

*На правах рукописи*



Марков Павел Владимирович

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ  
НА РАЗЛИЧНЫХ МАСШТАБАХ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Тюменский государственный университет».

Научный  
руководитель: доктор физико-математических наук  
**Родионов Сергей Павлович**

Официальные  
оппоненты: **Байков Виталий Анварович,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
ООО «РН-БашНИПИнефть», г. Уфа,  
старший эксперт бюро старших экспертов

**Головин Сергей Валерьевич,**  
доктор физико-математических наук, профессор РАН,  
ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск,  
главный научный сотрудник лаборатории цифровых и  
интеллектуальных систем добычи углеводородов

Ведущая  
организация: Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Российский  
государственный университет нефти и газа (национальный  
исследовательский университет) имени И.М. Губкина»,  
г. Москва

Защита состоится 2 июля 2021 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 999.141.03 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий», федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» по адресу 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, конференц-зал ФИЦ ИВТ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий»,  
<http://www.ict.nsc.ru/ru/structure/discouncil/markov-pv>

Автореферат разослан 29 апреля 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
кандидат физико-математических наук, доцент



Лебедев А.С.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Процессы фильтрации широко распространены в природе и технических системах. Структура пористой среды зачастую является сложной, в ней имеются неоднородности различной протяженности (масштаб). Фильтрация в такой среде описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, вид которых зависит от масштаба, на котором выполняется исследование. Решения указанных уравнений происходит в большинстве случаев с помощью численных методов и, в частности, с помощью различных дискретных моделей: разностные схемы, дискретные динамические системы, поросетевые модели и др.

**Актуальность исследования.** В настоящее время моделирование разработки нефтяных и газовых месторождений, как обязательный этап проектирования разработки, включает в себя построение дискретных моделей процессов фильтрации. Требование детальности этих моделей для их использования при проектировании как разработки всего месторождения в целом, так и мероприятий по скважинам требует больших временных затрат, что влияет на скорость принятия решений. Также высокая неопределенность в исходных для моделирования данных вынуждает проводить серийные расчеты, что также увеличивает временные затраты.

Наличие многих масштабов пористой среды (например, нефтегазоносный пласт) и их влияние на процесс фильтрации на макромасштабе, а также отсутствие некоторых экспериментальных данных и наличие высокой неопределенности в них, вызывает необходимость изучать процессы фильтрации на микромасштабе пористой среды, где в большинстве случаев используются дискретные модели. В этой связи возникает проблема ремасштабирования упомянутых дискретных моделей микромасштаба (микромоделей) на макромасштаб нефтегазоносных пластов (макромоделей), где на данный момент не существует общепринятого подхода. Данная проблема ремасштабирования исследуется в диссертационной работе.

Таким образом, развитие методов математического моделирования процессов фильтрации на микромасштабе пористой среды и ремасштабирования на макромасштаб, разработка численных алгоритмов и методов ускорения численных расчетов, а также создание соответствующего комплекса программ являются актуальной задачей.

**Цель работы** заключается в исследовании дискретных моделей пористых сред, описывающих процессы фильтрации на различных масштабах, и их взаимосвязей на одном и разных масштабах.

**Основные задачи** исследования:

- Разработка метода на основе теории непрерывных групп симметрий для ускорения получения численных решений при исследовании дискретных моделей процессов фильтрации.
- Нахождение классов дискретных моделей фильтрации, для которых применим метод размножения численных решений с помощью непрерывных групп симметрий.
- Разработка подхода к ремасштабированию дискретных микромоделей пористой среды для их использования при расчете фильтрационных параметров дискретных макромоделей пористой среды нефтяных и газовых месторождений.

- Реализация разработанных методов в виде единого программного комплекса для моделирования процессов фильтрации.

**Научная новизна** диссертации состоит в следующем:

*Математическое моделирование*

1. Впервые с помощью непрерывных групп симметрий исследованы дискретные модели фильтрации: разностные схемы для уравнений фильтрации газа, Баклея-Левретта и Рапопорта-Лиса.

2. Получены новые классы дискретных моделей, для которых применим разработанный метод размножения численных решений: двумерные и трехмерные дискретные динамические системы, разностные схемы для уравнений Рапопорта-Лиса и фильтрации газа.

3. Разработан новый метод построения моделей поровых сетей, позволяющий строить стохастические модели на основе независимой генерации параметров по их распределениям и с учетом их взаимосвязей.

*Численные методы*

1. С использованием непрерывных групп симметрий разработан оригинальный метод размножения численных решений для систем уравнений дискретных моделей процессов фильтрации.

2. Разработан новый численный метод решения обратных задач соответствия заданным фильтрационным характеристикам для стохастических моделей поровых сетей, где впервые для такого типа моделей применен оптимизационный метод «роя частиц».

3. Разработан новый метод выделения регионов характерных моделей поровых сетей для дискретных моделей макромасштаба.

*Комплексы программ*

1. Разработан оригинальный подход к ремасштабированию дискретных микромоделей на макромасштаб нефтегазоносных пластов, который основан на разработанных методах и реализован в виде единого программного комплекса.

2. Гибкость архитектуры программного комплекса позволяет использовать разработанные методы на широком спектре исходных данных и дополнять комплекс существующими методами без внесения изменений в исходный код.

3. Программный комплекс «PoroScale», состоящий из оригинальной комбинации программных модулей, реализован автором для использования в лабораториях по исследованию керна месторождений нефти и газа для обоснования фильтрационных характеристик.

**Объектом исследования** являются насыщенные пористые среды, в том числе месторождения нефти и газа.

**Предметом исследования** являются дискретные модели пористой среды (разностные схемы, дискретные динамические системы, модели поровых сетей) для изучения процессов многофазной фильтрации, происходящих на микро- и макромасштабах нефтяных и газовых месторождений.

**Методы исследования.** При решении поставленных в диссертации задач были использованы методы группового анализа разностных схем, методы моделирования пористой среды с помощью поровых сетей, методы решения оптимизационных задач, методы статистического анализа.

**На защиту выносятся** следующие результаты, соответствующие шести пунктам паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам.

**Пункт 1:** Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

*1. Новый метод моделирования процессов фильтрации, который состоит в использовании известных разностных схем с применением разработанного метода выделения пространственных регионов характерных дискретных микромоделей пористой среды и использовании осредненных микромоделей в них для получения фильтрационных характеристик макромоделей нефтегазоносных пластов.*

**Пункт 2:** Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

*2. Результаты исследования дискретных моделей процессов фильтрации в пористой среде с применением непрерывных групп симметрий, что включает в себя полученные классы дискретных моделей, для которых применим разработанный метод размножения численных решений.*

**Пункт 3:** Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

*3. Разработанный метод размножения численных решений на основе непрерывных групп симметрий для соответствующих дискретных моделей из полученных классов.*

**Пункт 4:** Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

*4. Программный комплекс «PoroScale», состоящий из следующих программ: модули визуализации, размножения численных решений с использованием непрерывных групп симметрий, выделения регионов микромоделей пористой среды на макромасштабе, решения обратных задач для моделей поровых сетей, стохастической генерации моделей поровых сетей. Программный комплекс внесён в Реестр программ для ЭВМ.*

**Пункт 5:** Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

*5. Результаты выделения пространственных регионов нефтегазоносного пласта одного из месторождений нефти и газа на основе разработанного метода выделения регионов характерных моделей поровых сетей, построения характерной стохастической модели поровой сети с помощью разработанного метода решения обратных задач, экспериментальных данных ртутной порометрии образцов керна и результатов интерпретации геофизических исследований скважин.*

**Пункт 7:** Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели.

*6. Метод выделения классов и пространственных регионов микромоделей пористой среды для макромоделей нефтегазоносных пластов.*

*7. Метод построения моделей поровых сетей с помощью решения оптимизационной задачи соответствия экспериментальным кернавым данным, которая является приложением разработанного метода стохастической*

*генерации моделей поровых сетей и основывается на известном методе оптимизации «роя частиц».*

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

**Теоретическая значимость работы** заключается в:

- Расширении типов уравнений, для которых применяется теория непрерывных групп симметрий.
- Разработке нового метода размножения численных решений с использованием дискретных моделей (например, инвариантные разностные схемы) и их непрерывных групп симметрий.
- Исследовании проблем ремасштабирования моделей фильтрации на различных масштабах пористой среды.

**Практическая значимость** диссертационной работы заключается в том, что ее результаты могут быть применены на этапе моделирования процессов фильтрации при проектировании разработки нефтяных и газовых месторождений и для создания соответствующих программных комплексов.

**Достоверность результатов** подтверждается:

- Использованием известных групповых классификаций дифференциальных уравнений теории фильтрации и известного метода получения разностных схем с сохранением непрерывных групп симметрий.
- Сравнениями полученных численных решений с известными точными решениями соответствующих уравнений.
- Проведением тестовых сравнительных расчетов с использованием синтетических моделей и экспериментальных данных.
- Согласованностью отдельных выводов диссертации с результатами известных работ, опубликованных другими авторами.

**Внедрение результатов.** Результаты диссертационного исследования получили практическое применение в работе ООО «ЮНИ-КОНКОРД» и ООО «МикроМодел» в области моделирования процессов фильтрации при проектировании разработки нефтяных и газовых месторождений.

**Апробация работы.** Результаты диссертационного исследования докладывались на 6 всероссийских и 11 международных научных конференциях: Научная конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «ИМЕНИТ-2012» (г. Тюмень, Тюменский государственный университет, 2012 г.); 51-я Международная научная студенческая конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2013 г.); 16-я Международная научная конференция «Современный групповой анализ, MOGRAN-16» (г. Уфа, Уфимский государственный авиационно-технический университет, 2013 г.); Международная конференция «Edinburgh SIAM Student Chapter Student Conference» (Великобритания, г. Эдинбург, Heriot-Watt University, 2014 г.); Международная конференция «SIAM Conference» (Великобритания, г. Бат, Bath University, 2015 г.); Международная конференция «7th annual Oxford SIAM Student Conference» (Великобритания, г. Оксфорд, Oxford University, 2015 г.); Международная

конференция «RMPM Annual meeting» (Великобритания, г. Эдинбург, International Centre for Mathematical Sciences, 2015 г.); Всероссийский нефтегазовый форум «НЕФТЬГАЗТЭК 2015» (г. Тюмень, Западно-Сибирский инновационный центр нефти и газа, 2015 г.); Всероссийская конференция «Нефть и газ Западной Сибири» (г. Тюмень, Тюменский государственный нефтегазовый университет, 2015 г.); 16-я Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Красноярск, Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2015 г.); Международная научно-техническая конференция EAGE «Saint Petersburg 2016 International Conference & Exhibition» (г. Санкт-Петербург, 2016 г.); Международная научная конференция «Mathematical and Information Technologies, MIT-2016» (Сербия–Черногория, г. Врнячка Баня–г. Будва, 2016 г.); «XVII Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям» (г. Новосибирск, Институт Вычислительных Технологий СО РАН, 2016 г.); Международная научно-техническая конференция EAGE «Tyumen 2017» (г. Тюмень, 2017 г.); Всероссийская конференция с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (г. Новосибирск, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2017 г.); 10-я международная научно-практическая конференция «Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований» (г. Новосибирск, 2018 г.); Международная (50-я Всероссийская) молодёжная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений» (г. Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2019 г.).

Также результаты докладывались и обсуждались на научных семинарах Тюменского филиала ИТПМ СО РАН, Института гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН, РГУ нефти и газа им. Губкина, Тюменского государственного университета, университета Heriot-Watt (Великобритания), на научно-технических совещаниях ЗАО «ТИНГ», ООО «ЮНИ-КОНКОРД», ООО «Газпром ВНИИГАЗ», Тюменского отделения «СургутНИПИнефть», ООО «Газпромнефть НТЦ».

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы (234 наименования) и приложений. Общий объем работы составляет 190 страниц, включает 51 рисунок и 12 таблиц.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 28 работах, в том числе в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата, в журналах и изданиях, рекомендованных ВАК. Также получено свидетельство о регистрации комплекса программ для ЭВМ №2016663800 «Моделирование на микромасштабе пористой среды «PoroScale».

**Личный вклад.** Основные результаты диссертации получены автором лично. Обсуждение результатов проводилось вместе с научным руководителем.

**Благодарности.** Автор благодарен своему научному руководителю С.П. Родионову за всеобъемлющую поддержку в процессе написания диссертации. Автор выражает благодарность коллективам Института математики и компьютерных наук ТюмГУ и Тюменского филиала ИТПМ СО РАН, в которых велась работа над диссертацией. Автор также благодарен коллективам Физико-технического института ТюмГУ, университета Heriot-Watt, ЗАО «ТИНГ» и

ООО «ЮНИ-КОНКОРД» за сотрудничество, ценные замечания и поддержку. Особое чувство благодарности автор выражает своему первому научному руководителю В.О. Бытеву, которого, к сожалению, уже нет с нами и который сильно повлиял на научную деятельность автора.

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы исследования, сформулированы цели и задачи исследований, приведены основные результаты и положения, выносимые на защиту. Также приведены сведения о научной новизне, практической и теоретической значимости, апробации результатов и основных публикациях, кратко изложено содержание диссертации по главам.

Проблемы моделирования фильтрации в пористых средах исследовались в работах следующих ученых – Aziz K., Muskat M., Settari A., Баренблатт Г.И., Басниев К.С., Каневская Р.Д., Мирзаджанзаде А.Х., Полубаринова-Кочина П.Я., Щелкачев В.Н. и др.; процессы фильтрации на микромасштабе пористой среды – Blunt M., Rink van Dijke, Динариев О.Ю. и др.; решение различных обратных задач, связанных в том числе с процессами в пористых средах: Тихонов А.Н., Лаврентьев М.М. и др.; связь между процессами фильтрации на разных масштабах – Blunt M., Christie M., Durlofsky L.J. и др.; исследование дискретных моделей с помощью непрерывных симметрий – Levi D., Maeda S., Winternitz P., Дороницын В.А. и др.

**В первой главе** описывается область исследования (Рисунок 1), дается определение и проводится классификация дискретных моделей процессов фильтрации в пористых средах, которые изучаются в данной диссертации и представляются в следующем виде:

$$\begin{cases} E_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n_g}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n_g}, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_{n_g}) = 0, & i = 1, \dots, n_e, \\ G_j(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n_g}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n_g}, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_{n_g}) = 0, & j = 1, \dots, n_g, \\ C_k(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n_g}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n_g}, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_{n_g}) = 0, & k = 1, \dots, n_b, \end{cases} \quad (1)$$

где  $E_i$  – дискретные уравнения;  $G_j$  – уравнения, определяющие расчетную сетку, состоящую из дискретного множества узлов;  $C_k$  – уравнения, задающие начальные и граничные условия;  $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  – вектор независимых переменных;  $\vec{y}(\vec{x}) = (y^1(\vec{x}), y^2(\vec{x}), \dots, y^m(\vec{x})) \in \mathbb{R}^m$  – вектор неизвестных функций;  $\vec{p}(\vec{x}, \vec{y}) = (p^1(\vec{x}, \vec{y}), p^2(\vec{x}, \vec{y}), \dots, p^l(\vec{x}, \vec{y})) \in \mathbb{R}^l$  – вектор параметров модели. Рассматриваемые дискретные модели процессов фильтрации вида (1) – разностные схемы, дискретные динамические системы и модели поровых сетей.

Далее даются определения двух используемых масштабов пористой среды: **микромасштаб** – масштаб, где рассматривается фильтрация с учетом отдельных пор и капилляров, а размеры расчетных областей могут начинаться с десятков микрон; **макромасштаб** – масштаб, где для моделей используется обобщенный закон Дарси, а размеры расчетных областей могут достигать размеров нефтегазоносных пластов. Описывающие процесс фильтрации на

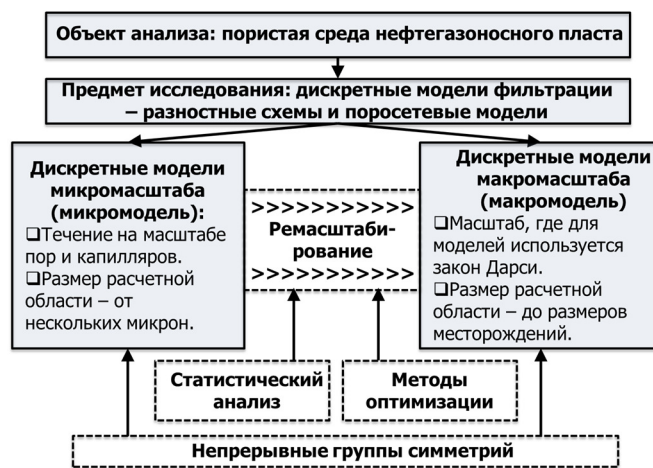


Рисунок 1. Общая схема исследования



микромасштабе дискретные модели будем называть *микромоделями*, на макромасштабе – *макромоделями*. Также рассматриваются взаимосвязи дискретных моделей в рамках одного и нескольких масштабов: связь дискретных моделей за счет непрерывных симметрий (для ускорения численных расчетов) и связь между векторами параметров дискретных моделей на микро- и макромасштабах (для ремасштабирования). В заключении описываются задачи исследования в свете того, какие проблемы моделирования процессов фильтрации они решают.

**Во второй главе** приводится введение в теорию группового анализа дискретных моделей с помощью непрерывных групп симметрий, получены групповые классификации различных типов дискретных моделей процессов фильтрации. Также приводится описание используемого известного метода построения разностных схем с сохранением непрерывных симметрий исходного дифференциального уравнения [Дородницын В.А., 2001].

На основе известной классификации двумерных алгебр Ли проведена классификация двумерных дискретных динамических систем, в результате которой выделено четыре класса систем. Также на основе известной классификации трехмерных алгебр Ли проведена классификация трехмерных дискретных динамических систем, в результате которой выделено 23 класса систем. Для примера приводится класс номер 19 (Таблица 1), где константы  $c_j \in \mathbb{R}$ .

Таблица 1. Пример неподобной трехмерной алгебры Ли и дискретной динамической системы с трехпараметрической группой симметрии

Номер класса	Вид дискретной динамической системы	Вид алгебры Ли
19	$x_{k+1} = x_k - 2 \ln(y_k - c_1) + c_2,$ $y_{k+1} = -\frac{e^{c_2}}{y_k - c_1} + c_3, \quad z_{k+1} = z_k - \frac{e^{x_k}}{y_k - c_1}$	$X_1 = \partial_z, \quad X_2 = \partial_x + z \partial_z,$ $X_3 = 2z \partial_x + e^x \partial_y + z^2 \partial_z$

Далее рассматривается дифференциальное уравнение фильтрации газа при постоянной температуре в одномерной пористой среде:

$$\frac{\partial(\rho(P)\varphi(P))}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0, \quad (2)$$

где  $\rho(P)$  – плотность газа;  $\varphi(P)$  – пористость;  $K(P)$  – абсолютная проницаемость;  $\mu(P)$  – вязкость газа;  $P(t, x)$  – давление. Функции для коэффициентов уравнения (2) предполагаются гладкими. Это уравнение сводится к виду

$$\frac{d\alpha}{dP} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta(P) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0. \quad (3)$$

Для уравнения (3) получены классы разностных схем с непрерывными симметриями – Таблица 2. В таблице ниже  $p_i \in \mathbb{Z}$  и  $c_j \in \mathbb{R}$  – произвольные константы, операторы –

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4)$$

а указанные для классов разностные инварианты используются для задания соответствующих разностных схем с непрерывными симметриями.

Также для целей классификации разностных схем рассматривается уравнение Рапопорта-Лиса для одномерной пористой среды (функции для коэффициентов уравнения (5) предполагаются гладкими)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{K}{\phi \mu_o} \frac{\partial}{\partial x} \left( K_o(S) f(S) \frac{dP_c}{dS} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{V}{\phi} \frac{df}{dS} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

где  $S(t, x)$  – водонасыщенность (д. ед.);  $\phi = const$  – пористость (д. ед.);  $K = const$  – абсолютная проницаемость ( $\text{м}^2$ );  $\mu_w, \mu_o = const$  – вязкости воды и нефти ( $\text{Па}\cdot\text{с}$ );  $P_c(S)$  – капиллярное давление ( $\text{Па}$ );  $V = V_o + V_w = const$  – суммарная скорость потока жидкости ( $\text{м/с}$ );  $f(S)$  – функция Баклея-Левретта (д. ед.);  $K_w(S)$  и  $K_o(S)$  – относительные фазовые проницаемости для воды и нефти (д. ед.). Уравнение (5) может быть записано как

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( A(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial B(S)}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) используется для выделения классов разностных схем (Таблица 3), где  $X_1$  и  $X_2$  берутся из (4);  $c_1, c_2, c_3$  – некоторые константы.

Цель данных классификаций состоит в том, чтобы найти разностные схемы с непрерывными симметриями и коэффициентами, которые могут быть выбраны из реальных физических задач фильтрации в пористых средах. Также для полученных классификаций указаны способы обобщения на многомерный случай.

Таблица 2. Инвариантные разностные схемы для уравнения фильтрации газа

№	$\alpha$	$\beta$	Операторы	Разностные инварианты
1	$\alpha = c_1 P + c_2$	$\beta = c_3 e^P$	$X_1, X_2, X_3,$ $\bar{X}_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial P}$	$J_1 = \frac{(x_{k+p_1} - x_{k+p_2})(x_{k+p_3} - x_{k+p_4})}{(t^{n+p_5} - t^{n+p_6}) e^{\frac{P_{k+p_7}}{k+p_8}}},$ $J_2 = \frac{P_{k+p_9}^{n+p_9} - P_{k+p_{11}}^{n+p_{11}}}{P_{k+p_{10}}^{n+p_{10}}}, J_3 = \frac{t^{n+p_{13}} - t^{n+p_{14}}}{t^{n+p_{15}} - t^{n+p_{16}}}$
2	$\alpha = c_1 P + c_2$	$\beta = c_3 P^{c_4},$ $c_4 \neq 0, -\frac{4}{3}$	$X_1, X_2, X_3,$ $\bar{X}_4 = \frac{c_4}{2} x \frac{\partial}{\partial x} + P \frac{\partial}{\partial P}$	$J_1 = \frac{(x_{k+p_1} - x_{k+p_2})(x_{k+p_3} - x_{k+p_4})}{(t^{n+p_5} - t^{n+p_6}) (P_{k+p_8}^{n+p_7})^{c_4}},$ $J_2 = \frac{P_{k+p_{10}}^{n+p_9}}{P_{k+p_{12}}^{n+p_{11}}}, J_3 = \frac{t^{n+p_{13}} - t^{n+p_{14}}}{t^{n+p_{15}} - t^{n+p_{16}}}$
3	$\alpha = c_1 P + c_2$	$\beta = c_3 P^{-\frac{4}{3}}$	$X_1, X_2, X_3,$ $\bar{X}_4 = -\frac{2}{3} x \frac{\partial}{\partial x} + P \frac{\partial}{\partial P},$ $\bar{X}_5 = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3xP \frac{\partial}{\partial P}$	$J_1 = \frac{P_{k+p_2}^{n+p_1} (x_{k+p_2} - x_{k+p_3})^{\frac{3}{2}}}{(x_{k+p_3} - x_{k+p_4})^{\frac{3}{2}}} \times$ $\times \frac{(x_{k+p_2} - x_{k+p_4})^{\frac{3}{2}}}{(t^{n+p_5} - t^{n+p_6})^{\frac{3}{4}}}, J_2 = \frac{t^{n+p_7} - t^{n+p_8}}{t^{n+p_9} - t^{n+p_{10}}},$ $J_3 = \frac{(x_{k+p_{11}} - x_{k+p_{12}})(x_{k+p_{13}} - x_{k+p_{14}})}{(x_{k+p_{12}} - x_{k+p_{14}})(x_{k+p_{11}} - x_{k+p_{13}})}$
4	$\frac{d\alpha}{dP} = c_3 e^{-P} \times$ $\times (c_1 - e^{-P})^{c_2}$	$\beta = c_4 e^{-P}$	$X_1, X_2,$ $\bar{X}_3 = c_2 t \frac{\partial}{\partial t} +$ $+(c_1 e^P - 1) \frac{\partial}{\partial P}$	$J_1 = \frac{(t^{n+p_1} - t^{n+p_2}) e^{c_2 P_{k+p_4}^{n+p_3}}}{(c_1 e^{P_{k+p_4}^{n+p_3}} - 1)^{c_2}},$ $J_2 = \frac{(c_1 e^{P_{k+p_6}^{n+p_5}} - 1) e^{P_{k+p_8}^{n+p_7} - P_{k+p_6}^{n+p_5}}}{(c_1 e^{P_{k+p_8}^{n+p_7}} - 1)},$ $J_3 = x_{k+p_5} - x_{k+p_6}$

Таблица 3. Инвариантные разностные схемы для уравнения Рапопорта-Лиса

№	$A$	$B$	Операторы	Разностные инварианты
1	$A = c_1 S^{c_2},$ $c_2 \neq -1$	$B = c_1 c_3 S^{c_2+1}$	$X_1, X_2,$ $\bar{X}_3 = -t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{S}{c_2} \frac{\partial}{\partial S}$	$J_1 = (t^{n+p_1} - t^{n+p_2}) (S_{k+p_4}^{n+p_3})^{c_2}, J_2 = \frac{S_{k+p_6}^{n+p_5}}{S_{k+p_8}^{n+p_7}},$ $J_3 = x_{k+p_9} - x_{k+p_{10}}$
2	$A = \frac{c_1}{S}$	$B = c_1 c_3 \ln S$	$X_1, X_2,$ $\bar{X}_3 = -t \frac{\partial}{\partial t} - S \frac{\partial}{\partial S}$	$J_1 = \frac{(t^{n+p_1} - t^{n+p_2})}{S_{k+p_4}^{n+p_3}}, J_2 = \frac{S_{k+p_6}^{n+p_5}}{S_{k+p_8}^{n+p_7}},$ $J_3 = x_{k+p_9} - x_{k+p_{10}}$
3	$A = c_1 e^{c_2 S}$	$B = c_1 c_3 e^{c_2 S}$	$X_1, X_2,$ $\bar{X}_3 = -t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial S}$	$J_1 = (t^{n+p_1} - t^{n+p_2}) e^{c_2 S_{k+p_4}^{n+p_3}},$ $J_2 = S_{k+p_6}^{n+p_5} - S_{k+p_8}^{n+p_7},$ $J_3 = x_{k+p_9} - x_{k+p_{10}}$

В третьей главе приводится разработанный метод размножения численных решений с использованием непрерывных групп симметрий для ускорения получения численных решений, даются примеры применений данного метода и классификаций из второй главы.

В начале главы дается описание разработанного метода размножения численных решений, который основан на том, что непрерывная группа симметрии решение уравнения переводит снова в решение. Этапы метода размножения (генерации): нахождение разностной схемы с непрерывной симметрией; расчет частного численного решения (используется численное решение, полученное с помощью ЭВМ); нахождение преобразований группы симметрии, переводящих начальные и граничные условия исходного решения в условия для получаемых решений; преобразования рассчитанного решения с использованием группы симметрии и найденных групповых параметров для получения новых решений. Также указан способ получения семейства начальных и граничных условий для метода и проведено исследование его точности.

Далее используется частный случай уравнения фильтрации газа (соотношение Клинкенберга для проницаемости, уравнение состояния идеального газа)

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left( (P + K_2) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0, \quad \gamma = \frac{K_1}{\mu \phi}. \quad (7)$$

Для данного уравнения (при замене переменной  $\bar{P} = P + K_2$  – Класс 2, Таблица 2) получена инвариантность (относительно группы симметрии) условий устойчивости (11) для явной разностной схемы (8) и (10). Для численных расчетов используются явная и неявная разностные схемы (порядок аппроксимации  $O(\tau, h)$ ):

$$\frac{P_k^{n+1} - P_k^n}{\tau^n} - \frac{\gamma}{h^2} ((P_{k+1}^n - P_k^n)(P_k^n + K_2) - (P_k^n - P_{k-1}^n)(P_{k-1}^n + K_2)) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{P_k^{n+1} - P_k^n}{\tau^n} - \frac{\gamma}{h^2} ((P_{k+1}^{n+1} - P_k^{n+1})(P_k^n + K_2) - (P_k^{n+1} - P_{k-1}^{n+1})(P_{k-1}^n + K_2)) = 0, \quad (9)$$

$$h = x_{k+1} - x_k = const, \quad \tau^n = t^{n+1} - t^n = A \cdot h^2 (\bar{P}^n + K_2)^{-1}, \quad (10)$$

$$\frac{2(t^{n+1} - t^n) \max_k \sqrt{2\gamma P_k^n + (\gamma K_2)^2}}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k-1})} < 1, \quad (11)$$

где  $A$  – коэффициент, зависящий от максимального значения времени;  $\bar{P}^n$  – среднее давление на  $n$ -ый шаг. Параметры для численных расчетов – Таблица 4.

Таблица 4. Параметры для численных расчетов с помощью разностной схемы (8) и (10)

Параметр	Ед. изм.	Значение
Левое начальное давление $P_{left}$	Па	100 000
Правое начальное давление $P_{right}$	Па	10 000
Интервал времени	с	0...700 000
Интервал пространственной переменной	м	0...500
Число временных шагов	шт.	156
Число пространственных шагов	шт.	10
Пористость	д. ед.	0.20
Вязкость	Па·с	$10^{-6}$
Проницаемость $K_1$	м <sup>2</sup>	$10^{-12}$
Коэффициент $K_2$	Па	10
Константа $C_2$	с	150 000

Все расчеты проведены с помощью разработанного программного комплекса. Причина выбора явной разностной схемы – продемонстрировать применение найденного инвариантного условия устойчивости. Рисунок 2 представляет

размножение численных решений с использованием решения явной разностной схемы и группы симметрии с оператором  $\bar{X}_4$ . Для неявной разностной схемы получены аналогичные результаты. Начальные и граничные условия заданы с использованием известного точного решения (12) для уравнения (7):

$$P(t, x) = -\frac{(x + C_1)^2}{6\gamma(t + C_2)} + \frac{C_3}{|t + C_2|^{\frac{1}{3}}} - K_2, \quad C_1, C_2, C_3 = const. \quad (12)$$

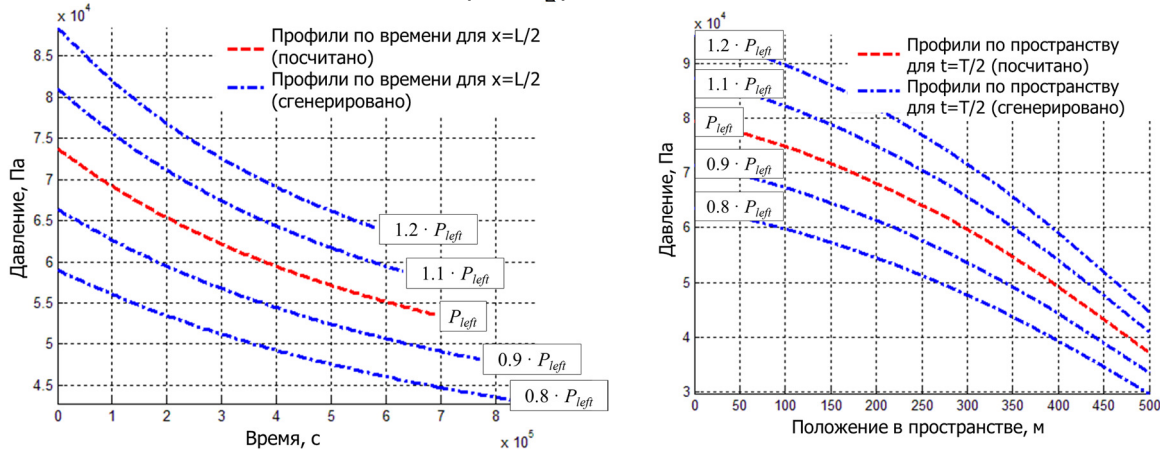


Рисунок 2. Профили давления по времени (слева) и пространству (справа) для полученных решений

Затем рассматривается пример для уравнения Рапопорта-Лиса, общий вид которого дается уравнением (5). При задании произвольных функций в виде

$$K_w(S) = S^N, \quad K_o(S) = (1 - S^N), \quad P_c(S) = -\frac{P_1}{N} \ln \left| \frac{S^N}{S^N - 1} \right| + P_2, \quad (13)$$

$$f(S) = S^N, \quad \mu_o = \mu_w = \mu,$$

где  $P_1$  и  $P_2$  – масштабирующие коэффициенты (Па),  $N$  – безразмерный параметр, удовлетворяющий условиям  $N \neq 1$  и  $N \in \mathbb{R}$ , уравнение (5) сводится к уравнению (Класс 1, Таблица 3)

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( S^{N-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \beta S^{N-1} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \alpha = \frac{KP_1}{\mu\phi}, \quad \beta = -\frac{VN}{\phi}. \quad (14)$$

Для численных расчетов использована следующая неявная разностная схема (порядок аппроксимации  $O(\Delta t, \Delta x)$ ) для уравнения Рапопорта-Лиса (14)

$$S_k^{n+1} = S_k^n + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( (S_k^n)^{N-1} (S_{k+1}^{n+1} - S_k^{n+1}) - (S_{k-1}^n)^{N-1} (S_k^{n+1} - S_{k-1}^{n+1}) \right) + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x} (S_k^n)^{N-1} (S_k^{n+1} - S_{k-1}^{n+1}), \quad \Delta t = const, \quad \Delta x = const. \quad (15)$$

Параметры, использованные для расчетов, представлены ниже – Таблица 5. Рисунок 3 демонстрирует получение численных решений на основе группы симметрии с оператором  $\bar{X}_3$ . Начальные и граничные условия заданы с использованием точного решения для уравнения (14) с целью тестирования метода:

$$S(t, x) = \left( -\frac{x}{\beta(t + C_1)} + \frac{\alpha \ln \left| \frac{t + C_1}{C_2} \right|}{\beta^2(N-1)(t + C_1)} \right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad C_1, C_2 = const. \quad (16)$$

Данные условия вместе с разностной схемой (15) могут быть отнесены к задаче, где в пласте с постоянной скоростью жидкости идет вытеснение воды нефтью. Все расчеты проведены с помощью разработанного программного комплекса.

Сравнение с известными точными решениями дифференциальных уравнений (7) и (14) показывает высокую точность (отличие от точного решения не более

1.5 %) и сходимость используемых разностных схем (8)-(10) и (15). Точность полученных преобразованиями решений остается той же, что и у исходных численных решений. Расчеты проводились в СКМ Matlab и показали, что выигрыш в скорости расчета пяти численных решений с помощью группы симметрии (без учета времени расчета решения для размножения) перед расчетом такого же числа решений с помощью неявных разностных схем составляет три порядка. Разностные схемы (8)-(10) и (15) используют известные виды аппроксимаций для конвективного и диффузионного членов, которые изучены, например, в [Самарский А.А., 1977] и [Хакимзянов Г.С., Черный С.Г., 2014] и заданы на основе найденных разностных инвариантов (Таблица 2 и Таблица 3). Основные отличия разработанного метода размножения численных решений от существующих методов численного решения дифференциальных уравнений (например, метод конечных элементов): необходимость наличия непрерывной группы симметрии (основной недостаток) и существенно большая скорость получения решений (основное преимущество). Данный метод реализован как часть разработанного программного комплекса.

В данной главе также рассмотрены примеры использования полученных классификаций: построение явной разностной схемы для уравнения Баклея-Левретта в виде дискретной динамической системы и пример использования классификаций для поиска симметрий на примере системы, задающей проводимости на гранях капиллярной сети в виде треугольника Серпинского.

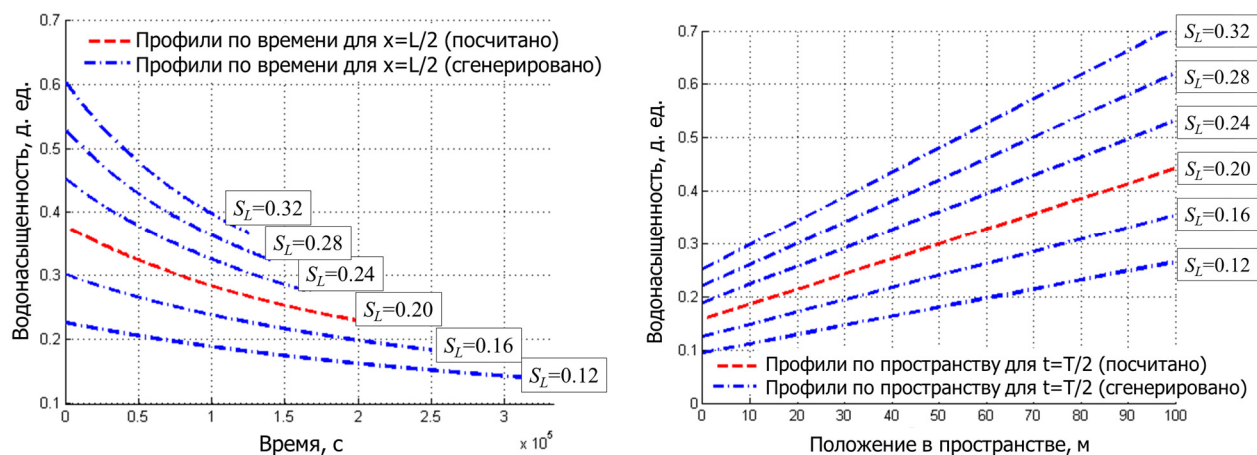


Рисунок 3. Профили насыщенности по времени (слева) и пространству (справа) для сгенерированных решений

Таблица 5. Параметры для численных расчетов с помощью разностной схемы (15)

Параметр	Ед. изм.	Значение
Пористость $\phi$	д. ед.	0.20
Абсолютная проницаемость $K$	м <sup>2</sup>	10 <sup>-12</sup>
Вязкость $\mu$	Па·с	10 <sup>-3</sup>
Масштабирующий параметр $P_1$	Па	3 000 000
Масштабирующий параметр $P_2$	Па	6 000 000
Скорость жидкости $V$	м/с	0.0001
Параметр для степени $N$	-	2
Длина расчетной области $L$	м	100
Максимальное время $T$	с	200 000
Начальная насыщенность на левой границе $S_L$	д. ед.	0.20
Начальная насыщенность на правой границе $S_R$	д. ед.	0.60
Количество шагов по пространству $N_x$	шт.	100
Количество шагов по времени $N_t$	шт.	200 000

В четвертой главе даются классификации дискретных микромоделей пористой среды (поромасштабные модели), методы их получения и методы

моделирования многофазного течения с помощью них, а также обосновывается выбор типа дискретных микромоделей для дальнейших расчетов в Главе 5.

В начале даются предпосылки применения поромасштабных дискретных моделей для оценки фильтрационных характеристик нефтегазоносных пластов и описываются существующие проблемы поромасштабного моделирования. Далее проводится классификация поромасштабных моделей пористых сред и выделяются преимущества используемого в диссертации поросетевого моделирования: количество уравнений и неизвестных для моделей поровых сетей на порядки меньше в сравнении с другими подходами; относительно небольшое число задающих модель параметров – возможность эффективного стохастического построения таких моделей и решения обратных задач для них; ремасштабирование полученных с помощью таких моделей результатов через исследование корреляций определяющих параметров моделей и, например, результатов интерпретации геофизических исследований скважин (РИГИС).

Далее дается определение моделей поровых сетей, классифицируются существующие методы их получения. Модель поровой сети – сеть пор и связывающих их капилляров, которая представляет собой пористую среду на масштабе пор. Затем описаны использованные методы поросетевого моделирования, разработанные специалистами Imperial College of London и Heriot-Watt University – уравнения (17), где  $N_{nodes}$  – множество всех индексов пор;  $N_{nodes}^i$  – множество индексов пор, соединенных с  $i$ -ой порой (в том числе поры-источники и поры-стоки);  $g_{ij}$  – эффективная гидравлическая проводимость между порами  $i$  и  $j$ ;  $L_{ij}$  – расстояние между центрами пор  $i$  и  $j$ ;  $\Delta P_{ij}$  – разница давлений между порами  $i$  и  $j$ ; индексы  $n$  и  $b$  – поры и капилляры соответственно. Моделирование многофазного течения в поровых сетях базируется на законе сохранения массы каждой фазы (индекс  $p$ ) по отдельности, где потоки для элементов рассчитываются на основе перепадов давления и коэффициентов проводимости, зависящих от следующего: распределения фаз в сечениях элементов сети, геометрические характеристики (радиус, фактор формы и т.д.), контактные углы, пороговые давления вытеснения флюида из элементов сети, тип процесса (дренаж, пропитка). Начальные условия – все элементы заполнены одной из фаз, граничные условия – уравнение (17) решается последовательно для каждого нового увеличивающегося с определенным шагом давления для пор-источников (для пор-стоков давление фиксировано).

$$\sum_j \left( \frac{L_i^n}{g_i^{np}} + \frac{L_{ij}^b}{g_{ij}^{bp}} + \frac{L_j^n}{g_j^{np}} \right)^{-1} \Delta P_{ij}^p = 0, \quad i \in N_{nodes}, \quad j \in N_{nodes}^i, \quad p = water, oil. \quad (17)$$

После этого дается обобщение решаемых с помощью моделей поровых сетей задач. В конце главы описано применение непрерывных групп симметрий к моделям поровых сетей: запись общего вида системы уравнений для моделей поровых сетей в виде (1), приведение примеров использования результатов Главы 2 и Главы 3.

В **пятой главе** представлен подход к ремасштабированию микромоделей пористой среды, состоящий из нескольких разработанных методов, для расчета фильтрационных характеристик макромасштаба пористой среды нефтяных и газовых месторождений. Для каждого разработанного метода даются его описание, обзор аналогичных методов и сравнение с ними, результаты тестовых расчетов.

Этапы подхода к ремасштабированию дискретных микромоделей: получение выборки дискретных микромоделей (модели поровых сетей) с помощью методов,

описанных в Главе 4; разбиение полученных микромоделей на классы на основе сравнения распределений их параметров; корреляция классов с данными РИГИС и выделение регионов микромоделей; осреднение параметров микромоделей в выделенных регионах; получение неизвестных параметров для моделей решением обратных задач; распространение выделенных на разрезе по скважинам регионов на межскважинное пространство с помощью методов геостатистики; расчет фильтрационных характеристик для дискретных макромоделей. Рисунок 4 представляет схему разработанного подхода, на которой также указаны этапы на основе разработанных методов и этапы, на которых возможно применение разработанного метода размножения (генерации) численных решений.

Далее в главе дается описание разработанного метода выделения регионов микромоделей: оценка подобия распределений параметров микромоделей  $D_{ij} = \sum_{k=1}^{k_{max}} |f_k^i - f_k^j|$ , где  $f_k^i$  – частота для интервала  $k$  и образца  $i$ ; переход к бинарной матрице смежности графа связей подобия микромоделей; выделение классов подобных моделей на основе выделения компонент связности графа; построение распределений параметров РИГИС для каждого класса и выбор параметра с наименьшей зоной пересечения распределений; выделение интервалов значений выбранного параметра РИГИС, в которых наибольшую частоту имеют значения одного из классов; присвоение номеров классов точкам разрезов по скважинам на основе выделенных интервалов; выделенные регионы микромоделей для разрезов распространяются на весь пласт методами геостатистики. Метод реализован как часть разработанного программного комплекса.

После этого описывается метод стохастической генерации моделей поровых сетей. В основе метода лежит отдельная стохастическая генерация всего набора параметров моделей поровых сетей без учета их геометрической реализуемости, то есть, в частности, без учета координат пор при расчете длин капилляров. В рассмотренном ниже примере используется следующая модификация метода: генерируются регулярная сеть пор и связи между порами; удаляются связи для повторения среднего координационного числа; генерируются радиусы капилляров и длины между телами пор; радиусы пор и длины между центрами пор вычисляются на основе уже рассчитанных данных; генерируются факторы форм и рассчитываются объемы элементов сети; при необходимости вся модель масштабируется для получения целевого значения пористости. Данный метод также является частью разработанного программного комплекса. Далее описывается разработанный метод решения обратных задач, который программно реализован в разработанном комплексе, для моделей поровых сетей как приложение разработанного метода стохастической генерации (Рисунок 5).

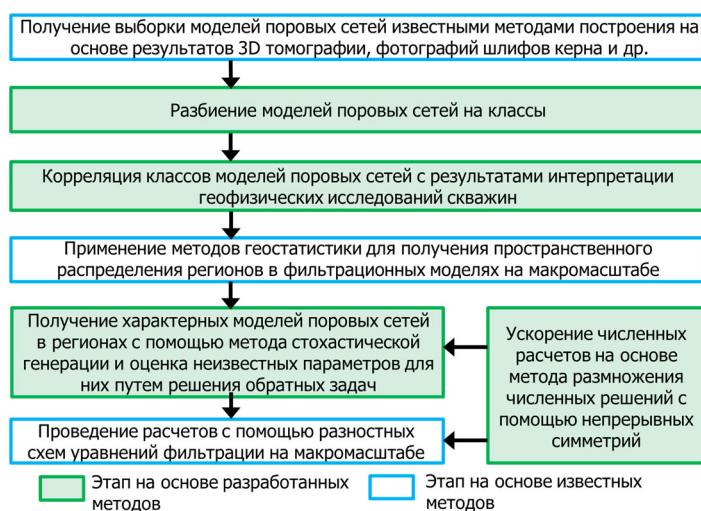


Рисунок 4. Схема подхода к ремасштабированию дискретных микромоделей

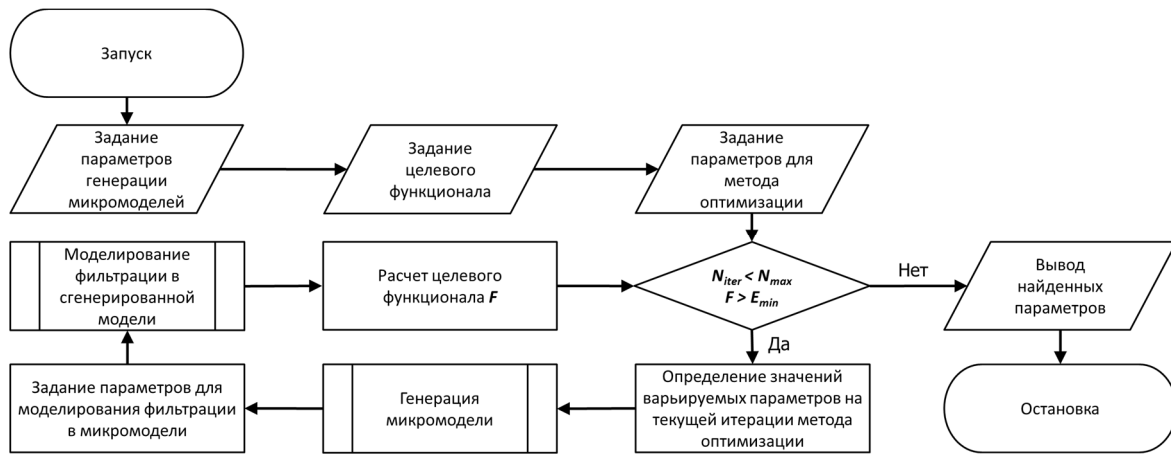


Рисунок 5. Блок-схема метода решения обратных задач

В процессе поиска неизвестных параметров методом оптимизации роя частиц применяются известные методы расчета фильтрационных характеристик для моделей поровых сетей, которые описаны в Главе 4. При этом для стохастически сгенерированных поровых сетей проводится моделирование одно- и двухфазного течений, а полученные результаты сравниваются с целевыми значениями пористости, абсолютной проницаемости и капиллярного давления путем вычисления целевой функции ( $A_p$  – набор параметров генерации и течений):

$$F(A_p) = \sum_{i=1}^{N_s} \left( \frac{(P_c(S_i) - \bar{P}_c(S_i, A_p))^2}{2(\sigma_c^i)^2} + \frac{(K - \bar{K}(A_p))^2}{2(\sigma_{perm})^2} \right), \quad (18)$$

где  $P_c$  – функция капиллярного давления для системы вода-нефть-порода со значениями для каждого  $i$ -го значения водонасыщенности  $S_i$ ;  $N_s$  – количество значений водонасыщенности;  $K$  – абсолютная проницаемость;  $\sigma_c^i$  и  $\sigma_{perm}$  – среднеквадратические отклонения для экспериментальных данных по капиллярному давлению и абсолютной проницаемости соответственно.

Далее разработанные методы и предложенный подход к ремасштабированию моделей фильтрации тестируется для случая, схема которого представлена ниже (Рисунок 6). Метод размножения численных решений тестируется в рамках Главы 3.

Разработанный и описанный в Главе 5 метод выделения регионов микромоделей был опробован на основе данных РИГИС и результатов экспериментов на керне одного из нефтяных месторождений Западной Сибири. Всего в распоряжении было 43 результата ртутной порометрии образцов керна (распределение пор по размерам), которые на основе метода выделения классов микромоделей были разбиты на два класса (Рисунок 7 и Таблица 6). Распределение пор по размерам в данном случае является характеристикой микромоделей пористой среды. Для выделенных двух классов микромоделей

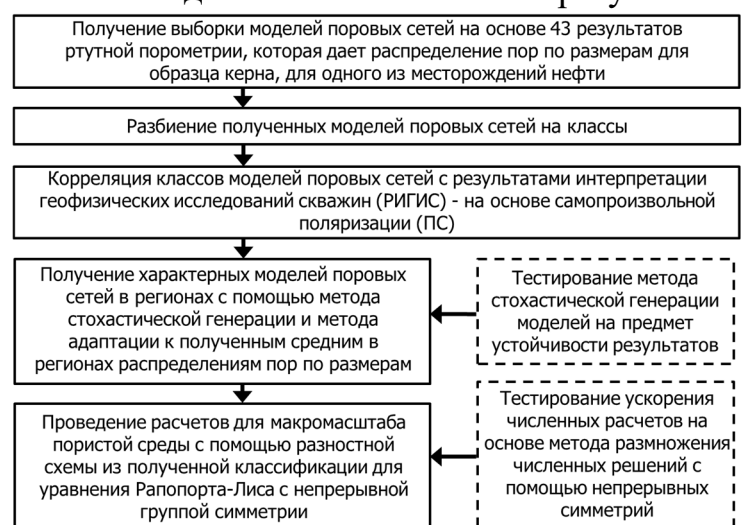


Рисунок 6. Схема рассмотренного примера применения разработанного подхода к ремасштабированию



применен метод корреляции классов с РИГИС, который позволил, используя значения альфа-ПС (метод самопроизвольной поляризации, параметр взят для наглядности получаемых результатов), выделить два региона микромоделей с различными фильтрационными и емкостными характеристиками. Все расчеты проведены с помощью разработанного программного комплекса.

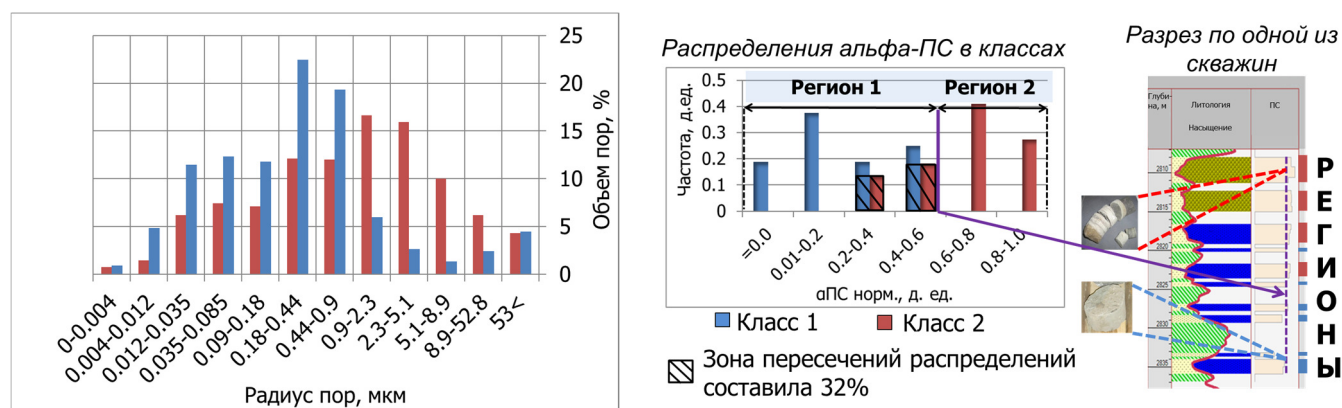


Рисунок 7. Распределения пор по размерам для двух регионов (слева), распределения параметра РИГИС в классах (по центру) и распределения регионов по разрезу скважины (справа)

Таблица 6. Характеристика образцов и соответствующих им дискретных микромоделей в выделенных классах

Название класса	Кол-во образцов	Средняя пористость, %	Средняя проницаемость, мД	Литология
Класс 1	19	12.4	1.0	Песчаник мелкозернистый глинистый, песчаник алевролитистый
Класс 2	24	16.8	54.5	Песчаник мелкозернистый, средне-мелкозернистый, однородный

Тестирование разработанного метода стохастической генерации моделей поровых сетей проведено на основе распределений параметров, которые были получены на основе широко используемой в литературе модели поровой сети для образца песчаника Вега. Тестирование показало, что, начиная с некоторых размеров расчетной области, получаемые характеристики насыщенной водой и нефтью пористой среды (абсолютная проницаемость, капиллярное давление и относительная фазовая проницаемость) отличаются не существенно при сравнении различных случайных реализаций моделей. Это позволяет использовать разработанный метод генерации для решения описанных выше обратных задач. Все расчеты проведены с помощью разработанного программного комплекса.

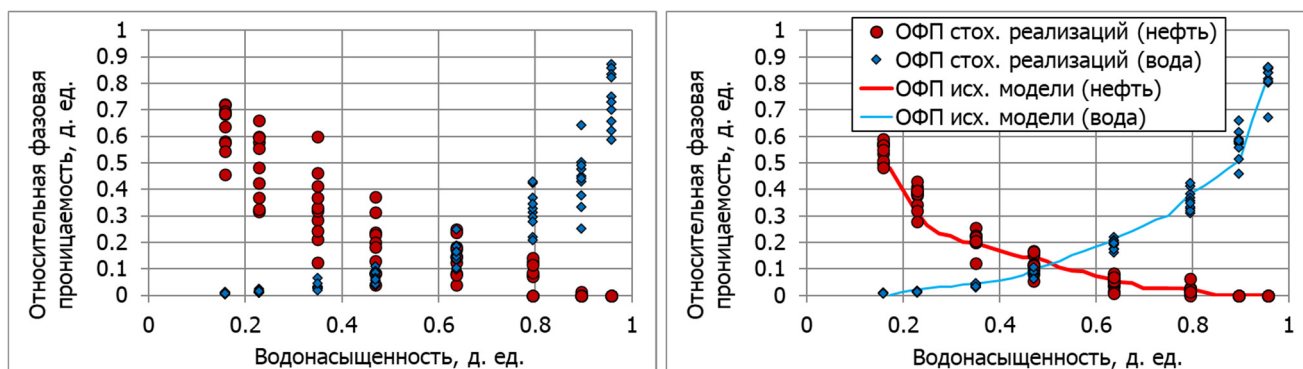


Рисунок 8. Относительные фазовые проницаемости (процесс дренажа) для случайных реализаций моделей поровых сетей с размерами 6x6x6 (слева) и 16x16x16 (справа)

Далее в данной главе метод решения обратных задач для моделей поровых сетей применяется для получения осредненной модели для выделенного Региона 1 (Класс 1): настройка на значения средних пористости, абсолютной проницаемости и кривой капиллярного давления. Контактный угол, тип смачиваемости, коэффициент поверхностного натяжения, изначальная и закачиваемая фазы выбраны так, чтобы учесть специфику эксперимента ртутной порометрии. Результаты решения поставленной оптимизационной задачи на основе более 2000 стохастических реализаций моделей для Региона 1 представляют Рисунок 9 и Таблица 7. Пористость и абсолютная проницаемость оптимальной стохастической модели отличаются менее чем на 5 % от фактических значений. Рассчитанное капиллярное давление с хорошей точностью соответствует фактическому для наиболее интересного интервала водонасыщенности, соответствующего двухфазной фильтрации. Расчеты проведены с помощью разработанного программного комплекса.

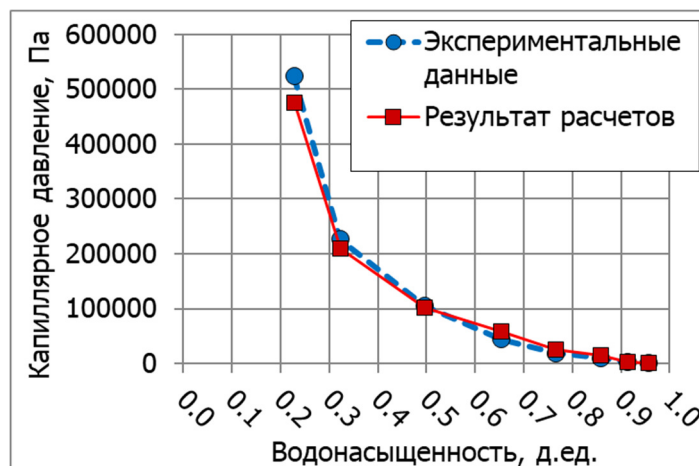


Рисунок 9. Результаты решения обратной задачи для Региона 1 (давления для системы вода-нефть)

Результаты решения поставленной оптимизационной задачи на основе более 2000 стохастических реализаций моделей для Региона 1 представляют Рисунок 9 и Таблица 7. Пористость и абсолютная проницаемость оптимальной стохастической модели отличаются менее чем на 5 % от фактических значений. Рассчитанное капиллярное давление с хорошей точностью соответствует фактическому для наиболее интересного интервала водонасыщенности, соответствующего двухфазной фильтрации. Расчеты проведены с помощью разработанного программного комплекса.

Таблица 7. Параметры найденной модели поровой сети, где  $(\alpha, \sigma^2)$  – параметры распределений

Параметр модели поровой сети	Распределения
Соотношения радиусов соседних пор и капилляров	LogNormal(0.52, 0.38)
Радиусы капилляров	LogNormal(-11.3, 6.9)
Длины капилляров	LogNormal(-12.7, 6.5)
Факторы формы пор и капилляров	Normal(0.047, 0.00009)
Среднее координационное число	2.3

В Приложении А проводится описание разработанного программного комплекса «PoroScaLe», а в Приложении Б приводятся скан-копии свидетельства о регистрации программы и документов о внедрении. Взаимодействие программ, реализованных на основе разработанных методов, в рамках комплекса осуществляется с помощью единых форматов хранения и передачи данных. С помощью единого пользовательского интерфейса выбирается последовательность вызова и взаимодействия программ, их входные данные и вид отображения результатов расчетов для решения различных задач. Примеры взаимодействия программ представляет Рисунок 10.

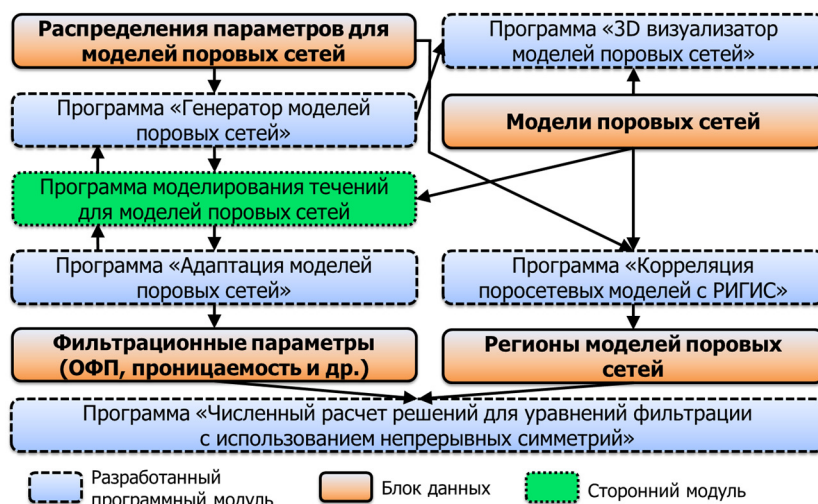


Рисунок 10. Схема примеров взаимодействия программ разработанного комплекса

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию дискретных моделей процессов одно- и двухфазной фильтрации, которые соответствуют различным масштабам пористых сред. Ниже перечислены основные полученные результаты.

1. На основе теории группового анализа разностных схем разработан метод размножения численных решений с использованием непрерывных групп симметрий. Расчетным путем установлено, что выигрыш во времени расчета по сравнению с существующими методами может достигать трех порядков. Для разработанного метода размножения численных решений выделены классы уравнений фильтрации, к которым применим данный метод: 4 класса дискретных динамических систем для двумерного случая и 23 класса для трехмерного случая, 4 класса для разностных схем параболического дифференциального уравнения с частными производными для моделирования фильтрации газа и 3 класса для уравнения Рапопорта-Лиса.

2. Проведена классификация методов моделирования процессов фильтрации на масштабе пор. На основе методов поросетевого моделирования разработан подход к ремасштабированию дискретных микромоделей, включающий метод выделения регионов характерных моделей поровых сетей на макромасштабе дискретных моделей нефтегазоносных пластов (фильтрационные модели). Использование результатов порометрии для образцов керна одного из нефтяных месторождений Западной Сибири позволило выделить два региона с различными фильтрационно-емкостными свойствами и характерными дискретными микромоделями.

3. Разработан метод стохастической генерации моделей поровых сетей на основе распределений их параметров как часть разработанного подхода к ремасштабированию. Тестирование метода стохастической генерации моделей поровых сетей показало, что начиная с размеров  $15 \times 15 \times 15$  разброс результатов нивелируется, а сравнение метода с существующими аналогами показало его большую универсальность. В качестве приложения разработанного метода стохастической генерации предложен метод решения обратных задач для моделей поровых сетей. На основе предложенного метода решена обратная задача адаптации стохастически сгенерированной модели к осредненным значениям капиллярного давления, абсолютной проницаемости и пористости для одного из выделенных регионов. Для решения данной задачи впервые применен метод оптимизации роя частиц для моделей поровых сетей.

4. На основе разработанных методов создан программный комплекс «PoroScale» для моделирования процессов фильтрации на микро- и макромасштабе. Все результаты расчетов, описанные в первых трех пунктах, получены с помощью разработанного программного комплекса.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*Публикации в рецензируемых журналах и изданиях, рекомендованных ВАК РФ*

1. Марков, П.В. Групповая классификация дискретных динамических систем / П.В. Марков. // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9, № 4. – С. 641–649.
2. Марков, П.В. Использование моделей микроструктуры пористой среды при расчете фильтрационных характеристик для гидродинамических моделей /

П.В. Марков, С.П. Родионов. // Нефтепромышленное дело. – 2015. – № 11. – С. 64-75.

3. Марков, П.В. Метод ускорения серийных численных расчетов уравнений многофазной фильтрации в пористой среде с помощью непрерывных групп симметрий / П.В. Марков, С.П. Родионов. // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. – 2015. – № 12. – С. 23-30.
4. Шабаров, А.Б. Методы определения функций относительной фазовой проницаемости в задачах многофазной фильтрации / А.Б. Шабаров, А.В. Шаталов, П.В. Марков, Н.В. Шаталова. // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2018. – Том 4, № 1. – С. 79-109.
5. Марков, П.В. Решение обратной задачи построения стохастических моделей поровых сетей на основе данных масштаба регионов нефтегазоносных пластов / П.В. Марков. // Перспективы науки. – 2019. – № 6(117). – С. 65-71.
6. Марков, П.В. Групповая классификация разностных схем параболических дифференциальных уравнений одно- и двухфазной фильтрации в пористых средах / П.В. Марков. // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Естественные и технические науки. – 2019. – № 8. – С. 85-90.

*Публикации в рецензируемых журналах и изданиях, индексируемых в Scopus и рекомендуемых ВАК РФ*

7. Markov, P.V. The Relative Permeability Regions Assignment on the Basis of Pore Network Models Parameters Distributions / P.V. Markov. // International Conference & Exhibition «Saint Petersburg 2016». – Saint Petersburg, Russia, 2016. – P. 1-5.
8. Markov, P.V. Rock Typing on the Basis of Pore-scale Models and Complex Well Log Interpretation Parameters / P.V. Markov, S.P. Rodionov. // International Conference & Exhibition «Tyumen 2017». – Tyumen, Russia, 2017. – P. 1-5.
9. Markov, P. Group classification applications for analysis of discrete models of flow in porous media / P. Markov. // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 894. – P. 1-7.
10. Markov, P. Numerical Simulation Using Finite-Difference Schemes with Continuous Symmetries for Processes of Gas Flow in Porous Media. / P. Markov, S. Rodionov // Computation. – 2019. – Vol. 7(3). – P. 1-18.

*Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ*

11. Марков, П.В. Моделирования на микромасштабе пористой среды «PoroScale» / П.В. Марков. // Свидетельство об официальной регистрации программы ЭВМ № 2016663800 РФ от 16.12.2016; заявка № 2016661518 от 28.10.2016.