\xi_l^k(\vec{x}) = \Xi_l^k(\vec{x})\chi_{V_k}(\vec{x}),$$

где  $\Xi_l^k(\vec{x})$  - достаточно гладкая функция, а  $\chi_{V_k}(\vec{x})$  - характеристическая функция ячейки  $V_k \in \mathcal{C}_h$ . Для дальнейших рассуждений удобно ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{U}^k &= ((\vec{U}_1^k)^T, (\vec{U}_2^k)^T)^T, & \vec{U}_r^k &= ((U_r^k)_1, \dots, (U_r^k)_d)^T, \\ \vec{\Sigma}^k &= ((\vec{\Sigma}_1^k)^T, \dots, (\vec{\Sigma}_3^k)^T)^T, & \vec{\Sigma}_r^k &= ((\Sigma_r^k)_1, \dots, (\Sigma_r^k)_d)^T, \end{aligned}$$

где  $L_k$  - число степеней свободы в ячейке  $V_k$ .

Подставляя выражения (4.4) в (4.3) и при условии выполнении равенств для всех пробных функций, можно получить:

$$\begin{aligned} M \otimes \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{U}^k \\ \vec{\Sigma}^k \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^2 (K^j) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^k \\ \vec{\Sigma}^k \end{pmatrix} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{m|V_m \in \mathcal{C}_h(V_k)} P_m^{km} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{km} \\ B_{km}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^m \\ \vec{\Sigma}^m \end{pmatrix} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{m|V_m \in \mathcal{C}_h(V_k)} P_k^{km} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{km} \\ B_{km}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^k \\ \vec{\Sigma}^k \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\otimes$  означает прямое произведение матриц. Матрица  $B_{km}$  определяется как

$$B_{km} = \sum_{j=1}^2 B_j n_j^{km}.$$

Матрицы  $M$ ,  $K_j$ ,  $P_m^{km}$  и  $P_k^{km}$  - матрицы масс, жесткости и потоков, которые представляются в следующем виде:

$$M^k = \begin{pmatrix} \int_{V_k} \xi_1^k \xi_1^k dv & \dots & \int_{V_k} \xi_{L_k}^k \xi_1^k dv \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{V_k} \xi_{L_k}^k \xi_1^k dv & \dots & \int_{V_k} \xi_{L_k}^k \xi_{L_k}^k dv \end{pmatrix},$$

$$K^{k,j} = \begin{pmatrix} \int_{V_k} \frac{\partial \xi_1^k}{\partial x_j} \xi_1^k & \cdots & \int_{V_k} \frac{\partial \xi_1^k}{\partial x_j} \xi_{L_k}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{V_k} \frac{\partial \xi_{L_k}^k}{\partial x_j} \xi_1^k & \cdots & \int_{V_k} \frac{\partial \xi_{L_k}^k}{\partial x_j} \xi_{L_k}^k \end{pmatrix},$$

$$P_p^{km} = \begin{pmatrix} \int_{S_{km}} \xi_1^p \xi_1^k ds & \cdots & \int_{S_{km}} \xi_{L_p}^p \xi_1^k ds \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{S_{km}} \xi_1^p \xi_{L_k}^k ds & \cdots & \int_{S_{km}} \xi_{L_p}^p \xi_{L_k}^k ds \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях верхний индекс может принимать значения  $k$  или  $m$ .

### 4.3.2 Аппроксимация производной по времени

Для аппроксимации производной по времени в полученной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5) используется оператор центральных разностей на сдвинутых сетках, аналогичный оператору, который применяется в стандартной схеме на сдвинутых сетках:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t^n} = \frac{f^{n+1/2} - f^{n-1/2}}{\tau} + O(\tau^2) = L_t[f]^n + O(\tau^2), \quad (4.6)$$

где  $\tau$  - шаг сетки по времени.

Для проведения дисперсионного анализа важно иметь преобразование Фурье от рассматриваемого оператора:

$$F \left[ \frac{df(x)}{dt} \right] = i\omega \hat{f}(\omega), \quad F [L_t[f(t)]] = \frac{2i \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\tau} \hat{f}(\omega) = i\hat{\omega} \hat{f}(\omega).$$

Из приведенного выражения видно, что образы преобразования Фурье для оператора производной и оператора центральных разностей отличаются сомножителями. Поэтому дисперсионный анализ проводится для полудискретизованной системы, а соотношения для полностью дискретной постановки находятся заменой частоты  $\omega$  на выражение  $\hat{\omega}$ .

### 4.3.3 Дисперсионный анализ разрывного метода Галеркина

#### 4.3.3.1 Бариецентрические координаты

Для проведения дисперсионного анализа разрывного метода Галеркина необходимо ввести бариецентрические координаты:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

где точки  $(x_1^1, x_2^1)$ ,  $(x_1^2, x_2^2)$  и  $(x_1^3, x_2^3)$  - узлы рассматриваемой ячейки - вершины треугольника.

В новых локальных переменных система уравнений (4.5) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \hat{M} \otimes \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{U}^k \\ \vec{\Sigma}^k \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^3 \frac{n_j^l L^l}{|J^k|} \hat{K}_l \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^k \\ \vec{\Sigma}^k \end{pmatrix} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{n_j^l L^l}{|J^k|} \hat{Q}_l \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^k \\ \vec{\Sigma}^k \end{pmatrix} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{n_j^l L^l}{|J^k|} \hat{P}_{l,i(m)} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^{m(l)} \\ \vec{\Sigma}^{m(l)} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь  $l$  - номер грани ячейки  $V_k$ ,  $n_j^l$  есть  $j$ -я компонента единичного вектора внешней нормали к  $l$ -й грани,  $L^l$  - длина этой грани,  $J^k$  - Якобиан преобразования координат для ячейки  $V_k$ . Сложные индексы  $m(l)$  используются, чтобы подчеркнуть, что существует взаимнооднозначное соответствие нумерации соседей ячейки  $V_k$  в глобальной и локальной системах координат. Важно отметить, что  $\frac{n_j^l L^l}{|J^k|} = -\frac{\partial y_l}{\partial x_j}$ , следовательно

$$\begin{aligned} n_1^1 L^1 &= x_2^3 - x_2^2, & n_1^2 L^2 &= x_2^1 - x_2^3, & n_1^3 L^3 &= x_2^2 - x_2^1, \\ n_2^1 L^1 &= x_1^2 - x_1^3, & n_2^2 L^2 &= x_1^3 - x_1^1, & n_2^3 L^3 &= x_1^1 - x_1^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Матрицы  $\hat{M}$ ,  $\hat{K}_j^k$ ,  $\hat{P}_{l,i(m)}$  и  $\hat{Q}_l$  - матрицы масс, жесткости и потоков, записанные в локальных бариецентрических координатах.

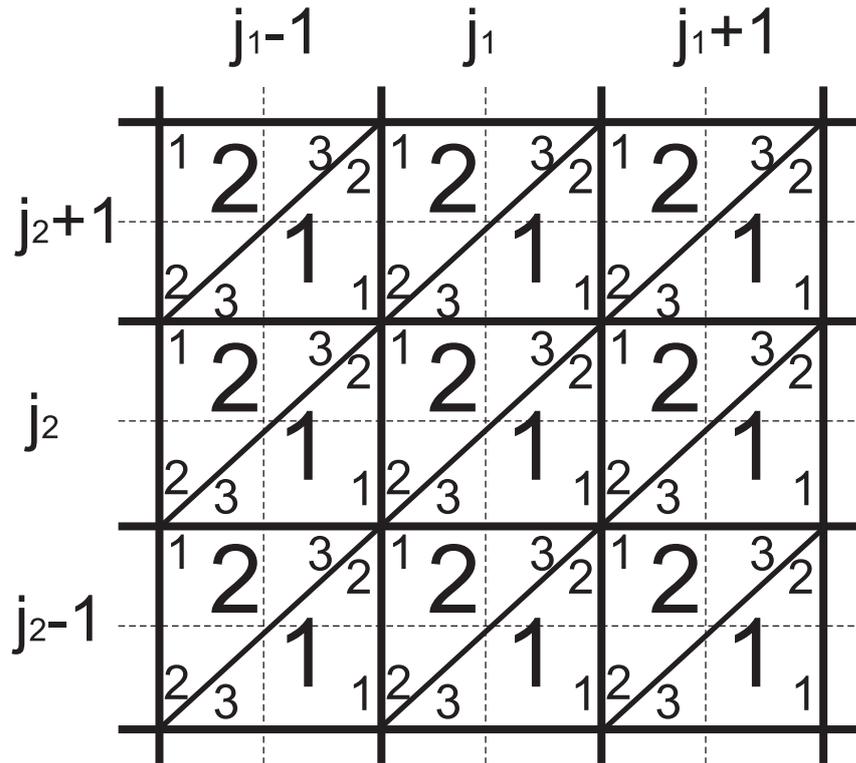


Рисунок 4.1 – Регулярная треугольная сетка для дисперсионного анализа разрывного метода Галеркина

### 4.3.3.2 Регулярная сетка

Пусть в  $\mathbf{R}^2$  задана регулярная сетка с узлами  $((x_1)_{j_1+1/2}, (x_2)_{j_2+1/2})$ , такими, что  $(x_1)_{j_1+1/2} = (j_1 + 1/2)h_1$  и  $(x_2)_{j_2+1/2} = (j_2 + 1/2)h_2$ , где  $j_1$  и  $j_2$  - целые числа. Пусть триангуляция проведена так, что существуют два типа ячеек:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}^1 &= \bigcup_{j_1, j_2} V_{j_1, j_2}^1, & \mathcal{C}^2 &= \bigcup_{j_1, j_2} V_{j_1, j_2}^2, \\
 \mathcal{N}_h(V_{j_1, j_2}^1) &= \\
 &= \{((x_1)_{j_1+1/2}, (x_2)_{j_2-1/2}), ((x_1)_{j_1+1/2}, (x_2)_{j_2+1/2}), ((x_1)_{j_1-1/2}, (x_2)_{j_2-1/2})\}, \\
 \mathcal{N}_h(V_{j_1, j_2}^2) &= \\
 &= \{((x_1)_{j_1-1/2}, (x_2)_{j_2+1/2}), ((x_1)_{j_1-1/2}, (x_2)_{j_2-1/2}), ((x_1)_{j_1+1/2}, (x_2)_{j_2+1/2})\},
 \end{aligned}$$

где  $\mathcal{N}_n(V_{j_1, j_2}^q)$  обозначает множество всех узлов ячейки  $V_{j_1, j_2}^q$ . Нижний индекс определяет положение ячейки в пространстве, а верхний - тип ячейки.

В обозначениях компонент волнового поля (коэффициентов разложения ком-

понент поля по базису) также удобно ввести двойную индексацию:

$$\begin{aligned}\vec{U}_{j_1, j_2}^q &= ((\vec{U}_{j_1, j_2}^q)_1^T, (\vec{U}_{j_1, j_2}^q)_2^T)^T, & (\vec{U}_{j_1, j_2}^q)_m &= ((U_{j_1, j_2}^q)_m^1, \dots, (U_{j_1, j_2}^q)_m^d)^T, \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^q &= ((\vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^q)_1^T, \dots, (\vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^q)_3^T)^T, & (\vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^q)_m &= ((\Sigma_{j_1, j_2}^q)_m^1, \dots, (\Sigma_{j_1, j_2}^q)_m^d)^T.\end{aligned}$$

Важно отметить, что все ячейки, соседние с ячейкой из множества  $V_{ij}^1 \in \mathcal{C}^1$ , принадлежат множеству  $\mathcal{C}^2$  и наоборот. Такая регулярная структура сетки позволяет ввести нумерацию узлов в каждом треугольнике, при которой каждый треугольник является  $m$ -м соседом своего  $m$ -го соседа (рис. 4.1). Это условие позволяет однозначно выбрать нумерацию базиса и зафиксировать порядок строк (столбцов) в матрицах потоков.

Подставляя введенные обозначения в формулу (4.7) и используя соотношения (4.8) для регулярной сетки, можно получить соотношения:

$$\begin{aligned}& \hat{M} \otimes \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^1 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^1 \end{pmatrix} - \\ & - \frac{1}{h_1} (\hat{K}_3 - \hat{K}_1 - \frac{1}{2} \hat{Q}_1 + \frac{1}{2} \hat{Q}_3) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^1 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^1 \end{pmatrix} - \\ & - \frac{1}{h_2} (\hat{K}_1 - \hat{K}_2 + \frac{1}{2} \hat{Q}_1 - \frac{1}{2} \hat{Q}_2) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^1 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^1 \end{pmatrix} - \\ & + \frac{1}{2h_1} \hat{P}_{1,1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^2 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^2 \end{pmatrix} - \\ & - \frac{1}{2h_2} \hat{P}_{1,1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^2 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^2 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{2h_2} \hat{P}_{2,2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2-1}^2 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2-1}^2 \end{pmatrix} - \\ & - \frac{1}{2h_1} \hat{P}_{3,3} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1+1, j_2}^2 \\ \vec{\Sigma}_{j_1+1, j_2}^2 \end{pmatrix} = 0,\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{M} \otimes \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^2 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^2 \end{pmatrix} - \\
& + \frac{1}{h_1} (\hat{K}_3 - \hat{K}_1 - \frac{1}{2} \hat{Q}_1 + \frac{1}{2} \hat{Q}_3) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^2 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^2 \end{pmatrix} - \\
& + \frac{1}{h_2} (\hat{K}_1 - \hat{K}_2 + \frac{1}{2} \hat{Q}_1 - \frac{1}{2} \hat{Q}_2) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^2 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^2 \end{pmatrix} - \\
& - \frac{1}{2h_1} \hat{P}_{1,1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^1 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^1 \end{pmatrix} - \\
& + \frac{1}{2h_2} \hat{P}_{1,1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^1 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^1 \end{pmatrix} + \\
& - \frac{1}{2h_2} \hat{P}_{2,2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2+1}^1 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2+1}^1 \end{pmatrix} - \\
& + \frac{1}{2h_1} \hat{P}_{3,3} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1-1, j_2}^1 \\ \vec{\Sigma}_{j_1-1, j_2}^1 \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

#### 4.3.3.3 Решение в виде плоских волн

Решение в виде плоской волны - решение вида:

$$\begin{pmatrix} \vec{U}_{j_1, j_2}^1 \\ \vec{U}_{j_1, j_2}^2 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^1 \\ \vec{\Sigma}_{j_1, j_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{U}_0^1 \\ \vec{U}_0^2 \\ \vec{\Sigma}_0^1 \\ \vec{\Sigma}_0^2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_1 h_1 j_1 + k_2 h_2 j_2)}.$$

Подставляя это выражение в систему (4.9), (4.10), можно получить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& i\omega \hat{M} \otimes \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^1 \\ \vec{\Sigma}_0^1 \end{pmatrix} - \\
& -\frac{1}{h_1} (\hat{K}_3 - \hat{K}_1 - \frac{1}{2}\hat{Q}_1 + \frac{1}{2}\hat{Q}_3) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^1 \\ \vec{\Sigma}_0^1 \end{pmatrix} - \\
& -\frac{1}{h_2} (\hat{K}_1 - \hat{K}_2 + \frac{1}{2}\hat{Q}_1 - \frac{1}{2}\hat{Q}_2) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^1 \\ \vec{\Sigma}_0^1 \end{pmatrix} - \\
& -\frac{1}{2h_1} (e^{ih_1k_1}\hat{P}_{3,3} - \hat{P}_{1,1}) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^2 \\ \vec{\Sigma}_0^2 \end{pmatrix} - \\
& -\frac{1}{2h_2} (\hat{P}_{1,1} - e^{-ih_2k_2}\hat{P}_{2,2}) \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^2 \\ \vec{\Sigma}_0^2 \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
& i\omega \hat{M} \otimes \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^2 \\ \vec{\Sigma}_0^2 \end{pmatrix} - \\
& +\frac{1}{h_1} (\hat{K}_3 - \hat{K}_1 - \frac{1}{2}\hat{Q}_1 + \frac{1}{2}\hat{Q}_3) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^2 \\ \vec{\Sigma}_0^2 \end{pmatrix} - \\
& +\frac{1}{h_2} (\hat{K}_1 - \hat{K}_2 + \frac{1}{2}\hat{Q}_1 - \frac{1}{2}\hat{Q}_2) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^2 \\ \vec{\Sigma}_0^2 \end{pmatrix} - \\
& -\frac{1}{2h_1} (\hat{P}_{1,1} - e^{-ih_1k_1}\hat{P}_{3,3}) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^1 \\ \vec{\Sigma}_0^1 \end{pmatrix} - \\
& -\frac{1}{2h_2} (e^{ih_2k_2}\hat{P}_{2,2} - \hat{P}_{1,1}) \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_0^1 \\ \vec{\Sigma}_0^1 \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Чтобы упростить полученное выражение, удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= (\hat{K}_3 - \hat{K}_1 + \frac{1}{2}\hat{Q}_3 - \frac{1}{2}\hat{Q}_1) \\
\mathbf{K}_2 &= \beta(\hat{K}_2 - \hat{K}_1 + \frac{1}{2}\hat{Q}_2 - \frac{1}{2}\hat{Q}_1) \\
\mathbf{P}_1 &= \frac{1}{2}(\hat{P}_{1,1} - e^{-ik_1h_1}\hat{P}_{3,3}), \\
\mathbf{P}_2 &= \frac{\beta}{2}(\hat{P}_{1,1} - e^{-ik_2h_2}\hat{P}_{2,2}).
\end{aligned}$$

где  $\beta = \frac{h_1}{h_2}$ . Если обозначить при этом  $h = h_1$ , тогда уравнения (4.11), (4.12) могут

быть преобразованы к виду:

$$i\omega h \hat{M} \otimes A_1 \vec{U}_0^1 - \mathbf{K}_1 \otimes B_1 \vec{\Sigma}_0^1 + \mathbf{K}_2 \otimes B_2 \vec{\Sigma}_0^1 + \bar{\mathbf{P}}_1 \otimes B_1 \vec{\Sigma}_0^2 - \mathbf{P}_2 \otimes B_2 \vec{\Sigma}_0^2 = 0,$$

$$i\omega h \hat{M} \otimes A_1 \vec{U}_0^2 + \mathbf{K}_1 \otimes B_1 \vec{\Sigma}_0^2 - \mathbf{K}_2 \otimes B_2 \vec{\Sigma}_0^2 - \mathbf{P}_1 \otimes B_1 \vec{\Sigma}_0^1 + \bar{\mathbf{P}}_2 \otimes B_2 \vec{\Sigma}_0^1 = 0,$$

$$i\omega h \hat{M} \otimes A_2 \vec{\Sigma}_0^1 - \mathbf{K}_1 \otimes B_1^* \vec{U}_0^1 + \mathbf{K}_2 \otimes B_2^* \vec{U}_0^1 + \bar{\mathbf{P}}_1 \otimes B_1^* \vec{U}_0^2 - \mathbf{P}_2 \otimes B_2^* \vec{U}_0^2 = 0,$$

$$i\omega h \hat{M} \otimes A_1 \vec{\Sigma}_0^2 + \mathbf{K}_1 \otimes B_1^* \vec{U}_0^2 - \mathbf{K}_2 \otimes B_2^* \vec{U}_0^2 - \mathbf{P}_1 \otimes B_1^* \vec{U}_0^1 + \bar{\mathbf{P}}_2 \otimes B_2^* \vec{U}_0^1 = 0,$$

Матрицы  $\hat{M}$  и  $A_j$  самосопряженные и строго положительно определенные, поэтому для них определены  $\hat{M}^{\pm 1/2}$  и  $A_j^{\pm 1/2}$ . Применяя замену переменных  $\vec{W}^m = \hat{M}^{1/2} \otimes A_1^{1/2} \vec{U}_0^m$  и  $\vec{\Phi}^m = \hat{M}^{1/2} \otimes A_2^{1/2} \vec{\Sigma}_0^m$ , систему можно переписать в виде:

$$i\omega h \vec{W}^1 - \mathbf{R}_1 \otimes C_1 \vec{\Phi}^1 + \mathbf{R}_2 \otimes C_2 \vec{\Phi}^1 + \bar{\mathbf{T}}_1 \otimes C_1 \vec{\Phi}^2 - \mathbf{T}_2 \otimes C_2 \vec{\Phi}^2 = 0,$$

$$i\omega h \vec{W}^2 + \mathbf{R}_1 \otimes C_1 \vec{\Phi}^2 - \mathbf{R}_2 \otimes C_2 \vec{\Phi}^2 - \mathbf{T}_1 \otimes C_1 \vec{\Phi}^1 + \bar{\mathbf{T}}_2 \otimes C_2 \vec{\Phi}^1 = 0,$$

(4.13)

$$i\omega h \vec{\Phi}^1 - \mathbf{R}_1 \otimes C_1^* \vec{V}^1 + \mathbf{R}_2 \otimes C_2^* \vec{V}^1 + \bar{\mathbf{T}}_1 \otimes C_1^* \vec{V}^2 - \mathbf{T}_2 \otimes C_2^* \vec{V}^2 = 0,$$

$$i\omega h \vec{\Phi}^2 + \mathbf{R}_1 \otimes C_1^* \vec{V}^2 - \mathbf{R}_2 \otimes C_2^* \vec{V}^2 - \mathbf{T}_1 \otimes C_1^* \vec{V}^1 + \bar{\mathbf{T}}_2 \otimes C_2^* \vec{V}^1 = 0,$$

где

$$\mathbf{R}_m = M^{-1/2} [\mathbf{K}_m] M^{-1/2},$$

$$\mathbf{T}_m = M^{-1/2} \mathbf{P}_m M^{-1/2},$$

$$C_m = A_1^{-1/2} \tilde{B}_m A_2^{-1/2}.$$

Фазовые скорости плоских волн - решений рассматриваемой системы - являются собственными значениями полученной матрицы. Для решения задачи на собственные

значения матрицу следует упростить:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_1 \otimes C_1 + \mathbf{R}_2 \otimes C_2 & \bar{\mathbf{T}}_1 \otimes C_1 - \mathbf{T}_2 \otimes C_2 \\ -\mathbf{T}_1 \otimes C_1 + \bar{\mathbf{T}}_2 \otimes C_2 & \mathbf{R}_1 \otimes C_1 - \mathbf{R}_2 \otimes C_2 \end{pmatrix}$$

Сопряженная ей матрица представляется в виде:

$$\mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_1^* \otimes C_1^* + \mathbf{R}_2^* \otimes C_2^* & -\mathbf{T}_1^* \otimes C_1^* + \bar{\mathbf{T}}_2^* \otimes C_2^* \\ \bar{\mathbf{T}}_1^* \otimes C_1^* - \mathbf{T}_2^* \otimes C_2^* & \mathbf{R}_1^* \otimes C_1^* - \mathbf{R}_2^* \otimes C_2^* \end{pmatrix}.$$

В силу того что билинейная форма, полученная в результате дискретизации эллиптической части системы уравнений, является кососимметричной, матрицы  $\mathbf{R}_m$  также являются кососимметричными, то есть  $\mathbf{R}_m^* = -\mathbf{R}_m$ . Матрицы  $P_{m,m}$ , из которых формируются матрицы  $\mathbf{T}_j$ , - вещественные симметричные, следовательно  $\mathbf{T}_j^T = \mathbf{T}_j$  или  $\mathbf{T}_j^* = \bar{\mathbf{T}}_j^T = \bar{\mathbf{T}}_j$ . С учетом этих соотношений можно получить:

$$\mathbf{L}^* = - \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_1 \otimes C_1^* + \mathbf{R}_2 \otimes C_2^* & \bar{\mathbf{T}}_1 \otimes C_1^* - \mathbf{T}_2 \otimes C_2^* \\ -\mathbf{T}_1 \otimes C_1^* + \bar{\mathbf{T}}_2 \otimes C_2^* & \mathbf{R}_1 \otimes C_1^* - \mathbf{R}_2 \otimes C_2^* \end{pmatrix}.$$

В результате рассматриваемая система (4.13) может быть записана в виде:

$$\begin{pmatrix} i\omega h I & \mathbf{L} \\ -\mathbf{L}^* & i\omega h I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{W}^1 \\ \vec{W}^2 \\ \vec{\Phi}^1 \\ \vec{\Phi}^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Несложно понять, что для построения частоты как функции волнового вектора достаточно построить сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{L}$ , при этом верно следующее соотношение:

$$\prod_m (\omega^2 h^2 - s_m^2(\vec{k})) = 0, \quad (4.14)$$

где  $s_m$  - сингулярные числа матрицы  $\mathbf{L}$ . Детали построения этого соотношения представлены в [14], [12].

#### 4.3.3.4 Безразмерные переменные

Для проведения дисперсионного анализа используются безразмерные переменные [142]:

$$\begin{aligned} k_1 &= |\vec{k}| \cos(\alpha), & N &= \frac{2\pi}{|\vec{k}|h}, \\ k_2 &= |\vec{k}| \sin(\alpha), & \chi &= \frac{V_P \tau}{h}, \\ \gamma &= V_P/V_S > 1, \end{aligned}$$

где  $N$  - число точек (ячеек) сетки на длину волны,  $\chi$  - число Куранта, используемое для дискретизованной по времени задачи,  $\alpha$  - направление распространения волны. С учетом связи частоты с сингулярными числами матрицы  $\mathbf{T}_j$  и воспользовавшись определением фазовой скорости, можно построить выражения для фазовых скоростей решений:

– Полудискретизованная система

$$V_m^{sd}(N, \alpha, \gamma) = \frac{\omega(s_m)}{|\vec{k}|} = \pm \frac{1}{|\vec{k}|h} s_m(N, \alpha, \gamma) = \pm \frac{N}{2\pi} s_m(N, \alpha, \gamma). \quad (4.15)$$

– Схема с дискретизацией по времени:

$$V_m^{lf}(N, \alpha, \chi, \gamma) = \pm \frac{NV_P}{\pi\chi} \arcsin \left( \frac{\chi}{2V_P} s_m(N, \alpha, \gamma) \right). \quad (4.16)$$

Задача дисперсионного анализа - оценка ошибки фазовой скорости численного решения по отношению к фазовой скорости решения дифференциальной задачи. При этом интерес представляет диапазон "средних" частот, то есть частот/длин волн, при которых дискретизация составляет от 2 до 100 ячеек сетки на длину волны.

#### 4.3.4 Численное исследование дисперсии

Прежде чем переходить к классическому исследованию зависимости численной ошибки от направления распространения и дискретизации, следует отметить, что размерности матриц  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{S}$  равны удвоенному числу степеней свободы в одной ячейке сетки для каждой компоненты вектора скорости. Если в качестве базисных функций используются линейные функции - полиномы первой степени (P1 формулировка), -

то степеней свободы (количество базисных функций) в ячейке три в результате сингулярных чисел рассматриваемой матрицы 12. При использовании полиномов второй степени (Р2 формулировка) независимых сингулярных чисел 24, а в случае Р3 формулировки - 40. Это значит, что наряду с модами, близкими к физическим, то есть теми, которые асимптотически сходятся к решению дифференциальной задачи, имеется большое количество нефизичных решений, которые во многом определяют жесткость условия устойчивости разрывного метода Галеркина [40], [242].

Анализ численной дисперсии разрывного метода Галеркина удобно проводить в сравнении с аналогичным анализом для конечно-разностных схем, и в частности для схем второго и четвертого порядка аппроксимации. Для этих двух схем параметры, аналогичные сингулярным числам в анализе разрывного метода Галеркина, имеют следующий вид:

- для схемы второго порядка [142], [373], [245], [271]:

$$s^{fd2} = 2V \sqrt{\sin^2 \left( \frac{\pi \cos(\alpha)}{N} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi \sin(\alpha)}{N} \right)},$$

- для схемы четвертого порядка [238], [271], [291]:

$$\begin{aligned} s^{fd4} &= 2V \sqrt{\hat{k}_1^2 + \hat{k}_2^2}, \\ \hat{k}_1 &= \frac{9}{8} \sin \left( \frac{\pi \cos(\alpha)}{N} \right) - \frac{1}{24} \sin \left( \frac{3\pi \cos(\alpha)}{N} \right), \\ \hat{k}_2 &= \frac{9}{8} \sin \left( \frac{\pi \sin(\alpha)}{N} \right) - \frac{1}{24} \sin \left( \frac{3\pi \sin(\alpha)}{N} \right). \end{aligned}$$

В этих обозначениях  $V$  используется как для скорости продольной волны, то есть  $V_P$ , так и для обозначения скорости поперечной волны, то есть  $V_S$ , поскольку фазовые скорости плоских волн для схем на сдвинутых сетках вычисляются независимо.

#### 4.3.4.1 Полудискретизованная постановка

Исследование численной дисперсии следует начать с задач, в которых производные по времени не аппроксимированы конечно-разностными операторами. В этом случае ошибка фазовой скорости зависит от числа ячеек сетки на длину волны, направле-

ния распространения и отношения скоростей волн в дифференциальной задаче и не зависит от дополнительного параметра - числа Куранта.

**Численная анизотропия.** Первым шагом в исследовании численной дисперсии является определение зависимости ошибки от направления распространения, поскольку это дает возможность ограничить дальнейшие исследования только экстремальными направлениями, теми, вдоль которых ошибка максимальна для всех значений прочих параметров. На рис. 4.2 и 4.3 приведены нормированные на себя относительные ошибки фазовых скоростей

$$\varepsilon^{norm}(\alpha, N_0, \gamma_0) = \left| \frac{\varepsilon(\alpha, N_0, \gamma_0)}{\max_{\alpha \in [0, 2\pi)} |\varepsilon(\alpha, N_0, \gamma_0)|} \right|,$$

где

$$\varepsilon = 1 - \frac{V_j^{sd}(\alpha, N_0, \gamma_0)}{V_j}$$

для конечно-разностных схем и разрывного метода Галеркина разного порядка точности соответственно. Индекс  $j$  обозначает вид рассматриваемой волны и может принимать значения  $P$  или  $S$ .

В случае конечно-разностных схем приводится ошибка только для одной из волн, поскольку для второй волны она аналогична, поскольку конечно-разностные продольные и поперечные волны разделяются так же, как решения дифференциальной задачи [245]. Более того, можно легко показать аналитически, что экстремальные направления, вдоль которых достигается максимум ошибки фазовой скорости для конечно-разностных схем, это направления вдоль осей координат, то есть  $\alpha = n\pi/2$ , где  $n$  - целое, что подтверждается рис. 4.2. При рассмотрении дисперсионной ошибки в разрывном методе Галеркина необходимо учитывать как ошибку продольных, так и поперечных волн, поскольку в дискретизованной задаче они уже не разделяются и, как следствие, задача не может быть сведена к скалярной. На рис. 4.3 видно, что максимум ошибки фазовой скорости достигается в направлениях  $\alpha = \pi/4 + n\pi$ , что обусловлено геометрией используемой сетки (рис. 4.1).

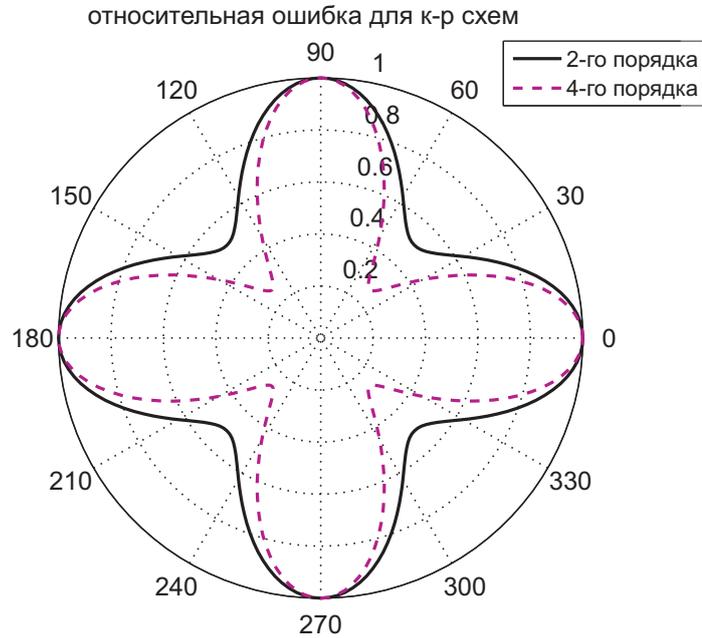


Рисунок 4.2 – Относительная ошибка фазовых скоростей, нормированная на себя, для стандартной схемы на сдвинутых сетках второго (сплошная линия) и четвертого порядка (пунктирная линия) аппроксимации по пространству при  $N = 7$  и  $\gamma = \sqrt{2}$

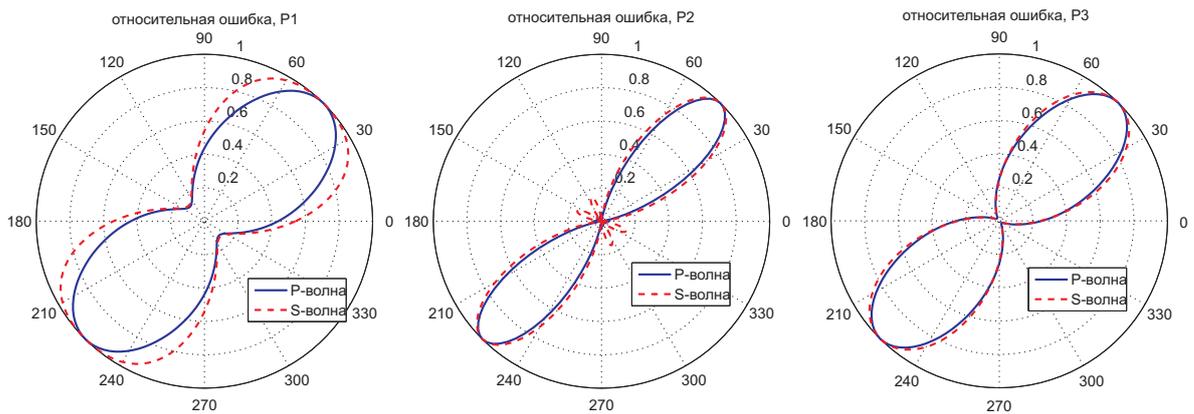


Рисунок 4.3 – Относительная ошибка фазовых скоростей, нормированная на себя, для разрывного метода Галеркина разного порядка. Сплошные синие линии соответствуют ошибке для P-волны, пунктирные - S-волне,  $N = 7$  и  $\gamma = \sqrt{2}$

**Зависимость от отношения  $V_P/V_S$ .** При использовании конечно-разностных схем на сдвинутых сетках для аппроксимации системы уравнений динамической теории упругости в случае изотропной среды дисперсионное соотношение распадается на независимые сомножители, отвечающие разным типам волн. При использовании разрывного метода Галеркина такого разделения не происходит, и фазовые скорости численных решений - плоских волн - зависят от отношения скоростей  $\gamma = V_P/V_S$  дифференциальной задачи. Здесь численно исследуется зависимость ошибки фазовых скоростей от  $\gamma$  для фиксированного направления  $\alpha = \pi/4$  и шага сетки. Фиксация шага сетки означает, что для волны одного типа дискретизация в терминах числа ячеек сетки на длину волны фиксируется, для волны другого типа дискретизация меняется в зависимости от изменения параметра  $\gamma$ . Из физических соображений [263], интервал, в котором изменяется отношение скоростей продольной и поперечной волн, достаточно ограничить значениями  $\gamma \in [\sqrt{3}, 10]$ . В зависимости от того, для какой из волн дискретизация фиксируется, рассматриваются два разных случая для каждой из формулировок (P1 - P3) разрывного метода Галеркина. В первом случае предполагается, что число ячеек сетки на длину волны фиксировано для S-волны ( $N_s = 5$ ), а для P-волны это число возрастает с ростом параметра  $\gamma$ , то есть  $N_p \in [8.66; 50]$ . Тогда ошибка для S-волны зависит исключительно от параметра  $\gamma$ , в то время как для P-волны - от параметра  $\gamma$  и дискретизации. Во втором случае фиксируется дискретизация для P-волны на уровне  $N_p = 50$ , а дискретизация для S-волны уменьшается с ростом параметра  $\gamma$  так, что  $N_s \in [28.87; 10]$ . Зависимость ошибки фазовых скоростей от параметра  $\gamma = V_P/V_S$  для разрывного метода Галеркина с использованием полиномов разной степени в качестве базисных функций приведена на рис. 4.4-4.6. Из анализа приведенных графиков следует, что ошибка фазовой скорости P-волны не зависит от рассматриваемого параметра  $\gamma = V_P/V_S$ . Для S-волны ошибка достаточно быстро нарастает при росте  $\gamma$  в окрестности  $\gamma = \sqrt{3}$ , но потом выходит на асимптотику.

**Численная дисперсия.** Численная дисперсия - это ошибка фазовой скорости в зависимости от дискретизации (числа точек, ячеек или степеней свободы на длину волны). В силу того, что для разрывного метода Галеркина ошибка фазовой скоро-

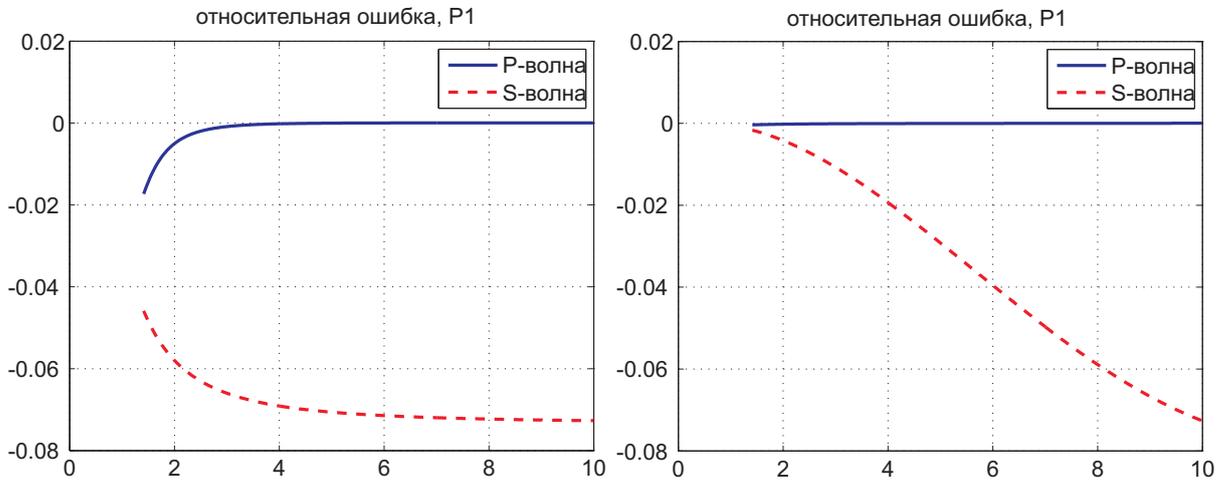


Рисунок 4.4 – Относительная ошибка фазовых скоростей в зависимости от параметра  $\gamma = V_P/V_S$  для P1 формулировки метода Галеркина. Слева - для случая фиксированной дискретизации для S-волны, справа - для P-волны.

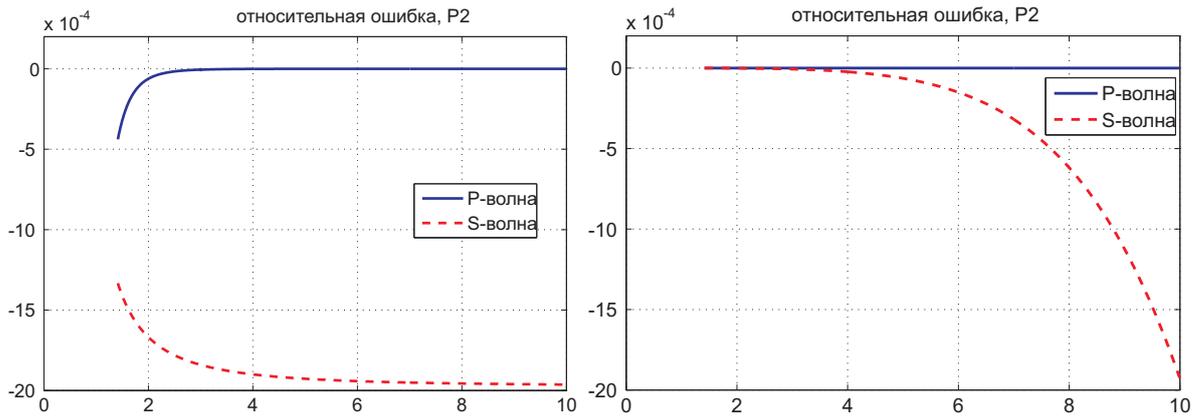


Рисунок 4.5 – Относительная ошибка фазовых скоростей в зависимости от параметра  $\gamma = V_P/V_S$  для P2 формулировки метода Галеркина. Слева - для случая фиксированной дискретизации для S-волны, справа - для P-волны.

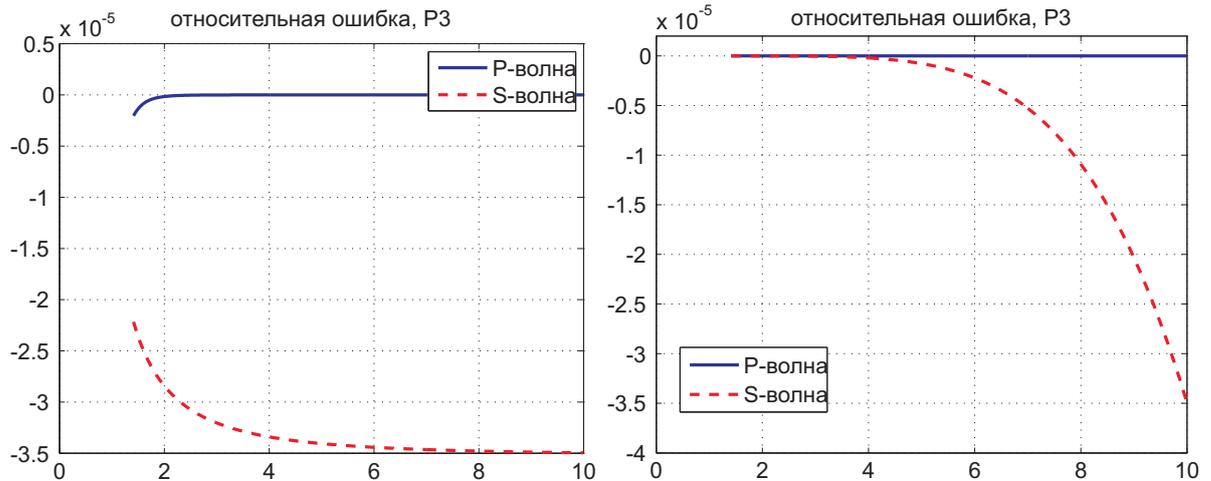


Рисунок 4.6 – Относительная ошибка фазовых скоростей в зависимости от параметра  $\gamma = V_P/V_S$  для P3 формулировки метода Галеркина. Слева - для случая фиксированной дискретизации для S-волны, справа - для P-волны.

сти достигает своего максимума при распространении волны в направлении  $\alpha = \pi/4$ , именно для этого направления проводится исследование численной дисперсии. Для корректного сравнения численной дисперсией метода Галеркина и метода конечных разностей (стандартная схема на сдвинутых сетках второго и четвертого порядка аппроксимации по пространству [373], [238]) для последнего ошибка приводится в направлении  $\alpha = 0$ . Отношение скоростей  $V_P$  к  $V_S$  составляет  $\sqrt{3}$ . Так как зависимость ошибки от отношения скоростей неярко выражена, результаты можно считать достаточно общими. Согласно графикам зависимости численной дисперсии от числа ячеек сетки на длину волны (рис. 4.7-4.9, слева), все три рассматриваемые формулировки метода Галеркина допускают более низкий уровень численной дисперсии, чем схема второго порядка аппроксимации. Однако в сравнение со схемой четвертого порядка метод Галеркина, основанный на полиномах первой степени, допускает более высокий уровень ошибки.

Важным отличием метода Галеркина от метода конечных разностей является наличие более чем одной степени свободы на ячейку сетки, как следствие, необходимость хранения большего объема данных и выполнения большего числа арифметических операций. Поэтому корректным является сравнение численной дисперсии не по отношению к числу ячеек сетки на длину волны, а по отношению к числу степеней свободы на длину волны. Для рассматриваемой регулярной (квадратной) сетки

каждая ее ячейка сформирована из двух прямоугольных треугольников, в каждом из которых число степеней свободы определяется по формуле  $r = (p + 1)(p + 2)$ , где  $p$  - порядок полиномов, используемых в качестве базисных функций. В результате для полиномов первого порядка число степеней свободы (dof - от английского degrees of freedom) составляет 6, для второго порядка 12, для третьего порядка 20. Учитывая, что приведенные значения относятся к квадратной ячейке, а дисперсия измеряется по отношению к линейным размерам, связь между линейным размером ячейки - шагом сетки - и числом степеней свободы для рассматриваемых формулировок метода Галеркина определяется как корень квадратный из приведенных значений, то есть  $N_d = N\sqrt{d}$ , где  $N$  - число ячеек на длину волны,  $d$  - число степеней свободы в ячейке сетки,  $N_d$  - число степеней свободы на длину волны.

Из зависимости численной дисперсии от числа степеней свободы на длину волны (рис. 4.7-4.9, справа) видно, что метод Галеркина, использующий полиномы первого порядка допускает самый высокий уровень численной дисперсии - выше чем схема второго порядка аппроксимации. Повышение порядка полиномов в методе Галеркина до второго существенно снижает численную ошибку, хотя она все еще выше, чем для схемы четвертого порядка. Метод Галеркина, основанный на полиномах третьего порядка, является наименее дисперсионным, как и ожидалось, однако эффективность его применения достаточно низкая из-за жесткого условия устойчивости [40], [242].

#### 4.3.4.2 Явная по времени схема

**Зависимость от числа Куранта.** Прежде чем начать численное исследование дисперсии для дискретизованной по времени задачи, следует отметить, что соотношение (4.16) может быть использовано для построения необходимого условия устойчивости. Для устойчивости необходимо, чтобы значения  $\arcsin$  были вещественными. В противном случае система будет допускать решения в виде плоских волн с двумя комплексными фазовыми скоростями с заведомо разными знаками мнимых частей, в результате одна из мод всегда будет неустойчивой. Учитывая это требование, можно

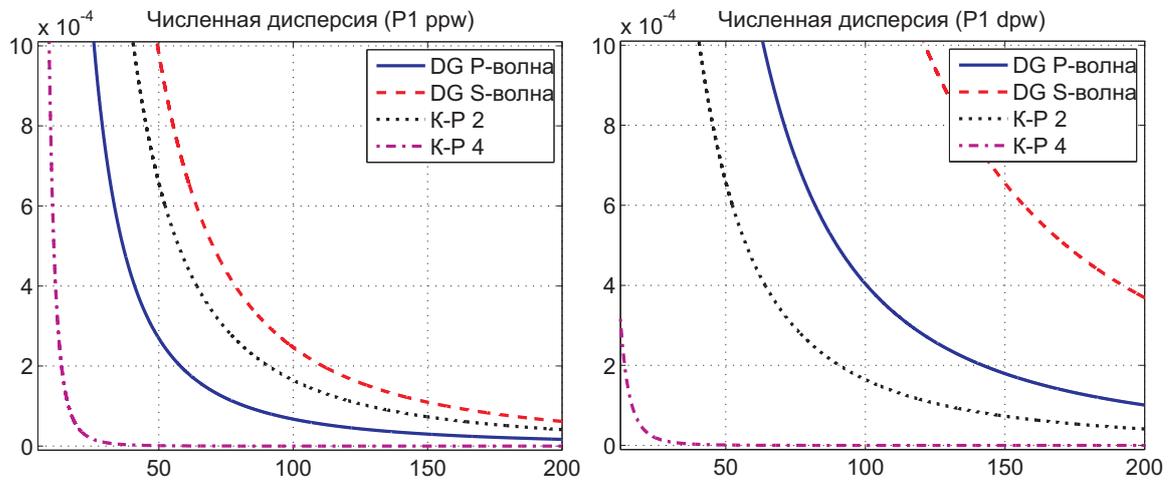


Рисунок 4.7 – Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина первого порядка (сплошная линия соответствует P-волне, пунктирная - S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (слева) и от числа степеней свободы на длину волны (справа)

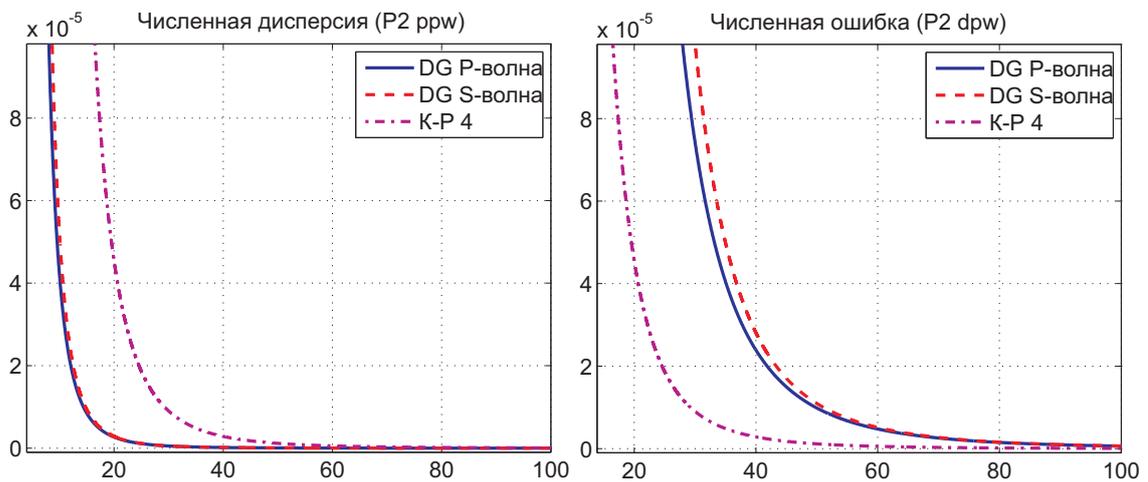


Рисунок 4.8 – Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина второго порядка (сплошная линия соответствует P-волне, пунктирная - S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (слева) и от числа степеней свободы на длину волны (справа)

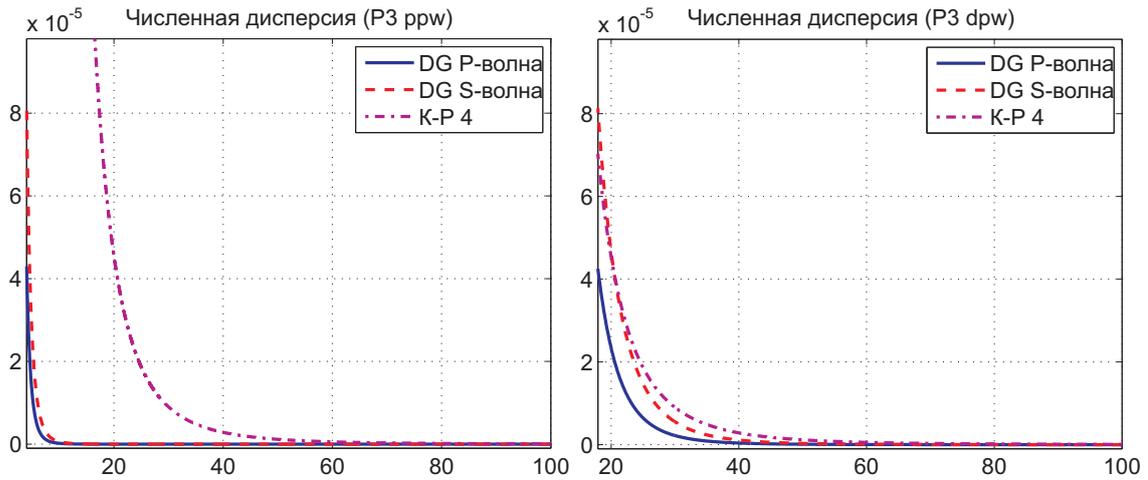


Рисунок 4.9 – Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина третьего порядка (сплошная линия соответствует Р-волне, пунктирная - S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (слева) и от числа степеней свободы на длину волны (справа)

сформулировать необходимое условие устойчивости

$$\chi = \frac{\tau}{h} \leq \frac{2V_P}{\max_m s_m(N, \alpha, \gamma)},$$

где максимум берется по всем сингулярным значениям, включая нефизичные моды, по всем направлениям и всем пространственным дискретизациям. Для конечно-разностных схем такое соотношение задается формулами: для схемы второго порядка -  $\chi \leq \chi_0^{fd2} = 1/\sqrt{2}$ , для схемы четвертого порядка -  $\chi \leq \chi_0^{fd4} = \frac{6}{7\sqrt{2}}$ . Для разрывного метода Галеркина оценки получены численно: для полиномов первой степени -  $\chi \leq \chi_0^{P1} \approx 0.2582$ , для полиномов второй степени -  $\chi \leq \chi_0^{P2} \approx 0.144$  и для полиномов третьей степени -  $\chi \leq \chi_0^{P3} \approx 0.093$ . Однако такие соотношения верны только для сеток с одинаковыми шагами по двум пространственным направлениям. Эти соотношения служат подтверждением того, что разрывный метод Галеркина требует выполнения жесткого условия устойчивости [73], [142], что необходимо учитывать, как при дисперсионном анализе, так и при анализе вычислительной сложности алгоритма.

Далее при исследовании дисперсионной ошибки от числа Куранта для разных пространственных дискретизаций удобно ввести нормализованное число Куран-

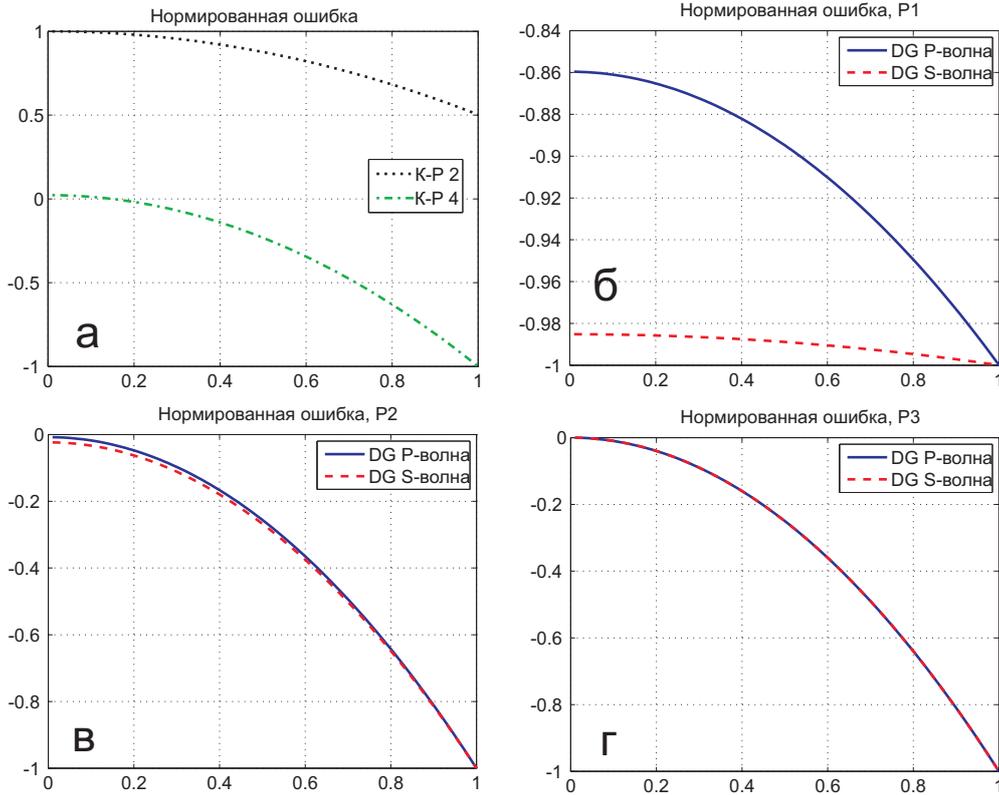


Рисунок 4.10 – Нормированная ошибка фазовой скорости в зависимости от числа Куранта для конечно-разностных схем (а), для метода Галеркина с полиномами первого порядка (б), второго порядка (в) и третьего порядка (г). Сплошная линия соответствует P-волне, пунктирная - S-волне, точки соответствуют схеме второго порядка, точно-пунктирная линия соответствует схеме четвертого порядка.

та  $\hat{\chi} = \chi/\chi_0^*$ , в котором звездочкой обозначается любой из пяти рассматриваемых методов, при этом нормированное число Куранта изменяется в пределах от нуля до единицы. Из нормированных на единицу значений ошибки фазовой скорости в зависимости от нормированного числа Куранта  $\hat{\chi} \in [0, 1]$  для всех рассматриваемых подходов (рис. 4.10) видно, что для схемы второго порядка аппроксимации наибольшее значение ошибки достигает при  $\hat{\chi}$  близких к нулю, а при увеличении  $\hat{\chi}$  величина ошибки снижается. В схемах более высокого порядка пространственной аппроксимации (включая рассматриваемые вариации метода Галеркина) зависимость противоположная. Такие изменения является нормальными для схем, у которых порядок пространственной аппроксимации превосходит порядок аппроксимации по времени.

**Численная дисперсия.** Выполняется анализ численной дисперсии для рассматриваемых методов в зависимости от пространственной дискретизации (от числа яче-

ек сетки на длину волны и от числа степеней свободы на длину волны). Рассматриваются два случая: малые значения чисел Куранта и значения, близкие к единице. Однако случай с малыми числами Куранта близок к изучению дисперсионных свойств метода прямых, и в реальных вычислениях обычно используются как можно большие значения чисел Куранта, чтобы уменьшить вычислительную сложность алгоритма. Поэтому анализ численной дисперсии проводится при фиксированном числе Куранта 0.7. Остальные параметры такие же, как в анализе дисперсионных свойств метода прямых: направления распространения  $\alpha = \pi/4$  - для разрывного метода Галеркина и  $\alpha = 0$  - для конечно-разностных схем; отношение скоростей  $V_P/V_S = \sqrt{3}$ . Из анализа модулей относительной ошибки фазовых скоростей для конечно-разностных схем и для метода Галеркина в зависимости от числа ячеек на длину волны и от числа степеней свободы на длину волны (рис. 4.11-4.13) следует, что результаты, полученные для дискретизованной по времени постановки, согласуются с результатами, соответствующими методу прямых: численная дисперсия в зависимости от числа ячеек сетки на длину волны для разрывного метода Галеркина ниже, чем для стандартных конечно-разностных схем второго и четвертого порядка аппроксимации. При этом, рассмотрение ошибки в зависимости от числа степеней свободы на длину волны показывает, что дисперсия для метода Галеркина с полиномами первого порядка выше, чем у любой из двух конечно-разностных схем. Повышение порядка базисных полиномов до второго в разрывном методе Галеркина приводит к существенному снижению уровня численной дисперсии. Дальнейшее повышение порядка понижает дисперсию, однако несущественно. При это происходит квадратичный рост числа операций на одну степень свободы и существенное усиление необходимого условия устойчивости, что, в свою очередь, приводит к увеличению числа временных слоев и увеличению вычислительной сложности алгоритма. Более того, как следует из анализа графиков численной дисперсии для метода Галеркина на полиномах третьей степени (рис. 4.13), их применение является обоснованным на сетках менее 5 точек на длину волны, в противном случае избыточная точность алгоритма обеспечивается его чрезвычайно высокой вычислительной сложностью и низкой эффективностью. Однако использование столь грубых сеток в геофизике необоснованно, поскольку это является занижением дискретизации модели упругой среды.

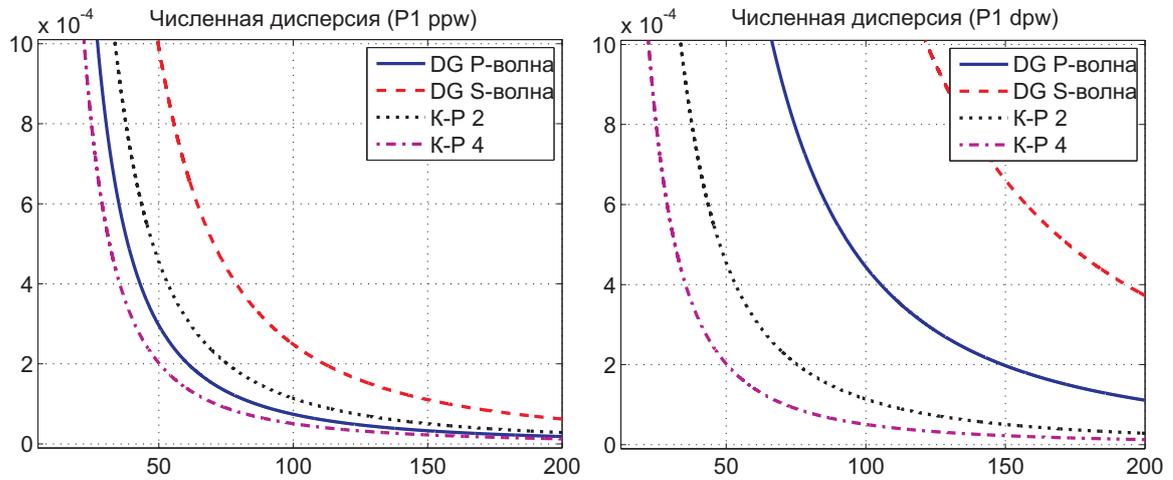


Рисунок 4.11 – Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина первого порядка (сплошная линия соответствует P-волне, пунктирная - S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (слева) и от числа степеней свободы на длину волны (справа). Явная по времени схема

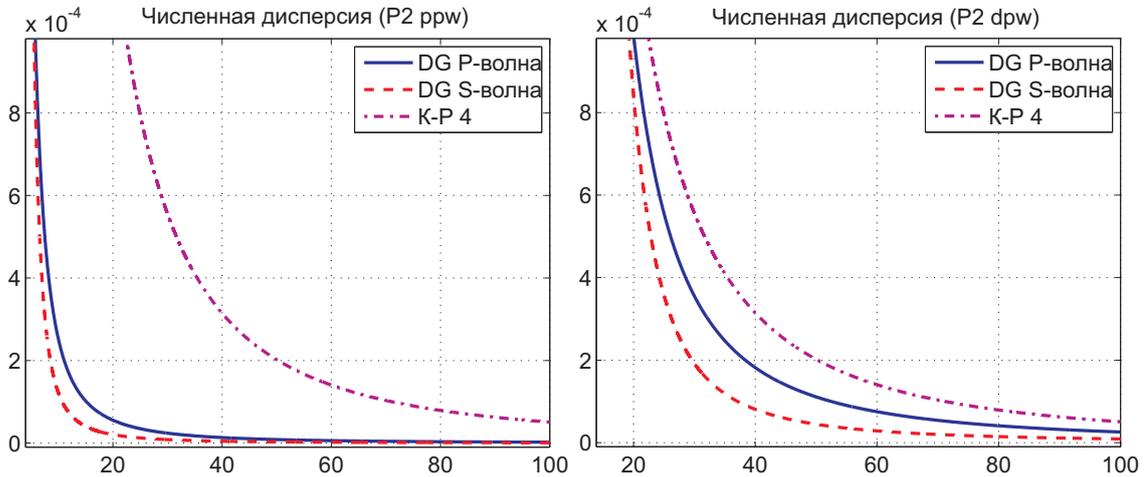


Рисунок 4.12 – Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина второго порядка (сплошная линия соответствует P-волне, пунктирная - S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (слева) и от числа степеней свободы на длину волны (справа). Явная по времени схема

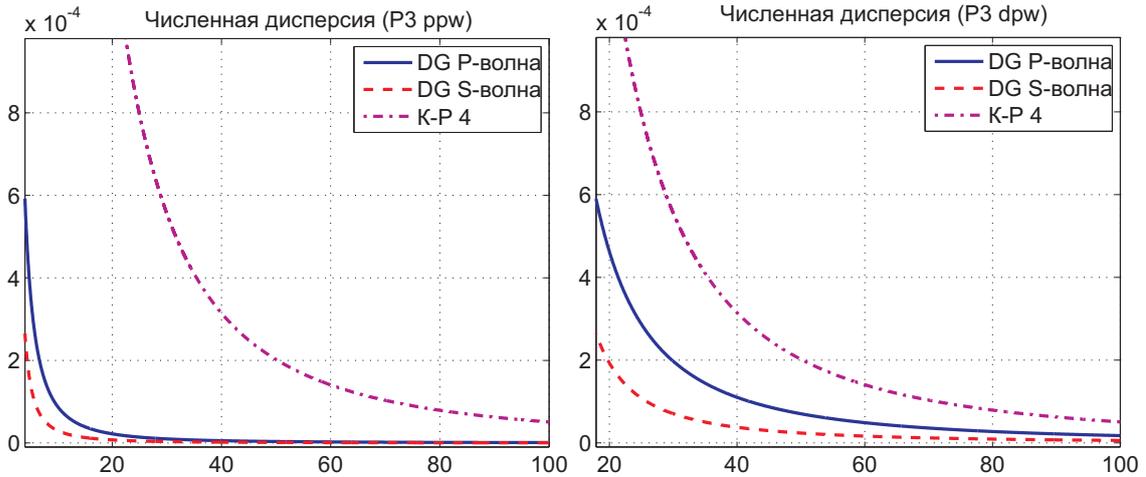


Рисунок 4.13 – Модуль относительной ошибки фазовой скорости для метода Галеркина третьего порядка (сплошная линия соответствует P-волне, пунктирная - S-волне), для схемы второго порядка аппроксимации (точки) и для схемы четвертого порядка (точечно-пунктирная линия) в зависимости от числа ячеек на длину волны (слева) и от числа степеней свободы на длину волны (справа). Явная по времени схема

## 4.4 Разработка метода комбинированием разрывного метода Галеркина и метода конечных разностей

### 4.4.1 Используемые дискретизации

#### 4.4.1.1 Стандартная схема на сдвинутых сетках

Как основной численный метод для моделирования волновых процессов в упругих средах, здесь она приводится для введения обозначений, удобных для комбинирования с разрывным методом Галеркина. Пусть в области  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$  введена сетка с шагами  $h_1$ ,  $h_2$  и  $\tau$  и определены узлы с целыми индексами по правилам  $(x_j)_{i_j} = h_j i_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $t^n = \tau n$  и полуцелыми индексами  $(x_j)_{i_j+1/2} = h_j(i_j + 1/2)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $t^{n+1/2} = \tau(n + 1/2)$ ,

где индексы  $i_j$  и  $n$  - целые. Определив переменные на сетке по правилу:

$$\begin{aligned}(\sigma_{11})_{i_1, i_2}^{n+1/2} &= \sigma_{11}((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2}, t^{n+1/2}), \\(\sigma_{22})_{i_1, i_2}^{n+1/2} &= \sigma_{22}((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2}, t^{n+1/2}), \\(\sigma_{12})_{i_1+1/2, i_2+1/2}^{n+1/2} &= \sigma_{12}((x_1)_{i_1+1/2}, (x_2)_{i_2+1/2}, t^{n+1/2}), \\(u_1)_{i_1+1/2, i_2}^n &= u_1((x_1)_{i_1+1/2}, (x_2)_{i_2}, t^n), \\(u_2)_{i_1, i_2+1/2}^n &= u_2((x_1)_{i_1}, (x_2)_{i_2+1/2}, t^n),\end{aligned}$$

и воспользовавшись конечно-разностными операторами второго порядка:

$$\begin{aligned}D_t[g]_{I_1, I_2}^N &= \frac{g_{I_1, I_2}^{N+1/2} - g_{I_1, I_2}^{N-1/2}}{\tau} = \frac{\partial g(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2})}{\partial t} + O(\tau^2), \\D_1[g]_{I_1, I_2}^N &= \frac{g_{I_1+1/2, I_2}^N - g_{I_1-1/2, I_2}^N}{\tau} = \frac{\partial g(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2})}{\partial x} + O(h_1^2), \\D_2[g]_{I_1, I_2}^N &= \frac{g_{I_1, I_2+1/2}^N - g_{I_1, I_2-1/2}^N}{\tau} = \frac{\partial g(t^N, (x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2})}{\partial x} + O(h_2^2),\end{aligned}\quad (4.17)$$

где  $g$  - достаточно гладкая функция, а индексы, записанные заглавными буквами, могут быть как целыми, так и полуцелыми, можно получить стандартную схему на сдвинутых сетках для системы уравнений динамической теории упругости:

$$\begin{aligned}\rho D_t[u_1]_{i_1+1/2, i_2}^{n+1/2} &= D_1[\sigma_{11}]_{i_1+1/2, i_2}^{n+1/2} + D_2[\sigma_{12}]_{i_1+1/2, i_2}^{n+1/2}, \\ \rho D_t[u_2]_{i_1, i_2+1/2}^{n+1/2} &= D_1[\sigma_{12}]_{i_1, i_2+1/2}^{n+1/2} + D_2[\sigma_{22}]_{i_1, i_2+1/2}^{n+1/2}, \\ s_{11} D_t[\sigma_{11}]_{i_1, i_2}^n + s_{12} D_t[\sigma_{12}]_{i_1, i_2}^n &= D_1[u_1]_{i_1, i_2}^n, \\ s_{12} D_t[\sigma_{11}]_{i_1, i_2}^n + s_{22} D_t[\sigma_{22}]_{i_1, i_2}^n &= D_2[u_2]_{i_1, i_2}^n, \\ s_{33} D_t[\sigma_{12}]_{i_1+1/2, i_2+1/2}^n &= D_1[u_2]_{i_1+1/2, i_2+1/2}^n + D_2[u_1]_{i_1+1/2, i_2+1/2}^n.\end{aligned}\quad (4.18)$$

#### 4.4.1.2 Разрывный метод Галеркина

При построении аппроксимации системы уравнений динамической теории упругости с использованием разрывного метода Галеркина необходимо ввести полигональную сетку  $\mathcal{T}_h$  и обозначить через  $\mathcal{C}_h$ ,  $\mathcal{E}_h$  и  $\mathcal{N}_h$  множество всех ее ячеек, граней и узлов. Умножая систему динамической теории упругости на пробные функции, достаточно гладкие внутри ячейки, но допускающие разрывы на гранях, интегрируя по всем ячейкам, можно получить следующую систему уравнений на коэффициенты

разложения решения по базисным функциям:

$$\begin{aligned}
M \otimes \begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{U}^k \\ \vec{\Sigma}^k \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^2 (K^j) \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_j \\ B_j^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^k \\ \vec{\Sigma}^k \end{pmatrix} - \\
- \frac{1}{2} \sum_{m|V_m \in \mathcal{C}_h(V_k)} P_m^{km} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{km} \\ B_{km}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^m \\ \vec{\Sigma}^m \end{pmatrix} - \\
- \frac{1}{2} \sum_{m|V_m \in \mathcal{C}_h(V_k)} P_k^{km} \otimes \begin{pmatrix} 0 & B_{km} \\ B_{km}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^k \\ \vec{\Sigma}^k \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

где  $\otimes$  обозначает прямое произведение матриц,  $S$  и  $B_j$  - матрицы из дивергентной формы записи системы уравнений динамической теории упругости, а матрицы масс  $M$ , жесткости  $K_j$  и потоков  $P_m^{km}$  и  $P_k^{km}$  определяются соотношениями:

$$(M^k)_{rc} = \int_{V_k} \xi_r^k \xi_c^k dv, \quad (K^{k,j})_{rc} = \int_{V_k} \frac{\partial \xi_r^k}{\partial x_j} \xi_c^k dv, \quad (P_p^{km})_{rc} = \int_{S_{km}} \xi_c^p \xi_r^k ds,$$

индекс  $p$  в обозначениях матриц потоков может принимать значения  $k$  или  $m$ .

#### 4.4.1.3 Схема на несдвинутых сетках

При разработке алгоритма комбинированием разрывного метода Галеркина со стандартной схемой на сдвинутых сетках необходимо также ввести в рассмотрение конечно-разностную схему на несдвинутых сетках. Пусть в области  $\mathbb{R}^2$  задана регулярная прямоугольная сетка  $\mathcal{T}^R$  с ячейками

$$\mathcal{C}^R = [h_2(\tilde{i}_1 - 1/2), h_1(\tilde{i}_1 + 1/2)] \times [h_2(\tilde{i}_2 - 1/2), h_2(\tilde{i}_2 + 1/2)].$$

Несложно показать [120], что на такой сетке разрывный метод Галеркина с константами в качестве базисных и тестовых функций эквивалентен методу конечных объемов [63], [121], [107], [71], который, в свою очередь, совпадает с консервативными конечно-разностными схемами [53], [249], [289], что видно на примере одного из уравнений системы:

$$\rho \frac{d(u_1)_{\tilde{i}_1, \tilde{i}_2}}{dt} = \frac{(\sigma_{11})_{\tilde{i}_1+1, \tilde{i}_2} - (\sigma_{11})_{\tilde{i}_1-1, \tilde{i}_2}}{2\tilde{h}_1} - \frac{(\sigma_{12})_{\tilde{i}_1, \tilde{i}_2+1} - (\sigma_{12})_{\tilde{i}_1, \tilde{i}_2-1}}{2\tilde{h}_2}.$$

Чтобы привести обозначения в соответствие с используемыми для стандартной схемы на сдвинутых сетках, следует применить замену переменных  $\tilde{x} = 0.5x$ , отображающую узлы с четными номерами в узлы с целыми номерами, а узлы с нечетными индексами - в полуцелые, так что  $i_k = \tilde{i}_k/2$  и  $h_k = 0.5\tilde{h}_k$ , где  $k = 1, 2$ . После чего схема на несдвинутых сетках записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho ID_t[u]_{I_1, I_2}^{n+1/2} &= B_1 D_1[\sigma]_{I_1, I_2}^{n+1/2} + B_2 D_2[\sigma]_{I_1, I_2}^{n+1/2}, \\ SD_t[\sigma]_{I_1, I_2}^n &= B_1^T D_1[u]_{I_1, I_2}^n + B_2 D_2[u]_{I_1, I_2}^n, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где  $n$  - целое, а  $I_1$  и  $I_2$  могут быть как целые, так и полуцелые.

#### 4.4.1.4 Формализованная постановка задачи

Пусть в области  $\Omega = \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq \Gamma(x_1)\}$ , где  $\Gamma(x_1)$  - непрерывная функция своего аргумента, задана система уравнений динамической теории упругости. На границе предполагаются условия на свободной поверхности. Для построения численного решения область  $\Omega$  расщепляется на три непересекающиеся подобласти:

$$\begin{aligned} \Omega_{DG} &= \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}, \Gamma(x_1) \leq x_2 \leq \Gamma^{DG} = X_2^{DG}\}, \\ \Omega_{NSGS} &= \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}, X_2^{DG} \leq x_2 \leq X_2^{FD}\} \\ \Omega_{SSGS} &= \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}, X_2^{FD} \leq x_2\}. \end{aligned}$$

Важным требованием является неравенство  $X_2^{DG} < X_2^{SSGS}$ , обеспечивающее отделенность интерфейсов и ненулевую толщину транзитной зоны  $\Omega^{NSGS}$ . Пусть для определенности  $X_2^{FD} = (i_2^{FD} + 1/2)h_2$  и  $X_2^{DG} = (i_2^{DG} + 1/2)h_2$ , где  $i_2^{FD}$  и  $i_2^{DG}$  - целые. Схематическое представление расщепления расчетной области приведено на рис. 4.14. В каждой из полученных подобластей система уравнений динамической теории упругости аппроксимируется своим методом: в области  $\Omega_{DG}$  применяется разрывный метод Галеркина, в области  $\Omega_{NSGS}$  используется схема на несдвинутых сетках, а в области  $\Omega_{SSGS}$  - стандартная схема на сдвинутых сетках.

Пусть решение известно до момента времени  $t = t^n$ . Для расчета решения на временном слое  $t = t^{n+1/2}$  внутри каждой из подобластей можно использовать соответствующий численный метод, однако требуются дополнительные уравнения для

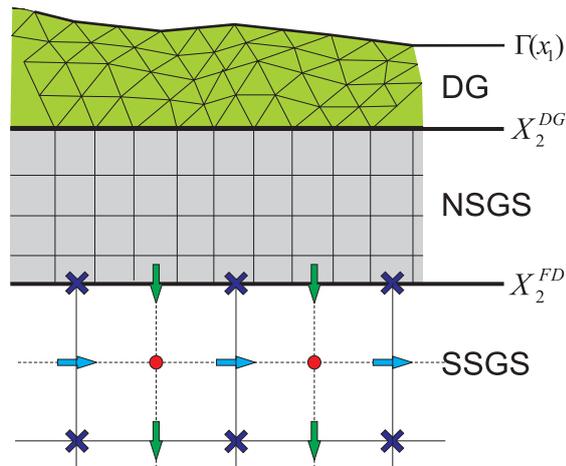


Рисунок 4.14 – Схематическое представление расщепления расчетной области. В зеленой подобласти  $\Omega^{DG}$  применяется разрывный метод Галеркина, в серой области  $\Omega^{NSGS}$  – схема на несдвинутых сетках, в белой подобласти  $\Omega^{SSGS}$  – стандартная схема на сдвинутых сетках

расчета решения непосредственно на границах  $X_2^{DG}$  и  $X_2^{SSGS}$ . В результате могут быть сформулированы две задачи:

**Задача 1.** Пусть решение известно до момента времени  $t = t^N$ , где  $N$  – может быть как целое, так и полуцелое, необходимо вычислить решение в ячейках сетки  $V_k \subseteq \Omega^{DG}$  и  $V_{\tilde{i}_1, \tilde{i}_2} \subseteq \Omega^{NSGS}$  таких, в которых хотя бы одна грань принадлежит интерфейсу  $X_2^{DG}$ .

**Задача 2.** Пусть решение известно до момента времени  $t = t^N$ , где  $N$  – может быть как целое, так и полуцелое, необходимо вычислить решение на линии  $X_2^{FD}$ .

#### 4.4.2 Комбинирование разрывного метода Галеркина и схемы на несдвинутых сетках

Первая из поставленных задач заключается в комбинировании разрывного метода Галеркина на произвольной полигональной сетке со схемой на несдвинутых прямоугольных сетках. При этом схема на несдвинутых сетках эквивалентна методу конечных объемов и разрывному методу Галеркина, определенному на регулярной прямоугольной сетке с константами в качестве базисных функций, [241], [120]. В результате задача комбинирования названных подходов сводится к комбинированию

разных реализаций метода Галеркина - разных базисных функций в соседних ячейках и разной геометрии ячеек. Особенность разрывного метода Галеркина, обусловленная использованием базисных функций, которые могут терпеть разрыв на границах ячеек, позволяет выбирать базис внутри каждой ячейки независимо от соседей, что, в частности, включает в себя полиномы разной степени. Это свойство называется  $p$ -adaptivity. С учетом этого свойства и проводится комбинирование разрывного метода Галеркина с конечно-разностной схемой на несдвинутых сетках. Формулы для такого комбинирования не приводятся, поскольку это частный случай формулы (4.5).

#### 4.4.3 Комбинирование стандартной схемы на сдвинутых сетках со схемой на несдвинутых сетках

Рассматривается граница  $X_2^{FD} = h_2(i_2^{FD} + 1/2)$ , предполагается, что решение известно всюду в  $\mathbb{R}^2$  на всех слоях по времени вплоть до  $t = t^N$ , где  $N = n + 1/2$  - полуцелое (расчет решения с полуцелого на целый слой по времени происходит аналогично). Согласно постановке задачи 2, комбинирование двух рассматриваемых схем сводится к построению формул для вычисления решения непосредственно на границе  $X_2^{FD} = h_2(i_2^{FD} + 1/2)$ . Идея, лежащая в основе алгоритма вычисления решения на интерфейсе, аналогична той, что используется при комбинировании стандартной схемы на сдвинутых сетках и схемы Лебедева [247], [6], [374]. Как показано в работах [93], [41] и [40], схема на несдвинутых сетках может быть представлена как комбинация двух независимых схем Лебедева, так что для одной из них все компоненты тензора напряжений определены в точках с целой суммой пространственных индексов, а скорости компоненты вектора скорости - в точках с полуцелой суммой пространственных индексов, для второй схемы Лебедева роль индексов - противоположная. Кроме того, получаемые конечно-разностные уравнения их решения независимы для двух рассматриваемых схем Лебедева. Данный факт иллюстрируется на рис. 4.15, где приведено расщепление сетки на прямую сумму двух сеток для схем Лебедева. Для дальнейшего описания алгоритма удобно явно ввести две сетки, определяемые

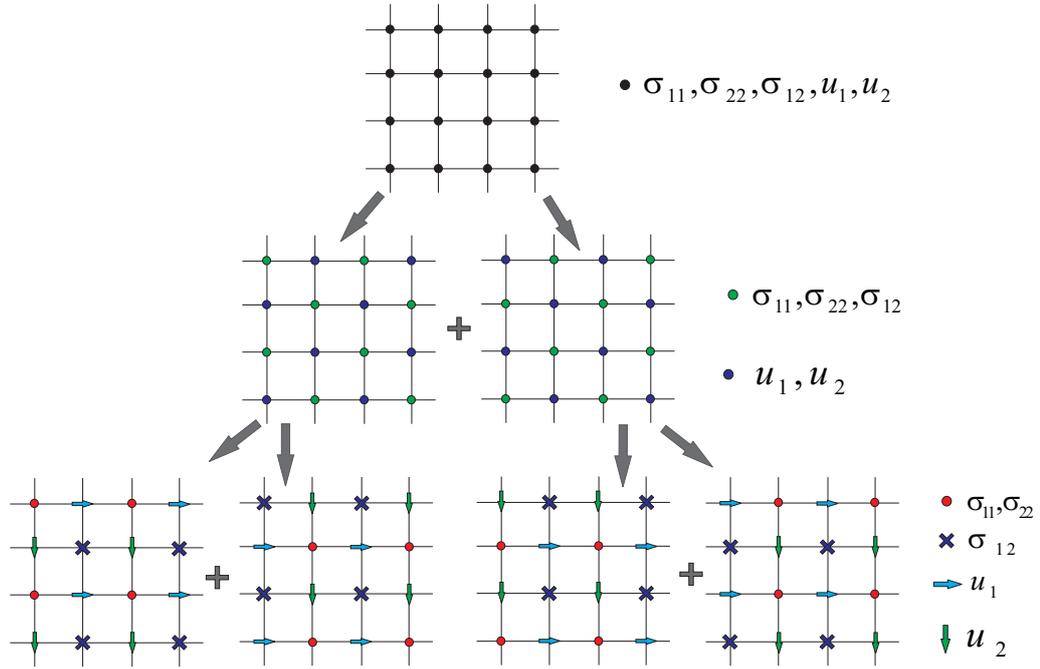


Рисунок 4.15 – Расщепление сетки для схем на несдвинутых сетках на две сетки для независимых схем Лебедева, с последующим расщеплением на две сетки для независимых стандартных схем на сдвинутых сетках.

по правилам:

$$G^i = \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) | I_1 + I_2 \in \mathbb{Z}\}$$

$$G^h = \{((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) | I_1 + I_2 \notin \mathbb{Z}\}$$

где индексы  $I_1$  и  $I_2$  могут быть как целыми, так и полуцелыми. Тогда две схемы Лебедева можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \rho ID_t[u]_{I_1, I_2}^{n+1/2} &= B_1 D_1[\sigma]_{I_1, I_2}^{n+1/2} + B_2 D_2[\sigma]_{I_1, I_2}^{n+1/2}, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in G^i \\ SD_t[\sigma]_{I_1, I_2}^n &= B_1^T D_1[u]_{I_1, I_2}^n + B_2 D_2[u]_{I_1, I_2}^n, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in G^h \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \rho ID_t[u]_{I_1, I_2}^{n+1/2} &= B_1 D_1[\sigma]_{I_1, I_2}^{n+1/2} + B_2 D_2[\sigma]_{I_1, I_2}^{n+1/2}, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in G^h \\ SD_t[\sigma]_{I_1, I_2}^n &= B_1^T D_1[u]_{I_1, I_2}^n + B_2 D_2[u]_{I_1, I_2}^n, & ((x_1)_{I_1}, (x_2)_{I_2}) \in G^i \end{aligned}$$

Согласно результатам, представленным в работе [247], для комбинирования схемы Лебедева со стандартной схемой на сдвинутых сетках необходимо, чтобы коэффициенты отражения/прохождения плоских волн для конечно-разностной задачи сходились к соответствующим коэффициентам задачи дифференциальной. В силу того

что схема на несдвинутых сетках является комбинацией двух независимых схем Лебедева, для ее комплексирования со стандартной схемой можно воспользоваться формулами (2.72), (2.73) со значениями коэффициентов, определяемыми из выражений (2.85) и (2.86). В результате формулы, обеспечивающие второй порядок сходимости, примут вид:

$$\begin{aligned} \rho D_t[u_2]_{i_1, i_2^{F^D+1/2}}^{n+1/2} &= D_1[\sigma_{12}]_{i_1, i_2^{F^D+1/2}} - \frac{1}{14h_2} (\hat{\sigma}_{22}^a + \sigma_{22}^b)_{i_1, i_2^{F^D-1/2}}^{n+1/2} + \\ &- \frac{2}{7h_2} (\hat{\sigma}_{22}^a + \sigma_{22}^b)_{i_1, i_2^{F^D}}^{n+1/2} - \frac{3}{14h_2} (\hat{\sigma}_{22}^a + \sigma_{22}^b)_{i_1, i_2^{F^D+1/2}}^{n+1/2} + \frac{8}{7h_2} (\sigma_{22})_{i_1, i_2^{F^D+1}}^{n+1/2}, \\ \rho D_t[u_1^b]_{i_1, i_2^{F^D+1/2}}^{n+1/2} &= D_1[\sigma_{11}^a]_{i_1, i_2^{F^D+1/2}}^{n+1/2} - \\ &- \frac{4}{3h_2} (\sigma_{12}^b)_{i_1, i_2^{F^D}}^{n+1/2} + \frac{1}{h_2} (\hat{\sigma}_{12})_{i_1, i_2^{F^D+1/2}}^{n+1/2} + \frac{1}{3h_2} (\hat{\sigma}_{12})_{i_1, i_2^{F^D+3/2}}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \rho D_t[u_1^a]_{i_1+1/2, i_2^{F^D+1/2}}^{n+1/2} &= D_1[\sigma_{11}^b]_{i_1+1/2, i_2^{F^D+1/2}}^{n+1/2} - \\ &- \frac{4}{3h_2} (\sigma_{12}^a)_{i_1+1/2, i_2^{F^D}}^{n+1/2} + \frac{1}{h_2} (\sigma_{12})_{i_1+1/2, i_2^{F^D+1/2}}^{n+1/2} + \frac{1}{3h_2} (\sigma_{12})_{i_1+1/2, i_2^{F^D+3/2}}^{n+1/2}, \end{aligned}$$

$$(u_2^a)_{i_1, 1/2} = (u_2)_{i_1, 1/2}, \quad (u_2^b)_{i_1+1/2, 1/2} = (\hat{u}_2)_{i_1+1/2, 1/2}.$$

В этих обозначениях  $i_1$  - целое число. Верхний индекс  $a$  означает, что переменная определена в полуцелых точках по касательному направлению  $x_1$  для схемы на несдвинутых сетках,  $b$  - переменные, определенные в целых точках. Переменные без верхних индексов относятся к стандартной схеме на сдвинутых сетках. Обозначение  $\hat{\phantom{x}}$  используется для значений, полученных в результате интерполяции по касательному направлению. В частности, в разработанном алгоритме интерполяция выполняется на основе быстрого преобразования Фурье. Шаблоны, используемые для расчета решения на интерфейсе, приведены на рис. 4.16-4.18.

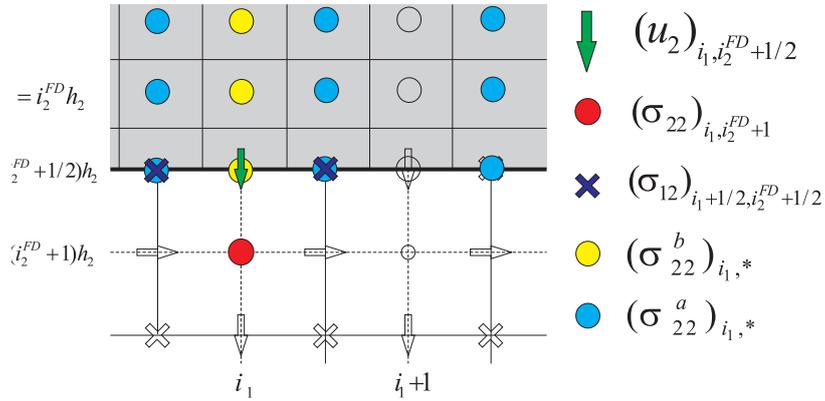


Рисунок 4.16 – Точки сетки для расчета компоненты  $(u_2)_{i_1, i_2^{FD}+1/2}$ .

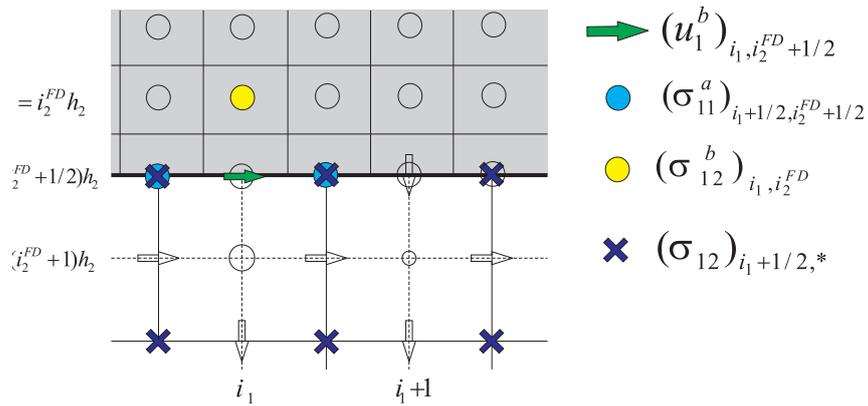


Рисунок 4.17 – Точки сетки для расчета компоненты  $(u_1^b)_{i_1, i_2^{FD}+1/2}$ .

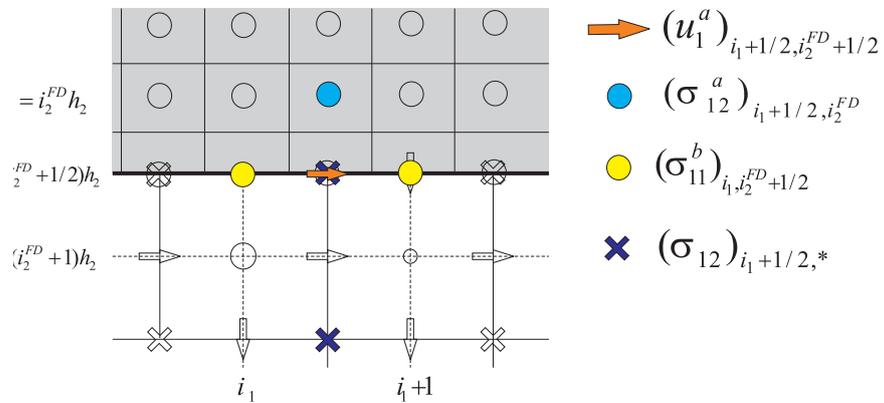


Рисунок 4.18 – Точки сетки для расчета компоненты  $(u_1^a)_{i_1+1/2, i_2^{FD}+1/2}$ .

## 4.5 Численный анализ разработанного метода

### 4.5.1 Исследование коэффициентов отражения

Комбинирование разных численных методов [181], [247] или дискретизаций [144], [145], [233], [252], [243], [154] при численном моделировании волновых процессов неизбежно приводит к появлению нефизичных отражений от границы раздела сеток/методов. Поэтому исследование разработанного алгоритма начинается именно с численного исследования отражений. Для этого выполняется серия численных экспериментов, в которой фиксируются расчетная область, дискретизация для каждого из рассматриваемых численных методов и система наблюдений. При этом система наблюдения всегда состоит из двух линий, расположенных симметрично относительно границы раздела, на которой комбинируются методы (рис. 4.19). Затем для нескольких функций источника, отличающихся частотным составом, моделируются поля с использованием гибридного алгоритма и одного из численных методов, используемых при комплексировании. В результате поле, рассчитанное одним из методов и зафиксированное на линии 2, содержит только проходящие волны с коэффициентом прохождения единица. Поле, рассчитанное гибридным алгоритмом и зарегистрированное на линии 1, содержит отраженные волны. В силу симметрии системы наблюдения в обоих случаях сигнал регистрируется на одинаковом времени и имеет одинаковое геометрическое расхождение, поэтому возможно проводить прямое сравнение амплитуд сигнала на двух записях с последующим расчетом коэффициентов отражения для широкого диапазона углов падения волны.

Исследование коэффициентов отражения для решений обеих рассматриваемых задач проводится отдельно, при этом геометрия расчетной области и система наблюдения одинаковы. Размеры расчетной области - 2000 м как по горизонтали, так и по вертикали. При использовании гибридного алгоритма в качестве границы, на которой проводится комбинирование подходов, рассматривается прямая  $x_2 = 1000$  м. Линии приема -  $x_2 = 750$  м и  $x_2 = 1250$  м. Источник помещается в точку с координатами  $x_1 = 1750$  м и  $x_2 = 500$  м. Такая система наблюдения позволяет избежать интерференции отраженных волн с прямыми волнами на первой линии наблюдения. При этом отражения фиксируются вплоть до углов  $64^\circ$ . Для ограничения расчетной

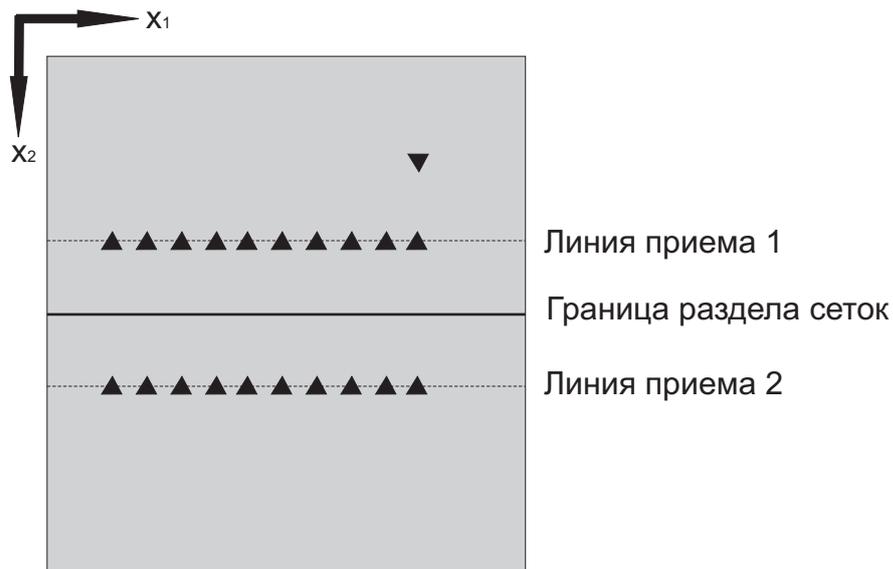


Рисунок 4.19 – Системы наблюдения для численных экспериментов по определению нефизичных коэффициентов отражения.

области используется многосный идеально согласованный слой, представленный в работах [267], [19] и [158]. Параметры модели:  $v_P = 2000$  м/с,  $v_S = 1150$  м/с и  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>. Низкие значения скоростей выбираются для того, чтобы обеспечить близость к типичной скоростной модели верхней части разреза.

Для каждого из рассматриваемых методов дискретизация фиксируется - для обеих конечно-разностных схем используется сетка с шагом два метра по каждому пространственному направлению. Построение треугольной сетки для разрывного метода Галеркина выполняется с использованием программы Triangle (<http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>). При построении сетки на треугольники накладываются условия: минимальный угол  $20^\circ$ , максимальная площадь треугольника  $2 \text{ м}^2$  (половина ячейки сетки для конечно-разностной схемы). Общее число ячеек сетки (в половине расчетной области) для конечно-разностных схем  $5 \cdot 10^5$ , а для метода Галеркина -  $10.1 \cdot 10^5$ , то есть на один процент больше удвоенного числа прямоугольных ячеек, что говорит о низкой доле треугольников с маленькой площадью, то есть сетка достаточно равномерная. Для исследования сходимости коэффициентов отражения волновые поля рассчитываются на фиксированных сетках для двух функций источника - импульса Риккера с центральной частотой 10 и 20 Гц. В результате пространственная дискретизация составляет 25 и 12 точек на длину

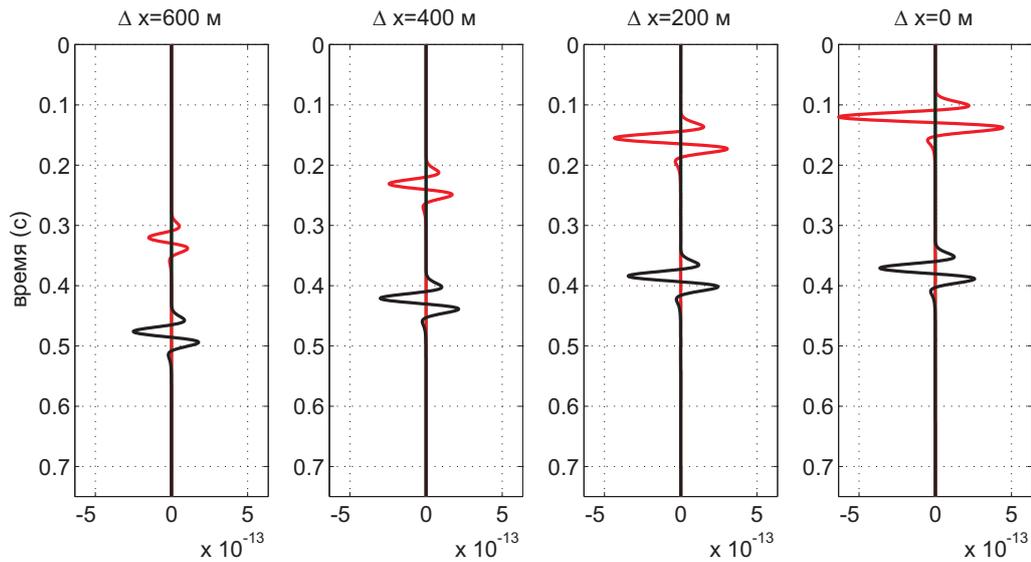


Рисунок 4.20 – Решение на линии 1 (рассчитанное гибридным алгоритмом - красным), решение на линии 2 (рассчитанное методом Галеркина - черным). Частота сигнала 20 Гц

поперечной волны для конечно-разностных схем соответственно.

На рисунках 4.20 и 4.22 приведены решения, зарегистрированные на линии 1 и содержащие нефизичные отражения из-за комбинирования метода Галеркина и схемы на несдвинутых сетках, для сравнения с эталонным решением, зарегистрированным на линии 2 при использовании метода Галеркина во всей расчетной области. Результаты приводятся для двух дискретизаций. Чтобы оценить отражения, на рис. 4.21 и 4.23 приведены те же решения, но с усилением амплитуды в  $10^{-3}$  раз. Детальное сравнение амплитуд показывает, что нефизичные отражения в приведенных экспериментах не превосходят  $5 \cdot 10^{-4}$  для сигнала с частотой 10 Гц и  $2 \cdot 10^{-3}$  для сигнала с частотой 20 Гц. С одной стороны, этот эксперимент подтверждает второй порядок сходимости численного решения, с другой - показывает, что для типичных дискретизаций, используемых при моделировании сейсмических процессов, уровень ошибки приемлемый - порядка  $10^{-3}$ .

Подобная серия экспериментов выполняется для случая комбинирования схемы на несдвинутых сетках и стандартной схемы на сдвинутых сетках. В силу эквивалентности задачи комплексированию схемы Лебедева со стандартной схемой на сдвинутых сетках [247], здесь результаты расчетов не приводятся. Однако при использовании источника с центральной частотой 20 Гц коэффициент отражения для

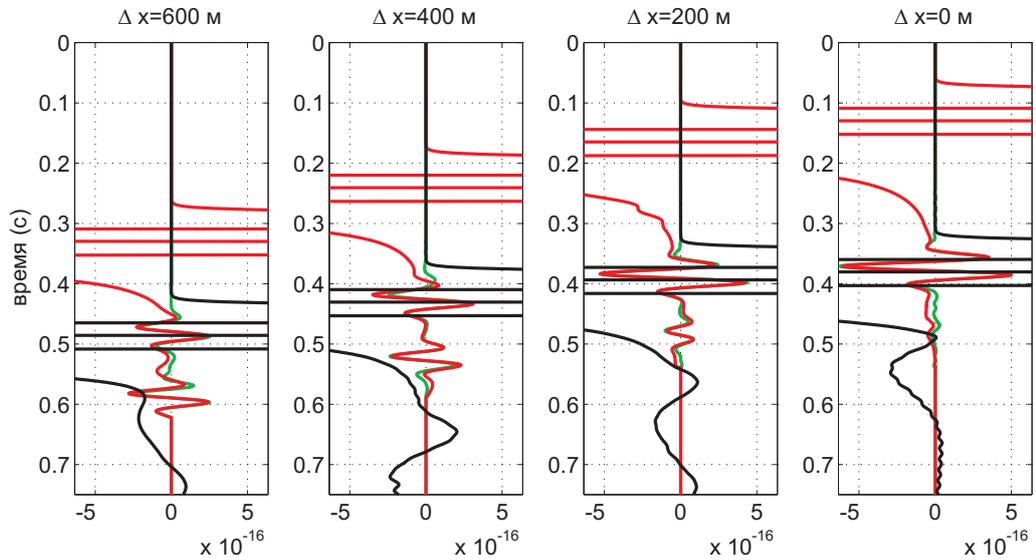


Рисунок 4.21 – Решение с усилением амплитуды на линии 1 (рассчитанное гибридным алгоритмом - красным), решение с усилением амплитуды на линии 2 (рассчитанное методом Галеркина - черным). Частота сигнала 20 Гц

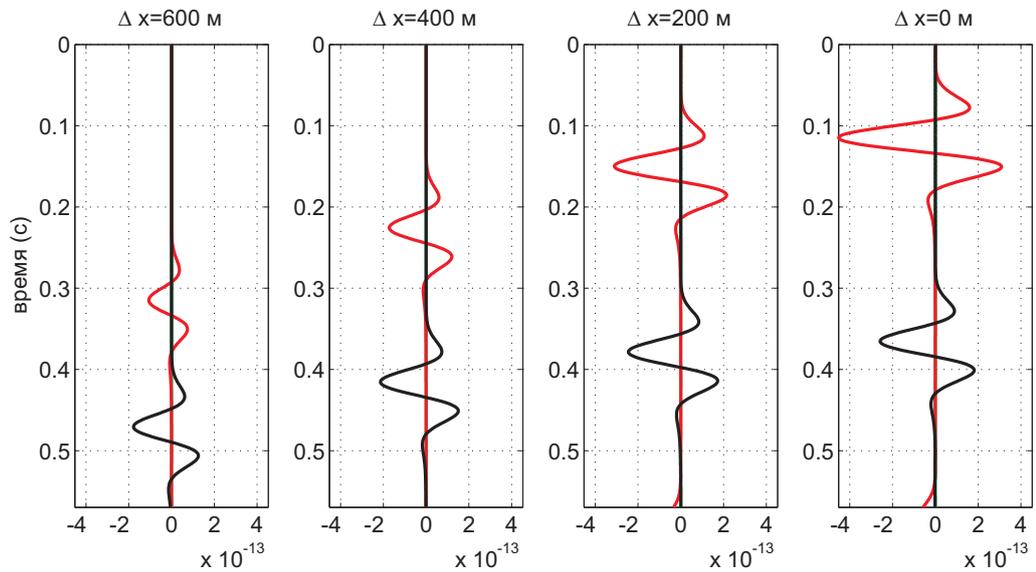


Рисунок 4.22 – Решение на линии 1 (рассчитанное гибридным алгоритмом - красным), решение на линии 2 (рассчитанное методом Галеркина - черным). Частота сигнала 10 Гц

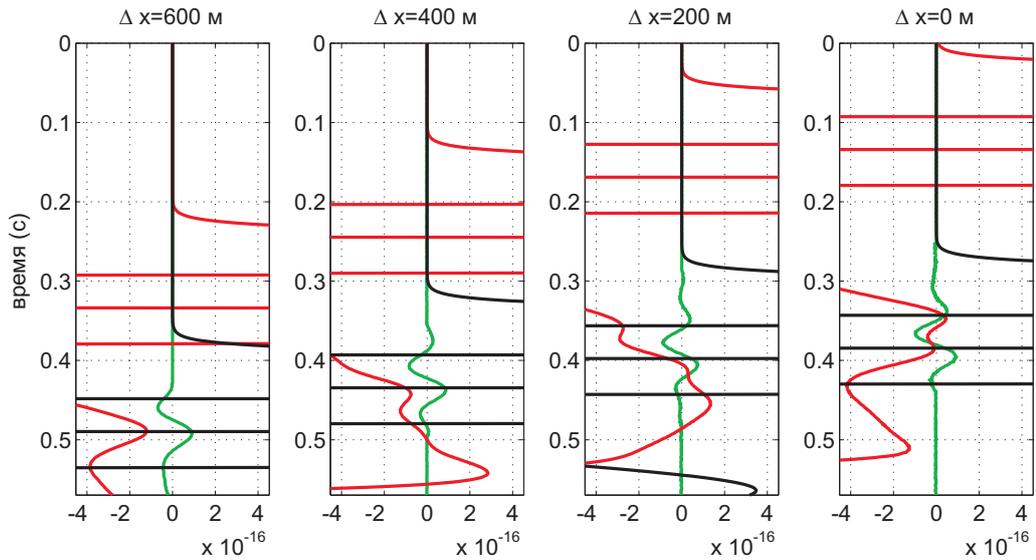


Рисунок 4.23 – Решение с усилением амплитуды на линии 1 (рассчитанное гибридным алгоритмом - красным), решение с усилением амплитуды на линии 2 (рассчитанное методом Галеркина - черным). Частота сигнала 10 Гц

нефизичных решений составляет  $10^{-3}$ , а с частотой 20 Гц, отражения фиксируются на уровне  $5 \cdot 10^{-3}$  от амплитуды падающей волны, что подтверждает второй порядок сходимости и приемлемый уровень нефизичных отражений.

#### 4.5.2 Расчет волновых полей в модели с топографией свободной поверхности

Для иллюстрации применимости разработанного алгоритма для расчета волновых полей выполняется эксперимент по расчету волновых полей в моделях с нерегулярной топографией. В качестве сейсмогеологической модели рассматривается модель среды с плавно меняющейся скоростью, возрастающей с глубиной, в которой содержится один контрастный слой (рис. 4.24). Профиль свободной поверхности, также приведенный на рис. 4.24, характерен для Восточной Сибири. Размер модели составляет 16 км в горизонтальном и 3 км в вертикальном направлении. Источник располагается в точке с координатами  $x_1 = 8145$  м и  $x_2 = -551.95$  м, то есть заглублен на 0.5 м под свободную поверхность, что приводит к формированию высокоамплитудной волны Релея. В качестве функции источника используется импульс Риккера с частотой 20 Гц. Приемники располагаются на свободной поверхности с шагом 20 м.

Минимальное значение скорости поперечных волн в модели составляет 1300 м/с, то есть минимальная длина волны 35 м.

Для описанной модели выполняются три серии численных экспериментов, в которых поле рассчитывается с использованием гибридного алгоритма, с применением только метода конечных разностей и только разрывного метода Галеркина. Для метода Галеркина используется сетка, построенная по описанному выше принципу, с начальной дискретизацией 5 м. Шаг сетки для метода конечных разностей также составляет 5 м. В силу жесткого условия устойчивости для метода Галеркина, во всех экспериментах, включая конечно-разностное моделирование, используется одинаковый шаг по времени  $\tau = 3.125 \cdot 10^{-5}$  с, который удовлетворяет условию устойчивости для разрывного метода Галеркина с использованием полиномов третьей степени в качестве базисных функций.

В первой серии экспериментов расчеты проводятся с использованием гибридного алгоритма. Разрывный метод Галеркина в этом случае применяется при  $x_2 < -470$  м. Эта область составляет 5% от общего размера расчетной области. Число ячеек сетки ( $N_c$ ) для метода Галеркина (треугольников) составляет 186000, в результате число степеней свободы ( $N_f$ ) оценивается значениями 0.56, 1.1, 1.86 миллионов для метода Галеркина, основанного на использовании полиномов первой, второй и третьей степени соответственно. Число ячеек сетки для стандартной схемы на сдвинутых сетках, соответственно и число степеней свободы, составляет 2.2 миллиона. При моделировании замеряется время расчета решения методом конечных разностей и разрывным методом Галеркина. Ниже приводятся абсолютные значения, которые зависят от используемой архитектуры, однако интерес представляет лишь их отношение. Итак, расчет решения методом конечных разностей требует примерно 4000 с, расчет решения методом Галеркина (в верхней части модели) требует 2500, 7000 и 14000 с для полиномов первой, второй и третьей степени, что в 2.9, 3.8 и 4.7 раз больше времени для вычисления решения из расчета на одну степень свободы для P1, P2 и P3 постановок соответственно, чем методом конечных разностей. В этой версии алгоритма матрицы масс, жесткости и потоков хранятся в барицентрических координатах и пересчитываются для каждой ячейки на каждом слое по времени. Такая организация алгоритма делает его экономичным с точки зрения использования машинной памяти,

однако приводит к увеличению времени работы алгоритма.

Во второй серии экспериментов волновые поля рассчитываются методом Галеркина во всей расчетной области. При этом количество ячеек сетки составляет 4.5 миллиона, что соответствует 13.5, 27 и 45 миллионам степеней свободы для P1, P2 и P3 формулировок метода Галеркина. Время расчета решения составляло 52, 124 и 180 тысяч секунд. В результате решение отличается от рассчитанного гибридным методом на величину коэффициентов нефизичных отражений.

Третья серия экспериментов - расчет решения с использованием только метода конечных разностей. При этом для аппроксимации свободной поверхности со сложной топографией используется модель с ячейками сетки выше свободной поверхности, в которых решаются уравнения акустики, что позволяет моделировать распространение волн в воздухе. Расчеты проводятся на сетках с шагом 5, 2, 1.5 и 1 м. Пятиметровый шаг выбирается для того, чтобы можно было установить связь с предыдущими экспериментами, остальные шаги - обеспечивают число степеней свободы, близкое к тому, которое возникает при использовании разрывного метода Галеркина для P1, P2 и P3 формулировок в предыдущей серии экспериментов. Для описанных сеток время счета составляет 3.7, 13, 25 и 44 тысячи секунд.

Из приведенных в таблице 4.1 оценок машинного времени видно, что использование разрывного метода Галеркина существенно более ресурсоемко, чем применение метода конечных разностей. Однако, как следует из анализа сейсмограмм (рис. 4.25), качество конечно-разностного решения, даже при использовании чрезвычайно маленьких шагов по пространству, неудовлетворительное в силу большого количества дифрагированных волн-паразитов, образующихся при взаимодействии волны Релея со ступенчатой аппроксимацией свободной поверхности. При этом использование разрывного метода Галеркина позволяет получать качественные решения при использовании полиномов второй степени и выше (рис. 4.25), однако вычислительная сложность и ресурсоемкость алгоритма, основанного исключительно на методе Галеркина, существенно выше, чем при использовании метода конечных разностей. Комбинирование двух этих подходов позволяет при несущественном увеличении времени вычислений существенно повысить качество расчета волновых полей.

Таблица 4.1 – Количество ячеек сетки ( $N_c$ ), степеней свободы ( $N_f$ ), время расчета  $t$  и ускорение  $t^{DG}/t^H$  при использовании гибридного алгоритма по сравнению с алгоритмом, основанным на использовании только разрывного метода Галеркина. При использовании гибридного алгоритма область, в которой использовался метод Галеркина составляет 5%.

	$N_c$	$N_f$	$t$	$t^{DG}/t^H$
Метод Галеркина P1 формулировка	$4.5 \cdot 10^6$	$13.5 \cdot 10^6$	$52 \cdot 10^3$ с	8
Гибридный метод P1 формулировка	$2.4 \cdot 10^6$	$2.7 \cdot 10^6$	$6.5 \cdot 10^3$ с	-
Метод Галеркина P2 формулировка	$4.5 \cdot 10^6$	$27 \cdot 10^6$	$124 \cdot 10^3$ с	11.27
Гибридный метод P2 формулировка	$2.4 \cdot 10^6$	$3.3 \cdot 10^6$	$11 \cdot 10^3$ с	-
Метод Галеркина P3 формулировка	$4.5 \cdot 10^6$	$45 \cdot 10^6$	$180 \cdot 10^3$ с	12.86
Гибридный метод P3 формулировка	$2.4 \cdot 10^6$	$4.1 \cdot 10^6$	$14 \cdot 10^3$ с	-

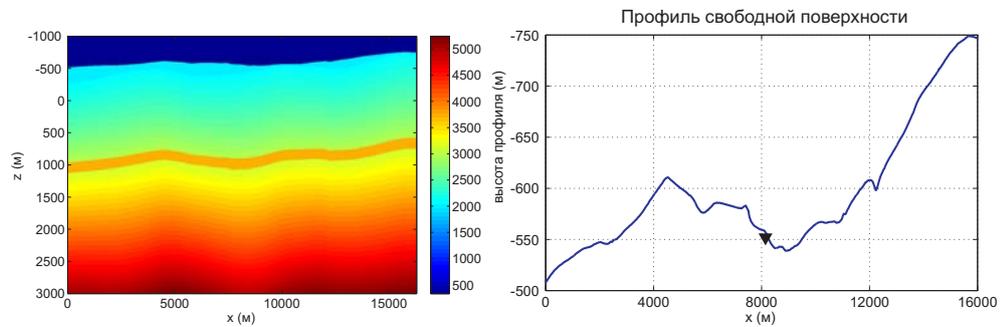


Рисунок 4.24 – Распределение скорости продольной волны в сейсмогеологической модели среды для численных экспериментов (слева), профиль свободной поверхности (справа)

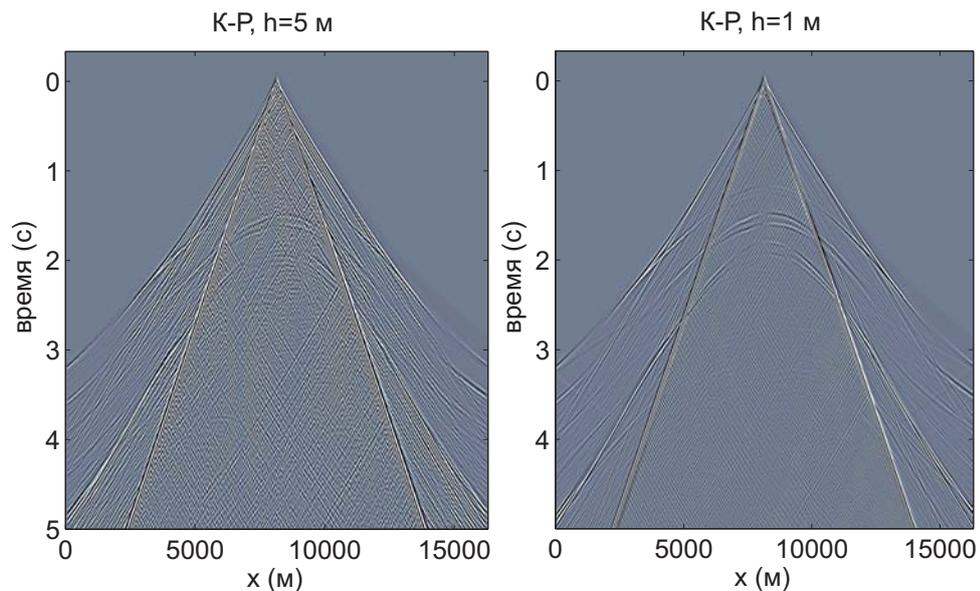


Рисунок 4.25 – Сейсмограммы, рассчитанные с использованием метода конечных разностей на сетке с шагом 5 м (слева) и 1 м (справа).

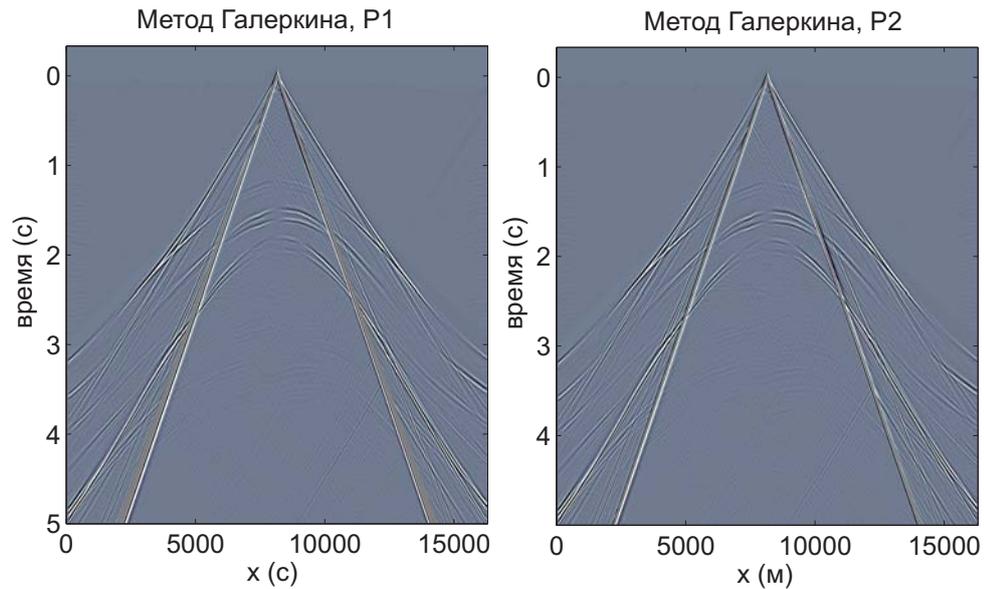


Рисунок 4.26 – Сейсмограммы, рассчитанные разрывным методом Галеркина с использованием полиномов первой (слева) и второй (справа) степени в качестве базисных функций.

## 4.6 Использование алгоритма для определения влияния вариации рельефа свободной поверхности на сейсмические поля

Сейсмический мониторинг в настоящее время является одним из наиболее бурно развивающихся направлений исследования, поскольку теоретически позволяет отслеживать изменения сейсмических и петрофизических параметров пласта в процессе разработки месторождения или при захоронении углекислого газа. Однако важным условием мониторинга является повторяемость условий эксперимента, в частности, положения источников-приемников, формы зондирующего сигнала и пр. Особенно остро выполнение этого условия стоит в пустынных районах, в районах с вечной мерзлотой и ледяным покровом, поскольку и в том, и в другом случае рельеф свободной поверхности и свойства верхней части разреза могут существенно меняться за относительно небольшие промежутки времени - за несколько месяцев. Как показано в работе [284], [27] ошибка в данных наблюдения, проведенных с разницей в несколько месяцев, может достигать 150 %, при этом невязка в ранних вступлениях, связанная исключительно лишь с изменением условий эксперимента, может достигать

60 %, что не позволяет выделить на этом фоне изменчивость в данных, сопряженную с изменениями свойств резервуара. Конечно, на повторяемость сейсмического эксперимента может влиять большое количество факторов, связанных с изменением свойств верхней части разреза, топографии свободной поверхности и пр. Здесь численно исследуется влияние одного из этих факторов - изменение уровня свободной поверхности.

#### 4.6.1 Построение сейсмогеологической модели среды

Построение численной модели для проведения исследования влияния вариации свободной поверхности на повторяемость сейсмических данных разделяется на две составляющие. Во-первых, на основе статистического моделирования определяется геометрия свободной поверхности. Во-вторых, скоростная модель верхней части разреза задается детерминистски.

##### 4.6.1.1 Статистическая модель свободной поверхности

Профиль свободной поверхности представляется в виде суперпозиции плавно меняющейся компоненты и быстро меняющегося возмущения -  $Z(x) = \langle Z(x) \rangle + Z'(x)$ , где  $Z(x)$  - профиль свободной поверхности,  $\langle Z(x) \rangle$  - средний профиль и  $Z'(x, r, \sigma)$  - вариация поверхности. Здесь и далее предполагается, что вариация поверхности задается однородным гауссовским случайным полем. Это поле полностью определяется своим средним и функцией ковариации  $C(r)$ , которая, следуя [275], задается аналитически:  $C(r) = \sigma^2 e^{-\pi r^2 / 4I^2}$ , где  $\sigma$  - стандартное отклонение, или STD (от английского Standard deviation), и  $I$  - длина корреляции.

Для построения среднего профиля и оценки возмущений используются данные с месторождения на Ближнем Востоке (рис. 4.27 и 4.28). Средний профиль строится сплайн-интерполяцией значений исходного профиля с грубой сетки. Причем тренд не является постоянной функцией координаты, а имеет минимум при  $x \approx 300$  м и максимум при  $x \approx 1750$  м. Для оценки стандартного нормального отклонения и длины корреляции возмущений используется метод оценки в бегущем окне [239]. В результате получены "базовые" параметры случайного поля: стандартное отклоне-

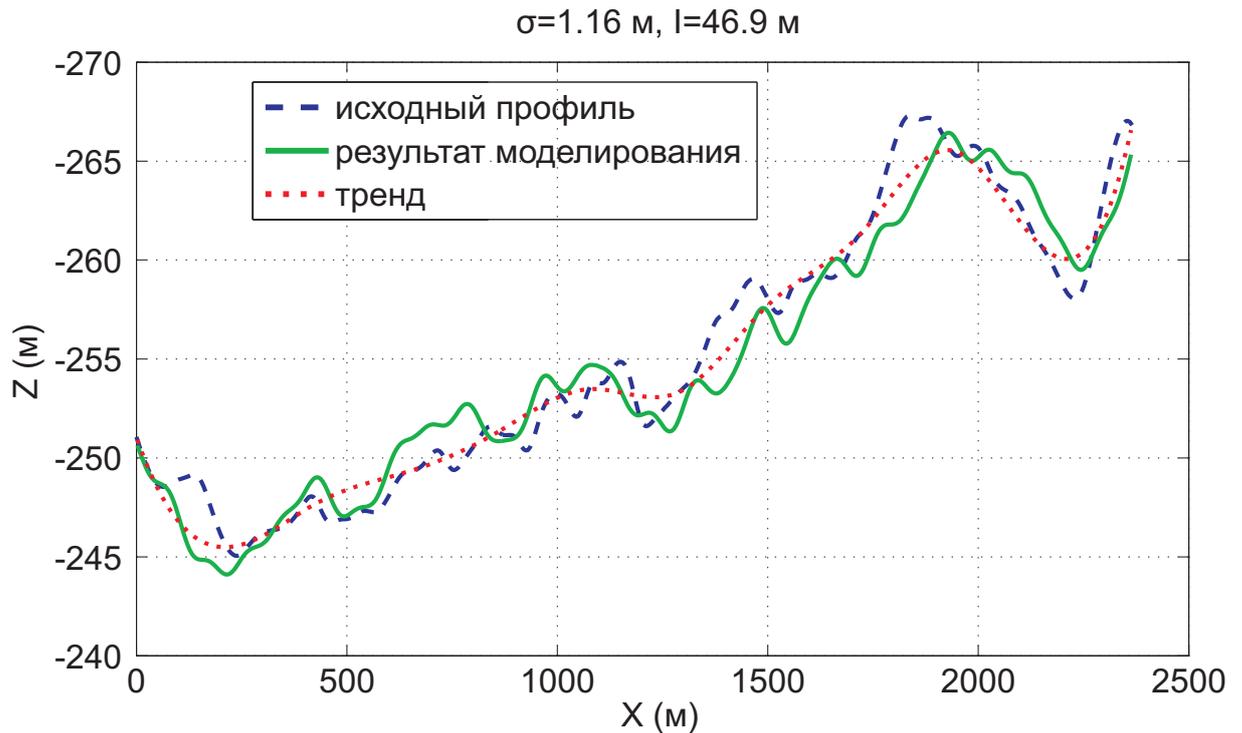


Рисунок 4.27 – Исходный профиль свободной поверхности (пунктиром), средний профиль (точками) и рассчитанный профиль для возмущения с параметрами  $\sigma = 1.16$  м и  $l = 46.9$  м (сплошной линией)

ние  $\sigma_0 = 1.16$  м и длина корреляции  $l_0 = 46.9$  м. При известном тренде и заданных параметрах однородного случайного гауссовского поля разные реализации профилей свободной поверхности могут быть построены на основе подхода, описанного в работе [314]. Примеры профилей свободной поверхности, построенные для двух разных параметров случайного поля, приведены на рис. 4.27 и 4.28.

Поскольку требуется установить связь между возмущением свободной поверхности и возникающей при этом разницей в регистрируемых волновых полях, то возмущения рассматриваются для ряда комбинаций параметров гауссовского случайного процесса. Для стандартного отклонения выбирается пять значений:

$$\sigma_{-2} = 0.25\sigma_0 = 0.29 \text{ м,}$$

$$\sigma_{-1} = 0.5\sigma_0 = 0.58 \text{ м,}$$

$$\sigma_0 = 1.16 \text{ м,}$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_0 = 2.32 \text{ м,}$$

$$\sigma_2 = 4\sigma_0 = 4.64 \text{ м,}$$

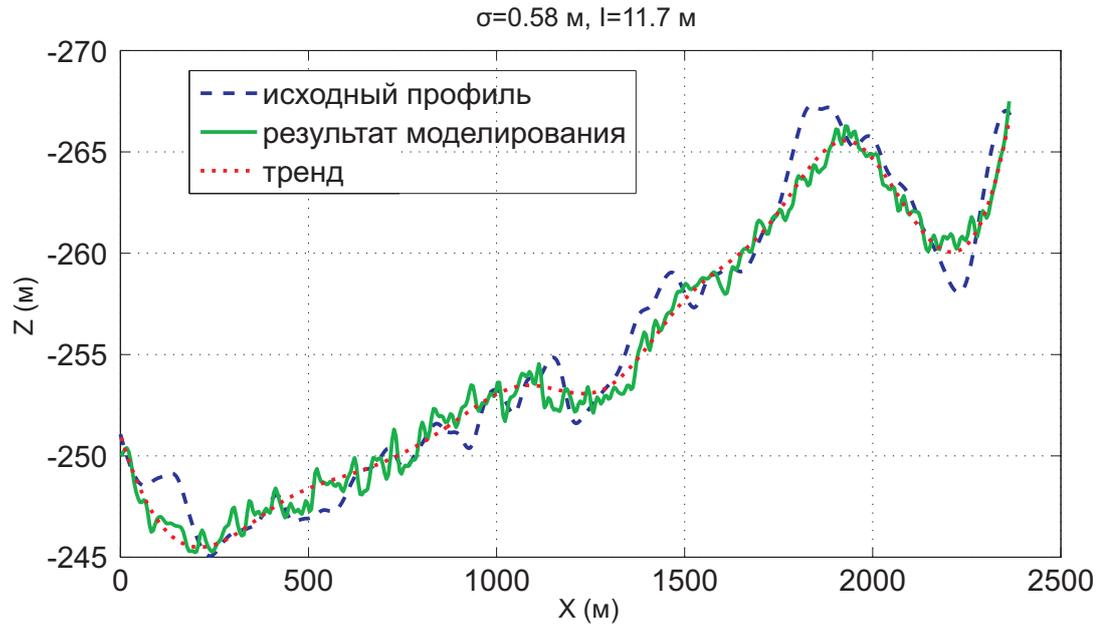


Рисунок 4.28 – Исходный профиль свободной поверхности (пунктиром), средний профиль (точками) и рассчитанный профиль для возмущения с параметрами  $\sigma = 0.58$  м и  $I = 11.7$  м (сплошной линией)

а для длины корреляции - девять:

$$I_{-4} = 2^{-4}I_0 = 2.8 \text{ м,}$$

$$I_{-3} = 2^{-3}I_0 = 5.7 \text{ м,}$$

$$I_{-2} = 2^{-2}I_0 = 11.7 \text{ м,}$$

$$I_{-1} = 2^{-1}I_0 = 23.5 \text{ м,}$$

$$I_0 = 46.9 \text{ м,}$$

$$I_1 = 2^1I_0 = 93.8 \text{ м,}$$

$$I_2 = 2^2I_0 = 187 \text{ м,}$$

$$I_3 = 2^3I_0 = 375 \text{ м,}$$

$$I_4 = 2^4I_0 = 750 \text{ м.}$$

Далее любой набор рассчитанных профилей свободной поверхности для фиксированной пары параметров случайного процесса будет называться "статистической моделью" (всего таких моделей в представленном эксперименте 45), в то время как каждый из получаемых профилей - одна реализация статистической модели.

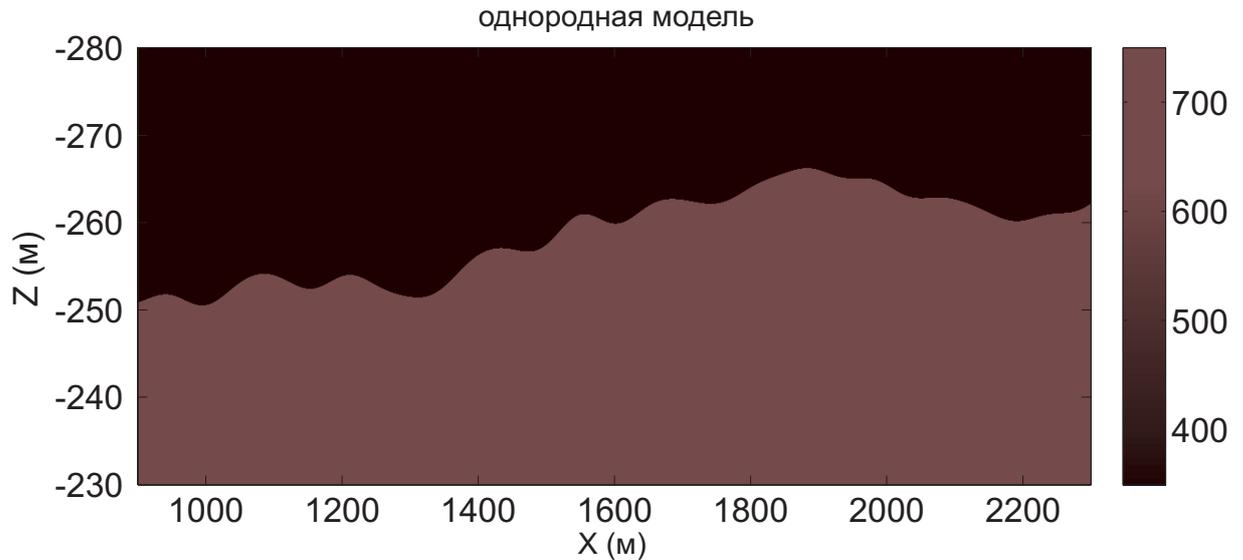


Рисунок 4.29 – Пример строения верхней части однородной модели (скорость продольной волны). Параметры профиля свободной поверхности:  $\sigma = 1.16$  м и  $I = 46.9$  м

#### 4.6.1.2 Скоростная модель

Исследование влияния изменчивости рельефа на сейсмические данные проводится с учетом разного строения верхней части разреза. В частности, рассматриваются четыре модели строения верхней части. В первой - однородной ниже свободной поверхности - среда определяется параметрами  $\rho = 1600$  кг/м<sup>3</sup>,  $V_p = 750$  м/с и  $V_s = 312$  м/с, что соответствует слабо консолидированному песку (рис. 4.29). Вторая модель - двухслойная - отличается от первой наличием одной нерегулярной и достаточно контрастной границы раздела, отделяющей слабо консолидированный песок от более плотной цементированной породы с параметрами  $\rho = 1822$  кг/м<sup>3</sup>,  $V_p = 1200$  м/с и  $V_s = 515$  м/с (рис. 4.30). Третья модель - горизонтально-слоистая - скорость продольной волны в слоях меняется от 750 до 3500 м/с (рис. 4.31). Четвертая модель, полная, соединяет в себе все элементы предыдущих моделей: наличие свободной поверхности, нерегулярной отражающей границы и пачки горизонтальных слоев (рис. 4.32).

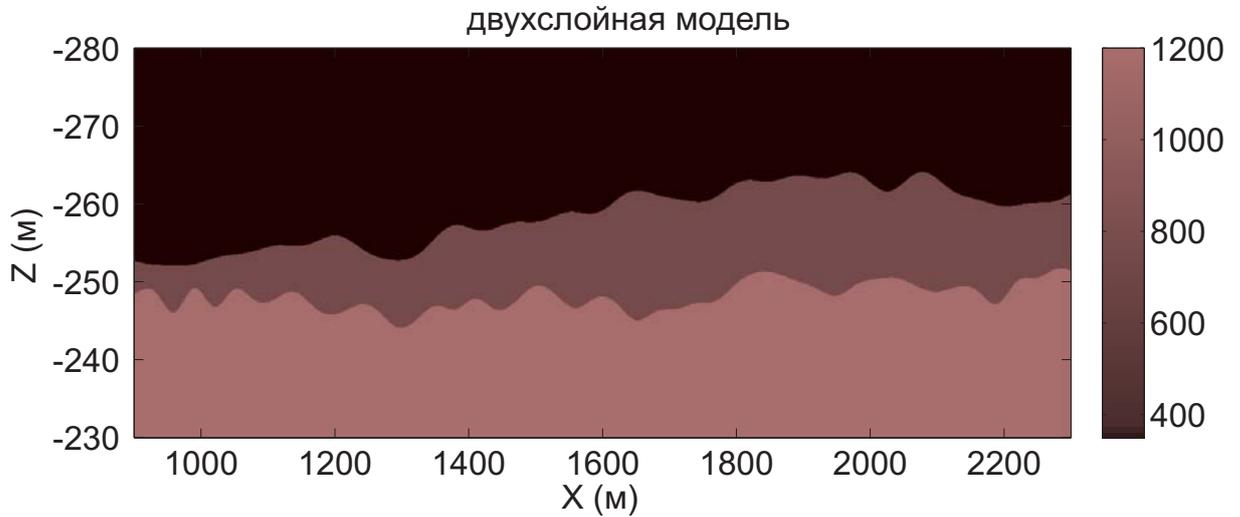


Рисунок 4.30 – Пример строения верхней части двухслойной модели (скорость продольной волны). Параметры профиля свободной поверхности:  $\sigma = 1.16$  м и  $I = 46.9$  м

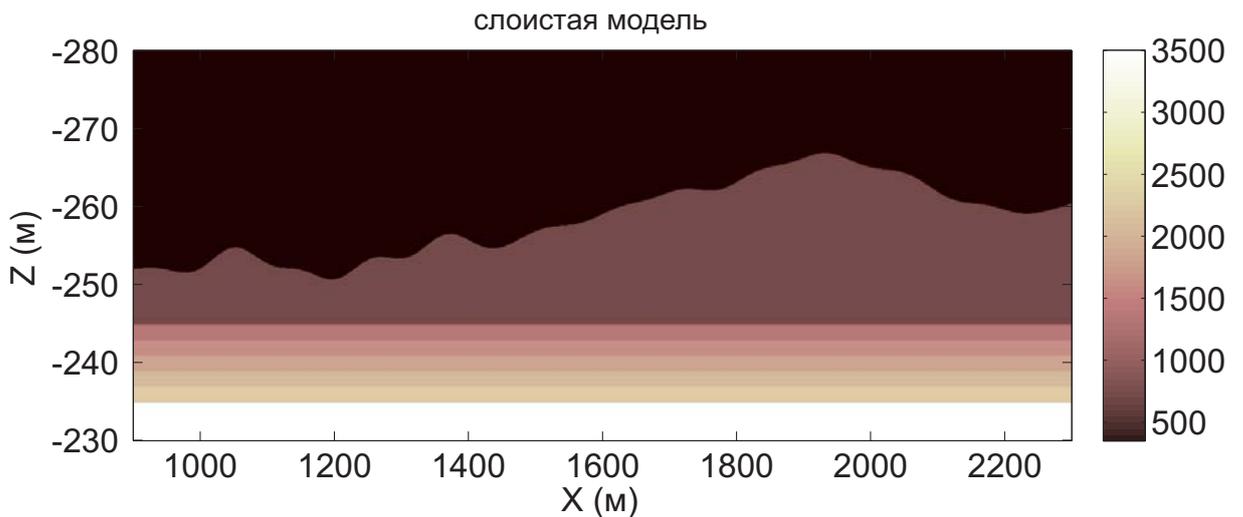


Рисунок 4.31 – Пример строения верхней части слоистой модели (скорость продольной волны). Параметры профиля свободной поверхности:  $\sigma = 1.16$  м и  $I = 46.9$  м

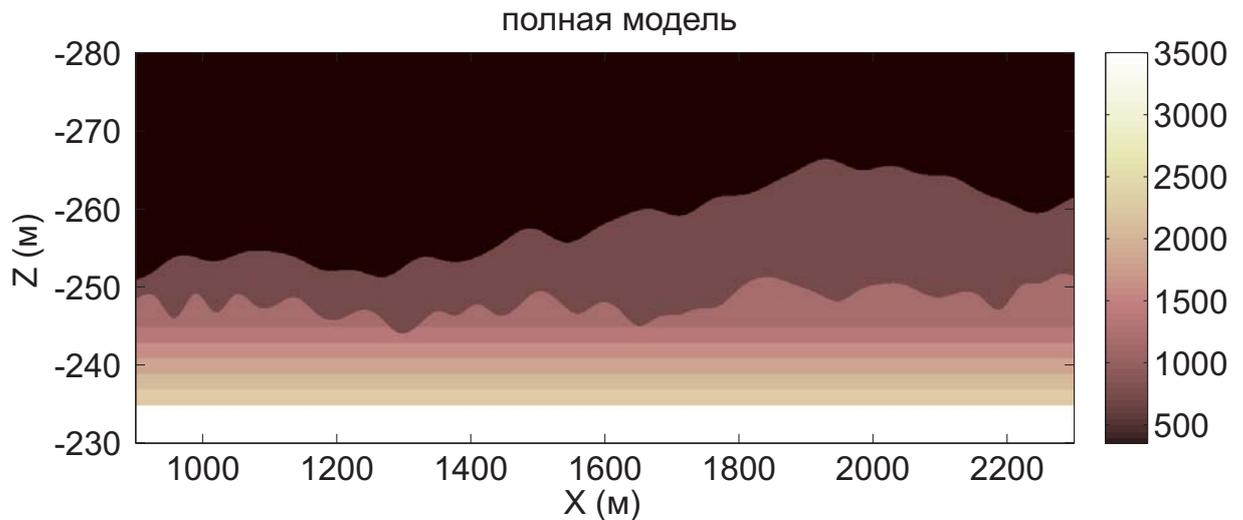


Рисунок 4.32 – Пример строения верхней части полной модели (скорость продольной волны). Параметры профиля свободной поверхности:  $\sigma = 1.16$  м и  $I = 46.9$  м

#### 4.6.1.3 Система наблюдения

Моделируются сейсмические процессы, наблюдаемые на одном из месторождений на Ближнем Востоке [284]. Особенностью экспериментов является использование фиксированных заглубленных приемников, которые располагаются на глубине 30 м под свободной поверхностью с шагом 30 м. При этом используется густая сетка поверхностных источников (шаг 7.5 м по латерали, заглубление на 0.5 м), что обеспечивает достаточную кратность перекрытия. Проведение численных экспериментов для такой системы наблюдения напрямую неэффективно, поскольку требует расчета большого количества прямых задач. Поэтому на основе принципа взаимности [65] расчеты проводятся для сопряженной задачи, в которой положения источников и приемников взаимозаменяемы. В результате для каждой реализации статистической модели рассчитываются поля 20 источников. Однако в дальнейших рассуждениях используется терминология исходной постановки с малым числом приемников и большим числом источников. Тип используемого при моделировании источника - вертикальная сила, функция источника - импульс Риккера с доминирующей частотой 30 и 15 Гц, то есть выполняется две серии расчетов в зависимости от частоты зондирующего сигнала. Данные регистрируются всей системой приемников, однако для дальнейшего анализа будут использоваться данные с выносом не более 30 м.

#### 4.6.2 Расчет волновых полей с использованием разработанного метода

Для расчета волновых сейсмических полей в моделях со сложной нерегулярной топографией свободной поверхности используется алгоритм, основанный на комбинировании разрывного метода Галеркина и метода конечных разностей [41], [241]. При этом метод Галеркина применяется до уровня  $z = -240$  м, в остальной части модели до глубины 1000 м используется стандартная схема на сдвинутых сетках. Для ограничения расчетной области используются идеально согласованные слои [261].

Шаг сетки выбирается из расчета 20 точек сетки для конечно-разностной схемы на длину волны, что составляет 0.5 м для задач с источником с частотой 30 Гц и 1 м для источника с частотой 15 Гц. В результате для расчета поля одного источника на одном ядре кластера НКС-30Т Сибирского суперкомпьютерного центра потребуется порядка 8 часов для задачи с частотой сигнала 30 Гц и порядка 1 часа для задач с частотой 15 Гц. Распараллеливание вычислений проводится по положению источников, что полностью исключает необходимость обменов в процессе вычислений. При этом расчет поля всех источников для одной реализации рассматривается как отдельная задача.

При оценке вычислительных ресурсов для серии экспериментов учитывается общее число статистических моделей - 45, реализаций одной статистической модели - 20, число источников для каждой реализации - 20, число скоростных моделей верхней части разреза - 4. Итак, для каждой частоты зондирующего сигнала проводится расчет поля 72000 источников. С учетом времени на расчет поля одного источника одним ядром (в зависимости от частоты сигнала) получена оценка общего числа ядро-часов на проведение моделирования - 648000.

#### 4.6.3 Статистический анализ рассчитанных волновых полей

Следуя [284], рассматривается возмущение только ранних вступлений, зарегистрированных в интервале времени от 0 до 0.2 с в приемниках с выносами до 30 м. Примеры исследуемых сейсмограмм ранних вступлений для двух различных статистических моделей свободной поверхности приведены на рис. 4.33 и 4.34.

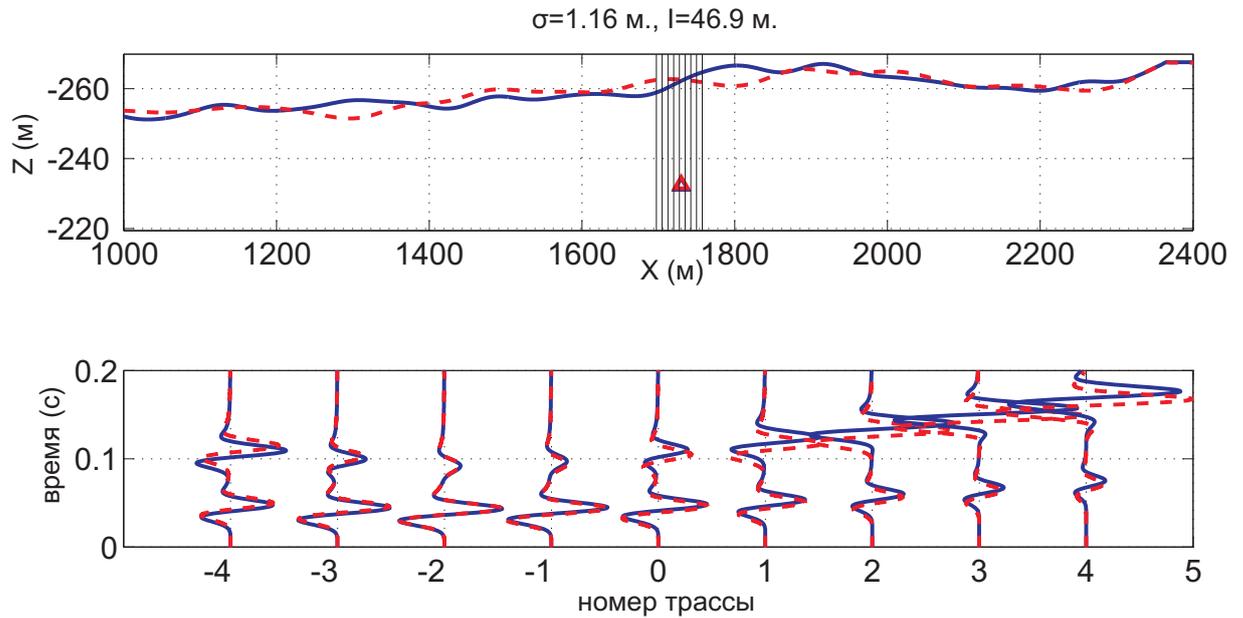


Рисунок 4.33 – Профили двух реализаций свободной поверхности (вверху) и рассчитанные для них сейсмограммы ранних вступлений (внизу). Стандартное отклонение и длина корреляции гауссовского случайного процесса - 1.16 м и 46.9 м соответственно

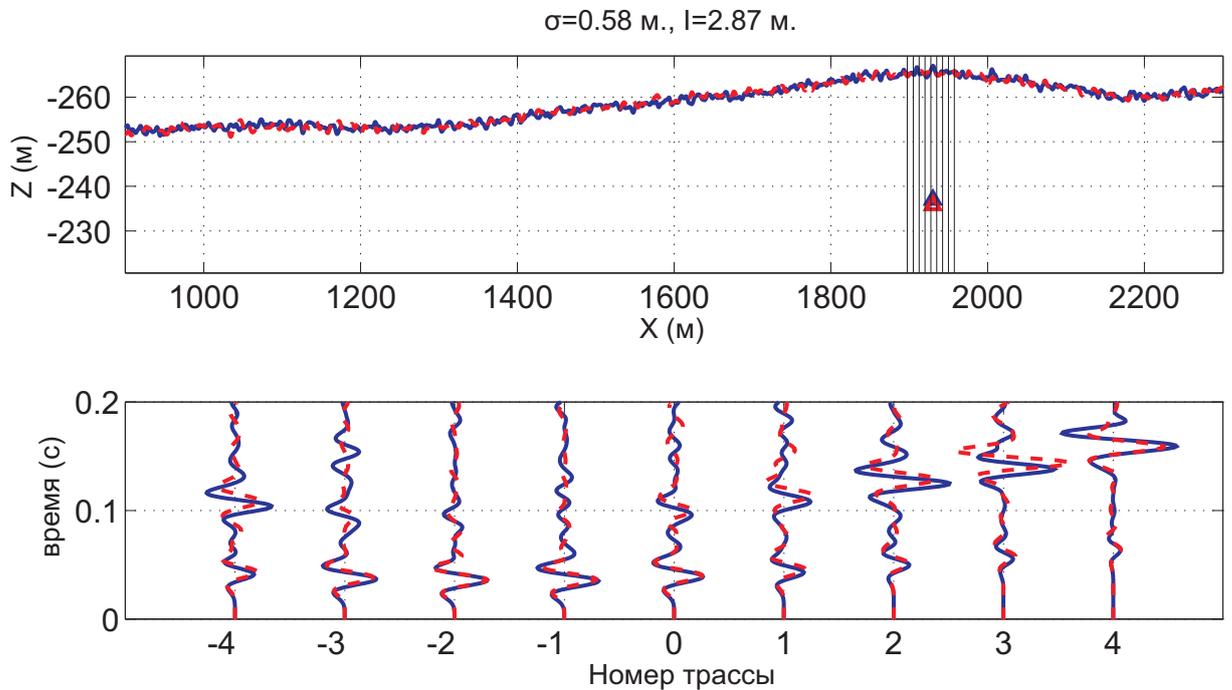


Рисунок 4.34 – Профили двух реализаций свободной поверхности (вверху) и рассчитанные для них сейсмограммы ранних вступлений (внизу). Стандартное отклонение и длина корреляции гауссовского случайного процесса - 0.58 м и 2.87 м соответственно

Для оценки различия получаемых сейсмических данных и их повторяемости рассматриваются две статистические меры, широко используемые при обработке данных сейсмического мониторинга [230], [231], [27]:

- Нормированное среднеквадратичное отклонение, или NRMS (от английского *normalized root mean square*), которое определяется по правилу:

$$NRMS = \frac{200RMS(x_t - y_t)}{RMS(x_t) + RMS(y_t)}; \quad RMS(x_t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t_1}^{t_2} x_t^2}, \quad (4.23)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  - границы временного окна, внутри которого производится анализ,  $x_t$  и  $y_t$  две сравниваемые тарссы.

- Предсказуемость, или PRED (от английского *predictability*) - нормированная суммированная с квадратом кросс-корреляция трасс, определяемая по формуле:

$$PRED = \frac{\sum_{t_1}^{t_2} C_{xy}^2(t)}{\sum_{t_1}^{t_2} C_{xx}(t)C_{yy}(t)} \quad (4.24)$$

где  $C_{xy}$  - кросс-корреляция трасс  $x_t$  и  $y_t$  внутри рассматриваемого временного интервала  $[t_1, t_2]$ .

NRMS и PRED измеряются для каждого заглубленного приемника отдельно на базе 20 реализаций статистической модели свободной поверхности. На рис. 4.35 - 4.38 приведены графики зависимости NRMS и PRED от положения приемников для разных статистических моделей поверхности (фиксированное стандартное отклонение, варьируется только длина корреляции) и разного строения верхней части разреза.

На графиках (рис. 4.35) видно, что статистические меры для однородной модели практически не зависят от положения приемника, то есть их линейные тренды близки к постоянным. Аналогичная зависимость характерна для мер, соответствующих двухслойной модели (рис. 4.36). Для более сложных, слоистой и полной, моделей достаточно четко прослеживается связь между положением приемника и значением статистической меры. NRMS выше в области минимума тренда свободной поверхности, то есть в области, где слой песка тоньше, соответственно PRED в этой области ниже (рис. 4.37 и 4.38). Это указывает на влияние не только вариабильности са-

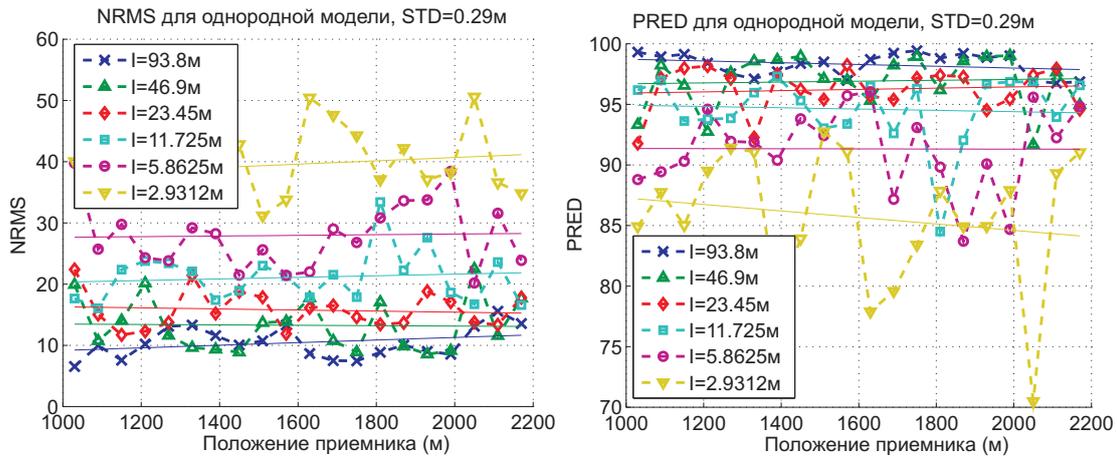


Рисунок 4.35 – Зависимость NRMS (вверху) и PRED (внизу) от положения приемника для однородной модели верхней части разреза

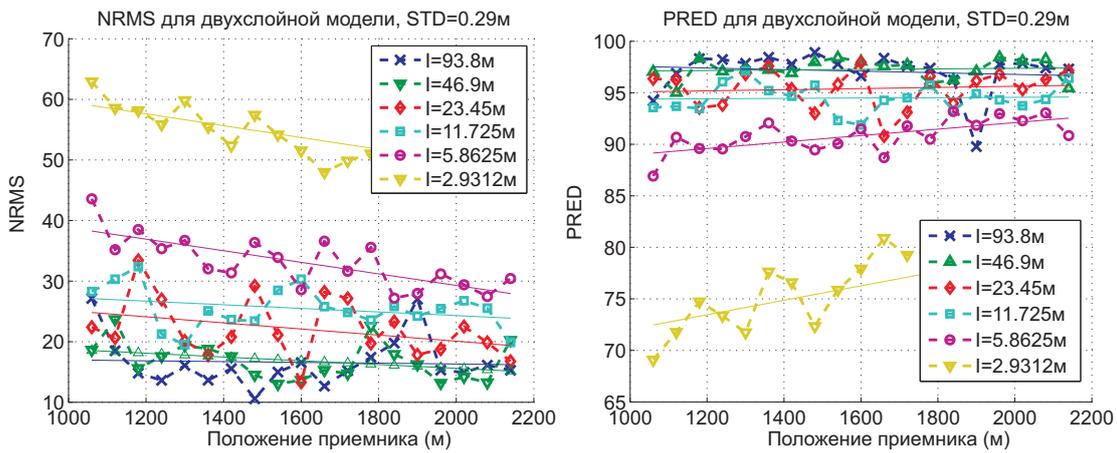


Рисунок 4.36 – Зависимость NRMS (вверху) и PRED (внизу) от положения приемника для двухслойной модели верхней части разреза

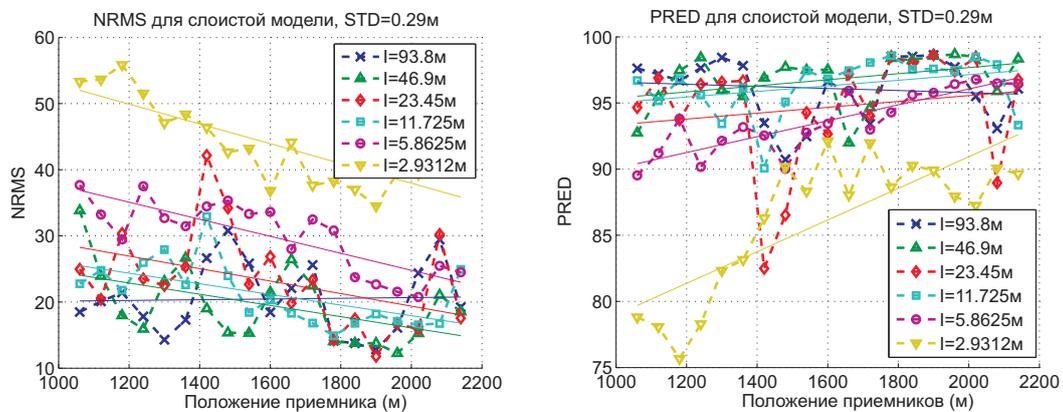


Рисунок 4.37 – Зависимость NRMS (вверху) и PRED (внизу) от положения приемника для слоистой модели верхней части разреза

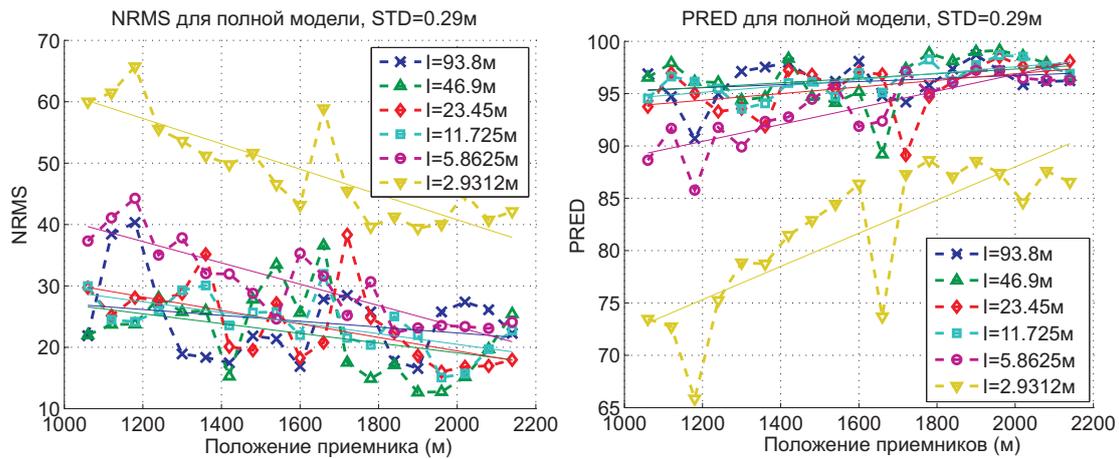


Рисунок 4.38 – Зависимость NRMS (вверху) и PRED (внизу) от положения приемника для полной модели верхней части разреза

мой свободной поверхности, но и строения верхней части разреза на повторяемость данных сейсмических экспериментов.

Для проверки гипотезы о зависимости (независимости) статистических мер различия сейсмических данных от положения приемника используется р-критерий [234] - вероятность того, что исследуемая гипотеза (независимость от положения приемника) верна. В частности, в исследуемых случаях, если значение полученной вероятности ниже 5 %, то существует достоверная корреляция между положением приемника и значением статистических мер, в противном случае - данные не зависят от положения приемника. На графиках значений параметров, рассчитанных для всех статистических моделей свободной поверхности для каждой скоростной модели верхней части (рис. 4.39 - 4.42), видно, что в случае однородной среды корреляции между положением приемника и значением статистических параметров нет (рис. 4.39). В случае двухслойной модели зависимость проявляется в экспериментах с частотой зондирующего сигнала 15 Гц, при этом на более низких частотах зависимость отсутствует (рис. 4.40). В случае более сложного строения верхней части четко прослеживается зависимость статистических метрик от положения приемника (рис. 4.41 и 4.42). В дополнение, в таблице 4.2 приведен процент статистических моделей, которые удовлетворяют критерию независимости метрик от положения приемников, что подтверждает приведенные выше выводы.

При этом рассмотрение абсолютных значений NRMS для полной и слоистой

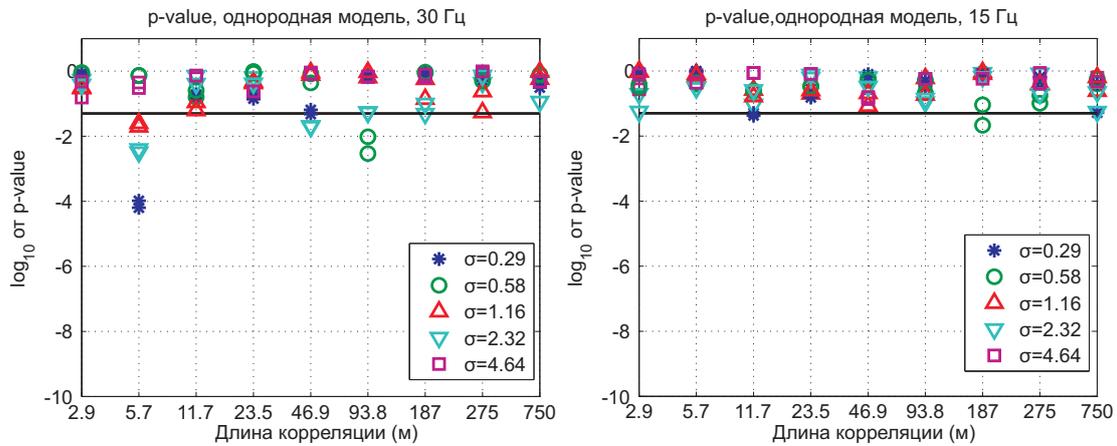


Рисунок 4.39 – Однородная скоростная модель. Значение вероятностного параметра проверки гипотезы о независимости статистических метрик от положения приемников, значения выше порогового (черная линия) - значения независимы (слева для экспериментов с частотой 30 Гц, справа - 15 Гц)

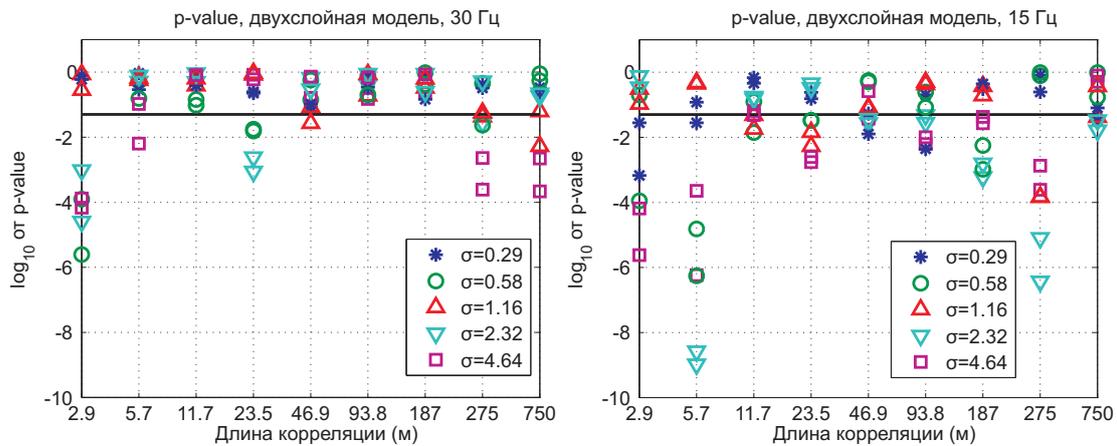


Рисунок 4.40 – Двухслойная скоростная модель. Значение вероятностного параметра проверки гипотезы о независимости статистических метрик от положения приемников, значения выше порогового (черная линия) - значения независимы (слева для экспериментов с частотой 30 Гц, справа - 15 Гц)

Таблица 4.2 – Процент статистических моделей, удовлетворяющих критерию независимости метрик от положений приемников

частота/модель	однородная	двухслойная	слоистая	полная
30 Гц	87 %	78 %	41 %	38 %
15 Гц	97 %	47 %	7 %	11 %

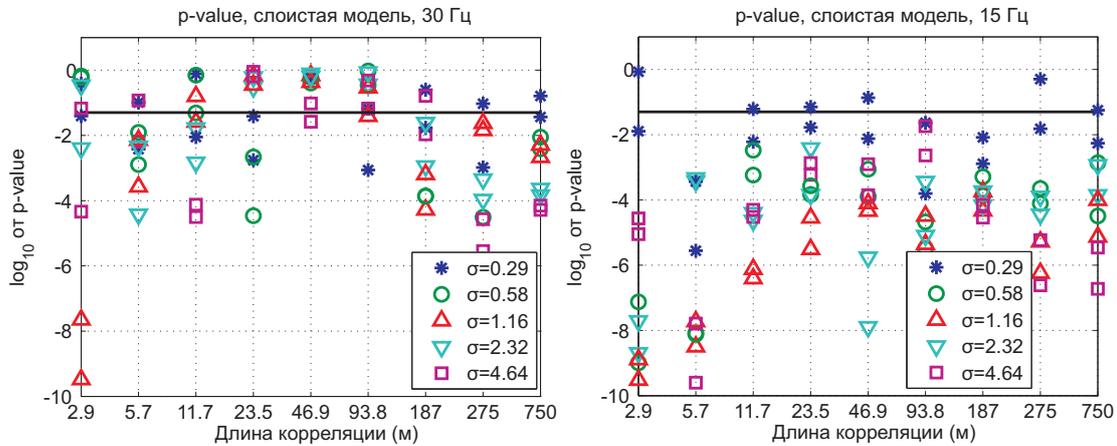


Рисунок 4.41 – Слоистая скоростная модель. Значение вероятностного параметра проверки гипотезы о независимости статистических метрик от положения приемников, значения выше порогового (черная линия) - значения независимы (слева для экспериментов с частотой 30 Гц, справа - 15 Гц)

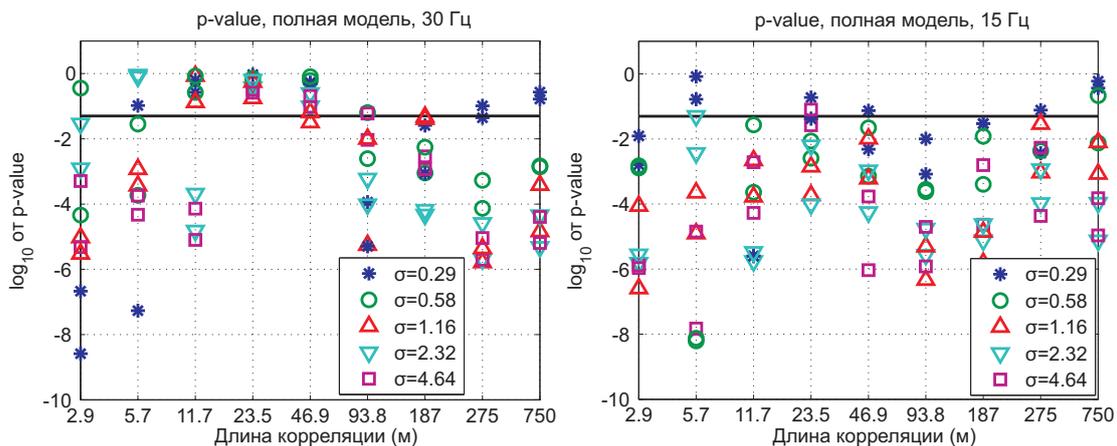


Рисунок 4.42 – "Полная" скоростная модель. Значение вероятностного параметра проверки гипотезы о независимости статистических метрик от положения приемников, значения выше порогового (черная линия) - значения независимы (слева для экспериментов с частотой 30 Гц, справа - 15 Гц)

моделей в области малой мощности песчаного слоя (рис. 4.37 и 4.38) позволяет утверждать, что достаточно слабые изменения профиля свободной поверхности приводят к существенным возмущениям сейсмических данных. В частности, NRMS может достигать 60-70 %, наблюдаемых в реальных данных.

## Заключение

Предложенные подходы к разработке численных методов и алгоритмов расчета волновых сейсмических полей в средах с локальными осложняющими факторами (скоплениями мелкомасштабных неоднородностей, анизотропными и вязкоупругими формациями, резкоконтрастными границами со сложной геометрией), основанные на комплексировании известных численных методов, имеют ряд преимуществ.

Во-первых, использование несогласованных сеток с локальным пространственно-временным измельчением шага позволяет проводить учет мелкомасштабного строения пласта и рассчитывать волновые поля в средах со скоплениями таких неоднородностей. Выгодным отличием предложенного метода является:

- проведение измельчения сеток по пространству и по времени на разных поверхностях, что обеспечивает устойчивость;
- применение техники вложенных шаблонов для расчета решения при измельчении сеток по времени, что позволяет избежать интерполяции, обеспечивает малость нефизичных отражений от границы раздела сеток (порядка 0.001 от амплитуды падающей волны) и стремление этих отражений к нулю со вторым порядком;
- применение преобразования Фурье с фильтрацией высоких частот как для пролонгации, так и для сужения решения при измельчении пространственных шагов сетки обеспечивает устойчивость решения и низкий уровень нефизичных отражений (порядка 0.001 от амплитуды падающей волны).

Во-вторых, Использование конечно-разностных схем, оптимизированных для расчета волновых полей в анизотропных средах (схема Лебедева) в области, окаймляющей анизотропные включения, а стандартной схемы на сдвинутых сетках в ос-

новой части модели позволяет существенно снизить вычислительное время и необходимые для проведения расчетов вычислительные ресурсы. К особенностям метода относятся:

- комбинирование конечно-разностных схем на основе требования высокого порядка сходимости коэффициентов нефизичных отражений к нулю, что обеспечивает малость этих отражений (порядка 0.001 от амплитуды падающей волны для рабочего диапазона дискретизаций 20-50 точек на доминирующую длину волны);

- использование многоосного идеально-согласованного слоя с оптимальным стабилизирующим параметром, для обеспечения минимальности нефизичных отражений от границ расчетной области для заданной анизотропной модели;

- применение модификаций коэффициентов схемы, основанных на методе осреднения анизотропных тонкослоистых пропластков, обеспечивает второй порядок сходимости численного решения для моделей сред с резкоконтрастными границами.

В-третьих, комбинирование обобщенной стандартной линейной модели твердого тела с моделью идеально упругой среды позволяет

- локально использовать вычислительно сложную обобщенную стандартную линейную модель твердого тела в области, охватывающей вязкоупругие включения;

- оптимизировать декомпозицию расчетной области минимизацией общего вычислительного времени в зависимости от числа переменных памяти в обобщенной стандартной линейной модели твердого тела и порядка аппроксимации схемы.

В-четвертых, комбинирование разрывного метода Галеркина и метода конечных разностей для расчета волновых полей в моделях с резкоконтрастными границами со сложной геометрией, включая топографию свободной поверхности дает возможность:

- в качестве метода расчета волновых полей в моделях с резкоконтрастными границами использовать разрывный метод Галеркина с центральной аппроксимацией потоков;

- комбинирование разрывного метода Галеркина на треугольной сетке и стандартной схемы на сдвинутых сетках проводить в два этапа с введением "переходного" слоя, в котором применяется классическая схема на несдвинутых сетках, совмещающая в себе свойства метода конечных разностей и метода Галеркина с базисными

функциями - константами, что обеспечивает низкий уровень нефизичных отражений (порядка 0.001 от амплитуды падающей волны).

Несомненно, методы численного моделирования волновых сейсмических процессов ждут дальнейшего развития в теоретическом и практическом плане. В частности, можно выделить следующие направления:

- моделирование взаимодействия волн с мелкомасштабной структурой пласта коллектора - переход к более реалистичным моделям вмещающего пространства, например, использование модели анизотропной среды с поглощением, обусловленной наличием микротрещиноватости в резервуаре, использование моделей пороупругой среды для учета свойств высокопроницаемого материала и флюида, заполняющего коридоры трещиноватости и каверны с различной степенью вторичной минерализации, использование разрывного метода Галеркина для расчета решения в резервуаре для детального описания и учета геометрии коридоров трещиноватости.

- моделирование взаимодействия волн с нерегулярными резкоконтрастными границами - учет контакта между жидкостью и упругим телом для анализа проявлений изменчивости ледового покрова, вечной мерзлоты и зон растепления в данных сейсмических наблюдений и разработки методик компенсации таких проявлений.

# Литература

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Text] / Н.С. Бахвалов. — М. : Наука, 1973. — 632 с.
2. Бейкер, Д. Аппроксимации Паде [Text] / Д. Бейкер, П. Гравис-Моррис. — М. : Мир, 1986. — 502 с.
3. Вавакин, А. С. Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями [Text] / А. С. Вавакин, Р. Л. Салганик // Известия АН СССР, Механика твердого тела. — 1975. — №. 3. — С. 65–75.
4. Вавакин, А. С. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями [Text] / А. С. Вавакин, Р. Л. Салганик // Известия АН СССР, Механика твердого тела. — 1978. — №. 2. — С. 95–107.
5. Взаимодействие сейсмических волн с зонами начальных напряжений [Text] / Е.В. Лысь [и др.] // Доклады Академии Наук, геофизика. — 2013. — Т. 449, №. 4. — С. 1–4.
6. Вишневский, Д. М. Комбинирование конечно-разностных схем для моделирования волновых процессов в упругих средах, содержащих анизотропные слои [Text] / Д. М. Вишневский, В. В. Лисица, В. А. Чеверда // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2012. — Т. 15, №. 2. — С. 175–181.
7. Вишневский, Д. М. Численное моделирование распространения сейсмических волн в средах с вязкоупругими включениями [Text] / Д. М. Вишневский,

- В.В. Лисица, Г.В. Решетова // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14. — С. 155–165.
8. Воронин, К. В. Решение уравнения Гельмгольца с использованием метода малоранговой аппроксимации в качестве предобусловливателя [Text] / К.В. Воронин, С.А. Соловьев // Вычислительные методы и программирование. — 2015. — Т. 16. — С. 268–280.
  9. Вычислительные алгоритмы для анализа упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками [Text] / М.П. Варыгина [и др.] // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12, №. 1. — С. 435–442.
  10. Глинский, Б. М. 3D-моделирование сейсмических волновых полей в средах, характерных для вулканических структур [Text] / Б.М. Глинский, В.Н. Мартынов, А.Ф. Сапетина // Математические заметки СВФУ. — 2015. — Т. 22, №. 3. — С. 84–98.
  11. Глинский, Б. М. Технология суперкомпьютерного 3D моделирования сейсмических волновых полей в сложно построенных средах [Text] / Б.М. Глинский, В.Н. Мартынов, А.Ф. Сапетина // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. — 2015. — Т. 4, №. 4. — С. 101–116.
  12. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах [Text] / С. К. Годунов [и др.]. — Новосибирск : Наука, 1992. — 360 с.
  13. Годунов, С. К. Разностные схемы [Text] / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. — М. : Наука, 1973. — 400 с.
  14. Годунов, С. К. Современные аспекты линейной алгебры [Text] / С. К. Годунов. — Новосибирск : Научная книга, 1997. — 390 с.
  15. Годунов, С. К. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения [Text] / С. К. Годунов, Е. И. Роменский. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1998. — 400 с.

16. Гольдин, С. В. Сейсмические волны в анизотропных средах [Text] / С. В. Гольдин. — Новосибирск : Издательство СО РАН, 2008. — 375 с.
17. Горшкалев, С. Б. Компенсация расщипления отраженных обменных волн с переменными параметрами, зависящими от удаления точки приема [Text] / С.Б. Горшкалев, Е.В. Афонина, В.В. Карстен // Технологии сейсморазведки. — 2014. — №. 2. — С. 24–33.
18. Горшкалев, С. Б. Анализ возможности изучения переменного направления трещиноватости коллектора по данным ВСП [Text] / С.Б. Горшкалев, В.В. Карстен, И.А. Карпов, Д.М. Вишневский // Технологии сейсморазведки. — 2016. — №. 1. — С. 44–51.
19. Дмитриев, М. Н. Применимость слабоотражающих граничных условий М-РМЛ при моделировании волновых процессов в анизотропных средах. Часть I: Уровень отражений [Text] / М. Н. Дмитриев, В.В. Лисица // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2011. — Т. 14, №. 4. — С. 333–344.
20. Дмитриев, М. Н. Применимость слабоотражающих граничных условий М-РМЛ при моделировании волновых процессов в анизотропных средах. Часть II: Устойчивость [Text] / М.Н. Дмитриев, В.В. Лисица // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2012. — Т. 15, №. 1. — С. 45–55.
21. Довгилович, Л. Е. Конечно-разностный метод высокого порядка точности расчета волновых полей в анизотропных средах [Text] / Л.Е. Довгилович, И.Л. Софронов // Технологии сейсморазведки. — 2013. — №. 2. — С. 24–30.
22. Доровский, В. Н. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах [Text] / В.Н. Доровский, Ю.В. Перепечко, Е.И. Роменский // Физика горения и взрыва. — 1993. — Т. 1. — С. 100–111.
23. Доровский, В. Н. Волны Стоунли в теории Био-Джонсона и континуальной теории фильтрации [Text] / В.Н. Доровский, Ю.В. Перепечко, А.И. Федоров // Геология и геофизика. — 2012. — Т. 53, №. 5. — С. 621–632.

24. Квасов, И. Е. Численное моделирование волновых процессов в геологических средах в задачах сейсморазведки с помощью высокопроизводительных ЭВМ [Text] / И. Е. Квасов, И. Б. Петров // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, №. 2. С. 330–341.
25. Квасов, И. Е. Численное моделирование сейсмических откликов в многослойных геологических средах сеточно-характеристическим методом [Text] / И.Е. Квасов, С.А. Панкратов, И.Б. Петров // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, №. 9. — С. 13–22.
26. Кнауб, Л. В. Алгоритм интегрирования переменного порядка и шага на основе явного двухстадийного метода Рунге-Кутты [Text] / Л.В. Кнауб, Ю.М. Лаевский, Е.А. Новиков // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2007. — Т. 10, №. 2. — С. 177–185.
27. Колюхин, Д. Р. Влияние изменчивости свободной поверхности на повторяемость данных сейсмического мониторинга [Text] / Д.Р. Колюхин, В. В. Лисица, Г. В. Решетова // Технологии сейсморазведки. — 2016. — №. 1. — С. 69–76.
28. Конечно-разностный метод численного моделирования распространения сейсмических волн в трехмерно-неоднородных разномасштабных средах [Text] / В.И. Костин, В.В. Лисица [и др.] // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12. — С. 321–329. —
29. Коновалов, А. Н. Динамическая задача теории упругости в постановке "скорости-напряжения"[Text] / А. Н. Коновалов // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35, №. 2. — С. 238.
30. Коновалов, А. Н. Численные методы в динамических задачах теории упругости [Text] / А. Н. Коновалов // Сибирский математический журнал. — 1997. — Т. 38, №. 3. — С. 552.
31. Крауклис, П. В. О некоторых низкочастотных колебаниях жидкого слоя в упругой среде [Text] / П. В. Крауклис // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26, №. 6. — С. 1111–1115.

32. Кристенсен, Р. Введение в теорию вязкоупругости [Text] / Р. Кристенсен. — Москва : Мир, 1974. — 338 с.
33. Лаевский, Ю. М. Явно- неявные методы декомпозиции области решения параболических уравнений [Text] / Ю. М. Лаевский, С.В. Гололобов // Сибирский математический журнал. — 1995. — Т. 36, №. 3. — С. 590–601.
34. Лаевский, Ю. М. Составные явные схемы [Text] / Ю. М. Лаевский, П.В. Банушкина // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2000. — Т. 3, №. 2. — С. 165–180.
35. Ландау, Л. Д. Теория упругости [Text] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 248 с.
36. Лебедев, В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов для некоторых краевых задач математической физики. I [Text] / В. И. Лебедев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1964. — Т. 4, №. 3. — С. 449–465.
37. Левин, В. А. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ [Text] / В. А. Левин, А. В. Вершинин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 544 с.
38. Левянт, В. Б. Численное моделирование волнового отклика от субвертикальных макротрещин, вероятных флюидопроводящих каналов [Text] / В.Б. Левянт, И.Б. Петров, И.Е. Квасов // Технологии сейсморазведки. — 2011. — №. 4. — С. 41–61.
39. Левянт, В. Б. Численное моделирование волновых откликов от системы (кластера) субвертикальных макротрещин [Text] / В.Б. Левянт, И.Б. Петров, М.В. Муратов // Технологии сейсморазведки. — 2012. — №. 1. — С. 5–21.
40. Лисица, В. В. Дисперсионный анализ разрывного метода Галеркина в применении к уравнениям динамической теории упругости [Text] / В.В. Лисица // Вычислительные методы и программирование. — 2015. — Т. 16. — С. 387–406.
41. Лисица, В. В. Комбинирование разрывного метода Галеркина и метода конечных разностей для учета сложного строения верхней части разреза при числен-

- ном моделировании сейсмических полей [Text] / В. В. Лисица, В. А. Чеверда // Технологии сейсморазведки. — 2014. — №. 4. — С. 60–67.
42. Лисица, В. В. Нерасщепленный идеально согласованный слой для системы уравнений динамической теории упругости [Text] / В. В. Лисица // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2007. — Т. 10, №. 3. — С. 285–297.
43. Лисица, В. В. Об особенностях схемы Лебедева при моделировании упругих волн в анизотропных средах [Text] / В. В. Лисица, Д. М. Вишнеvский // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2011. — Т. 14, №. 2. — С. 155–167.
44. Локальное пространственно-временное измельчение сеток для конечно-разностного моделирования упругих волн в трёхмерно-неоднородных разномасштабных средах [Text] / В. И. Костин, В. В. Лисица [и др.] // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2013. — Т. 16, №. 1. — С. 45–55.
45. Лысь, Е. В. Численное моделирование сейсмоакустических волновых полей для анизотропного околоскважинного пространства [Text] / Е. В. Лысь, В. В. Лисица // Технологии сейсморазведки. — 2008. — №. 1. — С. 25–34.
46. Никишин, Е. М. Рациональные аппроксимации и ортогональность [Text] / Е.М. Никишин, В. Н. Сорокин. — М. : Наука, 1988. — 256 с.
47. Рассеянные волны: численное моделирование и построение изображений (Часть 1. Двумерные среды) [Text] / В.В. Лисица [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2013. — №. 1. — С. 46–58.
48. Результаты изучения азимутальной анизотропии геологического разреза на Пеляткинской площади по данным многоволнового ВСП и сейсморазведки 3D [Text] / С.Б. Горшкалев [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2011. — №. 3. — С. 60–70.
49. Роменский, Е. И. Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в пористой упругой среде [Text] / Е. И. Роменский // Сиб. журн. индустриальной математики. — 2011. — Т. 14, №. 4. — С. 86–97.

50. Садовский, В. М. Вычислительный алгоритм для расчета вязкоупругих волн в среде Кельвина-Фойхта [Text] / В.М. Садовский, О.В. Садовская // Вычислительные методы и программирование. — 2014. — Т. 15, №. 1. — С. 98–108.
51. Садовский, В. М. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах [Text] / В.М. Садовский, О.В. Садовская, М.П. Варыгина // Вычислительная механика сплошных сред. — 2009. — Т. 2, №. 4. — С. 111–121.
52. Салганик, Р. Л. Механика тел с большим числом трещин [Text] / Р. Л. Салганик // Известия АН СССР, Механика твердого тела. — 1973. — №. 4. — С. 149–158.
53. Самарский, А. А. Теория разностных схем [Text] / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 616 с.
54. Соловьев, С. А. Решение разреженных систем линейных уравнений методом Гаусса с использованием техники аппроксимации матрицами малого ранга [Text] / С.А. Соловьев // Вычислительные методы и программирование. — 2014. — Т. 15. — С. 441–460.
55. Софронов, И. Л. Об аппроксимации прозрачных граничных условий с высоким порядком точности для волнового уравнения [Text] / И.Л. Софронов, Л.Е. Довгилович, Н.А. Краснов // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, №. 1. — С. 45–56.
56. Технология обработки многокомпонентных данных на Сибирской платформе с применением процедуры компенсации анизотропии верхней части разреза [Text] / С.Б. Горшкалев [и др.] // Технологии сейсморазведки. — 2011. — №. 2. — С. 70–78.
57. Технология построения разностных сеток [Text] / В.Д. Лисейкин [и др.] — Новосибирск : Наука, 2009. — 414 с.
58. Численное моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана "Гора Каребетова" вибросейсмическими методами [Text] / Б.М. Глин-

- ский [и др.]// Вычислительные методы и программирование. — 2010. — Т. 11. — С. 95–104.
59. Шокин, Ю. И. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике [Text] / Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко. — Новосибирск : Наука, 1985. — 364 с.
60. 2D and 3D frequency-domain elastic wave modeling in complex media with a parallel iterative solver [Text] / Y. Li [et al.] // Geophysics. — 2015. — Vol. 80, no. 3. — P. T101–T118.
61. 3-D finite-difference, finite-element, discontinuous-Galerkin and spectral-element schemes analysed for their accuracy with respect to P-wave to S-wave speed ratio [Text] / P. Moczo [et al.] // Geophysical Journal International. — 2011. — Vol. 187, no. 3. — P. 1645–1667.
62. 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities [Text] / P. Moczo [et al.] // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2002. — Vol. 92, no. 8. — P. 3042–3066.
63. A class of hybrid DG/FV methods for conservation laws II: Two-dimensional cases [Text] / L. Zhang [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2012. — Vol. 231, no. 4. — P. 1104–1120.
64. A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic–acoustic media [Text] / L. C. Wilcox [et al.]// Journal of Computational Physics. — 2010. — Vol. 229, no. 24. — P. 9373–9396.
65. Aki, K. Quantitative Seismology, Theory and Methods [Text] / K. Aki, P. G. Richards. — San Francisco : Freeman, 1980. — 557 p.
66. A multiscale method for elastic wave equation modeling [Text] / K. Gao [et al.] // SEG Annual Meeting (Houston, USA, September 22-27, 2013) : Expanded Abstracts. — Houston, 2013. — P. 3444–3448.

67. A numerical study on reflection coefficients of fractured media [Text] / O. S. Kruger [et al.] // *Geophysics*. — 2007. — Vol. 72, no. 4. — P. D61–D67.
68. A petrophysical interpretation using the velocities of P and S waves (full waveform inversion) [Text] / M. Krief [et al.] // *The Log Analyst*. — 1990. — Vol. 31. — P. 355–369.
69. A simple model for squirt-flow dispersion and attenuation in fluid-saturated granular rocks [Text] / B. Gurevich [et al.] // *Geophysics*. — 2010. — Vol. 75, no. 6. — P. N109–N120.
70. Ainsworth, M. Discrete dispersion relation for hp-version finite element approximation at high wave number [Text] / M. Ainsworth // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 2004. — Vol. 42, no. 2. — P. 553–575.
71. Ainsworth, M. Dispersive and dissipative behaviour of high order discontinuous Galerkin finite element methods [Text] / M. Ainsworth // *Journal of Computational Physics*. — 2004. — Vol. 198, no. 1. — P. 106–130.
72. Ainsworth, M. Dispersive and dissipative behavior of the spectral element method [Text] / M. Ainsworth, H. A. Wajid // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 2009. — Vol. 47, no. 5. — P. 3910–3937.
73. Ainsworth, M. Dispersive and dissipative properties of discontinuous Galerkin finite element methods for the second-order wave equation [Text] / M. Ainsworth, P. Monk, W. Muniz // *Journal of Scientific Computing*. — 2006. — Vol. 27, no. 1. — P. 5–40.
74. Alford, R. M. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation [Text] / R. M. Alford, K. R. Kelly, D. M. Boore // *Geophysics*. — 1974. — Vol. 39, no. 6. — P. 834–842.
75. Allan, A. Pyrolysis-induced P-wave velocity anisotropy in organic-rich shales [Text] / A. Allan, T. Vanorio, J. Dahl // *Geophysics*. — 2014. — Vol. 79, no. 2. — P. D41–D53.

76. Alpert, B. Nonreflecting boundary conditions for the time-dependent wave equation [Text] / B. Alpert, L. Greengard, T. Hagstrom // J. Comput. Phys. — 2002. — Vol. 180. — P. 270–296.
77. Alpert, B. Rapid evaluation of nonreflecting boundary kernels for time-domain wave propagation [Text] / B. Alpert, L. Greengard, T. Hagstrom // SAIM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 37. — P. 1138–1164.
78. Alterman, Z. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods [Text] / Z. Alterman, Jr F. C. Karal // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1968. — Vol. 58, no. 1. — P. 367–398.
79. An approach for predicting stress-induced anisotropy around a borehole [Text] / X. Fang [et al.] // Geophysics. — 2013. — Vol. 78, no. 3. — P. D143–D150.
80. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes III. Viscoelastic attenuation [Text] / M. Kaser [et al.] // Geophysical Journal International. — 2007. — Vol. 168, no. 1. — P. 224–242.
81. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes IV. Anisotropy [Text] / J. Puente [et al.] // Geophysical Journal International. — 2007. — Vol. 169, no. 3. — P. 1210–1228.
82. An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling [Text] / V. Etienne [et al.] // Geophysical Journal International. — 2010. — Vol. 183. — P. 941–962.
83. Analysis of time-lapse data from the Alba field 4C/4D seismic survey [Text] / R. Hanson [et al.] // Petroleum Geoscience. — 2003. — Vol. 9, no. 1. — P. 103–111.
84. Aoi, S. 3D finite-difference method using discontinuous grids [Text] / S. Aoi, H. Fujiwara // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1999. — Vol. 89, no. 4. — P. 918–930.
85. Appelo, D. A new absorbing layer for elastic waves [Text] / D. Appelo, G. Kreiss // J. Comput. Phys. — 2005. — Vol. 215. — P. 642–660.

86. Appelo, D. A stable finite difference method for the elastic wave equation on complex geometries with free surfaces [Text] / D. Appelo, N. A. Petersson // Commun. Comput. Phys. — 2009. — Vol. 5, no. 1. — P. 84–107.
87. Appelo, D. Perfectly matched layers for hyperbolic systems: General formulation, well-posedness and stability [Text] / D. Appelo, T. Hagstrom, G. Kreiss // SIAM J. Appl. Math. — 2006. — Vol. 67. — P. 1–23.
88. Archie, G. E. Classification of carbonate reservoir rocks and petrophysical considerations [Text] / G. E. Archie // AAPG Bulletin. — 1952. — Vol. 36, no. 2. — P. 278–298.
89. Arnold, D. N. An interior penalty finite element method with discontinuous elements [Text] / D. N. Arnold // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1982. — Vol. 19, no. 4. — P. 742–760.
90. Asvadurov, S. Application of the difference Gaussian rules to solution of hyperbolic problems [Text] / S. Asvadurov, V. Druskin, L. Knizhnerman // J. Comput. Phys. — 2000. — Vol. 158. — P. 116–135.
91. Asvadurov, S. Application of the difference Gaussian rules to solution of hyperbolic problems II. Global expansion [Text] / S. Asvadurov, V. Druskin, L. Knizhnerman // J. Comput. Phys. — 2002. — Vol. 175. — P. 24–29.
92. Asvadurov, S. Finite-difference modeling of viscoelastic materials with quality factors of arbitrary magnitude [Text] / S. Asvadurov, L. Knizhnerman, J. Pabon // Geophysics. — 2004. — Vol. 69, no. 3. — P. 817–824.
93. Asvadurov, S. Optimal grids for anisotropic problems [Text] / S. Asvadurov, V. Druskin, S. Moskow // Electronic Transactions on Numerical Analysis. — 2007. — Vol. 26. — P. 55–81.
94. Attenuation anisotropy in the linear-slip model: Interpretation of physical modeling data [Text] / T. Chichinina [et al.] // Geophysics. — 2009. — Vol. 74, no. 5. — P. WB165–WB176.

95. Backus, G. E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering [Text] / G. E. Backus // Journal of Geophysical Research. — 1962. — Vol. 67, no. 11. — P. 4427–4440.
96. Banushkina, P. Multilevel explicit schemes and their stability [Text] / P. Banushkina, Y. Laevsky // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2001. — Vol. 16, no. 3. — P. 215–234.
97. Basabe, J. D. D. Seismic wave propagation in fractured media: A discontinuous Galerkin approach [Text] / J. D. De Basabe, M. K. Sen, M. F. Wheeler // SEG Annual Meeting (Dallas, USA, October 16-21, 2011) : Expanded Abstracts. — Dallas, 2011. — P. 2920–2924.
98. Basabe, J. D. D. The interior penalty discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation: grid dispersion [Text] / J. D. De Basabe, M. K. Sen, M. F. Wheeler // Geophysical Journal International. — 2008. — Vol. 175, no. 1. — P. 83–93.
99. Batzle, M. Heavy oils—seismic properties [Text] / M. Batzle, R. Hofmann, D.-H. Han // The Leading Edge. — 2006. — Vol. 25, no. 6. — P. 750–756.
100. Bécache, E. A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic [Text] / E. Bécache, P. Joly, C. Tsogka // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2002. — Vol. 39. — P. 2109–2132.
101. Bécache, E. High-order absorbing boundary conditions for anisotropic and convective wave equations [Text] / E. Bécache, D. Givoli, T. Hagstrom // Journal of Computational Physics. — 2010. — Vol. 229, no. 4. — P. 1099–1129.
102. Bécache, E. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves [Text] / E. Bécache, S. Fauqueux, P. Joly // J. Comput. Phys. — 2003. — Vol. 188, no. 2. — P. 399–433.
103. Berenger, J.-P. A Huygens subgridding for the FDTD method [Text] / J.-P. Berenger // IEEE Trans. Antenn. Propag. — 2006. — Vol. 54. — P. 3797–3804.

104. Berenger, J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves [Text] / J.-P. Berenger // J. Comput. Phys. — 1994. — Vol. 114. — P. 185–200.
105. Berenger, J.-P. Extension of the FDTD Huygens subgridding algorithm to two dimensions [Text] / J.-P. Berenger // IEEE Trans. Antenn. Propag. — 2009. — Vol. 57. — P. 3860–3867.
106. Berenger, J.-P. The Huygens subgridding for the numerical solution of the Maxwell equations [Text] / J.-P. Berenger // Journal of Computational Physics. — 2011. — Vol. 230, no. 14. — P. 5635–5659.
107. Berger, M. J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations [Text] / M. J. Berger, J. Olinger // Journal of Computational Physics. — 1984. — Vol. 53, no. 3. — P. 484–512.
108. Berger, M. J. Adaptive mesh refinement using wave-propagation algorithms for hyperbolic systems [Text] / M. J. Berger, R. J. LeVeque // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1998. — Vol. 35, no. 6. — P. 2298–2316.
109. Berger, M. Stability of interfaces with mesh refinement [Text] / M. Berger // Mathematics of Computation. — 1985. — Vol. 45, no. 172. — P. 301–318.
110. Bernth, H. A comparison of the dispersion relations for anisotropic elastodynamic finite-difference grids [Text] / H. Bernth, C. Chapman // Geophysics. — 2011. — Vol. 76, no. 3. — P. WA43–WA50.
111. Berryman, J. G. Single-scattering approximation for coefficients in Biot's equations of poroelasticity [Text] / J. G. Berryman // Journal of the Acoustical Society of America. — 1992. — Vol. 91. — P. 551 – 571.
112. Bertrand, A. Repeatability enhancement in deep-water permanent seismic installations: a dynamic correction for seawater velocity variations [Text] / A. Bertrand, C. MacBeth // Geophysical Prospecting. — 2005. — Vol. 53, no. 2. — P. 229–242.

113. Bianco, E. Seismic rock physics of steam injection in bituminous oil reservoirs [Text] / E. Bianco, S. Kaplan, D. Schmitt // *The Leading Edge*. — 2008. — Vol. 27, no. 9. — P. 1132–1137.
114. Biot, M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range [Text] / M. A. Biot // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 1956. — Vol. 28. — P. 168–178.
115. Biot, M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range [Text] / M. A. Biot // *Journal of the Acoustical Society of America*. — 1956. — Vol. 28. — P. 179–191.
116. Blanch, J. Modeling of a constant Q: Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique [Text] / J.O. Blanch, J.O.A. Robertsson, W.W. Symes // *Geophysics*. — 1995. — Vol. 60, no. 1. — P. 176–184.
117. Bohlen, T. Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh waves [Text] / T. Bohlen, E. H. Saenger // *Geophysics*. — 2006. — Vol. 71, no. 4. — P. T109–T115.
118. Bohlen, T. Parallel 3-D viscoelastic finite difference seismic modelling [Text] / T. Bohlen // *Computers and Geosciences*. — 2002. — Vol. 28, no. 8. — P. 887–899.
119. Bona, A. Coordinate-free characterization of the symmetry classes of elasticity tensors [Text] / A. Bona, I. Bucataru, M. Slawinski // *Journal of Elasticity*. — 2007. — Vol. 87, no. 2-3. — P. 109–132.
120. Brossier, R. Parsimonious finite volume frequency-domain method for 2-D P-SV-wave modelling [Text] / R. Brossier, J. Virieux, S. Operto // *Geophysical Journal International*. — 2008. — Vol. 175. — P. 541–559.
121. Calhoun, D. A. Logically rectangular grids and finite volume methods for PDEs in circular and spherical domains [Text] / D. A. Calhoun, C. Helzel, R. J. LeVeque // *SIAM Review*. — 2008. — Vol. 50, no. 4. — P. 723–752.

122. Can we use seismic waves to detect hydraulic connectivity between fractures? [Text] / T. M. Muller [et al.] // SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 26-31, 2014) : Expanded Abstracts. — Denver, 2014. — P. 2894–2898.
123. Capdeville, Y. 1-D non-periodic homogenization for the seismic wave equation [Text] / Y. Capdeville, L. Guillot, J.-J. Marigo // *Geophys. J. Int.* — 2010. — Vol. 181. — P. 897–910.
124. Capdeville, Y. 2-D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P-;SV-waves [Text] / Y. Capdeville, L. Guillot, J.-J. Marigo // *Geophysical Journal International.* — 2010. — Vol. 182, no. 2. — P. 903–922.
125. Carcione, J. M. A rheological model for anelastic anisotropic media with applications to seismic wave propagation [Text] / J. M. Carcione, F. Cavallini // *Geophys. J. Int.* — 1994. — Vol. 119. — P. 338–348.
126. Carcione, J. M. Anisotropic poroelasticity and wave-induced fluid flow: harmonic finite-element simulations [Text] / J. M. Carcione, J. E. Santos, S. Picotti // *Geophysical Journal International.* — 2011. — Vol. 186, no. 3. — P. 1245–1254.
127. Carcione, J. M. Computational poroelasticity — a review [Text] / J. M. Carcione, C. Morency, J. E. Santos // *Geophysics.* — 2010. — Vol. 75, no. 5. — P. 75A229–75A243.
128. Carcione, J. M. Numerical experiments of fracture-induced velocity and attenuation anisotropy [Text] / J. M. Carcione, S. Picotti, J. E. Santos // *Geophysical Journal International.* — 2012. — Vol. 191, no. 3. — P. 1179–1191.
129. Carcione, J. M. Seismic modeling in viscoelastic media [Text] / J. M. Carcione // *Geophysics.* — 1993. — Vol. 58, no. 1. — P. 110–20.
130. Carcione, J. M. Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium [Text] / J. M. Carcione, D. Kosloff, R. Kosloff // *Geophysical Journal.* — 1988. — Vol. 95. — P. 597–611.

131. Castro, C. E. Space-time adaptive numerical methods for geophysical applications [Text] / C. E. Castro, M. Kaser, E. F. Toro // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2009. — Vol. 367, no. 1907. — P. 4613–4631.
132. Chabyshova, E. Seismic modeling of low-frequency “shadows” beneath gas reservoirs [Text] / E. Chabyshova, G. Goloshubin // Geophysics. — 2014. — Vol. 79, no. 6. — P. D417–D423.
133. Cheadle, S. P. Orthorhombic anisotropy: A physical seismic modeling study [Text] / S. P. Cheadle, R. J. Brown, D. C. Lawton // Geophysics. — 1991. — Vol. 56, no. 10. — P. 1603–1613.
134. Chen, J.-B. A 27-point scheme for a 3D frequency-domain scalar wave equation based on an average-derivative method [Text] / J.-B. Chen // Geophysical Prospecting. — 2014. — Vol. 62, no. 2. — P. 258–277.
135. Chen, X. A hybrid Hermite–discontinuous Galerkin method for hyperbolic systems with application to Maxwell’s equations [Text] / X. Chen, D. Appelo, T. Hagstrom // Journal of Computational Physics. — 2014. — Vol. 257, Part A. — P. 501–520.
136. Chi, S. Stoneley-wave speed modeling in general anisotropic formations [Text] / S. Chi, X. Tang // Geophysics. — 2006. — Vol. 71, no. 4. — P. F67–F77.
137. Chung, E. T. A staggered discontinuous Galerkin method for the simulation of seismic waves with surface topography [Text] / E. T. Chung, C. Y. Lam, J. Qian // Geophysics. — 2015. — Vol. 80, no. 4. — P. T119–T135.
138. Chung, E. Multiscale finite element modeling of acoustic wave propagation [Text] / E. Chung, Y. Efendiev, R. Gibson // SEG Annual Meeting (San Antonio, USA, September 18-23, 2011) : Expanded Abstracts. — San Antonio, 2011. — P. 2898–2903.
139. Ciz, R. Generalization of Gassmann equations for porous media saturated with a solid material [Text] / R. Ciz, S. A. Shapiro // Geophysics. — 2007. — Vol. 72, no. 6. — P. A75–A79.

140. Ciz, R. Stress-dependent anisotropy in transversely isotropic rocks: Comparison between theory and laboratory experiment on shale [Text] / R. Ciz, S. Shapiro // *Geophysics*. — 2009. — Vol. 74, no. 1. — P. D7–D12.
141. Cohen, G. Construction analysis of fourth-order finite difference schemes for the acoustic wave equation in nonhomogeneous media [Text] / G. Cohen, P. Joly // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 1996. — Vol. 33, no. 4. — P. 1266–1302.
142. Cohen, G. Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations [Text] / G. Cohen. — Berlin : Springer-Verlag, 2002. — 348 p.
143. Collino, F. Analyse numérique d'une méthode de raffinement de maillage espace-temps pour l'équation des ondes [Text] / F. Collino, T. Fouquet, P. Joly // *INRIA Rapprot de recherche*. — 1998. — Vol. 3474. — P. 1-119. —
144. Collino, F. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. Part I: Construction [Text] / F. Collino, T. Fouquet, P. Joly // *Numer. Math.* — 2003. — Vol. 95. — P. 197–221.
145. Collino, F. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. Part II: Analysis [Text] / F. Collino, T. Fouquet, P. Joly // *Numer. Math.* — 2003. — Vol. 95. — P. 223–251.
146. Collino, F. Application of the perfectly matched layer absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media [Text] / F. Collino, C. Tsogka // *Geophysics*. — 2001. — Vol. 66. — P. 294–307.
147. Crampin, S. A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic-media [Text] / S. Crampin // *Wave motion*. — 1981. — Vol. 3, no. 4. — P. 343–391.
148. Cotton, J. Land seismic reservoir monitoring: Where is the steam going? [Text] / J. Cotton, E. Forgues, J.C. Hornman // *SEG Annual Meeting (Las Vegas, USA, November 4-9, 2012) : Expanded Abstracts*. — Las Vegas, 2012. — P. 1–5.
149. M.E.Curtis. On the linear theory of viscoelasticity [Text] / M.E.Curtis, E.Sternberg // *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 1962. — Vol. 11. — P. 291–356.

150. Das, A. Frequency dependent elastic properties and attenuation in heavy-oil sands: comparison between measured and modeled data [Text] / A. Das, M. Batzle // SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 17-22, 2010) : Expanded Abstracts. — Denver, 2010. — P. 2547–2551.
151. Das, A. Modeling studies of heavy oil — in between solid and fluid properties [Text] / A. Das, M. Batzle // The Leading Edge. — 2008. — Vol. 27, no. 9. — P. 1116–1123.
152. Davydycheva, S. An efficient finite-difference scheme for electromagnetic logging in 3D anisotropic inhomogeneous media [Text] / S. Davydycheva, V. Druskin, T. Habashy // Geophysics. — 2003. — Vol. 68, no. 5. — P. 1525–1535.
153. Deformation bands and their impact on fluid flow in sandstone reservoirs: the role of natural thickness variations [Text] / A. Rotevatn [et al.] // Geofluids. — 2013. — Vol. 13, no. 3. — P. 359–371.
154. Diaz, J. Energy conserving explicit local time stepping for second-order wave equations [Text] / J. Diaz, M. J. Grote // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2009. — Vol. 31, no. 3. — P. 1985–2014.
155. Deraemaeker, A. Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions [Text] / A. Deraemaeker, I. Babuška, P. Bouillard // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1999. — Vol. 46, no. 4. — P. 471–499.
156. Digital rock physics: Effect of fluid viscosity on effective elastic properties [Text] / E. H. Saenger [et al.] // Journal of Applied Geophysics. — 2011. — Vol. 74, no. 4. — P. 236–241.
157. Dmitriev, M. Application of M-PML reflectionless boundary conditions to the numerical simulation of wave propagation in anisotropic media. Part I: Reflectivity [Text] / M. Dmitriev, V. Lisitsa // Numerical Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 4, no. 4. — P. 271–280.
158. Dmitriev, M. Application of M-PML absorbing boundary conditions to the numerical simulation of wave propagation in anisotropic media. Part II: Stability [Text] /

- M. Dmitriev, V. Lisitsa // Numerical Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 5, no. 1. — P. 36–44.
159. Dong, Z. 3-D viscoelastic anisotropic modeling of data from a multicomponent, multiazimuth seismic experiment in northeast texas [Text] / Z. Dong, G. A. McMechan // Geophysics. — 1995. — Vol. 60, no. 4. — P. 1128–1138.
160. Dovgilovich, L. High-accuracy finite-difference schemes for solving elastodynamic problems in curvilinear coordinates within multiblock approach [Text] / L. Dovgilovich, I. Sofronov // Applied Numerical Mathematics. — 2015. — Vol. 93. — P. 176–194.
161. Drobyshovich, V.I. An algorithm of solution of parabolic equations with different time-steps in subdomains [Text] / V.I. Drobyshovich, Yu.M. Laevsky // Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. — 1992. — Vol. 7, no. 3. — P. 205–220.
162. Drossaert, F. H. A nonsplit complex frequency-shifted PML based on recursive integration for FDTD modeling of elastic waves [Text] / F. H. Drossaert, A. Giannopoulos // Geophysics. — 2007. — Vol. 72, no. 2. — P. T9–T17.
163. Drossaert, F. H. Complex frequency shifted convolution PML for FDTD modelling of elastic waves [Text] / F. H. Drossaert, A. Giannopoulos // Wave motion. — 2007. — Vol. 44, no. 7-8. — P. 593–604.
164. Druskin, V. Gaussian spectral rules for second order finite-difference schemes [Text] / V. Druskin, L. Knizhnermann // Numer. Algorithms. — 2000. — Vol. 25. — P. 139–159.
165. Druskin, V. Gaussian spectral rules for the three-point second differences I: a two-point positive definite problem in a semi-infinite domain [Text] / V. Druskin, L. Knizhnermann // SIAM J. Numer. Anal. — 1999. — Vol. 36. — P. 442–464.
166. Dumbser, M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - II. The three-dimensional isotropic case [Text] /

- M. Dumbser, M. Kaser // *Geophysical Journal International*. — 2006. — Vol. 167, no. 1. — P. 319–336.
167. Dumbser, M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes V. Local time stepping and p-adaptivity [Text] / M. Dumbser, M. Kaser, E. F. Toro // *Geophysical Journal International*. — 2007. — Vol. 171, no. 2. — P. 695–717.
168. Emergence of oblique dunes in a landscape-scale experiment [Text] / L. Ping, [et al.] // *Nature Geosci.* — 2014. — Vol. 7, no. 2. — P. 99–103.
169. Engquist, B. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves [Text] / B. Engquist, A. Majda // *Math. Comp.* — 1977. — Vol. 31. — P. 629–651.
170. Ernst, O. G. Why it is Difficult to Solve Helmholtz Problems with Classical Iterative Methods [Text] / O. G. Ernst, M. J. Gander // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. — Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 2012. — Vol. 83. — P. 325–363.
171. Evaluating permanent seismic monitoring with shallow buried sensors in a desert environment [Text] / A. Bakulin [et al.] // *SEG Annual Meeting (Las Vegas, USA, November 4-9, 2012): expanded abstracts*. — Las Vegas, 2012. — P. 1–5.
172. Evolution of seismic velocities in heavy oil sand reservoirs during thermal recovery process [Text] / J.-F. Nauroy [et al.] // *Oil Gas Sci. Technol. – Rev. IFP Energies nouvelles*. — 2012. — Vol. 67, no. 6. — P. 1029–1039.
173. Fault damage zone of extensional faults in porous sandstone: spatial distribution of deformation bands [Text] / S. Schueller [et al.] // *Journal of Structural Geology*. — 2013. — Vol. 52. — P. 148–162.
174. Fault facies modelling; technique and approach for 3D conditioning and modelling of faulted grids [Text] / N. Fredman [et al.] // *AAPG Bulletin*. — 2008. — Vol. 92, no. 11. — P. 1457 – 1478.

175. Finite difference simulation of elastic wave propagation through 3D heterogeneous multiscale media based on locally refined grids [Text] / V. I. Kostin, V. V. Lisitsa [et al.] // Numerical Analysis and Applications. — 2013. — Vol. 6, no. 1. — P. 40–48.
176. Finite-difference modeling of wave propagation on microscale: A snapshot of the work in progress [Text] / E. H. Saenger [et al.] // Geophysics. — 2007. — Vol. 72, no. 5. — P. SM293–SM300.
177. Footprint of the fine structure of the reservoir in scattered waves [Text] / V. Cheverda, ..., V. Lisitsa [et al.] // 5-th EAGE Conference and Exhibition, Saint Petersburg 2012 (Saint Petersburg, Russia, April 03-05, 2012) : Expanded Abstracts. — Saint Petersburg, 2012. — P. B011.
178. Fraser, D. Interpolation by the FFT revisited - an experimental investigation [Text] / D. Fraser // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process. — 1989. — Vol. 37, no. 5. — P. 665 – 675.
179. Frehner, M. Initiation of Krauklis waves by incident seismic body waves: Numerical modeling, laboratory perspectives, and application for fracture-size estimation [Text] / M. Frehner, M. Lupi, P.-J. R. Shih // SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 26-31, 2014) : Expanded Abstracts. — Denver, 2014. — P. 3422–3427.
180. Futterman, W. Dispersive body waves [Text] / W.I. Futterman // J. Geophys. Res. — 1962. — Vol. 67. — P. 5279–5291.
181. Galis, M. A 3-D hybrid finite-difference–finite-element viscoelastic modelling of seismic wave motion [Text] / M. Galis, P. Moczo, J. Kristek // Geophysical Journal International. — 2008. — Vol. 175. — P. 153–184.
182. Gander, M. J. Applying GMRES to the Helmholtz equation with shifted Laplacian preconditioning: what is the largest shift for which wavenumber-independent convergence is guaranteed? [Text] / M. J. Gander, I. G. Graham, E. A. Spence // Numerische Mathematik. — 2015. — Vol. 131, no. 3. — P. 567–614.

183. A numerical homogenization method for heterogeneous, anisotropic elastic media based on multiscale theory [Text] / K. Gao [et al.] // *Geophysics*. — 2015. — Vol. 80, no. 4. — P. D385–D401.
184. Gassmann, F. Uber die elastizitat poroser medien [Text] / F. Gassmann // *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*. — 1951. — Vol. 96. — P. 1–23.
185. Gibson, R. L. Numerical simulation of acoustic wave propagation in layered media with a generalized multiscale finite element method [Text] / R. L. Gibson, M. Artemyev, W. T. Leung // *SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 26-31, 2014) : Expanded Abstracts 2014*. — Denver, 2014. — P. 3355–3360. —
186. Gittelsohn, C. J. Dispersion analysis of plane wave discontinuous Galerkin methods [Text] / C. J. Gittelsohn, R. Hiptmair // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. — 2014. — Vol. 98, no. 5. — P. 313–323.
187. Givoli, D. Finite element formulation with high order absorbing boundary conditions for time-dependent waves [Text] / D. Givoli, T. Hagstrom, I. Patlashenko // *Comput. Meth. Appl. Mech.* — 2006. — Vol. 195. — P. 3666–3690.
188. Grechka, V. Effective elasticity of rocks with closely spaced and intersecting cracks [Text] / V. Grechka, M. Kachanov // *Geophysics*. — 2006. — Vol. 71, no. 3. — P. D85–D91.
189. Grechka, V. Predicting permeability and gas production of hydraulically fractured tight sands from microseismic data [Text] / V. Grechka, P. Mazumdar, S. Shapiro // *Geophysics*. — 2010. — Vol. 75, no. 1. — P. B1–B10.
190. Grote, M. J. Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation [Text] / M. J. Grote, A. Schneebeli, D. Schotzau // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 2006. — Vol. 44, no. 6. — P. 2408–2431.
191. Guillot, L. 2-D non-periodic homogenization of the elastic wave equation: SH case [Text] / L. Guillot, Y. Capdeville, J. J. Marigo // *Geophysical Journal International*. — 2010. — Vol. 182, no. 3. — P. 1438–1454.

192. Gustafsson, B. Time compact difference methods for wave propagation in discontinuous media [Text] / B. Gustafsson, P. Wahlund // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2004. — Vol. 26, no. 1. — P. 272–293.
193. Gustafsson, B. Time compact high order difference methods for wave propagation [Text] / B. Gustafsson, E. Mossberg // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2004. — Vol. 26, no. 1. — P. 259–271.
194. Hackbusch, W. A sparse matrix arithmetic based on h-matrices. Part I: Introduction to h-matrices [Text] / W. Hackbusch // Computing. — 1999. — Vol. 62, no. 2. — P. 89–108.
195. Hackert, C. L. Estimating scattering attenuation from vugs or karsts [Text] / C. L. Hackert, J. O. Parra // Geophysics. — 2003. — Vol. 68, no. 4. — P. 1182–1188.
196. Hagstrom, T. Radiation boundary conditions for Maxwell's equations: A review of accurate time-domain formulations [Text] / T. Hagstrom, S. Lau // J. Comput. Math. — 2007. — Vol. 25, no. 3. — P. 305–336.
197. Hayashi, K. Discontinuous-grid finite-difference seismic modeling including surface topography [Text] / K. Hayashi, D. R. Burns, M. N. Toksöz // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2001. — Vol. 91. — P. 1750–1764.
198. Heavy oil viscosity and density prediction at normal and elevated temperatures [Text] / O. Alomair [et al.] // Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. — 2015. — P. 1–11.
199. Hestholm, S. O. 2D finite-difference viscoelastic wave modelling including surface topography [Text] / S. O. Hestholm, B. Ruud // Geophysical Prospecting. — 2000. — Vol. 48, no. 2. — P. 341–373.
200. Hestholm, S. 3D free-boundary conditions for coordinate-transform finite-difference seismic modelling [Text] / S. Hestholm, B. Ruud // Geophysical Prospecting. — 2002. — Vol. 50, no. 5. — P. 463–474.

201. Hestholm, S. Three-dimensional finite difference viscoelastic wave modelling including surface topography [Text] / S. Hestholm // *Geophys. J. Int.* — 1999. — Vol. 139. — P. 852–878.
202. Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation [Text] / G. Cohen [et al.] // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* — 2001. — Vol. 38, no. 6. — P. 2047–2078.
203. Hinton, E. A note on mass lumping and related processes in the finite element method [Text] / E. Hinton, T. Rock, O. C. Zienkiewicz // *Earthquake Engineering and Structural Dynamics.* — 1976. — Vol. 4, no. 3. — P. 245–249.
204. Hiptmair, R. Non-reflecting boundary conditions for Maxwell's equations [Text] / R. Hiptmair, A. Schadle // *Computing.* — 2003. — Vol. 71. — P. 265–292.
205. Hu, F. Q. An analysis of the discontinuous Galerkin method for wave propagation problems [Text] / F. Q. Hu, M. Y. Hussaini, P. Rasetarinera // *Journal of Computational Physics.* — 1999. — Vol. 151, no. 2. — P. 921–946.
206. Hu, W. Application of the nearly perfectly matched layer in acoustic wave modeling [Text] / W. Hu, A. Abubakar, T. M. Habashy // *Geophysics.* — 2007. — Vol. 72, no. 5. — P. SM169–SM175.
207. Hu, Y. Comparison of effective stiffness and compliance for characterizing cracked rocks [Text] / Y. Hu, G. A. McMechan // *Geophysics.* — 2009. — Vol. 74, no. 2. — P. D49–D55.
208. Hu, F. Q. Eigensolution analysis of the discontinuous Galerkin method with nonuniform grids: I. One space dimension [Text] / F. Q. Hu, H. L. Atkins // *Journal of Computational Physics.* — 2002. — Vol. 182, no. 2. — P. 516–545.
209. Hu, Y. Sensitivity of three-component 3D finite-difference elastic seismic modeling to inclusion parameters in HTI and TTI media with high inclusion density [Text] / Y. Hu, G. McMechan // *Geophysics.* — 2010. — Vol. 75, no. 2. — P. T49–T61.

210. Hudson, J. A. Elastic moduli of a cracked solid [Text] / J. A. Hudson // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.— 1980.— Vol. 88.— P. 371–384.
211. Hudson, J. Effective-medium theories for fluid-saturated materials with aligned cracks [Text] / J.A. Hudson, T. Pointer, E. Liu // Geophysical Prospecting.— 2001.— Vol. 49, no. 5.— P. 509–522.
212. Hudson, J. Effective-medium theories for fluid-saturated materials with aligned cracks [Text] / J.A. Hudson, T. Pointer, E. Liu // Geophysical Prospecting.— 2001.— Vol. 49, no. 5.— P. 509–522.— 10.1111/j.1365-2478.2001.00272.x.
213. Hudson, J. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks [Text] / J. Hudson // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society.— 1981.— Vol. 64.— P. 133–150.
214. Hybrid modeling of P-SV seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures [Text] / P. Moczo [et al.] // Bulletin of the Seismological Society of America.— 1997.— Vol. 87, no. 5.— P. 1305–1323.
215. Igel, H. Anisotropic wave propagation through finite-difference grids [Text] / H. Igel, P. Mora, B. Rioulet // Geophysics.— 1995.— Vol. 60.— P. 1203–1216.
216. Impact of cavernous/fractured reservoirs to scattered seismic waves in 3D heterogeneous media: Accurate numerical simulation and field study [Text] / G. V. Reshetova, V. V. Lisitsa, [et al.] // SEG Annual Meeting (San Antonio, USA, September 18-23, 2011) : Expanded Abstracts.— SEG Technical Program Expanded Abstracts.— San Antonio, 2011.— P. 2875–2880.
217. Jakobsen, M. Unified theory of global flow and squirt flow in cracked porous media [Text] / M. Jakobsen, M. Chapman // Geophysics.— 2009.— Vol. 74, no. 2.— P. WA65–WA76.
218. Joly, P. An error analysis of conservative space-time mesh refinement methods for the one-dimensional wave equation [Text] / P. Joly, J. Rodriguez // SIAM Journal on Numerical Analysis.— 2005.— Vol. 43, no. 2.— P. 825–859.

219. Kachanov, M. Effective elastic properties of cracked solids: Critical review of some basic concepts [Text] / M. Kachanov // Applied Mechanical Review. — 1992. — Vol. 45. — P. 304–335.
220. Kachanov, M. Incremental linear-elastic response of rocks containing multiple rough fractures: Similarities and differences with traction-free cracks [Text] / M. Kachanov, R. Prioul, J. Jocker // Geophysics. — 2010. — Vol. 75, no. 1. — P. D1–D11.
221. Karsten, W. Layer-stripping with offset variable parameters compensating for the reflected PS-waves splitting in an azimuthally anisotropic layer [Text] / W.V. Karsten, E.V. Afonina, S.B. Gorshkalev // 5-th EAGE Conference and Exhibition, Saint Petersburg 2012 (Saint Petersburg, Russia, April 03-05, 2012) : Expanded Abstracts. — Saint Petersburg, 2012. — P. B015.
222. Kaser, M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. The two-dimensional isotropic case with external source terms [Text] / M. Kaser, M. Dumbser // Geophysical Journal International. — 2006. — Vol. 166, no. 2. — P. 855–877.
223. Kato, A. Elastic property changes in a bitumen reservoir during steam injection [Text] / A. Kato, S. Onozuka, T. Nakayama // The Leading Edge. — 2008. — Vol. 27, no. 9. — P. 1124–1131.
224. Ke, G. Rock-physics models for bitumen-saturated sands: Fractional gradient model and Hashin-Shtrikman iterative model [Text] / G. Ke, M. Johnston, H. Dong // Geophysics. — 2012. — Vol. 77, no. 2. — P. D7–D15.
225. Kim, S. I. A local mesh refinement algorithm for the time-domain finite-difference method to solve Maxwell's equations [Text] / S. I. Kim, W. J. R. Hofer // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. — 1990. — Vol. 38. — P. 812–815.
226. King, M. S. Biot dispersion for P- and S-wave velocities in partially and fully saturated sandstones [Text] / M. S. King, J. R. Marsden, J.W.Dennis // Geophysical Prospecting. — 2000. — Vol. 48. — P. 1075–1089.

227. Komatitsch, D. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation [Text] / D. Komatitsch, R. Martin // *Geophysics*. — 2007. — Vol. 72, no. 5. — P. SM155–SM167.
228. Komatitsch, D. The spectral element method; an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures [Text] / D. Komatitsch, J.-P. Vilotte // *Bulletin of the Seismological Society of America*. — 1998. — Vol. 88, no. 2. — P. 368–392.
229. Korneev, V. Slow waves in fractures filled with viscous fluid [Text] / V. Korneev // *Geophysics*. — 2008. — Vol. 73, no. 1. — P. N1–N7.
230. Kragh, E. Rough seas and statistical deconvolution [Text] / E. Kragh, R. Laws // *Geophysical Prospecting*. — 2006. — Vol. 54, no. 4. — P. 475–485.
231. Kragh, E. Seismic repeatability, normalized RMS, and predictability [Text] / E. Kragh, P. Christie // *The Leading Edge*. — 2002. — Vol. 21, no. 7. — P. 640–647.
232. Kreiss, H.-O. Initial boundary value problems for hyperbolic systems [Text] / H.-O. Kreiss // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1970. — Vol. 23. — P. 277–298.
233. Kristek, J. Stable discontinuous staggered grid in the finite-difference modelling of seismic motion [Text] / J. Kristek, P. Moczo, M. Galis // *Geophysical Journal International*. — 2010. — Vol. 183, no. 3. — P. 1401–1407.
234. Krzywinski, M. Points of significance: Significance, p-values and t-tests [Text] / M. Krzywinski, N. Altman // *Nature Methods* (Nature Publishing Group). — 2013. — Vol. 10, no. 11. — P. 1041–1042.
235. Behle, A. Hybrid modeling of elastic-wave propagation in two-dimensional laterally inhomogeneous media [Text] / A. Behle, B. Kummer, F. Dorau // *Geophysics*. — 1987. — Vol. 52, no. 6. — P. 765–771.
236. Laws, R. Rough seas and time-lapse seismic [Text] / R. Laws, E. Kragh // *Geophysical Prospecting*. — 2002. — Vol. 50, no. 2. — P. 195–208.

237. Lebedev, V. I. Difference analogies of orthogonal decompositions of basic differential operators and some boundary value problems. I [Text] / V. I. Lebedev // Soviet Comput. Math. Math. Physics. — 1964. — Vol. 4. — P. 449–465.
238. Levander, A. R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms [Text] / A. R. Levander // Geophysics. — 1988. — Vol. 53, no. 11. — P. 1425–1436.
239. Li, D. A moving window semivariance estimator [Text] / D. Li, L. W. Lake // Water Resour. Res. — 1994. — Vol. 30, no. 5. — P. 1479–1489.
240. Lisitsa, V. Combination of finite differences with discontinuous Galerkin method for seismic modeling [Text] / V. Lisitsa, V. Tcheverda // The 12th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation "Waves2015"(Karlsruhe, Germany, July 20-24, 2015) : book of abstracts. — Karlsruhe, 2015. — P. 362–363.
241. Lisitsa, V. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation [Text] / V. Lisitsa, V. Tcheverda, C. Botter // Journal of Computational Physics. — 2016. — Vol. 311. — P. 142–157.
242. Lisitsa, V. Dispersion analysis of discontinuous Galerkin method on triangular mesh for elastic wave equation [Text] / Vadim Lisitsa // Applied Mathematical Modelling. — 2016. — Vol. 40. — P. 5077–5095.
243. Lisitsa, V. Finite-difference algorithm with local time-space grid refinement for simulation of waves [Text] / V. Lisitsa, G. Reshetova, V. Tcheverda // Computational Geosciences. — 2012. — Vol. 16, no. 1. — P. 39–54.
244. Lisitsa, V. Influence of surface topography variation on repeatability of buried receiver data in desert environment [Text] / V. Lisitsa, D. Kolyukhin, V. Tcheverda // SEG Annual Meeting (New Orleans, USA, October 18-23, 2015) : expanded abstracts. — New Orleans, 2015. — P. 244–248.
245. Lisitsa, V. Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3D anisotropic elasticity [Text] / V. Lisitsa, D. Vishnevskiy // Geophysical Prospecting. — 2010. — Vol. 58, no. 4. — P. 619–635.

246. Lisitsa, V. V. Low-cost finite-difference scheme for simulation of seismic wave propagation in models with anisotropic formations [Text] / V.V. Lisitsa, V.A. Tcheverda, D.M. Vishnevsky // 74th EAGE Conference and Exhibition (Copenhagen, Denmark, June 04-07, 2012) : Expanded Abstracts. — Copenhagen, 2012. — P. P217.
247. Lisitsa, V. Numerical simulation of seismic waves in models with anisotropic formations: coupling Virieux and Lebedev finite-difference schemes [Text] / V. Lisitsa, V. Tcheverda, D. Vishnevsky // Computational Geosciences. — 2012. — Vol. 16, no. 4. — P. 1135–1152.
248. Lisitsa, V. On specific features of the Lebedev scheme in simulating elastic wave propagation in anisotropic media [Text] / V. Lisitsa, D. Vishnevsky // Numerical Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 4, no. 2. — P. 125–135.
249. Lisitsa, V. On the interface error analysis for finite difference wave simulation [Text] / V. Lisitsa, O. Podgornova, V. Tcheverda // Computational Geosciences. — 2010. — Vol. 14, no. 4. — P. 769–778.
250. Lisitsa, V. Optimal discretization of PML for elasticity problems [Text] / V. Lisitsa // Electron. Trans. Numer. Anal. — 2008. — Vol. 30. — P. 258–277.
251. Lisitsa, V. Reflectionless truncation of target area for axially symmetric anisotropic elasticity [Text] / V. Lisitsa, E. Lys // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2010. — Vol. 234, no. 6. — P. 1803–1809.
252. Local time–space mesh refinement for simulation of elastic wave propagation in multi-scale media [Text] / V. Kostin, V. Lisitsa [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2015. — Vol. 281. — P. 669–689.
253. Local time stepping with the discontinuous Galerkin method for wave propagation in 3D heterogeneous media [Text] / S. Minisini [et al.] // Geophysics. — 2013. — Vol. 78, no. 3. — P. T67–T77.
254. Logically rectangular finite volume methods with adaptive refinement on the sphere [Text] / M. J. Berger [et al.] // Philosophical Transactions of the Royal Society A:

- Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2009. — Vol. 367, no. 1907. — P. 4483–4496.
255. Low dispersive modeling of Rayleigh waves on partly staggered grids [Text] / O. Rojas [et al.] // Computational Geosciences. — 2013. — P. 1–15.
256. Lubich, C. Fast convolution for non-reflecting boundary conditions [Text] / C. Lubich, A. Schadle // SIAM J. Sci. Comput. — 2002. — Vol. 24. — P. 161–182.
257. Lumley, D. E. Time-lapse seismic reservoir monitoring [Text] / D. E. Lumley // Geophysics. — 2001. — Vol. 66, no. 1. — P. 50–53.
258. Madariaga, R. Dynamics of an expanding circular fault [Text] / R. Madariaga // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1976. — Vol. 66, no. 3. — P. 639–666.
259. Manifestation of fluid saturation in scattered waves - numerical experiments and field study [Text] / G. Reshetova, V. Lisitsa, [et al.] // 76-th EAGE Conference and Exhibition (Amsterdam, The Netherlands, June 15-19, 2014) : abstract. — Amsterdam, 2014. — P. D201.
260. Martin, R. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for seismic wave propagation in poroelastic media [Text] / R. Martin, D. Komatitsch, A. Ezziani // Geophysics. — 2008. — Vol. 73, no. 4. — P. T51–T61.
261. Martin, R. An unsplit convolutional perfectly matched layer technique improved at grazing incidence for the viscoelastic wave equation [Text] / R. Martin, D. Komatitsch // Geophysical Journal International. — 2009. — Vol. 179, no. 1. — P. 333–344.
262. Masson, Y. J. Finite-difference modeling of Biot's poroelastic equations across all frequencies [Text] / Y. J. Masson, S. R. Pride // Geophysics. — 2010. — Vol. 75, no. 2. — P. N33–N41.
263. Mavko, G. The Rock Physics Handbook [Text] / G. Mavko, T. Mukerji, J. Dvorkin. — New York : Cambridge University Press, 2009. — 511 p.

264. Mazzieri, I. Dispersion analysis of triangle-based spectral element methods for elastic wave propagation [Text] / I. Mazzieri, F. Rapetti // Numerical Algorithms. — 2012. — Vol. 60, no. 4. — P. 631–650.
265. Mehrabadi, M. M. Eigentensors of linear anisotropic elastic materials [Text] / M. M. Mehrabadi, S. C. Cowin // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1990. — Vol. 43, no. 1. — P. 15–41.
266. Mehrabadi, M. M. Six-dimensional orthogonal tensor representation of the rotation about an axis in three dimensions [Text] / M. M. Mehrabadi, S. C. Cowin, J. Jaric // International Journal of Solids and Structures. — 1995. — Vol. 32, no. 3–4. — P. 439–449.
267. Meza-Fajardo, K. C. A nonconvolutional, split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media: Stability analysis [Text] / K. C. Meza-Fajardo, A. S. Papageorgiou // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2008. — Vol. 98, no. 4. — P. 1811–1836.
268. Mimetic seismic wave modeling including topography on deformed staggered grids [Text] / J. de la Puente [et al.] // Geophysics. — 2014. — Vol. 79, no. 3. — P. T125–T141.
269. Mittal, R. Immersed boundary methods [Text] / R. Mittal, G. Iaccarino // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2005. — Vol. 37, no. 1. — P. 239–261.
270. Moczo, P. 3D fourth-order staggered-grid finite-difference schemes: Stability and grid dispersion [Text] / P. Moczo, J. Kristek, L. Halada // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2000. — Vol. 90, no. 3. — P. 587–603.
271. Moczo, P. The finite-difference modelling of earthquake motion: Waves and Ruptures [Text] / P. Moczo, J. Kristek, M. Galis. — Cambridge : Cambridge University Press, 2014. — 365 p.
272. Modeling elastic fields across irregular boundaries [Text] / F. Muir [et al.] // Geophysics. — 1992. — Vol. 57, no. 9. — P. 1189–1193.

273. Modeling elastic wave velocities and attenuation in rocks saturated with heavy oil [Text] / B. Gurevich [et al.] // Geophysics. — 2008. — Vol. 73, no. 4. — P. E115–E122.
274. Modeling squirt dispersion and attenuation in fluid-saturated rocks using pressure dependency of dry ultrasonic velocities [Text] / O. B. de Paula [et al.] // Geophysics. — 2012. — Vol. 77, no. 3. — P. WA157–WA168.
275. Monin, A. Statistical Fluid Mechanics (Vol II): Mechanics of Turbulence [Text] / A.S. Monin, A.M. Yaglom. — Boston : MIT Press, 1975. — 890 p.
276. Monk, P. A discontinuous Galerkin method for linear symmetric hyperbolic systems in inhomogeneous media [Text] / P. Monk, G. R. Richter // Journal of Scientific Computing. — 2005. — Vol. 22-23, no. 1-3. — P. 443–477.
277. Monk, P. A dispersion analysis of finite element methods for Maxwell's equations [Text] / P. Monk, A. Parrott // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1994. — Vol. 15, no. 4. — P. 916–937.
278. Monorchio, A. Time-domain (FE/FDTD) technique for solving complex electromagnetic problems [Text] / A. Monorchio, R. Mittra // Microwave and Guided Wave Letters, IEEE. — 1998. — Vol. 8, no. 2. — P. 93–95.
279. Mulder, W. A. Spurious modes in finite-element discretizations of the wave equation may not be all that bad [Text] / W. A. Mulder // Applied Numerical Mathematics. — 1999. — Vol. 30, no. 4. — P. 425–445.
280. Muller, T. M. Seismic wave attenuation and dispersion resulting from wave-induced flow in porous rocks — a review [Text] / T. M. Muller, B. Gurevich, M. Lebedev // Geophysics. — 2010. — Vol. 75, no. 5. — P. 75A147–75A164.
281. Multiscale modeling of acoustic wave propagation in 2D heterogeneous media using local spectral basis functions [Text] / S. Fu [et al.] // SEG Annual Meeting (Houston, USA, September 22-27, 2013) : Expanded Abstracts. — Houston, 2013. — P. 3553–3558.

282. Multiscale modeling of acoustic wave propagation in 2D media [Text] / R. Gibson [et al.] // Geophysics. — 2014. — Vol. 79, no. 2. — P. T61–T75.
283. Nakagawa, S. Effect of fracture compliance on wave propagation within a fluid-filled fracture [Text] / S. Nakagawa, V. A. Korneev // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2014. — Vol. 135, no. 6. — P. 3186–3197.
284. Near surface changes and 4D seismic repeatability in desert environment: From days to years [Text] / A. Bakulin [et al.] // SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 26-31, 2014) : expanded abstracts. — Denver, 2014. — P. 4843–4847.
285. Norris, A. N. Stoneley-wave attenuation and dispersion in permeable formations [Text] / A. N. Norris // Geophysics. — 1989. — Vol. 54, no. 3. — P. 330–341.
286. Numerical modeling and laboratory measurements of seismic attenuation in partially saturated rock [Text] / M. Kuteynikova [et al.] // Geophysics. — 2014. — Vol. 79, no. 2. — P. L13–L20.
287. Numerical performances of a hybrid local-time stepping strategy applied to the reverse time migration [Text] / C. Baldassari [et al.] // Geophysical Prospecting. — 2011. — Vol. 59, no. 5. — P. 907–919.
288. Numerical simulation of seismic wave propagation in models with complex intrusions: Anisotropy, attenuation, small-scale heterogeneities [Text] / V. Kostin, V. Lisitsa [et al.] // SEG Annual Meeting (Houston, USA, September 22-27, 2013) : Expanded Abstracts. — Houston, 2013. — P. 3548–3552.
289. Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves [Text] / D. Vishnevsky, V. Lisitsa, ... [et al.] // Geophysics. — 2014. — Vol. 79, no. 4. — P. T219–T232.
290. Numerical test of the Schoenberg-Muir theory [Text] / J. M. Carcione [et al.] // Geophysics. — 2012. — Vol. 77, no. 2. — P. C27–C35.

291. On accuracy of the finite-difference and finite-element schemes with respect to P-wave to S-wave speed ratio [Text] / P. Moczo [et al.] // *Geophysical Journal International*. — 2010. — Vol. 182, no. 1. — P. 493–510.
292. On dispersive propagation of surface waves in patchy saturated porous media [Text] / Y. Zhang [et al.] // *Wave motion*. — 2014. — Vol. 51, no. 8. — P. 1225–1236.
293. On optimal finite-difference approximation of PML [Text] / S. Asvadurov [et al.] // *SAIM J. Numer. Anal.* — 2003. — Vol. 41, no. 1. — P. 287–305.
294. Palmer, I. D. Attenuation by squirt flow in undersaturated gas sands [Text] / I. D. Palmer, M. L. Traviolia // *Geophysics*. — 1980. — Vol. 45, no. 12. — P. 1780–1792.
295. Parallel implementation of a frequency-domain iterative solver for 3D acoustic wave equation [Text] / M. Belonosov [et al.] // *SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 26-31, 2014) : Expanded Abstracts*. — Denver, 2014. — P. 3471–3475.
296. Physical modeling and analysis of P-wave attenuation anisotropy in transversely isotropic media [Text] / Y. Zhu [et al.] // *Geophysics*. — 2007. — Vol. 72, no. 1. — P. D1–D7.
297. Pissarenko, D. 3D finite-difference synthetic acoustic log in cylindrical coordinates: parallel implementation [Text] / D. Pissarenko, G. Reshetova, V. Tcheverda // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2010. — Vol. 234, no. 6. — P. 1766–1772.
298. Pissarenko, D. 3D finite-difference synthetic acoustic logging in cylindrical coordinates [Text] / D. Pissarenko, G. V. Reshetova, V. A. Tcheverda // *Geophysical Prospecting*. — 2009. — Vol. 57. — P. 367–377.
299. Podgornova, O. Accuracy analysis of finite-difference staggered-grid numerical schemes for elastic-elastic and fluid-elastic interfaces [Text] / O. Podgornova, V. Lisitsa // *SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 17-22, 2010) Expanded Abstracts*. — Denver, 2010. — P. 3087–3091.

300. Podgornova, O. Transparent boundary conditions for elastic anisotropic VTI media: Axially symmetric case [Text] / O. Podgornova // Communications in Computational Physics. — 2012. — Vol. 11, no. 02. — P. 541–554.
301. Podgornova, O. Traveltime and reflection coefficients accuracy of staggered-grid finite-difference simulation of seismic waves [Text] / O. Podgornova, V. Lisitsa, D. Vishnevsky // 72-nd EAGE Conference and Exhibition (Barcelona, Spain, June 14-17, 2010) : Expanded Abstracts. — Barcelona, 2010. — P. C042.
302. Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives [Text] / I. Babuška, T. Strouboulis, S. K. Gangaraj, C. S. Upadhyay // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1997. — Vol. 140, no. 1–2. — P. 1–37.
303. Pore fluid effects on S-wave attenuation caused by wave-induced fluid flow [Text] / B. Quintal [et al.] // Geophysics. — 2012. — Vol. 77, no. 3. — P. L13–L23.
304. Pozdnyakov, V. Reliable imaging of subseismic objects by means of focusing of seismic scattering energy [Text] / V.A. Pozdnyakov, V.A. Tcheverda // 69-th EAGE Conference and Exhibition (London, UK, June 11-14, 2007) : abstract. — London, 2007. — P. P273.
305. Prasad, M. Acoustic measurements in unconsolidated sands at low effective pressure and overpressure detection [Text] / M. Prasad // Geophysics. — 2002. — Vol. 67, no. 2. — P. 405–412.
306. Pride, S. R. Deriving the equations of motion for porous isotropic media [Text] / S. R. Pride, A. F. Gangi, F. D. Morgan // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1992. — Vol. 92, no. 6. — P. 3278–3290.
307. Pride, S. R. Seismic attenuation due to wave-induced flow [Text] / S. R. Pride, J. G. Berryman, J. M. Harris // Journal of Geophysical Research. — 2004. — Vol. 109. — P. B01201.

308. Quantifying the effect of capillarity on attenuation and dispersion in patchy-saturated rocks [Text] / Q. Qi [et al.] // *Geophysics*. — 2014. — Vol. 79, no. 5. — P. WB35–WB50.
309. Quintal, B. Frequency-dependent attenuation as a potential indicator of oil saturation [Text] / B. Quintal // *Journal of Applied Geophysics*. — 2012. — Vol. 82. — P. 119–128.
310. Rasolofosaon, P. N. Generalized anisotropy parameters and approximations of attenuations and velocities in viscoelastic media of arbitrary anisotropy type; theoretical and experimental aspects [Text] / P. N.J. Rasolofosaon // *Geophysical Prospecting*. — 2010. — Vol. 58, no. 4. — P. 637–655.
311. Rational approximation for estimation of quality Q factor and phase velocity in linear, viscoelastic, isotropic media [Text] / D. Zhang [et al.] // *Computational Geosciences*. — 2011. — Vol. 15, no. 1. — P. 117–133.
312. Roach, L. A. N. Assessment of 4D seismic repeatability and CO<sub>2</sub> detection limits using a sparse permanent land array at the aquistore CO<sub>2</sub> storage site [Text] / L. A. N. Roach, D. J. White, B. Roberts // *Geophysics*. — 2015. — Vol. 80, no. 2. — P. WA1–WA13.
313. Rylander, T. Stable FEM-FDTD hybrid method for Maxwell's equations [Text] / T. Rylander, A. Bondeson // *Computer Physics Communications*. — 2000. — Vol. 125, no. 1–3. — P. 75–82.
314. Sabelfeld, K. K. Monte Carlo methods in boundary value problems [Text] / K. K. Sabelfeld. — Berlin : Springer, 1991. — 283 p.
315. Saenger, E. H. Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid [Text] / E. H. Saenger, T. Bohlen // *Geophysics*. — 2004. — Vol. 69, no. 2. — P. 583–591.
316. Saenger, E. H. Modeling the propagation of the elastic waves using a modified finite-difference grid [Text] / E. H. Saenger, N. Gold, S. A. Shapiro // *Wave Motion*. — 2000. — Vol. 31. — P. 77–92.

317. Sakamoto, R. Mixed problems for hyperbolic equations. I. Energy inequalities [Text] / R. Sakamoto // J. Math. Kyoto Univ. — 1970. — Vol. 10. — P. 349–373.
318. Sakamoto, R. Mixed problems for hyperbolic equations. II. Existence theorems with zero initial data and energy inequalities with initial data [Text] / R. Sakamoto // J. Math. Kyoto Univ. — 1970. — Vol. 10. — P. 403–417.
319. Savadatti, S. Absorbing boundary conditions for scalar waves in anisotropic media. Part 1: Time harmonic modeling [Text] / S. Savadatti, M. N. Guddati // Journal of Computational Physics. — 2010. — Vol. 229, no. 19. — P. 6696–6714.
320. Savadatti, S. Absorbing boundary conditions for scalar waves in anisotropic media. Part 2: Time-dependent modeling [Text] / S. Savadatti, M. N. Guddati // Journal of Computational Physics. — 2010. — Vol. 229, no. 18. — P. 6644–6662.
321. Schoenberg, M. A calculus for finely layered anisotropic media [Text] / M. Schoenberg, F. Muir // Geophysics. — 1989. — Vol. 54, no. 5. — P. 581–589.
322. Schoenberg, M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces [Text] / M. Schoenberg // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1980. — Vol. 68, no. 5. — P. 1516–1521.
323. Schoenberg, M. Seismic anisotropy of fractured rock [Text] / M. Schoenberg, C. M. Sayers // Geophysics. — 1995. — Vol. 60, no. 1. — P. 204–211.
324. Schubnel, A. Dispersion and anisotropy of elastic waves in cracked rocks [Text] / A. Schubnel, Y. Gueguen // Journal of Geophysical Research-Solid Earth. — 2003. — Vol. 108. — P. 2101–2116.
325. Sei, A. A family of numerical schemes for the computation of elastic waves [Text] / A. Sei // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1995. — Vol. 16, no. 4. — P. 898–916.
326. Seismic attenuation in partially saturated rocks: Recent advances and future directions [Text] / N. Tisato [et al.] // The Leading Edge. — 2014. — Vol. 33, no. 6. — P. 640–646.

327. Sengupta, M. Relationship between velocity and anisotropy perturbations and anomalous stress field around salt bodies [Text] / M. Sengupta, R. Bachrach, A. Bakulin // *The Leading Edge*. — 2009. — Vol. 28, no. 5. — P. 598–605.
328. Sensitivity of S-wave attenuation to the connectivity of fractures in fluid-saturated rocks [Text] / B. Quintal [et al.] // *Geophysics*. — 2014. — Vol. 79, no. 5. — P. WB15–WB24.
329. Seriani, G. Dispersion analysis of spectral element methods for elastic wave propagation [Text] / G. Seriani, S. P. Oliveira // *Wave motion*. — 2008. — Vol. 45, no. 6. — P. 729–744.
330. Shapiro, S. Porosity and elastic anisotropy of rocks under tectonic stress and pore-pressure changes [Text] / S. Shapiro, A. Kaselow // *Geophysics*. — 2005. — Vol. 70, no. 5. — P. N27–N38.
331. Shin, C. Sponge boundary condition for frequency-domain modeling [Text] / C. Shin // *Geophysics*. — 1995. — Vol. 60, no. 6. — P. 1870–1874.
332. Simulation of seismic wave propagation in models with complex free-surface and seabed topographies based on the coupling of discontinuous Galerkin method and finite differences [Text] / V. Tcheverda, ... , V. Lisitsa, [et al.] // *SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 26-31, 2014) : Expanded Abstracts 2014*. — Denver, 2014. — P. 3518–3523.
333. Simulation of Seismic Waves Propagation in Multiscale Media: Impact of Cavernous/Fractured Reservoirs [Text] / V. Kostin, V. Lisitsa [et al.] // *Lecture Notes in Computer Science*. — Berlin, Berlin Heidelberg, 2012. — Vol. 7133. — P. 54–64.
334. Sinha, B. K. Acoustic waves in pressurized boreholes: A finite difference formulation [Text] / B. K. Sinha, Q.H. Liu, S. Kostek // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. — 1996. — Vol. 101, no. B11. — P. 25173–25180.
335. Small scale subsurface heterogeneities - seismic modeling and imaging [Text] / V.A. Pozdnyakov, ..., V.V. Lisitsa [et al.] // *74th EAGE Conference and Exhibition*

- (Copenhagen, Denmark, June 04-07, 2012) : Expanded Abstracts. — Copenhagen, 2012. — P. Y027.
336. Sneider, R. The theory of Coda wave interferometry [Text] / R. Sneider // Pure and Applied Geophysics. — 2006. — Vol. 163. — P. 455–473.
337. Sofronov, I. L. A spectral approach for generating non-local boundary conditions for external wave problems in anisotropic media [Text] / I. L. Sofronov, O. V. Podgornova // Journal of Scientific Computing. — 2006. — Vol. 27, no. 1-3. — P. 419–430.
338. Sofronov, I. Artificial boundary conditions of absolute transparency for two- and three-dimensional external time-dependent scattering problems [Text] / I. Sofronov // Euro. J. Appl. Math. — 1998. — Vol. 9, no. 6. — P. 561–588.
339. Sofronov, I. Multi-block finite-difference method for 3D elastodynamic simulations in anisotropic subhorizontally layered media [Text] / I. Sofronov, N. Zaitsev, L. Dovgilovich // Geophysical Prospecting. — 2015. — Vol. 63, no. 5. — P. 1142–1160.
340. Sofronov, I. Application of transparent boundary conditions to high-order finite-difference schemes for the wave equation in waveguides [Text] / I.L. Sofronov, L. Dovgilovich, N. Krasnov // Applied Numerical Mathematics. — 2015. — Vol. 93. — P. 195–205.
341. Spatial orientation and distribution of reservoir fractures from scattered seismic energy [Text] / M. E. Willis [et al.] // Geophysics. — 2006. — Vol. 71, no. 5. — P. O43–O51.
342. Spikes, K. Anisotropic rock-physics modeling for the haynesville shale [Text] / K. Spikes, Q. Ren // SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 26-31, 2014) : Expanded Abstracts 2014. — Denver, 2014. — P. 2947–2951.
343. Stephen, R. A. A comparison of finite difference and reflectivity seismograms for marine models [Text] / R. A. Stephen // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. — 1983. — Vol. 72, no. 1. — P. 39–57.

344. Stephen, R. A. Modeling sea surface scattering by the time-domain finite difference method [Text] / R. A. Stephen // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1996. — Vol. 100. — P. 2070–2078.
345. Stuben, K. A review of algebraic multigrid [Text] / K. Stuben // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2001. — Vol. 128, no. 1–2. — P. 281–309.
346. Sun, H. Relating shear sonic anisotropy directions to stress in deviated wells [Text] / H. Sun, R. Prioul // *Geophysics.* — 2010. — Vol. 75, no. 5. — P. D57–D67.
347. Symes, W. Interface error analysis for numerical wave propagation [Text] / W. Symes, T. Vdovina // *Computational Geosciences.* — 2009. — Vol. 13, no. 3. — P. 363–371.
348. Synthetic seismograms: a finite-difference approach [Text] / K. R. Kelly [et al.] // *Geophysics.* — 1976. — Vol. 41, no. 1. — P. 2–27.
349. Takekawa, J. An accuracy analysis of a Hamiltonian particle method with the staggered particles for seismic-wave modeling including surface topography [Text] / J. Takekawa, H. Mikada, T. Goto // *Geophysics.* — 2014. — Vol. 79, no. 4. — P. T189–T197.
350. Tarrass, I. New curvilinear scheme for elastic wave propagation in presence of curved topography [Text] / I. Tarrass, L. Giraud, P. Thore // *Geophysical Prospecting.* — 2011. — Vol. 59, no. 5. — P. 889–906.
351. Temperature-dependent poroelastic and viscoelastic effects on microscale—modelling of seismic reflections in heavy oil reservoirs [Text] / R. Ciz [et al.] // *Geophysical Journal International.* — 2009. — Vol. 176, no. 3. — P. 822–832.
352. The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion [Text] / P. Moczo [et al.] // *Acta Physica Slovaca.* — 2007. — Vol. 57, no. 2. — P. 177–406.

353. The implementation of an improved NPML absorbing boundary condition in elastic wave modeling [Text] / Z. Qin [et al.] // *Applied Geophysics*. — 2009. — Vol. 6, no. 2. — P. 113–121.
354. Thompson, L. L. A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics [Text] / L. L. Thompson // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2006. — Vol. 119, no. 3. — P. 1315–1330.
355. Thompson, M. Acquisition geometry versus 4C image quality. A study from Gullfaks south [Text] / M. Thompson, B. Arntsen, L. Amundsen // *SEG Annual Meeting (Dallas, USA, October 16-21, 2003) : Expanded Abstracts*. — Dallas, 2003. — P. 793–796.
356. Thompson, W. On six principal strains of an elastic solid [Text] / Lord Kelvin (W. Thompson) // *Phil. Trans. R. Soc.* — 1856. — Vol. 166. — P. 495–498.
357. Thomsen, L. Weak elastic anisotropy [Text] / L. Thomsen // *Geophysics*. — 1986. — Vol. 51, no. 10. — P. 1954–1966.
358. Time-lapse monitoring of CO<sub>2</sub> sequestration: A site investigation through integration of reservoir properties, seismic imaging, and borehole and surface gravity data [Text] / R. A. Krahenbuhl [et al.] // *Geophysics*. — 2015. — Vol. 80, no. 2. — P. WA15–WA24.
359. Time-lapse imaging at Bullwinkle field, Green canyon 65, offshore Gulf of Mexico [Text] / A. M. Swanston [et al.] // *Geophysics*. — 2003. — Vol. 68, no. 5. — P. 1470–1484.
360. Time-lapse tomography [Text] / A. L. Vesnaver [et al.] // *Geophysics*. — 2003. — Vol. 68, no. 3. — P. 815–823.
361. Tisato, N. Measurements of seismic attenuation and transient fluid pressure in partially saturated berea sandstone: evidence of fluid flow on the mesoscopic scale [Text] / N. Tisato, B. Quintal // *Geophysical Journal International*. — 2013. — Vol. 195, no. 1. — P. 342–351.

362. Tran, N. Simulated annealing technique in discrete fracture network inversion: optimizing the optimization [Text] / N.H. Tran // *Comput. Geosci.* — 2007. — Vol. 11. — P. 249–260.
363. Tromp, J. Spectral-element and adjoint methods in seismology [Text] / J. Tromp, D. Komatitsch, Q. Liu // *Commun. Comput. Phys.* — 2008. — Vol. 3, no. 1. — P. 1–32.
364. Tsvankin, I. Anisotropic parameters and P-wave velocity for orthorhombic media [Text] / I. Tsvankin // *Geophysics.* — 1997. — Vol. 62, no. 4. — P. 1292–1309.
365. Tsynkov, S. V. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review [Text] / S. V. Tsynkov // *Applied Numerical Mathematics.* — 1998. — Vol. 27, no. 4. — P. 465–532.
366. Tutuncu, A. N. An experimental investigation of factors influencing compressional and shear-wave velocities and attenuations in tight gas sandstones [Text] / A. N. Tutuncu, A. L. Podio, M. M. Sharma // *Geophysics.* — 1994. — Vol. 59, no. 1. — P. 77–86.
367. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems [Text] / D. Arnold [et al.] // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* — 2002. — Vol. 39, no. 5. — P. 1749–1779.
368. Use of 3D multi-scale numerical simulation to study multiple scattering effects of fluid-filled cavernous/fractured reservoirs [Text] / V.V. Lisitsa [et al.] // *EAGE Workshop on High Performance Computing for Upstream (Chania, Crete, Greece, September 07-10, 2014) : abstracts.* — Chania, 2014. — P. HPC26.
369. Vavryčuk, V. Velocity, attenuation, and quality factor in anisotropic viscoelastic media: A perturbation approach [Text] / V. Vavryčuk // *Geophysics.* — 2008. — Vol. 73, no. 5. — P. D63–D73.
370. Vavryčuk, V. Weak anisotropy-attenuation parameters [Text] / V. Vavryčuk // *Geophysics.* — 2009. — Vol. 74, no. 5. — P. WB203–WB213.

371. Virieux, J. A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging [Text] / J. Virieux, H. Calandra, R.-E. Plessix // *Geophysical Prospecting*. — 2011. — Vol. 59, no. 5. — P. 794–813.
372. Virieux, J. Dynamic faulting studied by a finite difference method [Text] / J. Virieux, R. Madariaga // *Bulletin of the Seismological Society of America*. — 1982. — Vol. 72, no. 2. — P. 345–369.
373. Virieux, J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method [Text] / J. Virieux // *Geophysics*. — 1986. — Vol. 51, no. 4. — P. 889–901.
374. Vishnevsky, D. Efficient finite-difference multi-scheme approach to the simulation of seismic waves in anisotropic media [Text] / D. Vishnevsky, V. Lisitsa, V. Tcheverda // *Numerical Analysis and Applications*. — 2012. — Vol. 5, no. 2. — P. 144–149.
375. Wang, Z. Seismic anisotropy in sedimentary rocks, part 2: Laboratory data [Text] / Z. Wang // *Geophysics*. — 2002. — Vol. 67, no. 5. — P. 1423–1440.
376. Warburton, T. A low-storage curvilinear discontinuous Galerkin method for wave problems [Text] / T. Warburton // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2013. — Vol. 35, no. 4. — P. A1987–A2012.
377. Warren, G. S. Numerical dispersion in the finite-element method using triangular edge elements [Text] / G. S. Warren, W. R. Scott // *Microwave and Optical Technology Letters*. — 1995. — Vol. 9, no. 6. — P. 315–319.
378. Water saturation effects on wave velocity and attenuation in porous rock with aligned fractures [Text] / J. Sothcott [et al.] // *SEG Annual Meeting (Denver, USA, October 26-31, 2014) : Expanded Abstracts*. — Denver, 2014. — P. 2766–2771.
379. White, R. E. The accuracy of estimating Q from seismic data [Text] / R. E. White // *Geophysics*. — 1992. — Vol. 57, no. 11. — P. 1508–1511.

380. Winkler, K. W. Effects of borehole stress concentrations on dipole anisotropy measurements [Text] / K. W. Winkler, B. K. Sinha, T. J. Plona // *Geophysics*. — 1998. — Vol. 63, no. 1. — P. 11–17.
381. Winterstein, D. F. Velocity anisotropy terminology for geophysicists [Text] / D. F. Winterstein // *Geophysics*. — 1990. — Vol. 55, no. 8. — P. 1070–1088.
382. Wu, R.-B. Hybrid finite-difference time-domain modeling of curved surfaces using tetrahedral edge elements [Text] / R.-B. Wu, T. Itoh // *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*. — 1997. — Vol. 45, no. 8. — P. 1302–1309.
383. Wulff, A.-M. Seismic monitoring of fluid fronts: An experimental study [Text] / A.-M. Wulff, S. Mjaaland // *Geophysics*. — 2002. — Vol. 67, no. 1. — P. 221–229.
384. Yang, H. Dispersion and dissipation errors of two fully discrete discontinuous Galerkin methods [Text] / H. Yang, F. Li, J. Qiu // *Journal of Scientific Computing*. — 2013. — Vol. 55, no. 3. — P. 552–574.
385. Yee, K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [Text] / K. Yee // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. — 1966. — Vol. 14. — P. 302–307.
386. Zhang, X. A simple and accurate discontinuous Galerkin scheme for modeling scalar-wave propagation in media with curved interfaces [Text] / X. Zhang, S. Tan // *Geophysics*. — 2015. — Vol. 80, no. 2. — P. T83–T89.
387. Zhang, J. Elastic wave modelling in 3-D fractured media: an explicit approach [Text] / J. Zhang, H. Gao // *Geophysical Journal International*. — 2009. — Vol. 177, no. 3. — P. 1233–1241.
388. Zhang, J. Elastic wave propagation in heterogeneous anisotropic media using the lumped finite-element method [Text] / J. Zhang, D. J. Verschuur // *Geophysics*. — 2002. — Vol. 67, no. 2. — P. 625–638.

389. Zhang, J. Quadrangle-grid velocity-stress finite-difference method for elastic-wave-propagation simulation [Text] / J. Zhang // *Geophysical Journal International*. — 1997. — Vol. 131, no. 1. — P. 127–134.
390. Zhang, J. Quadrangle-grid velocity-stress finite difference method for poroelastic wave equations [Text] / J. Zhang // *Geophysical Journal International*. — 1999. — Vol. 139, no. 1. — P. 171–182.
391. Zhang, Y. The use of effective medium theories for seismic wave propagation and fluid flow in fractured reservoirs under applied stress [Text] / Y. Zhang, C. M. Sayers, J. I. Adachi // *Geophysical Journal International*. — 2009. — Vol. 177, no. 1. — P. 205–221.
392. Zhu, Y. Effective attenuation anisotropy of thin-layered media [Text] / Y. Zhu, I. Tsvankin, I. Vasconcelos // *Geophysics*. — 2007. — Vol. 72, no. 5. — P. D93–D106.
393. Zhu, Y. Plane-wave attenuation anisotropy in orthorhombic media [Text] / Y. Zhu, I. Tsvankin // *Geophysics*. — 2007. — Vol. 72, no. 1. — P. D9–D19.
394. Zhu, Y. Plane-wave propagation in attenuative transversely isotropic media [Text] / Y. Zhu, I. Tsvankin // *Geophysics*. — 2006. — Vol. 71, no. 2. — P. T17–T30.
395. Zyserman, F. I. Dispersion analysis of a non-conforming finite element method for the Helmholtz and elastodynamic equations [Text] / F. I. Zyserman, P. M. Gauzellino, J. E. Santos // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. — 2003. — Vol. 58, no. 9. — P. 1381–1395.