## ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Марков Павел Владимирович

## ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА РАЗЛИЧНЫХ МАСШТАБАХ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

### ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

> Научный руководитель: доктор физико-математических наук Родионов Сергей Павлович

## оглавление

ВВЕДЕНИЕ 8
Глава 1. МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ 19
1.1. Краткая классификация типов исследуемых моделей 19
1.1.1. Классы моделей с точки зрения математических объектов 19
1.1.2. Классы моделей с точки зрения процессов 20
1.2. Описание дискретных моделей 21
1.2.1. Общий вид системы уравнений дискретной модели 21
1.2.2. Процессы, описываемые общей системой уравнений 21
1.3. Различные масштабы нефтегазоносного пласта для моделирования процессов фильтрации
1.3.1. Существующие классификации масштабов 22
1.3.2. Рассматриваемые в данной диссертации масштабы
1.4. Рассматриваемые типы связей дискретных моделей 23
1.4.1. Связи между моделями на разных масштабах
1.4.2. Связи между моделями за счет непрерывных симметрий 25
1.4.3. Исследуемые связи моделей 25
1.5. Рассматриваемые проблемы и задачи данного диссертационного исследования
1.5.1. Проблемы исследования пористых сред 26
1.5.2. Задачи данного диссертационного исследования
Выводы к главе
Глава 2. НОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОМОЩЬЮ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП СИММЕТРИЙ 29
2.1. Определение непрерывных симметрий для различных типов уравнений 29
2.1.1. Определение непрерывной группы преобразований
2.1.2. Инфинитезимальный оператор 31
2.1.3. Инварианты и критерий инвариантности 32
2.2. Основные понятия теории группового анализа для дискретных моделей 34
2.2.1. Групповой анализ различных типов уравнений 34

2.2.2. Непрерывная группа симметрии для дискретных и непрерывных уравнений
2.2.3. Существующий метод построения разностных схем с сохранением непрерывных симметрий дифференциальных уравнений
2.2.4. Наглядный пример применения метода построения инвариантных разностных схем
2.3. Новая групповая классификация дискретных динамических систем 43
2.3.1. Обзор существующих результатов 43
2.3.2. Новая групповая классификация двумерных дискретных динамических систем
2.3.3. Новая групповая классификация трехмерных дискретных динамических систем
2.4. Новая групповая классификация разностных схем для уравнений фильтрации газа
2.4.1. Общий вид дифференциального уравнения 50
2.4.2. Классы дифференциальных уравнений и их разностных схем 50
2.4.3. Пример получения одного из классов 52
2.5. Новая групповая классификация разностных схем уравнений двухфазной фильтрации для задачи Рапопорта-Лиса 54
2.5.1. Общий вид дифференциального уравнения 54
2.5.2. Классы дифференциальных уравнений и их разностных схем 55
2.6. Обобщение полученных классификаций на многомерные случаи 56
2.6.1. Расширение полученных классов дискретных динамических систем на случай больших размерностей 56
2.6.2. Расширение полученных классов разностных схем на случай больших размерностей
Выводы к главе
Глава 3. ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП СИММЕТРИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ 61
3.1. Новый метод размножения численных решений дифференциальных уравнений с помощью непрерывных групп симметрий
3.1.1. Описание метода размножения численных решений 61
3.1.2. Преобразование начальных и граничных условий

3.1.3. Исследование точности метода размножения численных решений	65
3.2. Пример применения метода размножения численных решений для уравнения фильтрации газа	66
3.2.1. Частный случай дифференциального уравнения	66
3.2.2. Инвариантность условий устойчивости для одного из полученных классов разностных схем	67
3.2.3. Инвариантная разностная схема и исходные данные для расчетов	70
3.2.4. Сравнение различных вариантов выбора шага по времени	71
3.2.5. Результаты численных расчетов	73
3.3. Пример применения метода размножения численных решений для уравнения Рапопорта-Лиса	75
3.3.1. Частный случай дифференциального уравнения Рапопорта-Лиса для численных расчетов	75
3.3.2. Разностная схема и исходные данные для расчетов	76
3.3.3. Результаты численных расчетов	78
3.4. Примеры применения классификаций дискретных динамических систем	. <b> 80</b>
3.4.1. Пример для разностной схемы уравнения Баклея-Леверетта	80
3.4.2. Пример для фрактальной сети капилляров в виде треугольника Серпинского	82
Выводы к главе	85
Глава 4. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ НА МАСШТАБЕ ПОР	86
4.1. Применение поромасштабных моделей в области моделирования процес фильтрации в нефтегазоносных пластах	сов 86
4.1.1. Предпосылки применения поромасштабных дискретных моделей для оценки фильтрационных характеристик нефтегазоносных пластов	1 86
4.1.2. Существующие проблемы поромасштабного моделирования	88
4.2. Классификация поромасштабных моделей пористых сред	90
4.2.1. Существующие методы поромасштабного моделирования и их классификация	90
4.2.2. Поросетевое моделирование и его преимущества	92
4.3. Определение моделей поровых сетей и существующие методы их	
получения	93

4.3.1. Определение модели поровой сети
4.3.2. Классификация существующих методов получения данных для
построения моделей поровых сетей95
4.3.3. Трехмерная компьютерная томография
4.3.4. Построение двумерных и трехмерных стохастических изображений
пустотного пространства пористой среды
4.3.5. Построение трехмерных изображений с помощью упаковок частиц 100
4.3.6. Построение моделей поровых сетей 101
4.4. Использованные в данной диссертации существующие методы
моделирования одно- и двухфазного течений в поровых сетях 102
4.4.1. Система уравнений для однофазного случая 102
4.4.2. Система уравнений для двухфазного случая 103
4.4.3. Начальные и граничные условия 105
4.4.4. Расчет порогового давления 106
4.4.5. Расчет проводимостей для элементов сетей 109
4.4.6. Механизмы вытеснения флюидов 111
4.4.7. Расчет контактных углов 113
4.4.8. Решаемые с помощью моделей поровых сетей задачи 116
4.5. Применение непрерывных групп симметрий к моделям поровых сетей 117
4.5.1. Запись общего вида системы уравнений моделей поровых сетей 117
4.5.2. Примеры применения результатов групповой классификации для
исследования моделей поровых сетей 120
Выводы к главе 121
Глава 5. РЕМАСШТАБИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ
МИКРОМАСШТАБА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ДО МАКРОМАСШТАБА 122
5.1. Описание подходов к ремасштабированию дискретных моделей
микромасштаба 122
5.1.1. Обзор существующих подходов к ремасштабированию 122
5.1.2. Схема предлагаемого подхода к ремасштабированию моделей
микромасштаюа до макромасштаюа 123
5.1.3. Использование непрерывных групп симметрий для предлагаемого
подхода к ремасштаоированию дискретных микромоделей 128

5.2. Новый метод выделения регионов дискретных макромоделей пористой
среды с помощью дискретных микромоделей 130
5.2.1. Обзор существующих подходов 130
5.2.2. Выделение классов подобных микромоделей 131
5.2.3. Выделение регионов макромодели на основе выделенных классов микромоделей
5.2.4. Сравнение предлагаемого метода с существующими 137
5.3. Новый метод стохастической генерации моделей поровых сетей на основе распределений их параметров
5.3.1. Обзор существующих методов 138
5.3.2. Описание предлагаемого метода стохастической генерации моделей поровых сетей
5.3.3. Сравнение предлагаемого метода с существующими 142
5.4. Новый метод решения обратных задач при построении моделей поровых сетей по заданным параметрам одно- и двухфазной фильтрации 143
5.4.1. Постановка решаемых обратных задач 143
5.4.2. Обзор существующих методов 145
5.4.3. Общая схема предлагаемого метода решения обратных задач 146
5.4.4. Сравнение с существующими методами147
5.4.5. Используемый оптимизационный метод роя частиц 148
5.5. Применение предложенного метода выделения регионов 149
5.5.1. Разбиение выборки моделей поровых сетей на классы 149
5.5.2. Корреляция классов с РИГИС и выделение регионов для дискретной макромодели пористой среды 151
5.6. Тестирование предложенного метода стохастической генерации моделей поровых сетей
5.6.1. Анализ распределений параметров моделей поровых сетей 152
5.6.2. Тестирование разработанного метода стохастической генерации моделей поровых сетей
5.7. Применение предложенного метода решения обратных задач 156
5.7.1. Исходные данные для обратной задачи 156
5.7.2. Результаты численных расчетов 158

Выводы к главе	159
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	161
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	163
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	164
ПРИЛОЖЕНИЕ А. ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПРОГРАММНОГО	
КОМПЛЕКСА	184
ПРИЛОЖЕНИЕ В. ДОКУМЕНТЫ	188

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Процессы фильтрации широко распространены в природе и технических системах. В качестве примера можно привести течение газа или жидкости в фильтровальных аппаратах, движение грунтовых вод, фильтрацию многофазной жидкости в пласте при разработке нефтяных и газовых месторождений и др.

Структура пористой среды является сложной, В ней имеются неоднородности различной протяженности (масштаб). Фильтрация в такой среде описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, вид которых зависит от масштаба, на котором выполняется исследование. Часто масштабы рассматривают следующие неоднородностей: «микромасштаб» (отдельные поры) и «макромасштаб» (начиная с размеров керна). Так, движение жидкостей в порах описывается уравнениями движения вязкой жидкости (Навье-Стокса); на макромасштабе справедливы уравнения многофазной фильтрации. В пористой среде также выделяются и другие масштабы, уравнения для которых исследовались, например, в работах Швидлера М.И. [91].

Для выполнения расчетов с использованием дифференциальных уравнений должны быть известны величины, характеризующие свойства пористой среды и фильтрующихся жидкостей. Например, для уравнений фильтрации в каждой точке пространства необходимо задать коэффициенты пористости, абсолютной проницаемости, относительные фазовые проницаемости (ОФП), физические свойства фильтрующихся фаз и т.д. При этом уравнения фильтрации на крупном масштабе могут быть получены с помощью осреднения уравнений более мелкого масштаба. To величинам, же самое относится И К характеризующим фильтрационные свойства пористой среды. Процедура получения уравнений и/или их параметров на крупном масштабе с использованием уравнений более мелкого масштаба будем называть ремасштабированием.

На практике часто используются дискретные модели фильтрации: разностные схемы для моделирования процессов фильтрации при разработке нефтяных и газовых месторождений, дискретные микромодели пористой среды (например, поросетевые модели), дискретные динамические системы и др. В них,

в отличие от непрерывных моделей, основанных на дифференциальных уравнениях, неизвестные величины находятся не в бесконечном, а в конечном числе точек пространства и/или времени. Важным типом дискретных моделей являются разностные схемы, получающиеся в результате дискретизации дифференциальных уравнений по пространству и времени, с помощью которых по большей части и решаются уравнения фильтрации.

Многие из отмеченных выше моделей (как дискретных, так и непрерывных) могут иметь общие свойства, такие как тип уравнений, подобие с точки зрения структуры и наличия групп непрерывных симметрий и т.д. Например, при дискретных ремасштабировании (апскейлинге) моделей фильтрации (гидродинамические модели) при переходе от мелкого масштаба к более крупному могут изменяться только абсолютная проницаемость и функции ОФП. Структура уравнений при этом может не меняться. Поэтому крайне важным является исследование подобий дискретных моделей с помощью различных теоретических методов, в частности, с помощью непрерывных групп симметрий, которые доказали свою важность для дифференциальных уравнений. Дискретные модели одного вида могут использоваться для начальных и граничных условий одного класса (например, для задачи апскейлинга) с точки зрения непрерывных симметрий, что приводит ко множеству «подобных» численных решений. При этом получение всех таких решений одного класса путем прямого расчета не является рациональным из-за их связи с помощью преобразований непрерывной группы симметрии.

Проблемы моделирования фильтрации в пористых средах исследовались в работах следующих ученых – Aziz K., Muskat M., Settari A., Г.И. Баренблат, Басниев К.С., Каневская Р.Д., Мирзаджанзаде А.Х., П.Я. Полубаринова-Кочина, В.Н. Щелкачев и др.; процессы фильтрации на микромасштабе пористой среды – Blunt M., Rink van Dijke, Герке К.М., Динариев О.Ю. и др.; решение различных обратных задач, связанных в том числе с процессами в пористых средах: Тихонов А.Н., Лаврентьев М.М. и др.; связь между процессами фильтрации на разных масштабах – Blunt M., Christie M., Durlofsky L.J. и др.; исследование

дискретных моделей с помощью непрерывных симметрий – Levi D., Maeda S., Winternitz P., Дородницын В.А. и др.

Актуальность проблемы. В настоящее время моделирование разработки нефтяных и газовых месторождений, как обязательный этап проектирования разработки, включает в себя построение моделей процессов фильтрации. Требование детальности этих моделей для их использования при проектировании как разработки всего месторождения в целом, так и мероприятий по скважинам требует больших временных затрат, что влияет на скорость принятия решений. Также высокая неопределенность в исходных данных вынуждает проводить серийные расчеты (например, адаптация к истории работы скважин), что, в свою очередь, также увеличивает временные затраты. В этой связи проблемы повышения скорости расчетов без существенной потери точности являются актуальными, и решаются в диссертации за счет применения непрерывных групп симметрий для дискретных моделей различных масштабов пористой среды.

Наличие многих масштабов пористой среды (например, нефтегазоносный пласт) и их влияние на процесс фильтрации на макромасштабе, а также экспериментальных отсутствие некоторых данных И наличие высокой неопределенности в них, вынуждает изучать процессы фильтрации на микромасштабе пористой среды, где в большинстве случаев используются дискретные модели. Однако возникает проблема ремасштабирования упомянутых моделей микромасштаба на макромасштаб нефтегазоносных пластов, где пока на данный момент не существует общепринятого подхода. Данная проблема ремасштабирования исследуется в представленной диссертационной работе.

Таким образом, развитие методов математического моделирования процессов фильтрации для микромасштаба пористой среды и ремасштабирования на макромасштаб, разработка численных методов ускорения расчетов, а также создание соответствующего комплекса программ являются актуальной задачей.

**Цель работы** заключается в исследовании дискретных моделей пористых сред, описывающих процессы фильтрации на различных масштабах, и их взаимосвязей на одном и разных масштабах.

Основные задачи исследования:

- Разработка метода на основе теории непрерывных групп симметрий для ускорения получения численных решений при исследовании дискретных моделей процессов фильтрации.
- Нахождение классов дискретных моделей фильтрации, для которых применим метод размножения численных решений с помощью непрерывных групп симметрий.
- Разработка подхода к ремасштабированию дискретных микромоделей пористой среды для их использования при расчете фильтрационных параметров дискретных макромоделей пористой среды нефтяных и газовых месторождений.
- Реализация разработанных методов в виде единого программного комплекса.

Научная новизна диссертации состоит в следующем:

#### Математическое моделирование

1. Впервые с помощью непрерывных групп симметрий исследованы дискретные модели фильтрации: разностные схемы для уравнений фильтрации газа, Баклея-Леверетта и Рапопорта-Лиса.

2. Получены новые классы дискретных моделей, для которых применим разработанный метод размножения численных решений: двумерные и трехмерные дискретные динамические системы, разностные схемы для уравнений Рапопорта-Лиса и фильтрации газа.

3. Разработан новый метод построения моделей поровых сетей, позволяющий строить стохастические модели на основе независимой генерации параметров по их распределениям и с учетом их взаимосвязей.

Численные методы

1. С использованием непрерывных групп симметрий разработан оригинальный метод размножения численных решений для систем уравнений дискретных моделей процессов фильтрации.

2. Разработан новый численный метод решения обратных задач соответствия заданным фильтрационным характеристикам для стохастических моделей поровых сетей, где впервые для такого типа моделей применен оптимизационный метод «роя частиц».

3. Разработан новый метод выделения регионов характерных моделей поровых сетей для дискретных моделей макромасштаба.

Комплексы программ

1. Разработан оригинальный подход к ремасштабированию дискретных микромоделей на макромасштаб нефтегазоносных пластов, который основан на разработанных методах и реализован в виде единого программного комплекса.

2. Гибкость архитектуры программного комплекса позволяет использовать разработанные методы на широком спектре исходных данных и дополнять комплекс существующими методами без внесения изменений в исходный код.

3. Программный комплекс «PoroScale», состоящий из оригинальной комбинации программных модулей, реализован автором для использования в лабораториях по исследованию керна месторождений нефти и газа для обоснования фильтрационных характеристик.

Объектом исследования являются насыщенные пористые среды, в том числе месторождения нефти и газа.

**Предметом исследования** являются дискретные модели пористой среды (разностные схемы, дискретные динамические системы, модели поровых сетей) для изучения процессов многофазной фильтрации, происходящих на микро- и макромасштабах нефтяных и газовых месторождений.

Методы исследования. При решении поставленных в диссертации задач были использованы методы группового анализа разностных схем, методы моделирования пористой среды с помощью поровых сетей, методы решения оптимизационных задач, методы статистического анализа. На защиту выносятся следующие результаты, соответствующие шести пунктам паспорта специальности 05.13.18 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам.

Пункт 1: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

 Новый метод моделирования процессов фильтрации, который состоит в использовании известных разностных схем с применением разработанного метода выделения пространственных регионов характерных дискретных микромоделей пористой среды и использовании осредненных микромоделей в них для получения фильтрационных характеристик макромоделей нефтегазоносных пластов.

Пункт 2: Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

 Результаты исследования дискретных моделей процессов фильтрации в пористой среде с применением непрерывных групп симметрий, что включает в себя полученные классы дискретных моделей, для которых применим разработанный метод размножения численных решений.

Пункт 3: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

3. Разработанный метод размножения численных решений на основе непрерывных групп симметрий для соответствующих дискретных моделей из полученных классов.

Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

4. Программный комплекс «PoroScale», состоящий из следующих программ: модули визуализации, размножения численных решений с использованием непрерывных групп симметрий, выделения регионов микромоделей пористой среды на макромасштабе, решения обратных задач для моделей поровых сетей, стохастической генерации моделей поровых сетей. Программный комплекс внесён в Реестр программ для ЭВМ.

Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

5. Результаты выделения пространственных регионов нефтегазоносного пласта одного из месторождений нефти и газа на основе разработанного метода выделения регионов характерных моделей поровых сетей, построения характерной стохастической модели поровой сети с помощью разработанного метода решения обратных задач, экспериментальных данных ртутной порометрии образцов керна и результатов интерпретации геофизических исследований скважин.

Пункт 7: Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурного эксперимента на основе его математической модели.

- 6. Метод выделения классов и пространственных регионов микромоделей пористой среды для макромоделей нефтегазоносных пластов.
- 7. Метод построения моделей поровых сетей с помощью решения оптимизационной задачи соответствия экспериментальным керновым данным, которая является приложением разработанного метода стохастической генерации моделей поровых сетей и основывается на известном методе оптимизации «роя частиц».

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

Теоретическая значимость работы заключается в:

• Расширении типов уравнений, для которых применяется теория непрерывных групп симметрий.

- Разработке нового метода размножения численных решений с использованием дискретных моделей (например, инвариантные разностные схемы) и их непрерывных групп симметрий.
- Исследовании проблем ремасштабирования моделей фильтрации на различных масштабах пористой среды.

**Практическая значимость** диссертационной работы заключается в том, что ее результаты могут быть применены на этапе моделирования процессов фильтрации при проектировании разработки нефтяных и газовых месторождений и для создания соответствующих программных комплексов.

Достоверность результатов подтверждается:

- использованием известных групповых классификаций дифференциальных уравнений теории фильтрации и известного метода получения разностных схем с сохранением непрерывных групп симметрий;
- сравнениями полученных численных решений с известными точными решениями соответствующих уравнений;
- проведением тестовых сравнительных расчетов с использованием синтетических моделей и экспериментальных данных;
- согласованностью отдельных выводов диссертации с результатами известных работ, опубликованных другими авторами.

Внедрение результатов. Результаты диссертационного исследования получили практическое применение в работе ООО «ЮНИ-КОНКОРД» и ООО «МикроМодел» в области моделирования процессов фильтрации при проектировании разработки нефтяных и газовых месторождений.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования докладывались на 6 всероссийских и 11 международных научных конференциях: Научная конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «ИМЕНИТ-2012» (г. Тюмень, Тюменский государственный университет, 2012 г.); 51-я Международная научная студенческая конференции «Студент и научнотехнический прогресс», (г. Новосибирск, 2013 г.); 16-я Международная научная

«Современный групповой анализ, MOGRAN-16», конференция (г. Уфа, Уфимский государственный авиационно-технический университет, 2013 г.); Международная конференция «Edinburgh SIAM Student Chapter Student Conference» (Великобритания, г. Эдинбург, Heriot-Watt University, 2014 г.); Международная конференция «SIAM Conference» (Великобритания, г. Бат, Bath University, 2015 г.); Международная конференция «7th annual Oxford SIAM Student Conference» (Великобритания, г. Оксфорд, Oxford University, 2015 г.); конференция «PMPM Annual meeting» (Великобритания, Международная г. Эдинбург, International Centre for Mathematical Sciences, 2015 г.); Всероссийский нефтегазовый форум «НЕФТЬГАЗТЭК 2015» (г. Тюмень, Западно-Сибирский инновационный центр нефти и газа, 2015 г.); Всероссийская конференция «Нефть и газ Западной Сибири» (г. Тюмень, Тюменский государственный нефтегазовый университет, 2015 г.); 16-я Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию И информационным технологиям (г. Красноярск, Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2015 г.); Международная научно-техническая конференция EAGE «Saint Petersburg 2016 Conference International & Exhibition» (г. Санкт-Петербург, 2016 г.): Международная научная конференция «Mathematical and Information Technologies, МІТ-2016» (Сербия–Черногория, г. Врнячка Баня–г. Будва, 2016 г.); «XVII Всероссийская конференция молодых учёных математическому по моделированию и информационным технологиям» (г. Новосибирск, Институт Вычислительных Технологий СО РАН, 2016 г.); Международная научно-«Tyumen техническая конференция EAGE 2017» (г. Тюмень, 2017 г.); конференция Всероссийская с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (г. Новосибирск, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2017 г.); 10-я международная конференция научно-практическая «Вопросы технических И физикоматематических наук в свете современных исследований» (г. Новосибирск, 2018 г.); Международная (50-я Всероссийская) молодёжная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений» (г. Екатеринбург,

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2019 г.).

Также результаты докладывались и обсуждались на научных семинарах Тюменского филиала ИТПМ СО РАН, Института гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН, РГУ нефти и газа им. Губкина, Тюменского государственного университета, университета Heriot-Watt (Великобритания), на научнотехнических совещаниях ЗАО «ТИНГ», ООО «ЮНИ-КОНКОРД», ООО «Газпром ВНИИГАЗ», ОАО «СургутНИПИнефть», ООО «Газпромнефть НТЦ».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем работы составляет 190 страниц, включает 51 рисунок и 12 таблиц. Список литературы содержит 234 наименования.

**В первой главе** дается описание и классификация дискретных моделей теории фильтрации в пористых средах, а также представляются различные взаимосвязи дискретных моделей в рамках одного и разных масштабов.

Во второй главе приводится введение в групповой анализ дискретных моделей с помощью непрерывных групп симметрий, а также получены групповые классификации различных типов дискретных моделей фильтрации.

В третьей главе приводится разработанный метод размножения численных решений с использованием непрерывных групп симметрий, даются примеры применения данного метода и классификаций из второй главы.

**В четвертой главе** даются классификация дискретных микромоделей пористой среды, методы их получения и моделирования многофазного течения.

**В пятой главе** представлен подход к ремасштабированию микромоделей пористой среды для расчета фильтрационных параметров, используемых на макромасштабе месторождений нефти и газа.

**В приложениях** приведены описание разработанного комплекса программ, свидетельство о регистрации ЭВМ и документы о внедрении разработанных методов и программного комплекса.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 28 работах, список которых приведен в конце автореферата, в том числе в 10 работах в журналах и изданиях, рекомендованных ВАК. Также получено свидетельство о регистрации комплекса программ для ЭВМ №2016663800 «Моделирование на микромасштабе пористой среды «PoroScale».

**Личный вклад.** Основные результаты диссертации получены автором лично. Обсуждение результатов проводилось вместе с научным руководителем.

Благодарности. Автор благодарен своему научному руководителю С.П. Родионову за всеобъемлющую поддержку В процессе написания диссертации. Автор выражает благодарность коллективам Института математики и компьютерных наук ТюмГУ и Тюменского филиала ИТПМ СО РАН, в которых велась работа над диссертацией. Автор также благодарен коллективам Физикотехнического института ТюмГУ, университета Heriot-Watt, ЗАО «ТИНГ» и ООО «ЮНИ-КОНКОРД» за сотрудничество, ценные замечания и поддержку. Особое чувство благодарности автор выражает своему первому научному руководителю В.О. Бытеву, которого, к сожалению, уже нет с нами и который сильно повлиял на научную деятельность автора.

#### Глава 1. МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

#### 1.1. Краткая классификация типов исследуемых моделей

#### 1.1.1. Классы моделей с точки зрения математических объектов

Как и любые процессы или явления, процессы фильтрации в пористых средах могут быть описаны различными типами моделей. Существует целый ряд классификаций моделей [64]. различных которые зависят целей ОТ масштабов, моделирования, используемых математических И физических методов. Обычно рассматриваются следующие типы моделей фильтрации: непрерывные (дифференциальные уравнения) и дискретные (разностные схемы).

Для ясности дадим определения используемых в данной диссертации типов моделей. Под непрерывными моделями подразумеваются модели, для которых пространства независимых переменных, значений неизвестных функций и времени являются континуумами [64]. Наиболее распространенными примерами непрерывных моделей являются дифференциальные уравнения.

Под дискретными моделями может пониматься обширный класс различных типов уравнений. Дискретность моделей может проявляться в следующем: дискретность множества точек в пространстве (фазовое пространство), в которых задаются состояния исследуемой системы, дискретность множества состояний системы и дискретность времени [11]. К примеру, для разностных схем пространство значений неизвестных функций может быть континуумом, а пространственно-временные переменные являются дискретными. Примерами моделей дискретных по всем трем указанным выше переменным являются клеточные автоматы. Все результаты данной диссертации получены для дискретных моделей процессов фильтрации в пористых средах, где дискретным является пространство и время, а пространство состояний системы может быть как непрерывным, так и дискретным.

Для простоты будем считать, что непрерывные модели – это модели, в которых непрерывно время, пространство независимых переменных и пространство состояний, дискретные модели – модели, в которых хотя бы одна из

этих величин дискретна. В этом смысле моделирование процессов фильтрации при разработке нефтяных и газовых месторождений в большинстве случаев основывается на дискретных моделях (разностные схемы), однако важными и используемыми остаются и аналитические решения, соответствующие непрерывным моделям.

#### 1.1.2. Классы моделей с точки зрения процессов

Помимо видов моделей, указанных выше, классы моделей фильтрации зависят также от того какой процесс, происходящий где и при учёте каких факторов моделируется. В области моделирования процессов фильтрации при разработке месторождений нефти и газа накоплен большой «багаж» результатов, которые описываются в классических учебниках [2, 7, 8, 69, 94] и др. При исследовании процессов фильтрации, относящихся не только к нефтяной и газовой промышленности, следует упомянуть классическую работу [70], посвященную математическим методам исследования движений грунтовых вод.

Данное диссертационное исследование в большой степени концентрируется на процессах фильтрации на микроуровне пор, поэтому далее в Главе 4 приводится подробный обзор и классификация результатов для этих типов процессов. В Главах 2 и 3 рассмотрены частные случаи моделей процессов фильтрации в пласте, уравнения и разностных схемы которых имеют непрерывные группы симметрий, что позволяет более быстро получать численных решения. Полученные разностные схемы также могут быть применены для дискретных моделей процессов фильтрации на уровне пор.

Многие прикладные задачи в области моделирования процессов многофазного течения и фильтрации при разработке месторождений нефти и газа являются обратными, примеры таких задач можно найти, например, в [63, 77]. Решение обратных задач для различных разделов математической физики, в том числе связанных с различными процессами в пористых средах, представлены, например, в работе [79] и для параболических уравнений в [125]. При рассмотрении процессов фильтрации в других областях также широко распространены обратные задачи, например, при моделировании фильтрации в

земляных плотинах [35]. Более подробно вопрос решения обратных задач для процессов фильтрации на уровне пор и пластов рассмотрен в Главе 5.

#### 1.2. Описание дискретных моделей

#### 1.2.1. Общий вид системы уравнений дискретной модели

Под дискретной моделью процессов фильтрации в пористых средах будем понимать модель, описываемую следующей системой уравнений [62]

$$\begin{cases} E_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n_g}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n_g}, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_{n_g}) = 0, & i = 1, \dots, n_e, \\ G_j(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n_g}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n_g}, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_{n_g}) = 0, & j = 1, \dots, n_g, \\ C_k(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n_g}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n_g}, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_{n_g}) = 0, & k = 1, \dots, n_b, \end{cases}$$
(1.1)

где  $E_i$  – дискретные уравнения,  $G_j$  – уравнения, определяющие расчетную сетку, состоящую из дискретного множества узлов,  $C_k$  – уравнения, задающие начальные и граничные условия,  $\vec{x} = (x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$  – вектор независимых переменных (включая время),  $\vec{y}(\vec{x}) = (y^1(\vec{x}), y^2(\vec{x}), ..., y^m(\vec{x})) \in \mathbb{R}^m$  – вектор неизвестных функций,  $\vec{p}(\vec{x}, \vec{y}) = (p^1(\vec{x}, \vec{y}), p^2(\vec{x}, \vec{y}), ..., p^l(\vec{x}, \vec{y})) \in \mathbb{R}^l$  – вектор параметров модели.

Под решением системы уравнений (1.1) будем понимать такой набор значений векторов  $S_k = \{\vec{x}_k, \vec{y}_k\}$  для каждого узла сетки под номером k и заданного набора параметров модели, который при подстановке в (1.1) обращает в ноль левые части уравнений. Функции  $E_i$ ,  $G_j$ ,  $C_k$  полагаются имеющими все необходимые свойства в зависимости от решаемой задачи, например, требование существования решений системы (1.1) и требование непрерывности функций.

#### 1.2.2. Процессы, описываемые общей системой уравнений

Система уравнений (1.1) задает с помощью функций  $G_j$  дискретное множество точек (сетка), для каждой точки которого заданы функции  $E_i$ , определяющие уравнения на значения величин неизвестных функции  $\vec{y}$  в этих точках (узлы сетки). Функции  $C_k$  при этом для некоторого набора узлов определяют уравнения на значения неизвестной функции – начальные и граничные условия. Система уравнений  $\{E_i, G_j, C_k\}$  в рамках данной диссертации

описывает некоторый процесс фильтрации, зависящий от определяющего его вектора параметров  $\vec{p}$ , значения которого также задаются для каждого узла сетки.

Дискретная модель, которая задается с помощью системы уравнений вида (1.1), является обобщением разностных схем, которое приводится в статье [161]. Данная система уравнений вводится для объединения разных рассматриваемых в диссертации настоящей типов уравнений, соответствующих дискретной динамической системе [9, 92], разностной схеме [17] и модели поровой сети [56, 226], но схожих по своей сути, как самостоятельных математических объектов. Например, дискретные динамические системы можно рассматривать как явные разностные схемы. Сами разностные схемы при этом можно рассматривать без соответствия условия В пределе некоторому дифференциальному уравнению, если, к примеру, они получены изначально на основе некоторого дискретного закона сохранения. Строго говоря, такой объект уже нельзя называть конечно-разностной схемой. Тем самым разные по происхождению объекты (явные разностные схемы и дискретные динамические системы) могут быть исследованы одними и теми же методами, которые справедливы в целом для дискретных моделей вида (1.1).

# 1.3. Различные масштабы нефтегазоносного пласта для моделирования процессов фильтрации

#### 1.3.1. Существующие классификации масштабов

Как известно, пористые среды могут иметь сложную многомасштабную структуру, где наглядным примером являются месторождения нефти и газа [33]. Разные исследователи предлагают различные классификации масштабов неоднородностей для исследования пористых сред нефтегазоносных пластов, что объясняется подчиненностью подобных классификаций конкретным исследуемым проблемам.

В книге [212] выделяются следующие масштабы неоднородности пористой среды: микроскопические (поры и капилляры), макроскопические (образец керна), мегаскопические (месторождение) и гигаскопические (группа

месторождений) неоднородности. В книге [33] выделяются всего два масштаба неоднородностей: микроскопические (распределение фильтрационно-емкостных свойств в коллекторе залежей) и макроскопические (распределение коллектора и неколлектора в объеме залежей). В статье [6] выделяются следующие масштабы для неопределенностей: наномасштаб, шлифы керна, керн, ГИС-скважина, пласт, месторождение, регион.

#### 1.3.2. Рассматриваемые в данной диссертации масштабы

В данной диссертации рассматриваются различные взаимосвязи дискретных моделей в рамках одного и нескольких масштабов, где используются два масштаба пористой среды:

- Микромасштаб масштаб, где рассматривается фильтрация с учетом отдельных пор и капилляров, а размеры расчетных областей могут начинаться с десятков микрон.
- Макромасштаб масштаб, где для моделей используется обобщенный закон Дарси, а размеры расчетных областей могут достигать размеров нефтегазоносных пластов.

Выделенные масштабы взяты с учетом существующих различных классификаций масштабов, которые обсуждались выше. Основная цель выбора данных масштабов – в точности описать масштабы используемых в данной диссертации моделей.

#### 1.4. Рассматриваемые типы связей дискретных моделей

#### 1.4.1. Связи между моделями на разных масштабах

Современное представление о процессах фильтрации в пористых средах все больше основывается на понимании важности учета различных масштабов пористой среды при ее исследовании. Факторы, проявляющиеся на микро- и наномасштабах, вносят существенный вклад в процессы фильтрации на макромасштабе, а значит и в эффективность разработки нефтяных и газовых месторождений. Например, в работе [82] выполнено сравнение макротехнологий воздействия на пласт (в данном случае увеличение плотности сетки скважин) и нанотехнологий воздействия на пласт (применение поверхностно-активных веществ – ПАВ). Прирост коэффициента извлечения нефти (КИН) для этих технологий имеет сопоставимые значения. В работе [74] экспериментально была получена связь остаточных насыщенностей и соотношения диаметров пор и капилляров. Все вышесказанное говорит о важности исследования связей параметров различных масштабов.

Одним из подходов исследования связей характеристик между различными масштабами является использование элементарных представительных объемов [85, 105] (representative elementary volume или REV). Элементарным представительным объемом является объем пористой среды, начиная с которого его характеристики являются представительными для всей пористой среды с точки зрения статистической оценки ее параметров. Например, в работе [105] дается оценка размеров элементарных представительных объемов для результатов трехмерной компьютерной томографии с точки зрения значений пористости, координационного числа, распределения размеров частиц.

Другим подходом к изучению взаимосвязей моделей на разных масштабах является теория гомогенизации (homogenization theory). Данная теория в некотором смысле является совокупностью методов «ремасштабирования» дифференциальных уравнений. Для моделирования процессов фильтрации в пористых средах был получен ряд интересных результатов, в частности, была получена связь уравнений Навье-Стокса для периодической пористой среды с законом Дарси [140]. Отличие гомогенизации от подхода использования элементарных объемов состоит в том, что при гомогенизации мы полагаем характерные размеры макромасштаба много большими, чем микромасштаба, и тем самым в пределе оцениваются характеристики макромасштаба. При объемов элементарных В них происходит осреднение использовании микромасштабных параметров для оценки макромасштабных параметров, но характерные размеры обоих масштабов при этом конечны.

#### 1.4.2. Связи между моделями за счет непрерывных симметрий

Симметрия является важным понятием как при исследовании реального мира, так и при исследовании абстрактных объектов математики, в том числе математических моделей процессов и явления реального мира. Теория симметрий за прошедший век превратилась из концепции «гармонии мира» в мощный инструмент исследования в естественных науках. Важную роль в этом сыграла теория групп Ли [14].

В данной диссертации рассматриваются группы Ли преобразований (другое название непрерывные группы преобразований) в качестве непрерывных симметрий для моделей процессов фильтрации и их систем уравнений, которые в том числе могут иметь вид (1.1). По своей сути непрерывная симметрия для рассматриваемых типов уравнений (моделей) означает инвариантность уравнений (вместе с начальными и граничными условиями) относительно соответствующей непрерывной группы преобразований. Для отдельно взятого уравнения (без начальных и граничных условий) наличие непрерывных симметрий, к примеру, позволяет находить новые решения и упрощать соответствующую модель.

#### 1.4.3. Исследуемые связи моделей

Исследуемые в данной диссертации связи дискретных моделей разбиваются на два типа (Рисунок 1.1):

- Связь дискретных моделей за счет непрерывных симметрий (например, вращательная симметрия) как на одном рассматриваемом в данной диссертации масштабе, так и на обоих масштабах за счет подобия процессов на разных масштабах.
- Связь между векторами параметров дискретных моделей на микро- и макромасштабах, что в дальнейшем будет называться ремасштабированием.

Исследование типа связи 1, которому посвящены Глава 2 и Глава 3, позволяет ускорить численные расчеты, связанные в том числе с типом связи 2 для дискретных моделей, поэтому тип связи 1 рассматривается далее первым. В Главе 2 представлены полученные классы дискретных моделей теории фильтрации, для которых существует тип связи 1 (непрерывные симметрии), описанный с приведением полученных примеров в Главе 3.

Тип связи 2 в диссертации представлен подходом к ремасштабированию микромоделей, где используемые классы дискретных микромоделей различаются как структурой дискретных уравнений и параметрами, так и могут иметь одну структуру уравнений, но разные параметры моделей. Первый тип классов описан в Главе 4, второй тип классов – в Главе 5, а сам предлагаемый подход к ремасштабированию описан с приведением примеров в Главе 5. Данный подход является близким к подходу на основе использования представительных элементарных объемов, поскольку он также основан на осреднении параметров на микромасштабе с конечным характерным размером.

Данная диссертация посвящена совместному исследованию и применению связей за счет непрерывных симметрии и ремасштабирования дискретных моделей процессов фильтрации. Совместное применение указанных типов связей дискретных моделей было представлено в следующих работах [174, 175, 176].



Рисунок 1.1 - Схема связей дискретных моделей, рассматриваемая в данной диссертации

# 1.5. Рассматриваемые проблемы и задачи данного диссертационного исследования

#### 1.5.1. Проблемы исследования пористых сред

Данная диссертация посвящена решению следующих проблем моделирования различных процессов фильтрации в пористых средах, в том числе

моделирования процессов разработки нефтяных и газовых месторождений, проблемы которого рассматриваются, например, в [84]:

- Необходимость учета различных факторов, проявляющих себя на микромасштабе пористой среды, за счет построения моделей процессов на этом масштабе.
- Необходимость в ремасштабировании результатов расчетов на микромасштабе для макромасштаба, например, для фильтрационных моделей нефтяных и газовых месторождений.
- Необходимость в расчетах для похожих разностных схем, что вызвано, например, необходимостью проведения адаптации к истории разработки месторождения.
- Низкая скорость расчета, связанная с необходимостью использования более детальных моделей пористых сред, например, для нефтяных и газовых месторождений на разных масштабах.

1.5.2. Задачи данного диссертационного исследования

Указанные во введении задачи призваны найти решения представленным в предыдущем пункте проблемам моделирования процессов фильтрации в пористых средах. Данные задачи можно объединить в два блока взаимосвязанных задач:

- Повышение качества оценки фильтрационных параметров пористых сред за счет использования дискретных микромоделей, учитывающих важные микромасштабные факторы, и оценки пространственного распределения микромоделей на масштабе макромоделей, а также оценки связи микро- и макромасштабных параметров (ремасштабирование).
- Снижение временных затрат на серийные численные расчеты с помощью дискретных моделей, которые возникают, например, при решении различных обратных задач для дискретных микро- и макромоделей (например, задача адаптации к истории разработки месторождений).

Найденные в рамках данной диссертации решения могут быть применены не только к проблемам, связанным с месторождениями нефти и газа, но и к подобным проблемам моделирования процессов фильтрации в целом. В частности, эти решения могут быть применены к задаче очистки жидкостей и газов с помощью фильтров.

#### Выводы к главе

- Данная глава призвана дать общую схему представленной диссертационной работы, привести основные используемые в ней понятия и их взаимосвязи.
- Рассмотрены различные типы моделей процессов фильтрации в пористых средах и дано определение дискретных моделей, которое используются далее в данной диссертации.
- Получен обзор классификаций различных масштабов нефтегазоносного пласта при исследовании процессов фильтрации, сформулированы рассматриваемые в диссертации масштабы.
- 4. На основе анализа рассмотренных типов связей моделей сформулированы исследуемые в данной диссертации связи: связи между моделями разных масштабов (ремасштабирование) и связи моделей за счет симметрий.
- 5. Сформулированы задачи для данного диссертационного исследования на основе выделенных проблем исследования пористых сред.

## Глава 2. НОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОМОЩЬЮ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП СИММЕТРИЙ

Данная глава посвящена одному из двух типов связей, которые введены в рассмотрение для дискретных моделей в Главе 1, – связь за счет непрерывных групп симметрий. Данный тип связи рассматривается первым, так как полученные здесь результаты используются в главах, посвященных типу связи за счет ремасштабирования дискретных моделей микромасштаба пористой среды. Также приводятся найденные классы дискретных моделей фильтрации на микро- и макромасштабе пористой среды, уравнения которых имеют непрерывные симметрии.

#### 2.1. Определение непрерывных симметрий для различных типов уравнений

#### 2.1.1. Определение непрерывной группы преобразований

Дать определение локальной группы Ли (непрерывной группы) можно несколькими способами: с помощью понятия гладкого многообразия и с помощью однопараметрического непрерывного семейства преобразований. Данные определения являются эквивалентными во многих случаях. Наиболее же подходящим определением для данной диссертационной работы является второе определение [4, 16, 18, 65].

Рассмотрим для начала в некоторой области  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  взаимно-однозначные отображения  $T: D \to D$ , которые естественно определить формулой x' = f(x), где  $x', x \in D$ . Следующий шаг – определение группы преобразований: множество преобразований *S* вместе с операцией композиции о преобразований является группой, если выполнены три следующих условия [87]:

- 1. множество S замкнуто относительно введенной операции:  $A \circ B = C$ , где  $A, B, C \in S$ ;
- 2. тождественное преобразование I принадлежит множеству S;
- 3. для любого  $A \in S$  существует такой элемент  $A^{-1} \in S$ , что  $A \circ A^{-1} = I$ .

В данном определении отсутствует свойство ассоциативности, так как операция композиции преобразований обладает им по определению.

Рассмотрим далее семейство преобразований  $\{T_a\}$ , зависящее от r существенных параметров  $a = (a_1, a_2, ..., a_r) \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^r$  (то есть они не могут быть заменены меньшим числом функций, зависящих от них) и определяемое формулами x' = f(x, a), где  $x', x \in D$ . Операцию композиции преобразований данного семейства можно задать с помощью группового закона умножения  $\varphi: \Delta' \times \Delta' \to \Delta$  по формуле  $T_a \circ T_b = T_{\varphi(a,b)}$ , где  $\Delta' \subset \Delta$ .

Семейство преобразований  $\{T_a\}$  называется локальной *r*-параметрической группой Ли преобразований, если существует такое связное открытое ограниченное множество  $\Delta' \subset \Delta$ , для которого выполнены следующие аксиомы:

- 1. для  $\forall a, b \in \Delta'$  выполнено  $T_a \circ T_b x = T_c x$ , где  $c = \varphi(a, b) \in \Delta$ ;
- 2. семейство преобразований удовлетворяет условию гладкости, то есть  $f(x, a) \in C^2(D \times \Delta);$
- 3. семейство локально упорядочено в  $\Delta'$ , то есть для любых  $a, b \in \Delta'$  из  $T_a x = T_b x$  следует a = b;
- 4. семейство содержит тожественное преобразование, то есть существует  $a_0 \in \Delta'$  такое, что  $T_{a_0} = I$ .
- 5. для любого  $a \in \Delta'$  существует параметр  $a^{-1} \in \Delta'$  такой, что  $\varphi(a, a^{-1}) = \varphi(a^{-1}, a) = a_0$ , то есть  $T_a \circ T_{a^{-1}}x = x$ .

Множество Δ' может быть выбрано достаточно малым так, чтобы в нем выполнялись аксиомы. Это и объясняет термин «локальная группа» в определении группы Ли.

Примеры определенных выше групп: группа растяжений на плоскости –

$$x' = xe^{a}, y' = ye^{a}, \Delta = \mathbb{R},$$
(2.1)

группа SO(2) вращений на плоскости –

$$x' = x\cos(a) - y\sin(a), y' = x\sin(a) + y\cos(a), \Delta = [-\pi, \pi].$$
 (2.2)

В данной диссертации далее под группой Ли преобразований, непрерывной группой преобразований или просто под группой преобразований будет

пониматься именно локальная r-параметрическая группа Ли преобразований. Для того чтобы излишне не усложнять изложение теории группового анализа, в качестве области D, на которой действует r-параметрическая группа, будем рассматривать чаще всего все пространство  $\mathbb{R}^n$ .

#### 2.1.2. Инфинитезимальный оператор

Рассмотрим некоторую локальную однопараметрическую группу Ли преобразований. Пусть данная группа задается преобразованиями

$$T_a: x' = f(x, a), \quad x', x \in \mathbb{R}^n.$$

$$(2.3)$$

Если зафиксировать точку  $x_0$ , то при изменении параметра *а* получим некоторую кривую в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Данная кривая называется орбитой точки  $x_0$ . Компоненты касательной к данной кривой в точке *х* задаются формулой

$$\xi^{i}(x_{0}) = \frac{\partial f^{i}(x_{0}, a)}{\partial a} \bigg|_{a=0}.$$
(2.4)

Меняя точку  $x_0$ , получим касательное векторное поле. Введем теперь понятие инфинитезимального (бесконечно малого) оператора однопараметрической группы Ли (2.3): инфинитезимальным оператором группы называется дифференциальный оператор вида

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^{i}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i}}.$$
(2.5)

Представление касательного поля в виде линейного дифференциального оператора, как будет показано ниже, дает очень мощный инструмент при работе с инвариантами группы. Следующая теорема Ли определяет однозначную связь между группой и её инфинитезимальным оператором [30]: орбита  $T_a x$  группы (2.3) является интегральной кривой уравнения Ли

$$\frac{df}{da} = \xi(f), \ f|_{a=0} = x.$$
(2.6)

Верно также обратное утверждение: для любого гладкого векторного поля  $\xi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  и любой точки  $x \in \mathbb{R}^n$  существует, притом единственное, решение уравнения Ли. Это решение определяет однопараметрическую локальную группу

преобразований, касательное векторное поле которой совпадает с заданным полем *ξ*.

Инфинитезимальный оператор группы растяжений (2.1) в  $\mathbb{R}^2$  –

$$X = \frac{\partial (xe^{a})}{\partial a} \bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial (ye^{a})}{\partial a} \bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$
 (2.7)

Оператор группы вращений (2.2) в пространстве  $\mathbb{R}^2$  –

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$
(2.8)

Рассмотрим как меняется инфинитезимальный оператор при замене переменных. При переходе к новой системе координат  $y^i = y^i(x)$  компоненты касательного поля преобразуется по следующей формуле [18]

$$\eta^{i}(y) = \xi^{j}(x) \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{j'}}$$
(2.9)

в инфинитезимальном операторе замена переменных производится по формуле

$$X = \xi^{i}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i}} = X\left(y^{i}(x)\right)\frac{\partial}{\partial y^{i}} = \eta^{i}(y)\frac{\partial}{\partial y^{i}},$$
(2.10)

где по повторяющимся индексам i, j = 1, ..., n производится суммирование.

#### 2.1.3. Инварианты и критерий инвариантности

Рассмотрим *r*-параметрическую непрерывную группу  $G_r$ . Определим понятие инварианта группы [29]: функция  $F(x) \neq const$  называется инвариантом группы преобразований в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , если функция *F* постоянна на орбите каждой точки  $x \in \mathbb{R}^n$ , то есть выполнено соотношение

$$F(T_a x) = F(x). \tag{2.11}$$

Критерий инвариантности функции: гладкая функция F(x) является инвариантом однопараметрической группы  $G_1$  тогда и только тогда, когда выполнено следующее соотношение (суммирование по повторяющимся индексам)

$$XF = \xi^{i}(x)\frac{\partial F}{\partial x^{i}} = 0.$$
(2.12)

Формула (2.12) представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка, где F(x) – неизвестная функция. Общеизвестно [29], что данное уравнение в пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеет n-1функционально независимых решений  $I_1(x), I_2(x), ..., I_{n-1}(x)$ . Любое другое решение данного уравнения выражается через  $I_j(x)$  в виде  $F = \Phi(I_1, I_2, ..., I_{n-1})$  с подходящей гладкой функцией  $\Phi$ . Полный набор функционально независимых инвариантов группы называется базисом инвариантов этой группы.

Многообразие  $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^n$ , заданное системой уравнений

$$\mathfrak{M}: \psi_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, s,$$
 (2.13)

где  $rank \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial x^i} \right\| = s$ , инвариантно относительно группы  $G_r$ , если для любого  $x \in \mathfrak{M}$  и для любого  $T \in G_r$  выполнено  $Tx \in \mathfrak{M}$ . Инвариантность многообразия, заданного уравнениями (2.13), говорит о том, что под действием группы решения системы уравнений, которые задают многообразие, переходят в решение. Критерий инвариантности многообразия будет дан ниже сразу для *r*-параметрической группы.

Базис инвариантов для инфинитезимальных операторов для примера (2.7) и (2.8) соответственно:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad I_1(x, y) = \frac{x}{y}, \tag{2.14}$$

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad I_1(x, y) = x^2 + y^2.$$
(2.15)

Сформулируем теперь критерий инвариантности для r-параметрической группы преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$  [29]: для группы  $G_r$  критерий принимает вид следующей системы дифференциальных уравнений:

$$X_k F = \xi_k^i(x) \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \qquad k = 1, \dots, r,$$
(2.16)

где  $\xi_k^i(x)$  – компоненты базисных векторных полей группы  $G_r$ . Число решений уравнений (2.16) определяется величиной

$$r_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{rank} \left\| \xi_j^i(x) \right\|, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., r, \quad (2.17)$$

которая является общим рангом матрицы ( $\xi_j^i(x)$ ). Группа  $G_r$  имеет инварианты тогда и только тогда, когда общий ранг  $r_* < n$ . Если выполнено данное условия, то существует  $n - r_*$  функционально независимых инвариантов. При  $r_* = n$ группа  $G_r$  не имеет инвариантов. Более подробно вопрос поиска решений подобных систем исследован в [18, 32].

Критерий инвариантности многообразия для *r*-параметрической группы *G<sub>r</sub>* можно найти, например в [18]. Этот критерий для многообразия (2.13) и группы *G<sub>r</sub>* с операторами *X<sub>k</sub>* имеет следующий вид

$$X_{\alpha}\psi_{\beta}\big|_{\mathfrak{M}} = 0, \ \alpha = 1, \dots, r, \ \beta = 1, \dots, s,$$
 (2.18)

где  $|_{\mathfrak{M}}$  обозначает переход на многообразие, что заключается в выражении *s* переменных из (2.13) и подстановке их в (2.18).

Важное место в теории локальных непрерывных групп занимает понятие алгебры Ли. Между группой Ли и ее алгеброй существует очень тесная связь: каждой r-мерной группе Ли  $G_r$  сопоставляется r-мерная алгебра Ли  $L_r$ , представляющая собой совокупность векторных полей, касательных к орбитам группы, на множестве которых введена операция коммутации; с другой стороны, каждая конечномерная алгебра Ли изоморфна алгебре Ли некоторой группы Ли. Подробно эта область алгебры описана в [18].

#### 2.2. Основные понятия теории группового анализа для дискретных моделей

#### 2.2.1. Групповой анализ различных типов уравнений

Инфинитезимальная техника, которую развил Софус Ли, оказалась очень плодотворной применительно к дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики в частности. Большое число различных типов уравнений привело к появлению множества разнообразных методов интегрирования. Благодаря Софусу Ли на все эти методы можно смотреть через призму симметрийного подхода к решению дифференциальных уравнений.

Несомненно, закономерным является тот факт, что в последние десятилетия, помимо дифференциальных уравнений, групповой анализ начал плодотворно развиваться и применительно к другим типам уравнений, которые

возникают в самых разнообразных разделах физики. К таким уравнениям относятся интегро-дифференциальные (к примеру, кинетическое уравнение Больцмана из физической кинетики [20]), дифференциально-разностные (к примеру, цепочка Тоды из физики твердого тела [230]), разностные уравнения (к примеру, разностная схема для нелинейного уравнения Шрёдингера [26]) и другие типы уравнений.

Одной из первых работ в области групповой классификации разностных уравнений является статья [95], где проведена групповая классификация разностных схем для системы уравнений газовой динамики. Определение непрерывной симметрии для дискретных динамических систем, которое является основополагающим для данной диссертации, сформулировал японский математик Maeda в статьях [171] и [172]. Однако его идеи долгое время не находили практически никакого отражения в работах, посвященных дискретным системам. Начало развития группового анализа для разностных уравнений было положено в 80-90-х годах прошлого века и связано с работами многих математиков [27, 127, 162, 230]. В этих работах (обзор в статье [48]) в основном исследовались либо разностные модели для широко известных дифференциальных уравнений, либо дифференциально-разностные уравнения.

#### 2.2.2. Непрерывная группа симметрии для дискретных и непрерывных уравнений

Подход с использованием непрерывных симметрий позволяет работать с уравнениями разных типов как с многообразиями вида (2.13) в соответствующем пространстве. Это означает, что непрерывные или разностные производные рассматриваются в качестве других независимых переменных. Понятие продолжения действия групп Ли помогает определить новые дополнительные переменные для группы преобразований, которые представлены в уравнении, помимо переменных группы. Эти новые переменные рассматриваются вместе с исходными переменными аналогичным образом.

При исследовании с помощью групп Ли уравнения геометрически могут быть рассмотрены как многомерные многообразия  $\mathfrak{M}$ , задаваемые самими уравнениями, что позволяет осуществить продолжение действия группы преобразований и их инфинитезимальных операторов:

для дифференциальных уравнений в пространстве с независимыми переменными x = (x<sup>1</sup>, x<sup>2</sup>, ..., x<sup>n</sup>) ∈ ℝ<sup>n</sup>, неизвестными функциями вида y = (y<sup>1</sup>(x), y<sup>2</sup>(x), ..., y<sup>m</sup>(x)) ∈ ℝ<sup>m</sup> и производными неизвестных функций по независимым переменным

$$y' = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}, \frac{\partial y^1}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial y^m}{\partial x^n}, \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^1 \partial x^1}, \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^1 \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 y^m}{\partial x^n \partial x^n}, \dots\right) \in \mathbb{R}^l$$

в качестве отдельных переменных (на эти переменные необходимо продолжение групп преобразований), то есть  $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^{n+m+l}(x, y, y')$  [29, 65, 66];

• для разностных схем в пространстве с независимыми переменными  $\{x_k\}$ , где  $x_k = (x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n) \in \mathbb{R}^n$ , и неизвестными функциями  $\{y_k\}$ , где  $y_k = (y_k^1, y_k^2, ..., y_k^m) \in \mathbb{R}^m$ , в качестве отдельных переменных в узле сетки под номером k, то есть  $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^{n_g(n+m)}(\{x_k\}, \{y_k\})$ , где  $n_g$  – минимальное число узлов сетки, достаточное для записи разностной схемы, при этом разностная схема должна состоять из соотношения, задающего разностное уравнение, и соотношения, задающего сетку [26].

Непрерывная группа является группой симметрии для дифференциального уравнения или разностной схемы, если под действием этой группы многообразия, задаваемые ими, остаются инвариантными, то есть для любой точки многообразия  $p \in \mathfrak{M}$  верно  $T_a p \in \mathfrak{M}$ , где p задается для полного набора переменных, задающих дифференциальное уравнение или разностную схему.

Под действием группы симметрии любое решение уравнения (дифференциального или разностного) переходит в решение, возможно в тоже самое, если изначальное решение инвариантно [29, 65]. Это означает, что при наличии одного частного неинвариантного решения можно с помощью преобразований группы симметрии получить целое семейство решений. Данное
обстоятельство дает возможность «размножения» решений с помощью группы симметрии и будет продемонстрировано далее.

2.2.3. Существующий метод построения разностных схем с сохранением непрерывных симметрий дифференциальных уравнений

Подход построения разностных схем с сохранением непрерывных симметрий для исходного дифференциального уравнения был представлен в [26, 131]. Этот метод используется для получения всех возможных инвариантных разностных схем без ограничения на определенные формы разностных производных или просто соседних точек для текущей точки сетки.

Существуют разные подходы к определению действия преобразований непрерывной группы [26, 230] на дискретные модели, при этом во многих случаях они являются эквивалентными:

- продолжение действия преобразований группы на значения независимых переменных и неизвестных функций в соседних точках на сетке: группа преобразований действует на узлы сетки и значения в них независимо друг от друга, и продолжение группы строится с учетом этого;
- введение в рассмотрение конечно-разностных производных и шагов на сетке, которые рассматриваются в соседних узлах сетки (продолжение подобно случаю дифференциальных уравнений).

В данной диссертации используется первый из описанных подходов [181], то есть подход с рассмотрением только значений независимых переменных и неизвестных функций в узлах сетки, который кратко дается ниже. Данный выбор объясняется большей простотой первого подхода на этапе продолжения инфинитезимальных операторов на соседние точки на сетке.

Рассмотрим некоторую систему дифференциальных уравнений

$$F_i\left(x, y, y, y, \dots, y_{p}\right) = 0, \quad i = 1 \dots q, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$
(2.19)

где *у* есть множество производных *j*-го порядка для функций *y*(*x*) и *p* – порядок *j* уравнения (2.19). Пусть уравнение (2.19) имеет *r*-параметрическую группу симметрии, которая является группой Ли

$$\bar{x}^{i} = f^{i}(x, y, a), \quad \bar{y}^{j} = g^{j}(x, y, a), \quad a \in \mathbb{R}^{r}, \quad \bar{x}, x \in \mathbb{R}^{n},$$

$$\bar{y}, y \in \mathbb{R}^{m}, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m$$

$$(2.20)$$

с r инфинитезимальными операторами

$$X_j = \sum_{i=1}^n \xi_j^i(x, y) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^m \eta_j^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$
 (2.21)

Система (2.19) может быть записана с помощью дифференциальных инвариантов *I*<sub>j</sub> [29, 65, 66, 67] группы симметрии (2.20), которые можно найти из уравнения (2.12):

$$\Phi_i(I_1, I_2, \dots, I_s) = 0, i = 1 \dots q, \quad I_j = I_j \left( x, y, y, y, \dots, y_p \right), j = 1 \dots s.$$
(2.22)

Поскольку любая функция, зависящая от инвариантов, является инвариантом, то этот набор функций не является уникальным.

Рассмотрим произвольную разностную схему в следующем виде, который основывается на введенной выше общей форме дискретной модели (1.1),

$$E_{i}\left(x_{k_{1}}, y_{k_{1}}, x_{k_{2}}, y_{k_{2}}, \dots, x_{k_{n_{g}}}, y_{k_{n_{g}}}\right) = 0,$$
  

$$i = 1 \dots n_{e}, \quad k_{1}, k_{2}, \dots, k_{n_{g}} \in K \subseteq \mathbb{Z}^{n},$$
  

$$G_{j}\left(x_{k_{1}}, y_{k_{1}}, x_{k_{2}}, y_{k_{2}}, \dots, x_{k_{n_{g}}}, y_{k_{n_{g}}}\right) = 0,$$
  

$$j = 1 \dots n_{g}, \quad x \in \mathbb{R}^{n}, \quad y \in \mathbb{R}^{m},$$
  
(2.23)

где  $E_i$  определяет разностное уравнение и  $G_j$  определяет сетку,  $n_g - 1$  – порядок разностной схемы (2.23) и  $k_1, k_1, \ldots, k_{n_g} \in K$  есть *n*-ки, которые отвечают за позиции на сетке *G* в *n*-мерном пространстве. Если уравнения (2.23) определяют инвариантное многообразие для группы преобразований (2.20), которая продолжена для всех индексов *K* (то есть продолжена на  $n_g - 1$  соседних узлов сетки) из (2.23) как

$$\bar{x}_k^i = f^i(x_k, y_k, a), \, \bar{y}_k^j = g^j(x_k, y_k, a), \, i = 1 \dots n, j = 1 \dots m, k \in K$$
 (2.24)

то говорят, что эта группа преобразований является группой симметрии для уравнения (2.23). И если разностная схема (2.23) в пределе стремится к уравнению (2.19), то говорят, что (2.23) является инвариантной разностной схемой для дифференциального уравнения (2.19) или, что в (2.23) все симметрии (2.19) наследуются. Стремление к пределу в этом определении означает, что величина  $h_{max} \rightarrow 0$ , где

$$h_{max} = \max_{|k_1 - k_2| \le n_g, \ k_1, k_2 \in K} |x_{k_1} - x_{k_2}|.$$
(2.25)

Для нахождения инвариантной разностной схемы нужно найти разностные инварианты для непрерывной группы (2.24). Разностные инварианты можно найти из следующей системы уравнений

$$X_{j}Q\left(x_{k_{1}}, y_{k_{1}}, x_{k_{2}}, y_{k_{2}}, \dots, x_{k_{n_{g}}}, y_{k_{n_{g}}}\right) = 0, \quad j = 1 \dots r,$$

$$X_{j} = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_{j}^{i}(x_{k}, y_{k}) \frac{\partial}{\partial x_{k}^{i}} + \sum_{i=1}^{m} \eta_{j}^{i}(x_{k}, y_{k}) \frac{\partial}{\partial y_{k}^{i}}\right),$$
(2.26)

где X<sub>j</sub> – продолжения операторов X<sub>j</sub> на переменные x<sub>k1</sub>, y<sub>k1</sub>, x<sub>k2</sub>, y<sub>k2</sub>, ..., x<sub>kng</sub>, y<sub>kng</sub>, которые являются значениями для независимых и зависимых переменных в точках сетки с набором индексов K для каждой точки.

Пусть функции

$$J_j\left(x_{k_1}, y_{k_1}, x_{k_2}, y_{k_2}, \dots, x_{k_{n_g}}, y_{k_{n_g}}\right) = const, \ j = 1 \dots \bar{s}$$
(2.27)

являются разностными инвариантами, которые найдены из системы уравнений (2.26). Для построения инвариантных разностных схем следующим шагом должна быть аппроксимация дифференциальных инвариантов (2.22) с помощью разностных инвариантов (2.26), которые можно записать следующим образом

$$I_{j}\left(x, y, y, y, \dots, y_{p}\right) = \bar{\Phi}_{j}(J_{1}, J_{2}, \dots, J_{\bar{s}}) + O(h_{max}^{n_{j}}), \quad j = 1 \dots s,$$
(2.28)

где  $h_{max} \rightarrow 0$ .

Инвариантные разностные схемы для дифференциального уравнения строятся с помощью следующих шагов:

- 1. Определение непрерывных симметрий для системы дифференциальных уравнений вида (2.19).
- 2. Выражение дифференциальных уравнений системы (2.19) в терминах дифференциальных инвариантов, как показано выше (2.22).
- Построение разностных инвариантов для группы симметрии вида (2.20) с помощью группы симметрии (2.24).
- 4. Аппроксимация дифференциальных инвариантов из (2.22) с помощью разностных инвариантов (2.27).
- 5. Запись уравнения (2.22) с помощью аппроксимации дифференциальных инвариантов (2.28).
- 6. Поиск функции *G<sub>j</sub>* для определения сетки, т.е. получение выражений для независимых переменных.

Определение, данное выше, не пытается быть строгим и призвано представить концепцию, но в дальнейшем при использовании этого определения каждой произвольной функции, такой как  $F_i$ ,  $E_i$ ,  $G_i$ , должно быть достаточно для корректного определения соответствующих типов уравнений или других объектов, например, непрерывной группы преобразований. Конечно, для этого определение может быть ситуация только с инвариантным уравнением типа (2.23) без ограничения типа (2.25), но этот подход позволяет иметь все возможные инвариантные схемы, в том числе с ограничением и без него.

Одной из основных целей исследования дискретных моделей в данной диссертации – поиск преимуществ в численных расчетах с использованием инвариантных разностных схем. Данный вопрос возникает из работ (например, [230]), которые описывают теорию группового анализа разностных схем, но почти не касаются анализа преимуществ использования инвариантных разностных схем. Также стоит отметить, что инвариантные разностные схемы, имея те же непрерывные симметрии, могут содержать важную информацию об исходном уравнении.

### 2.2.4. Наглядный пример применения метода построения инвариантных

#### разностных схем

Для наглядного представления всего выше сказанного рассмотрим, к примеру, обыкновенное дифференциальное уравнение, которое изображено ниже (Рисунок 2.1) вместе со своей группой симметрии и общим решением [57].



Рисунок 2.1 - Дифференциальное уравнение в пространстве, в котором задано его многообразие, а также его группа симметрии и общее решение

В данном примере группой симметрии является группа растяжений, для которой данное дифференциальное уравнение является инвариантным. Если взять какоелибо частное решение, то с помощью указанной группы симметрии можно получить все остальные решения. Это продемонстрировано выражением произвольной константы общего решения через групповой параметр а группы симметрии. Геометрически многообразие уравнения складывается из его решений (Рисунок 2.1), а непрерывная группа симметрий задает закон перехода между решениями.

Первым этапом является нахождение групп симметрии для изначального дифференциального уравнения, которое записывается как

$$ty_t + y(t) + t = 0. (2.29)$$

Продолженный на первую производную инфинитезимальный оператор группы симметрии имеет вид

$$X_{pr} = t\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y_t},$$
(2.30)

а соответствующие дифференциальные инварианты имеют вид

$$I_1 = \frac{y}{t}, \qquad I_2 = y_t.$$
 (2.31)

Запись исходного дифференциального уравнения через инварианты группы симметрии –

$$l_1 + l_2 + 1 = 0. (2.32)$$

С помощью инфинитезимального оператора группы симметрии, записанного для пространства, в котором задаются разностные схемы уравнения (2.29),

$$X_{pr}^{d} = t_{k} \frac{\partial}{\partial t_{k}} + y_{k} \frac{\partial}{\partial y_{k}} + t_{k+1} \frac{\partial}{\partial t_{k+1}} + y_{k+1} \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}$$
(2.33)

происходит поиск разностных инвариантов для группы симметрии, которые имеют вид

$$I_1^d = \frac{y_k}{t_k}, \qquad I_2^d = \frac{y_{k+1}}{t_{k+1}}, \qquad I_3^d = \frac{t_{k+1}}{t_k}.$$
 (2.34)

Аппроксимации дифференциальных инвариантов через разностные инварианты записана ниже:

$$I_1 = I_1^d, \qquad I_2 \approx \frac{I_2^d I_3^d - I_1^d}{I_3^d - 1} + O(t_{k+1} - t_k).$$
(2.35)

На основе представленных выше аппроксимаций происходит построение инвариантных разностных схем с разностным уравнением

$$t_k \frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} + y_k + t_k = 0$$
(2.36)

и разностной сеткой

$$t_{k+1} = r \cdot t_k, \qquad r = const, \tag{2.37}$$

где каждый следующий шаг по времени изменяется пропорционально некоторой константе r > 1. Данная разностная схема (2.36)-(2.37) записана с помощью переменных для двух соседних точек (без привязки к их конкретному

положению) разностной сетки, что достаточно для задания рассматриваемой разностной схемы. Группа симметрии для (2.36)-(2.37) имеет вид

$$\bar{t}_k = e^a t_k, \ \bar{y}_k = e^a y_k, \ \bar{t}_{k+1} = e^a t_{k+1}, \ \bar{y}_{k+1} = e^a y_{k+1}.$$
 (2.38)

Технически наличие непрерывной симметрии означает, что при подстановке новых переменных, которые заданы с помощью группы симметрии, уравнение остается неизменным, что можно легко проверить для данного примера простой подстановкой выражений для группы симметрии. При этом стоит отметить, что уравнение (2.36), задающее сетку, остается неизменным под действием группы симметрии, но координаты узлов конкретной заданной сетки (например, задана координата начальной точки  $t_0$ ) преобразуются.

#### 2.3. Новая групповая классификация дискретных динамических систем

#### 2.3.1. Обзор существующих результатов

Многие авторы под понятием «дискретная динамическая система» понимают разностные, дифференциально-разностные уравнения, дискретные по времени и пространству динамические системы (клеточные автоматы) и др. Для упомянутых типов систем существуют различные классификации [48]. Для линейных (относительно непрерывной производной) дифференциальноразностных уравнений второго порядка (относительно непрерывной и разностной производной) групповая классификация была проведена в работе [163]; в статье [135] эти результаты распространены на системы из двух уравнений данного типа. Для обыкновенных разностных уравнений второго порядка имеются результаты по их групповой классификации [130], которые подобны классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, полученной Софусом Ли в работе [164]. Вопросы интегрируемости некоторых типов разностных и дифференциально-разностных уравнений были исследованы в работе [1].

Вышеназванные работы послужили основой для развития теории группового анализа дискретных динамических систем. По дискретным системам рассматриваемого ниже типа стоит отметить работу [188], в которой, в частности,

указан способ понижения порядка системы с помощью группы симметрии и рассмотрены дискретные системы, заданные на фракталах. Применительно к одномерным системам анализ с помощью непрерывных групп симметрии был выполнен еще в работе [172]. В работе [11] был получен похожий результат: указан способ нахождения линеаризующей замены для одномерных дискретных систем без использования методов группового анализа, однако в случае одномерных систем это эквивалентно нахождению непрерывной симметрии.

В данной работе была проведена групповая классификация двумерных и трехмерных дискретных динамических систем, которые также носят название каскадов (если отображение является гомеоморфизмом) [9, 92] и задаются в соответствии с определением, расположенным ниже. Такие дискретные динамические системы можно рассматривать и как системы разностных уравнений первого порядка, заданных на равномерной сетке, разрешенных относительно значений неизвестных функций в точке k + 1 и не зависящих явно от дискретного времени (в данном случае – x), а также как частный случай (1.1):

$$\begin{cases} \vec{y}_{k+1} = E(\vec{y}_k, \vec{p}_k), & x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \\ x_{k+1} - x_k = 1, & \vec{y} = (y^1, y^2, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m, \\ x_0 = const, & \vec{p} = (p^1, p^2, \dots, p^l) \in \mathbb{R}^l, \\ \vec{y}_0 = const, & k = 0, \dots, n - 1. \end{cases}$$

$$(2.39)$$

Однако групповая классификация таких систем получена ранее не была, и результаты, приведенные ниже, не являются частным случаем или обобщением упомянутых выше классификаций.

2.3.2. Новая групповая классификация двумерных дискретных динамических

#### систем

Дискретная динамическая система, допускающая однопараметрическую группу симметрии, может быть сведена к системе на единицу меньшей размерности [188]. Если же динамическая система имеет двухпараметрическую группу симметрии, то её размерность, в зависимости от типа алгебры Ли, не всегда может быть уменьшена на два, то есть сведена к системе из двух линейных отображений. Это показывает проведенная классификация двумерных

дискретных динамических систем с двухпараметрической группой симметрии [43, 45, 48], которую представляет Теорема 1.

**Теорема 1.** Двумерная дискретная динамическая система вида (*x* и *y* – неизвестные функции)

$$x_{k+1} = f(x_k, y_k), \ y_{k+1} = g(x_k, y_k), \ f, g \in C^1,$$
(2.40)

допускающая двумерную группу симметрии, при помощи некоторой гладкой обратимой замены переменных может быть сведена в зависимости от типа алгебры Ли к одному из четырех видов – Таблица 2.1, где  $c_1, c_2$  – некоторые константы, p(x) – гладкая функция, а сами алгебры Ли после перехода к новым переменным примут вид из таблицы ниже.

Таблица 2.1 - Неподобные двумерные алгебры Ли и дискретные динамические системы с двухпараметрической группой симметрии

Номер	Вид дискретной динамической	Инфинитезимальные операторы
класса	системы	
1	$x_{k+1} = x_k + c_1,  y_{k+1} = y_k + c_2,$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},  X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$
2	$x_{k+1} = x_k,  y_{k+1} = y_k + p(x_k),$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},  X_2 = x \frac{\partial}{\partial y},$
3	$x_{k+1} = c_1 x_k,  y_{k+1} = c_2 x_k + y_k,$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},  X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$
4	$x_{k+1} = p(x_k),  y_{k+1} = y_k,$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},  X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}.$

Доказательство. Получение приведенных результатов показано ниже для второго случая, так как остальные получаются аналогично. Пусть система (2.40) имеет двухпараметрическую группу симметрии. Тогда алгебра Ли группы симметрии приводится к одному из четырех видов при помощи некоторой замены переменных [31, 164]. При гладкой обратимой замене переменных свойство коммутирования группы преобразований и отображения (2.40) сохраняется [171, 172], то есть группа симметрии для дискретной динамической системы в новых переменных также будет группой симметрии. Отсюда следует, что для доказательства требуется найти общий вид отображений, которые коммутируют с двухпараметрическими группами, которые имеют один из четырех видов.

Для того чтобы найти общий вид динамической системы, допускающей переносы вдоль оси ординат, воспользуемся определяющим уравнением [172], которое в двумерном случае имеет вид

$$\begin{cases} \xi(f(x_k, y_k), g(x_k, y_k)) - \xi(x_k, y_k) \frac{\partial f}{\partial x_k} - \eta(x_k, y_k) \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0, \\ \eta(f(x_k, y_k), g(x_k, y_k)) - \xi(x_k, y_k) \frac{\partial g}{\partial x_k} - \eta(x_k, y_k) \frac{\partial g}{\partial y_k} = 0. \end{cases}$$
(2.41)

После подстановки компонент касательного поля  $\xi(x_k, y_k) = 0$  и  $\eta(x_k, y_k) = 1$  в (2.41) получаем систему дифференциальных уравнений на *f* и *g*:

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y_k} = 1.$$
 (2.42)

Из данной системы следует, что общий вид дискретной динамической системы, допускающей переносы вдоль оси ординат, будет следующий

$$x_{k+1} = \tilde{f}(x_k), \quad y_{k+1} = y_k + \tilde{g}(x_k).$$
 (2.43)

Данный результат полностью согласуется с результатами о канонических переменных [188]. Далее аналогично поступаем со вторым оператором алгебры второго типа – оператором группы преобразований Галилея: в уравнение (2.41) подставляем  $\xi(x_k, y_k) = 0$ ,  $\eta(x_k, y_k) = x_k$ ,  $f(x_k, y_k) = \tilde{f}(x_k)$  и  $g(x_k, y_k) = y_k + \tilde{g}(x_k)$ . В итоге получаем  $\tilde{f}(x_k) = x_k$  и приходим к искомому общему виду

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + \tilde{g}(x), \tag{2.44}$$

допускающему двухпараметрическую группу преобразований с алгеброй Ли, базисные операторы которой имеет вид  $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}$ .

Покажем далее как получить общий вид систем, которые соответствуют приведенным выше классам. Пусть  $u = \alpha(x, y)$  и  $v = \beta(x, y) - гладкая$  замена переменных, а  $x = \bar{\alpha}(u, v)$  и  $y = \bar{\beta}(u, v) - обратная$  замена. После перехода в новую систему координат (2.40) будет иметь вид

$$u_{k+1} = \alpha \{ f[\bar{\alpha}(u_k, v_k), \bar{\beta}(u_k, v_k)], g[\bar{\alpha}(u_k, v_k), \bar{\beta}(u_k, v_k)] \}, \\ v_{k+1} = \beta \{ f[\bar{\alpha}(u_k, v_k), \bar{\beta}(u_k, v_k)], g[\bar{\alpha}(u_k, v_k), \bar{\beta}(u_k, v_k)] \}.$$
(2.45)

Из (2.44) и (2.45) следует, что общий вид системы, допускающей двухпараметрическую группу преобразований с алгеброй Ли второго типа, будет следующим

$$u_{k+1} = \alpha \{ \bar{\alpha}(u_k, v_k), \bar{\beta}(u_k, v_k) + \tilde{g}[\bar{\alpha}(u_k, v_k)] \}, v_{k+1} = \beta \{ \bar{\alpha}(u_k, v_k), \bar{\beta}(u_k, v_k) + \tilde{g}[\bar{\alpha}(u_k, v_k)] \}.$$
(2.46)

#### 2.3.3. Новая групповая классификация трехмерных дискретных динамических

#### систем

Теорема 2. Дискретные динамические системы вида

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, y_k, z_k), \\ y_{k+1} &= g(x_k, y_k, z_k), \\ z_{k+1} &= h(x_k, y_k, z_k), \quad f, g, h \in C^1 \end{aligned}$$
(2.47)

с трехпараметрической группой непрерывной симметрии сводятся к одному из представленных ниже случаев (Таблица 2.2).

Доказательство Теоремы 2 аналогично Теореме 1. В статье [153] была получена классификация трехмерных алгебр Ли групп преобразований трехмерного евклидового пространства. Данная классификация алгебр Ли была использована при построении семейств трехмерных дискретных динамических систем [44, 46, 47, 48].

Анализ результатов показал, что на конечный вид семейства (размерность, количество произвольных функций и констант) влияет в большей степени общий ранг матрицы, составленной из компонент инфинитезимальных операторов. Общий ранг для алгебры Ли инфинитезимальных операторов следующего вида –  $X_m = \xi_m(x, y, z)\partial_x + \eta_m(x, y, z)\partial_y + \zeta_m(x, y, z)\partial_z$ , где m = 1,2,3, вычисляется как

$$r^{*} = rank \begin{vmatrix} \xi_{1} & \eta_{1} & \zeta_{1} \\ \xi_{2} & \eta_{2} & \zeta_{2} \\ \xi_{3} & \eta_{3} & \zeta_{3} \end{vmatrix} .$$
(2.48)

Табли	ца 2.2	- Неподобные	трехмерные	алгебры.	Ли и ди	скретные	динамиче	еские с	истемы с
трехпа	рамет	рической груг	пой симметр	ОИИ					

Тип	Алгебра Ли	$r^*$	Дискретная динамическая система
1	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = \partial_y$	3	$x_{k+1} = x_k + c_1, y_{k+1} = y_k + c_2, z_{k+1} = z_k + c_3$
2	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = y\partial_x + a(y)\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k + f(y_k), y_{k+1} = y_k, z_{k+1} = z_k + h(y_k)$
3	$X_1 = \partial_z, X_2 = x\partial_z, X_3 = y\partial_z$	1	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = y_k, z_{k+1} = z_k + h(x_k, y_k)$
4	$X_1 = \partial_z, X_2 = x \partial_z, X_3 = a(x) \partial_z, a''(x) \neq 0$	1	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = g(x_k, y_k), z_{k+1} = z_k + h(x_k, y_k)$
5	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = \partial_y + x \partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k + c_1, y_{k+1} = y_k + c_2,$ $z_{k+1} = z_k + c_1 y_k + c_3$
6	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = y\partial_x + x\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = y_k, z_{k+1} = z_k + h(y_k)$
7	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = x\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = g(y_k), z_{k+1} = z_k + h(y_k)$
8	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = qx\partial_x + \partial_y + z\partial_z$	3	$ \begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + c_1 e^{q y_k}, y_{k+1} = y_k + c_2, \\ z_{k+1} &= z_k + c_3 e^{y_k} \end{aligned} $
9	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = qx\partial_x + z\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = g(y_k), z_{k+1} = z_k$
10	$X_1 = \partial_z, X_2 = x \partial_z, X_3 = (1 - q) x \partial_x + z \partial_z$	2,1	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = g(y_k), z_{k+1} = z_k + h(y_k) x_k^{-\frac{1}{(q-1)}}$
11	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = y\partial_x + z\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k + f(y_k), y_{k+1} = y_k, z_{k+1} = z_k$
12	$X_1 = \partial_z, X_2 = x\partial_z, X_3 = \partial_y + z\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = y_k + g(x_k), z_{k+1} = z_k + h(x_k)e^{y_k}$
13	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = x\partial_x + \partial_y + (x+z)\partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k + c_1 e^{y_k}, y_{k+1} = y_k + c_2,$ $z_{k+1} = (c_1 y_k + c_3) e^{y_k} + z_k$
14	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x,$ $X_3 = x\partial_x + (x+z)\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = g(y_k), z_{k+1} = z_k$
15	$X_1 = \partial_z, X_2 = x\partial_z,$ $X_3 = -\partial_x + \varepsilon \partial_y + z \partial_z, \varepsilon = 0,1$	2	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = -\varepsilon x_k + g(\varepsilon x_k + y_k),$ $z_{k+1} = z_k + h(\varepsilon x_k + y_k)e^{-x_k}$
16	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x,$ $X_3 = (qx + z)\partial_x + \partial_y - x\partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k - r_1 c_1 e^{r_1 y_k} - r_2 c_2 e^{r_2 y_k},$ $y_{k+1} = y_k + c_3, \ r_{1,2} = \frac{(q \pm \sqrt{q^2 - 4})}{2}$ $z_{k+1} = z_k + c_2 e^{r_2 y_k} + c_1 e^{r_1 y_k}$
17	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x, X_3 = (qx + z)\partial_x - x\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = g(y_k), z_{k+1} = z_k$
18	$X_1 = \partial_z, X_2 = x\partial_z,$ $X_3 = (x^2 - qx + 1)\partial_x + xz\partial_z$	2	$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k, y_{k+1} = g(y_k), \\ z_{k+1} &= z_k + h(y_k) \sqrt{x_k^2 - qx_k + 1} \cdot e^{\frac{q \operatorname{arth}\left(\frac{(-2x_k + q)}{\sqrt{q^2 - 4}}\right)}{\sqrt{q^2 - 4}}} \end{aligned}$
19	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x + z\partial_z, X_3 = 2z\partial_x + e^x\partial_y + z^2\partial_z$	3	$x_{k+1} = x_k - 2\ln(y_k - c_1) + c_2,$ $y_{k+1} = -\frac{e^{c_2}}{y_k - c_1} + c_3, z_{k+1} = z_k - \frac{e^{x_k}}{y_k - c_1}$
20	$X_1 = \partial_z, X_2 = \partial_x + z\partial_z, X_3 = 2z\partial_x + (z^2 \pm e^{2x})\partial_z$	2	$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = g(y_k), z_{k+1} = z_k$
21	$X_1 = \partial_z, X_2 = z\partial_z, X_3 = z^2\partial_z$	1	$x_{k+1} = f(x_k, y_k), y_{k+1} = g(x_k, y_k), z_{k+1} = z_k$
22	$X_{1} = \partial_{z}$ $X_{2} = \sin z \partial_{x} + \frac{\cos z}{\cos x} \partial_{y} - \operatorname{tg} x \cos z \partial_{z}$ $X_{3} = \cos z \partial_{x} - \frac{\sin z}{\cos x} \partial_{y} + \operatorname{tg} x \sin z \partial_{z}$	3	$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \\ y_{k+1} &= y_k + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ z_{k+1} &= z_k + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$
23	$X_1 = \partial_z, X_2 = \sin z  \partial_x - \operatorname{tg} x \cos z  \partial_z,$ $X_3 = \cos z  \partial_x + \operatorname{tg} x \sin z  \partial_z$	2	$ \begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \\ y_{k+1} &= g(y_k), \\ z_{k+1} &= z_k + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{aligned} $

Все полученные семейства содержат в себе тождественное отображение в силу того, что оно коммутирует с любым отображением. Семейства для типов алгебры Ли 9, 14, 17, 20 полностью совпадают. Равенство общего ранга двум для этих типов алгебр позволит при переходе к переменным, в которых алгебра Ли имеет один из представленных ниже видов (Таблица 2.2), свести исходную трехмерную дискретную систему к одномерной динамической системе.

Равенство общего ранга двум не гарантирует приведение исходной системы к «чисто» одномерной системе. К примеру, для типа 6 было получено, по сути, семейство одномерных отображений для фиксированной функции  $h(y_k)$ . Некоторые семейства полностью содержатся в других. Например, семейство для типа алгебры 3 целиком содержится в семействе 4 в силу того, что при равных общих рангах у типа 4 компоненты касательных полей зависят только от x.

## 2.4. Новая групповая классификация разностных схем для уравнений фильтрации газа

Групповой анализ с помощью непрерывных групп симметрий используется далее для получения семейств разностных схем с непрерывными симметриями. Эти результаты используются в Главе 3 для разработанного метода размножения численных решений. Также групповой анализ как дифференциальных, так и разностных уравнений, является важным для понимания самих уравнений и процессов, которые они описывают. Например, в статье [5] показано, что одним из инвариантов подалгебры операторов преобразований эквивалентности является закон Тимура, который связывает абсолютную проницаемость, пористость и остаточную водонасыщенность. В статье [109] для уравнений двухфазной фильтрации получены новые законы сохранения и частные решения. В работе [110] для нескольких дифференциальных уравнений теплопроводности построены разностные схемы, сохраняющие изначальные непрерывные симметрии дифференциальных уравнений.

49

#### 2.4.1. Общий вид дифференциального уравнения

В данном разделе рассматривается частный случай параболических дифференциальных уравнений в частных производных – уравнение фильтрации газа в одномерной пористой среде [102]. Это уравнение задается как

$$\frac{\partial(\rho(P)\varphi(P))}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K(P)\rho(P)}{\mu(P)}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0, \qquad (2.49)$$

где  $\rho(P)$  – плотность газа (кг/м<sup>3</sup>),  $\varphi(P)$  – пористость (д. ед.), K(P) – абсолютная проницаемость (м<sup>2</sup>),  $\mu(P)$  – вязкость газа (Па<sup>•</sup>с), P(t, x) – давление (Па).

Уравнение (2.49) может быть сведено к (2.50)

$$\frac{d\alpha(P)}{dP}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(P)\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0, \qquad (2.50)$$

что дает четкое понимание того, что оно похоже на соответствующее уравнение теплопроводности. Различные типы уравнений теплопроводности хорошо изучены с точки зрения группового анализа с использованием групп Ли точечных преобразований [41]. Введенные коэффициенты используются в дальнейшем для представления известных групповых классификаций этих дифференциальных уравнений и получения их соответствующих сеточных представлений. Для дифференциального случая групповая классификация проведена для семейства уравнений (2.50) и ее можно найти в [108].

#### 2.4.2. Классы дифференциальных уравнений и их разностных схем

Дифференциальные уравнения типа (2.50), которые представляют различные задачи однофазной фильтрации в пористых средах, хорошо изучены с помощью теории групп Ли. Эти результаты вместе с теорией из [26], которая кратко описана выше, используются для получения семейств инвариантных разностных схем для дифференциальных уравнений типа (2.50) (Таблица 2.3), которые стоят за физической задачей (2.49). В данной таблице  $p_i \in \mathbb{Z}$  и  $c_j \in \mathbb{R}$  – произвольные константы, верхний индекс *n* отвечают за время, нижний индекс *k* – за пространственную координату, операторы  $X_1, X_2, X_3$  представлены ниже:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}.$$
 (2.51)

Цель представленных здесь результатов состоит в том, чтобы получить только дифференциальные уравнения и их инвариантные разностные схемы с коэффициентами, которые могут быть выбраны из реальных физических задач фильтрации в пористых средах. Таким образом, результаты, которые демонстрирует Таблица 2.3 и представлены в [50, 53, 179, 181], не предназначены для охвата всех уравнений из известных классификаций.

N⁰	α	β	Операторы	Разностные инварианты
1	$\alpha = c_1 P + c_2$	$\beta = c_3 e^P$	$\bar{X}_1, X_2, X_3, \\ \bar{X}_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial P}$	$J_{1} = \frac{(x_{k+p_{1}} - x_{k+p_{2}})(x_{k+p_{3}} - x_{k+p_{4}})}{(t^{n+p_{5}} - t^{n+p_{6}})e^{p_{k+p_{8}}^{n+p_{7}}}},$ $J_{2} = P_{k+p_{10}}^{n+p_{9}} - P_{k+p_{12}}^{n+p_{11}}, J_{3} = \frac{t^{n+p_{13}} - t^{n+p_{14}}}{t^{n+p_{15}} - t^{n+p_{16}}}$
2	$\alpha = c_1 P + c_2$	$\beta = c_3 P^{c_4},$ $c_4 \neq 0, -\frac{4}{3}$	$\bar{X}_{4} = \frac{c_{4}}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial P}$	$J_{1} = \frac{(x_{k+p_{1}} - x_{k+p_{2}})(x_{k+p_{3}} - x_{k+p_{4}})}{(t^{n+p_{5}} - t^{n+p_{6}})(p_{k+p_{3}}^{n+p_{7}})^{c_{4}}},$ $J_{2} = \frac{p_{k+p_{10}}^{n+p_{10}}}{p_{k+p_{12}}^{n+p_{11}}}, J_{3} = \frac{t^{n+p_{13}} - t^{n+p_{14}}}{t^{n+p_{15}} - t^{n+p_{16}}}$
3	$\alpha = c_1 P + c_2$	$\beta = c_3 P^{-\frac{4}{3}}$	$\bar{X}_{1}, \bar{X}_{2}, \bar{X}_{3},$ $\bar{X}_{4} = -\frac{2}{3}x\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial P},$ $\bar{X}_{5} = -x^{2}\frac{\partial}{\partial x} + 3xP\frac{\partial}{\partial P},$	$J_{1} = \frac{P_{k+p_{2}}^{n+p_{1}}(x_{k+p_{2}} - x_{k+p_{3}})^{\frac{3}{2}}}{(x_{k+p_{3}} - x_{k+p_{4}})^{\frac{3}{2}}} \times \frac{(x_{k+p_{2}} - x_{k+p_{4}})^{\frac{3}{2}}}{(t^{n+p_{5}} - t^{n+p_{6}})^{\frac{3}{4}}},$ $J_{2} = \frac{t^{n+p_{7}} - t^{n+p_{8}}}{t^{n+p_{9}} - t^{n+p_{10}}},$ $J_{3} = \frac{(x_{k+p_{11}} - x_{k+p_{12}})(x_{k+p_{13}} - x_{k+p_{14}})}{(x_{k+p_{12}} - x_{k+p_{14}})(x_{k+p_{11}} - x_{k+p_{13}})}$
4	$\frac{d\alpha}{dP} = c_3 e^{-P} \times (c_1 - e^{-P})^{c_2}$	$\beta = c_4 e^{-P}$	$\overline{X_1, X_2,}$ $\overline{X_3} = c_2 t \frac{\partial}{\partial t} + (c_1 e^P - 1) \frac{\partial}{\partial P},$	$J_{1} = \frac{(t^{n+p_{1}} - t^{n+p_{2}})e^{c_{2}p_{k+p_{4}}^{n+p_{3}}}}{(c_{1}e^{p_{k+p_{6}}^{n+p_{3}}} - 1)^{c_{2}}},$ $J_{2} = \frac{(c_{1}e^{p_{k+p_{6}-1}^{n+p_{5}}})e^{p_{k+p_{6}-1}^{n+p_{7}}}e^{p_{k+p_{8}}^{n+p_{7}} - p_{k+p_{6}}^{n+p_{5}}},$ $J_{3} = x_{k+p_{5}} - x_{k+p_{6}}$

Таблица 2.3 - Инвариантные разностные схемы для уравнений фильтрации газа

Результаты, которые представляет Таблица 2.3, совпадают с результатами из [128] для случаев 1-3 и определенных значений констант  $p_i$ . Все случаи из этой таблицы могут иметь коэффициенты с определенным физическим смыслом, а разностные инварианты могут быть использованы для построения большого класса инвариантных разностных схем.

#### 2.4.3. Пример получения одного из классов

В данном разделе приводится пример получения разностных инвариантов для класса 2 (Таблица 2.3). Для других классов разностные инварианты были получены аналогично. Для выбранного класса 2 инфинитезимальные операторы ее четырехпараметрической группы симметрий имеют вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, X_4 = \frac{c_4}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial P}.$$
 (2.52)

Дальнейший поиск разностных инвариантов будем проводить для пяти соседних узлов разностной сетки, которые могут быть записаны как

$$\{ (t^{n}, x_{k-1}, P_{k-1}^{n}), (t^{n}, x_{k+1}, P_{k+1}^{n}), (t^{n}, x_{k}, P_{k}^{n}), (t^{n-1}, x_{k}, P_{k}^{n-1}), (t^{n+1}, x_{k}, P_{k}^{n+1}) \}$$

$$(2.53)$$

где множество индексов узлов записывается как

$$K = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}.$$
 (2.54)

Например, для X<sub>4</sub> из (2.52) и пяти узлов (2.53) сетки с индексами (2.54) продолженный оператор имеет вид

$$X_{4} = \frac{c_{4}}{2} \left( x_{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{k-1}} + x_{k} \frac{\partial}{\partial x_{k}} + x_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \right) + P_{k-1}^{n} \frac{\partial}{\partial P_{k-1}^{n}} + P_{k+1}^{n} \frac{\partial}{\partial P_{k+1}^{n}} + P_{k}^{n} \frac{\partial}{\partial P_{k}^{n}} + P_{k}^{n-1} \frac{\partial}{\partial P_{k}^{n-1}} + P_{k}^{n+1} \frac{\partial}{\partial P_{k}^{n+1}}.$$

$$(2.55)$$

Для продолженных операторов, например для (2.55), уравнение (2.26) для поиска разностных инвариантов имеет вид (индекс  $j = 1 \dots 4$ )

$$X_{j}Q(t^{n-1}, t^{n}, t^{n+1}, x_{k-1}, x_{k}, x_{k+1}, P_{k-1}^{n}, P_{k+1}^{n}, P_{k}^{n}, P_{k}^{n-1}, P_{k}^{n+1}) = 0.$$
(2.56)

Уравнение (2.56) при подстановке продолженных операторов переписывается в виде следующей системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, методы решения которых могут быть найдены, например в [22],

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t^{n-1}} + \frac{\partial Q}{\partial t^{n}} + \frac{\partial Q}{\partial t^{n+1}} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x_{k-1}} + \frac{\partial Q}{\partial x_{k}} + \frac{\partial Q}{\partial x_{k+1}} = 0, \\ 2t^{n-1} \frac{\partial Q}{\partial t^{n-1}} + 2t^{n} \frac{\partial Q}{\partial t^{n}} + 2t^{n+1} \frac{\partial Q}{\partial t^{n+1}} + \\ + x_{k-1} \frac{\partial Q}{\partial x_{k-1}} + x_{k} \frac{\partial Q}{\partial x_{k}} + x_{k+1} \frac{\partial Q}{\partial x_{k+1}} = 0, \\ \frac{c_{4}}{2} \left( x_{k-1} \frac{\partial Q}{\partial x_{k-1}} + x_{k} \frac{\partial Q}{\partial x_{k}} + x_{k+1} \frac{\partial Q}{\partial x_{k+1}} \right) + \\ + P_{k-1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial P_{k-1}^{n}} + P_{k+1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial P_{k+1}^{n}} + P_{k}^{n} \frac{\partial Q}{\partial P_{k}^{n}} + \\ + P_{k}^{n-1} \frac{\partial Q}{\partial P_{k-1}^{n}} + P_{k}^{n+1} \frac{\partial Q}{\partial P_{k}^{n+1}} = 0. \end{cases}$$

$$(2.57)$$

Решение для первых двух уравнений системы (2.57) может быть записано как следующая функция

$$Q = Q(t^{n} - t^{n-1}, t^{n+1} - t^{n}, x_{k} - x_{k-1}, x_{k+1} - x_{k}, P_{k-1}^{n}, P_{k+1}^{n}, P_{k}^{n}, P_{k}^{n-1}, P_{k}^{n+1}).$$

$$(2.58)$$

Подставляя (2.58) в третье уравнение (2.57), получаем следующее решение

$$Q = Q \left( \frac{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}{(t^n - t^{n-1})}, \frac{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}{(t^{n+1} - t^n)}, \frac{P_{k-1}^n, P_{k+1}^n, P_k^n, P_k^{n-1}, P_k^{n+1}}{(t^{n+1} - t^n)} \right).$$

$$(2.59)$$

И наконец подставляя (2.59) в четвертое уравнение (2.57), получаем решение системы (2.57)

$$Q = Q\left(\frac{(t^{n+1} - t^n)}{(t^n - t^{n-1})}, \frac{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}{(t^n - t^{n-1})(P_k^n)^{c_4}}, \frac{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}{(t^{n+1} - t^n)(P_k^n)^{c_4}}, \frac{P_k^n}{P_{k-1}^n}, \frac{P_k^n}{P_{k+1}^n}, \frac{P_k^n}{P_k^{n-1}}, \frac{P_k^n}{P_k^{n+1}}\right).$$
(2.60)

Функция (2.60) является инвариантом для непрерывной группы симметрии, которая задается операторами (2.52) и зависит от базиса инвариантов, который состоит из семи функций вида (2.27).

Решение системы уравнений (2.57) может быть также, например, записано как функция

$$Q = Q\left(\frac{(t^{n+1} - t^n)}{(t^n - t^{n-1})}, \frac{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}{(t^n - t^{n-1})(P_k^{n-1})^{c_4}}, \frac{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}{(t^{n+1} - t^n)(P_k^{n-1})^{c_4}}, \frac{P_k^{n-1}}{P_{k-1}^n}, \frac{P_k^{n-1}}{P_{k+1}^n}, \frac{P_k^{n-1}}{P_k^n}, \frac{P_k^{n-1}}{P_k^{n+1}}\right)$$
(2.61)

с учетом того, что переменные  $P_k^{n-1}$  и  $P_k^n$  поменяны местами. Это возможно в силу не единственности пути решения рассматриваемой системы уравнений. Также не единственным является набор переменных (2.53): в данном случае могут быть взяты в рассмотрения еще дополнительные переменные, например  $t^{n+2}$ , следовательно первый инвариант базиса может быть переписан как  $(t^{n+2} - t^{n+1})/(t^n - t^{n-1})$ . Продемонстрированные выше замены переменных в инвариантах позволяют использовать константы  $p_i$  для разностных инвариантов классификации, приведенной выше (Таблица 2.3), что, в свою очередь, дает возможность более общей записи разностных инвариантов. Это возможно по причине того, что инфинитезимальные операторы имеют вид

$$X = \xi^{1}(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^{2}(x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(P)\frac{\partial}{\partial P}.$$
(2.62)

Однако частичным исключением является класс 3, у которого оператор  $\bar{X}_5$  не относится к упомянутому виду, что влияет на вид разностных инвариантов  $J_1$  и  $J_3$ .

## 2.5. Новая групповая классификация разностных схем уравнений двухфазной фильтрации для задачи Рапопорта-Лиса

#### 2.5.1. Общий вид дифференциального уравнения

В данном разделе рассматривается одномерное уравнение Рапопорта-Лиса, которое является обобщением классической задачи Баклея-Леверетта с учетом функции капиллярного давления и записывается в виде [207]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{K}{\phi \mu_o} \frac{\partial}{\partial x} \left( K_o(S) f(S) \frac{dP_c}{dS} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{V}{\phi} \frac{df}{dS} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \qquad (2.63)$$

где S(t,x) – водонасыщенность (д. ед.),  $\phi = const$  – пористость (д. ед.), K = const – абсолютная проницаемость (м<sup>2</sup>),  $\mu_w$ ,  $\mu_o = const$  – вязкости воды и нефти соответственно (Па.с),  $P_c(S) = P_o - P_w$  – функция капиллярного давления (Па),  $V = V_o + V_w = const$  – суммарная скорость потока жидкости (м/с), f(S) – функция Баклея-Леверетта (д. ед.), выражаемая как

$$f(S) = \frac{\frac{K_w(S)}{\mu_w}}{\frac{K_w(S)}{\mu_w} + \frac{K_o(S)}{\mu_o}},$$
(2.64)

 $K_w(S)$  – относительная фазовая проницаемость для воды и  $K_o(S)$  – относительная фазовая проницаемость для нефти (д. ед.).

Уравнение (2.63) может быть записано как

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( A(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial B(S)}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$
(2.65)

и быть использовано для групповой классификации разностных схем, которая приводится ниже.

#### 2.5.2. Классы дифференциальных уравнений и их разностных схем

Для уравнения (2.65) на основе результатов классификации соответствующего типа дифференциальных уравнений, которые представлены в [196], получена классификация [57, 60, 62, 179, 178] разностных схем (Таблица 2.4), где  $X_1$  и  $X_2$  берутся из (2.51),  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  – некоторые константы. Данные классы получены с помощью решения уравнения (2.26) аналогично тому, как это было проделано для классов разностных схем уравнения фильтрации газа.

N⁰	A	В	Операторы	Разностные инварианты	
1	$A = c_1 S^{c_2},$ $c_2 \neq -1$	$B = c_1 c_3 S^{c_2 + 1}$	$\bar{X}_{3} = -t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{S}{c_{2}}\frac{\partial}{\partial S}$	$J_{1} = (t^{n+p_{1}} - t^{n+p_{2}})(S_{k+p_{4}}^{n+p_{3}})^{c_{2}},$ $J_{2} = \frac{S_{k+p_{6}}^{n+p_{5}}}{S_{k+p_{8}}^{n+p_{7}}}, J_{3} = x_{k+p_{9}} - x_{k+p_{10}}$	
2	$A = \frac{c_1}{S}$	$B = c_1 c_3 \ln S$	$\bar{X}_{1}, X_{2}, \\ \bar{X}_{3} = -t\frac{\partial}{\partial t} - S\frac{\partial}{\partial S}$	$J_{1} = \frac{(t^{n+p_{1}} - t^{n+p_{2}})}{S_{k+p_{4}}^{n+p_{3}}},$ $J_{2} = \frac{S_{k+p_{6}}^{n+p_{5}}}{S_{k+p_{6}}^{n+p_{7}}}, J_{3} = x_{k+p_{9}} - x_{k+p_{10}}$	
3	$A = c_1 e^{c_2 S}$	$B = c_1 c_3 e^{c_2 S}$	$\bar{X}_3 = -t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c_2}\frac{\partial}{\partial S}$	$J_{1} = (t^{n+p_{1}} - t^{n+p_{2}})e^{c_{2}S_{k+p_{4}}^{n+p_{3}}},$ $J_{2} = S_{k+p_{6}}^{n+p_{5}} - S_{k+p_{8}}^{n+p_{7}},$ $J_{3} = x_{k+p_{9}} - x_{k+p_{10}}$	

Таблица 2.4 - Инвариантные разностные схемы для уравнения Рапопорта-Лиса

Цель полученных классификаций состоит в том, чтобы представить только дифференциальные уравнения и их инвариантные разностные схемы (получаются

выражением из разностных инвариантов) с коэффициентами, которые могут быть выбраны из реальных физических задач фильтрации в пористых средах. Также подчинен выбор классов требованию возможности получения явного преобразований группы симметрии аналитического вида И разностных инвариантов при решении соответствующих дифференциальных уравнений. Таким образом, результаты, которые представляет Таблица 2.4, а также Таблица 2.3, не предназначены для охвата всех уравнений из известных классификаций дифференциальных уравнений, которые, в частности, могут описывать другие процессы: теплоперенос, диффузия и др. Конкретные примеры применения полученных классификаций будут приведены далее в Главе 3 данной диссертационной работы.

#### 2.6. Обобщение полученных классификаций на многомерные случаи

### 2.6.1. Расширение полученных классов дискретных динамических систем на случай бо̀льших размерностей

Полученные классы двумерных дискретных динамических систем с двухпараметрическими группами симметрий (Таблица 2.1) и трехмерных дискретных динамических систем с трехпараметрическими группами симметрий (Таблица 2.2) могут быть сведены к классам с большей размерностью: к исходной системе добавляется несколько соотношений вида

$$u_{k+1}^{1} = v^{1}(u_{k}^{1}, u_{k}^{2}, \dots, u_{k}^{n}), \dots, u_{k+1}^{n} = v^{n}(u_{k}^{1}, u_{k}^{2}, \dots, u_{k}^{n}),$$
(2.66)

где их количество определяется желаемой размерностью новой дискретной динамической системы, а добавляемые функции не зависят от уже существующих переменных. Далее исходная система меняется в соответствии со следующим набором правил:

- если функция, стоящая в правой части исходной системы, соответствует тождественному преобразованию (например, x<sub>k+1</sub> = x<sub>k</sub>), то она остается неизменной и новые переменные для данного уравнения не добавляются;
- если в функции правой части присутствует произвольная функция (или функции), например  $x_{k+1} = p(x_k, y_k) + z_k$ , то она заменяется на функцию

зависящей от всех вводимых переменных, то есть используется следующее:  $x_{k+1} = p(x_k, y_k, u_k^1, u_k^2, ..., u_k^n) + z_k;$ 

- если функция правой части содержит произвольные константы, к примеру  $x_{k+1} = x_k + c$ , то это соответствует предыдущему случаю, то есть используется следующее:  $x_{k+1} = x_k + p(u_k^1, u_k^2, ..., u_k^n)$ ;
- если у функций правых частей имеются константы, которые могут изменятся не на всем множестве действительных чисел, то вводимая функция должна также принимать значения только на соответствующем множестве (пример – классы 22 и 23, которые представляет Таблица 2.2).

Инфинитезимальные операторы для расширенного класса носят тот же вид, а группа преобразований на новых введенных переменных действует тождественно. Для получения всех возможных преобразований класса необходимо воспользоваться формулами типа (2.45) для соответствующей размерности.

Рассмотрим пример для двумерного класса 3 (Таблица 2.1):

$$x_{k+1} = c_1 x_k, \quad y_{k+1} = c_2 x_k + y_k. \tag{2.67}$$

Расширим данный класс до четырехмерного с помощью указанных выше шагов, что приводит к системе

$$x_{k+1} = p^{1}(u_{k}^{1}, u_{k}^{2})x_{k}, \quad y_{k+1} = p^{2}(u_{k}^{1}, u_{k}^{2})x_{k} + y_{k},$$

$$u_{k+1}^{1} = v^{1}(u_{k}^{1}, u_{k}^{2}), \quad u_{k+1}^{2} = v^{2}(u_{k}^{1}, u_{k}^{2}).$$
(2.68)

#### 2.6.2. Расширение полученных классов разностных схем на случай больших

#### размерностей

Уравнение фильтрации газа (2.50) может быть записано для многомерного случая в виде

$$\frac{d\alpha(P)}{dP}\frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^{i}} \left(\beta(P)\frac{\partial P}{\partial x^{i}}\right) = 0, \qquad (2.69)$$

а уравнение Рапопорта-Лиса (2.65) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^{i}} \left( A(S) \frac{\partial S}{\partial x^{i}} \right) + \frac{\partial B(S)}{\partial S} \sum_{i=1}^{n} V^{i} \frac{\partial S}{\partial x^{i}} = 0, \qquad (2.70)$$

где используются коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  (Таблица 2.3) и коэффициенты A и B (Таблица 2.4) для уравнений (2.69) и (2.70) соответственно, а также постоянные компоненты скорости потока  $V^i$ .

Большинство операторов из указанных таблиц имеет вид

$$X = \xi^{0}(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^{1}(x^{1})\frac{\partial}{\partial x^{1}} + \eta(y)\frac{\partial}{\partial y'}$$
(2.71)

где под переменной у понимаются функции давления или насыщенности. Такой вид операторов позволяет обобщить полученные классификации разностных схем на случай *n* пространственных переменных. Инфинитезимальные операторы при обобщении примут вид

$$X = \xi^{0}(t)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} c_{i}\xi^{1}(x^{i})\frac{\partial}{\partial x^{i}} + \eta(y)\frac{\partial}{\partial y'}$$
(2.72)

где *c*<sub>*i*</sub> – некоторые константы, удовлетворяющие следующим условиям:

- если  $\xi^0(t) \equiv 0$  и  $\eta(y) \equiv 0$ , то получаем *n* операторов вида *X*, где только одна из констант *c<sub>i</sub>* не равна нулю;
- в противном случае все  $c_i$  не равны нулю.

Данные операторы будут соответствовать непрерывным группам симметрий уравнений (2.69) и (2.70) с учетом коэффициентов и исходных операторов вида (2.71) – Таблица 2.3 и Таблица 2.4.

Для получения разностных инвариантов для многомерного случая нужно «продублировать» на все новые пространственные переменные те инварианты, которые содержат в одномерном случае пространственную переменную, а для зависимых переменных нужно добавить индексы, отвечающие за новые пространственные переменные. Например, для случая 1 классификации разностных схем для уравнения фильтрации газа (Таблица 2.3) обобщенные на *n*-мерный случай разностные инварианты будут иметь вид:

$$J_{1}^{i} = \frac{\left(x_{k^{i}+p_{1}^{i}}^{i} - x_{k^{i}+p_{2}^{i}}^{i}\right)\left(x_{k^{i}+p_{3}^{i}}^{i} - x_{k^{i}+p_{4}^{i}}^{i}\right)}{(t^{n+p_{5}} - t^{n+p_{6}})e^{P_{k^{i}+p_{3}^{n},\dots,k^{i}+p_{8}^{n}}}},$$

$$J_{2} = P_{k^{i}+p_{10}^{1},\dots,k^{i}+p_{10}^{n}}^{n+p_{11}} - P_{k^{i}+p_{12}^{1},\dots,k^{i}+p_{12}^{n}}^{n+p_{12}^{n}},$$

$$J_{3} = \frac{t^{n+p_{13}} - t^{n+p_{14}}}{t^{n+p_{15}} - t^{n+p_{16}}}, \quad i = 1...n,$$

$$(2.73)$$

где верхний индекс для констант  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_8, p_{10}, p_{12}$ , а также для индекса k означает номер пространственной переменной.

Случай 3 классификации разностных схем для уравнений фильтрации газа не может быть обобщен на многомерный случай описанным здесь способом, так как у него оператор  $X_4$  не записывается в виде (2.71). Данный случай требует получения полной групповой классификации дифференциальных уравнений вида (2.69), что не является целью данной диссертации. Также стоит отметить, что получаемая указанным здесь способом группа непрерывных симметрий может являться не полной, а для того, чтобы получить полную группу симметрий, нужно проводить полноценный групповой анализ этих уравнений, что не является целью данной диссертации.

#### Выводы к главе

- В данной главе дано понятие непрерывных симметрий для различных типов уравнений и представлено введение в теорию группового анализа для дискретных моделей вместе с известным методом построения разностных схем с наследованием непрерывных симметрий.
- Получены классы двумерных и трехмерных дискретных динамических систем на основе известных классификаций двухпараметрических и трехпараметрических непрерывных групп преобразований.
- Получены групповые классификация разностных схем дифференциальных уравнений фильтрации газа и дифференциальных уравнений двухфазной фильтрации для задачи Рапопорта-Лиса на

основе известных групповых классификаций этих дифференциальных уравнений.

- 4. Получено обобщение полученных классов дискретных динамических систем и классов разностных схем на случай больших размерностей.
- 5. Непрерывные группы симметрий дискретных моделей теории фильтрации содержат в себе фундаментальную информацию о модели и могут быть использованы на практике при численных расчетах, что будет показано в рамках применения полученных классификаций в следующих главах данной диссертации.

### Глава 3. ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП СИММЕТРИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ

Данная глава посвящена применению полученных в Главе 2 результатов исследования связей дискретных моделей за счет непрерывных симметрий. Здесь приводятся примеры применения упомянутых результатов к дискретным моделям процессов фильтрации на микро- и макромасштабах пористых сред.

## **3.1.** Новый метод размножения численных решений дифференциальных уравнений с помощью непрерывных групп симметрий

#### 3.1.1. Описание метода размножения численных решений

Для практического использования численных алгоритмов во многих областях очень важно, чтобы с их помощью была возможность получения быстрых и надежных результатов. Наличие непрерывных симметрий дает возможность «размножения» решений с использованием преобразований только этих непрерывных групп. Нужно вычислить одно численное решение для инвариантной разностной схемы, которое не должно быть тривиальным или инвариантным. После этого семейство решений может быть получено с использованием непрерывной группы симметрии. В большей степени это свойство использовалось при исследовании дифференциальных уравнений [18, 26, 131]. Однако оно верно и для дискретных уравнений [204], то есть неинвариантное и нетривиальное численное решение дискретного уравнения переходит в другое решение под действием преобразований непрерывной группы симметрии. Метод размножения (генерации) численных решений основан на указанных выше свойствах и состоит из следующих шагов [57, 179]:

> получение инвариантной разностной схемы, то есть схемы с непрерывной симметрией, для рассматриваемого дифференциального уравнения, или нахождение непрерывных симметрий для уже существующих разностных схем;

- расчет одного частного численного решения (используется численное решение, полученное с помощью ЭВМ) с помощью инвариантной разностной схемы с начальными и граничными условиями из множества условий, которое инвариантно относительно найденной группы симметрии;
- нахождение параметров группы симметрии, переводящих начальные и граничные условия уже рассчитанного решения в условия из инвариантного множества условий для получаемых решений;
- преобразование рассчитанного решения с использованием преобразований группы симметрии с учетом найденного набора параметров группы.

Также указанная выше последовательность шагов представлена схематически ниже (Рисунок 3.1). Данная последовательность шагов реализована в виде программы в СКМ Matlab, краткое описание которой приводится в Приложении А.



Рисунок 3.1 - Принцип размножения численных решений с помощью непрерывной группы симметрии разностной схемы

Опишем далее метод размножения численных решений более подробно. Пусть численное решение

$$S_0 = \{y_1, y_2, \dots, y_{N_p}\}, \quad y_k = (y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^m) \in \mathbb{R}^m, \quad k = 1, \dots, N_p$$
(3.1)

задано на сетке из N<sub>p</sub> узлов

$$M_0 = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_{N_p} \right\}, \quad x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, \dots, N_p$$
(3.2)

с начальными условиями (первую координату  $x^1$  считаем временем)

$$C_{initial} = \left\{ y_1^1, y_2^1, \dots, y_{N_p}^1 \right\}$$
(3.3)

и граничными условиями на  $N_b$  граничных узлах с индексами  $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N_b}\}$ 

$$C_{boundary} = \left\{ y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots, y_{\alpha_{N_b}} \right\}$$
(3.4)

для некоторой системы дискретных уравнений вида (1.1) с непрерывной *r*-параметрической группой симметрии вида

$$T_a: \bar{x}_k = f(x_k, y_k, a), \ \bar{y}_k = g(x_k, y_k, a), \ a \in \mathbb{R}^r.$$
(3.5)

В данном случае верхний индекс отвечает за номер координаты, а нижний – за номер узла сетки и далее за номер генерируемого решения. Рассмотрим далее некоторое заданное множество из  $N_s$  начальных и граничных условий для той же системы дискретных уравнений

$$\left\{ (C_{initial}^{1}, C_{boundary}^{1}), (C_{initial}^{2}, C_{boundary}^{2}), \dots, (C_{initial}^{N_{s}}, C_{boundary}^{N_{s}}) \right\},$$
(3.6)

для которого запишем множество систем уравнений вида

$$\begin{cases} T_{a_i} C_{initial}^i = C_{initial}, & i = 1, ..., N_s, \\ T_{a_i} C_{boundary}^i = C_{boundary} \end{cases}$$
(3.7)

на  $N_s$  неизвестных групповых параметров  $a_i$  для группы непрерывной симметрии (3.5), где, например, под  $T_a x$  вместе с заданными значениями для вектора зависимых переменных *у* имеется в виду следующее

$$T_a x = (T_a x^1, \dots, T_a x^n) = (f^1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m, a^1, \dots, a^r), \dots, f^n(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m, a^1, \dots, a^r)).$$
(3.8)

Система уравнений (3.7) позволяет найти преобразования группы непрерывной симметрии, которые преобразуют частное решение (3.1), заданного на сетке (3.2), с начальными и граничными условиями (3.3) и (3.4) соответственно в новые решения с начальными и граничными условиями (3.6). Новые численные решения (при условии, что исходное решение для размножения (3.1) на сетке (3.2) не является инвариантным) имеют вид

$$S_i = \left\{ T_{a_i} y_1, T_{a_i} y_2, \dots, T_{a_i} y_{N_p} \right\},$$
(3.9)

и заданы на преобразованной сетке

$$M_i = \left\{ T_{a_i} x_1, T_{a_i} x_2, \dots, T_{a_i} x_{N_p} \right\}.$$
 (3.10)

Описанное выше демонстрирует Рисунок 3.2.



Рисунок 3.2 - Схема преобразования численного решения с помощью непрерывной группы симметрии на примере одномерного случая

#### 3.1.2. Преобразование начальных и граничных условий

Для представленного выше метода размножения численных решений основной проблемой является решение уравнений вида (3.8) для рассматриваемых начальных и граничных условий (3.3) и (3.4), так как заданные для новых решений начальные и граничные условия могут не преобразовываться в начальные и граничные условия исходного решения. Эта проблема известна и обсуждается, например, в [141]. Все это означает, что применение приведенного выше метода возможно только в рамках семейств начальных и граничных условий, которые внутри семейств связаны между собой преобразованиями из непрерывных групп симметрий.

Для получения семейств начальных и граничных условий, для которых возможно применение описанного метода, рассмотрим некоторые функции

$$u = u(x^{2}, ..., x^{n}), \quad u: D \to \mathbb{R}^{m}, \quad D \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

$$v = v(x^{1}, x^{2}, ..., x^{n}, y^{1}, ..., y^{m}),$$

$$v: \mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^{m} \to \mathbb{R}^{m}, \quad G \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

$$(3.11)$$

Данные функции задают пример начальных и граничных условий соответственно, интересных для некоторой конкретной задачи, где функция v задана на границе G области D, в которой задано рассматриваемое дискретное уравнение. Семейство начальных и граничных условий строится на основе преобразований непрерывной группы симметрии следующим образом:

$$u_{a} = T_{a}u(x^{2}, ..., x^{n}), \quad u: T_{a}D \to \mathbb{R}^{m}, T_{a}D \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

$$v_{a} = T_{a}v(x^{1}, x^{2}, ..., x^{n}, y^{1}, y^{2}, ..., y^{m}),$$

$$v: T_{a}(\mathbb{R} \times G \times \mathbb{R}^{m}) \to \mathbb{R}^{m}, \quad T_{a}G \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

$$(3.12)$$

#### 3.1.3. Исследование точности метода размножения численных решений

Как отмечалось выше, если мы знаем группу непрерывной симметрии, мы можем преобразовать одно частное решение в другое при условии, что первое решение не является инвариантным и тривиальным. Таким образом, можно получить семейство решений, которое зависит от параметра группы. Это дает возможность рассчитать численное решение только один раз и получить все остальные просто используя непрерывную группу симметрий, но, конечно, для некоторых типов начальных и граничных условий, которые должны преобразовываться друг в друга с помощью преобразований группы симметрии.

Рассмотрим заданное численное решение, которое представляет собой множество точек  $\{(x_k, y_k)\}$ , где k – индекс на сетке,  $x_k$  – вектор независимых переменных и  $y_k$  – вектор зависимых переменных. Это «идеальное» численное решение [90], которое рассчитывается с помощью «идеального» компьютера (бесконечноразрядного), который может избежать ошибок округления. Рассмотрим ошибки округления  $\varepsilon_k^1$  и  $\varepsilon_k^2$ , таким образом, «реальное» решение может быть записано как множество точек  $\{(x_k + \varepsilon_k^1, y_k + \varepsilon_k^2)\}$ .

Ошибки преобразуются, когда мы используем преобразование из некоторой группы симметрии для соответствующей разностной схемы, которая имеет упомянутое численное решение. Новые ошибки могут быть записаны в виде

$$\bar{x} = f(x, y, a), \quad \bar{y} = g(x, y, a),$$
  

$$\bar{\varepsilon}_{k}^{1} = f(x_{k} + \varepsilon_{k}^{1}, y_{k} + \varepsilon_{k}^{2}, a) - f(x_{k}, y_{k}, a) + \varepsilon_{k}^{3}(x_{k}, y_{k}, \varepsilon_{k}^{1}, \varepsilon_{k}^{2}, a),$$
  

$$\bar{\varepsilon}_{k}^{2} = g(x_{k} + \varepsilon_{k}^{1}, y_{k} + \varepsilon_{k}^{2}, a) - g(x_{k}, y_{k}, a) + \varepsilon_{k}^{4}(x_{k}, y_{k}, \varepsilon_{k}^{1}, \varepsilon_{k}^{2}, a),$$
  
(3.13)

где  $\bar{\varepsilon}_k^1$  и  $\bar{\varepsilon}_k^2$  являются ошибками для сгенерированных с использованием непрерывных симметрий решений,  $\varepsilon_k^3$  и  $\varepsilon_k^4$  – ошибки вычисления значений функций f и g, используя «реальный» компьютер. Ошибки  $\varepsilon_k^1$  и  $\varepsilon_k^2$  стремятся к нулю, если это позволяет используемый алгоритм получения изначального решения. Ошибки  $\varepsilon_k^3$  и  $\varepsilon_k^4$  стремятся к нулю, если используется сходящийся алгоритм для вычисления функций f и g, а также если  $\varepsilon_k^1$  и  $\varepsilon_k^2$  стремятся к нулю. Ошибки  $\bar{\varepsilon}_k^1$  и  $\bar{\varepsilon}_k^2$  стремятся к нулю, если  $\varepsilon_k^1, \varepsilon_k^2, \varepsilon_k^3, \varepsilon_k^4$  стремятся к нулю, так как функции f и g являются непрерывными. Следовательно, ошибки (3.13) для решений могут контролироваться и быть снижены, когда генерируются численные решения с использованием непрерывных симметрий.

Здесь не рассматривается вопрос о характере конкретного используемого решения, то есть оно может быть, например, неустойчивым. Также не рассматривается вопрос оценки ошибок численных решений относительно точных, так как в данном случае важным является то, чтобы ошибки  $\bar{\varepsilon}_k^1$  и  $\bar{\varepsilon}_k^2$  были малыми и стремились к нулю. Если это верно, то ошибки численных решений зависят в большей степени от используемой разностной схемы для получения изначального решения.

# **3.2.** Пример применения метода размножения численных решений для уравнения фильтрации газа

#### 3.2.1. Частный случай дифференциального уравнения

Рассмотрим конкретный пример уравнений (2.49) с уравнением состояния *ρ* = *χP* идеального газа при постоянной температуре и соотношением Клинкенберга для проницаемости [102, 155], которое дается формулой (3.14)

$$K(P) = K_1 (1 + \frac{K_2}{P}), \tag{3.14}$$

где  $\chi = M/RT = const$ ,  $K_1 - эффективная проницаемость жидкости, <math>K_2$  - тангенс угла наклона в координатах K(P) и 1/P, а также пусть  $\varphi = const$  и  $\mu = const$ . Дли этих коэффициентов уравнение может быть записано как

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left( (P + K_2) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0, \quad \gamma = \frac{K_1}{\mu \varphi}.$$
(3.15)

Уравнение (3.15) и все дальнейшие результаты [181] принадлежат случаю 2 из представленной в предыдущей главе классификации, которую дает Таблица 2.3, с заменой переменных  $\bar{P} = P + K_2$  и с коэффициентами  $\frac{d\alpha}{dP} = P$  и  $\beta = P$ . Уравнение (3.15) имеет четырехпараметрическую группу симметрий с инфинитезимальными операторами [41, 108]

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, X_4 = -t\frac{\partial}{\partial t} + (P + K_2)\frac{\partial}{\partial P}.$$
 (3.16)

Непрерывные симметрии для дифференциальных уравнений могут содержать важные их свойства, потому что эти симметрии определяют связи между решениями. Для рассматриваемого частного случая (3.15) симметрии с операторами  $X_1$  и  $X_2$ являются группами переносов ПО времени И пространственной координате соответственно, поэтому уравнение (3.15) не имеет времени и пространственной переменной в явном виде. Оператор X<sub>3</sub> отвечает за симметрию относительно растяжений для уравнения (3.15) или, по сути, за параболическую дифференциальную структуру этого уравнения. Симметрия с оператором X<sub>4</sub> возникает из-за конкретного вида коэффициента (3.14). Все эти четыре однопараметрические группы симметрий позволяют получать семейства решений, если известно одно частное решение.

#### 3.2.2. Инвариантность условий устойчивости для одного из полученных классов

#### разностных схем

Рассмотрим пример (3.15) и сделаем следующую замену переменной [132]

$$\bar{P} = \int_0^P \gamma(x + K_2) \, dx. \tag{3.17}$$

После замены переменных уравнение (3.15) примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \sqrt{2\gamma P + (\gamma K_2)^2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, \qquad (3.18)$$

где черта над новой переменной  $\bar{P}$  опущена для компактности дальнейших выкладок. Эта замена переменных производится только для последующего анализа устойчивости данного раздела. Для нового уравнения операторы группы симметрии совпадают все, кроме последнего

$$X_1, X_2, X_3, \bar{X}_4 = -t\frac{\partial}{\partial t} + (2P + \gamma K_2^2)\frac{\partial}{\partial P}.$$
(3.19)

Для группы симметрии, которая представляется операторами (3.19), дифференциальный инвариант для инвариантной записи вида (2.22) имеет вид

$$I_1 = \frac{P_{xx}\sqrt{2\gamma P + (\gamma K_2)^2}}{P_t}.$$
(3.20)

Непрерывная группа с инфинитезимальными операторами (3.19) имеет еще три дифференциальных инварианта, но они опущены, так как инвариантная запись для уравнения (3.18) представляется как  $I_1 = 1$ . Разностные инварианты для (3.19) можно записать как

$$J_{1} = \frac{(x_{k+p_{1}} - x_{k+p_{2}})^{2}}{(t^{n+p_{3}} - t^{n+p_{4}})\sqrt{2\gamma P_{k+p_{5}}^{n+p_{6}} + (\gamma K_{2})^{2}}},$$

$$J_{2} = \frac{2P_{k+p_{7}}^{n+p_{8}} + \gamma K_{2}^{2}}{2P_{k+p_{9}}^{n+p_{10}} + \gamma K_{2}^{2}},$$

$$J_{3} = \frac{x_{k+p_{11}} - x_{k+p_{12}}}{x_{k+p_{13}} - x_{k+p_{14}}}, \quad p_{i} \in \mathbb{Z}$$
(3.21)

и могут быть получены из системы уравнений с частными производными первого порядка (2.26) с продолженными операторами для (3.19). Число инвариантов зависит от числа (для этого случая это четыре) независимых операторов (в смысле функциональной независимости в пространстве всех дискретных переменных) и от числа всех дискретных переменных. В этом случае может быть выбрано одиннадцать дискретных переменных для времени, пространства и давления в пяти узлах сетки: по центру, сверху, снизу, слева и справа. Таким образом, число инвариантов может быть разным, но есть только три различные формы (3.21) этих инвариантов. Константы  $p_i \in \mathbb{Z}$  необходимы для выражения всех инвариантов и для получения более широкого спектра инвариантных разностных схем: например, для использования различного количества соседних точек для аппроксимации дифференциальных производных. Эти переносы (константы  $p_i$ ) возможны из-за специфической формы операторов (3.19), которые могут быть записаны как

$$X_j = \sum_{i=1}^n \xi_j^i(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^m \eta_j^i(y^i) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$
(3.22)

Инвариант  $J_1$  позволяет задать следующий шаг по времени в зависимости от шага по пространству и текущего значения давления  $P_k^n$ . Инвариант  $J_3$  определяет возможные сетки, включающие равномерные сетки для переменной x, а  $J_2$ появляется из-за оператора  $\bar{X}_4$ , который позволяет масштабировать вместе давление и время. Для более глубокого понимания разностного инварианта  $J_1$ рассмотрим инвариантные разностные схемы [53]: явную

$$\frac{P_k^{n+1} - P_k^n}{t^{n+1} - t^n} - \frac{\sqrt{2\gamma P_k^n + (\gamma K_2)^2} (P_{k+1}^n - 2P_k^n + P_{k-1}^n)}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k-1})} = 0$$
(3.23)

и неявную

$$\frac{P_k^{n+1} - P_k^n}{t^{n+1} - t^n} - \frac{\sqrt{2\gamma P_k^n + (\gamma K_2)^2} (P_{k+1}^{n+1} - 2P_k^{n+1} + P_{k-1}^{n+1})}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k-1})} = 0$$
(3.24)

разностные схемы. Эти разностные схемы могут быть получены с помощью разностных инвариантов (3.21), а с использованием метода замороженных коэффициентов [17, 220] можно получить необходимые условия устойчивости этих разностных схем, которые могут быть записаны как

$$\frac{2(t^{n+1} - t^n)\max_k \sqrt{2\gamma P_k^n + (\gamma K_2)^2}}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k-1})} < 1,$$

$$\frac{2(t^{n+1} - t^n)\max_k \sqrt{2\gamma P_k^n + (\gamma K_2)^2}}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k-1})} > 0$$
(3.25)

соответственно. Инвариант  $J_1$  может быть выражен как

$$J_1 = \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{(t^{n+1} - t^n)\max_k \sqrt{2\gamma P_k^n + (\gamma K_2)^2}} = C = const.$$
 (3.26)

Это означает, что необходимые условия устойчивости для (3.23) и (3.24) являются инвариантами [181], но для различных наборов значений константы *C*. Этот факт напрямую не следует из теории группового анализа, однако дает пример важности наличия непрерывных симметрий для разностных схем. Конечно, есть примеры разностных схем, которые могут иметь более выгодные свойства для численных расчетов и быть неинвариантными. Но описанный выше подход позволяет иметь широкий выбор разностных схем, которые могут позволить находить численные решение быстрее и с той же точностью при применении метода размножения численных решений.

#### 3.2.3. Инвариантная разностная схема и исходные данные для расчетов

Для получения дальнейших результатов [53, 176, 179, 181] продолжает использоваться пример (3.15). Далее используются следующие явное и неявное разностные уравнения соответственно (порядок аппроксимации  $O(\tau, h)$ )

$$\frac{P_k^{n+1} - P_k^n}{\tau^n} - \frac{\gamma}{h^2} \left( (P_{k+1}^n - P_k^n) (P_k^n + K_2) - (P_k^n - P_{k-1}^n) (P_{k-1}^n + K_2) \right) = 0, \tag{3.27}$$

$$\frac{P_k^{n+1} - P_k^n}{\tau^n} - \frac{\gamma}{h^2} ((P_{k+1}^{n+1} - P_k^{n+1})(P_k^n + K_2) - (P_k^{n+1} - P_{k-1}^{n+1})(P_{k-1}^n + K_2)) = 0$$
(3.28)

и разностная сетка

$$h = x_{k+1} - x_k = const, \quad \tau^n = t^{n+1} - t^n = \frac{A \cdot h^2}{(\bar{P}^n + K_2)},$$
 (3.29)

где A – коэффициент, зависящий от максимального значения времени,  $\bar{P}^n$  – среднее давление на n-ый шаг. Таблица 3.1 приводит используемые параметры для численных расчетов. Разностные схемы (3.27)-(3.29) относятся к классам схем квазилинейного уравнения теплопроводности, которые изучены, например в [73].

(3.27)		
Параметр	Ед. изм.	Значение
Левое начальное давление	Па	100 000
Правое начальное давление	Па	10 000
Интервал времени	с	0700 000
Интервал пространственной переменной	М	0500
Число временных шагов	ШТ.	156
Число пространственных шагов	ШТ.	10
Пористость	д. ед.	0.20
Вязкость	Пас	10-6
Проницаемость К <sub>1</sub>	M <sup>2</sup>	10 <sup>-12</sup>
Коэффициент К <sub>2</sub>	Па	10
Константа C <sub>2</sub>	с	150 000

Таблица 3.1 - Исходные данные для численных расчетов с помощью разностных схем (3.27)-(3.29)

#### 3.2.4. Сравнение различных вариантов выбора шага по времени

Причина выбора явной разностной схемы состоит в том, чтобы продемонстрировать применение найденного инвариантного условия устойчивости. Точное решение уравнения (3.15) представлено в [201] и может быть записано как

$$P(t,x) = -\frac{(x+C_1)^2}{6\gamma(t+C_2)} + \frac{C_3}{|t+C_2|^{\frac{1}{3}}} - K_2,$$
(3.30)

где константы  $C_1$  и  $C_3$  зависят от начальных давлений (на левой и правой границах), константа  $C_2$  – от начального значения времени. Начальные и граничные условия для используемых разностных схем выбираются в соответствии с решением (3.30) для проверки точности численных решений.

Ниже Рисунок 3.3 показывает сравнение численных решений для разностных схем (3.27)-(3.29) с постоянным шагом по времени и с переменным шагом [181]. Верхние графики (слева для явной схемы, справа для неявной схемы) показывают сравнение точного решения и численных решений для (3.27)-(3.29) с выбором шагов по времени в зависимости от шага по пространственной переменной и среднего давления на текущем временном слое и с постоянным шагом по времени. На левом нижнем графике показано сравнение относительных ошибок (относительно точного решения) четырех рассматриваемых разностных схем. На правом нижнем графике представлено сравнение количества шагов по времени двух упомянутых численных решений. Рисунок 3.3 показывает, что выбор шага по времени из (3.29) способствует стабилизации явной разностной схемы по сравнению с тем же числом постоянных временных шагов (это численное решение неустойчиво).

Сравнение на рисунке ниже показывает преимущества для расчетов с использованием выбора временных шагов из (3.29). Такой подход для временных шагов хорошо известен и рассматривается, например, в книге [17], но он возникает в данном случае из анализа с помощью непрерывных симметрий. Однако, на первый взгляд, используемый метод построения инвариантных разностных схем не обязан приводить к этому условию устойчивости.



Рисунок 3.3 - Сравнение численных решений с различным выбором шагов по времени
#### 3.2.5. Результаты численных расчетов

Для групп симметрий с операторами  $X_1$  и  $X_2$  из (3.19) преобразования для решений означают переносы для временных и пространственных переменных, что, в свою очередь, означает просто перемещение сетки без каких-либо изменений для разностных уравнений. Более интересным является рассмотрение операторов  $X_3$  и  $X_4$  из (3.19), для которых группы преобразований имеют вид

$$\bar{t} = e^{2a}t, \bar{x} = e^{a}x, \bar{P} = P,$$
  

$$\bar{t} = e^{-a}t, \bar{x} = x, \bar{P} = (P + K_2)e^{a} - K_2$$
(3.31)

для  $X_3$  и  $X_4$  соответственно. Рисунок 3.4 показывает действие (3.31) на исходное численное решение с выбора шага по времени (формулы (3.9) и (3.10)). Верхний левый и верхний правый графики показывают использование растяжений для временных и пространственных переменных – инфинитезимальный оператор  $X_3$ . Нижний левый и нижний правый графики показывают применение  $X_4$ , который определяет растяжения по времени в сочетании с растяжением и переносом по давлению. Заданные начальные давления на левой границе определяют параметры для размножения решений. Относительная ошибка исходного численного решения, полученного с помощью неявной разностной схемы с выбором шага по времени (Рисунок 3.3), после применения преобразований группы симметрии остается с точностью до 6 знака такой же: средняя относительная ошибка – 0.003498 д. ед., максимальная – 0.014460 д. ед. Данные результаты получены с помощью разработанной программы в СКМ Matlab, которая является часть программного комплекса, описанного в Приложении А.

Метод построения разностных схем с сохранением непрерывных групп симметрий рассматривается на примере уравнения фильтрации газа в пористых средах. Приведенные примеры и результаты численных расчетов показывают очень тесную связь между симметриями и свойствами разностных схем: инвариантность необходимых условий устойчивости и возможность размножения численных решений. Полученные разностные инварианты и приведенная классификация для рассматриваемого семейства дифференциальных уравнений может быть использована для проверки часто используемых разностных схем и для построения новых схем. Описанный способ получения численных решений может быть применен для повышения точности и скорости вычислений.



Рисунок 3.4 - Размножение численных решений с помощью рассчитанного решения с выбором временных шагов

Полученные здесь результаты также способствуют дальнейшим попыткам понять связь устойчивости и непрерывных симметрий для разностных схем в более общих случаях, например, при рассмотрении двух- и трехмерных случаев уравнений многофазной фильтрации в пористых средах. К тому же незатронутый здесь вопрос о законах сохранения [109, 127, 129] очень близок к непрерывным симметриям и может помочь понять шире рассматриваемые проблемы.

# 3.3. Пример применения метода размножения численных решений для уравнения Рапопорта-Лиса

# 3.3.1. Частный случай дифференциального уравнения Рапопорта-Лиса для численных расчетов

При произвольных функциях для ОФП и капиллярного давления уравнение (2.63) имеет достаточно очевидную группу симметрии из переносов по времени и пространству, так как время и пространственная координата не присутствуют явно в уравнении. При задании упомянутых функций в виде [57, 178, 179]

$$K_{w}(S) = S^{N}, \quad K_{o}(S) = (1 - S^{N}), \quad P_{c}(S) = -\frac{P_{1}}{N} ln \left| \frac{S^{N}}{S^{N} - 1} \right| + P_{2},$$

$$f(S) = S^{N}, \quad \mu_{o} = \mu_{w} = \mu,$$
(3.32)

где  $P_1$  и  $P_2$  – масштабирующие коэффициенты, задающие зависимость для капиллярного давления (Па), N – безразмерный параметр, удовлетворяющий условиям  $N \neq 1$  и  $N \in \mathbb{R}$ , уравнение (2.63) сводится к уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( S^{N-1} \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \beta S^{N-1} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \alpha = \frac{KP_1}{\mu \phi}, \quad \beta = -\frac{VN}{\phi}. \tag{3.33}$$

Уравнение (3.33) имеет трехпараметрическую группу симметрии

$$\bar{t} = e^{-a_1}t + a_2, \ \bar{x} = x + a_3, \ \bar{S} = e^{\frac{a_1}{N-1}S}, \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$
 (3.34)

которая позволяет эффективно использовать метод размножения численных решений для частного случая (3.33) уравнения (2.63). Задание функций (3.32) для уравнения (2.63), чтобы получить уравнение (3.33) с группой симметрии (3.34), основывается на групповой классификации уравнений типа (2.63) в [41, 108, 196] и призвано получить достаточную для размножения решений группу симметрии. Стоит отметить, что возможны также и другие семейства функций, которые позволяют свести дифференциальное уравнение (2.63) к уравнению (3.33) или к другим уравнениям из классификаций, упомянутых выше. Непрерывная группа симметрии (3.34) складывается из переносов по времени и пространству, а также последовательным приравниванием параметров группы симметрии к нулю, за исключением одного.

Для уравнения (3.33) известно семейство решений [201], которое может быть записано в виде

$$S(t,x) = \left(-\frac{x}{\beta(t+C_1)} + \frac{\alpha \ln \left|\frac{t+C_1}{C_2}\right|}{\beta^2(N-1)(t+C_1)}\right)^{\frac{1}{N-1}},$$

$$C_1 = \frac{L}{\beta(S_L^{N-1} - S_R^{N-1})}, \quad \ln|C_2| = \ln|C_1| - S_L^{N-1}\frac{\beta^2}{\alpha}(N-1)C_1,$$

$$S_L = S(0,0), \quad S_R = S(0,L), \quad x \in [0,L], \quad t \in [0,T]$$
(3.35)

и использовано ниже для проверки сходимости выбранной разностной схемы. Данное семейство решений (3.35) является инвариантным относительно группы (3.34), то есть из любого решения семейства под действием данной группы симметрии получается также решение семейства.

#### 3.3.2. Разностная схема и исходные данные для расчетов

Для представления описанного выше метода размножения численных решений использована следующая неявная разностная схема (порядок аппроксимации  $O(\Delta t, \Delta x)$ )

$$S_{k}^{n+1} = S_{k}^{n} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x} (S_{k}^{n})^{N-1} (S_{k}^{n+1} - S_{k-1}^{n+1}) + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^{2}} \Big( (S_{k}^{n})^{N-1} (S_{k+1}^{n+1} - S_{k}^{n+1}) - (S_{k-1}^{n})^{N-1} (S_{k}^{n+1} - S_{k-1}^{n+1}) \Big),$$

$$\Delta t = const, \ \Delta x = const$$
(3.36)

из семейства инвариантных разностных схем класса 1 (Таблица 2.4). Параметры, которые использованы для приведенных здесь расчетов [57, 179, 178], представлены ниже (Таблица 3.2). Эти параметры были выбраны из соображений наглядной демонстрации описываемого алгоритма размножения численных решений без жесткой привязки к интервалам их реального изменения для конкретных пластовых систем. Разностная схема (3.36) использует известные виды аппроксимаций для конвективного и диффузионного членов, которые изучены, например в [73, 76, 83].

Параметр	Ед. изм.	Значение
Пористость ф	д. ед.	0.20
Абсолютная проницаемость К	M <sup>2</sup>	10-12
Вязкость $\mu$	Па•с	10-3
Масштабирующий параметр <i>P</i> <sub>1</sub>	Па	3 000 000
Масштабирующий параметр Р <sub>2</sub>	Па	6 000 000
Скорость жидкости V	м/с	0.0001
Параметр для степени N	-	2
Длина расчетной области L	М	100
Максимальное время Т	с	200 000
Начальная насыщенность на левой границе $S_L$	д. ед.	0.20
Начальная насыщенность на правой границе S <sub>R</sub>	д. ед.	0.60
Количество шагов по пространству $N_x$	ШТ.	100
Количество шагов по времени N <sub>t</sub>	ШТ.	200 000

Таблица 3.2 - Значения параметров для численных расчетов с помощью разностной схемы (3.36)

Ниже Рисунок 3.5 представляет функции ОФП и капиллярного давления для указанных выше параметров (Таблица 3.2). Представленные ниже функции ОФП могут быть масштабированы на остаточные насыщенности, при этом начальные и граничные условия должны браться из интервала остаточных насыщенностей. Зависимости для ОФП показывают, что одна из кривых для воды или нефти в Такой вид относительных данной модели является выпуклой. фазовых псевдо-ОФП проницаемостей может встречаться, К примеру, для при объединении слоев с разной проницаемостью [71], а само уравнение может быть использовано для задач типа [133]. Также такой вид функций ОФП в некоторых случаях может быть получен по результатам экспериментов на керне, как например представлено в [3] для фильтрации воды и нефти и в [68] для фильтрации газа и воды. Также стоит отметить, что конкретный вид функций ОФП и капиллярного давления может быть получен на основе моделирования процессов фильтрации в поромасштабных моделях пористой среды, чему подробно посвящена Глава 4.



Рисунок 3.5 - Функции ОФП и капиллярного давления, использованные для численных расчетов

#### 3.3.3. Результаты численных расчетов

Ниже представлены (Рисунок 3.6) функции начальных и граничных условий численного решения, которое используется для размножения решений ДЛЯ Такой выбор условий вызван желанием проверки сходимости [57, 178]. получаемых численных решений с семейством решений (3.35), то есть условия получены с использованием одного частного решения этого семейства. Данные начальные и граничные условия вместе с разностной схемой (3.36) могут быть отнесены к задаче, где в пласте с постоянной скоростью жидкости идет пропитка нефтью. Также Рисунок 3.6 представляет профили насыщенности во времени и пространстве для решения, которое используется для размножения решений рассматриваемой разностной схемы с указанными выше параметрами. Сравнение с известным частным решением из (3.35) дифференциального уравнения (3.33) показывает хорошую точность и сходимость используемой разностной схемы для заданных параметров. После применения преобразований группы симметрии относительная ошибка остается с точностью до 6 знака такой же: средняя относительная ошибка – 0.001673 д. ед., максимальная – 0.005179 д. ед.



Рисунок 3.6 - Профили насыщенности по времени (слева) и пространству (справа) для разностной схемы (3.36) и параметров, представленных выше (Таблица 3.2)

Рисунок 3.7 представляет размножение пяти численных решений для насыщенностей  $S_L = 0.32, 0.28, 0.24, 0.16, 0.12$  на основе полученного исходного решения для размножения, профили которого изображены выше (Рисунок 3.6). Размножение проводится с помощью преобразований группы симметрии (3.34),  $a_1 \neq 0, a_2 = 0, a_3 = 0,$ что означает использование при этом только однопараметрической группы растяжений ПО времени И насыщенности. Использование переносов по времени уместно, если для сгенерированных решений требуется изменение соотношения S<sub>R</sub>/S<sub>L</sub>. Расчеты проводились с помощью разработанной В СКМ Matlab программы, описание которой представлено в Приложении А. Выигрыш в скорости расчета пяти численных решений с помощью группы симметрии (без учета времени расчета исходного решения) перед расчетом такого же числа решений с помощью методов решения СЛАУ разностной схемы составляет порядка 1000 раз. По сути, время работы метода размножения численных решений в существенной степени зависит от времени расчета исходного решения с помощью разностной схемы напрямую.



Рисунок 3.7 - Профили насыщенности по времени (слева) и пространству (справа) для полученных решений

В данном разделе продемонстрированы преимущества использования разностных схем с известной группой непрерывной симметрии на примере уравнения Рапопорта-Лиса. Эти результаты представлены в [56]. Безусловными преимуществами данного подхода являются значительное увеличение скорости расчета (на три порядка), так как получить численное решение с помощью разностной схемы нужно лишь один раз, и возможность контроля точности для последующих расчетов, так как ошибка сгенерированных решений зависит от ошибки первоначального расчета. Эти преимущества позволяют быстрее и эффективнее находить решения многих задач, которые требуют большого количества многовариантных расчетов: анализ неопределенности [25], адаптация к истории разработки [37], апскейлинг [71] и многое другое.

Недостатком предлагаемого подхода на первый взгляд является ограниченность выбора используемых ОФП аналитическими зависимостями вида (3.32). Однако в условиях высокой степени неопределенности для ОФП и капиллярного давления этот недостаток может оказаться несущественным.

#### 3.4. Примеры применения классификаций дискретных динамических систем

#### 3.4.1. Пример для разностной схемы уравнения Баклея-Леверетта

Для построения примера дискретной динамической системы из классификации, которая получена в предыдущей Главе 2 для двумерных систем с двухпараметрическими группами непрерывных симметрий, рассмотрим

80

дифференциальное уравнение Баклея-Леверетта [8]. Данное уравнение описывает процесс двухфазной фильтрации в одномерной пористой среде без учета капиллярного давления и с постоянным суммарным расходом жидкости:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{V}{\varphi} \frac{df}{dS} \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \qquad (3.37)$$

где V – постоянная суммарная скорость двухфазного потока,  $\varphi$  – постоянный коэффициент пористости, S(t, x) – водонасыщенность, f(S) – доля воды в потоке. Групповой анализ данного типа уравнений был проведен в статье [191], где был выделен один класс уравнений с восьмипараметрической непрерывной группой симметрии для произвольной функции Баклея-Леверетта.

Далее для следующих функций ОФП и Баклея-Леверетта

$$K_{w}(S) = S^{2}, \quad K_{o}(S) = (1 - S^{2}), \quad \mu_{o} = \mu_{w} = \mu,$$

$$f(S) = \frac{\frac{K_{w}(S)}{\mu_{w}}}{\frac{K_{w}(S)}{\mu_{w}} + \frac{K_{o}(S)}{\mu_{o}}} = S^{2},$$
(3.38)

которые были использованы для уравнения Рапопорта-Лиса в данной главе [57], построим пример явной разностной схемы для шести внутренних и двух граничных пространственных узлов с равномерным шагом и с постоянным временным шагом [179]. Данная разностная схема является, по сути, шестимерной дискретной динамической системой и может быть записана как

$$S_{1}^{n+1} = S_{1}^{n} - S_{1}^{n} \frac{V}{\varphi} \frac{2\Delta t}{\Delta x} (S_{1}^{n} - S_{L}), S_{2}^{n+1} = S_{2}^{n} - S_{2}^{n} \frac{V}{\varphi} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (S_{3}^{n} - S_{1}^{n}),$$

$$S_{3}^{n+1} = S_{3}^{n} - S_{3}^{n} \frac{V}{\varphi} \frac{\Delta t}{\Delta x} (S_{4}^{n} - S_{3}^{n}), S_{4}^{n+1} = S_{4}^{n} - S_{4}^{n} \frac{V}{\varphi} \frac{\Delta t}{\Delta x} (S_{4}^{n} - S_{3}^{n}),$$

$$S_{5}^{n+1} = S_{5}^{n} - S_{5}^{n} \frac{V}{\varphi} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (S_{6}^{n} - S_{4}^{n}), S_{6}^{n+1} = S_{6}^{n} - S_{6}^{n} \frac{V}{\varphi} \frac{2\Delta t}{\Delta x} (S_{R} - S_{6}^{n}),$$
(3.39)

где верхний индекс n отвечает за временной слой, нижний индекс отвечает за номер узла на пространственной сетке,  $S_L$  и  $S_R$  – постоянные граничные насыщенности на левой и правой границах соответственно. Данная дискретная динамическая система имеет двухпараметрическую группу симметрии, для

которой продолженные на дискретные переменные инфинитезимальные операторы имеют вид

$$X_1 = S_2^n \frac{\partial}{\partial S_2^n} + S_2^{n+1} \frac{\partial}{\partial S_2^{n+1}}, X_2 = S_5^n \frac{\partial}{\partial S_5^n} + S_5^{n+1} \frac{\partial}{\partial S_5^{n+1}}.$$
(3.40)

Левая и правая конечно-разностные производные, использованные для уравнений номер 2 и 5 соответственно, позволяют иметь указанную группу симметрии.

Дискретная динамическая система (3.39) и двухпараметрическая группа симметрии, представляемая операторами (3.40), относится к случаю 1 классификации двумерных дискретных динамических систем (Таблица 2.1) с учетом результатов по обобщению классификаций на многомерный случай – раздел 2.6.1. предыдущей главы. Целью построения данной разностной схемы является демонстрация подхода применения полученной классификации дискретных динамических систем для разностных схем, поэтому в данном разделе на затрагиваются вопросы устойчивости и порядков аппроксимаций.

3.4.2. Пример для фрактальной сети капилляров в виде треугольника

#### Серпинского

При моделировании течения во фрактальных капиллярных сетях, как было показано в [97], чтобы получить гидравлическое сопротивление на одной из граней *k*-го приближения фрактального множества нужно сделать *k* итераций значения сопротивления на одной из граней начального приближения. Причем итерации производятся с помощью дробно-рациональных функций, у которых полиномы знаменателя и числителя удовлетворяют двум условиям:

- степень полинома числителя на единицу больше степени полинома знаменателя;
- полиномы в числителе и в знаменателе являются однородными функциями суммарная степень всех одночленов равна между собой.

В статье [188] было показано, что дискретная динамическая система

$$x_{k+1} = \frac{x_k(7x_k + 4y_k)(x_k - y_k)}{2(2x_k - y_k)(3x_k + y_k)},$$
  

$$y_{k+1} = \frac{(x_k - y_k)(x_k^2 - 4x_ky_k - 2y_k^2)}{2(2x_k - y_k)(3x_k + y_k)},$$
(3.41)

итерации которой дают сопротивление сторон анизотропной сети капилляров в виде треугольника Серпинского (Рисунок 3.8), может быть сведена к одномерной системе.



Рисунок 3.8 - Схема итераций сопротивления на сторонах треугольника Серпинского

Подобный результат можно получить и для других сетей капилляров [46, 47, 49, 179], у которых сопротивления на сторонах вычисляются с помощью отображений

$$x_{k+1} = \frac{K(x_k, y_k)}{L(x_k, y_k)}, \quad y_{k+1} = \frac{M(x_k, y_k)}{N(x_k, y_k)}, \quad (3.42)$$

где *К*, *L*, *M*, *N* – полиномы, удовлетворяющие условиям, которые описаны выше. Дискретная динамическая система, заданная отображением вида (3.42), допускает группу однородных растяжений

$$x' = xe^{a}, y' = ye^{a}, X_{1} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$
 (3.43)

Канонические переменные для данной группы преобразований имеют вид

$$u = \frac{y}{x}, v = \ln y. \tag{3.44}$$

В этих переменных оператор  $X_1$  примет вид  $\frac{\partial}{\partial v}$ . С помощью замены (3.44) отображение (3.42) приводится к виду

$$u_{k+1} = \frac{\tilde{L}(u_k) \cdot \tilde{M}(u_k)}{\tilde{K}(u_k) \cdot \tilde{N}(u_k)}, \quad v_{k+1} = v_k + \ln \frac{\tilde{M}(u_k)}{\tilde{N}(u_k)}, \quad (3.45)$$

где  $\widetilde{K}(u) = K(1/u, 1)$  и т.д.

Рассмотрим далее некоторый инфинитезимальный оператор

$$X_2 = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$
(3.46)

и предположим, что этот оператор задает группу симметрии вместе с симметрией (3.43) системы (3.42). Используем далее класс 4 из классификации двумерных дискретных динамических систем (Таблица 2.1): найдем такой оператор  $X_2$ , который вместе с  $X_1$  приводится к классу 4, а для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} X_2 u = \xi(x, y) \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \eta(x, y) \left(\frac{1}{x}\right) = 0, \\ X_2 v = \xi(x, y) \cdot 0 + \eta(x, y) \left(\frac{1}{y}\right) = y. \end{cases}$$
(3.47)

Данное уравнение для поиска новых координат можно найти, например, в [18]. Решением системы (3.47) являются функции

$$\xi(x, y) = xy, \ \eta(x, y) = y^2.$$
 (3.48)

Далее используем систему уравнений (2.41) для проверки является ли соответствующая оператору (3.48) группа непрерывных преобразований группой симметрии для (3.45), где система уравнений и оператор записываются в канонических координатах (3.44). Из упомянутой системы уравнений следует, что  $M/N \equiv const.$  Это противоречит условиям на функции дискретной динамической системы (3.42).предположению a значит И 0 наличии еще олной однопараметрической группы симметрии [179]. Из этого следует, что система (3.42) не сводится к классу 4.

Рассмотренный пример демонстрирует применение полученных классификаций дискретных динамических систем для поиска новых симметрий или, в частности, для доказательства их отсутствия, что также является полезным результатом.

#### Выводы к главе

- 1. В данной главе продемонстрировано применение представленных в предыдущей главе классификаций для исследования дискретных моделей процессов фильтрации в пористых средах.
- Представлен разработанный метод размножения (генерации) численных решений с помощью непрерывных групп симметрий вместе с исследованием точности данного метода.
- Метод размножения численных решений разностных схем протестирован на примере частного случая уравнения фильтрации газа, для которого также получена инвариантность условий устойчивости, и на примере частного случая уравнения Рапопорта-Лиса.
- 4. Приведены два примера применения классификаций дискретных динамических систем: пример явной разностной схемы уравнения Баклея-Леверетта как дискретной динамической системы; пример дискретной динамической системы для проводимостей фрактальной сети капилляров в виде треугольника Серпинского, для которой продемонстрирован подход к доказательству наличия или отсутствия непрерывных симметрий на основе полученных классификаций.
- 5. Показано, непрерывных групп симметрий что использование позволяет значительно ускорить расчеты с помощью дискретных моделей процессов фильтрации в пористых средах, что крайне важно, в частности, для задач с многовариантными расчетами: задачи обратные ремасштабирования моделей, задачи определения параметров моделей и др. Эти типы задач будут далее в следующих главах носить главенствующую роль при исследовании поромасштабных моделей пористых сред (микромодели) и их применении для дискретных макромоделей месторождений нефти и газа.

# Глава 4. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ НА МАСШТАБЕ ПОР

Данная глава посвящена дискретным моделям пористой среды, описывающим процессы фильтрации на масштабе пор. Представленные здесь модели поровых сетей являются одним из классов дискретных микромоделей. Они используются в следующей Главе 5 для исследования связей дискретных моделей микро- и макромасштаба – ремасштабирование, которое кратко описано в Главе 1. Также проведено обоснование выбора данного класса дискретных моделей микромасштаба для ремасштабирования.

# 4.1. Применение поромасштабных моделей в области моделирования процессов фильтрации в нефтегазоносных пластах

## 4.1.1. Предпосылки применения поромасштабных дискретных моделей для оценки фильтрационных характеристик нефтегазоносных пластов

Моделирование процессов фильтрации (гидродинамическое моделирование) является неотъемлемой частью современного проектирования разработки нефтяных месторождений. Используемые И газовых ДЛЯ моделирования вычислительные инструменты (симуляторы) предоставляют широкие возможности для расчета показателей разработки. Однако из-за недостаточной полноты и низкого качества данных, необходимых для гидродинамических симуляторов, расчет прогнозных показателей разработки месторождений часто приводит к большим ошибкам. Поэтому используемые в расчетах данные должны иметь хорошее обоснование и качественную обработку. Входные данные, как правило, структурируются в соответствии с отдельными представления о нефтегазоносных пластах, такими составляющими как геологические параметры, данные промысловой истории, PVT-свойства флюидов, фильтрационные параметры (абсолютная проницаемость, относительные фазовые проницаемости или ОФП, капиллярное давление и др.) и т.д.

Обычно наиболее слабо обоснованными, но в то же время оказывающими наиболее сильное влияние на показатели разработки, являются фильтрационные

параметры, в особенности ОФП. Поэтому требуется иметь надежное обоснование фильтрационных параметров на масштабе образцов керна и обеспечить их корректное ремасштабирование на ячейки фильтрационной модели пласта. При правильном обосновании и ремасштабировании фильтрационных параметров их последующая корректировка (адаптация) к истории разработки, при условии обоснования других параметров, должна обеспечить хорошие грамотного свойства фильтрационной Если прогнозные модели. же адаптация фильтрационных параметров выполнена формально, без учета дополнительной информации о пласте, в частности, информации о микроструктуре пористой среды, то качество результатов моделирования может оказаться низким, даже если при этом будет достигнуто хорошее соответствие расчетных и промысловых данных.

Определение фильтрационных параметров пласта на уровне образцов керна в настоящее время изучается преимущественно экспериментально. При этом необходимые условия проведения эксперимента не всегда соблюдаются, количество выполненных измерений часто бывает недостаточным, а сложные и дорогие эксперименты, например расчет ОФП для низкопроницаемых образцов коллектора или трехфазной фильтрации, и вовсе практически не проводятся. В результате можно выделить следующие проблемы моделирования процессов фильтрации [74, 84]:

- высокая степень неопределенности фильтрационных параметров;
- неполное соответствие условий проведения экспериментов пластовым условиям;
- недостаточное количество экспериментальных данных, необходимых для обоснования фильтрационных параметров, почти полное отсутствие дорогостоящих и трудозатратных экспериментов;
- использование данных масштаба керна для масштаба макромодели нефтегазоносного пласта без проведения ремасштабирования;

 корректировка фильтрационных параметров главным образом на основе данных промысловой истории, без учета дополнительной информации о пласте.

Bce вышесказанное свидетельствует 0 том, что ЛЛЯ обоснования неизвестных или не полностью охваченных экспериментами фильтрационных параметров моделей для нефтегазоносных пластов необходимо привлекать и теоретические методы, являющиеся гораздо менее затратными, чем экспериментальные. Тем не менее, обычные аналитические или статистические методики, некоторые из которых можно найти в [55, 78, 80], также не всегда позволяют сделать достоверное обоснование фильтрационных параметров. Причина этого кроется в необходимости использования более сложных моделей микроструктуры пористой среды, ОТ которых зависят фильтрационные параметры, что, например, продемонстрировано в [74]. Поэтому необходимо привлекать и развивать методы, с помощью которых можно моделировать физические процессы, протекающие в нефтегазоносных пластах на уровне отдельных пор, позволяющих моделирование И выполнять реальных экспериментов на керне.

#### 4.1.2. Существующие проблемы поромасштабного моделирования

К упомянутым выше теоретическим методам, безусловно, относятся методы поромасштабного моделирования (в иностранной литературе – pore-scale modeling) совместно с методами цифрового исследования керна (в иностранной литературе – digital core analysis). Однако для этого направления существует ряд проблем, которые упоминаются и систематизируются, например, в статьях [149] и [214], а ниже приводится их обобщение:

- Проблемы получения достоверных исходных данных для поромасштабного моделирования:
  - недостаточное разрешение томографии и микроскопии для
     «захвата» микроструктуры пористой среды;
  - сложность в определении распределения смачиваемости на масштабе пор;

88

- значительные различия микроструктуры пористой среды в атмосферных и пластовых условиях;
- различия в размерах образцов для цифрового анализа керна и в размерах образцов для стандартного комплекса исследования керна (определение пористости, проницаемости и т.д.).
- Проблемы моделирования различных процессов с помощью поромасштабных моделей:
  - о остается открытым вопрос о согласованности поромасштабных моделей на различных масштабах, основанных на различных базовых уравнениях, но описывающих одни и те же процессы (например, методы, основанные на различного рода «частицах», больше подходят для описания процессов на молекулярном уровне);
  - как правило, поромасштабное моделирование концентрируется на одном физическом процессе, однако является крайне важным рассмотрение различных физических процессов одновременно.
- Проблемы, связанные с ремасштабированием получаемых результатов через все существующие масштабы нефтегазоносного пласта:
  - о проблема соответствия фильтрационных параметров (в наибольшей ОΦП), полученных степени на масштабе микромоделей образцов масштаба И керна, параметрам нефтегазоносного пласта;
  - сложности в проведении макромасштабных экспериментов и в сравнении и корректировке поромасштабных результатов на основе этого.

Безусловно, упомянутые выше проблемы являются крайне сложными. Однако они характерны для многих областей моделирования, связанных с изучением процессов, происходящих в пористых средах, в частности, нефтегазоносных пластов. Некоторые из них упомянуты в предыдущем пункте. Например, также остро стоит проблема получения достоверных исходных данных для расчета коэффициентов связей скважин с пластами, что, в свою очередь, связано с проблемой определения скин-фактора.

### 4.2. Классификация поромасштабных моделей пористых сред

#### 4.2.1. Существующие методы поромасштабного моделирования и их

#### классификация

Поромасштабное моделирование, несмотря на вышеизложенные проблемы, является перспективным и быстроразвивающимся направлением [115] моделирования процессов многофазной фильтрации для нефтяных и газовых месторождений. Оно позволяет учитывать различные факторы (например, смена смачиваемости) при моделировании процессов (например, закачка полимеров), происходящих на микромасштабе пористой среды.

Работы [77, 112, 148, 149, 184, 232] дают классификации и обзоры существующих на данный момент методов поромасштабного моделирования, которые представленная ниже классификация [88] данной диссертации расширяет. Для поромасштабных моделей имеются следующие подходы к построению расчетных сеток:

- Построение сеток на основе сгенерированных или реальных изображений пустотного пространства, полученных с помощью, к примеру, трехмерной компьютерной микротомографии керна [126]:
  - построение разностных сеток (пример построения сетки и численных расчетов – статья [213]);
  - разбиение расчетной области на конечные элементы (пример построения и численных расчетов – статья [99]) и другие методы.
- Извлечение (в иностранной литературе extraction) моделей поровых сетей: описание данных методов можно найти, например, в [104, 126, 232].

Для поромасштабных моделей на основе анализа опубликованных работ отечественных и зарубежных специалистов были выделены следующие подходы для численного моделирования многофазного течения:

- Методы на основе точных и численных решений, полученных, к примеру, с помощью упомянутых ниже методов, для задач течения многофазной жидкости в капиллярах и порах различного сечения (например, численное решения для сечения в форме звезды [210]), данный подход в большей степени применяется для моделей поровых сетей:
  - Расчет течения многофазной смеси по длине пор и капилляров (например, с помощью модели поршневого вытеснения [101], с помощью численного решения уравнений Бернулли [3, 77]) – динамические модели поровых сетей [148].
  - Расчет течения многофазной смеси, при котором области течения изменяются во времени в сечении пор и капилляров, а по длине меняются на основе некоторого рассчитываемого порогового давления (entry pressure, например [200]) – квазистационарные модели поровых сетей [148]. Этот подход используется в данной диссертационной работе.
- Методы решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann methods или LBM): основы методов, их классификация и решения различных задач одно- и двухфазной фильтрации для различных систем пор даны, например, в статьях [10,136, 198].
- Метод объема жидкости (volume of fluid method или VOF): основы метода даны, например, в [138]; в статье [205] дается модификация метода и примеры решения различных задач в области многофазного течения в пористых средах; в диссертации [77] приводится метод расчета ОФП на основе четочного двухфазного течения в системе непересекающихся капиллярных каналов переменного радиуса.

- Методы функций уровня (level set methods): основы метода приводятся в книге [197], а в статье [203] приводятся результаты его применения для задач дренажа и пропитки в отдельных порах и в системах пор.
- Метод функционала плотности (density functional method): основы метода даются, например, в [23] и [24]; в статье [89] дается пример применение для исследования вытеснения нефти из пористых сред различными растворами полимеров.
- Методы гидродинамики сглаженных частиц (smooth particles hydrodynamics): основы метода и примеры решения двухфазных задач вытеснения смешивающихся и несмешивающихся флюидов можно найти в [223]; в статье [158] приводятся сравнения результатов метода с экспериментами по двухфазному дренажу.
- Методы молекулярной динамики (molecular dynamics simulation): основы метода можно найти, например, в книге [106], а в статье [221] исследуется проблема самопроизвольной пропитки в порах нанометрового масштаба с помощью данного метода.
- Методы теории перколяции: на основе аналитических формул например, в [36] и [151] даются формулы расчета функций ОФП для дренажа и пропитки с помощью сетевых моделей; на основе алгоритма инвазивной перколяции (invasion percolation algorithm) – например, статья [229].

#### 4.2.2. Поросетевое моделирование и его преимущества

Одним ИЗ направлений поромасштабного моделирования является поросетевое моделирование [112, 225] (в иностранной литературе – pore network modeling), которое основывается на моделировании пористой среды в виде графа, где поры – узлы, а капилляры – связи. Для каждой поры и капилляра задаются их различные характеристики: радиус, контактный угол и др. Подход с применением моделей поровых сетей является компромиссным упрощением сложной структуры пустотного пространства пористой среды. Данный подход позволяет

иметь следующие ключевые преимущества, которые важны для последующих результатов данной диссертации:

- Количество уравнений и неизвестных для моделей поровых сетей на порядки меньше в сравнении с подходами прямого моделирования многофазной фильтрации для сеточных моделей образца керна одного и того же размера. Например для изображения, полученного томографией образца песчаника Вегеа и состоящего из 6.4x10<sup>7</sup> вокселей, модель поровой сети по методу максимальных шаров состоит из 6298 пор и 12545 капилляров [126].
- Данный подход позволяет иметь относительно небольшое число параметров, задающих модель пористой среды с точки зрения различных процессов, в том числе фильтрационных, что, в свою очередь, дает возможность эффективного стохастического построения таких моделей и решения обратных задач для них.
- Данный подход дает возможность ремасштабировать полученные с помощью моделей поровых сетей результаты через исследование корреляций определяющих параметров для этих моделей и, например, результатов интерпретации ГИС.

# 4.3. Определение моделей поровых сетей и существующие методы их получения

## 4.3.1. Определение модели поровой сети

Под моделью поровой сети (поросетевой моделью, порово-сетевой моделью) понимается сеть (граф) пор и связывающих их капилляров, которая представляет собой модель пористой среды на микроуровне, где поры – узлы, а капилляры – связи. Модель поровой сети включает в себя:

- описание геометрических характеристик сети;
- модель и характеристики процесса фильтрации.

В тексте диссертации под моделью поровой сети понимается представленная выше совокупность описаний геометрии и модели процесса, если не оговорено иное.

Описание геометрических характеристик сети включает в себя следующий набор данных согласно формату, представленному, к примеру в [56, 167]:

- для пор задается:
  - о индекс поры в модели;
  - о координаты поры в модели;
  - координационное число (количество капилляров, которые связывают данную пору с другими);
  - о номера пор, которые соединяются с данной порой;
  - о связана ли пора со стоком или источником;
  - о номера капилляров, которые соединяются с данной порой;
  - о объем для открытой пористости;
  - о вписанный радиус окружности для сечения поры;
  - фактор формы поры (отношение площади к квадрату периметра поперечного сечения);
  - о объем для пористости глин;
- для капилляров задается:
  - о индекс капилляра в модели;
  - о номера двух пор, которые соединяются данным капилляром;
  - о радиус капилляра;
  - о фактор формы сечения капилляра;
  - о длина между центрами связываемых пор;
  - о расстояние между объемами, занимаемыми порами;
  - о объем для открытой пористости;
  - о объем для пористости глин;
  - о связан ли капилляр со стоком или источником.

Набор данных, представленных выше, записывается в файлы (link1, link2, node1, node2), формат которых описан, например, в [219], а сами файлы используются

для расчетов, которые проведены в следующей главе. Описание моделей и характеристик процессов фильтрации дано ниже в разделе 4.4. Формат задания характеристик процессов фильтрации описан в [225].

Рисунок 4.1 представляет пример модели поровой сети для песчаника Berea [126], где была использована программа трехмерной визуализации разработанного программного комплекса (для наглядности использована круговая геометрия поперечного сечения для всех элементов). Модели поровых сетей являются дискретными моделями и могут быть представлены в форме (1.1) (формулы (4.20)-(4.24) ниже), где узлами сетки могут являться координаты пор, а законы сохранения для них задают дискретные уравнения.



Рисунок 4.1 - Модель поровой сети для образца песчаника Berea

Существует также методы построения вложенных моделей поровых сетей (dual pore network models). Данные методы находят свое применение при исследовании пористой среды с различными вложенными друг в друга системами пустот: поры, трещины, каверны т.д. Классификация и краткое описание методов для вложенных моделей поровых сетей были приведены, например, в статье [232]. *4.3.2. Классификация существующих методов получения данных для построения моделей поровых сетей* 

Ниже даны классификация и обзор литературы для моделей поровых сетей, имеющие элементы (поры и капилляры) с одинаковыми по длине сечениями. Более полный обзор и классификация различных моделей поровых сетей дан в работе [182]. В статьях [56, 146, 232] даны обзоры и классификации методов получения моделей поровых сетей (описание геометрии), которые обобщаются и расширяются в данном разделе ниже. Модели поровых сетей могут быть получены следующими методами:

- Извлечение из трехмерных изображений пористой среды [232]: алгоритм максимальных шаров (maximal balls algorithm) [104], алгоритмы медиальной оси (medial axis algorithms) [165] и др. При этом трехмерные изображения могут быть получены:
  - Экспериментально с помощью трехмерной компьютерной микротомографии керна (microCT) [120, 121, 126].
  - Построением трехмерных стохастических изображений пустотного пространства пористой среды:
    - Ha основе статистического анализа двумерных фотографий шлифы (например, керна) И стохастической генерации: метод на основе многоточечной статистики [194], метод на основе марковских цепей [231] и др.
    - На основе различных стохастических моделей для генерации бинарных изображений пустотного пространства, к примеру с помощью моделей броуновского движения [154].
  - На основе моделирования различных упаковок частиц разной формы, к примеру, с помощью сферической упаковки [119].
- Стохастическая генерации моделей на основе распределений их параметров [142] или на основе уже полученных другими методами моделей поровых сетей [56].
- С помощью решения обратных задач для моделей поровых сетей на основе заданных экспериментальных данных. Например, оценка параметров моделей с помощью методов Монте-Карло для экспериментальных данных распределений пор по размерам

карбонатного коллектора [150]. Как правило, данные методы основываются на каком-то методе стохастической генерации моделей поровых сетей, а в результате решения обратной задачи настраиваются параметры используемого метода генерации.

Описание предлагаемых в рамках данной диссертации методов по стохастической генерации [58] и по решению обратных задач для моделей поровых сетей [56] представлены в следующей главе. По этой причине обзоры уже существующих методов по этим двум классам методов даны в следующей главе.

## 4.3.3. Трехмерная компьютерная томография

Принцип изучения объектов с помощью рентгеновского излучения применяется давно и успешно в самых различных областях. Также данная технология нашла свое применение и в нефтегазовой отрасли в области исследования структуры порового пространства образцов керна [39, 121, 126]. В результате применения данной технологии и определенных методов обработки получаются трехмерные изображения, в которых выделены пустоты и порода. К примеру, Рисунок 4.2 представляет трехмерное изображение пустотного пространства для песчаника Berea [86, 126].



Рисунок 4.2 - Пример трехмерного изображения пустотного пространства

Современные томографы позволяют достичь определения особенностей пористой среды с точностью до 1 мкм и даже точнее для новейших установок.

97

Данная точность может быть достаточной для образцов с высокой проницаемостью, но наличие образцов с низкой проницаемостью требует большей точности для захвата пор и капилляров с малыми радиусами.

# 4.3.4. Построение двумерных и трехмерных стохастических изображений пустотного пространства пористой среды

Задача построения трехмерных изображений пустотного пространства на основе двумерных бинаризованных изображений образцов керна или на основе некоторых стохастических моделей возникла по причине недостаточности объема экспериментальных исследований по трехмерной компьютерной микротомографии образцов керна. В качестве двумерных изображений могут быть использованы фотографии шлифов керна. Существует целый ряд методов произвести [117, 168, 193], которые позволяют построение трехмерного изображения на основе выборки двумерных изображений. Существуют также подходы, которые основываются на некоторых предположениях о стохастической модели для генерации бинарных изображений: например, в статье [154] бинарное изображение пористой среды стохастически генерируется на основе дробного броуновского движения; в статье [98] генерация основывается на моделировании полей гауссовских c заданным пороговым значением: c помощью корреляционных функций и алгоритма оптимизации «отжигом» происходит реконструкция пустотного пространства в статье [38].

Один из методов построения трехмерных изображений на основе выборки двумерных изображений, например, основан на методах многоточечной статистики [117] и сводится к построению функции распределения условной вероятности для характерных паттернов выборки изображений. Весь процесс получения трехмерного изображения в упрощенном виде представлен ниже для упомянутого метода – Рисунок 4.3 [56].

98



Рисунок 4.3 - Схема построения трехмерного изображения с помощью методов многоточечной статистики

Под шлифом керна понимается тонкий срез образца керна, для которого под микроскопом сделана его фотография. Двумерные изображение получаются экспериментально с помощью, например, растрового электронного микроскопа [19, 40]. Данные изображения используются для описания микроструктуры пористой среды и также могут быть использованы для построения модели поровой сети с помощью метода, состоящего из следующих шагов [56, 126, 193]:

- бинаризация изображения, то есть выделение одного цвета для породы (черный) и другого цвета для пустот (белый) как изображено ниже – Рисунок 4.4;
- реконструкция трехмерного изображения порового пространства;
- выделение модели поровой сети.



Рисунок 4.4 - Пример процесса бинаризации фотографии шлифа керна

## 4.3.5. Построение трехмерных изображений с помощью упаковок частиц

Данные методы основаны на задании различных распределений частиц, которые могут пересекаться или не пересекаться, для имитации распределения гранул породы реальной пористой среды. На положение и тип частиц может, например, влиять выбранная модель осадкообразования, а сами частицы могут представлять гранулы породы напрямую или пересекаться и образовывать множества гранул.

Простейшими примерами рассматриваемых здесь моделей являются ставшие классическими модели Слихтера [218], состоящие из геометрически правильно упакованных одинаковых сферических частиц. Последующие исследователи предложили ряд моделей, которые обобщены в [72]. Примерами дальнейшего развития данной теории являются: статья [119], где локально применена регулярная триангуляция Делоне для непересекающихся сферических частиц различного диаметра и их позиций; статья [107] (Рисунок 4.5), где для получения упаковки гранул песчаника моделируется процесс седиментации; статья [21], где предлагается обобщение подхода Козени [157] на случай пересекающихся шаровых сегментов для скелета породы.



Рисунок 4.5 - Пример полученной упаковки частиц и трехмерного изображения пустотного пространства

### 4.3.6. Построение моделей поровых сетей

При наличии трехмерного изображения порового пространства могут быть использованы методы построения моделей поровых сетей. Существует целый ряд методов, которые описаны, например, в работах [104, 145, 165, 216], для извлечения моделей поровых сетей. Например, метод максимальных шаров [216] для извлечения моделей поровых сетей кратко может быть представлен в виде схемы, расположенной ниже – Рисунок 4.6 [56].



Рисунок 4.6 - Выделение моделей поровых сетей методом максимальных шаров

Также часто применяемым является подход, где модель поровой сети стохастически генерируется [58, 142] на основании следующего:

- анализа двумерных и трехмерных изображений пустотного пространства путем выделения выборки моделей поровых сетей;
- априорного задания параметров распределений моделей поровых сетей.

Подробный обзор данных методов приведен в следующей Главе 5. Также в этой главе представлен новый метод стохастической генерации моделей поровых сетей и проведено обоснование выбора стохастического подхода к построению (генерации) моделей поровых сетей для целей данной диссертации.

# 4.4. Использованные в данной диссертации существующие методы моделирования одно- и двухфазного течений в поровых сетях

В рамках данной диссертации используется квазистационарное поросетевое моделирование, которое было упомянуто выше в представленной классификации. Границы применимости методов, использованных ниже, даются в диссертации [101]. Сравнения получаемых расчетных данных для используемых методов с результатами экспериментов показывают хорошие соответствия и приводятся, к примеру, в диссертации [225].

## 4.4.1. Система уравнений для однофазного случая

Абсолютная проницаемость оценивается на основе значений давления, которое рассчитывается для каждой поры из системы уравнений материального баланса с учетом разницы давлений между стоком и источником [56, 111, 210]:

$$\sum_{j} q_{ij} = 0, \ i \in N_{nodes}, \ j \in N_{nodes}^{i},$$

$$(4.1)$$

где  $N_{nodes}$  – множество всех индексов пор;  $N_{nodes}^{i}$  – множество индексов пор, соединенных с *i*-ой порой (в данном множестве также учтены поры-источники и поры-стоки). Расход флюида  $q_{ij}$  между порами *i* и *j* рассчитывается по формуле

$$q_{ij} = \frac{g_{ij}}{L_{ij}} \Delta P_{ij}, \tag{4.2}$$

где  $g_{ij}$  обозначает эффективную гидравлическую проводимость между порами i и j,  $L_{ij}$  – расстояние между центрами пор i и j,  $\Delta P_{ij}$  – разница давлений между

порами *i* и *j*. Проводимости *g*<sub>*ij*</sub> представляют собой суммарные проводимости, которые находятся из соотношения

$$\frac{L_{ij}}{g_{ij}} = \frac{L_i^n}{g_i^n} + \frac{L_{ij}^b}{g_{ij}^b} + \frac{L_j^n}{g_j^n},$$
(4.3)

где  $g_i^n$  и  $g_j^n$  – проводимости пор *i* и *j* соответственно,  $g_{ij}^b$  – проводимость капилляра между порами *i* и *j*,  $L_i^n$  и  $L_j^n$  – половины длин пор *i* и *j* соответственно,  $L_{ij}^b$  – длина капилляра (Рисунок 4.7). Для проводимостей пор и капилляров формулы расчета будут даны ниже.



Рисунок 4.7 - Две поры и связывающий их капилляр

Абсолютная проницаемость рассчитывается на основе закона Дарси

$$K = \frac{\mu Q L_T}{A_T \Delta P}, \quad Q = \sum_{(i,j) \in S} q_{ij}, \tag{4.4}$$

где Q – суммарный поток флюида, S – множество пар индексов граничных пор и соответствующих им пор-стоков и/или пор-источников,  $\mu$  – вязкость флюида,  $L_T$  – длина модели поровой сети,  $A_T$  – суммарная площадь сечения модели перпендикулярно направлению потока,  $\Delta P$  – разница давления между стоком и источником.

#### 4.4.2. Система уравнений для двухфазного случая

Исследование многофазного течения является гораздо более сложной задачей для моделирования, чем исследование однофазного течения, поэтому крайне важными являются данные об этих процессах, полученные в результате различных экспериментов. Многие описанные ниже модели основаны на экспериментальных прозрачных микромоделях из различных материалов (Рисунок 4.8), в которых исследовались процессы преимущественно двухфазного течения. Результаты данных экспериментов описаны в [81, 118, 159, 189, 190].



Рисунок 4.8 - Пример эксперимента двухфазного дренажа на прозрачной микромодели

Расчет фазовой проницаемости происходит аналогично [210, 225] формулам (4.1)-(4.4), представленным выше, но уже с учетом закона сохранения массы каждой фазы в отдельности:

$$\sum_{j} q_{ij}^{p} = 0, \quad i \in N_{nodes}, \quad j \in N_{nodes}^{i}, \quad p = w, o,$$

$$q_{ij}^{p} = \frac{g_{ij}^{p}}{L_{ij}} \Delta P_{ij}^{p}, \quad \frac{L_{ij}}{g_{ij}^{p}} = \frac{L_{i}^{n}}{g_{i}^{np}} + \frac{L_{ij}^{b}}{g_{ij}^{bp}} + \frac{L_{j}^{n}}{g_{j}^{np}}.$$
(4.5)

Уравнения (4.5) справедливы при предположении несжимаемости флюидов (индекс *p* – *water* или *oil*) и незначительного по сравнению с капиллярным давлением перепада давления за счет вязкости [225]. Формулы для проводимостей, участвующих в уравнениях, будут даны ниже.

Относительные фазовые проницаемости для модели поровой сети рассчитываются по формулам

$$K_{rp}(S_p) = \frac{K_p(S_p)}{K_{abs}}, K_p(S_p) = \frac{\mu_p Q_p(S_p) L_T}{A_T \Delta P_p}, Q_p = \sum_{(i,j) \in S} q_{ij}^p, p = w, o,$$
(4.6)

где  $S_p$  – насыщенность фазой p, рассчитываемая по формуле

$$S_p = \frac{V_p}{V_t}, \quad V_t = V_e + V_c, \quad S_w = 1 - S_o,$$
 (4.7)

где  $V_p$  – часть объема пустотного пространства пор и капилляров, занятого фазой p;  $V_t$  – суммарный объем пор и капилляров;  $V_c$  – объем пустотного пространства, приходящегося на глину в порах и капиллярах;  $V_e$  – объем, приходящийся на пустотное пространство в порах и капиллярах.

## 4.4.3. Начальные и граничные условия

Для моделей поровых сетей применяются два типа задания граничных пор [210] в зависимости от необходимости исследовать направленную фильтрацию:

- Периодический: все поры, расположенные рядом с одной из граней модели связываются капиллярами с порами-источниками или порамистоками, причем поры противоположных граней модели связываются либо с источником, либо со стоком, то есть все шесть граней связываются с источником или стоком.
- Непериодический: все поры, расположенные рядом с гранями, перпендикулярными одной из осей Х, Ү или Z, соединяются с порами-источниками или порами-стоками, то есть с источником или стоком соединяются только две грани.

Классические условия прилипания для моделирования течения вязкой жидкости учитываются в формулах расчета проводимостей для пор и капилляров [225, 226].

Насыщенность (чем заполнен элемент сети) для пор-источников и порстоков выбирается в зависимости от типа моделируемого процесса:

- Процесс дренажа вытеснение смачивающей фазы несмачивающей.
- Процесс пропитки вытеснение несмачивающей фазы смачивающей.

Начальное распределение фаз в элементах сети задается следующими способами [225]:

- Стопроцентная насыщенность всех элементов поровой сети одной из фаз, например, для первичного дренажа – стопроцентная водонасыщенность.
- Распределение насыщенности по элементам поровой сети случайным образом или на основе предварительного моделирования какого-либо

процесса, например, моделирование первичного дренажа и последующее моделирование первичной пропитки.

Процесс расчета с помощью моделей поровых сетей описывается следующим образом [210]:

• Для источника и стока пошагово меняется разность их давлений  $\Delta P(t) = P_{sourse}(t) - P_{sink}(t)$ , что влечет за собой пошаговое изменение насыщенности модели. Капиллярное давление рассчитывается по следующим формулам:

$$P_c(S_w) = P_o - P_w = \omega P_{sourse} - \omega P_{sink}, \tag{4.8}$$

где коэффициент ω, равный 1, соответствует дренажу (нефть вытесняет воду), равный -1 – пропитке (вода вытесняет нефть).

 На каждом шаге по давлению определяются поры и капилляры, в которые может внедриться закачиваемый флюид, на основе порогового давления P<sub>entry</sub>.

#### 4.4.4. Расчет порогового давления

Пороговое давление задает минимально необходимую разницу давления в фазах, при которой одна фаза вытесняет другую. Для круглого сечения пороговое давление для двух фаз рассчитывается на основе закона Юнга-Лапласа [56]

$$P_{entry} = \frac{2\sigma_{ow}\cos\theta}{R},\tag{4.9}$$

где  $\sigma_{ow}$  – поверхностное натяжение между водой и нефтью,  $\theta$  – угол смачивания и R – радиус сечения поры или капилляра. Приведенная выше формула верна для круглой геометрии поперечного сечения и продемонстрирована для двухфазного течения.

Для других типов геометрии сечения алгоритм расчета порогового давлений можно найти в [195, 200, 210], где расчет базируется на методе MS-P (Mayer, Stowe and Princen method). Данный метод основан на приравнивании кривизны главного граничного мениска (main terminal meniscus) кривизне дугового мениска (arc meniscus) в предположении отсутствия гравитации. Рисунок 4.9 представляет процесс дренажа, где указанные кривизны равны  $C_d$ .



Рисунок 4.9 - Схема движения границы раздела фаз при дренаже

Работа капиллярных сил по продвижению мениска (Рисунок 4.10) на длину Δ*x* записывается как [195]

$$P_{entry}A_o dx = (L_{ow}\sigma_{ow} + L_{os}\sigma_{os} - L_{os}\sigma_{ws})dx.$$
(4.10)



Рисунок 4.10 - Угловая область течения в сечении элемента поровой сети

Из уравнения (4.10), уравнения Юнга-Лапласа и геометрических параметров (Рисунок 4.10) следует следующее равенство для порового капиллярного давления для процесса дренажа

$$P_{entry} = \frac{\sigma_{ow} \cos \theta_r \left(1 + 2\sqrt{\pi G}\right)}{R} F_d(\theta_r, G, \beta), \qquad (4.11)$$

где значения функции *F<sub>d</sub>* и пороговые давления для процесса пропитки могут быть найдены в работах [195, 210, 225].

При расчете проводимостей пор и капилляров может быть учтено образование угловых слоев и пленок различных флюидов, при этом могут быть заданы различные критерии для их образования и исчезновения:

- Геометрический критерий [114], где предполагается, что слой терпит коллапс при соприкосновении его противолежащих поверхностей.
- Термодинамический критерий [210, 227], где условия получены на основе метода MS-P, который кратко представлен выше.

Для различных процессов (к примеру дренаж и пропитка) задаются схемы перехода между конфигурациями областей течения. Для процесса дренажа со стопроцентной начальной насыщенностью водой схему перехода [210] представляет Рисунок 4.11. Для процесса пропитки схемы имеют более сложный вид, так как возрастает число возможных конфигураций [210, 225].



Рисунок 4.11 - Схема перехода между конфигурациями областей течения для дренажа

В данной диссертации для моделей поровых сетей рассматривается одно- и двухфазное течение. Однако описанный здесь подход с определением различных конфигурации областей течения и заданием для них законов перехода друг между другом может быть применен и для трехфазного течения. Ниже дается пример (Рисунок 4.12) различных конфигураций областей течения для совместного течения воды, нефти и газа. Данный пример взят из статьи [137].


Рисунок 4.12 - Пример различных конфигураций областей трехфазного течения в сечении элемента поровой сети (вода – голубой, нефть – красный, газ – желтый)

## 4.4.5. Расчет проводимостей для элементов сетей

Для представления геометрии поперечного сечения пор и капилляров выделяют следующие виды сечений [56, 200, 211]:

- круглые сечение (circular, Рисунок 4.1);
- треугольные сечения (triangular);
- квадратные сечения (square);
- сечения квадрат-треугольник-круг (CTS или circle-triangle-square);
- сечения в виде *n*-конечных звезд (*n*-star).

В рамках данной диссертации использован подход CTS (Рисунок 4.13).



Рисунок 4.13 - Поперечные сечения элементов поровой сети для CTS

Сложную геометрию пустотного пространства пористой среды в рамках поросетевого моделирования представляет фактор формы [182], который есть

отношение  $G = A/P^2$  между площадью A и квадратом периметра  $P^2$  сечения пор или капилляров. Для различных поперечных сечений фактор формы и формулы для расчета проводимости для однофазного течения имеют вид:

- круглое сечение  $G = 1/(4\pi)$ , k = 1/2;
- квадратное сечение G = 1/16,  $k \approx 0.5623$ ;
- равносторонний треугольник  $G = \sqrt{3}/36$ , k = 3/5;
- произвольное треугольное сечение  $G \in (0, \sqrt{3}/36), k \approx 3/5;$

$$g = k \frac{A^2 G}{\mu}.$$
(4.12)

Данные соотношения получены на основе обобщения точных решений и серий численных расчетов, которые описаны в [199, 225].

Как было показано в предыдущем пункте для двух и трех фаз, сечение элемента поровой сети (пора или капилляр) разбивается на области течения (Рисунок 4.14): внутренняя часть, угловые части, слои.



Рисунок 4.14 - Области течения в поперечном сечении элемента поровой сети

Расчет проводимостей в таком случае проводится для каждой области течения элемента в отдельности, и далее они суммируются для получения общей фазовой проводимости как представлено ниже для одного сечения:

$$g^{p} = \sum_{i} g^{p}_{corner_{i}} + \sum_{i} g^{p}_{layer_{i}} + g^{p}_{bulk}, \qquad (4.13)$$

где индекс *i* пробегает по всем углам. Для внутренней области течения проводимость рассчитывается по приведенным выше формулам с учетом занимаемой флюидом *p* площади *A<sub>p</sub>*.

$$g_{bulk}^p = k \frac{A_p^2 G}{\mu_p}, \ p = o, w.$$
 (4.14)

Для угловых областей и областей угловых слоев проводимости были получены в [195] и в [226] соответственно на основе обобщения численных расчетов для различных геометрических характеристик этих областей.

### 4.4.6. Механизмы вытеснения флюидов

В процессе дренажа и пропитки, как было обнаружено на экспериментальных микромоделях (Рисунок 4.8) и описано в статье [159], может присутствовать три механизма вытеснения:

- поршневое вытеснение (зависит только от порогового давления, которое определено выше в данной главе);
- «snap-off», что на русский язык может быть переведено как «слом» или эффект «защелки» [77];
- заполнение пор (pore body filling или PBF).

Заполнение пор при пропитке зависит от числа соседей, которые уже заполнены смачивающей фазой. Рисунок 4.15 схематично представляет типы заполнения поры с разным количеством соседних, заполненных смачивающей фазой капилляров: для поры с координационным числом z типу  $I_n$  соответствует случай с z - n заполненными вытесняющим флюидом капиллярами. Пороговое давление в данном случае будет также зависеть от количества окружающих капилляров, заполненных смачивающей фазой. Модели заполнения пор:

• Модель «Blunt1» описана в статье [111] и задается формулой

$$P_{entry}^{n} = \frac{2\sigma\cos\theta}{r + \sum_{i=1}^{n} A_{i}x_{i}}.$$
(4.15)

• Модель «Blunt2» представлена в статье [113] и задается формулой

$$P_{entry}^{n} = \frac{2\sigma\cos\theta}{r} - \sigma \sum_{i=1}^{n} A_{i}x_{i}.$$
(4.16)

 Модель «Oren1» может быть найдена в статье [195] и определяется формулой

$$P_{entry}^{n} = \frac{2\sigma\cos\theta}{r + \sum_{i=1}^{n} A_{i}r_{i}x_{i}}.$$
(4.17)

• Модель «Oren2» описана в статье [195] и определяется формулой

$$P_{entry}^{n} = \frac{\left(1 + 2\sqrt{\pi G}\right)\sigma\cos\theta}{r + \sum_{i=1}^{n} A_{i}r_{i}x_{i}}.$$
(4.18)

В представленных выше четырех моделях n – число заполненных вытесняющей фазой капилляров, индекс i = 1 ... n отвечает за нумерацию этих капилляров,  $x_i$  – случайные числа между 0 и 1, r – радиус данной поры,  $r_i$  – радиусы соединяющих данную пору капилляров,  $\sigma$  и  $\theta$  – поверхностное натяжение и контактный угол для системы вода-нефть-порода соответственно,  $A_i$  – заданный постоянный вес для выбора типа заполнения поры  $I_i$ . Константы  $A_i$ , например, могут быть выбраны как в статье [226]:

$$A_2 - A_n = \frac{0.03}{\sqrt{K_{abs}}}, \quad A_1 = 0.0,$$
 (4.19)

где *K*<sub>abs</sub> – абсолютная проницаемость.



Рисунок 4.15 - Различные типы заполнения пор в процессе пропитки (смачивающая фаза представлена голубым цветом, несмачивающая – красным)

В процессе «snap-off» пленка воды увеличивается (Рисунок 4.16) в объеме до тех пор, пока поверхность контакта воды и нефти становится нестабильной. С этого момента элемент полностью заполняется водой, как смачивающей фазой. Если в процессе пропитки водой элемент поровой сети заполнен пленками воды и нефтью в центре, но не имеет соседних элементов, заполненных водой в центрах элементов, то этот элемент может быть заполнен водой за счет механизма «snapoff». Условия возникновения данного механизма вытеснения более подробно описаны в [210, 225].



Рисунок 4.16 - Процесс вытеснения «snap-off» несмачивающей фазы в процессе дренажа (смачивающая фаза – голубой цвет, несмачивающая – красный)

### 4.4.7. Расчет контактных углов

Контактные углы для стенок отдельных элементов модели поровой сети (поры и капилляры) могут быть определены следующими способами [210]:

- Задание одного значения контактного угла для всех стенок.
- Задание разных значений контактного угла для стенок элемента модели поровой сети.

В целом по модели поровой сети контактный угол может быть распределен следующими способами [210]:

- Равномерная смачиваемость по всей модели:
  - Равномерная смачиваемость водой (Uniform Water-Wet или UWW), то есть значения контактного угла распределены по некоторому вероятностному закону в интервале между  $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ , где  $\theta_{min} < \theta_{max} < 90^{\circ}$ .

- Равномерная смачиваемость нефтью (Uniform Oil-Wet или UOW), то есть значения контактного угла распределены также как в предыдущем пункте за исключением того, что 90° < θ<sub>min</sub> < θ<sub>max</sub>.
- Неравномерная смачиваемость по всей модели:
  - Смешанная смачиваемость с заданным максимальным радиусом (Mixed-Wet Large или MWL): смачиваемыми нефтью (θ > 90°)
     элементами назначаются те элементы, радиус которых больше некоторого заданного радиуса, далее значения контактных углов для смачиваемых водой получается согласно условиям равномерной смачиваемости водой (UWW), а для смачиваемых нефтью – согласно равномерной смачиваемости нефтью (UOW).
  - Смешанная смачиваемость с заданным минимальным радиусом (Mixed-Wet Small или MWS): удовлетворяет условиям предыдущего пункта за исключением того, что смачиваемыми водой (θ < 90°) элементами назначаются те элементы, радиус которых меньше некоторого заданного радиуса.
  - Дробная смачиваемость (Fractionally-Wet или FW), что означает задание некоторой доли α элементов, смачиваемых нефтью, и 1 α элементов, смачиваемых водой, независимо от их радиусов. Далее происходит назначение случайным образом элементов, смачиваемых водой и нефтью, согласно упомянутым долям и вычисление для них значений контактных углов по такой же как в предыдущих двух пунктах схеме.

Контактный угол, используемый при расчете с помощью моделей поровых сетей, например в формуле (4.10), может меняться по причине [118, 189, 190]:

- смены смачиваемости за счет гидрофобизации поверхности, контактирующей с тяжелыми компонентами нефти;
- изменения контактного угла по причине гистерезиса, вызванного шероховатостью поверхностей.

Смена смачиваемости с водосмачивающей на нефтесмачивающую или «старение» породы (в иностранной литературе – ageing) может проявляться после первичного дренажа, в котором части пор и капилляров, контактирующих с нефтью, меняют свою смачиваемость в результате адгезии и адсорбции некоторых гидрофобных компонентов с течением времени [118, 210]. Изменение контактного угла с учетом различных моделей гистерезиса, зависящих от шероховатости поверхностей и от того, какой флюид (смачивающий или несмачивающий) какой вытесняет [202], может рассчитываться в соответствии со следующими моделями:

- Модель 1 нет гистерезиса, гладкие поверхности: предполагаем  $\theta_i = \theta_r = \theta_a$ , где  $\theta_i$  статический контактный угол, измеренный на гладкой поверхности (intrinsic contact angle),  $\theta_r$  отступающий динамический контактный угол (receding contact angle),  $\theta_a$  наступающий контактный угол (advancing contact angle). Данная модель соответствует Классу I, определенному в [189] на основе экспериментов на политетрафторэтиленовых (PTFE) трубках.
- Модель 2 умеренный гистерезис, слабая шероховатость: предполагает отличие  $\theta_r$  и  $\theta_a$  на постоянный угол, при этом  $\theta_a(\theta_i = 0^\circ) = 0^\circ$  и  $\theta_r(\theta_i = 180^\circ) = 180^\circ$ . С отличием на угол 25.2° данная модель соответствует Классу II, определенному в [189].
- Модель 3 существенный гистерезис, сильная шероховатость: предполагает соответствие Классу III, определенному в [189] и изображенному ниже – Рисунок 4.17.



Рисунок 4.17 - Зависимости динамических контактных углов от статических с учетом Класса гистерезиса [210]

## 4.4.8. Решаемые с помощью моделей поровых сетей задачи

С помощью моделей поровых сетей имеется возможность расчета ряда фильтрационных характеристик для различных режимов течения (дренаж и пропитка), типов смачиваемости породы и флюидов [210, 225]:

- пористость отношение суммарного объема пор и капилляров к общему объему модели;
- абсолютная проницаемость рассчитывается по формуле (4.4);
- текущие насыщенности фаз рассчитываются по формулам (4.7);
- остаточные насыщенности фаз текущие насыщенности, которые соответствуют распределению флюидов после всех шагов изменения давления на границах модели;
- коэффициент вытеснения рассчитывается на основе начальных и остаточных насыщенностей;
- капиллярное давление рассчитывается по формуле (4.8) для двух и более фаз;
- относительные фазовые проницаемости рассчитываются по формуле (4.6) для двух и более фаз.

Возможности поросетевого моделирования были опробованы при решении широкого спектра задач, которые кратко обобщены в [56, 232]:

- для различных типов пород, к примеру для карбонатных [103, 104, 134, 173, 193] и сланцевых пород [169, 170];
- для различных процессов, в частности, водогазовое воздействие [134, 173] и трехфазная фильтрация [100, 134, 200];
- различные модели флюидов, например неньютоновские жидкости [167] и др.

Возможности моделирования с помощью поровых сетей, которые кратко описаны в [149], схематично представлены ниже (Рисунок 4.18).



Рисунок 4.18 - Возможности моделирования с помощью поровых сетей

### 4.5. Применение непрерывных групп симметрий к моделям поровых сетей

### 4.5.1. Запись общего вида системы уравнений моделей поровых сетей

Модели поровых сетей являются примерами дискретных моделей пористой среды на микромасштабе. Обобщая все выше представленное в данной главе, запишем модель поровой сети в виде дискретной модели (1.1) для двухфазного случая [59]:

• дискретные уравнения на давления в порах и капиллярах –

λī

$$\sum_{i=1}^{N_p} A_{ij} \chi_{ij}^{pn} (P_j^{pn} - P_i^{pn}) + \sum_{\substack{s=sourse,sink \\ P_{ij}^{pn} = CP(P_i^{pn}, P_j^{pn});} B_{sj} \chi_{sj}^{pn} (P_j^{pn} - P_s^{pn}) = 0,$$
(4.20)

• дискретные уравнения на геометрические характеристики областей течения в элементах поровой сети –

$$\Omega_{ir}^{pn} = \Psi_r \left( \Omega_{ir}^{pn-1}, G_i, R_i, \theta_i, P_i^p, I_i^{oil}, I_i^{water} \right), 
\Omega_{ijr}^{pn} = \Psi_r \left( \Omega_{ijr}^{pn-1}, G_{ij}, R_{ij}, \theta_{ij}, P_{ij}^p, I_{ij}^{oil}, I_{ij}^{water} \right);$$
(4.21)

• расчетная сетка –

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t, t^0 = 0, \Delta t = const,$$
  

$$x_j = const, y_j = const, z_j = const;$$
(4.22)

• начальные условия –

$$P_i^{p0} = const, P_{ij}^{p0} = const, \Omega_{ir}^{p0} = const, \Omega_{ijr}^{p0} = const;$$
(4.23)

• граничные условия –

$$P_{sourse}^{pn} = P_{sourse}^{p0} + \Delta P \frac{t^n}{\Delta t}, P_{sourse}^{p0} = const,$$

$$P_{sink}^{pn} = P_{sink}^{pn-1} = const, \Delta P = const.$$
(4.24)

В записи, представленной выше, использованы следующие индексы

$$i, j = 1 \dots N_p, \quad n = 0 \dots N_t,$$
  

$$p = water, oil, \quad s = sourse, sink,$$
(4.25)

а также следующие обозначения:  $A_{ij}$  – матрица связей поры *i* с порой *j* (0 – поры не связаны, 1 – поры связаны);  $B_{sj}$  – матрица связей поры *j* с порой-источником или стоком *s* (0 – пора не связана, 1 – пора связана);  $\chi$  – функции для проводимостей:

$$\chi_{\bar{i}j}^{pn} = \left(\frac{R_{\bar{i}}}{g_{\bar{i}}^{pn}} + \frac{\left(L_{\bar{i}j} - R_{\bar{i}} - R_{j}\right)}{g_{\bar{i}j}^{pn}} + \frac{R_{j}}{g_{j}^{pn}}\right)^{-1},\tag{4.26}$$

где индекс *ī*, помимо значений индекса *i*, включает в себя также пору-источник и пору-сток; *g* – текущие фазовые проводимости элементов, определяемые как

$$g_{i}^{pn} = \sum_{r=1}^{N_{reg}} S_{ir}^{p} \cdot \Phi_{r} \left( \Omega_{ir}^{p}, G_{i}, R_{i}, \theta_{i}, P_{i}^{p} \right),$$

$$g_{ij}^{pn} = \sum_{r=1}^{N_{reg}} S_{ijr}^{p} \cdot \Phi_{r} \left( \Omega_{ijr}^{p}, G_{ij}, R_{ij}, \theta_{ij}, P_{ij}^{p} \right);$$
(4.27)

R – радиус вписанной окружности сечения элемента; G – фактор формы сечения элемента;  $\theta$  – контрактный угол элемента;  $L_{ij}$  – длина между центрами пор i и j:

$$L_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}; \qquad (4.28)$$

 $x_i, y_i, z_i$  – координаты *i*-ой поры;  $S_r^p$  – текущие значения (0 или 1) насыщенностей фазой p для областей течения r-го типа для элемента, рассчитываемые как

$$S_{ijr}^{pn} = SAT(\Omega_{ijr}^{pn}), S_{ir}^{pn} = SAT(\Omega_{ir}^{pn}).$$
(4.29)

Выше использованы следующие функции:  $\Phi_r$  – функции для расчета проводимостей (например, формула (4.14)) области течения *r*-го типа (Рисунок 4.14);  $\Omega_r$  – вектор геометрических характеристик замкнутой кривой (кривизны дуг, углы между дугами, длины дуг и т.д.), описывающей геометрию одной из  $N_{reg}$  областей течения фазы в элементе (Рисунок 4.14);  $\Psi_r$  – функция, описывающая изменение характеристик областей течения (например, Рисунок 4.11); *СР* – функция расчета давления для капилляров на основе значений давления в соседних порах (например, как среднее арифметическое).

Пусть *CL* – функция принадлежности элемента кластеру, тогда константы принадлежности кластерам *I* (0 или 1) будут рассчитываться на основе следующих формул:

$$I_{i}^{pn} = CL(i, i, A, B, \Omega^{p}), \ I_{ij}^{pn} = CL(i, j, A, B, \Omega^{p}).$$
(4.30)

Данные константы зависят от векторов  $\Omega$  для всех пор и капилляров для фазы p. Функция *SAT* для расчета насыщенности записывается как

$$SAT(\Omega_r) = \begin{cases} 0, AREA(\Omega_r) = 0, \\ 1, AREA(\Omega_r) > 0, \end{cases}$$
(4.31)

где AREA – площади сечений областей течения с параметрами  $\Omega$ .

Для вектора геометрических характеристик  $\Omega$ , насыщенности *S* и давления *P* значения могут браться с предыдущего и/или текущего временного шага там, где не указаны индексы для временных шагов.

## 4.5.2. Примеры применения результатов групповой классификации для исследования моделей поровых сетей

Запись модели поровой сети в виде дискретной модели (4.20)-(4.31) позволяет применять теорию непрерывных групп симметрий [59], которой посвящены предыдущие Глава 2 и Глава 3. Анализ данной модели позволяет говорить о том, что она имеет трехмерную группу вращений и трехмерную группу переносов по пространственным координатам в качестве непрерывных симметрий (значения констант в (4.22) меняются, но общий вид остается неизменным):

$$X_{1} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_{2} = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_{3} = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x},$$
  

$$X_{4} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_{5} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_{6} = \frac{\partial}{\partial z}.$$
(4.32)

Однако, например, группа растяжений не является непрерывной симметрией, так как она меняет расстояния между порами, а значит меняет вид функции  $\chi$ .

Рассмотрим случай однофазного течения, что для модели (4.20)-(4.31) означает отсутствие индекса p, независимость коэффициента  $\chi$  от давления и наличие только одной области течения, характеристики которой не меняются, то есть  $\Psi_1(\Omega) = \Omega$ . Данные условия приводят нелинейное дискретное уравнение из (4.20) к линейному, что позволяет ему иметь дополнительно к (4.32) группу переносов по давлению и группу совместных растяжений по времени и давлению в качестве групп непрерывных симметрий. Наличие данных симметрий, в частности, влечет за собой независимость абсолютной проницаемости (4.4) от значений давления, что является ожидаемым в данном случае.

Рассмотрим случай двухфазного течения: пусть уравнения (4.21) не зависят от давлений и констант принадлежности кластерам *I*. Тогда уравнения (4.21) сводятся к виду дискретных динамических систем, где могут быть использованы результаты Главы 2 и Главы 3, в частности Таблица 2.1 и Таблица 2.2.

Модели поровых сетей в виде уравнений (4.20)-(4.31) для однофазного случая могут сводиться к виду разностных схем для стационарного многомерного

уравнения фильтрации газа при определенном виде функций χ и матриц *A* и *B*. Поры в таком случае будут узлами сетки, а капилляры отвечать за границы ячеек. В этом случае также могут быть использованы результаты Главы 2 и Главы 3, в частности Таблица 2.3.

#### Выводы к главе

- 1. Данная глава посвящена поромасштабному моделированию процессов фильтрации и его применению для фильтрационных моделей нефтегазоносных пластов: проведена классификация поромасштабных методов моделирования процессов фильтрации в обобщены проблемы пористых средах И существующие поромасштабного моделирования.
- 2. Подробно рассмотрены методы поросетевого моделирования и их преимущества, дано определение моделей поровых сетей, проведена классификация методов получения данных для моделей поровых сетей, представлены известные методы моделирования одно- и двухфазного течения в поровых сетях, на основе анализа литературы обобщены решаемые с помощью моделей поровых сетей задачи.
- Получен общий вид моделей поровых сетей, согласно введенным в Главе 1 дискретным моделям, а также приведены примеры применения результатов групповой классификации для моделей поровых сетей.
- 4. Методы поромасштабного моделирования в целом и поросетевого моделирования способны В частности значительно увеличить понимание процессов фильтрации в пористых средах. Однако одной основных проблем является несоответствие масштабов ИЗ описываемых в данной главе моделей и масштабов объектов в частности, нефтегазоносных пластов. Поэтому исследования, следующая глава, где фокус исследования смещен в область моделей поровых сетей, посвящена данной проблеме.

# Глава 5. РЕМАСШТАБИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ МИКРОМАСШТАБА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ДО МАКРОМАСШТАБА

Данная глава посвящена исследованию связей дискретных моделей процессов фильтрации на микро- и макромасштабах пористых сред, представленных в Главе 1. Исследование ведется с целью ремасштабирования микромасштабных моделей для их использования при задании параметров дискретных моделей макромасштаба.

# 5.1. Описание подходов к ремасштабированию дискретных моделей микромасштаба

#### 5.1.1. Обзор существующих подходов к ремасштабированию

Поромасштабное моделирование в целом и поросетевое моделирование в частности, которым посвящена Глава 4, являются мощными инструментами моделирования многофазной фильтрации в пористых средах. Одной из важнейших проблем поромасштабного моделирования является «перенос» (ремасштабирование) полученных на микромасштабе результатов на более крупный масштаб, например на масштаб нефтяных и газовых пластов [149, 214].

Указанная выше проблема является актуальной темой исследований многих ученых. В статье [160] на основе результатов поросетевого моделирования [195] предлагается подход к ремасштабированию за счет построения фациальных геологической моделей, построения модели ремасштабированной И фильтрационной, где все результаты получены для одного из месторождений нефти и газа Северного моря. В статье [156] предложен следующий подход к ремасштабированию: совместное выделение фаций и типов пород с получением соответствующих им поросетевых моделей и фильтрационных характеристик, получение осредненных характеристик для каждой фации в процессе двухфазного стационарного ремасштабирования, использование осредненных характеристик при расчете с помощью гидродинамического симулятора на масштабе всего месторождения. Также в этой статье проведено сравнение фактической и расчетной накопленной добычи нефти с учетом применяемой технологии водогазового воздействия (WAG) для одного из месторождений нефти и газа Северного моря. В работе [224] используется описанный в предыдущей статье подход к ремасштабированию для изучения падения пластового давления в процессе разработки месторождения нефти и газа, расположенного в Северном море. В статье [208] предложен подход к ремасштабированию на основе иерархии сетевых моделей для каждого рассматриваемого масштаба, где расчет однофазной фильтрации проводится на основе модели случайного блуждания с непрерывным временем. В диссертации [222] предложен подход к ремасштабированию на основе методов декомпозиции области при численных расчетах, что позволяет «сшивать» различные модели одного масштаба для численных расчетов на больших масштабах.

Описываемые в данном разделе методы ремасштабирования микромоделей схожи с методами ремасштабирования фильтрационных моделей при переходе от мелкомасштабной сетки к крупномасштабной (в иностранной литературе – upgridding) и пересчете всех параметров, заданных на трехмерных сетке (upscaling). Примеры данных методов можно найти в статье [71]. При рассмотрении нескольких масштабов, где для наименьшего масштаба известны фильтрационные характеристики, последовательно применяются различные методы ремасштабирования, как это, например, описано в работе [166]. Данные методы также применяются в подходах к ремасштабированию, описанных в предыдущем абзаце.

## 5.1.2. Схема предлагаемого подхода к ремасштабированию моделей микромасштаба до макромасштаба

Одной из основных проблем упомянутых выше подходов является недостаточное исследование взаимосвязи параметров микромасштаба И масштаб интервалов ГИС) мезомасштабов (например, для перехода на макромасштаб. Также данные методы, как правило, требуют достаточно большой который объем экспериментальных данных, зачастую отсутствует на месторождениях.

123

Указанные проблемы предлагается решать с помощью разработанного подхода к ремасштабированию дискретных моделей микромасштаба до макромасштаба, где в качестве данных мезомасштаба используются данные РИГИС, так как охват разрезов скважин этими исследованиями на порядок выше, чем охват, например, исследованиями керна. Описанный подход близок подходу с использованием REV, так как аналогично происходит осреднение параметров меньшего масштаба на более крупном масштабе, что было отмечено в Главе 1. Стоить отметить, что для большей точности применения разработанного подхода используемые дискретные микромодели должны соответствовать REV.

Разработанный подход к ремасштабированию дискретных микромоделей представлен в [51, 52, 56, 174, 175, 176]. Рисунок 5.1 показывает схему подхода, на которой также указаны этапы на основе разработанных методов, и этапы, на которых возможно применение метода размножения численных решений. Разработанный подход базируется на следующем (Рисунок 5.1):

- получение выборки дискретных микромоделей (модели поровых сетей) с помощью методов, которые упомянуты в предыдущей Главе 4:
  - построение на основе трехмерных изображений пустотного пространства (описано в предыдущей главе);
  - построение на основе стохастической генерации моделей и решении обратных задач для различных экспериментальных данных на керне (представлено ниже в данной главе).
- разбиение полученных микромоделей на классы на основе сравнения распределений их параметров;
- корреляция классов с данными РИГИС выделение регионов микромоделей;
- осреднение параметров микромоделей в выделенных регионах;
- получение неизвестных распределений параметров для осредненных микромоделей в регионах (например, распределение контактных углов в модели) путем решения обратных задач;

- распространение выделенных на разрезе по скважинам регионов на межскважинное пространство с помощью методов геостатистики и детерминистических методов пространственной интерполяции;
- расчет фильтрационных параметров для дискретных макромоделей моделей процессов фильтрации в нефтегазоносных пластах;
- реализация представленных здесь шагов в виде единого программного комплекса «PoroScale», описание и свидетельство о регистрации [54] которого представлены в приложениях.



Рисунок 5.1 - Общая схема использования моделей поровых сетей для расчета параметров на макромасштабе пористой среды

Запишем представленную схему с помощью записи дискретных моделей вида (1.1), а для этого введем для краткости следующие обозначения (5.1)

$$\begin{aligned} X &= \left(\vec{x}_{1}, \vec{x}_{2}, \dots, \vec{x}_{n_{g}}\right), \ Y &= \left(\vec{y}_{1}, \vec{y}_{2}, \dots, \vec{y}_{n_{g}}\right), \ \vec{x} \in \mathbb{R}^{n}, \ \vec{y} \in \mathbb{R}^{m}, \\ P^{def} &= \left(p^{1}, p^{2}, \dots, p^{l_{def}}\right), \ P^{undef} &= \left(p^{1}, p^{2}, \dots, p^{l_{undef}}\right), \\ P &= \left(P_{1}^{def}, P_{1}^{undef}, P_{2}^{def}, P_{2}^{undef}, \dots, P_{n_{g}}^{def}, P_{n_{g}}^{undef}\right), \\ p \in \mathbb{R}, \ l &= l_{def} + l_{undef}, \\ E &= \left(E_{1}(X, Y, P), \dots, E_{n_{e}}(X, Y, P)\right), \\ G &= \left(G_{1}(X, Y, P), \dots, G_{n_{g}}(X, Y, P)\right), \\ C &= \left(C_{1}(X, Y, P), \dots, C_{n_{b}}(X, Y, P)\right). \end{aligned}$$
(5.1)

Рассмотрим дискретные микромодели, например, модели поровых сетей, записанные в виде (4.20)-(4.28):

$$M_{micro} = \{E_{micro}(X_{micro}, Y_{micro}, P_{micro}), G_{micro}(X_{micro}, Y_{micro}, P_{micro}), C_{micro}(X_{micro}, Y_{micro}, P_{micro})\}$$
(5.2)

и некоторую дискретную макромодель вида

$$M_{macro} = \{E_{macro}(X_{macro}, Y_{macro}, P_{macro}), G_{macro}(X_{macro}, Y_{macro}, P_{macro}), C_{micro}(X_{macro}, Y_{macro}, P_{macro})\},$$
(5.3)

где часть параметров *p* микро- и макромоделей являются неизвестными (индекс *undef*): для микромоделей это может быть, например, распределение контактного угла в модели, а для макромоделей такими параметрами в данной диссертации являются фильтрационные параметры (например, абсолютная проницаемость). В представленных микро- и макромоделях количество всех видов переменных является различным.

Представленная выше схема ремасштабирования состоит на первом этапе в построении различными методами выборки  $A = \{M_{micro}^{s}\}$  дискретных микромоделей. Далее идет разбиение множества A на подмножества (классы)  $A_{k}$  на основании некоторой метрики

$$\rho(M_i, M_j) = D_{ij} = const \tag{5.4}$$

и выделение компонент связности графа с использованием матрицы расстояний  $D_{ij}$  (описание метода дано ниже). В выделенных классах известные параметры (с

индексом def) усредняются и для каждого подмножества  $A_k$  строится усредненная модель  $\bar{M}^k_{micro}$ .

Модели (5.2) могут иметь связь с моделями (5.3) в виде

$$F_{place}(X_{micro}^{s}) = \vec{x}_{s}^{macro}, \quad \vec{x}_{s}^{macro} \in X_{macro}, \tag{5.5}$$

что, по сути, является координатами микромоделей в макромодели. Например, координатами может быть место отбора образца керна, на основании которого получена микромодель с индексом *s*. На основании связи вида (5.5) и анализа взаимосвязи (корреляции) известных параметров микромоделей и известных параметров макромодели  $M_{macro}$  идет построение отображения множества независимых переменных  $X_{macro}$  на (сюръекция) множество осредненных моделей  $\bar{M}^k_{micro}$  вида

$$F_{region}(\vec{x}^{macro}) = \bar{M}^{k}_{micro}, \ \vec{x}^{macro} \in X_{macro}.$$
(5.6)

Неизвестные параметры осредненных микромоделей  $\bar{M}^k_{micro}$  (с индексом *undef*) оцениваются на основании решения обратных задач, которые могут быть записаны в виде решения уравнений вида

$$F_{charac}\left(\bar{M}_{micro}^{k}\right) = \bar{H}_{k}, \qquad \bar{H}_{k} \in \mathbb{R}^{n_{c}}.$$
(5.7)

Функция  $F_{charac}$  позволяет рассчитывать различные характеристики H, в частности фильтрационные, где  $\bar{H}_k$  – вектор целевых значений фильтрационных характеристик, которые получены, например, экспериментально. Начальные и граничные условия для дискретных микромоделей  $\bar{M}^k_{micro}$  выбираются исходя из типа целевых значений характеристик  $\bar{H}_k$  и параметров макромоделей, которые нужно рассчитать.

После оценки неизвестных параметров осредненных микромоделей для каждого региона и соответствующего подмножества  $A_k$  с помощью моделей  $\bar{M}^k_{micro}$  рассчитываются неизвестные фильтрационные параметры макромоделей по следующей формуле

$$P_{macro}^{undef}(\vec{x}^{macro}) = F_{charac}\left(F_{region}(\vec{x}^{macro})\right),\tag{5.8}$$

где индекс региона k определяется с помощью формулы (5.6).

Дальнейшие разделы данной главы призваны более подробно раскрыть все этапы схемы ремасштабирования – параграфы 5.2-5.4. Примеры для основных этапов ремасштабирования дискретных микромоделей даются последовательно в параграфах 5.5-5.7. Последовательность изложения основных этапов предложенного подхода и примеров применения для них основывается на рассматриваемом сквозном примере:

- выборка дискретных микромоделей строится с использованием результатов ртутной порометрии образцов керна, на основе которых выделяются классы и регионы дискретной макромодели с помощью корреляции с параметром РИГИС альфа-ПС [42];
- далее для получения осредненных в регионах дискретных микромоделей используются осредненные результаты ртутной порометрии и разработанный метод решения обратных задач, как приложение метода стохастической генерации моделей поровых сетей, который вначале исследуется на предмет контроля разброса результатов в зависимости от стохастических реализаций.

## 5.1.3. Использование непрерывных групп симметрий для предлагаемого подхода к ремасштабированию дискретных микромоделей

Результаты исследований с помощью непрерывных групп симметрий (Глава 2 и Глава 3) можно применять для ускорения численных расчетов при решении обратных задач для дискретных микромоделей, участвующих в приведенной выше схеме ремасштабирования:

- Полученные классы дискретных динамических систем (Таблица 2.1 и Таблица 2.2) могут быть использованы для ускорения расчетов в задачах, где возникают дискретные динамические системы как класс дискретных микромоделей вида (1.1), к примеру, дискретная динамическая система (3.41) для фрактальной капиллярной сети в виде треугольника Серпинского.
- Классы разностных уравнений фильтрации газа (Таблица 2.3) с непрерывными симметриями можно применять для моделирования

однофазного течения газа [234] или для моделирования многофазного течения [192, 217] с учетом закона Пуазейля в моделях поровых сетей, а также для моделирования динамики пленок в системе газ-жидкость-капилляр [233] в моделях поровых сетей.

• Также могут быть использованы результаты для общего вида моделей поровых сетей, которые рассмотрены выше в пункте 4.5.

Результаты группового анализа предыдущих глав могут быть использованы для ускорения расчетов на макро- и мезомасштабах (например, масштаб различных фильтров для очистки газа) с помощь следующих дискретных макромоделей, которые используются на последнем этапе представленной схемы ремасштабирования:

- Дискретные динамические системы из рассмотренных выше классов (Таблица 2.1 и Таблица 2.2) могут быть применены, как разностные схемы для различных уравнений фильтрации, к примеру, для уравнения Баклея-Леверетта – разностная схема (3.39).
- Классы разностных схем для уравнений фильтрации газа (Таблица 2.3) и, в частности, разностную схему (3.27) можно применять для моделирования однофазной фильтрации на различных масштабах. К примеру, возможно применение для моделирования процессов, связанных с геологическим хранением CO<sub>2</sub> (CO<sub>2</sub> geological storage) [228] или, в частности, процессов закачки CO<sub>2</sub> на макромасштабах пористой среды [123].
- Классы разностных схем для уравнений Рапопорта-Лиса (Таблица 2.4)
   и, в частности, разностная схема (3.36) с аналитическими зависимостями для ОФП и капиллярного давления можно применять для моделирования различных процессов двухфазной фильтрации.
- Фильтрационные характеристики (например, функции ОФП) для уравнения фильтрации газа (2.49) и уравнения Рапопорта-Лиса (2.63) могут быть получены с помощью методов поромасштабного моделирования из Главы 4, и в далее к этим уравнениям могут быть

применены результаты их исследований с помощью непрерывных групп симметрий из Главы 2 и Главы 3.

Разработанный метод получения численных решений с помощью непрерывных групп симметрий имеет ту же точность (пункт 3.1.3. представляет результаты исследований точности), что и уже существующие методы получения решений для различных систем уравнений вида (1.1). Тестирование данного метода полноценно представляет Глава 3. Поэтому для дальнейших расчетов, связанных с предложенной схемой ремасштабирования, используются уже существующие доступные алгоритмы, так как нет качественных различий в получаемых результатах, имеется только выигрыш в скорости расчетов. Более того, в данной главе внимание сконцентрировано на самих дискретных моделях для различных масштабов, их параметрах, ремасштабировании и решениях, а не на методах их получения.

# 5.2. Новый метод выделения регионов дискретных макромоделей пористой среды с помощью дискретных микромоделей

#### 5.2.1. Обзор существующих подходов

На данный момент существует ряд методов выделения регионов дискретных макромоделей пористой среды, в роли которых, в частности, могут быть геологические и фильтрационные модели пластовых систем. Данная задача важна с точки зрения понимания пространственного распределения различных свойств пласта, что, в свою очередь, важно с точки зрения проектирования разработки.

Зачастую выделение регионов происходит на основе анализа результатов стандартных и специальных исследований керна, где, как правило, регионы выделяются с помощью дифференциации по диапазонам ФЕС [93]. Более комплексным подходом является выделение фаций и типов пород (различия с предыдущим методом являются условными) на основе анализа всей имеющейся информации о результатах исследований керна, РИГИС и т.д. Классификация данных методов проведена в [209]. В статье [96] выделение регионов

осуществляется на основе анализа гидравлических единиц потока и корреляции с данными РИГИС. Относительно новым подходом является выделение классов пород на основе анализа результатов компьютерной томографии керна, что проделано, например, в [39].

### 5.2.2. Выделение классов подобных микромоделей

Выделение типов пород и фациальный анализ не является новым направлением исследования, однако интерес и количество полезных результатов в этой области неизменно растут, что объясняется, в частности, необходимостью более полного понимания строения коллекторов, приуроченных К трудноизвлекаемым запасам. В данном разделе выделение типов пород идет на основе выделения классов дискретных поромасштабных моделей (микромодели), что может быть отнесено к выделению петрографических типов пород и соответствующих этому фаций, как показано, например в [209]. Описываемый разработанный метод представлен в [55, 177, 180], а также реализован в программном комплексе «PoroScale» [54], который описан в Приложении А.

Для выделения классов микромоделей для каждого параметра (к примеру, радиусы капилляров) считается величина ошибки подобия распределений *i*-ой и *j*-ой модели. Ошибка подобия (метрика (5.4) в предлагаемом подходе) между отдельными распределениями микромоделей может считаться одним из способов:

• суммарная поинтервальная разница частот

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{k_{max}} |f_k^i - f_k^j|, \qquad (5.9)$$

• относительная разница математического ожидания и дисперсии

$$D_{ij} = \frac{\left|a^{i} - a^{j}\right|}{\Delta a} + \frac{\left|\sigma^{i} - \sigma^{j}\right|}{\Delta \sigma},$$
(5.10)

где  $k_{max}$  – количество интервалов в разбиении,  $f_k^i$  – частота в долях единицы для *k*-го интервала *i*-го распределения (распределения должны быть перенесены на общие интервалы),  $a^i$  и  $a^j$  – математические ожидания для соответствующих теоретических распределений параметров микромоделей номер *i* и *j*  соответственно,  $\sigma^i$  и  $\sigma^j$  – дисперсии для соответствующих теоретических распределений параметров микромоделей номер *i* и *j* соответственно,  $\Delta a$  и  $\Delta \sigma$  – длина интервалов изменения математических ожиданий и дисперсий соответственно для распределений выбранного параметра микромоделей. Для распределений всех параметров микромоделей производится суммирование всех ошибок подобия для всех пар моделей после расчета ошибок подобия по формуле (5.9) или (5.10).

Если задать максимальную ошибку подобия  $D_{max}$ , при которой можно считать микромодели объединенными в один класс подобия, то можно получить матрицу из нулей и единиц, которая имеет следующий смысл: единица на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца означает принадлежность соответствующих микромоделей к одному классу подобия. Эта матрица по своему смыслу согласно теории графов [12] может являться матрицей смежности связей подобия микромоделей (Рисунок 5.2). Анализ данной матицы позволяет выделить классы как компоненты связности графа.



Рисунок 5.2 - Пример бинарной матрицы подобия микромоделей

Алгоритм объединения микромоделей в один класс по матрице смежности записывается следующим образом:

 матрица смежности просматривается построчно и каждая микромодель, которая подобна (значение в ячейке равное 1) рассматриваемой микромодели (соответствует текущей строке) объединяется с ним в один класс;

- 2. далее все выделенные на предыдущем шаге классы анализируются на пересечения и при их наличии объединяются в один;
- 3. шаг 2 повторяется до тех пор, пока в классах не останется пересечений;
- классы, состоящие из относительного небольшого числа микромоделей, объединяются с ближайшим относительно выбранной метрики классом.

После выделения классов происходит осреднение параметров микромоделей в этих классах: при поинтервальном расчете ошибок подобия по формуле (5.9) для каждого параметра в каждом интервале рассчитывается среднее арифметическое значение частоты, а при использовании относительной разницы математического ожидания и дисперсии по формуле (5.10) рассчитываются средние арифметические значения этих параметров.

5.2.3. Выделение регионов макромодели на основе выделенных классов

#### микромоделей

Выделенные основе выборки микромоделей классы на для ИХ использования В трехмерных дискретных макромоделях (например, геологических или фильтрационных) нужно связать с параметрами, которые имеют большой охват исследованием (например, данные каротажа, сейсмики и др.). Это дает возможность предсказывать тип породы на основе выделенных классов по разрезу скважины, и интерполировать в межскважинное пространство. Охват скважин исследованиями на керне гораздо ниже по сравнению с охватом скважин методами геофизических исследований (ГИС) [77]. Поэтому для дальнейшего распространения выделенных классов на весь нефтегазоносный пласт используется взаимосвязь параметров результатов интерпретации ГИС (РИГИС) и выделенных классов.

Метод переноса выделенных классов на разрез по скважинам представлен в [55, 177, 180], основан на построении для всех классов гистограммы распределений выбранного параметра РИГИС и анализе интервалов изменения значений этого параметра для каждого из классов. При этом каждой микромодели

должно быть поставлено в соответствие значения параметра РИГИС на основе места отбора соответствующего образца керна. Данный метод схож с методом, который был представлен в [96] для гидравлических единиц потока.

Метод выделения регионов микромоделей (Рисунок 5.3) состоит из следующих шагов (формула (5.6) в предлагаемом подходе к ремасштабированию):

- Строятся распределения значений параметров РИГИС (должны быть нормированы на минимальные и максимальные значения – формула (5.11)) для каждого класса микромоделей.
- Выбирается параметр РИГИС с наименьшей величиной зоны пересечения распределений.
- Для распределений выделяются интервалы значений, где присутствуют только один класс или не менее чем два класса.
- С использованием выделенных интервалов значений идет присвоение номеров классов точкам разреза на основе наибольшей частоты или ближайшего интервала с определенным соответствием классу.
- Выделяются регионы микромоделей для разрезов по скважинам на основе построенной связи номера класса и значения параметра РИГИС.
- Полученные регионы могут быть распространены на весь пласт различными методами интерполяции [25].

Далее опишем метод более подробно. После выделения микромоделей в отдельные классы выбирается параметр РИГИС, по которому отстраиваются совместно распределения выбранного параметра в классах (концепция метода – Рисунок 5.3). Далее по зонам пересечения графиков определяются интервалы значений параметра РИГИС, которые соответствуют какому-либо региону.



Рисунок 5.3 - Схема корреляции классов микромоделей с РИГИС

Нормировка параметра РИГИС Х производится по следующей формуле

$$X = \frac{\bar{X} - \bar{X}_{min}}{\bar{X}_{max} - \bar{X}_{min}}.$$
(5.11)

Построение распределения (расчет относительной частоты) происходит для заданного заранее равномерного разбиения интервала изменения нормированного параметра РИГИС *X* для каждого класса по следующей формуле

$$FREQ(k,r, \{X_q\}, \{X_k\}) = f_k^r =$$

$$= \left(\sum_{q=1}^{Q_X} I_R(X_q, r)\right)^{-1} \cdot \sum_{q=1}^{Q_X} (I(X_q, X_k, X_{k+1}) \cdot I_R(X_q, r)),$$

$$X_k = X_{min} + (k-1) \frac{X_{max} - X_{min}}{Q_I - 1},$$

$$k = 1 \dots Q_I, \ q = 1 \dots Q_X, \ r = 1 \dots Q_R,$$

$$I(X_q, X_k, X_{k+1}) = \begin{cases} 0, \ X_q \notin [X_k, X_{k+1}), \\ 1, \ X_q \in [X_k, X_{k+1}), \end{cases}$$
(5.12)

где FREQ – относительная частота для параметра X в интервале с номером k для региона с номером r,  $f_k^r$  – частота для интервала k региона r,  $X_k$  – границы интервалов разбиения,  $X_q$  –значения параметра X для микромодели с номером q, I – индикаторная функция попадания значения  $X_q$  в полуинтервал  $[X_k, X_{k+1})$ (последний полуинтервал нужно считать отрезком),  $I_R$  – индикаторная функция

135

принадлежности значения параметра РИГИС  $X_q$  региону с номером r,  $Q_X$  – количество значений параметра X для каждой микромодели,  $Q_I$  – количество интервалов для построения гистограмм распределения параметров РИГИС.  $Q_R$  – количество регионов.

Выбор количества интервалов для построения гистограммы должен основываться на количестве исследуемых образцов керна, так как при достаточно мелком разбиении может быть ситуации, когда каждое значение попадает в свой собственный интервал, что делает дальнейший расчет по разрезу скважин бессмысленным. Рекомендуемые значения величины  $Q_I$  – от 5 до 10 интервалов.

После расчета распределений для выбранного параметра РИГИС идет расчет доли пересечения распределений этого параметра в классах:

$$CROSS(\{f_k^r\}) = \sum_{k=1}^{Q_I} SEC(f_k^1, f_k^2, \dots, f_k^{Q_R}),$$
(5.13)

где *SEC* – второе по величине значение относительной частоты в текущем полуинтервале  $[X_k, X_{k+1})$  при условии наличия не менее двух ненулевых значений относительной частоты. Если есть только не более одного ненулевого значения, то данная функция обращается в ноль.

Выбор индексов классов происходит следующим образом:

- 1. для выбранного параметра РИГИС для каждого интервала построения распределений определяется индекс класса на основе наибольшего значения относительной частоты в этом интервале;
- если в каком-либо интервале все значения относительной частоты нулевые, то индекс класса определяется на основе ближайшей наибольшей ненулевой относительной частоты;
- по разрезу скважин индекс определяется на основе принадлежности значения параметра РИГИС тому или иному интервалу с присвоенным на предыдущем шаге индексом класса.

Определенная величина *CROSS* служит показателем достоверности проведенного переноса данных керна на разрез по скважинам. Чем меньше данная

величина, тем меньше вероятность ошибки определения регионов по разрезам скважин. Полученные индексы классов микромоделей по разрезам скважин задают регионы микромоделей на макромасштабе, если применить некоторый из методов интерполяции [25]. В данной диссертации отдельно не рассматривается вопрос интерполяции полученного индекса по причине того, что это является отдельной сложной задачей, которая является общей для различного типа дискретных параметров (параметры литологии, фаций и т.д.) и подробно исследуется в области геостатистики.

5.2.4. Сравнение предлагаемого метода с существующими

Таблица 5.1 представляет сравнение предлагаемого метода выделения регионов с существующими методами, обзор которых дан выше. В целом предлагаемый метод можно считать развитием методов на основе выделения типов пород и фаций.

№	Метод	Прямой учет всех фильтрационных характеристик	Корреляция с РИГИС	Учет топологических, геометрических и смачивающих свойств породы
1	Дифференциация с помощью выделения диапазонов ФЕС	Да, за счет анализа диапазонов изменения результатов стандартного и специального комплексов исследования керна	Да, за счет корреляционных зависимостей типа керн- ГИС [34]	Нет подхода к совместному использованию различных типов экспериментов на керне, учитывающие данные факторы
2	Выделение гидравлических единиц потока	Только пористость и проницаемость на основе упрощенной модели	Да, как например в статье [96]	Упрощенный учет данных факторов
3	Выделение регионов на основе анализа результатов компьютерной микротомографии керна	Низкая скорость численных расчетов (пункт 4.2.2. дает пример) значительно усложняет, в частности, проведение многовариантных расчетов	Нет однозначного подхода для определения связи результатов анализа томографии и РИГИС	Нет однозначного подхода к интерпретации всех данных свойств по трехмерным изображениям напрямую
4	Методы фациального анализа и выделения типов пород	Да, но в большей степени при наличии прямых экспериментов	Да	Да, но в большей степени при наличии прямых экспериментов
5	Новый метод выделения регионов на основе анализа моделей поровых сетей	Да, за счет численного моделирования в поровых сетях	Да, за счет корреляции классов с РИГИС	Да, за счет построения и дальнейшего анализа моделей поровых сетей

Таблица 5.1 - Сравнение методов выделения регионов

# 5.3. Новый метод стохастической генерации моделей поровых сетей на основе распределений их параметров

5.3.1. Обзор существующих методов

Анализ существующих методов в области моделирования с помощью поровых сетей, а также анализ качества, количества, специфики данных для их построения и реально доступных в большинстве случаев данных для инженера позволяют выделить следующие проблемы [58]:

- количества результатов трехмерной компьютерной томографии в настоящий момент недостаточно для их широкого применения в инженерной практике;
- недостаточное качество данных, важных для построения поровых сетей, к примеру, качество фотографий шлифов керна, часто не позволяет опираться в полной мере на единичные модели поровых сетей;
- масштаб моделей поровых сетей требует применения процедуры ремасштабирования для их последующего использования в макромасштабных расчетах.

Все вышесказанное говорит о необходимости использования стохастических методов генерации моделей поровых сетей. Присутствие статистически обоснованного набора распределений параметров поровых сетей дает возможность генерировать поровые сети на основе этих распределений, что, в свою очередь, позволяет рассчитать статистически более обоснованные фильтрационные параметры.

Ниже даны классификация и обзор литературы для моделей поровых сетей, имеющие элементы (поры и капилляры) с одинаковыми по длине сечениями. Полный обзор и классификация различных моделей поровых сетей дан в работе [182]. В работе [142] представлен обзор методов стохастической генерации моделей поровых сетей. Выделяют следующие подходы к стохастической генерации коделей поровых сетей по типу генерируемых сетей [148]:

- Регулярные поровые сети с постоянным координационным числом (Рисунок 5.4 а). В работах [36, 151] исследуются различные регулярные модели поровых сетей в виде перколяционных решеток, на основе теории перколяции получены формулы для расчета фильтрационных характеристик для одно- и двухфазной фильтрации. В работе [9] используются регулярные канальные модели для расчета проницаемости на основе прямого моделирования однофазного течения вязкой жидкости.
- Квазирегулярные поровые сети с варьируемым координационным числом (Рисунок 5.4 б). В статье [28] генерируются двумерные квазирегулярные модели поровых сетей, для которых исследуются зависимости параметров генерируемых сетей для адаптации к результатам исследований образцов керна в рамках однофазной фильтрации. Квазирегулярные модели поровых сетей, как основу для генерации моделей поровых сетей, можно также найти в [147], где в том числе исследованы взаимосвязи пористости и проницаемости с параметрами генерируемых сетей.
- 5.4 Нерегулярные поровые (Рисунок сети B). Генерация нерегулярных моделей поровых сетей на основе ячеек Вороного и триангуляции Делоне предлагается в статьях [116, 144], где в статье [144] исследуется процесс двухфазной фильтрации с помощью генерируемых сетей. В статье [122] в рамках однофазной фильтрации предложен подход, в котором регулярная модель поровой сети подвергается двум изменениям: модификация координат пор и удаление капилляров для задания среднего координационного числа. В диссертации [142] предложен алгоритм стохастической генерации нерегулярных моделей поровых сетей на основе распределений радиусов пор и капилляров и координационного числа, также проведено тестирование данного метода в рамках двухфазной фильтрации и динамических моделей поровых сетей. В работе [145]

предлагается метод для построения стохастических моделей поровых сетей на основе распределений радиусов пор и капилляров, распределения факторов формы, распределения длин капилляров и других параметров, также приведено тестирование в рамках двухфазной фильтрации.



Рисунок 5.4 - Типы стохастических моделей поровых сетей

# 5.3.2. Описание предлагаемого метода стохастической генерации моделей поровых сетей

Основной целью разработки метода [58] стохастической генерации моделей поровых сетей (описание геометрии) является простота и более широкий спектр возможных моделей по сравнению с существующими методами. В основе алгоритма лежит раздельная стохастическая генерация всего набора параметров моделей поровых сетей без учета их геометрической реализуемости, то есть, в частности, без учета координат пор при расчете длин капилляров. Распределения параметров, определяющие стохастическую модель поровой сети, указаны ниже

$$R_{k}^{P} \sim LogN(a_{R}^{P}, \sigma_{R}^{P}), G_{k}^{P} \sim N\left(a_{G}^{P}, \sigma_{G}^{P}, 0, \frac{1}{4\pi}\right), Z_{k} \sim CND(a_{Z}^{P}, Z_{max})$$

$$A_{ij} \sim LogN(a_{A}^{C}, \sigma_{A}^{C}), G_{ij}^{C} \sim N\left(a_{G}^{C}, \sigma_{G}^{C}, 0, \frac{1}{4\pi}\right), L_{ij}^{C} \sim LogN(a_{L}^{C}, \sigma_{L}^{C}),$$

$$L_{ij}^{t} = L_{ij}^{C} + R_{i}^{P} + R_{j}^{P}, R_{ij}^{C} = A_{ij}\frac{R_{i}^{P} + R_{j}^{P}}{2}, k = 1 \dots N^{P}, i, j = 1 \dots N^{C},$$
(5.14)

где верхний индекс P отвечает за поры, верхний индекс C – за капилляры, нижний индекс k отвечает за номер поры, нижние индексы i и j отвечают за нумерацию

капилляров между порой *i* и порой *j*,  $N^P$  – количество пор,  $N^C$  – количество капилляров, R – значения радиусов, G – значения факторов формы, Z – координационные числа, A – отношения радиусов пор и капилляров, L – длины капилляров (с индексом C – длина между объемами пор, с индексом t – длина между центрами пор), N – обрезанное на интервал (0,1/4 $\pi$ ) нормальное распределение с параметрами a и  $\sigma$ , LogN – логнормальное распределение с параметрами a и  $\sigma$ , CND – распределение координационных чисел (процесс его получения описан ниже), которое задается средним значением a и максимальным значением  $Z_{max}$ . Таким образом стохастическая модель поровой сети (описание геометрии) может быть представлена следующим набором случайных величин

$$PNM = \left(R_k^P, G_k^P, Z_k, A_{ij}, R_{ij}^C, G_{ij}^C, L_{ij}^C, L_{ij}^t\right),$$
(5.15)

который позволяет задать реализацию модели в формате «link-node» [219].

Пошаговый алгоритм стохастической генерации моделей поровых сетей:

- 1. Задаются распределения параметров на основе полученных ранее моделей или на основе предположений о распределениях.
- 2. Далее регулярная сетка пор, включая граничные поры, генерируется на основе заданных размеров расчетной области и количества пор.
- 3. После этого все соседние поры соединяются друг с другом с условием непревышения заданного максимального координационного числа.
- 4. Затем соединения (капилляры) удаляются случайным образом, чтобы свести среднее координационное число модели к заданному значению, тем самым получается распределение *CND* (5.14).
- 5. Радиусы капилляров и длины между телами пор стохастически генерируется на основе заданных распределений.
- 6. Радиусы пор вычисляются на основе сгенерированных радиусов капилляров и отношений радиусов пор и капилляров.
- 7. Длины между центрами пор рассчитываются на основе значений радиусов пор и длин между телами пор.

- Факторы формы пор и капилляров генерируются на основе заданного единого распределения.
- 9. Объемы рассчитываются на основе сгенерированных параметров пор и капилляров.
- 10.Заданная пористость задается в модели за счет одновременного масштабирования общих размеров и объемов элементов модели.

Данный метод позволяет задавать произвольные распределения для всех параметров без учета их взаимосвязей в рамках реальных размеров элементов в генерируемой модели: например, координаты и радиусы связанных капилляром пор не участвуют в расчете длины между телами пор. Такие модели могут быть названы обобщенными моделями поровых сетей, так как они включают в себя классический подход к определению моделей поровых сетей (с учетом их координат в трехмерном пространстве) и позволяют генерировать более широкий спектр моделей по сравнению с классическим подходом.

По сути, все геометрические характеристики нужны для решения уравнений вида (4.5), где для всех элементов поровой сети нужно задать только функции g/L. Поэтому для адекватности моделирования пористых сред не является критичным отсутствие связи между координатами, радиусами и длинами, так как подход со стохастической генерацией обобщенных моделей поровых сетей позволяет расширить семейство используемых функций g/L. Более того, введение различных дополнительных связей между параметрами может быть учтено, если того требует поставленная задача.

## 5.3.3. Сравнение предлагаемого метода с существующими

Ниже Таблица 5.2 представляет сравнение описанного выше метода стохастической генерации моделей поровых сетей с существующими методами.

142

	<b>1</b>					
N₂	Методы	Учет распределения длин капилляров	Учет распределения координацион- ного числа	Учет распределений радиусов пор и капилляров	Степень общности моделей	Наличие результатов адаптации моделей к результатам экспериментов
1	Методы генерации регулярных моделей поровых сетей	Нет	Нет	Да	-	Недостаточно параметров для более точной адаптации к ККД и ОФП
2	Методы генерации квазирегулярных моделей поровых сетей	Нет	Да	Да	Обобщение пункта 1	В большинстве случаев встречается хорошее соответствие абсолютной проницаемости
3	Методы генерации нерегулярных моделей поровых сетей	Да, только для некоторых методов, например [145]	Да, только для некоторых методов, например через заданную функцию связности [145]	Да	Обобщение пунктов 1 и 2	Есть результаты
4	Новый метод генерации моделей поровых сетей	Да, более точная генерация заданного распределения длин, так как генерируются независимо от радиусов пор	Да, заданием среднего значения, может быть применен подход пункта 3	Да, более точная генерация радиусов пор, так как они генерируются независимо от длин капилляров	Обобщение пунктов 1, 2, 3 за счет использования обобщенных моделей поровых сетей	Есть результаты

Таблица 5.2 - Сравнение методов стохастической генерации моделей поровых сетей

В данной таблице не учитываются кратко описанные в Главе 4 методы выделения моделей поровых сетей из трехмерных изображений пустотного пространства, так как они не являются полностью стохастическими, как рассматриваемые здесь методы.

# **5.4.** Новый метод решения обратных задач при построении моделей поровых сетей по заданным параметрам одно- и двухфазной фильтрации

## 5.4.1. Постановка решаемых обратных задач

Данный пункт представляет описание решаемых в рамках данной диссертации обратных задач для моделей поровых сетей (формула (5.7) в предлагаемом подходе к ремасштабированию). Цель таких задач состоит в нахождении параметров моделей поровых сетей, которые позволяют рассчитать капиллярное давление и абсолютную проницаемость, соответствующую некоторому набору экспериментальных данных. Целевой функционал для обратной задачи задается как [61, 185]

$$F(PAR) = \sum_{i=1}^{N_S} \left( \frac{(P_c(S_i) - \bar{P}_c(S_i, PAR))^2}{2(\sigma_c^i)^2} + \frac{(K - \bar{K}(PAR))^2}{2(\sigma_{perm})^2} \right),$$
(5.16)

где Р<sub>с</sub> – функция капиллярного давления для системы вода-нефть-порода для каждого *i*-го значения водонасыщенности S<sub>i</sub>, N<sub>S</sub> – количество значений водонасыщенности, К – абсолютная проницаемость,  $\sigma_c^i$ И  $\sigma_{perm}$ среднеквадратические отклонения для экспериментальных данных ПО капиллярному давлению И абсолютной проницаемости соответственно. Переменные с чертой для капиллярного давления и абсолютной проницаемости соответствуют значениям на текущей итерации метода оптимизации, которые зависят от *n*-мерного вектора варьируемых параметров  $PAR \in \mathbb{R}^n$ . Вектор PARзадает модель поровой сети в виде стохастической реализации вектора случайных величин PNM (5.15) и параметры для моделирования одно- и двухфазного течений, например параметры распределения контактных углов. Параметры, определяющие геометрию модели поровой сети, используются разработанным стохастическим генератором моделей, а другая часть параметров используется симулятором для моделирования процессов фильтрации.

Среднеквадратические отклонения рассчитываются с использования экспериментальных данных и следующих формул для капиллярного давления [61]

$$\sigma_{c}^{i} = \gamma_{c} \sqrt{\frac{1}{N_{E}} \sum_{j=1}^{N_{E}} \left( P_{c}^{j}(S_{i}) - \frac{1}{N_{E}} \sum_{\bar{j}=1}^{N_{E}} P_{c}^{\bar{j}}(S_{i}) \right)^{2}}$$
(5.17)

и абсолютной проницаемости

$$\sigma_{perm} = \gamma_{perm} \sqrt{\frac{1}{N_E} \sum_{j=1}^{N_E} \left( K^j - \frac{1}{N_E} \sum_{\bar{j}=1}^{N_E} K^{\bar{j}} \right)^2},$$
(5.18)
где  $N_E$  – количество экспериментов,  $\gamma_c$  и  $\gamma_{perm}$  – масштабирующие коэффициенты для среднеквадратического отклонения на основе экспериментальных данных. Данные масштабирующие коэффициенты нужны по причине того, что рассчитываемые на основе керновых данных коэффициенты  $\sigma$  могут быть слишком большими, для их использования в формуле (5.16).

Относительная фазовая проницаемость может быть введена в рассмотрение аналогично капиллярному давлению в формулах (5.16) и (5.17). Решение обратной задачи предлагаемым методом демонстрируется ниже только для абсолютной проницаемости и капиллярного давления, так как введение в рассмотрение функций ОФП значительно увеличивает число варьируемых параметров, но при этом принципиально не меняет саму обратную задачу для К данного метода. Адаптация капиллярному давлению И абсолютной проницаемости является, например, интересной с точки зрения нахождения поровых сетей И расчета функций ΟΦΠ моделей ИХ ЛЛЯ анализа неопределенностей или осреднения на масштабе нефтегазоносных пластов, как это предложено, например, в статье [56].

### 5.4.2. Обзор существующих методов

На данный момент существует ряд методов для решения обратных задач. Их выбор в большей степени зависит от рассматриваемой задачи минимизации целевого функционала. Для моделей поровых сетей обзор применяемых подходов к настройке на ККД приведены в диссертации [226]. В работе [206] регулярные модели поровых сетей с помощью генетического алгоритма настраиваются на распределение координационного числа, которое соответствует реальному образцу керна. В статье [215] регулярные модели поровых сетей настраиваются на полученные экспериментально пористость, проницаемость и капиллярное давление с использованием метода Нелдера-Мида. Авторы статьи [139] с помощью метода случайных блужданий настраивают модели поровых сетей на экспериментальные. В статье [143] нерегулярные модели поровых сетей на основе теории многоклеточного роста (multi-cellular growth), и с помощью генетического алгоритма идет поиск неизвестных параметров

145

алгоритма построения моделей для настройки на экспериментальные фильтрационные характеристики.

Проведенные сравнения эффективности различных методов оптимизации для задачи адаптации фильтрационных моделей к истории разработки (history matching) показали высокую эффективность метода оптимизации роя частиц по сравнению с другими методами. В статьях [186] и [187] даны сравнения метода оптимизации роя частиц с различными методами (методы Монте-Карло, метод на основе фильтра Калмана и др.) для задачи адаптации фильтрационных моделей нефтегазоносных пластов. В этих статьях также показано, что данному методу требуется меньшее либо сравнимое количество итераций для нахождения оптимальных моделей по сравнению с другими методами. По этой причине метод оптимизации роя частиц был выбран для решения поставленных выше обратных задач, так как физические процессы и сложность задач подобны. Данный метод применяется впервые для решения обратных задач, связанных с моделями поровых сетей.

### 5.4.3. Общая схема предлагаемого метода решения обратных задач

Для построения моделей поровых сетей и оценки их параметров, соответствующих некоторым исходным фильтрационным характеристикам (например, экспериментальным), в рамках данной диссертационной работы разработан метод решения обратных задач как приложение разработанного метода стохастической генерации моделей. Предлагаемый метод решения обратных задач основывается на следующих трех методах [56, 61, 175, 176]:

- Метод генерации моделей поровых сетей, описанный в предыдущих разделах данной главы, для получения моделей поровых сетей на основе конечного набора определяющих параметров.
- Методы моделирования одно- и двухфазного течений в поровых сетях, которые описаны в предыдущей главе.
- Метод оптимизации роя частиц (описание дано ниже) для поиска оптимальных значений варьируемых параметров для моделей поровых сетей.

146

Алгоритм предлагаемого метода решения обратных задач для моделей поровых сетей представляется ниже (Рисунок 5.5), где  $N_{iter}$  – номер текущей итерации метода оптимизации,  $N_{max}$  – заданное максимальное число итерации, F – целевой функционал вида (5.16),  $E_{min}$  – минимально допустимое значение целевого функционала, при котором происходит выход из итерационного цикла метода оптимизации. Данный метод реализован в программном комплексе, который описан в Приложении А.



Рисунок 5.5 - Блок-схема метода решения обратных задач для моделей поровых сетей

### 5.4.4. Сравнение с существующими методами

Большинство существующих рассмотренных обратных задач, как представлено выше, решается за счет использования следующих трех методов: метод построения поромасштабных моделей, метод моделирования многофазного течения в поромасштабных моделях, метод оптимизации. Предложенный выше метод решения обратных задач также состоит из указанных методов. Его отличия от существующих методов решения обратных задач кроятся в использованной комбинации трех методов:

> Предложенный метод генерации моделей поровых сетей (сравнение с аналогичными методами представлено в соответствующем параграфе данной главы).

- Существующий метод моделирования многофазного течения в моделях поровых сетей (описание дано в Главе 4).
- Существующий оптимизационный метод роя частиц (использован впервые для обратных задач, связанных с моделями поровых сетей, ссылки на сравнение с другими методами даны выше в данной главе).
   5.4.5. Используемый оптимизационный метод роя частиц

Метод оптимизации роя частиц был разработан на основе наблюдений за поведением различных скоплений «частиц», например, косяков рыб, стай птиц, роев насекомых и др. Частицы формируют рой из *N*<sub>P</sub> частиц, которые пытаются найти минимум для целевого функционала в пространстве варьируемых параметров.

На первой итерации все частицы располагаются случайным образом с вектором координат  $x_i^0$  для *i*-ой частицы. Также всем частицам задаются вектора скоростей  $v_i^0$ , которые рассчитываются случайным образом с учетом пространства варьируемых параметров. На следующей итерации координаты и скорости пересчитываются в соответствии с правилами, подражающими рою: отдельный элемент роя основывает свое поведение на своей истории поиска и на истории соседних. Правила могут быть записаны как [152], [185]

$$v_{i}^{k+1} = \omega v_{i}^{k} + c_{1} rand_{1} (pbest_{i}^{k} - x_{i}^{k}) + c_{2} rand_{2} (gbest^{k} - x_{i}^{k}),$$

$$x_{i}^{k+1} = x_{i}^{k} + v_{i}^{k+1},$$
(5.19)

где индекс k – номер текущей итерации;  $pbest_i^k$  – вектор координат, где *i*-ая частица дает минимум целевого функционала среди ее k последних итераций;  $gbest^k$  – вектор координат, где целевой функционал принимает текущий глобальный минимум среди k последних итераций для всех частиц;  $c_1$  и  $c_2$  – неотрицательные действительные числа, которые контролируют когнитивное и социальное поведение частиц соответственно;  $rand_1$  и  $rand_2$  – равномерно распределенные между 0 и 1 случайные числа;  $\omega$  – вес для инерции частиц.

### 5.5. Применение предложенного метода выделения регионов

### 5.5.1. Разбиение выборки моделей поровых сетей на классы

Для примера выделения классов моделей поровых сетей было выбрано распределение пор по размерам по результатам ртутной порометрии [69] как один из параметров таких микромоделей. Данный параметр является характеристикой объема пустотного пространства, приходящегося на проводящие цепочки пор и капилляров, где минимальным является некоторое значение радиуса капилляра. Этому минимальному значению радиуса и приписывается оцененный объем. Всего было использовано 43 результата порометрических исследований керна нефтеносного пласта одного из месторождений Западной Сибири [55]. Коллекторами данного пласта являются песчаники и, в меньшей степени, алевролиты. Средняя проницаемость – 18 мД, средняя пористость – 17.5 %.

Анализ матрицы смежности связей подобия с учетом метрики (5.9) при заданной максимальной ошибке подобия показывает, что при изменении величины  $D_{max}$  количество регионов (классов) меняется. В связи с этим были построены графики количества регионов, в которых более двух, трех и шести распределений, от величины  $D_{max}$  (Рисунок 5.6). Выбор значения данного параметра обусловлен наглядностью и большей статистической обоснованностью получаемых в дальнейшем результатов – при  $D_{max} = 9$  % наблюдается выделение двух классов с достаточно большим количеством микромоделей [55].



Рисунок 5.6 - Зависимость количества регионов от величины D<sub>max</sub>

#### 149

Для  $D_{max} = 9$  % была рассчитана бинарная матрица смежности для связей подобия. Образцы из малочисленных выделяемых классов были распределены между двумя большими классами с учетом наименьшей ошибки подобия для малочисленных классов с двумя выбранными за основу классами. Данный результат представляет далее Рисунок 5.7.



Рисунок 5.7 - Бинарная матрица смежности для связей подобия микромоделей по распределениям пор по размерам

После выделения классов были рассчитаны осредненные распределения пор по размерам. Ниже Рисунок 5.8 показывает полученные осредненные распределения для классов, а Таблица 5.3 указывает средние фильтрационноемкостные характеристики и литологическое описание образцов керна в классах. Стоит отметить, что образцы керна Класса 1 обладают в среднем меньшей пористостью и проницаемостью чем образцы Класса 2. Это объясняется смещением распределений пор по размерам Класса 2 в сторону больших значений радиусов.

Таблица 5.3 - Характеристика образцов и соответствующих им дискретных микромоделей в выделенных классах

Название класса	Кол-во образцов	Средняя пористость, %	Средняя проницаемость, мД	Литология
Класс 1	19	12.4	1.0	Песчаник мелкозернистый глинистый, песчаник алевритистый
Класс 2	24	16.8	54.5	Песчаник мелкозернистый, средне- мелкозернистый, однородный



Рисунок 5.8 - Осредненные распределения для Класса 1 и Класса 2

# 5.5.2. Корреляция классов с РИГИС и выделение регионов для дискретной макромодели пористой среды

Для наглядного примера [177, 180] переноса выделенных классов моделей поровых сетей на регионы некоторой макромодели (геологическая модель) рассматриваемого пласта был выбран параметр самопроизвольной поляризации [42] – αΠС<sub>норм</sub>, нормированный на интервал изменения от 0.55 до 1.0 д. ед. Технически перенос означает связывание каждого интервала РИГИС каждого разреза по скважинам макромодели с заданным параметром αПС<sub>норм</sub> с выделенными классами моделей поровых сетей. Далее с помощью интерполяции регионы можно распространить на всю макромодель.

Для кривой ПС зона пересечений распределений для классов, рассчитываемая по формуле (5.13), составила 32%, при этом для Класса 1 (низкие значения ΦЕС) характерны значения αПС<sub>норм</sub> от 0.0 до 0.6 д. ед., а для Класса 2 (высокие значения ФЕС) – от 0.6 до 1.0 д. ед., что представляет Рисунок 5.9. Таким образом, Класс 1 вместе с интервалом αПС<sub>норм</sub> (0.0, 0.6) задает Регион 1, а Класс 2 – Регион 2. Физическая интерпретация полученных результатов состоит в следующем: аПС прямо пропорционально характеризует пористость, а для Класса 1 распределения пор по размерам смещены, как показывает Рисунок 5.8, в

сторону меньших радиусов по сравнению с Классом 2, что говорит как раз о меньших значениях пористости и худших фильтрационных характеристиках.



Рисунок 5.9 - Перенесение выделенных классов на разрезы по скважинам дискретной макромодели

В данном разделе представлен подход к выделению типов пород на основе анализа моделей поровых сетей и выделения их классов с последующим исследованием взаимосвязей классов с РИГИС. Данный метод, реализованный в программном комплексе «PoroScale» (Приложение А), позволяет выделять на масштабе нефтегазоносных преобладает пластов регионы, В которых определенный тип пород, которому характерны некоторые осредненные параметры поросетевых моделей. Это дает возможность исследовать, к примеру, распределение фильтрационных параметров на масштабе нефтегазоносных пластов с учетом микромасштабных эффектов или, как в целом распределены микромасштабные параметры для нефтегазоносных пластов.

## 5.6. Тестирование предложенного метода стохастической генерации моделей поровых сетей

### 5.6.1. Анализ распределений параметров моделей поровых сетей

Для стохастического метода генерации необходимо вначале получить распределения параметров. Рисунок 5.10 представляет пример распределений.



Рисунок 5.10 - Распределения параметров модели поровой сети образца песчаника Berea

В качестве основы для получения распределений параметров используется модель поровой сети, извлеченная из изображения порового пространства для песчаника Berea [126]. Рисунок 5.10 показывает распределения параметров данной модели, где для распределений в скобках указаны параметры a и  $\sigma$  соответственно, то есть, к примеру, LogNormal(a,  $\sigma$ ). Анализ данных результатов показывает, что для описания распределений параметров моделей поровых сетей достаточно нормального и логнормального распределений. Данные распределения получены в статье [56].

## 5.6.2. Тестирование разработанного метода стохастической генерации моделей поровых сетей

В данном разделе проводится тестирование разработанного метода стохастической генерации моделей поровых сетей [58]. В качестве основы для получения распределений параметров используется широко известная в

литературе модель поровой сети, описанная в предыдущем пункте. Таблица 5.4 представляет распределения параметров упомянутой модели.

Параметры	Ед. изм.	Распределения
Распределение радиусов капилляров	-	LogNormal(-12.1029, 0.7741)
Распределение радиусов пор	-	LogNormal(-11.2473, 0.5882)
Распределение длин капилляров	-	LogNormal(-10.9681, 0.9694)
Распределение расстояний между центрами пор	-	LogNormal(-9.0173, 0.6712)
Распределение факторов формы пор и капилляров	-	Normal (0.0295, 0.0066)
Среднее координационное число	Шт.	3.9135
Пористость	Д. ед.	0.1956

Таблица 5.4 - Параметры поросетевой модели для песчаника Berea

Рисунок 5.11 представляет значения абсолютной проницаемости для различных реализаций моделей поровых сетей фиксированными с распределениями параметров и меняющимся количеством пор в каждом (параметры  $N_x x N_y x N_z$ ). Для расчета всех фильтрационных направлении показанных ниже, использовался который был характеристик, алгоритм, разработан в диссертациях [210, 225] и описан в Главе 4.



Рисунок 5.11 - Значения абсолютной проницаемости для случайных реализаций моделей поровых сетей в зависимости от количества пор

Ниже (Рисунок 5.12) представлены кривые капиллярного давления (процесс первичного дренажа) для различных реализаций моделей поровых сетей с фиксированными распределениями параметров и меняющимся количеством пор по трем направлениям.



Рисунок 5.12 - Значения капиллярного давления для случайных реализаций моделей поровых сетей с количеством пор 6х6х6 (слева) и 16х16х16 (справа)

Рисунок 5.13 представляет кривые относительных фазовых проницаемостей (процесс первичного дренажа) для различных стохастических реализаций моделей поровых сетей с фиксированными распределениями параметров и для двух заданных количеств пор.



Рисунок 5.13 - Значения относительных фазовых проницаемостей для случайных реализаций моделей поровых сетей: 6x6x6 (слева) и 16x16x16 (справа)

В ланном разделе представлены результаты тестирования метода стохастической генерации моделей поровых сетей на основе распределений их параметров. Тестирование метода, реализованного в программном комплексе «PoroScale» [54] (Приложение А), показало, что отличия фильтрационных характеристик различных реализаций моделей поровых сетей для одних и тех же распределений параметров (кроме параметра, отвечающего за генерацию случайных чисел – параметр «seed») снижаются с увеличением количества пор. Это означает, что «разброс» значений расчетных фильтрационных характеристик зависит от количества пор, закладываемых для стохастической генерации моделей. При использовании данного алгоритма можно задавать максимальное среднеквадратическое отклонение и оценивать нужный размер расчетной области, начиная с которой «разброс» не будет превышать заданное значение. Также получаемые значения фильтрационных характеристик для различных реализаций можно осреднять и получать один набор фильтрационных характеристик для значений параметров распределений моделей поровых сетей.

Данный метод может быть применен для решения различного типа задач, связанных с расчетом фильтрационных параметров, и в данной диссертации необходим для решения обратных задач построения моделей поровых сетей и оценки неизвестных параметров, связанных с ними, как часть предложенного подхода к ремасштабированию. Также предложенный метод может быть применен для построения стохастических моделей образцов керна на основе анализа выборки моделей поровых сетей. Упомянутые модели могут быть получены методами, описанными в предыдущей Главе 4, за счет осреднения их параметров. Причем модель поровой сети для образца керна может быть сведена к модели с меньшим размером расчетной области, для которой фильтрационные характеристики будут отличаться незначительно.

#### 5.7. Применение предложенного метода решения обратных задач

### 5.7.1. Исходные данные для обратной задачи

Для применения предложенного выше метода решения обратных задач, реализованного в программном комплексе «PoroScale» (Приложение A), для моделей поровых сетей рассмотрим следующую задачу [61]: для выделенного выше Региона 1 микромоделей [55, 177, 180] найти модель поровой сети, которая максимально близко повторяет средние значения пористости и проницаемости (Таблица 5.3) и значения осредненной кривой капиллярного давления (Рисунок 5.14). Целью данной обратной задачи является нахождение дискретной микромодели, которая соответствует осредненным характеристикам масштаба регионов пористой среды рассматриваемого пласта. Это позволяет оценивать фильтрационные характеристики этих регионов с учетом различных процессов, характерных для микро- и макромасштабов.

156

В разработанном и представленном выше методе решения обратных задач используется разработанный метод стохастической генерации моделей поровых сетей, описанные выше метод оптимизации роя частиц и разработанные специалистами из Имперского колледжа Лондона и университета Хериот-Ватт методы моделирования многофазного течения для моделей поровых сетей, которые описаны в предыдущей Главе 4.

Ниже Таблица 5.5 представляет параметры для моделирования процесса двухфазной фильтрации с помощью стохастических моделей поровых сетей. Выбор данных параметров обусловлен спецификой получения осредненных кривых капиллярного давления – в результате ртутной порометрии, где пары ртути (смачивающая фаза) вытесняют ртуть в жидкой фазе (несмачивающая фаза). Используемые ниже параметры переведены к соответствующим значениям системы вода-нефть-порода для получения результатов с помощью симулятора и наглядного представления этих результатов расчетов.

Название	Единицы	Значение
	измерения	
Контактный угол	Град	0
Поверхностное натяжение (нефть-вода)	мН/м	35
Пористость глины	%	0
Смачиваемость	-	Uniform Water Wet
Тип формы сечений	-	Circle-Triangle-Square
Случайные треугольники (Arbitrary Triangles)	-	да
Модель заполнения пор (Pore Body Filling)	-	да
Алгоритм заполнения пор	-	Blunt1
$N_{\chi} \mathbf{x} N_{\chi} \mathbf{x} N_{z}$	-	15x15x15
Начальная фаза	-	вода
Закачиваемая фаза	-	нефть
Старение (aging)	-	нет

Таблица 5.5 - Параметры для моделирования двухфазного течения с помощью моделей поровых сетей

Интервалы значений характеристик распределений параметров стохастических моделей поровых сетей, которые использованы в методе

оптимизации роя частиц для поиска неизвестных характеристик, выбраны исходя из полученных распределений для образца песчаника Berea (Рисунок 5.10) [56] и с учетом различия проницаемости данного образца и Региона 1 на три порядка.

### 5.7.2. Результаты численных расчетов

В данном разделе приведены результаты решения обратной задачи [52, 61, 176] для Региона 1.

Таблица 5.6 представляет сравнение заданных целевых значений И рассчитанных на основе оптимальной модели значений пористости И проницаемости, а Рисунок 5.14 представляет сравнение целевой функции и рассчитанной на основе оптимальной модели функции капиллярного давления. Анализ результатов позволяет говорить о хорошем соответствии расчетных и целевых параметров интервале водонасыщенности, соответствующей В двухфазной фильтрации.

Таблица 5.6 - Сравнение целевых значений и полученных в результате решения обратной задачи параметров

Параметр	Регион 1	Регион 1	
	(фактические данные)	(расчетные данные)	
Пористость	12.5%	12.5%	
Абсолютная проницаемость	1.0 мД	1.0 мД	



Рисунок 5.14 - Сравнение заданной кривой капиллярного давления и полученной в результате решения обратной задачи для Региона 1

Ниже Рисунок 5.15 представляет полученные в результате решения обратной задачи распределения параметров оптимальной стохастической модели поровой сети, а также представлены параметры этих распределений.



Рисунок 5.15 - Полученные распределения и их параметры для найденной в результате решения обратной задачи стохастической модели поровой сети

### Выводы к главе

1. Данная посвящена ремасштабированию глава дискретных микромоделей пористой среды масштаба макромоделей до нефтегазоносных пластов: дан обзор существующих подходов к ремасштабированию дискретных моделей микромасштаба, описан разработанный подход к ремасштабированию дискретных моделей микромасштаба макромасштаба перечислены способы ЛО И использования непрерывных групп симметрий для предлагаемого подхода к ремасштабированию.

- 2. Разработан макромасштабных метод выделения регионов характерных дискретных моделей микромасштаба пористой среды, состоящий ИЗ выделения классов подобных микромоделей и выделения регионов макромодели на основе полученных классов микромоделей. С использованием метода выделения регионов микромоделей на основе порометрических экспериментальных данных было выделено два региона макромодели с различными ФЕС.
- 3. Разработан метод стохастической генерации моделей поровых сетей на основе распределений их параметров. Проведено тестирование метода стохастической генерации моделей поровых сетей, которое показало устойчивость получаемых результатов с ростом размеров расчетной области.
- 4. В качестве приложения разработанного метода стохастической генерации предложен метод решения обратных задач для моделей поровых сетей включающий в себя также известный метод оптимизации роя частиц. Проведено тестирование данного метода в рамках построения осредненной модели поровой сети для выделенного Региона 1 микромоделей.
- 5. Разработанный подход к ремасштабированию, состоящий из метода стохастической генерации, метода решения обратных задач и метода выделения регионов на масштабе нефтегазоносных пластов для моделей поровых сетей, вместе с полученными результатами по исследованию дискретных моделей с помощью непрерывных групп симметрий позволяет повысить качество и быстроту решения различных задач моделирования, связанных с разработкой месторождений нефти и газа.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

161

Диссертационная работа посвящена исследованию дискретных моделей процессов одно- и двухфазной фильтрации, которые соответствуют различным масштабам пористых сред. Получены следующие основные результаты:

- 1. На основе теории группового анализа разностных схем разработан метод размножения численных решений с использованием непрерывных групп симметрий. Расчетным путем установлено, что выигрыш во времени расчета по сравнению с существующими методами может достигать трех порядков. Для разработанного метода размножения численных решений выделены классы уравнений фильтрации, к которым применим данный метод: 4 класса дискретных динамических систем для двумерного случая и 23 класса для трехмерного случая, 4 класса для разностных схем параболического дифференциального уравнения с частными производными для моделирования фильтрации газа и 3 класса для уравнения двухфазной фильтрации Рапопорта-Лиса.
- 2. Проведена классификация методов моделирования процессов фильтрации на масштабе пор. На основе методов поросетевого моделирования разработан подход к ремасштабированию дискретных микромоделей, включающий метод выделения регионов характерных моделей поровых сетей на макромасштабе дискретных моделей нефтегазоносных пластов (фильтрационные модели). Использование результатов порометрии для образцов керна одного из нефтяных месторождений Западной Сибири позволило выделить два региона с различными фильтрационно-емкостными свойствами и характерными дискретными микромоделями.
- 3. Разработан метод стохастической генерации моделей поровых сетей на основе распределений их параметров как часть разработанного подхода к ремасштабированию. Тестирование метода стохастической генерации моделей поровых сетей показало, что начиная с размеров

15х15х15 разброс результатов нивелируется, а сравнение метода с существующими аналогами показало его большую универсальность. В качестве приложения разработанного метода стохастической генерации предложен метод решения обратных задач для моделей поровых сетей. На основе предложенного метода решена обратная задача адаптации стохастически сгенерированной модели К осредненным значениям капиллярного давления, абсолютной проницаемости и пористости для одного из выделенных регионов. Для решения данной задачи впервые применен метод оптимизации роя частиц для моделей поровых сетей.

4. На основе разработанных методов создан программный комплекс «PoroScale» для моделирования процессов фильтрации на микро- и макромасштабе. Все результаты расчетов, описанные в первых трех пунктах, получены с помощью разработанного программного комплекса.

### СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

163

- ГДМ гидродинамическая модель
- ГИС геофизические исследования скважин
- ККД кривая капиллярного давления
- ОФП относительная фазовая проницаемость
- ПК программный комплекс
- ПО программное обеспечение
- ПС поляризация самопроизвольная
- РИГИС результаты интерпретации геофизических исследований скважин
- СКМ система компьютерной математики
- СЛАУ система линейных алгебраических уравнений
- ФЕС фильтрационно-емкостные свойства
- ЭВМ электронная вычислительная машина
- GPU Graphics Processing Unit
- LBE Lattice Boltzmann Equations
- LBM Lattice Boltzmann Methods
- PNM Pore Network Model
- REV Representative Elementary Volume
- VOF Volume of Fluid
- WAG Water-Alternating-Gas

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер, В.Э. Классификация дискретных интегрируемых уравнений : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.03 / Адлер Всеволод Эдуардович. – М., 2010. – 289 с.

2. Азиз, Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – Институт компьютерных исследований: Москва-Ижевск, 2004. – 416 с.

3. Алтунин, А.Е. Расчетный метод получения относительных фазовых проницаемостей на основе решения обобщенных уравнений Бернулли для системы поровых каналов / А.Е. Алтунин, С.В. Соколов, С.В. Степанов, А.Н. Черемисин, А.Б. Шабаров // Нефтепромысловое дело. – 2013. – № 8. – С. 40-46.

4. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко. // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направ. – 1985. – Т. 1. – С. 7-140.

5. Байков, В.А. Петрофизические закономерности как инварианты фильтрационных моделей / В.А. Байков, В.Г. Волков, Л.Р. Галиакберова, И.С. Желтова // Вестник УГАТУ. – 2010. – Т. 14, № 2 (37). – С. 178-182.

6. Байков, В.А. Проблемы разработки: от кило- до нанометров / В.А. Байков, Р.К. Газизов, А.Р. Латыпов, А.А. Яковлев. // Научно-технический вестник ОАО Роснефть. – 2011. – Вып. 23. – С. 30-32.

7. Баренблатт, Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик. – М.: Недра, 1972. – 288 с.

8. Басниев, К.С. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов / К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. – М.: Недра, 1993. – 416 с.

9. Бетелин, В.Б. Компьютерный керносимулятор: подходы и методы / В.Б. Бетелин, В.Ф. Никитин, Н.Н. Смирнов, Е.В. Михальченко, Е.И. Скрылева, Л.И. Стамов, В.В. Тюренкова. // Вестник кибернетики. – 2015. – № 4. – С. 33-44.

10. Бикулов, Д.А. Моделирование явлений переноса в пористых средах на гибридных суперкомпьютерных системах : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 / Бикулов Дмитрий Александрович. – М., 2015. – 115 с.

11. Бобровски, Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем / Д. Бобровски. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 360 с.

12. Богульская, Н.А. Дискретная математика. Основы теории графов: учеб. пособие / Н.А. Богульская, Т.М. Пестунова. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2005. – 82 с.

13. Боровков, А.А. Теория вероятностей: Учебное пособие для вузов / А.А. Боровков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 432 с.

14. Вигнер Э. Этюды о симметрии: Инвариантность и законы сохранения / Э. Вигнер. – 3-е изд. – М.: URSS, 2015. – 320 с.

15. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.

16. Винберг, Э.Б. Основы теории групп Ли / Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик // Итоги науки и техн.: Сер. Соврем. пробл. мат. фундам. направления. – 1988. – № 20. – С. 5-101.

17. Годунов, С.К. Разностные схемы. Введение в теорию / С.К. Годунов, В.С. Рябенький – Изд. 2, перераб. и доп. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

18. Головин, С.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / С.В. Головин, А.А. Чесноков. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2008. – 113 с.

19. Гоулдстейн, Д. Растровая электронная микроскопия и рентгеновский микроанализ: в 2-х т., пер. с англ. / Д. Гоулдстейн, Д. Ньюбери, П. Эчлин и др. – М.: Мир, 1984. – 348 с. – 2 т.

20. Григорьев, Ю.Н. Групповой анализ интегродифференциальных кинетических уравнений. Результаты и перспектива / Ю.Н. Григорьев, С.В. Мелешко. // Вычислительные технологии – Том 7, № 2. – 2002. – С. 35-49.

21. Губайдуллин, А.А. Обобщение подхода Козени к определению проницаемости модельных пористых сред из твердых шаровых сегментов / А.А. Губайдуллин, Д.Е. Игошин, Н.А. Хромова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2016. – Т. 2. № 2. – С. 105–120.

22. Гюнтер, Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных / Н.М. Гюнтер – Л.-М.: ОНТИ. Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. – 361 с.

23. Демьянов, А.Ю. Применение метода функционала плотности для численного моделирования течений многокомпонентных многофазных смесей / А.Ю. Демьянов, О.Ю. Динариев // Журнал прикладной механики и технической физики (ПМТФ). – 2004. – Т.45., Вып. 5. – С.68-78.

24. Демьянов, А.Ю. Основы метода функционала плотности в гидродинамике / А.Ю. Демьянов, О.Ю. Динариев, Н.В. Евсеев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 312 с.

25. Демьянов, В.В. Геостатистика: теория и практика / В.В. Демьянов, Е.А. Савельева; под ред. Р. В. Арутюняна; Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. – М.: Наука, 2010. – 327 с.

26. Дородницын, В.А. Групповые свойства разностных уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 240 с.

27. Дородницын, В.А. Группы преобразований в сеточных пространствах / В.А. Дородницын. // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – 1989. – Т. 34. – С. 149-190.

28. Жижимонтов, И.Н. Метод расчета коэффициентов пористости и проницаемости горной породы на основе кривых капиллярного давления / И.Н. Жижимонтов, А.В. Мальшаков. // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. нефть, газ, энергетика. – 2016. – Том 2. № 1. – С. 72-81.

29. Ибрагимов, Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Наука, 1983. – 280 с.

30. Ибрагимов, Н.Х. Азбука группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. – М: Знание, 1989. – 48 с.

31. Ибрагимов, Н.Х. Опыт группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. – М: Знание, 1991. – 48 с.

32. Ибрагимов, Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Н.Х. Ибрагимов. – Нижний Новгород: изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2007. – 421 с.

33. Иванова, М.М. Нефтегазопромысловая геология: Учеб. для вузов / М.М. Иванова, И.П. Чоловский, Ю.И. Брагин. – М.: Недра-Бизнесцентр, 2000. – 414 с.

34. Иванов, М.К. Петрофизические методы исследования кернового материала. (Терригенные отложения) Учебное пособие в 2-х книгах. Кн. 1. / Ю.К. Бурлин, Г.А. Калмыков, Е.Е. Карнюшина, Н.И. Коробова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. – 112 с.

35. Ильинский, Н.Б. Обратные краевые задачи теории фильтрации. Учебное пособие к курсу «Обратные краевые задачи механики жидкости и газа», часть III / Н.Б. Ильинский, Р.Ф. Марданов. – Казань: КГУ, 2007. – 56 с.

36. Кадет, В.В. Методы теории перколяции в подземной гидромеханике / В.В. Кадет. – М: Изд-во «ЦентрЛитНефтеГаз», 2008. – 96 с.

37. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 140 с.

38. Карсанина, М.В. Моделирование структуры материалов, обладающих желаемыми свойствами, с помощью корреляционных функций / М.В. Карсанина, К.М. Герке, Р.В. Васильев, Д.В. Корост // Матем. моделирование. – 2015. – Т. 27, №4. – С. 50-63.

39. Корост, Д.В. Неоднородность строения терригенных коллекторов и типы структуры их пустотного пространства (на примере верхней части тюменской свиты Урненского нефтяного месторождения Западной Сибири) : дис. ... канд. тех. наук : 25.00.12 / Корост Дмитрий Вячеславович. – М., 2012. – 175 с.

40. Кузьмин, В.А. Результаты изучения анизотропии микростроения карбонатных пород методами электронной микроскопии и компьютерного анализа изображений [Электронный ресурс] / В.А. Кузьмин, Н.Н. Михайлов, В.М. Максимов, И.П. Гурбатова. // Электронный научный журнал «Георесурсы. Геоэнергетика. Геополитика». – 2011. – Вып. 1(3). – Режим доступа: http://oilgasjournal.ru/vol\_3/maximov-gurbatova.pdf, свободный.

41. Лагно, В.И. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа / В.И. Лагно, С.В. Спичак, В.И. Стогний. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 392 с.

42. Латышова, М.Г. Практическое руководство по интерпретации диаграмм геофизических методов исследования скважин / М.Г. Латышова. – Недра: Москва, 1981. – 182 с.

43. Марков, П.В. Групповой анализ дискретных динамических систем / П.В. Марков. // Лучшие выпускные квалификационные работы 2011 года: сборник статей на основе лучших выпуск. квалиф. работ. – Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2011. – Ч. 1: Естественнонаучное направление. – С. 30-36.

44. Марков, П.В. Групповая классификация дискретных динамических систем / П.В. Марков. // Материалы научной конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «ИМЕНИТ-2012». – Тюмень, 2012. – С. 128.

45. Марков, П.В. Групповая классификация дискретных динамических систем / П.В. Марков. // «Студент и научно-технический прогресс». Материалы 51-й международной научной студенческой конференции, секция «Математика». – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2013. – С. 90.

46. Марков, П.В. Анализ дискретных динамических систем с помощью непрерывных групп симметрии / П.В. Марков. // Лучшие выпускные квалификационные работы 2013 года: сборник статей на основе лучших выпуск. квалиф. работ – Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2013. – Ч. 1: Естественнонаучное направление. – С. 9-20.

47. Марков, П.В. Анализ дискретных динамических систем с помощью непрерывных групп симметрии / П.В. Марков // Современный групповой анализ, MOGRAN-16. Тезисы докладов 16-й международ. научной конференции. – Уфа: Изд-во УГАТУ, 2013. – С. 16-17.

48. Марков, П.В. Групповая классификация дискретных динамических систем / П.В. Марков. // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9, № 4. – С. 641–649.

49. Марков, П.В. Использование непрерывных групп преобразований при исследовании дискретных динамических систем / П.В. Марков. // Математическое и информационное моделирование. Сборник научных трудов. – Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2013. – Вып. 13. – С. 172-185.

50. Марков, П.В. Использование непрерывных групп симметрий для ускорения численных расчетов разностных схем / П.В. Марков. // Материалы XVI Всероссийской конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Красноярск, 2015. – С. 42-43.

51. Марков, П.В. Применение моделей микроструктуры пористой среды в виде поровых сетей для обоснования функций ОФП / П.В. Марков. // Материалы конференции Нефть и газ Западной Сибири. – Тюмень, 2015. – С. 115-118.

52. Марков, П.В. Расчет фильтрационных параметров пластовых флюидов с помощью методов микропорового моделирования / П.В. Марков, Д.Е. Игошин, А.Ю. Максимов // Сборник материалов форума НЕФТЬГАЗТЭК – Тюмень, 2015. – С. 286-290.

53. Марков, П.В. Применение непрерывных групп симметрий для генерации численных решений на примере разностных схем уравнения фильтрации газа / П.В. Марков. // Материалы конференции «XVII Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям». – Новосибирск, 2016. – С. 52.

54. Марков, П.В. Моделирования на микромасштабе пористой среды «PoroScale» / П.В. Марков. // Свидетельство об официальной регистрации программы ЭВМ № 2016663800 РФ от 16.12.2016; заявка № 2016661518 от 28.10.2016.

55. Марков, П.В. Расчет функций ОФП по распределению пор по размерам с помощью метода на основе теории перколяции / П.В. Марков, О.А. Окорокова. // Математическое и информационное моделирование: сборник научных трудов. – Тюмень: Издательство ТюмГУ, 2015. – Вып. 14. – С. 142-150.

56. Марков, П.В. Использование моделей микроструктуры пористой среды при расчете фильтрационных характеристик для гидродинамических моделей / П.В. Марков, С.П. Родионов. // Нефтепромысловое дело. – 2015. – № 11. – С.64-75.

57. Марков, П.В. Метод ускорения серийных численных расчетов уравнений многофазной фильтрации в пористой среде с помощью непрерывных групп симметрий / П.В. Марков, С.П. Родионов. // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. – 2015. – № 12. – С. 23-30.

58. Марков, П.В. Метод стохастической генерации моделей поровых сетей по распределениям их параметров / П.В Марков, С.П. Родионов. // Вестник кибернетики. – 2016. – № 3 (23). – С. 18-25.

59. Марков, П.В. Применение непрерывных групп симметрий разностных схем для расчетов с помощью поромасштабных моделей. / П.В. Марков. // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований: сб. ст. по матер. Х междунар. науч.-практ. конф. – 2018. – № 10(7). – Новосибирск: СибАК. – С. 13-20.

60. Марков, П.В. Классы разностных схем нелинейного уравнения двухфазной фильтрации Рапопорта–Лиса с возможностью генерации численных решений с помощью непрерывных групп симметрии. / П.В. Марков. // Тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции «Современные проблемы математики и её приложений». – Екатеринбург, 2019. – С. 138-139.

61. Марков, П.В. Решение обратной задачи построения стохастических моделей поровых сетей на основе данных масштаба регионов нефтегазоносных пластов. / П.В. Марков. // Перспективы науки. – 2019. – № 6(117). – С. 65-71.

62. Марков, П.В. Групповая классификация разностных схем параболических дифференциальных уравнений одно- и двухфазной фильтрации в пористых средах / П.В. Марков. // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Естественные и технические науки. – 2019. – № 8. – С. 85-90.

63. Мирзаджанзаде, А.Х. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность / А.Х. Мирзаджанзаде, М.М. Хасанов, Р.Н. Бахтизин. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 368 с.

64. Мышкис, А.Д. Элементы теории математических моделей / А.Д. Мышкис. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.

65. Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 416 с.

66. Овсянников, Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – Новосибирск: СОАН СССР, 1962. – 239 с.

67. Олвер, П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М.: Мир, 1989. – 639 с.

68. Орлов, Д.М. Комплексное экспериментальное исследование двухфазного течения в коллекторах Чаяндинского нефтегазоконденсатного месторождения и разработка методики количественной оценки влияния условий фильтрации на относительные фазовые проницаемости / Д.М. Орлов, А.Е. Рыжов, Н.В. Савченко, Т.А. Перунова. // Научно-технический сборник вести газовой науки, Газпром ВНИИГАЗ. – 2012. – № 3 (11). – С. 130-145.

69. Пирвердян, А.М. Физика и гидравлика нефтяного пласта / А.М. Пирвердян. – М.: Недра, 1982. – 192 с.

70. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977, 2-е изд. – 664 с.

Родионов, С.П. Апгриддинг, апскейлинг 71. нефтеотдача И В гидродинамическом моделировании / С.П. Родионов, O.H. Пичугин, Л.Н. Соколюк, Я.В. Ширшов. // Нефтепромысловое дело. – 2013. – № 11. – C. 52-58.

72. Ромм, Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород / Е.С. Ромм. – Л.: Недра, 1985. – 240 с.

73. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

74. Семенов, В.В. Применение результатов изучения ОФП в комплексе с данными экспериментальных исследований керна для целей повышения достоверности петрофизических и гидродинамических моделей / В.В. Семенов, Р.Д. Вокин, М.Ю. Ахапкин, К.Н. Епишин. // Геофизика. – 2007. – № 4. – С. 229-236.

75. Скибицкая, Н.А. Влияние структуры порового пространства на остаточное нефтегазонасыщение пород продуктивных отложений месторождений углеводородов [Электронный ресурс] / Н.А. Скибицкая, В.А. Кузьмин, М.Н. Большаков, О.О. Марутян. // Электр. науч. журнал «Георесурсы. Геоэнергетика. Геополитика». – 2010. – Вып. 1(1). – Режим доступа: http://oilgasjournal.ru/2009-1/4-rubric/skibitskaya-2.pdf, свободный.

76. Специальный практикум: разностные схемы (кафедра математики физического факультета МГУ) [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://math.phys.msu.ru/Education/Special\_courses/Special\_practical\_work\_Differentia l\_schemes/show\_page, свободный

77. Степанов С.В. Комплекс вычислительных технологий для повышения качества моделирования разработки нефтяных и газонефтяных месторождений : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / Степанов Сергей Викторович. – Тюмень, 2016. – 264 с.

78. Сыртланов, В.Р. О подходе к ремасштабированию относительных фазовых проницаемостей и капиллярных кривых / В.Р. Сыртланов, С.З. Фатихов. // Вестник ЦКР Роснедра. – 2010. – № 5. – С. 42-46.

79. Тихонов, А.Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач / А.Н. Тихонов. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.

80. Фатихов, С.З. К вопросу вычисления относительных фазовых проницаемостей / С.З. Фатихов, В.Р. Сыртланов. // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2012. – № 1. – С. 324-332.

81. Хавкин, А.Я. О роли дисперсности системы нефть-вода-порода в процессах вытеснения нефти из пористых сред / А.Я. Хавкин. – М.: Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2001. – 64 с.

82. Хавкин, А.Я. Нанотехнологии нефтедобычи [Электронный ресурс] / А.Я. Хавкин. // Нанотехнологическое общество России. – 2009. – Режим доступа: http://www.rusnor.org/upload/My/nanonefthavkin.pdf, свободный.

83. Хакимзянов, Г.С. Методы вычислений: учеб. пособие. Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа. Часть 4 / Г.С. Хакимзянов, С.Г. Черный. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. – 207 с.

84. Халимов, Э.М. Детальные геологические модели и трехмерное моделирование / Э.М. Халимов. // Нефтегазовая геология. Теория и практика. – 2012. – Т. 7., №3. – С. 1-7.

85. Хейфец, Л.И. Многофазные процессы в пористых средах / Л.И. Хейфец, А.В. Неймарк. – М: Химия, 1982. – 320 с.

86. Хлюпин, А.Н. Фрактальный анализ трехмерной микроструктуры пористых материалов / А.Н. Хлюпин, О.Ю. Динариев. // Журнал технической физики. – 2015. – том 85, вып. 6. – С. 17-22.

87. Чеботарев, Н.Г. Теория групп Ли / Н.Г. Чеботарев. – Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 400 с.

Шабаров, А.Б. Методы определения функций относительной фазовой 88. многофазной фильтрации / А.Б. проницаемости В задачах Шабаров, П.В. Марков, H.B. Шаталова. // Вестник А.В. Шаталов, Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2018. – Том 4. № 1. – С. 79-109.

89. Шандрыгин, А. Механизм вытеснения маловязкой нефти из микронеоднородной пористой среды полимерными растворами / А. Шандрыгин, В. Шелепов, Р. Рамазанов, Н. Андрианов, Д. Клемин, А. Надеев, С. Сафонов, И. Якимчук. // Российская нефтегазовая техническая конференция и выставка SPE. – Москва, 2016. – С. 1-12.

90. Шарый, С.П. Курс вычислительных методов / С.П. Шарый. – Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2016. – 316 с.

91. Швидлер, М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. – М.: Недра, 1985. – 288 с.

92. Шильников, Л.П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 416 с.

93. Шпуров, И.В. Научно-методическое обоснование эффективной разработки трудноизвлекаемых запасов нефти юрских отложений Западной

Сибири на основе детального геолого-технологического моделирования : дис. ... д-ра тех. наук : 25.00.17 / Шпуров Игорь Викторович. – Тюмень, 2015. – 356 с.

94. Щелкачев, В.Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации: Часть 1. Монография: В 2 ч. / В.Н. Щелкачев. – М.: Нефть и газ, 1995. – 586 с.

95. Яненко, Н.Н. О групповой классификации разностных схем для системы уравнений газовой динамики / Н.Н. Яненко, Ю.И. Шокин. // Тр. МИАН СССР – 1973. – т. 122. – с. 85–96.

96. Яценко, В.М. Методика оценки проницаемости методом гидравлических единиц на примере коллекторов Ванкорского месторождения / В.М. Яценко, Д.А. Антоненко, Р.Р. Нигматуллин. // Нефтяное хозяйство. – 2009. – № 8. – С. 69-71.

97. Adler, P.M. Porous media: geometry and transports / P.M. Adler. – Boston: Butterworth-Heinemann, 1992. – 544 p.

98. Adler, P.M. Real porous media: Local geometry and macroscopic properties / P.M. Adler, J.F. Thovert. // Applied Mechanics Reviews. – 1998. – Vol. 51. – P. 537-585.

99. Akanji, L.T. Finite Element-Based Characterization of Pore-Scale Geometry and Its Impact on Fluid Flow / L.T. Akanji, S.K. Matthai. // Transport in Porous Media –  $N_{2}$  81. – P. 241–259.

100. Al-Dhahli, A. Three-phase pore-network modelling for mixed-wet carbonate reservoirs / A. Al-Dhahli, S. Geiger-Boschung, M.I.J. van Dijke. // SPE Reservoir Characterisation and Simulation Conference and Exhibition. – Abu Dhabi, UAE, 2011. – P. 1-15.

101. Al-Gharbi, M.S. Dynamic Pore-Scale Modelling of Two-Phase Flow [Текст]: PhD dissertation / Al-Gharbi Mohammed Saif. – London, Imperial College, 2004. – 154 p.

102. Al-Hussainy, R. The Flow of Real Gases through Porous Media / R. Al-Hussainy, H.J. Ramey, P.B. Crawford. // Journal of Petroleum Technology. – 1966. – Vol. 18, Iss. 5. – P. 624-636.

103. Al-Kharusi, A.S. Pore-scale characterization of carbonate rocks [Текст]: PhD dissertation / Al-Kharusi Anwar Sulaiman Zaher. – London, Imperial College, 2007. – 275 p.

104. Al-Kharusi, A.S. Network extraction from sandstone and carbonate pore space images / A.S. Al-Kharusi, M.J. Blunt. // Journal of Petroleum Science and Engineering.  $-2007. - N_{\odot} 56. - P. 219-231.$ 

105. Al-Raoush, R. Representative elementary volume analysis of porous media using X-ray computed tomography / R. Al-Raoush, A. Papadopoulos. // Powder Technology. – 2010. – Vol. 200, Iss. 1-2. – P. 69-77.

106. Allen, M.P. Computer Simulation of Liquids / M.P. Allen, D.J. Tildesley. – Oxford: Oxford Science Publications, 1987. – 385 p.

107. Bakke, S. 3-D Pore-Scale Modelling of Sandstones and Flow Simulations in the Pore Networks / S. Bakke, P.-E. Øren. // SPE Journal. – 1997. – Vol. 2. – P. 136-149.

108. Baikov, V.A. Water Redistribution in Irrigated Soil Profiles: Invariant Solutions of the Governing Equation / V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov, V.F. Kovalev. // Nonlinear Dynamics. – 1997. – № 13. – P. 395–409.

109. Baikov, V.A. Conservation laws for two-phase filtration models / V.A. Baikov, N.H. Ibragimov, I.S. Zheltova, A.A. Yakovlev. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2014. – Vol. 19, Iss. 2. – P. 383–389.

110. Bakirova, M.I. Symmetry-preserving discrete schemes for some heat transfer equations / M.I. Bakirova, V.A. Dorodnitsyn, R.V. Kozlov. // J. Phys. A. – 1997. – Vol. 30, № 23. – P. 8139-8155.

111. Blunt, M.J. Effects of heterogeneity and wetting on relative permeability using pore level modeling / M.J. Blunt. // SPE Journal. – 1997. – Vol. 2, Iss. 1. – P. 70-87.

112. Blunt, M.J. Flow in porous media – pore-network models and multiphase flow / M.J. Blunt. // Current Opinion in Colloid & Interface Science. – 2001. – Vol. 6,  $N_{2}$  3. – P. 197-207.

113. Blunt, M.J. Physically-based network modeling of multiphase flow in intermediate-wet porous media / M.J. Blunt. // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 1998. – Vol. 20, Iss. 3-4. – P. 117-125.

114. Blunt, M.J. Pore level modeling of the effects of wettability / M.J. Blunt. // SPE Journal. – 1997. – Vol. 2, Iss. 4. – P. 494-510.

115. Blunt, M.J. Pore-scale imaging and modelling / M.J. Blunt, B. Bijeljic, H. Dong, O. Gharbi, S. Iglauer, P. Mostaghimi, A. Paluszny, C. Pentland. // Advances in Water Resources. – 2013. – Vol. 51. – P. 197-216.

116. Blunt, M. Macroscopic Parameters from Simulations of Pore Scale Flow /M. Blunt, P. King. // Physical Review A. – 1990. – Vol. 42. – P. 4780-4787.

117. Blunt, M.J. Pore space reconstruction using multiple-point statistics / M.J. Blunt, H. Okabe. // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2005. – Vol. 46. – P. 121-137.

118. Buckley, J.S. Wetting alteration by brine and crude oil: from contact angles to cores / J.S. Buckley, C. Bousseau, Y. Liu. // SPE Journal. – 1996. – Vol. 1, Iss. 3. – P. 341-350.

119. Chareyre, B. Pore-scale modeling of viscous flow and induced forces in dense sphere packings / B. Chareyre, A. Cortis, E. Catalano, E. Barthelemy. // Transport in Porous Media. – 2012. – Vol. 92, Iss. 2. – P. 473-493.

120. Cnudde, V. High-resolution X-ray computed tomography in geosciences: a review of the current technology and applications / V. Cnudde, M.N. Boone. // Earth Science Reviews. – 2013. – Vol. 123. – P. 1-17.

121. Coenen, J. Measurement parameters and resolution aspects of micro X-ray tomography for advanced core analysis / J. Coenen, E. Tchouparova, X. Jing. // International Symposium of the Society of Core Analysts. – Abu Dhabi, UAE, 2004. – P. 1-14.

122. Constantinides, G.N. A three dimensional network model for consolidated porous media. Basic studies / G.N. Constantinides, A.C. Payatakes. // Chem. Eng. Comm. – 1989. – Vol. 81. – P. 55-81.

123. Carneiro, J.F. Numerical simulations on the influence of matrix diffusion to carbon sequestration in double porosity fissured aquifers / J.F. Carneiro. // International Journal of Greenhouse Gas Control. – 2009. – Vol. 3, Iss. 4. – P. 431–443.

124. Craig, F.F. The Reservoir Engineering Aspects of Waterflooding / F.F. Craig. – ASM International, 1993. – 134 p.

125. Danilaev, P.G. Coefficient Inverse Problems for Parabolic Type Equations and Their Application / P.G. Danilaev. – Berlin: de Gruyter, 2014. – 129 p.

126. Dong, H. Micro-CT imaging and pore network extraction [Текст]: PhD dissertation / Dong Hu. – London, Imperial College, 2007. – 217 p.

127. Dorodnitsyn, V. Finite difference models entirely inheriting continuous symmetry of original differential equations / V. Dorodnitsyn. // International Journal of Modern Physics C (Physics and Computers). – 1994. – Vol. 5,  $N_{2}$  4. – P. 723-734.

128. Dorodnitsyn, V. The whole set of symmetry preserving discrete versions of a heat transfer equation with a source / V. Dorodnitsyn, R. Kozlov. – NTNU, Trondheim, Norway. – 1997. – 41 p. – (preprint NUMERICS-97-4).

129. Dorodnitsyn, V. Conservation laws for difference equations / V. Dorodnitsyn. // Modern Group Analysis. Proceedings of International Conference at Sophus Lie Center. – Nordfjordeid, Norway, 1999. – P. 91-98.

130. Dorodnitsyn, V. Lie group classification of second-order ordinary difference equations / V. Dorodnitsyn, R. Kozlov, P. Winternitz. // J. Math. Phys. – 2000. - Vol. 41, No 1. - P. 480-504.

131. Dorodnitsyn, V. Applications of Lie Groups to Difference Equations / V. Dorodnitsyn. – Taylor and Francis Group: Boca Raton, FL, USA, 2011. – 344 p.

132. Douglas, J. The application of stability analysis in the numerical solution of quasi-linear parabolic differential equations / J. Douglas. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – Vol. 89. – P. 484-518.

133. Efendiev, Y.R., Durlofsky, L.J. Accurate Subgrid Models for Two-Phase Flow in Heterogeneous Reservoirs // SPE Reservoir Simulation Symposium. – Houston, Texas, USA, 2003. 134. Gibrata, M. Pore scale modeling and its advantage for enhanced oil recovery of near miscible three-phase flow WAG flooding in carbonate reservoirs / M. Gibrata, R. van Dijke, S. Geiger-Boschung. // International Petroleum Technology Conference. – Richardson, Texas, USA, 2014. – Vol. 1. – P. 1-24.

135. Gomez-Ullate, D. Symmetries of discrete dynamical systems involving two species / D. Gomez-Ullate, S. Lafortune, P. Winternitz. // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40,  $N^{\circ}$  6. – P. 2782-2804.

136. Gunstensen, A.K. Lattice-Boltzmann studies of immiscible two-phase flow through porous media / A.K. Gunstensen, D.H. Rothman. // J. Geophys. Res. – 1993. – Vol. 98, Iss. B4. – P. 6431–6441.

137. Helland, J.O. Three-Phase Mixed-Wet Capillary Pressure Curves From A Bundle-Of-Triangular-Tubes Model [Электронный ресурс] / J.O. Helland, S.M. Skjæveland. // Режим доступа: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?do i=10.1.1.529.5874&rep=rep1&type=pdf, свободный.

138. Hirt, C.W. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries / C.W. Hirt, B.D. Nichols. // J. Comput. Phys. – 1981. – Vol. 39, Iss. 1. – P. 201-225.

139. Hojjat, N. A New Approach for Constructing Pore Network Model of Two Phase Flow in Porous Media / N. Hojjat, B.B. Ramin, J. Saeid, P.M. Reza. // Iran. J. Chem. Chem. Eng. – 2009. – Vol. 28, No. 4. – P. 37-50.

140. Hornung, U. Homogenization and Porous Media / Editor: U. Hornung. – New York: Springer, 1997. – 279 p.

141. Hydon, P.E. Symmetry analysis of initial-value problems / P.E. Hydon. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2005. – Vol. 309, Iss. 1. – P. 103-116.

142. Idowu, N.A. Pore-Scale Modeling: Stochastic Network Generation and Modeling of Rate Effects in Waterflooding [Текст]: PhD dissertation / Idowu Nasiru Abiodun. – London, Imperial College, 2009. – 157 p.

143. Jamshidi, S. Application of GA in optimization of pore network models generated by multi-cellular growth algorithms / S. Jamshidi, R.B. Boozarjomehry, M.R. Pishvaie. // Advances in Water Resources. – 2009. – Vol. 32. – P. 1543-1553.

144. Jerauld, G.R. Percolation and Conduction on Voronoi and Triangular Networks – a Case-Study in Topological Disorder / G.R. Jerauld, J.C. Hatfield, L.E. Scriven, H.T. Davis. // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 1984. – Vol. 17. – P. 1519-1529.

145. Jiang, Z. Stochastic Pore Network Generation from 3D Rock Images / Z. Jiang, M.I.J. van Dijke, K. Wu, G.D. Couples, K.S. Sorbie, J. Ma. // Transport in Porous Media. – 2012. – Vol. 94, Iss. 2. – P. 571-593.

146. Jiang, Z. Efficient extraction of networks from three-dimensional porous media / Z. Jiang, K. Wu, G. Couples, M.I.J. van Dijke, K.S. Sorbie, J. Ma. // Water Resour. Res. – 2007. – Vol. 43, Iss. 12. – P. 1-17.

147. Jivkov, A.P. A novel architecture for pore network modelling with applications to permeability of porous media / A.P. Jivkov, C. Hollis, F. Etiese, S.A. McDonald, P.J. Withers. // Journal of Hydrology. – 2013. – Vol. 486. – P. 246-258.

148. Joekar-Niasar, V. Analysis of fundamentals of two-phase flow in porous media using dynamic pore-network models: a review / V. Joekar-Niasar, S.M. Hassanizadeh. // J. Crit. Rev Environ. Sci. Technol. – 2012. – Vol. 12, Iss. 18. – P. 1895-1976.

149. Joekar-Niasar, V. Pore-scale modeling of multiphase flow and transport: achievements and perspectives / V. Joekar-Niasar, R. van Dijke, S.M. Hassanizadeh. // Transport in Porous Media. – 2012. – Vol. 94, Iss. 2. – P. 461-464.

150. Juri, J.E. Inversion of lattice network structure subjected to carbonate mercury intrusion capillary pressure: Hamiltonian Monte Carlo posterior sampling / J.E. Juri, M.I.J. Van Dijke, K.S. Sorbie. // Transport in Porous Media. – 2015. – Vol. 106, Iss. 1. – P. 73-106.

151. Kadet, V.V. Percolation model of relative permeability hysteresis / V.V. Kadet, A.M. Galechyan. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. -2013. - Vol. 54, No 3. - P. 423-432.

152. Kennedy, J. Particle swarm optimization / J. Kennedy, R.C. Eberhart. // Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. – Piscataway, NJ, USA, 1995. – P. 1942-1948.

153. Khabirov, S.V. Classification of three-dimensional Lie algebras in  $\mathbb{R}^3$  and their second-order differential invariants / S.V. Khabirov. // Lobachevskii Journal of Mathematics: MAIK Nauka. – 2010. – Vol. 31, No 2. – P. 152-156.

154. Kikkinides, E.S. Structural and flow properties of binary media generated by fractional Brownian motion models / E.S. Kikkinides, V.N. Burganos. // Physical Review E. – 1999. – Vol. 59,  $N_{0}$  6. – P. 7185-7194.

155. Klinkenberg, L.J. The permeability of Porous media to Liquids and Gases / L.J. Klinkenberg. // Drill. and Prod. Prac., API. – 1941. – P. 200-213.

156. Kløv, T. Pore-to-Field Scale Modeling of WAG / T. Kløv, P.E. Øren, J.A. Stensen, T.R. Lerdahl, L.I. Berge, S. Bakke, T. Boassen, G. Virnovsky // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. – Denver, Colorado, 2003. – P. 1-12.

157. Kozeny, J. Ueber kapillare Leitung des Wassers im Boden / J. Kozeny. // Sitzungsber Akad. Wiss. – 1927. – Vol. 136(2a). – P. 271-306.

158. Kunz, P. Study of Multi-phase Flow in Porous Media: Comparison of SPH Simulations with Micro-model Experiments / P. Kunz, I.M. Zarikos,

N.K. Karadimitriou, M. Huber, U. Nieken, S.M. Hassanizadeh. // Transport in Porous Media. – 2016. – Vol. 114, Iss. 2. – P. 581-600.

159. Lenormand, R. Mechanisms of the displacement of one fluid by another in a network of capillary ducts / R. Lenormand, C. Zarcone, A. Sarr. // Journal of Fluid Mechanics. – 1983. – Vol. 135(OCT). – P. 337-353.

160. Lerdahl, T.R. Pore- to Field Scale Multi-Phase Upscaling for IOR / T.R. Lerdahl, A.B. Rustad, T.G. Theting, J.A. Stensen, P.E. Øren, S. Bakke, T. Boassen, B. Palatnik. // SPE Europec/EAGE Annual Conference. – Madrid, Spain, 2005. – P. 1-11.

161. Levi, D. Continuous Symmetries of Equations on Lattices / D. Levi, S. Tremblay, P. Winternitz. // Czechoslovak Journal of Physics. – 2001. – Vol. 51, Iss. 4. – P. 349-356.

162. Levi, D. Continuous symmetries for discrete equations / D. Levi, P. Winternitz. // Physics Letters A. – 1991. – Vol. 152, № 7. – P. 335–338.

163. Levi, D. Symmetries of discrete dynamical systems / D. Levi, P. Winternitz. // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37, № 11. – P. 5551-5576.

164. Lie, S. Vorlesungen uber Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen / S. Lie. – Leipzig: Teubner, 1891. – 568 p.

165. Lindquist, W.B. Medial axis analysis of void structure in three-dimensional tomographic images of porous media / W.B. Lindquist, S.M. Lee, D.A. Coker, K.W. Jones, P. Spanne. // J. Geophys. Res. Solid Earth. – 1996. – Vol. 101, Iss. B4. – P. 8297–8310.

166. Lohne, A. Two-Stage Upscaling of Two-Phase Flow: From Core to Simulation Scale / A. Lohne, G.A. Virnovsky, L.J. Durlofsky. // SPE Journal. – 2006. – Vol. 11, Iss. 3. – P. 304-316.

167. Lopez, X. Pore-Scale Modelling of Non-Newtonian Flow [Текст]: PhD dissertation / Lopez Xavier. – London, Imperial College, 2004. – 161 p.

168. Ma, J. A multi-scale framework for digital core analysis of gas shale at millimeter scales / J. Ma, G.D. Couples, Z. Jiang, M.I.J. Van Dijke. // SPE/AAPG/SEG Unconventional Resources Technology Conference. – Denver, Colorado, USA. – 2014. – P. 1-8.

169. Ma, J. Predicting the effective gas flow properties of gas shale, from nanopores to shale parasequences / J. Ma, G.D. Couples, Z. Jiang, R. van Dijke. // Unconventional Resources Technology Conference. – Denver, Colorado, USA, 2013. – P. 1-8.

170. Ma, J. A pore network model for simulating non-ideal gas flow in microand nano-porous materials / J. Ma, J.P. Sanchez, K. Wu, G.D. Couples, Z. Jiang. // Fuel. – 2014. – Vol. 116. – P. 498-508. 171. Maeda, S. Canonical structure and symmetries for discrete systems / S. Maeda. // Math. Japonica. – 1980. – Vol. 25. – P. 405-420.

172. Maeda, S. The similarity method for difference equations / S. Maeda. // IMA J. Appl. Math. – 1987. – Vol. 38,  $N_{2}$  2. – P. 129-134.

173. Maier, C. Multi-scale pore-network modelling of WAG in carbonates / C. Maier, Z. Jiang, A. Al-Dhahli, M.I.J. van Dijke, S. Geiger-Boschung, G.D. Couples, J. Ma. // 17th European Symposium on Improved Oil Recovery. – St. Petersburg, Russia, 2013. – P. 1-5.

174. Markov, P.V. Upscaling of phase permeability in hydrodynamic models [Электронный ресурс] / P.V. Markov. // Language and Science, Tyumen state university. - 2013. - Vol. 2. - Режим доступа: https://lands.utmn.ru/upload/iblock/d64/ Марков.pdf, свободный.

175. Markov, P.V. Multistage Upscaling Of Multiphase Flow in Porous Media [Электронный pecypc] / P.V. Markov. // Abstracts of Edinburgh SIAM Student Chapter Student Conference, Heriot-Watt University. – 2014. – Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/337032427\_Multistage\_Upscaling\_Of\_Multi phase\_Flow\_in\_Porous\_Media, свободный.

176. Markov, P.V. Upscaling of theoretical models and experimental data for multiphase flow in porous media [Электронный ресурс] / P.V. Markov. // 7th annual Oxford SIAM Student Conference, Oxford University. – 2015. – Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/337031846\_Upscaling\_of\_theoretical\_models \_and\_experimental\_data\_for\_multiphase\_flow\_in\_porous\_media, свободный.

177. Markov, P.V. The relative permeability regions assignment on the basis of pore network models parameters distributions / P.V. Markov. // Saint Petersburg 2016 International Conference & Exhibition. – Saint Petersburg, Russia, 2016. – P. 1-5.

178. Markov, P.V. The Method of Fast Numerical Solutions Calculations for Seepage Equations Using Continuous Groups of Symmetries / P.V. Markov, S.P. Rodionov. // Materials of International Conference «Mathematical and Information Technologies, MIT-2016». – Vrnjacka Banja, Serbia; Budva, Montenegro, 2016. – P. 143-144.

179. Markov P.V. Group classification applications for analysis of discrete models of flow in porous media / P.V. Markov. // Journal of Physics: Conference Series. -2017. - Vol. 894, No 1. - P. 1-7.

180. Markov, P.V. Rock Typing on the Basis of Pore-scale Models and Complex Well Log Interpretation Parameters. / P.V. Markov, S.P. Rodionov. // International Conference & Exhibition «Tyumen», EAGE. – Tyumen, Russia, 2017. – P. 1-5.

181. Markov, P. Numerical Simulation Using Finite-Difference Schemes with Continuous Symmetries for Processes of Gas Flow in Porous Media. / P. Markov, S. Rodionov // Computation. – 2019. – Vol. 7(3). – P. 1-18.

182. Martins, A.A. Modeling of transport phenomena in porous media using network models [Электронный ресурс] / A.A. Martins, P.E. Laranjeira, C.H. Braga, T.M. Mata. // Режим доступа: https://mafiadoc.com/modeling-of-transport-phenomena-in-porous-media-using-network-\_5bb76257097c47ce1d8b479f.html, свободный.

183. Mason, G. Capillary behavior of a perfectly wetting liquid in irregular triangular tubes / G. Mason, N.R. Morrow. // Journal of Colloid and Interface Science. -1991. - Vol. 141, No 1. - P. 262-274.

184. Meakin, P. Modeling and simulation of pore-scale multiphase fluid flow and reactive transport in fractured and porous media / P. Meakin, A.M. Tartakovsky. // Rev. Geophys. – 2009. – Vol. 47, Iss. 3. – P. 1-47.

185. Mohamed, L. Reservoir Model History Matching with Particle Swarms: Variants Study / L. Mohamed, M.A. Christie, V. Demyanov. // SPE Oil and Gas India Conference and Exhibition – Mumbai, India, 2010. – P. 1-15.

186. Mohamed, L. Comparison of Stochastic Sampling Algorithms for Uncertainty Quantification / L. Mohamed, M.A. Christie, V. Demyanov. // SPE Journal. – 2010. – Vol. 15, Iss. 1. – P. 1-12.

187. Mohamed, L. Application of particle swarms for history matching in the Brugge reservoir / L. Mohamed, M. Christie, V. Demyanov, E. Robert, D. Kachuma. // SPE Annual Technical Conference and Exhibition 2010, ATCE 2010. – Vol. 6. – P. 4477-4492.

188. Moritz, B. Finding Lie groups that reduce the order of discrete dynamical systems / B. Moritz, W. Schwalm, D. Uherka. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – Vol. 31,  $N_{2}$  36. – P. 7379-7402.

189. Morrow, N.R. Effects of surface roughness on contact angle with special reference to petroleum recovery / N.R. Morrow. // Journal of Canadian Petroleum Technology. – 1975. – Vol. 14, Iss. 4. – P. 42-53.

190. Morrow, N.R. Effect of Crude-Oil-Induced Wettability Changes on Oil Recovery / N.R. Morrow, H.T. Lim, J.S. Ward. // SPE Formation Evaluation. – 1986. – Vol. 1, Iss. 1. – P. 89-103.

191. Nadjafikhah M. Classification of Similarity Solutions for Inviscid Burgers' Equation / M. Nadjafikhah. // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2010. – Vol. 20, Iss. 1. – P. 71–77.

192. Nordhaug, H.F. A pore network model for calculation of interfacial velocities / H.F. Nordhaug, M. Celia, H.K. Dahle. // Advances in Water Resources. – 2003. – Vol. 26. – P. 1061-1074.

193. Okabe, H. Pore-scale modeling of carbonates [Текст]: PhD dissertation / Okabe Hiroshi. – London, Imperial College, 2004. – 142 p.

194. Okabe, H. Pore space reconstruction using multiple-point statistics / H. Okabe, M.J. Blunt. // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2005. – Vol. 46. – P. 121–137.

195. Øren, P.E. Extending predictive capabilities to network models / P.E. Øren, S. Bakke, O.J. Arntzen. // SPE Journal. – 1998. – Vol. 3, Iss. 4. – P. 324-336.

196. Oron, A. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations / A. Oron, P. Rosenau. // Physics Letters A. – 1986. – Vol. 118, № 4. – P. 172-176.

197. Osher, S. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces / S. Osher, R. Fedkiw. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 273 p.

198. Pan, C. Lattice-Boltzmann simulation of two-phase flow in porous media / C. Pan, M. Hilpert, C.T. Miller. // Water Resour. Res. -2004. - Vol. 40, No 1. - P. 1-14.

199. Patzek, T.W. Shape factor and hydraulic conductance in noncircular capillaries I. One-phase creeping flow / T.W. Patzek, D.B. Silin. // Journal of Colloid and Interface Science. – 2001. – Vol. 236. – P. 295-304.

200. Piri, M. Three-dimensional mixed-wet random pore-scale network modeling of two- and three-phase flow in porous media. I. Model description / M. Piri, M.J. Blunt. // Physical Review E. – 2005. – Vol. 71, Iss. 2. – P. 1-11.

201. Polyanin, A.D. Handbook of nonlinear partial differential equations / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004. – xx+814 p.

202. Pore-Scale Network Model User Manual [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://www.imperial.ac.uk/earth-science/research/researchgroups/perm/research/pore-scale-modelling/software/two-phase-network-modellingcode/, свободный

203. Prodanović, M. A level set method for determining critical curvatures for drainage and imbibition / M. Prodanović, S.L. Bryant. // J. Colloid Interface Sci. – 2006. – Vol. 304. – P. 442-458.

204. Rodriguez, M.A. Lie symmetries and exact solutions of first-order difference schemes / M.A. Rodriguez, P. Winternitz. // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – Vol. 37. – P. 6129-6142.

205. Raeini, A.Q. Modelling two-phase flow in porous media at the pore scale using the volume-of-fluid method / A.Q. Raeini, M.J. Blunt, B. Bijeljic. // Journal of Computational Physics. – 2012. – Vol. 231. – P. 5653-5668.

206. Raoof, A. A New Method for Generating Pore-Network Models of Porous Media / A. Raoof, S. M. Hassanizadeh. // Transp. Porous. Med. – 2010. – Vol. 81 – P. 391-407.
207. Rapoport, L.A. Properties of linear waterfloods / L.A. Rapoport, W.J. Leas. // Journal of Petroleum Technology. – 1953. – Vol. 5, Iss. 5. – P. 139-148.

208. Rhodes, M.E. A Rigorous Pore-to-Field-Scale Simulation Method for Single-Phase Flow Based on Continuous-Time Random Walks / M.E. Rhodes, B. Bijeljic, M.J. Blunt. // SPE Journal. – 2009. – Vol. 14. – P. 88-94.

209. Rushing, J.A. Rock Typing – Keys to Understanding Productivity in Tight Gas Sands / J.A. Rushing, K.E. Newsham, T.A. Blasingame. // SPE Unconventional Reservoirs Conference. – Keystone, Colorado, USA, 2008. – P. 1-31.

210. Ryazanov, A.V. Pore-Scale Network Modelling of Residual Oil Saturation in Mixed-Wet Systems [Текст]: PhD dissertation / Ryazanov Andrey. – Heriot-Watt University, Institute of Petroleum Engineering, Edinburgh, 2012. – 173 p.

211. Ryazanov, A.V. Prediction of residual oil saturation in mixed-wet networks using accurate pore shape descriptors / A.V. Ryazanov, M.I.J. Van Dijke, K.S. Sorbie. // Computational Methods in Water Resources XVIII International Conference. – Barcelona, Spain, 2010. – P. 1-9.

212. Sahimi, M. Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock / M. Sahimi. – Weinheim: Wiley-VCH, 1995. – 719 p.

213. Shabro, V. Finite-Difference Approximation for Fluid-Flow Simulation and Calculation of Permeability in Porous Media / V. Shabro, C. Torres-Verdín, F. Javadpour, K. Sepehrnoori. // Transport in Porous Media. – 2012. – Vol. 94, Iss. 3. – P. 775-793.

214. Shandrygin, A.N. Digital Core Analysis for Flow Process Evaluation Is Myth or Reality? / A.N. Shandrygin. // SPE Russian Oil and Gas Exploration and Production Technical Conference and Exhibition. – Moscow, Russia, 2014. – P. 1-10.

215. Sharqawy, M.H. Construction of Pore Network Models for Berea and Fontainebleau Sandstones Using Non-Linear Programing and Optimization Techniques / M.H. Sharqawy. // Advances in Water Resources. – 2016. – Vol. 98. – P. 198-210.

216. Silin, D.B. Robust Determination of the Pore Space Morphology in Sedimentary Rocks / D.B. Silin, G. Jin, T.W. Patzek. // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. – Denver, Colorado, USA, 2003. – P. 1-15.

217. Sinha, P.K. Pore-network modeling of liquid water transport in gas diffusion layer of a polymer electrolyte fuel cell / P.K. Sinha, C.-Y. Wang. // Electrochimica Acta. – 2007. – Vol. 52. – P. 7936-7945.

218. Slichter, C.S. Theoretical investigations of the motion of ground waters / C.S. Slichter. // 19-th Am. Rep. U. S. Geol Survey. – 1899. – №. 2. – P. 295-384.

219. Sochi T. Pore-Scale Modeling of Non-Newtonian Flow in Porous Media [Текст]: PhD dissertation / Sochi Taha. – London, Imperial College, 2010. – 188 p. 220. Strikwerda, J.C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations / J.C. Strikwerda. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. – 448 p.

221. Stukan, M.R. Molecular Dynamics Simulation of Spontaneous Imbibition in Nanopores and Recovery of Asphaltenic Crude Oils Using Surfactants for EOR Applications / M.R. Stukan, P. Ligneul, E.S. Boek. // Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies Nouvelles – 2012. – Vol. 67, No 5 – P. 737-742.

222. Sun, T. Upscaling and Multiscale Simulation by Bridging Pore Scale and Continuum Scale Models [Текст]: PhD dissertation / Sun Tie. – Austin, The University of Texas, 2012. – 150 p.

223. Tartakovsky, A.M. Pore scale modeling of immiscible and miscible fluid flows using smoothed particle hydrodynamics / A.M. Tartakovsky, P. Meakin. // Advances in Water Resources. – 2006. – Vol. 29, Iss. 10. – P. 1464–1478.

224. Theting, T.G. Pore-to-field multi-phase upscaling for a depressurization process / T.G. Theting, A.B. Rustad, T.R. Lerdahl, J.A. Stensen, T. Boassen, P.-E. Øren, S. Bakke, P. Ringrose. // The 13th European Symposium on Improved Oil Recovery – Budapest, Hungary, 2005. – P. 1-5.

225. Valvatne, P.H. Predictive Pore-Scale Modelling of Multiphase Flow [Текст]: PhD dissertation / Valvatne Per Henrik. – London, Imperial College, 2003. – 146 p.

226. Valvatne, P.H. Predictive pore-scale modeling of two-phase flow in mixed wet media / P.H. Valvatne, M.J. Blunt. // Water Resour. Res. – 2004. – Vol. 40, Iss. 7. – P. 1-21.

227. Van Dijke, M.I.J. Existence of fluid layers in the corners of a capillary with non-uniform wettability / M.I.J. Van Dijke, K.S. Sorbie. // J. Coll. Int. Sci. – 2006. – Vol. 293, No 2. – P. 455-463.

228. Wildenborg, T. Introduction on  $CO_2$  Geological Storage. Classification of Storage Options. Oil & Gas Science and Technology / T. Wildenborg, A. Lokhorst. // Rev. IFP. – 2005. – Vol. 60, No 3. – P. 513-515.

229. Wilkinson, D. Invasion percolation: a new form of percolation theory / D. Wilkinson, J.F. Willemsen. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1983. – Vol. 16,  $N_{2}$  14. – P. 3365-3376.

230. Winternitz, P. Symmetries of Discrete Systems [Электронный ресурс] / P. Winternitz. // E-print service arXiv. – 2003. – Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/nlin/0309058v1.pdf, свободный.

231. Wu, K. 3D Stochastic Modelling of Heterogeneous Porous Media – Applications to Reservoir Rocks / K. Wu, M.I.J. Van Dijke, G.D. Couples, Z. Jiang, J. Ma and others. // Transport in Porous Media. – 2006. – Vol. 65, Iss. 3. – P. 443-467.

232. Xiong, Q. Review of pore network modelling of porous media: Experimental characterisations, network constructions and applications to reactive transport / Q. Xiong, T.G. Baychev, A.P. Jivkov. // Journal of Contaminant Hydrology. – 2016. – Vol. 192. – P. 101–117.

233. Yiotis, A.G. Pore-Network Modeling of Isothermal Drying in Porous Media / A.G. Yiotis, A.K. Stubos, A.G. Boudouvis, I.N. Tsimpanogiannis, Y.C. Yortsos. // Transport in Porous Media. – 2005. – Vol. 58. – P. 63–86.

234. Zhang, P. Micro/Nano-pore Network Analysis of Gas Flow in Shale Matrix / P. Zhang, L. Hu, J.N. Meegoda, S. Gao. // Sci Rep. – 2015. – Vol. 5. – P. 1-11.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Данное приложение кратко описывает программный комплекс «Моделирование на микромасштабе пористой среды «PoroScale», для которого было получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2016663800. Ниже на Рисунке А.1 представлены примеры схем взаимодействия программ данного комплекса:

- Трехмерный визуализатор моделей поровых сетей (разработан на языке С#).
- Стохастический генератор моделей поровых сетей (разработан на языке С#).
- Симулятор для моделирования многофазного течения в моделях поровых сетей – алгоритмы, разработанные специалистами из Imperial College of London и Heriot-Watt University. Может быть использован любой подобный симулятор.
- Адаптация (решение обратных задач) моделей поровых сетей с помощью метода роя частиц (разработан на языке C#).
- Корреляция моделей поровых сетей с результатами интерпретации ГИС (разработан на языке C#) для выделения регионов пластов.
- Размножение численных решений для уравнений фильтрации газа и Рапопорта-Лиса с помощью преобразований непрерывных групп симметрии (разработан в СКМ Matlab), также может быть использован любой промышленный гидродинамический симулятор (Eclipse, tNavigator, Tempest и др.).



Рисунок А.1 - Пример схемы взаимодействия программ разработанного комплекса

Интерфейс программы трехмерной визуализации моделей поровых сетей изображен на Рисунке А.2. Для отображения модель поровой сети должна быть загружена в виде текстовых файлов, которые описываются в пункте 4.3.1. Также с помощью разработанных программ визуализации были получены Рисунок 4.1, Рисунок 4.2 и Рисунок 4.4.



Рисунок А.2 - Интерфейсное окно программы трехмерной визуализации

Программа генерации моделей поровых сетей изображена на Рисунке А.3 в процессе генерации стохастической модели поровой сети. Программа адаптации моделей поровых сетей изображена на Рисунке А.3 в процессе решения обратной

задачи. Основой для данных программ служат методы, представленные в параграфах 5.3. и 5.4. соответственно. Блок-схема взаимодействия программ генерации, адаптации и моделирования течения в моделях поровых сетей приводит выше Рисунок 5.5. Для расчетов в обеих программах все настройки записываются в текстовые файлы, а сами программы запускаются в тех же папках, что и эти файлы. В процессе расчетов выводится текущий этап расчета и соответствующая этому этапу информация.



Рисунок А.3 - Окно программы генерации (слева) и программы адаптации (справа) для моделей поровых сетей

Интерфейс программы выделения классов моделей поровых сетей и их корреляции с РИГИС для выделения регионов изображен на Рисунке А.4. Данная программа основывается на методе, который описан в параграфе 5.2. Вначале в окне слева (Рисунок А.4) выбираются загруженные скважины, образцы керна, параметр моделей поровых сетей, параметр РИГИС. Далее в окне справа (Рисунок А.4) рассчитывается матрица смежности для связей подобия моделей, выделяются классы моделей и регионы.

Интерфейс программы генерации численных решений дифференциальных уравнений с помощью непрерывных групп симметрий изображен на Рисунке А.5 на примере уравнения Рапопорта-Лиса (пункт 3.3.3. данной диссертации). Метод, послуживший основой для данной программы, описывается в параграфе 3.1. Выбор типа уравнений, параметров расчетов (шаги, границы модели и т.д.) и генерируемых решений происходит в одном из m-файлов, который запускается в CKM Matlab, и далее происходит расчет и визуализация полученных решений.



Рисунок А.4 - Интерфейс программы выделения классов моделей поровых сетей и корреляции с РИГИС (слева – окно выбора исходных данных, справа – результаты работы программы в виде выделенных классов)



Рисунок А.5 - Программа получения численных решений с помощью непрерывных групп симметрий в процессе решения и отображения результатов для уравнения Рапопорта-Лиса





Рисунок В.1 - Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

188





Общество с ограниченной ответственностью «МикроМоделлинг Софтваре» (ООО «МикроМодел»)

Луговая ул., д. 4, корпус 5, офис 20, Москва, Территория инновационного центра Сколково, 143026 Телефон: +7 (906) 827-16-26 (мобильный), website: <u>http://www.micromodelsoft.com</u> ОКПО 01737381, ОГРН 1167746340233, ИНН/КПП 7731312953/773101001

от «<u>01</u>» *Марта* 20/7 г.

## АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов научно-исследовательских работ

Настоящим актом подтверждаем, что результаты диссертационного исследования в области поромасштабного моделирования процессов фильтрации, выполненные в период 2014-2016 гг. сотрудником ООО «МикроМодел» Марковым Павлом Владимировичем, внедрены в практику производственной деятельности ООО «МикроМодел».

**Вид внедренных результатов:** программно реализованные методы математического моделирования процессов фильтрации на масштабе пор и их ремасштабирование на масштаб нефтегазовых месторождений.

Характеристика масштаба внедрения: разработанные программы генерации моделей поровых сетей, решения обратных задач для моделей поровых сетей и их ремасштабирования на масштаб нефтегазоносных пластов стали основой программного комплекса моделирования процессов фильтрации на микромасштабе пористой среды «PoroScale».

Характеристика эффекта от внедрения: обоснование фильтрационных характеристик нефтегазовых месторождений в условиях недостаточного количества данных и с учетом микроструктуры пористой среды.

Директор по науке ООО «МикроМодел», доктор физико-математических наук

000 "МикроМодел

Родионов С.П.

Рисунок В.2 - Акт внедрения



Общество с ограниченной ответственностью «ЮНИ-КОНКОРД» (ООО «ЮНИ-КОНКОРД»)

Семакова ул., д. 10, г.Тюмень, 625003 Тел: +7(905)705-43-84, website: http://ccord.ru, e-mail: pichuginon@ccord.ru ОГРН 1107232025262, ИНН/КПП 7202209880/720301001

от «<u>/6</u>»<u>иарта</u>20<u>17</u>г.

## СПРАВКА

## об использовании результатов научно-исследовательских работ

Настоящей справкой подтверждаем, что результаты научно-исследовательской работы «Исследование и применение дискретных моделей фильтрации на различных масштабах пористой среды» выполненной сотрудником ООО «ЮНИ-КОНКОРД» Марковым Павлом Владимировичем используются в практике производственной деятельности ООО «ЮНИ-КОНКОРД».

Полученные результаты позволяют с помощью моделирования многофазного течения на микромасштабе пористой среды обосновывать фильтрационные характеристики при гидродинамическом моделировании, связанным с проектированием разработки нефтегазовых месторождений: относительная фазовая проницаемость, капиллярное давление, абсолютная проницаемость, критические насыщенности, коэффициент вытеснения.

Разработанные Марковым П.В. методы и программы планируются к внедрению в программный комплекс «Конкорд», пользователями которого является ряд нефтегазодобывающих компаний.

Генеральный директор ООО «ЮНИ-КОНКОРД», кандидат физико-математических наук

«ЮНИ-КОНКОРД

Пичугин О.Н.

Рисунок В.3 - Справка об использовании