

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ  
ИНСТИТУТ НЕФТЕГАЗОВОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ  
ИМ. А.А. ТРОФИМУКА СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ  
АКАДЕМИИ НАУК

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

*На правах рукописи*

**Марков Сергей Игоревич**

**ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНЫХ И НЕКОНФОРМНЫХ  
МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ДЛЯ МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА  
ФИЛЬТРАЦИИ В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –  
д.т.н., профессор ШУРИНА Э.П.

Новосибирск – 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1 ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ В ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЕ .....	11
1.1 Процесс фильтрации флюида в геофизических приложениях.....	11
1.2 Постановка задачи фильтрации флюида .....	14
1.3 Математические модели процесса фильтрации.....	15
1.4 Иерархия математических моделей процесса фильтрации .....	18
1.5 Определение эффективного тензора проницаемости.....	20
1.6 Методы дискретизации моделей фильтрации.....	26
ГЛАВА 2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ .....	35
2.1 Функциональные пространства .....	35
2.2 Базисы конечноэлементных пространств.....	39
2.3 МКЭ-дискретизация микромасштабной модели фильтрации.....	44
2.3.1 Вариационная формулировка МКЭ для системы уравнений Навье- Стокса для несжимаемой жидкости .....	46
2.3.2 Условие Ладыженской-Бабушки-Бреци .....	48
2.3.3 Элементы, удовлетворяющие ЛББ условию .....	48
2.3.4 Вариационная формулировка стабилизированного МКЭ для системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости.....	49
2.3.5 Вариационная формулировка разрывного метода Галёркина для системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости.....	51
2.3.6 Линеаризация системы уравнений Навье-Стокса.....	53
2.3.7 Проекционный метод Chorin-Temam.....	55
2.3.8 Метод алгебраического расщепления.....	57
2.3.9 Верификация вычислительных схем МКЭ-дискретизации микромасштабной модели фильтрации .....	58
2.4 Моделирование ламинарных и вихревых течений флюида .....	68
2.5 МКЭ-дискретизация макромасштабной модели фильтрации .....	77
2.5.1 Вариационная формулировка разрывного метода Галёркина для уравнения однофазной фильтрации .....	79
2.5.2 Дискретизация уравнения однофазной фильтрации по времени.....	80
2.5.3 Линеаризация уравнения однофазной фильтрации.....	81

2.5.4	Верификация вычислительных схем МКЭ-дискретизации макромасштабной модели фильтрации .....	81
2.6	МКЭ-дискретизация мезомасштабной модели фильтрации .....	84
2.6.1	Вариационная формулировка разрывного метода Галёркина для системы уравнений Навье-Стокса-Дарси .....	86
2.6.2	Верификация вычислительных схем МКЭ-дискретизации мезомасштабной модели фильтрации.....	89
2.7	Вычисление эффективного тензора проницаемости .....	93
2.7.1	Метод давления: постановка задачи .....	93
2.7.2	Обратная коэффициентная задача: постановка .....	95
2.7.3	Метод Флетчера-Ривса .....	97
2.7.4	Локальный метод Ньютона.....	98
2.7.5	Исследование оператора прямой задачи .....	99
2.7.6	Исследование функции чувствительности и градиента функционала...	102
2.7.7	Верификация метода решения обратной задачи .....	105
2.8	Процесс фильтрации в слоистой среде .....	106
2.9	Процесс фильтрации в пористых средах .....	110
2.10	Сравнение с физическим экспериментом.....	117
ГЛАВА 3 ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС .....		122
3.1	Назначение, системные требования и структура.....	122
3.2	Препроцессор.....	123
3.3	Процессор.....	125
3.4	Постпроцессор .....	126
3.5	Масштабируемость программного комплекса .....	126
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....		129
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....		130
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....		157
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....		163

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования.** Одним из источников информации о транспортно-фильтрационных свойствах породы-коллектора при извлечении нефти является компьютерная обработка результатов исследования кернов. Естественная многомасштабность геологической среды ограничивает возможность применения методов прямого математического моделирования процесса фильтрации флюидов, поэтому необходима процедура укрупнения масштаба. Возникают две основные задачи, которые в настоящее время не имеют решения в общем случае. Первая задача связана с построением и дискретизацией математических моделей, которые устанавливают связь физических моделей процесса фильтрации на разных уровнях иерархии многомасштабной геологической среды. Вторая задача связана с определением допустимых границ применимости изотропной и анизотропной модели проницаемости пласта. Поэтому актуальной проблемой является разработка эффективных вычислительных схем для моделирования процесса фильтрации флюидов на различных уровнях иерархии многомасштабной геологической среды и алгоритма вычисления абсолютной проницаемости породы-коллектора с анизотропными физическими свойствами.

**Объект исследования** – процесс фильтрации флюидов в геологической многомасштабной среде с анизотропной природой проницаемости.

**Предмет исследования** – вычислительные схемы для решения задачи фильтрации флюида в многомасштабной геологической среде, алгоритм вычисления эффективного тензора абсолютной проницаемости породы-коллектора.

**Цель работы** – исследование процесса фильтрации несжимаемой жидкости в многомасштабных гетерогенных средах на базе вычислительных схем метода конечных элементов для трёхмерного математического моделирования.

### **Задачи исследования:**

1. Разработка и реализация в виде программного комплекса вычислительных схем для моделирования процесса течения однофазной несжимаемой жидкости в каверне (канале) с последующим просачиванием в пористую среду.

2. Разработка и реализация в виде программного комплекса алгоритма оценки тензора абсолютной проницаемости трёхмерной гетерогенной среды.

Диссертационная работа отвечает следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ:

1. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.
2. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.
3. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

**Методы исследования.** Используются методы математического моделирования (конформный стабилизированный метод конечных элементов, неконформный разрывный метод Галёркина), методы математического анализа и линейной алгебры, методы оптимизации, вычислительный эксперимент и сравнительный анализ полученных результатов с данными физического эксперимента.

**Защищаемые научные результаты:**

1. Вариационные формулировки стабилизированного метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина для моделирования процесса фильтрации в многомасштабной гетерогенной среде;
2. Алгоритм вычисления эффективного тензора абсолютной проницаемости;
3. Результаты компьютерного моделирования процесса фильтрации в многомасштабной гетерогенной среде: установлено существование порога объёмной пористости гетерогенной среды, при котором возможен переход от анизотропной модели абсолютной проницаемости к изотропной.

**Научная новизна.** Впервые предложена и реализована полунеевная вычислительная схема на базе разрывного метода Галёркина для математического модели-

рования процесса течения флюида в многомасштабной геологической среде. Впервые предложена и реализована вычислительная схема на базе разрывного метода Галёркина в трёхмерной постановке для математического моделирования процесса просачивания флюида в многомасштабной геологической среде. Впервые предложен и реализован алгоритм вычисления полного тензора абсолютной проницаемости второго ранга породы-коллектора на базе метода давления.

**Значимость работы.** Разработанный программный комплекс может быть использован для моделирования процесса фильтрации в многомасштабной геологической среде при проведении гидравлического разрыва пласта и исследовании транспортно-фильтрационных свойств породы-коллектора. Установлены границы применимости анизотропной и изотропной модели проницаемости для слоистых и пористых сред. Разработанная программно-математическая платформа с реализованной высокоэффективной вычислительной схемой для моделирования процесса просачивания жидкости в геологической среде с анизотропной природой проницаемости будет являться конкурентоспособным программным продуктом для проведения исследований недр и природных ресурсов, а также предоставит эффективные средства контроля за рациональной добычей полезных ископаемых в РФ, что является вкладом в развитие технологий, входящих в перечень Стратегий научно-технологического развития Российской Федерации (статья 18\_1 Федерального закона от 28 июня 2014 года N 172-ФЗ “О стратегическом планировании в Российской Федерации”).

Результаты исследования внедрены в проекты ОФИ-М “Многомасштабное, многофизичное моделирование естественных и искусственных электромагнитных полей в задачах наземной и морской геоэлектрики (№ 13-05-12031)”, “Разработка программного комплекса для реализации на современных высокопроизводительных кластерах алгоритмов численного моделирования физических процессов в нефтегазоносных пластах, а именно: гидродинамики в пористых трещиноватых средах; идентификация трещин в гетерогенном флюидонасыщенном межскважинном пространстве электромагнитными методами (№ 16-29-15094)”.

**Личный вклад.** Соискатель принимал решающее участие в работах на всех этапах подготовки диссертации: разработка и верификация вариационных формулировок стабилизированного метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина для моделирования процесса фильтрации в многомасштабной геологической среде, разработка и верификация метода вычисления эффективного тензора абсолютной проницаемости породы-коллектора, реализация программного комплекса на языках C++ и C#, планирование и проведение вычислительных экспериментов, анализ и интерпретация полученных результатов.

**Представление работы.** Результаты исследования докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- Всероссийская конференция молодых учёных “Наука Технологии Инновации”, г. Новосибирск, 2014, 2015, 2016, 2017;
- Всероссийская научная конференция молодых ученых и студентов, посвящённая 80-летию акад. А.Э. Конторовича “Актуальные проблемы геологии нефти и газа Сибири”, г. Новосибирск, 2014;
- VII Всероссийская конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, г. Новосибирск, 2014, 2015;
- Международная конференция “Забабахинские научные чтения”, г. Новосибирск, 2014;
- Городская конференция молодых исследователей “Progress through Innovations”, г. Новосибирск, 2015;
- X Международная научно-техническая конференция “ Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем”, г. Пенза, 2015;
- Российская научно-техническая конференция “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск, 2015;
- International Students Scientific Conference, Novosibirsk, 2015, 2016, 2017;
- XVI Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, г. Красноярск, 2015;

- Международная конференция “Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики”, г. Новосибирск, 2015;
- Научно-практическая конференция “Aspire to Science”, Новосибирск, 2016;
- Международная научно-практическая конференция “Многоядерные процессоры, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сигналов (МППОС)”, г. Барнаул, 2016, 2017;
- Всероссийская конференция “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики”, посвященная памяти К. И. Бабенко, п. Абрау-Дюрсо, 2016, 2018;
- Всероссийская конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова, п. Абрау-Дюрсо, 2016, 2018;
- Международная научно-техническая конференция “Актуальные проблемы электронного приборостроения”, г. Новосибирск, 2016, 2018;
- Международная конференция, посвящённая 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН “Математика в современном мире”, г. Новосибирск, 2017;
- X Всероссийская научная конференция с международным участием “Математическое моделирование и краевые задачи”, г. Самара, 2017;
- Международная конференция “Вычислительная и прикладная математика 2017”, г. Новосибирск, 2017;
- III Всероссийская конференция молодых ученых “Наука и инновации XXI века”, г. Сургут, 2017;
- X Всероссийская научно-техническая конференция “Актуальные вопросы архитектуры и строительства”, г. Новосибирск, 2017;
- Международная конференция “Полярная механика”, г. Санкт-Петербург, 2017, г. Новосибирск, 2018;
- Международная конференция “Марчуковские научные чтения”, г. Новосибирск, 2016, 2018;

- Молодежная научная школа-конференция “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”, г. Новосибирск, 2016, 2017;
- VIII Международная научно-практическая конференция “Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии в научных исследованиях, автоматизации управления и производства (ВВСТ – 2018)”, г. Барнаул, 2018;
- III Всероссийская (XVIII) молодежная научная конференция “Молодежь и наука на Севере”, г. Сыктывкар, 2018;
- Семинар "Информационно-вычислительные технологии", г. Новосибирск, ИВТ СО РАН, 2 октября 2018;
- Объединенный семинар ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ, г. Новосибирск, 30 октября 2018;
- Геофизический семинар ИНГГ СО РАН, г. Новосибирск, 19 ноября 2018.

**Обоснованность и достоверность результатов** подтверждена вычислительными экспериментами при решении задач, приближенных к реальным и имеющих аналитическое решение, при сравнении с данными физических экспериментов.

**Публикации.** Опубликовано 35 печатных работ: 3 статьи в научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК [39, 40, 60]; 6 статей в журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus [39, 60, 157, 174, 189, 190]; 31 публикация в материалах международных и российских конференций; получены 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ (см. Приложение Б).

**Награды и достижения.** Стипендия Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам, осуществляющим перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики, на 2016-2018 годы (приказ № 375, СП-3627.2016.5).

**Структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы (238 наименования) и двух приложений. Работа изложена на 165 страницах и включает 67 рисунков, 38 таблиц.

В первой главе рассмотрена предметная область процесса фильтрации в геологических приложениях, связанных с извлечением нефти (п. 1.1), формулируются

подзадачи, возникающие при многомасштабном моделировании процесса фильтрации в геологической среде (п. 1.2), приведён обзор основных математических моделей процесса фильтрации несжимаемого флюида на различных уровнях иерархии многомасштабной геологической среды (п. 1.3 и 1.4), приведён обзор явных и неявных методов определения эффективного тензора абсолютной проницаемости породы-коллектора (п. 1.5) и методов дискретизации моделей фильтрации (п. 1.6).

Во второй главе приводится верификация и сравнительный анализ вариационных формулировок конформных и неконформных методов конечных элементов для задачи фильтрации флюида в многомасштабной геологической среде (п. 2.3, 2.5 и 2.6) в различных функциональных пространствах (п. 2.1), описаны алгоритмы построения базисных функций в конечномерных функциональных пространствах (п. 2.2), решению задачи фильтрации в многомасштабной геологической среде (п. 2.4, 2.8, 2.9) и решению обратной коэффициентной задачи при вычислении эффективного тензора абсолютной проницаемости породы-коллектора (п. 2.7), показаны границы применимости изотропной и анизотропной моделей проницаемости пласта для слоистых и пористых сред (п. 2.8, 2.9).

В третьей главе приводится описание возможностей, структуры и системных требований разработанного программного комплекса FEM\_2.0 (п. 3.1), показаны особенности реализации и взаимодействия составных частей программного комплекса (п. 3.2, 3.3, 3.4) и его масштабируемость (п. 3.5).

В заключении сформулированы основные результаты исследования.

В приложении А приведены графические изображения функций формы различных функциональных пространств. Приложение Б содержит копии документов, подтверждающие регистрацию разработанного программного комплекса.

Автор выражает благодарность научному руководителю д.т.н., проф. Шуриной Э.П. и доценту кафедры Вычислительных технологий Новосибирского государственного технического университета к.т.н. Иткиной Н.Б за ценные замечания и помощь при подготовке диссертации.

# ГЛАВА 1 ПРОЦЕСС ФИЛЬТРАЦИИ В ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Глава посвящена постановке задачи фильтрации в геофизических приложениях, обзору основных математических моделей процесса фильтрации жидкости для различных уровней иерархии гетерогенной геологической среды, методов построения макроскопической модели процесса фильтрации и вычисления эффективного тензора абсолютной проницаемости гетерогенной среды. Приводится обзор современных численных методов решения задачи фильтрации флюида в геологических средах.

## 1.1 Процесс фильтрации флюида в геофизических приложениях

Фильтрацией называется процесс движения жидкости или газа в пористой или трещиновато-пористой среде. Далее под задачей фильтрации подразумевается математическое моделирование процесса движения несжимаемых жидкостей в нефтенасыщенных гетерогенных средах.

Анализ отечественных и зарубежных работ по геофизическим исследованиям пород-коллекторов показывает, что необходимость решения задачи фильтрации возникает при построении петрофизической модели геологической среды. Согласно работе В.М. Меркулова [65], петрофизическая модель является формальным математическим описанием проницаемости, пористости и флюидонасыщенности пород-коллекторов.

Для получения достоверной информации о петрофизических параметрах геологических сред применяются взаимодополняющие прямые и косвенные методы исследования скважин [28], [65].

Прямые методы лабораторных исследований кернов дают локальную оценку физических свойств в точке отбора [28], [65].

Косвенные методы геофизических исследований скважин по физическим полям, которые наблюдаются с помощью специальных измерительных приборов,

позволяют делать вывод о проницаемых участках разреза, распределении пористости и о других характеристиках породы-коллектора [65].

Эффективность эксплуатации скважины определяется наличием корректной информации о проницаемости породы, которая может быть получена в ходе проведения гидродинамических исследований [28].

Отличительной особенностью гидродинамических методов исследования кернов является их разрушающий характер, поскольку прямой контакт породы с флюидом может приводить к необратимым изменениям физических свойств уникальных и дорогостоящих образцов [28]. Поэтому в качестве основного способа исследования применяются бесконтактные методы, основанные на измерении электромагнитных полей [90 – 93, 223], акустических полей [69, 192], гидродинамических полей [208], ядерно-магнитной томографии [82] и т.д.

Полученная информация о внутренней структуре керна может быть использована для многократных виртуальных гидродинамических исследований с помощью математического моделирования.

Решение задачи фильтрации является одним из этапов гидродинамического исследования в таких геофизических приложениях, как гидравлический разрыв пласта [44, 98, 236], выбор режима управления скважинами на разработанных месторождениях [81], повышение эффективности управления разработкой анизотропных пластов [2]. Вследствие высокой стоимости проведения прямого физического эксперимента в геологической среде, применение компьютерного моделирования процесса фильтрации флюида является одним из основных методов решения инженерных задач.

В диссертации И.Р. Орлова [67] приводится анализ методов гидродинамического моделирования геологических сред с учётом анизотропной природы проницаемости. В результате апробации разработанной методики гидродинамического моделирования на примере пласта Сугмутского месторождения было установлено, что расхождение результатов моделирования с историей эксплуатации скважин составляет менее 2% при учёте анизотропной природы проницаемости и до 7.5% при

использовании изотропной модели среды. С практической точки зрения расхождение в 7.5% приводит к занижению в 1.3 раза результата прогноза обводнённости продукции, что существенно влияет на эффективность эксплуатации месторождения. Поэтому актуальной представляется задача исследования свойства проницаемости геологических сред и решение вопроса о допустимых границах применения анизотропной и изотропной моделей пласта.

Сегодня одной из наиболее эффективных технологий добычи нефти является гидродинамический разрыв пласта, который большинством исследователей выделяется в отдельную ветвь геологических наук [98].

Решение задачи фильтрации в рамках многофизической задачи гидроразрыва пласта требуется на этапе моделирования процесса течения жидкости, несущей пропант, по системе трещин и пустот с последующим просачиванием в геологическую среду [232].

Моделирование процесса просачивания несущей жидкости позволяет решить ряд важных инженерных вопросов, связанных с изменением концентрации пропанта [30], зарождением пропантовых пробок и заполнением трещины расклинивающим агентом [127], [221].

Важность гидродинамических исследований геологических сред с учётом анизотропной природы проницаемости при проведении гидроразрыва пласта отмечается в работах [98], [232], [236]. Во многом благодаря таким исследованиям удастся сократить суммы расходов на разработку и содержание месторождений порядка миллиардов долларов США. В России одним из перспективных сланцевых месторождений нефти с выраженной анизотропной природой физических свойств является Баженовская свита. Для таких пород применение гидроразрыва пласта – единственный возможный метод извлечения нефти [89].

Второй актуальной проблемой является решение задачи о движении флюида в каверне (канале) с последующим просачиванием в пористую среду с учётом сложной геометрии канала и анизотропной природы проницаемости.

## 1.2 Постановка задачи фильтрации флюида

При математическом моделировании процесса фильтрации жидкости необходимо решить две основные задачи.

**Первая задача** – моделирование процесса течения однофазной несжимаемой жидкости в каверне (канале) с последующим просачиванием в окружающую многомасштабную геологическую среду. Требуется решение следующих подзадач:

- разработка и реализация вычислительных схем для моделирования процесса течения однофазной несжимаемой жидкости в каверне (канале) с учётом сложной геометрии пространства;
- разработка и реализация вычислительных схем для моделирования процесса однофазной фильтрации жидкости в геологической среде с учётом анизотропной природы проницаемости;
- разработка и реализация вычислительных схем для моделирования процесса просачивания однофазной несжимаемой жидкости в пористую среду.

**Вторая задача** – исследование проницаемости геологической среды. Требуется решение следующих подзадач:

- разработка и реализация алгоритма оценки абсолютной проницаемости трёхмерной геологической среды;
- влияние геометрической структуры трёхмерной геологической среды на оценку абсолютной проницаемости;
- определение границ применимости анизотропной и изотропной моделей абсолютной проницаемости пласта.

Первым этапом при математическом моделировании процесса фильтрации флюида является выбор математической модели на основе доступной информации о петрофизических свойствах и структуре исследуемой геологической среды.

Математическая модель – система дифференциальных уравнений в частных производных с заданными начальными и краевыми условиями.

### 1.3 Математические модели процесса фильтрации

Рассматриваются математические модели движения ньютоновской несжимаемой жидкости без внутренних и внешних источников тепла.

Система уравнений Навье-Стокса является фундаментальной математической моделью для описания течения жидкостей в геологических средах [50]. Для медленных ползучих вязких течений влияние инерционного члена в системе уравнений Навье-Стокса достаточно мало, поэтому движение жидкости описывается моделью Стокса [5], [55].

Для решения задач фильтрации флюида в пористых средах существуют специальные модели, полученные в результате применения методов *осреднения*. Процесс фильтрации рассматривается в однородной среде, физические свойства которой эквивалентны физическим свойствам неоднородной среды. Задача определения физических свойств новой однородной среды рассматривается в рамках теории *гомогенизации* [99]. Такие модели пористых сред называются феноменологическими [66].

Основным соотношением для теории фильтрации является закон Дарси. Асимптотический вывод закона Дарси из линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса для случая вязких течений жидкости в пористых средах можно найти в работе А.Ю. Беяева [13, стр. 76].

Закону Дарси не подчиняются течения неньютоновских жидкостей, течения с достаточно большой скоростью флюида и течения через сыпучие среды крупной фракции. Связано это с высоким влиянием инерционных членов в системе уравнений Навье-Стокса [13], [224]. Также закон Дарси имеет нижнюю границу применимости, когда существенным становится капиллярный эффект [13], [224]. В работах [110] и [222] отмечается, что закон Дарси применим для течений с числом Рейнольдса  $3 < Re < 10$ .

В зависимости от свойств флюида и пористости среды возможны модификации модели: двухчленный закон фильтрации Форхгеймера, модель Бринкмана, степенной закон фильтрации, закон фильтрации с дифференциальной зависимостью, модель с предельным градиентом. Применение указанных моделей можно найти в

[53], [211], [222]. Нелинейные законы фильтрации рассмотрены в работе Л.С. Лейбензона [52].

В работе J.-L. Auriault [107] приведены примеры задач, для которых модель Бринкмана оказалась эффективнее, чем модель, основанная на законе Дарси. Как отмечают Н.Е. Леонтьев [53] и К. Vafai [222], модели Бринкмана и Форхгеймера показывают высокую эффективность для сред с изотропной природой проницаемости и высокой пористостью.

Физическое обоснование закона Дарси для многофазных флюидов было получено Д.А. Эфросом [94]. Также было установлено, что фазовые проницаемости не зависят от скорости фильтрации и от отношения динамических вязкостей фаз [95].

Важно отметить, что модель Дарси отражает разность давлений в фазах вследствие неоднородности поверхностного натяжения флюидов. Если капиллярным давлением можно пренебречь, то для двухфазной фильтрации существует специальная модель Баклея-Левретта при условии недеформируемости породы [9]. В случае трёхфазной фильтрации (“вода – нефть – газ”) применяется модель Маскета-Мереса [43].

Модель процесса просачивания в трещиновато-пористых средах может базироваться на сопряжённых моделях Стокса-Дарси, Навье-Стокса-Дарси и Стокса-Бринкмана в зависимости от физической модели поведения флюида и геометрии среды [202, 203]. Если диаметр зёрен порового пространства несоизмеримо мал по сравнению со средним размером трещин, то разделённые трещинами пористые фрагменты породы можно рассматривать как однородную среду с осреднёнными параметрами. Для описания таких фильтрационных систем используются модели двойной пористости [52, 70]. Задача моделирования осложняется построением специальной функции перетока флюида между блоками среды или введением специальных условий сопряжения. Примеры решения такой проблемы можно найти в [25], [51].

Класс феноменологических моделей процесса фильтрации предполагает применение аппарата математических методов для исследования систем дифференци-

альных уравнений. Основой для структурных моделей пористой среды служат теория подобия и анализ размерностей. Комбинация двух подходов позволяет построить эффективный аппарат для моделирования процесса фильтрации в сложной гетерогенной среде [66].

Подробная классификация структурных моделей пористой среды изложена в работах [52, 70]. Гранулированные модели базируются на предположении о сферической или эллипсоидальной форме пор: модель Слихтера (упорядоченная структура), модель Терцаги (случайная структура), модель Козени (неконсолидированная пористая среда). Существенным недостатком таких моделей является зависимость точности аналитических соотношений от формы и величины включений. Капиллярные модели строятся в виде системы пучков каналов: модель Козени-Кармана, модели с переменной извилистостью. Точность капиллярных моделей зависит от формы поперечного сечения каналов при аналитическом решении системы уравнений Навье-Стокса. Также существуют сеточные модели, которые применяются для моделирования процесса фильтрации многофазных флюидов: модель Эрлиха-Крейна, сеточная модель с объёмными включениями. Для сред с анизотропной природой проницаемости используется сеточная модель Феррандона. Более подробное описание структурных моделей для процессов просачивания можно найти в работе П.Я. Полубариновой-Кочиной [68].

Анализ существующих работ по решению задач фильтрации показывает, что большинство публикаций по исследованию связи системы уравнений Навье-Стокса и редуцированных математических моделей носит теоретический характер. Необходимо отметить, что весьма ограниченное число публикаций посвящено вопросу исследования этой связи при решении прикладных задач геофизики. Поэтому определение иерархии математических моделей процесса фильтрации флюидов в геологических средах является важной и актуальной задачей.

Связь математических моделей позволяет определить их иерархию в зависимости от уровня детализации физической модели процесса фильтрации.

### 1.4 Иерархия математических моделей процесса фильтрации

Согласно работам [67, 83, 122, 161, 177, 211] отличительной особенностью естественных геологических сред является гетерогенная и анизотропная природа физических свойств вследствие диагенеза и осадконакопления. Процессы выщелачивания, растворения, цементации и тектонических напряжений приводят к тому, что геологическая среда приобретает сложную слоистую, пористую и трещиновато-пористую структуру.

Пористая или трещиновато-пористая среда состоит из множества пустот и соединяющих их каналов, которые имеют разномасштабные геометрические размеры. Среды с такими свойствами называются многомасштабными [211]. В этом случае математическая модель процесса фильтрации, основанная на системе уравнений Навье-Стокса, требует модификации, поскольку возникает сложность с учётом всей геометрической структуры многомасштабной геологической среды [177].

Согласно работам M.O. Steinhauser [213] и W. E [144] для задачи фильтрации флюида в пористых и трещиновато-пористых средах общепринято выделять два уровня иерархии: мезоскопический и макроскопический.

*Мезоуровень* характеризуется геометрическим масштабом от  $10^{-6}$  до  $10^{-2}$  (м) и рассматривается при описании сложных течений в системе каналов и пустот, процессов молекулярной диффузии и движения многофазных флюидов [213].

*Макроуровень* характеризуется геометрическим масштабом от  $10^{-3}$  до  $10^2$  (м) и используется при описании макроскопических течений, процессов просачивания и фазовых превращений [213].

Процесс перехода от мелкомасштабной модели среды к крупномасштабной называется *upscaling*. Применение технологии *upscaling* позволяет перейти от геологической модели породы-резервуара к гидродинамической модели.

Применение технологии *upscaling* в приложениях теории фильтрации можно найти в [142, 177, 178, 222].

По аналогии с предложенной многоуровневой структурой геологической среды вводится понятие иерархии математических моделей процесса фильтрации.

Как отмечает W. E [144], существует три главных вопроса, которые необходимо решить, при построении математических моделей для описания процессов в многомасштабной среде:

- определить физические модели процесса в соответствии с уровнем иерархии;
- установить связь физических моделей разных уровней иерархии;
- определить физические модели связей разных уровней иерархии и построить их математические модели.

Согласно работам [97, 144, 220], для процесса фильтрации в пористой и трещиновато-пористой среде математическая модель Навье-Стокса является микромасштабной и требует наличия информации о геометрической структуре порового пространства. Таким образом, микроскопическое поведение процесса фильтрации на мезоуровне геометрической иерархии геологической среды может быть описано системой уравнений Навье-Стокса.

Макроскопическое поведение процесса фильтрации подчиняется закону Дарси с возможными модификациями. Макроскопическая математическая модель процесса фильтрации на макроуровне геометрической иерархии геологической среды основана на законе Дарси, уравнениях неразрывности и состояний [95, 122, 140, 211, 222].

Для реализации третьего постулата W. E о построении промежуточной связующей модели микроскопического и макроскопического поведения многомасштабной среды иерархию математических моделей процесса фильтрации необходимо дополнить промежуточной мезомасштабной моделью Стокса-Дарси, Навье-Стокса-Дарси или Стокса-Бринкмана в зависимости от физической модели поведения флюида [211, 222].

Построение физически адекватной макроскопической модели процесса фильтрации является одной из главных задач в рамках многомасштабного метода. Решение данной проблемы основано на укрупнении масштаба геологической среды. Одной из физических характеристик, подвергающихся процедуре осреднения, является проницаемость геологической породы [13, 43].

### 1.5 Определение эффективного тензора проницаемости

Задача определения физических свойств гетерогенной среды на мезоуровне, которые характеризуют макроскопическое поведение фильтрационной системы, может быть решена с использованием методов гомогенизации. Методы гомогенизации базируются на *теории эффективной среды* (ТЭС).

Как показано на рисунке 1, методы ТЭС позволяют перейти от геометрически и физически многомасштабных характеристик к эффективным свойствам, которые характеризуют среду в целом. Среда, гомогенизированная с помощью методов ТЭС, называется эффективной [128].

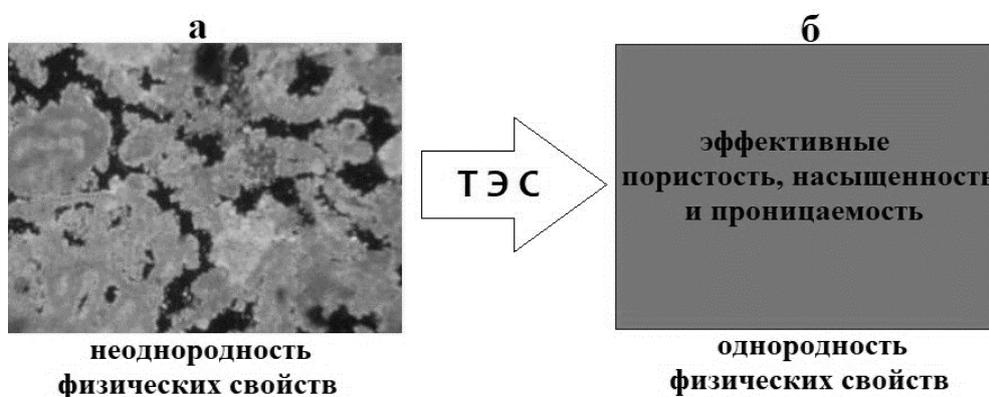


Рисунок 1 – Мезоскопически неоднородная (а) и макроскопически однородная (б) среды

ТЭС применима для определения транспортных свойств движения жидкости в геологической среде, если масштаб исследуемой фильтрационной системы намного больше размера неоднородностей [178]. Поскольку геологические среды обладают естественной многомасштабной структурой, то методы ТЭС можно применить для определения эффективных свойств пород-коллекторов [12].

С помощью ТЭС решаются следующие геологические задачи [128]:

- прогноз физических свойств пород-коллекторов на разных уровнях иерархии внутреннего строения;
- определение корреляций между физическими свойствами;
- определение физических свойств по системе прямых измерений;
- построение масштабно зависимых моделей пород-коллекторов.

Наиболее информативной характеристикой макроскопического поведения фильтрационной системы является проницаемость. Для однофазных жидкостей существенна абсолютная проницаемость, которая зависит от геометрии порового пространства.

Геологическая среда является анизотропной, поскольку её физические свойства могут существенно различаться в координатных направлениях. В изотропной среде переход от вектора градиента давления к вектору скорости заключается в изменении масштаба, для анизотропной среды – изменение масштаба и направления. Поэтому проницаемость геологической среды является тензором.

Тензор – инвариантный геометрический объект, математические свойства которого описываются упорядоченной совокупностью чисел, преобразующихся по определённому закону при переходе от одной системы координат к другой [235]

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Тензор проницаемости  $\mathbf{K}$  является ограниченным сверху и снизу из физических соображений. Свойство симметричности следует из принципа Онзагера [216]: в закрытой системе, при возможности развития процесса по нескольким сценариям, реализуется тот, который обеспечивает минимальный прирост энтропии, т.е. минимум рассеяния энергии.

Рассмотрим следующие структуры тензора абсолютной проницаемости

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 \\ k_{xy} & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Тензоры  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$  описывают проницаемость геологических сред с трансверсально-изотропным и ортотропным типом анизотропии, соответственно. Главные направления тензора лежат в плоскостях напластования [67]. Тензор  $\mathbf{K}_3$  соответствует среде, для которой невозможно определить два главных направления напластования. В таблице 1 представлены наиболее часто используемые явные и неявные методы оценки эффективного тензора проницаемости.

Таблица 1 – Методы оценки эффективного тензора абсолютной проницаемости

Явные методы		Неявные методы	
оценка	структура среды	метод	ограничения
<p>средняя гармоническая</p> $k_H = \left( \frac{1}{ \Omega } \int_{\Omega} [k(x, y, z)]^{-1} d\Omega \right)^{-1}, \quad (1.3)$	проницаемость в поперечном направлении напластованию	<p>закон Дарси</p> $k = \frac{\ \mathbf{v}\ }{\ \nabla p\ }, \quad (1.4)$ $\mathbf{K}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$ <p><math>\mathbf{v}</math> – скорость фильтрации (м/с), <math>p</math> – динамическое давление (Па)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• метод позволяет вычислить скалярную проницаемость среды</li> <li>• требуется решение прямых задач в неоднородной среде с учётом микровключений</li> </ul>
<p>средняя арифметическая</p> $k_A = \frac{1}{ \Omega } \int_{\Omega} k(x, y, z) d\Omega, \quad (1.5)$	проницаемость в продольном направлении напластованию		
$\mathbf{K}^{\text{eff}} = k_H \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \sum_{i=1}^2 k_A \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad (1.6)$	среды со слоистой однородной структурой		
<p>формула Дыхне-Келлера</p> $k_{DK}(k_0, k_1) = \sqrt{k_0 k_1}, \quad (1.7)$ <p><math>k_0</math> – проницаемость матрицы, <math>k_1</math> – проницаемость включений</p>	среды “шахматной” структуры	<p>обратная коэффициентная задача (ОКЗ)</p> $\mathbf{A}\Theta = \mathbf{F}, \quad (1.8)$ <p><math>\mathbf{A}: X \rightarrow Y</math> – оператор обратной задачи, <math>\Theta \in X</math> – вектор неизвестных параметров, <math>\Theta = \{k_x, k_{xy}, k_{xz}, k_y, k_{yz}, k_z\}, \quad (1.9)</math> <math>\mathbf{F} \in Y</math> – модель наблюдений, <math>X</math> и <math>Y</math> – гильбертовы пространства</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• требуется решение серий прямых задач в однородной среде</li> <li>• требуется наличие априорной информации о гидродинамических свойствах неоднородной среды (давление, скорость и т.д.)</li> <li>• метод минимизации целевого функционала</li> <li>• метод регуляризации</li> <li>• чувствительность градиента функционала к вариациям параметров</li> </ul>
<p>формула Максвелла</p> $k_M(k_0, k_1, s) = k_0 + \frac{nk_0(k_1 - k_0)s}{(n-1)k_0 + sk_0 + (1-s)k_1}, \quad (1.10)$ <p><math>k_0</math> – проницаемость матрицы, <math>k_1</math> – проницаемость включений, <math>n</math> – мерность пространства, <math>s</math> – объёмная концентрация сфер</p>	среды, равномерно заполненные включениями сферической формы		

Явные методы основаны на предположении о периодичности или квазипериодичности функции проницаемости. При этом оценка тензора проницаемости базируется на применении теории осреднения для задач фильтрации с оператором конкретного типа.

Особенности исследования изотропной модели проницаемости в средах с периодической структурой изложены в [13, 100, 101, 115], с непериодической случайной структурой в [33, 48, 136, 165, 197], с ветвящейся периодической структурой в [193]. Значительный вклад в развитие теории осреднения внесли В.В. Жиков, С.А. Назаров, С.М. Козлов, О.А. Олейник, G. Allaire и др.

Статистические методы оценки проницаемости гетерогенных фильтрационных систем можно найти в работах [116, 175]. Стоит отметить, что решение стохастической задачи определения эффективного тензора проницаемости является более ресурсозатратным, чем решение задачи фильтрации в неоднородной среде, поскольку в этом случае вариационные уравнения следует рассматривать с переменными коэффициентами во всём вероятностном пространстве.

Наиболее простым примером многомерной структуры является слоистая среда. В работе [13] показано, что средняя гармоническая оценка (1.3) является эффективной проницаемостью в поперечном направлении напластованию, а средняя арифметическая (1.5) – вдоль. Эффективный тензор проницаемости слоистой среды можно вычислить по формуле (1.6).

Большая группа явных методов оценки коэффициента проницаемости базируется на структурных моделях пористых сред. Кроме оценок проницаемости в моделях Козени-Кармана, Сликтера, Эрлиха-Крейна и т.п. для сред со специальной структурой существуют оценки по формуле Дыхне-Келлера (1.7) и по формуле Максвелла (1.10) [13].

Верхняя и нижняя граница тензора проницаемости среды с произвольной структурой могут быть определены с помощью оценки Лурье-Черкаева-Мурата-Тартара и оценки Хашина-Штрикмана для первого инварианта эффективного тензора [13].

Явные методы позволяют оценить скалярную эффективную проницаемость среды. Наличие информации о средней гармонической и арифметической оценке позволяет с некоторой степенью точности вычислить тензор проницаемости, который имеет трансверсально-изотропную или ортотропную структуру. Процесс вычисления тензора с неизвестными главными направлениями с помощью явных методов довольно сложен. Поэтому для таких сред используются неявные методы [43].

Неявные методы оценки эффективного тензора проницаемости связаны с решением серии прямых задач фильтрации, поэтому они являются достаточно ресурсозатратными.

Тензор трансверсально-изотропной или ортотропной структуры можно вычислить при использовании метода давления и закона Дарси по формуле (1.4). Применение метода давления основано на решении прямых задач однофазной фильтрации с неоднородными краевыми условиями Дирихле на противоположных границах. Для трёхмерной среды необходимо решить три прямых задачи фильтрации в неоднородной среде с градиентом давления, который будет перпендикулярен одному из трёх направлений напластования [43]. Недостатком такого метода является высокая чувствительность к контрастности коэффициента проницаемости [159].

Неявные методы для определения полного тензора проницаемости основаны на решении обратных нелинейных многомерных коэффициентных задач [216].

Обратная задача (1.8) является некорректной, поскольку решение неустойчиво по отношению к малым возмущениям измеряемых данных [75]. Поэтому необходимо использовать специальные алгоритмы регуляризации, которые обеспечивают сужение допустимого класса решений [77].

Впервые метод регуляризации для решения некорректной задачи был предложен А.Н. Тихоновым в 1965 году [76]. Идея заключалась в использовании специального регуляризирующего оператора, с помощью которого можно найти приближённое решение операторного уравнения (1.8) в результате минимизации сглаживающего функционала вариационным методом [76].

Анализ публикаций по методам определения абсолютной проницаемости гетерогенных сред с помощью решения обратных коэффициентных задач показывает, что наиболее информативным является метод давления, поскольку он позволяет достаточно точно учесть неоднородность среды [13, 43, 108, 216].

Задача однофазной фильтрации решается на мезомасштабном уровне с учётом неоднородности среды. Затем при тех же начальных и граничных условиях вычисляются такие параметры макромасштабной модели процесса фильтрации, при которых могут быть получены те же потоки и давление флюида, что и для мезомасштабной модели [43].

Поэтому в качестве измеряемых данных могут быть выбраны динамическое давление, расход жидкости через некоторую плоскость, скорость фильтрации или её абсолютное значение. Как отмечается в работе А. Tarantola [216], динамическое давление имеет смысл выбирать в качестве измеряемых данных только при вычислении проницаемости изотропной природы.

Среди фундаментальных работ по методам решения обратных задач массопереноса и методам регуляризации необходимо отметить труды А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, В.Я. Арсенина, А.Г. Яголы, А. Tarantola и др. Методы вычисления параметра регуляризации по квазиоптимальному значению и по невязке описаны в [71, 72, 75 – 78].

Большой вклад в развитие общей идеологии решения обратных задач внесли работы U. Ascher, E. Haber K. P. Whittall и D. W. Oldenburg, см. [108, 109, 166, 233]. Применение метода давления для вычисления эффективной проницаемости пористой среды описано в [6, 143, 199].

Корректный выбор метода минимизация сглаживающего функционала позволяет сократить время решения обратной задачи. Для минимизации квадратичных функционалов применяются итерационные методы градиентного типа, такие как методы Флетчера-Ривса, Полака-Райбера, Ньютона-Рафсона и т.д. Преимуществом данных методов является их способность доставлять минимум выпуклой  $n$ -мерной квадратичной функции за  $(n+1)$ -итерацию [195]. Главный недостаток методов гра-

диентного типа заключается в высокой чувствительности к начальному приближению решения, поскольку может наблюдаться стагнация алгоритма в зоне точного решения [195]. Как отмечают авторы работ [14, 195], наилучший результат дают комбинированные методы минимизации. Например, использовать метод Флетчера-Ривса с ограниченным числом итераций и локальный метод Ньютона для уточнения решения.

Существование решения обратной задачи зависит от свойств оператора прямой задачи, которые во многом определяются методом дискретизации математической модели процесса фильтрации [75 – 78].

### **1.6 Методы дискретизации моделей фильтрации**

Методы компьютерного моделирования процесса фильтрации можно разделить на три группы: бессеточные, условно-бессеточные и сеточные.

К бессеточным относятся метод частиц и его вариации (Smooth Particle Hydrodynamics, Incompressible Smooth Particle Hydrodynamics) [182, 184], метод дискретных элементов (Discrete Element Method) [224].

Основная идея бессеточных методов заключается в рассмотрении течения жидкости на уровне каждой отдельно взятой частицы среды. Применение таких подходов оправдывает себя при компьютерном моделировании сложных взаимодействий жидкости и твёрдого тела, которые могут сопровождаться процессами разрушения границ, перемешивания разных фаз флюида и наслоения сред. Реализация бессеточных методов связана с разработкой эффективных параллельных алгоритмов на мощных компьютерных архитектурах, поскольку требуется решение большого количества уравнений, описывающих движение частиц и состояние фильтрационной системы [224].

Условно-бессеточными методами считаются бессеточный метод конечных элементов (Meshfree Galerkin Method), метод естественных соседей и его модификации (Natural Element Method) [7, 215], метод решёток Больцмана (Lattice Boltzmann Methods) [143] и др.

Условно-бессеточные методы позволяют построить решение задачи с помощью интерполяции на ячейках Вороного – выпуклого многоугольника, определяемого множеством точек в пространстве [215]. Для каждой точки пространства ячейки Вороного, в соответствии с методом Галёркина, строится функция формы. Дискретизация расчётной области ячейками Вороного позволяет осуществлять быстрый поиск “естественных” соседей для каждой точки. Поэтому эффективность применения условно-бессеточных методов полностью определяется алгоритмом построения разбиения пространства ячейками Вороного [7, 215].

К сеточным методам моделирования процесса фильтрации относятся классы вычислительных схем конечных элементов (МКЭ), конечных разностей (МКР), конечных объёмов (МКО), метод граничных элементов (МГЭ).

МГЭ используется при моделировании поверхностных явлений таких, как обтекание жидкостью твёрдых тел в задачах гидро- и газодинамики со свободными границами [8, 26].

Применение метода конечных разностей для дискретизации уравнений второго порядка на неструктурированных сетках в различных реализациях можно найти в работах [4, 11, 23, 24, 35, 54, 64, 71, 72, 84, 85, 96, 163, 164].

Основное достоинство метода конечных разностей заключается в их относительно простой реализации на современных параллельных компьютерных архитектурах. Использование структурированных сеток в МКР позволяет осуществить регулярную компоновку данных и векторизацию, что повышает эффективность вычислительной схемы. Существенным недостатком МКР является высокая чувствительность метода к качеству и ориентации конечноразностной сетки, а также сложность дискретизации уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами при старшей производной [11].

Метод конечных объёмов является универсальным инструментом построения консервативных схем для задач гидродинамики. Применение специальных схем аппроксимации законов сохранения в интегральном виде позволяет получить устойчивое решение широкого класса гиперболических уравнений [159]. Схемы

аппроксимации системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости подробно описаны в работах [46, 47, 79, 145]. Существенные сложности в методе конечных объёмов возникают при повышении порядка аппроксимации схемы на неструктурированных разбиениях.

Метод конечных элементов теоретически был обоснован в 1943 г. М.В. Келдышем [45]. Согласно Ф. Сьярле [74], конечным элементом в  $\mathbf{R}^n$  называют триаду

$$\mathbf{K} = (K, P, \Sigma), \quad (1.11)$$

где  $K$  – замкнутое подмножество  $\mathbf{R}^n$  с непустым множеством внутренних точек и непрерывной по Липшицу границей (отрезок, треугольник, тетраэдр, полиэдр и т.д.),  $P$  – пространство действительных функций (функций форм), определённых на  $K$ ,  $\Sigma = \{L_1, L_2, \dots, L_{N_p}\}$  – конечное множество независимых линейных форм (функционалов)  $L_i : P \rightarrow R$ ,  $N_p = \dim(P)$ . Элементы пространства  $\Sigma$  образуют базис дуального пространства  $P'$  [117] и называются степенями свободы. Пространство  $\Sigma$  является  $P$ -унисольвентным [74].

*Классический метод конечных элементов* входит в семейство конформных методов. На функциональном уровне это означает, что скалярная базисная функция имеет непрерывный след на межэлементной границе, а векторная базисная функция имеет непрерывный след тангенциальной или нормальной компоненты в зависимости от выбранного функционального пространства [227].

Классический МКЭ не является локально консервативным, поэтому его применение для решения задач с превалирующим конвективным эффектом или с быстро меняющимся градиентом функции приводит к физически нерелевантному результату [16, 21, 22, 238].

Для повышения устойчивости классических вычислительных схем МКЭ в вариационную формулировку вводятся специальные стабилизирующие добавки. *Стабилизированные конечноэлементные методы* (Stabilized Finite Element Method) основаны на анализе невязки численного решения. Наиболее популяр-

ными стабилизированными конечноэлементными методами являются противопотоковые вычислительные схемы метода Петрова-Галёркина (SUPG – Streamline Upwind Petrov-Galerkin Method).

Применении схем метода SUPG для решения системы уравнений Навье-Стокса можно найти в [121, 171]. Основная идея данного семейства методов заключается в использовании дополнительных взвешенных “противопотоковых” слагаемых в вариационной постановке со специально построенными пространствами пробных и тестовых функций.

Кроме SUPG-метода существует более ресурсозатратные по вычислениям стабилизированные вычислительные схемы. Например, Galerkin/Least-square Method (GLS) и Gradient Galerkin/Least-squares Method (GGLS) [173], Residual Free Bubbles Method (RSFB) [204]. Различные реализации вычислительных схем стабилизированных методов конечных элементов высокого порядка можно найти в [34, 171].

Главным недостатком всех стабилизированных конечноэлементных методов является высокая чувствительность вычислительных схем к параметру стабилизации, который зависит не только от параметров модели, но и от характеристик сетки.

Для задач гидродинамики с разрывным решением или с быстро меняющимся градиентом решения в пристеночных областях применяются вычислительные схемы на базе *разрывного метода Галёркина* (DG – Discontinuous Galerkin Method), который входит в семейство неконформных конечноэлементных методов.

DG-метод обладает свойством локальной консервативности и объединяет в себе эффективность метода конечных объёмов и вычислительную гибкость метода конечных элементов [86, 87].

В разрывном методе Галёркина решение задачи определяется локально на каждом элементе. Поведение решения на межэлементной границе определяется с помощью “численных потоков”, которые выбираются в зависимости от типа решаемой задачи [105, 106].

Введение специальных “численных потоков” (операторы следа функции специального вида или *lifting*-операторы) позволяет вынести проблему согласования

решения и учёта краевых и интерфейсных условий на уровень вариационной формулировки.

Предложен разрывный метод Галёркина был в 1973 году W.H. Reed и T.R. Hill для решения задачи переноса нейтронов, описываемого гиперболическим дифференциальным уравнением [200].

Большой вклад в развитие вычислительных схем разрывного метода Галёркина для решения дифференциальных уравнений второго порядка внесли работы I. Babuska, F. Bassi, F. Brezzi, S. Rebay, B. Cockburn, C. Baumann, J. Oden, C.-W. Shu, D. Arnold, D. Marini и др., см. [105, 106, 113, 118, 119, 131, 133, 134, 183, 209].

Применение различных вычислительных схем разрывного метода Галёркина для моделирования процессов просачивания флюидов в пористых средах можно найти в работах M.F. Wheeler, B. Riviere, Y. Efendiev, R. Lazarov, P.B. Жалнина, М.Е. Ладонкиной, В.Ф. Масыгина, В.Ф. Тишкина и др., см. [31, 32, 147, 151, 154, 202, 203, 229, 230, 231].

M.F. Wheeler является основателем известной научной школы в области флюидодинамики в пористых средах. Её подходы основаны на применении аппарата фазовых полей для связи двух уровней иерархии математических моделей, описывающих течения в мелкопористой и крупнопористой среде, см. [229, 232].

Исследования B. Riviere направлены на построение специальных вариационных формулировок, обеспечивающих связь физических полей разных уровней иерархии пористой среды. B. Riviere впервые был предложен метод слабого учёта интерфейсных условий Бивера-Джозефа-Саффмана при моделировании процессов просачивания однофазного флюида [202].

Среди отечественных научных школ по компьютерному моделированию процессов фильтрации необходимо отметить труды В.И. Васильева, М.В. Васильевой, В.Е. Борисова, Ю.М. Лаевского, Б.В. Критского, см. [15, 17, 18].

Для дискретизации системы уравнений Навье-Стокса различные вычислительные схемы разрывного метода Галёркина использованы в работах F. Bassi, S. Rebay, B. Riviere, P. Houston и др., см. [111, 132, 170, 203].

Важно отметить, что вычислительная схема DG-метода при использовании базисных функций первого порядка становится неустойчивой. Данная проблема частично может быть решена путём введения дополнительного стабилизирующего слагаемого в вариационную формулировку: симметричная и несимметричная постановка IP (Inner Penalty) [105], постановка Bassi [112, 134], постановка Brezzi [118].

Поскольку DG-метод позволяет определить решение задачи локально, то возникает проблема резкого увеличения числа степеней свободы при повышении порядка вычислительной схемы ( $p$ -refinement) или уточнении сетки ( $h$ -refinement), что отрицательно сказывается на скорости решения задачи [105].

Решение проблемы “взрывного” увеличения числа степеней свободы требует разработки специальных многоуровневых и многосеточных решателей при использовании идеологии *многомасштабных методов конечных элементов* (MsFEM – Multiscale Finite Element Method) [109, 146, 153, 228]. Существуют две стратегии реализации многомасштабного метода.

Первая идея заключается в разбиении расчётной области на подобласти (макроэлементы), в которых строится локальное пространство функций формы, как решение исходной задачи со специальными краевыми условиями. При этом процедура решения подзадач может быть реализована параллельно [147]. Построенные локальные пространства функций формы становятся конечноэлементным базисом для внешней макромасштабной задачи. Стоит отметить, что при такой реализации многомасштабные методы являются расширением известного метода суперэлементов, который был предложен Р.П. Федоренко и Л.Г. Страховской [80].

Вторая идея заключается в использовании комбинированной вариационной формулировки для разрывного метода Галёркина и классического МКЭ. Вычислительная схема DG-метода используется в подобластях, где решение меняется быстро или претерпевает разрыв. При этом непрерывная компонента определена всюду. Таким образом, решение определяется на прямой сумме двух подпространств: разрывного и непрерывного [172].

Применение многомасштабных конечноэлементных методов для компьютерного моделирования процессов просачивания флюидов в пористых средах можно найти в работах M.F. Wheeler, Y. Efendiev, R. Lazarov, см. [103, 106, 146 – 154]. Многомасштабный разрывный метод Галёркина был предложен в 1998 г. [156].

В последнее время популярность завоёвывает *виртуальный метод конечных элементов* (VFEM – Virtual Finite element Method), который является обобщением МКЭ и позволяет использовать политопные сетки с висячими узлами и невыпуклыми элементами. Как отмечают авторы статей [124, 198], данный метод эффективен для моделирования течений в сложно построенных средах, поскольку позволяет с высокой точностью учесть внутренние границы. В VFEM строятся специальные операторы проектирования на виртуальное пространство и стабилизирующие билинейные формы. При этом сами функции формы в явном виде не вычисляются. Применение виртуальных элементов для решения задачи Стокса можно найти в [114, 120].

Существуют специальные методы для решения задач гидродинамики в областях с деформирующимися границами, которые позволяют не перестраивать конечноэлементные сетки. Идея *расширенного метода конечных элементов* (XFEM – eXtended Finite Element Method) основана на введении дополнительных степеней свободы вблизи зон деформации (поры, трещины или когезивные зоны) [207]. Стоит отметить, что технология XFEM для решения уравнений Навье-Стокса на сегодняшний день разработана для весьма ограниченного набора прикладных задач.

Для решения задачи Дарси со скалярным коэффициентом проницаемости применяется также *гетерогенный метод конечных элементов* (HFEM – Heterogeneous Finite Element Method). HFEM состоит из двух основных частей: общая макроскопическая модель состояния, которая может быть построена на базе МКЭ или МКО, и ограниченная микроскопическая модель для оценки недостающих данных в макроскопической модели. Микроскопические и макроскопические модели связаны операторами сжатия и расширения [126].

Для задачи Дарси разрывный метод Галёркина часто применяется со смешанными вариационными формулировками. *Смешанный метод конечных элементов* (Mixed Finite Element Method) может быть реализован как конформным, так и неконформным, но всегда *дуальным*. Дуальность заключается во введении дополнительной переменной, которая может быть связана с неизвестными величинами через дифференциальный оператор. Применение смешанного метода конечных элементов для решения задачи фильтрации можно найти в работах [18, 19, 106, 119, 141].

Из семейства смешанных конечноэлементных методов для системы уравнений Навье-Стокса и задачи Дарси многими авторами выделяются *гибридные методы конечных элементов* (Hybrid Finite Element Method). Идея гибридного метода заключается во введении в смешанный метод множителей Лагранжа и использовании специального базиса для вектора скорости. Такая стратегия позволяет не учитывать уравнение неразрывности и исключить переменную давления, тем самым уменьшить число степеней свободы [119, 125, 155].

Существуют альтернативные подходы, которые схожи с разрывным методом Галёркина. Для решения задач гидродинамики применяются методы семейства Domain Decomposition (DD) с Mortar или Trefftz-методом. Технология DD позволяет построить параллельную процедуру поиска решения в несогласованных подобластях. Методы Mortar и Trefftz расширяют возможности классического МКЭ, допуская разрывность решения на межэлементной границе [103, 230]. В этом наблюдается родство с методом фиктивных областей в работе А.Н. Коновалова [49].

Для решения нестационарных задач разработаны специальные вычислительные схемы, которые могут быть интегрированы в вычислительные схемы DG-метода. Для задач гидродинамики большой популярностью пользуются схемы DG-метода с явными схемами Рунге-Кутты (RK-DG-схемы) [134], ADER-DG-схемы (схема произвольного порядка производных) с процедурами Коши-Ковалевской и Лакса-Вендроффа [185]. Хорошо зарекомендовали себя полунявные проекцион-

ные методы на базе разложения Гельмгольца вектора скорости в системе уравнений Навье-Стокса. Описание различных вариантов проекционного метода Chorin-Teman можно найти в [73] и [140].

### **Выводы по главе**

Микроскопическое поведения флюида в поровом пространстве описывается системой уравнений Навье-Стокса. Макроскопическое поведение фильтрационной системы подчиняется закону Дарси и описывается моделью однофазной фильтрации. Промежуточная модель мезоскопического поведения процесса просачивания описывается системой уравнений Навье-Стокса-Дарси с интерфейсными условиями Бивера-Джозефа-Саффмана.

Для дискретизации математических моделей, описывающих процессы течения, фильтрации и просачивания жидкости будут использованы и исследованы вычислительные схемы классического метода конечных элементов, стабилизированного метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина.

Гомогенизация гетерогенной геологической среды связана с определением эффективного тензора абсолютной проницаемости второго ранга. Для определения эффективного тензора проницаемости требуется решение обратной коэффициентной задачи, что эквивалентно минимизации сглаживающего функционала Тихонова. Минимизация сглаживающего функционала Тихонова будет выполнена на базе градиентного метода Флетчера-Ривса с ограниченным числом итераций и локального метода Ньютона для уточнения решения.

## ГЛАВА 2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ

В главе приводятся вариационные формулировки метода конечных элементов для математических моделей процесса фильтрации в различных функциональных пространствах. Проанализированы результаты верификации вычислительных схем стабилизированного метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина для решения уравнений Навье-Стокса, однофазной фильтрации и Навье-Стокса-Дарси. Приводятся результаты моделирования ламинарных и вихревых течений несжимаемой жидкости в кавернах (каналах), процесса просачивания однофазного несжимаемого флюида из каверны (канала) в пористую среду, результаты решения задачи вычисления эффективного тензора абсолютной проницаемости в зависимости внутренней структуры породы-коллектора.

### 2.1 Функциональные пространства

Пусть  $\Omega \in \mathbf{R}^3$  – трёхмерная область с Липшиц-непрерывной границей  $\partial\Omega$ . Введём в  $\Omega \in \mathbf{R}^3$  следующие гильбертовы пространства [135, 194]

$$L^2(\Omega) = \left\{ \psi \mid \int_{\Omega} |\psi|^2 d\Omega < +\infty \right\}, \quad (2.1)$$

$$H^m(\Omega) = \left\{ \psi \mid D^\alpha \psi \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \right\}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \left\{ \boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{\psi} \in [L^2(\Omega)]^3, \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) = \left\{ \boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{\psi} \in [L^2(\Omega)]^3, \nabla \times \boldsymbol{\psi} \in [L^2(\Omega)]^3 \right\} \quad (2.4)$$

с соответствующими нормами [135]

$$\|\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 = (\omega, \omega)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |\omega|^2 d\Omega, \quad \forall \omega \in L^2(\Omega), \quad (2.5)$$

$$\|\omega\|_{H^m(\Omega)}^2 = (\omega, \omega)_{H^m(\Omega)} = \sum_{k \leq m} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha \omega|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \omega \in H^m(\Omega), \quad (2.6)$$

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}^2 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_{L^2(\Omega)} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), \quad (2.7)$$

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)}^2 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})_{L^2(\Omega)} + (\nabla \times \boldsymbol{\omega}, \nabla \times \boldsymbol{\omega})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega). \quad (2.8)$$

При построении вычислительных схем МКЭ высоких порядков в векторных пространствах (2.2) – (2.4) используется комплекс De Rham [135, 212, 227]

$$R \xrightarrow{\text{id}} H^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \times} \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \cdot} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (2.9)$$

Свойство конформности в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$  означает, что функция имеет непрерывный след на межэлементной границе [137, 138]. Для пространств  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  и  $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$  свойство конформности означает непрерывность следа нормальной и тангенциальной компоненты векторной функции, соответственно. В пространстве  $L^2(\Omega)$  свойство конформности не существует.

Введём векторное пространство  $[L^2(\Omega)]^3 = \{\boldsymbol{\psi} | \psi_{(i)} \in L^2(\Omega), i = \overline{1,3}\}$  и рассмотрим декомпозицию (по теореме Ладыженской) [50], [140]

$$[L^2(\Omega)]^3 = \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) \oplus \mathbf{J}_0^\perp(\Omega), \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$  – множество дивергентно-свободных функций, которые на Липшиц-непрерывной границе  $\partial\Omega$  имеют нулевой след нормальной компоненты [123]

$$\mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\}, \quad (2.11)$$

ортогональное дополнение определяется в виде [140]

$$\mathbf{J}_0^\perp(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3, \mathbf{v} = \nabla p, p \in H^1(\Omega) \right\}. \quad (2.12)$$

Разложение (2.10) используется при построении проекционных методов для решения системы уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим в  $\Omega \in R^3$  разбиение  $\Xi_h(\Omega)$  на непересекающиеся открытые множества  $\Omega_k$  такие, что  $\bigcup_{\Omega_k \in \Xi_h(\Omega)} \overline{\Omega}_k = \overline{\Omega}$ . Обозначим  $\Gamma = \bigcup_k \partial\Omega_k$  множество всех границ,

$\Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$  – множество внутренних границ и пространство следов

$\mathbf{T}(\Gamma) = \prod_{\Omega_k \in \Xi_h(\Omega)} L^2(\partial\Omega_k)$ . Введём на множестве  $\Xi_h(\Omega)$  конечномерные подпространства  $P^h \subset L^2(\Omega)$ ,  $W^h \subset H^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{V}^h \subset \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$

$$P^h = \{q | q \in L^2(\Omega) : q \in P_p(K) \forall K \in \Xi_h(\Omega)\}, \quad (2.13)$$

$$W^h = \{w | w \in H^1(\Omega) : w \in P_p(K) \forall K \in \Xi_h(\Omega)\}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{V}^h = \left\{ \mathbf{w} | \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \mathbf{w} \in [P_p(K)]^3 \forall K \in \Xi_h(\Omega) \right\}, \quad (2.15)$$

где  $P_p(K)$  – локальное пространство полиномов степени не больше  $p$ , и принадлежащие им конечноэлементные интерполянты  $p^h \in P^h$ ,  $\rho^h \in W^h$ ,  $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$

$$p^h = \sum_{i=1}^m b_i q_i, \quad q_i \in P^h, \quad \rho^h = \sum_{i=1}^m c_i w_i, \quad w_i \in W^h, \quad \mathbf{v}^h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{w}_i \in \mathbf{V}^h. \quad (2.16)$$

Для устойчивости МКЭ-дискретизации конечномерные пространства должны удовлетворять диаграмме De Rahn на дискретном уровне [227]

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) & \xrightarrow{\nabla \times} & \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega) & \xrightarrow{\nabla \cdot} & L^2(\Omega) \\ \downarrow \pi_h & & \downarrow \pi_h & & \downarrow \pi_h & & \downarrow \pi_h \\ W^h & \xrightarrow{\nabla} & E^h & \xrightarrow{\nabla \times} & V^h & \xrightarrow{\nabla \cdot} & P^h \end{array}, \quad (2.17)$$

где  $\pi_h$  – оператор проектирования.

Отличие разрывного метода Галёркина от классического метода конечных элементов заключается в том, что конечноэлементный интерполянт может быть разрывным на межэлементной границе. При этом решение и степени свободы определяются локально на каждом конечном элементе разбиения  $\Xi_h(\Omega)$ . В классическом методе конечных элементов базисная функция продолжается нулём за границей конечного элемента, и непрерывность конечноэлементного интерполянта обеспечивается корректной “сшивкой” базисных функций.

При построении вычислительных схем разрывного метода Галёркина для решения задачи фильтрации требуется введение в вариационную формулировку специальных операторов следа (теорема Соболева о следах) [123]

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega_k), \quad H^{1/2}(\partial\Omega_k) \subset L^2(\partial\Omega_k), \quad (2.18)$$

$$\gamma_n : \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega_k) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega_k), \quad L^2(\partial\Omega_k) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega_k). \quad (2.19)$$

В работе R. Temam [218] доказана теорема, которая позволяет определить нормальную компоненту векторной функции на  $\partial\Omega_k$ . Если  $\gamma_n \Psi$  является сужением  $\Psi \cdot \mathbf{n}$  на  $\partial\Omega_k$ , то  $\forall \Psi \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega_k)$  и  $\forall \varphi \in H^1(\Omega_k)$  выполнено [218]

$$(\Psi, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega_k)} + (\nabla \cdot \Psi, \varphi)_{L^2(\Omega_k)} = \langle \gamma_n \Psi, \gamma \varphi \rangle_{L^2(\partial\Omega_k)}, \quad (2.20)$$

где  $(\bullet, \bullet)_{L^2(\Omega_k)}$  – объёмный интеграл,  $\langle \bullet, \bullet \rangle_{L^2(\partial\Omega_k)}$  – поверхностный интеграл.

Для построения операторов следа на межэлементной границе (в литературе *numerical fluxes* – “численные потоки”) вводятся среднее  $\{\cdot\}$  и скачок  $[\cdot]$  [105]

$$\begin{aligned} \{\cdot\} &: [\mathbf{T}(\Gamma)]^{3 \times 3} \rightarrow [L^2(\Gamma)]^{3 \times 3}, \\ \{\cdot\} &: [\mathbf{T}(\Gamma)]^3 \rightarrow [L^2(\Gamma)]^3, \\ \{\cdot\} &: \mathbf{T}(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma), \\ [\cdot] &: [\mathbf{T}(\Gamma)]^{3 \times 3} \rightarrow [L^2(\Gamma)]^3, \\ [\cdot] &: [\mathbf{T}(\Gamma)]^3 \rightarrow L^2(\Gamma), \\ [\cdot] &: \mathbf{T}(\Gamma) \rightarrow [L^2(\Gamma)]^3, \\ \underline{[\cdot]} &: [\mathbf{T}(\Gamma)]^3 \rightarrow [L^2(\Gamma)]^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

Для функций  $\boldsymbol{\tau} \in [\mathbf{T}(\Gamma)]^{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{v} \in [\mathbf{T}(\Gamma)]^3$  и  $p \in \mathbf{T}(\Gamma)$  на внешней границе  $\partial\Omega$  [105]

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\tau}\}_{|\partial\Omega} &= \boldsymbol{\tau}, \\ \{\mathbf{v}\}_{|\partial\Omega} &= \mathbf{v}, \\ \{p\}_{|\partial\Omega} &= p, \\ [\boldsymbol{\tau}]_{|\partial\Omega} &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}, \\ [\mathbf{v}]_{|\partial\Omega} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \\ [p]_{|\partial\Omega} &= p\mathbf{n}, \\ \underline{[\mathbf{v}]}_{|\partial\Omega} &= \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}, \end{aligned}$$

на внутренней границе  $\Gamma_0 := \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_n$  между элементами  $\Omega_k$  и  $\Omega_n$  [105]

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\tau}\}_{|\Gamma_0} &= (\boldsymbol{\tau}_k + \boldsymbol{\tau}_n) / 2, \\ \{\mathbf{v}\}_{|\Gamma_0} &= (\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_n) / 2, \\ \{p\}_{|\Gamma_0} &= (p_k + p_n) / 2, \\ [\boldsymbol{\tau}]_{|\Gamma_0} &= \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_k + \boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{n}_n, \\ [\mathbf{v}]_{|\Gamma_0} &= \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k + \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{n}_n, \\ [p]_{|\Gamma_0} &= p_k \mathbf{n}_k + p_n \mathbf{n}_n, \\ \underline{[\mathbf{v}]}_{|\Gamma_0} &= \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{n}_k + \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{n}_n, \end{aligned}$$

где нижний индекс показывает принадлежность к  $\Omega_i$ ,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль.

Структуры базисов пространств  $H^1$  и  $\mathbf{H}(\text{div})$  представлены в следующем разделе.

## 2.2 Базисы конечноэлементных пространств

Задача фильтрации рассматривается в трёхмерной постановке с разбиением расчётных областей на тетраэдральные сетки. Методы построения конечноэлементных базисов высоких порядков на симплицальных разбиениях можно найти в работах [106, 212, 227, 238].

Рассмотрим тетраэдральный мастер-элемент  $\Omega_k$  на рисунке 2 в декартовой системе координат  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

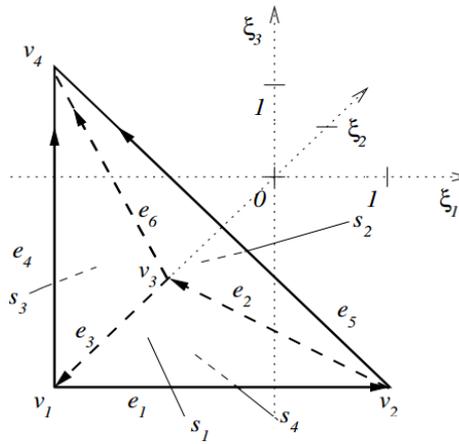


Рисунок 2 – Тетраэдральный мастер-элемент  $\Omega_k$  [212, с.86]

Введём локальные аффинные барицентрические координаты на тетраэдре

$$\lambda_i(x, y, z) = \alpha_1^i x + \alpha_2^i y + \alpha_3^i z + \alpha_4^i, \quad i = \overline{1,4} \quad (2.21)$$

такие, что каждая линейная функция  $\{\lambda_i, i = \overline{1,4}\}$  принимает значение 1 в вершине  $i$  с координатами  $(x_i, y_i, z_i)$  и ноль в остальных вершинах тетраэдра [238].

Функции (2.21) образуют линейный базис пространства  $H^1(\Omega)$ . Функции, ассоциированные с вершинами тетраэдра, называются *vertex*-функциями [212].

След *vertex*-функций является линейным на тех рёбрах и гранях, которым принадлежат ассоциированные с *vertex*-функциями вершины.

Рассмотрим на мастер-элементе  $\Omega_k$  полиномиальное пространство [212]

$$W_{\Omega_k} = \left\{ \varphi \in P_{p^b}(\Omega_k), \varphi|_{s_i} \in P_{p^{s_i}}(s_i), \varphi|_{e_j} \in P_{p^{e_j}}(e_j), i := \overline{1..4}, j := \overline{1..6} \right\}, \quad (2.22)$$

где  $\varphi \in P_{p^b}(\Omega_k)$  – ассоциированные с конечным элементом  $\Omega_k$  функции порядка  $p^b$  (*bubble*-функции),  $P_{p^{s_i}}(s_i)$  – ассоциированные с гранью  $s_i$  функции порядка  $p^{s_i}$

(face-функции),  $P_{p^{e_j}}(e_j)$  – ассоциированные с ребром  $e_j$  функции порядка  $p^{e_j}$  (edge-функции).

Введём функции Лобатто, которые являются базисными функциями  $k$ -го порядка для одномерного мастер-элемента  $[-1; 1]$ , [212]

$$l_0(x) = \frac{1-x}{2}, l_1(x) = \frac{1+x}{2}, l_k = l_0(x)l_1(x)\phi_{k-2}(x), k \geq 2, \quad (2.23)$$

где функции ядра имеют вид (показаны до 2-го порядка) [212]

$$\phi_0(x) = -2\sqrt{\frac{3}{2}}, \phi_1(x) = -2\sqrt{\frac{5}{2}}x, \phi_2(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^2 - 1) \dots \quad (2.24)$$

Базисные edge-функции строятся так, чтобы их след на соответствующих рёбрах совпадал с поведением функций Лобатто и принимал нулевое значение на других рёбрах. Пусть ребро  $e_j$  лежит между вершинами  $v_{j_1}$  и  $v_{j_2}$ , тогда edge-функция, ассоциированная с ребром  $e_j$ , имеет вид [212]

$$\varphi_k^{e_j} = \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \phi_{k-2}(\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}), 2 \leq k \leq p^{e_j}. \quad (2.25)$$

Фасе-функции имеют ненулевой след только на той грани, с которой они ассоциируются. След фасе-функции совпадает с bubble-функцией на треугольнике. Пусть вершины  $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$  образуют грань  $S_i$ , и индексы упорядочены  $i_1 < i_2 < i_3$ . Тогда фасе-функция, ассоциированная с гранью  $S_i$ , имеет вид [212]

$$\varphi_{n_1, n_2}^{S_i} = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} \phi_{n_1-1}(\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1}) \phi_{n_2-1}(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_3}), \quad (2.26)$$

где  $1 \leq n_1, n_2; n_1 + n_2 \leq p^{S_i} - 1$ .

Bubble-функции, которые ассоциированы только с конечным элементом и имеют нулевой след на всех гранях тетраэдра, образуют базис 4-го порядка [212]

$$\varphi_{n_1, n_2, n_3}^b = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2}^{n_1} \lambda_{i_3}^{n_2} \lambda_{i_4}^{n_3}, \quad (2.27)$$

где  $1 \leq n_1, n_2, n_3; n_1 + n_2 + n_3 \leq p^b - 1$ .

Таблица 2 отражает структуру иерархического базиса конформного пространства  $H^1(\Omega)$ .

Таблица 2 – Иерархический базис пространства  $H^1(\Omega)$ 

Тип функции	Порядок	Число функций формы	Число носителей
Vertex	$\geq 1$	1	4
Edge	$p^{e_j} \geq 2$	$p^{e_j} - 1$	6
Face	$p^{S_i} \geq 3$	$(p^{S_i} - 2)(p^{S_i} - 1) / 2$	4
Bubble	$p^b \geq 4$	$(p^b - 3)(p^b - 2)(p^b - 1) / 6$	1

Из таблицы 2 следует *условие минимума* для конформного пространства  $H^1(\Omega)$ : порядки базисных функций, ассоциированных с рёбрами, гранями и элементом должны быть упорядочены  $p^{e_j} < p^{S_i} < p^b$ . Графическое изображение базисных функций пространства  $H^1(\Omega)$  показано в приложении А.

Конформность пространства  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  подразумевает непрерывность нормальной компоненты векторной функции на межэлементной границе, поэтому полиномиальное пространство оснащено только face- и bubble-функциями [212]

$$V_{\Omega_k}^{\text{div}} = \left\{ \mathbf{v} \in \left( P_{p^b} \right)^3 \text{ in } \Omega_k, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \in \left( P_{p^{S_i}} \right)^3 \text{ on } S_i \subset \partial\Omega_k \right\}, \quad (2.28)$$

где  $\mathbf{v} \in \left[ P_{p^b} \right]^3$  – bubble-функции порядка  $p^b$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \in \left[ P_{p^{S_i}} \right]^3$  – face-функции порядка  $p^{S_i}$  на грани  $S_i$ .

Пусть вершины  $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$  образуют грань  $S_i$ , и индексы упорядочены  $i_1 < i_2 < i_3$ . Тогда внутреннюю нормированную нормаль к этой грани можно вычислить как

$$\mathbf{n}_i = \frac{\nabla \lambda_{i_4}}{|\nabla \lambda_{i_4}|}. \quad (2.29)$$

Нормированные тангенциальные векторы, которые проходят через основания грани и противоположащую вершину, имеют вид

$$\mathbf{t}_{v_{i_1}} = \frac{v_{i_1} - v_{i_4}}{|v_{i_1} - v_{i_4}|}, \mathbf{t}_{v_{i_2}} = \frac{v_{i_2} - v_{i_4}}{|v_{i_2} - v_{i_4}|}, \mathbf{t}_{v_{i_3}} = \frac{v_{i_3} - v_{i_4}}{|v_{i_3} - v_{i_4}|}. \quad (2.30)$$

Whitney-функции, след нормальной компоненты которых совпадает с поведением vertex-функций на рассматриваемой грани и имеет нулевое значение на других гранях, строятся по формуле [212]

$$\gamma_0^{S_i} = \frac{\lambda_{v_1} \mathbf{t}_{v_1}}{\mathbf{t}_{v_1} \cdot \mathbf{n}_i} + \frac{\lambda_{v_2} \mathbf{t}_{v_2}}{\mathbf{t}_{v_2} \cdot \mathbf{n}_i} + \frac{\lambda_{v_3} \mathbf{t}_{v_3}}{\mathbf{t}_{v_3} \cdot \mathbf{n}_i}. \quad (2.31)$$

Whitney-функции (2.31) образуют неполный векторный базис первого порядка пространства  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ . Для построения полного базиса первого порядка необходимо добавить линейные face-функции для каждой грани [227]

$$\gamma_1^{S_i,1} = \frac{\lambda_{v_2} \mathbf{t}_{v_2}}{\mathbf{t}_{v_2} \cdot \mathbf{n}_i} - \frac{\lambda_{v_1} \mathbf{t}_{v_1}}{\mathbf{t}_{v_1} \cdot \mathbf{n}_i}, \quad \gamma_1^{S_i,2} = \frac{\lambda_{v_1} \mathbf{t}_{v_1}}{\mathbf{t}_{v_1} \cdot \mathbf{n}_i} - \frac{\lambda_{v_3} \mathbf{t}_{v_3}}{\mathbf{t}_{v_3} \cdot \mathbf{n}_i}. \quad (2.32)$$

Face-функции более высокого порядка строятся с использованием полиномов Лежандра [212]

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad L_3(x) = -\frac{1}{2}x(5x^2 - 3), \dots \quad (2.33)$$

Рассмотрим ориентированное ребро между вершинами тетраэдра  $v_1$  и  $v_2$ . Vertex-функция  $\lambda_{v_1} \lambda_{v_2}$  имеет ненулевой след на двух гранях: рассматриваемой и одной смежной. Поэтому требуется процедура исключения нормальной компоненты векторной функции на смежной грани. Пусть  $e_j$  является общим ребром между гранями  $S_i$  и  $S_D$ . Для исключения нормальной компоненты на грани  $S_D$  необходимо использовать следующий в локальной ориентации за ребром  $e_j$  локальный единичный тангенциальный вектор, лежащий в плоскости  $S_D$ . Если  $\lambda_{v_4}$  – вершина, которая НЕ лежит в плоскости  $S_i$ , то вектор  $\mathbf{t}_D$ , проходящий через вершины  $\lambda_{v_2} \rightarrow \lambda_{v_4}$  будет искомым.

Такая *edge-based face*-функция порядка  $p^{S_i}$  строится по формуле [212]

$$\gamma_k^{S_i, e_j} = \lambda_{v_1} \lambda_{v_2} L_{k-2}(\lambda_{v_2} - \lambda_{v_1}) \frac{\mathbf{t}_D}{\mathbf{t}_D \cdot \mathbf{n}_i}, \quad 2 \leq k \leq p^{S_i}. \quad (2.34)$$

Также можно построить face-функции, которые имеют нулевой след нормальной компоненты не только на смежных гранях, но и на прилежащих рёбрах, и совпадают с face-based bubble-функциями из пространства  $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ . Пусть вершины  $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$  образуют грань  $S_i$ , и индексы упорядочены  $i_1 < i_2 < i_3$ , тогда *genuine* face-функция, ассоциированная с гранью  $S_i$ , имеет вид [212]

$$\gamma_{n_1, n_2}^{S_i, p^{S_i}} = \lambda_{v_1} \lambda_{v_2} \lambda_{v_3} L_{n_1-1}(\lambda_{v_2} - \lambda_{v_1}) L_{n_2-1}(\lambda_{v_1} - \lambda_{v_3}) \mathbf{n}_i, \quad (2.35)$$

где  $1 \leq n_1, n_2; n_1 + n_2 \leq p^{S_i} - 1$ .

Для повышения аппроксимирующих свойств базисов вводят bubble-функции. Пусть ребро  $e_j$  лежит между вершинами  $v_{i_1}, v_{i_2}$  и имеет единичный тангенциальный вектор  $\mathbf{t}_j$ . *Edge-based bubble*-функции используются в базисах 2-го порядка и выше, выражаются формулой [212, 227]

$$\gamma_k^{b, e_j} = \lambda_{v_1} \lambda_{v_2} L_{k-2}(\lambda_{v_2} - \lambda_{v_1}) \mathbf{t}_j, \quad 2 \leq k \leq p^b. \quad (2.36)$$

Пусть вершины  $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$  образуют грань  $S_i$ , и индексы упорядочены  $i_1 < i_2 < i_3$ , тогда *face-based bubble*-функции, ассоциированные с гранью  $S_i$  имеют вид [212]

$$\begin{aligned} \gamma_{n_1, n_2}^{S_i, b, 1} &= \lambda_{v_1} \lambda_{v_2} \lambda_{v_3} L_{n_1-1}(\lambda_{v_2} - \lambda_{v_1}) L_{n_2-1}(\lambda_{v_1} - \lambda_{v_3}) \mathbf{t}_{v_1 v_2}, \\ \gamma_{n_1, n_2}^{S_i, b, 2} &= \lambda_{v_1} \lambda_{v_2} \lambda_{v_3} L_{n_1-1}(\lambda_{v_2} - \lambda_{v_1}) L_{n_2-1}(\lambda_{v_1} - \lambda_{v_3}) \mathbf{t}_{v_3 v_1}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где  $1 \leq n_1, n_2; n_1 + n_2 \leq p^b - 1$ .

Отметим, что функции (2.37) совпадают с *genuine face*-функциями из конформного пространства  $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$  и дополняют базисы 3-го порядка.

Завершают ряд всех возможных функций пространства  $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$  *genuine bubble*-функции, которые вводятся для базисов 4-го порядка и выше [212]

$$\varphi_{n_1, n_2, n_3}^{b, m} = \lambda_{i_1} \lambda_{i_2}^{n_1} \lambda_{i_3}^{n_2} \lambda_{i_4}^{n_3} \xi_m, \quad (2.38)$$

где  $1 \leq n_1, n_2, n_3; n_1 + n_2 + n_3 \leq p^b - 1$ ,  $\xi_m$  – орт, соответствующий компоненте векторной функции.

Таблица 3 отражает структуру иерархического базиса конформного пространства  $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ .

Таблица 3 – Иерархический базис пространства  $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$

Тип функции	Порядок	Число функций формы	Число носителей
Whitney	$p^{S_i} \geq 1$	1	4
линейные face-функции	$p^{S_i} \geq 1$	2	4
edge-based face-функции	$p^{S_i} \geq 2$	$3(p^{S_i} - 1)$	4

genuine face- функции	$p^b \geq 3$	$(p^{S_i} - 2)(p^{S_i} - 1) / 2$	4
edge-based bubble	$p^b \geq 2$	$6(p^b - 1)$	1
face-based bubble	$p^b \geq 3$	$4(p^b - 2)(p^b - 1)$	1
genuine bubble	$p^b \geq 4$	$3(p^b - 3)(p^b - 2)(p^b - 1) / 6$	1

Из таблицы 3 следует *условие минимума* для конформного пространства  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ : порядки базисных функций, ассоциированных с гранями и элементом должны быть упорядочены  $p^{S_i} < p^b$ . Графическое изображение базисных функций пространства  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  показано в приложении А.

Конформность функционального пространства  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$  должна быть обеспечена согласованием локальной и глобальной нумерации внутри конечного элемента в порядке возрастания локальных номеров. Для неконформных методов данное правило может быть нарушено. Поэтому все введённые базисы можно использовать для пространств  $L^2(\Omega)$  и  $[L^2(\Omega)]^3$ .

### 2.3 МКЭ-дискретизация микромасштабной модели фильтрации

Пусть процесс вязкого течения несжимаемой жидкости протекает в каверне  $\Omega \in R^3$ , с границей втекания  $\Gamma_1$ , границей вытекания  $\Gamma_2$  и непроницаемой границей  $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ . Жидкость в начальный момент времени находится в состоянии покоя. Боковая стенка  $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  непроницаема, на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  могут быть заданы скорость течения или давление.

Математическая модель фильтрационной системы описывается системой уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в поле силы тяжести [140]

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p = \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) + \rho \mathbf{g} \text{ в } \Omega, \quad (2.39)$$

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_D \text{ на } \partial\Omega, \quad (2.41)$$

где  $\rho$  – плотность флюида ( $\text{кг/м}^3$ ),  $\mathbf{v}$  – скорость течения флюида ( $\text{м/с}$ ),  $p$  – динамическое давление ( $\text{Па}$ ),  $\mu$  – динамическая вязкость флюида ( $\text{Па}\cdot\text{с}$ ),  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения ( $\text{м/с}^2$ ),  $\mathbf{v}_D$  – функция, удовлетворяющая неоднородному условию Дирихле и принимающая нулевое значение в области  $\Omega$ .

Для единственного решения задачи (2.39) – (2.41) требуется выполнение условия для давления [140, 158]

$$\int_{\Omega} p d\Omega = 0. \quad (2.42)$$

Начальные условия, соответствующие положению жидкости в состоянии покоя, имеют вид

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad (2.43)$$

на непроницаемой боковой поверхности каверны условие непротекания жидкости формулируются для нормальной компоненты скорости

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{S_1} = 0, \quad (2.44)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали,  $S_1 = \partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  – непроницаемая стенка.

На границе втекания  $\Gamma_1$  задана нормальная компонента скорости течения

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = v_0, \quad (2.45)$$

на границе вытекания  $\Gamma_2$  заданы однородные условия для нормальной компоненты тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = -(p \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} + \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{t} = \mathbf{0}. \quad (2.46)$$

Если задано условие Неймана (2.46), то условие разрешимости (2.42) не требуется, поскольку поле давления определяется однозначно [50]. Приближённым решением задачи (2.39) – (2.41) называется пара  $(\mathbf{v}^h + \mathbf{v}_D, p^h)$ .

### 2.3.1 Вариационная формулировка МКЭ для системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

Умножим скалярно уравнения (2.39) и (2.40) на тестовые функции из пространств  $\mathbf{V}$  и  $P$ , соответственно,

$$\int_{\Omega} \left[ \rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) + \nabla p - \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \right] \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega, \quad (2.47)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, q = 0 \quad (2.48)$$

и применим формулы интегрирования по частям [238]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, dS, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, q \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (q \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS. \quad (2.50)$$

Дискретная вариационная формулировка задачи Навье-Стокса на  $\Xi_h(\Omega)$  имеет вид: найти такие  $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \times [0, T]$ ,  $p^h \in P^h \times [0, T]$ , что  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$  и  $q^h \in P^h$  [140]

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{w}^h, p^h) &= (\mathbf{w}^h, \mathbf{F})_{\Omega} + (\mathbf{w}^h, \mathbf{t})_{\Gamma_2}, \\ -b(\mathbf{v}^h, q^h) &= 0, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{v}_t^h \cdot \mathbf{w}^h \, d\Omega_K + \int_{\Omega_K} \mu (\nabla \mathbf{v}^h + \nabla^T \mathbf{v}^h) : \nabla \mathbf{w}^h \, d\Omega_K, \quad (2.52)$$

$$c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{w}^h \, d\Omega_K, \quad (2.53)$$

$$b(\mathbf{v}^h, q^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} \nabla \cdot \mathbf{v}^h \, q^h \, d\Omega_K, \quad (2.54)$$

$$(\mathbf{w}^h, \mathbf{F})_{\Omega} = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^h \, d\Omega_K, \quad (2.55)$$

$$(\mathbf{w}^h, \mathbf{t})_{\Gamma_2} = \sum_K \int_{\Gamma_K} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}^h \, dS, \quad \Gamma_K \in \Gamma_2. \quad (2.56)$$

Систему (2.51) можно трактовать как задачу о седловой точке [140]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{P} \\ -\mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

где  $\mathbf{B} = \mathbf{M} / \Delta t + \mathbf{A} + \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  – матрица массы,  $\mathbf{A}$  – матрица жёсткости,  $\mathbf{C}$  – матрица конвекции,  $\mathbf{P}$  – блок, отвечающий за дивергентное ограничение (2.40).

Элементы локальных матриц для  $\Omega_k \in \Xi_h(\Omega)$  имеют вид:  $\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}^h, \varphi \in P^h$

$$[\mathbf{B}]_{ij}^{\Omega_k} = \int_{\Omega_k} \rho \mathbf{v}^{(\beta)} \cdot \boldsymbol{\psi}_i^h / \Delta t + \mu (\nabla \boldsymbol{\psi}_j^h + \nabla^T \boldsymbol{\psi}_j^h) : \nabla \boldsymbol{\psi}_i^h + \rho (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\psi}_j^h \cdot \boldsymbol{\psi}_i^h d\Omega_k, \quad (2.58)$$

$$[\mathbf{P}]_{ij}^{\Omega_k} = - \int_{\Omega_k} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_j^h \varphi_i^h d\Omega_k, \quad (2.59)$$

$$[\mathbf{F}]_i^{\Omega_k} = - \int_{\Omega_k} (\rho \mathbf{g} + \mathbf{v}^{(\beta-1)} / \Delta t) \cdot \boldsymbol{\psi}_i^h d\Omega_k + \sum_K \int_{\Gamma_K} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\psi}_i^h dS, \quad \Gamma_K \in \Gamma_2, \quad (2.60)$$

где  $\mathbf{v}^{(\beta)}$  и  $\mathbf{v}^{(\beta-1)}$  определяются схемой аппроксимации по времени,  $\tilde{\mathbf{v}}$  определяется методом линеаризации конвективного слагаемого.

Существует достаточно много итерационных методов, позволяющих разделить поле давления и поле скоростей в системе (2.57). Например, метод Удзавы (предложен Brezzi и Fortin в 1991 году [119]), Эрроу-Гурвица [73], метод штрафного параметра [140]. Однако необходимо обсудить вопрос о разрешимости системы (2.57) в общем случае.

Матрица СЛАУ (2.57) является несингулярной, если подматрица дивергентного оператора  $\mathbf{P}$  имеет вырожденное ядро [140]

$$\ker \mathbf{P} = \{ p \mid \mathbf{P}p = 0 \} = \{ 0 \}, \quad (2.61)$$

где  $\dim(p) = t$  – размерность множества степеней свободы для поля давления.

Свойство (2.61) накладывает ограничение на выбор конечноэлементных подпространств для аппроксимации поля давления и поля скоростей. Конечноэлементные интерполянты должны удовлетворять условию Ладыженской-Бабушки-Бреци [140], иначе матрица дивергентного оператора  $\mathbf{P}^T$  имеет неполный ранг.

### 2.3.2 Условие Ладыженской-Бабушки-Бреци

Пусть  $\dim(\mathbf{v}) = n$  – размерность множества степеней свободы для поля скоростей. Тогда подматрица  $\mathbf{P}$  имеет ранг  $n$ , а подматрица  $\mathbf{P}^T$  имеет ранг  $m$ . В этом случае система (2.57) совместна, если  $m < n$ . Для существования стабильного и единственного конечноэлементного решения задачи (2.39) – (2.46) должно выполняться ЛББ условие [50, 119]

$$\inf_{p^h \in P^h} \sup_{\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}^h, p^h)}{\|p^h\|_0 \|\mathbf{v}^h\|_1} \geq \alpha > 0, \quad (2.62)$$

где  $\alpha$  не зависит от размерности конечноэлементной сетки.

В следующем разделе представлены два семейства элементов, которые удовлетворяют ЛББ условию.

### 2.3.3 Элементы, удовлетворяющие ЛББ условию

Рассмотрим два семейства элементов: Taylor-Hood и Crouzeix-Raviart.

Элементы Taylor-Hood имеют общую формулу  $V^{k+1} - P^k$ , где  $k$  – порядок базисных функций. Конечноэлементный интерполянт векторного поля скоростей аппроксимируется базисом, порядок которого на единицу больше, чем для скалярного поля давления. Элементы Taylor-Hood имеют порядок аппроксимации  $O(h^{k+1})$  [140].

Элементы Crouzeix-Raviart оснащены разрывным базисом первого порядка для поля давления и базисом второго порядка с дополнительными bubble-функциями для аппроксимации векторного поля скоростей. Элементы Crouzeix-Raviart имеют порядок аппроксимации  $O(h^2)$  [140].

Применение элементов с базисами первого порядка для скорости и давления возможно при использовании стабилизированных МКЭ или разрывного метода Галёркина [140].

### 2.3.4 Вариационная формулировка стабилизированного МКЭ для системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

Введём следующее обозначение для невязки уравнения движения [140]

$$R(\mathbf{v}^h) = \rho(\mathbf{v}_t^h + (\mathbf{v}^h \cdot \nabla)\mathbf{v}^h) - \nabla \cdot \mu(\nabla\mathbf{v}^h + \nabla^T\mathbf{v}^h) + \nabla p^h - \rho\mathbf{g}. \quad (2.63)$$

В стабилизированных вычислительных схемах метода конечных элементов в вариационную формулировку вводятся дополнительные слагаемые со специально построенным пространством тестовых функций, которые, согласно методу Галёркина, должны быть ортогональны невязке (2.63). Для системы уравнений Навье-Стокса используются три пространства тестовых функций, которые обеспечивают устойчивость МКЭ-дискретизации [219]: streamline-upwind / Petrov-Galerkin (SUPG-формулировка) для слагаемого  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ , pressure stabilizing / Petrov-Galerkin (PSPG-формулировка) для слагаемого  $\nabla p$  и least-squares on incompressibility constant (LSIC-формулировка) для уравнения неразрывности  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Согласно работе Т. Tezduyar и Y. Osawa [219], стабилизированная вариационная формулировка для системы уравнений Навье-Стокса имеет вид: найти такие  $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \times [0, T]$ ,  $p^h \in P^h \times [0, T]$ , что  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$  и  $q^h \in P^h$

$$a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{w}^h, p^h) - b(\mathbf{v}^h, q^h) + d(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, R(\mathbf{v}^h)) + p(q^h, R(\mathbf{v}^h)) + s(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{w}^h, \mathbf{F})_\Omega + (\mathbf{w}^h, \mathbf{t}^h)_{\Gamma_2}, \quad (2.64)$$

$$a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{v}_t^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K + \int_{\Omega_K} \mu(\nabla\mathbf{v}^h + \nabla^T\mathbf{v}^h) : \nabla\mathbf{w}^h d\Omega_K, \quad (2.65)$$

$$c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho(\mathbf{v}^h \cdot \nabla)\mathbf{v}^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K, \quad (2.66)$$

$$b(\mathbf{w}^h, p^h) = -\sum_K \int_{\Omega_K} \nabla \cdot \mathbf{w}^h p^h d\Omega_K, \quad (2.67)$$

$$(\mathbf{w}^h, \mathbf{F})_\Omega = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K, \quad (2.68)$$

$$(\mathbf{w}^h, \mathbf{t}^h)_{\Gamma_2} = \sum_{\Gamma_K \in \Gamma_2} \int_{\Gamma_K} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}^h dS, \quad (2.69)$$

$$d(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, R(\mathbf{v}^h)) = \sum_K \int_{\Omega_K} \tau_{\text{SUPG}} \mathbf{v}^h \cdot \nabla\mathbf{w}^h \cdot R(\mathbf{v}^h) d\Omega_K, \quad (2.70)$$

$$p(q^h, R(\mathbf{v}^h)) = \sum_K \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_K} \tau_{\text{PSPG}} \nabla q^h \cdot R(\mathbf{v}^h) d\Omega_K, \quad (2.71)$$

$$s(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_K \int_{\Omega_K} \tau_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}^h \nabla \cdot \mathbf{v}^h d\Omega_K. \quad (2.72)$$

Параметр стабилизации  $\tau_{\text{SUPG}}$  вычисляется локально по формуле [219]

$$\tau_{\text{SUPG}} = (\tau_1^{-3} + \tau_2^{-3} + \tau_3^{-3})^{-1/3}, \quad (2.73)$$

$$\tau_1 = \frac{\left\| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega \right\|}{\left\| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{w}^h \cdot (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{v}^h d\Omega \right\|}, \quad \tau_2 = \frac{\Delta t \left\| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega \right\|}{2 \left\| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{v}_t^h d\Omega \right\|},$$

$$\tau_3 = \frac{\left\| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{w}^h \cdot (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{v}^h d\Omega \right\|}{\left\| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{v}_t^h d\Omega \right\|} \text{Re},$$

где  $\Delta t$  – шаг дискретизации по времени,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса.

В формуле (2.73) величина  $\mathbf{v}^h$  используется с предыдущего слоя по времени или с предыдущей итерации по нелинейности. Вместо громоздких вычислений норм матриц, иногда используют одномерные оценки для компонент параметра  $\tau_{\text{SUPG}}$  [219]

$$\tau_1 = \frac{d}{2 \|\mathbf{v}^h\|}, \quad \tau_2 = \frac{\Delta t}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\rho d^2}{4\mu \|\mathbf{v}^h\|}. \quad (2.74)$$

Параметры стабилизации  $\tau_{\text{PSPG}}$  и  $\tau_{\text{LSIC}}$  используются для уравнения Стокса и для каждого конечного элемента  $\Omega_k \in \Xi_h(\Omega)$  вычисляются локально [219]

$$\tau_{\text{PSPG}} = (\tau_4^{-3} + \tau_5^{-3} + \tau_6^{-3})^{-1/3}, \quad (2.75)$$

$$\tau_4 = \frac{\left\| \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{v}^h d\Omega \right\|}{\left\| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{w}^h \cdot \nabla p^h d\Omega \right\|}, \quad \tau_5 = \frac{\Delta t \left\| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^h \cdot \nabla) \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega \right\|}{2 \left\| \int_{\Omega} \nabla q^h \cdot \mathbf{v}_t^h d\Omega \right\|}, \quad \tau_6 = \tau_4 \text{Re},$$

$$\tau_{\text{LSIC}} = \|\mathbf{v}^h\| d / 2, \quad (2.76)$$

где  $d$  – характерный размер конечного элемента (наибольшее ребро).

### 2.3.5 Вариационная формулировка разрывного метода Галёркина для системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

DG-дискретизации системы уравнений Навье-Стокса различаются выбором “численных потоков” для аппроксимации решения на межэлементной границе. Чаще в литературе встречаются локальный разрывный метод Галёркина LDG (Local Discontinuous Galerkin) и IP-DG-метод (Inner Penalty).

LDG-метод был предложен В. Cockburn в работе [132] и основан на введении дополнительной дуальной переменной  $\boldsymbol{\tau} = \mu \nabla \mathbf{v}$ . Решением задачи Навье-Стокса является тройка  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, p)$ . В LDG-методе число степеней свободы всегда больше, чем в классическом смешанном DG-методе. Для устойчивости вычислительной схемы вводятся дополнительные стабилизирующие параметры, выбор которых при решении прикладных задач не тривиален.

Предлагается альтернативный метод, который расширяет идеи работы [170] о “почленной” дискретизации системы уравнений Навье-Стокса.

Для тетраэдра  $\Omega_k \in \Xi_h(\Omega)$  рассмотрим скалярные произведения слагаемых с градиентом давления и линейризованным конвективным членом на тестовую функцию  $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ . Воспользуемся формулами интегрирования по частям и запишем

$$\int_{\Omega_k} \nabla p \cdot \mathbf{w} d\Omega = - \int_{\Omega_k} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_k} \tilde{p} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dS, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \quad (2.77)$$

$$\int_{\Omega_k} \rho \nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\Omega = - \int_{\Omega_k} \rho \nabla \mathbf{w} : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_k} \rho (\mathbf{a} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dS, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \quad (2.78)$$

где функции  $\tilde{p}$  и  $\tilde{\mathbf{v}}$  являются неоднозначными на межэлементной границе. Суммирование по всем ориентированным граням даёт следующий результат

$$\sum_k \int_{\partial\Omega_k} \tilde{p} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dS = \int_{\Gamma} \tilde{p} [\mathbf{w}] dS, \quad (2.79)$$

$$\sum_k \int_{\partial\Omega_k} \rho (\mathbf{a} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dS = \int_{\Gamma} \rho (\mathbf{a} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) : [\underline{\mathbf{w}}] dS. \quad (2.80)$$

Если давление является непрерывной функцией, а для скорости используется противопотоковая дискретизация (upwind-дискретизация), то [203]

$$\tilde{p} = \{p\}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = [\underline{\mathbf{v}}] \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \partial\Omega_k \in \Gamma. \quad (2.81)$$

После суммирования по всем тетраэдрам можно записать

$$\sum_k \int_{\Omega_k} \nabla p \cdot \mathbf{w} d\Omega_k = - \sum_K \int_{\Omega_K} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega_K + \sum_K \int_{\Gamma_K} \{p\} [\mathbf{w}] dS, \quad (2.82)$$

$$\sum_k \int_{\Omega_k} \rho \nabla \mathbf{w} : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{v}) d\Omega_k = - \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} d\Omega_K + \sum_K \int_{\Gamma_K} \rho ([\underline{\mathbf{w}}] \cdot \mathbf{a}) \cdot ([\underline{\mathbf{v}}] \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (2.83)$$

Для вязкого слагаемого используется вариационная DG-формулировка для уравнений второго порядка, вывод которой показан в [105, 106].

Дискретная IP-DG-формулировка разрывного метода Галёркина для системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости имеет вид: найти такие  $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \times [0, T]$ ,  $p^h \in P^h \times [0, T]$ , что  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$  и  $q^h \in P^h$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) + b(\mathbf{w}^h, p^h) &= (\mathbf{w}^h, \mathbf{F}), \\ -b(\mathbf{v}^h, q^h) + d(q^h, p^h) &= 0, \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) &= \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{v}_i^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K + \int_{\Omega_K} \mu (\nabla \mathbf{v}^h + \nabla^T \mathbf{v}^h) : \nabla \mathbf{w}^h d\Omega_K - \\ &- \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \left\{ \mu (\nabla \mathbf{v}^h + (\nabla \mathbf{v}^h)^T) \right\} : [\underline{\mathbf{w}}^h] + \lambda \left\{ \mu (\nabla \mathbf{w}^h + (\nabla \mathbf{w}^h)^T) \right\} : [\underline{\mathbf{v}}^h] - \tau^{DG} [\underline{\mathbf{v}}^h] : [\underline{\mathbf{w}}^h] dS, \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$c(\mathbf{a}; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \nabla \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega_K + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \rho ([\underline{\mathbf{w}}^h] \cdot \mathbf{a}) \cdot ([\underline{\mathbf{v}}^h] \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (2.86)$$

$$b(\mathbf{v}^h, q^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} \nabla \cdot \mathbf{v}^h q^h d\Omega_K + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \{q^h\} [\underline{\mathbf{v}}^h] dS, \quad (2.87)$$

$$(\mathbf{w}^h, \mathbf{F}) = \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_K + \sum_{\partial\Omega_M \in \Gamma_2} \int_{\partial\Omega_M} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}^h dS + \lambda \sum_{\partial\Omega_N \in \Gamma_1} \int_{\partial\Omega_N} \mu (\nabla \mathbf{w}^h + \nabla^T \mathbf{w}^h) : (\mathbf{v}_D \otimes \mathbf{n}) - \quad (2.88)$$

$$- \tau^{DG} (\mathbf{v}_D \otimes \mathbf{n}) : (\mathbf{w}^h \otimes \mathbf{n}) - \rho (\mathbf{w}^h \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_D dS.$$

$$d(q^h, p^h) = \sum_K \tau^{DG} \int_{\partial\Omega_K} [q^h] \cdot [p^h], \quad \partial\Omega_K \in \Gamma_0 \quad (2.89)$$

При  $\lambda = -1$  формулировка называется несимметричной NIPG (Nonsymmetrical Inner Penalty Galerkin), на параметр стабилизации накладывается условие  $\tau^{DG} > 1$ , при  $\lambda = 1$  – симметричной SIPG (Symmetrical Inner Penalty Galerkin), на параметр стабилизации накладывается условие  $\tau^{DG} \gg 1$  [202].

### 2.3.6 Линеаризация системы уравнений Навье-Стокса

Точность решения задачи Навье-Стокса зависит от метода линеаризации конвективного слагаемого  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ . Рассмотрим трилинейную форму

$$c(\mathbf{a}; \mathbf{w}, \mathbf{v}) = ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (2.90)$$

где  $\mathbf{a}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ .

Представим скорость  $\mathbf{v}$  в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \delta \mathbf{v}, \quad (2.91)$$

где  $\mathbf{v}^0$  – начальное приближение,  $\delta \mathbf{v}$  – коррекция.

Наиболее простым методом линеаризации с точки зрения реализации является метод итераций Пикара (или метод простой итерации) [179]

---

#### Алгоритм 1 – Метод итераций Пикара для нелинейной системы уравнений Навье-Стокса

---

- 1: выбрать начальное приближение  $\mathbf{v}^0$  и точность  $\varepsilon$ ;
  - 2: **for**  $k := 0, 1, 2, \dots$  **do**
  - 3:     найти решение системы (2.57) для  $c(\mathbf{a}(\mathbf{v}^k); \mathbf{w}, \mathbf{v}^{k+1})$ ;
  - 4:     **if**  $|\delta \mathbf{v}| < \varepsilon$  **then**
  - 5:         Stop.
  - 6:     **else**  $\mathbf{v}^{k+1} := \omega \mathbf{v}^k + (1 - \omega) \mathbf{v}^{k+1}$ , где  $0 < \omega < 1$  – параметр релаксации (обычно  $\omega = 0.5$ )
  - 7: **end for.**
- 

Как отмечается в работе [179], метод простой итерации неэффективен при решении задачи Навье-Стокса с превалирующей конвекцией. Поэтому для линеаризации используется более эффективный метод Ньютона.

В окрестности начального приближения  $\mathbf{v}^0$  можно использовать разложение в ряд Тейлора и представить  $\mathbf{a}(\mathbf{v})$  в виде

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{v}_0) + \nabla \mathbf{a}^T(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0} \delta \mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{v}_0) + \delta \mathbf{v}, \quad (2.92)$$

$$\text{здесь } \nabla \mathbf{a}^T(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0} = \left( \frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \otimes (v_x, v_y, v_z) \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0} = \mathbf{I}.$$

Ниже приведён алгоритм метода Ньютона (или Ньютона-Рафсона) [179]

---

**Алгоритм 2 – Метод Ньютона для нелинейной системы уравнений Навье-Стокса**


---

- 1: выбрать начальное приближение  $\mathbf{v}^0$  и точность  $\varepsilon$ ;
  - 2: **for**  $k := 0, 2, 3 \dots$  **do**
  - 3:     найти решение относительно коррекции при условии, что  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}$  ;
  - 4:     **if**  $|\delta\mathbf{v}| < \varepsilon$  **then**
  - 5:         Stop.
  - 6:     **else**  $\mathbf{v}^{k+1} := \mathbf{v}^k + \omega\delta\mathbf{v}$ , где  $0 < \omega < 1$  – damping-параметр
  - 7:     **end for**.
- 

Вариационная формулировка для задачи Навье-Стокса относительно коррекции принимает вид: найти такие  $\delta\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \times [0, T]$ ,  $p^h \in P^h \times [0, T]$ , что  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$  и  $q^h \in P^h$

1. классический МКЭ, используются формулы (2.52) – (2.56):

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{w}^h, \delta\mathbf{v}^h) + c(\mathbf{v}^0; \mathbf{w}^h, \delta\mathbf{v}^h) + c(\delta\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0) + b(\delta\mathbf{v}^h, q^h) = \\ & = (\mathbf{w}^h, \mathbf{F})_{\Omega} + (\mathbf{w}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h)_{\Gamma_2} - a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0) - c(\mathbf{v}^0; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0) - b(\mathbf{v}^0, q^h) - b(\delta\mathbf{v}^h, q^h), \end{aligned} \quad (2.93)$$

2. стабилизированный МКЭ, используются формулы (2.65) – (2.72):

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{w}^h, \delta\mathbf{v}^h) + c(\mathbf{v}^0; \mathbf{w}^h, \delta\mathbf{v}^h) + c(\delta\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0) + b(\mathbf{w}^h, p^h) - b(\delta\mathbf{v}^h, q^h) + \\ & + d(\mathbf{v}^0; \mathbf{w}^h, R(\delta\mathbf{v}^h)) + d(\delta\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, R(\mathbf{v}^0)) + p(q^h, R(\delta\mathbf{v}^h)) + \\ & + s(\mathbf{w}^h, \delta\mathbf{v}^h) = (\mathbf{w}^h, \mathbf{F})_{\Omega} + (\mathbf{w}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h)_{\Gamma_2} - a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0) - c(\mathbf{v}^0; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0) + \\ & + b(\mathbf{v}^0, q^h) - d(\mathbf{v}^0; \mathbf{w}^h, R(\mathbf{v}^0)) - p(q^h, R(\mathbf{v}^0)) - s(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0), \end{aligned} \quad (2.94)$$

3. разрывный метод Галёркина, используются формулы (2.85) – (2.89):

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{w}^h, \delta\mathbf{v}^h) + c(\mathbf{v}^0; \mathbf{w}^h, \delta\mathbf{v}^h) + c(\delta\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0) + b(\mathbf{w}^h, p^h) - b(\delta\mathbf{v}^h, q^h) = \\ & = (\mathbf{w}^h, \mathbf{F}) - a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0) - c(\mathbf{v}^0; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^0) + b(\mathbf{v}^0, q^h). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Краевые условия (2.45) и (2.46) при этом модифицируются

$$\begin{aligned} & \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = v_1 - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_1}, \\ & -(p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} + \mu(\nabla\delta\mathbf{v} + (\nabla\delta\mathbf{v})^T) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} - \mu(\nabla\mathbf{v}^0 + (\nabla\mathbf{v}^0)^T) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Для нестационарных задач приближение  $\mathbf{v}^0$  выбирается в соответствии с начальным условием.

### 2.3.7 Проекционный метод Chorin-Temam

Существуют два семейства методов дискретизации системы уравнений Навье-Стокса по времени: явные и неявные.

Неявные методы в отличие от явных в большинстве своём являются устойчивыми [181]. Поэтому неявные методы незаменимы при дискретизации жёстких систем уравнений Навье-Стокса в условиях низкой вязкости флюида. Двухслойная неявная схема для производной имеет вид

$$\mathbf{v}_t = \frac{\mathbf{v}^{j+1} - \mathbf{v}^j}{\Delta t}, \quad (2.97)$$

где  $j$  – слой по времени,  $\Delta t$  – шаг по времени.

При использовании схемы (2.97) на каждом шаге по времени решается СЛАУ, в матрицу которой вносится вклад  $\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}^{j+1} \cdot \mathbf{w} / \Delta t d\Omega$ , а в правую часть  $\mathbf{M} \mathbf{v}^j = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}^j \cdot \mathbf{w} / \Delta t d\Omega$ , где  $\mathbf{M}$  – матрица массы. Дополнительно на каждом временном слое выполняются итерации по нелинейности, поэтому применение неявных схем является весьма ресурсозатратным.

Применять явные методы к системе уравнений Навье-Стокса непосредственно невозможно [140]. Поэтому для нестационарных уравнений Навье-Стокса используются полунеявные методы и разложение (2.10):  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \nabla p$ , где  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$ ,  $p \in H^1(\Omega)$ .

Проекционный метод Chorin-Temam на базе физического расщепления состоит из двух этапов. На первом этапе диссипативное и конвективное слагаемые в уравнении движения интегрируются неявно с применением вычислительных схем стабилизированного метода конечных элементов или разрывного метода Галёркина. На втором этапе давление и дивергентное ограничение интегрируются по времени явно. Алгоритм применения разрывного метода Галёркина и проекционной процедуры Chorin-Temam реализован впервые.

Алгоритм проекционного метода Chorin-Temam имеет вид [140].

---

**Алгоритм 3 – Метод Chorin-Темат (физическое расщепление)**


---

1:  $\mathbf{v}^0$  – начальное условие для скорости;

2: **for**  $k := 0, 1, 2, 3 \dots$  **do**

3: найти  $\mathbf{v}_0^{k+1}$  из 
$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{v}_0^{k+1} - \mathbf{v}^k}{\Delta t} + \rho (\mathbf{v}^k \cdot \nabla) \mathbf{v}_0^{k+1} = \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{v}_0^{k+1} + (\nabla \mathbf{v}_0^{k+1})^T \right) + \rho \mathbf{g}, \\ \mathbf{v}_0^{k+1} \Big|_{\partial \Omega} = \mathbf{v}_D, \end{cases}$$

4: найти  $\mathbf{v}^{k+1}$  и  $p^{k+1}$  из 
$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}_0^{k+1}}{\Delta t} + \nabla p^{k+1} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^{k+1} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_D, \end{cases}$$

$\mathbf{v}^{k+1} = \mathfrak{R} \mathbf{v}_0^{k+1}$ ,  $\Delta t \nabla p^{k+1} = (\mathbf{I} - \mathfrak{R}) \mathbf{v}_0^{k+1}$ , где  $\mathfrak{R}$  – ортогональный проекционный оператор,

5: **end for.**

---

Решение уравнения на шаге 3 в алгоритме 3 целесообразно построить на базе разрывного метода Галёркина или стабилизированных схем МКЭ, поскольку оператор уравнения несамосопряжённый, а система является жёсткой при  $\mu < \rho$ . Для уравнения на шаге 4 можно использовать разрывный метод Галёркина, поэтому в матричной форме имеем [140]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} / \Delta t & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{k+1} \\ p^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{v}_0^{k+1} / \Delta t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.98)$$

где  $\mathbf{M}$  – матрица массы,  $\mathbf{P}$  – блок, отвечающий за дивергентное ограничение.

Поскольку матрица массы  $\mathbf{M}$  всегда положительно определена и не вырождена, то [140]

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}) p^{k+1} &= \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}^T \mathbf{v}_0^{k+1}, \\ \mathbf{M} \mathbf{v}^{k+1} &= \mathbf{M} \mathbf{v}_0^{k+1} - \Delta t \mathbf{P} p^{k+1}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Условие устойчивости явных методов определяется критерием Куранта-Фридрихса-Леви [218]

$$\Delta t \leq C d^k, \quad (2.100)$$

где  $C$  – константа,  $d$  – размер конечного элемента,  $k$  – порядок базиса для скорости.

Процедура обращения матрицы массы  $\mathbf{M}$  не является ресурсозатратной, поскольку базис пространства  $\mathbf{H}(\text{div})$  построен при использовании полиномов Лежандра, которые обеспечивают диагональный вид матрицы массы.

### 2.3.8 Метод алгебраического расщепления

Алгебраическое расщепление ориентировано на блочную структуру матрицы СЛАУ специального вида

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{k+1} \\ p^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

где  $\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{A} + \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  – матрица массы,  $\mathbf{A}$  – матрица жёсткости,  $\mathbf{C}$  – матрица конвекции,  $\mathbf{P}$  – блок, отвечающий за дивергентное ограничение (2.40).

Систему (2.101) можно записать в алгебраической форме [140]

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}) p^{k+1} &= \mathbf{P}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}, \\ \mathbf{B} \mathbf{v}^{k+1} &= \mathbf{F} - \mathbf{P} p^{k+1}, \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{B}^{-1} := \Delta t (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} + \mathbf{C}))^{-1} \mathbf{M}^{-1}. \quad (2.103)$$

Для матрицы СЛАУ (2.101) существует неполное LU-разложение вида [205]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{P}^T & -\mathbf{P}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P} \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}}_U = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B} \mathbf{H}_2 \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{P}^T (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad (2.104)$$

где в зависимости от аппроксимации  $\mathbf{B}^{-1}$  можно построить разные схемы алгебраического расщепления,  $\mathbf{H}_1$  – аппроксимация  $\mathbf{B}^{-1}$  в нижнем блоке, а  $\mathbf{H}_2$  – аппроксимация  $\mathbf{B}^{-1}$  в верхнем блоке.

Для выполнения закона сохранения массы, необходимо выбрать  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}$  и в первом приближении  $\mathbf{H} \approx \Delta t \mathbf{M}^{-1}$ . Для сжимаемых течений  $\mathbf{H}_1 \neq \mathbf{H}_2$  [140].

---

#### Алгоритм 4 – Проекционный метод (алгебраическое расщепление)

---

1:	$\mathbf{v}^0$ – начальное условие для скорости;	
2:	<b>for</b> $k := 0, 2, 3 \dots$ <b>do</b>	
3:	найти $\mathbf{v}_0^{k+1}$ из $\mathbf{B} \mathbf{v}_0^{k+1} = \mathbf{F}$ , найти $p_0^{k+1}$ из $\mathbf{P}^T \mathbf{v}_0^{k+1} - \mathbf{P}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{P} p_0^{k+1} = 0$ ,	L-шаг
4:	$\mathbf{I} p^{k+1} = p_0^{k+1}$ , найти $\mathbf{v}^{k+1}$ из $\mathbf{v}^{k+1} + \mathbf{H}_2 \mathbf{P} p^{k+1} = \mathbf{v}_0^{k+1}$ ,	U-шаг
5:	<b>end for.</b>	

---

При  $\mathbf{H}_1 \equiv \mathbf{H}_2$  алгоритм алгебраического расщепления и метод Chorin-Темат для СЛАУ (2.101) совпадают.

### 2.3.9 Верификация вычислительных схем МКЭ-дискретизации микромасштабной модели фильтрации

Для верификации вычислительных схем рассмотрим следующую систему уравнений Навье-Стокса [181]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{F}, \\ \text{div}(\mathbf{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.105)$$

с начальными и краевыми условиями

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_D|_{t=0}, \quad \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_D, \quad (2.106)$$

где  $\mathbf{v}_D = \left( 1 - e^{Cx} \cos(2\pi y) + t, \quad \frac{C}{2\pi} e^{Cx} \sin(2\pi y) + t, \quad 0 \right)^T$ .

Давление вычисляется по формуле [181]

$$p = -\frac{1}{2} e^{2Cx} + \delta, \quad (2.107)$$

где  $C = \text{Re}/2 - \sqrt{\text{Re}^2/4 + 4\pi^2}$ , параметр  $\delta$  выбирается таким, что  $\int p d\Omega = 0$  (см. таблицу 4).

Таблица 4 – Зависимость параметра течения  $C$  от параметра  $\text{Re}$

Re	10	100	1000
$C$	-3.029845345	-0.39323780	-0.0394768

Расчётная область – параллелепипед  $[-0.5; 1.5] \times [-0.5; 1] \times [-0.5; 1]$ . Триангуляция показана на рисунке 3: сетка содержит 729 вершин, 4184 ребра со средней длиной  $d = 0.2$ , 6528 граней, 3072 тетраэдра.

Аналитическое решение задачи (2.105) – (2.106) при  $\text{Re} = 10$  в момент времени  $t = 0$  изображено на рисунке 4.

Для решения задачи (2.105) – (2.106) используются классический метод конечных элементов, стабилизированный метод конечных элементов (SFEM – Stabilized Finite Element Method), разрывный метод Галёркина в симметричной и несимметричной постановках (NIPG и SIPG – Nonsymmetrical / Symmetrical IP-DG).

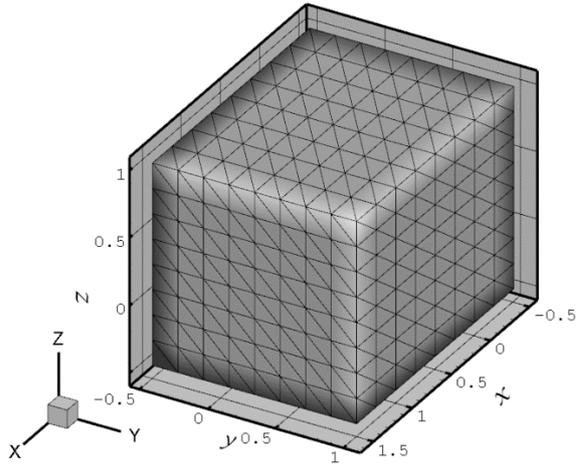
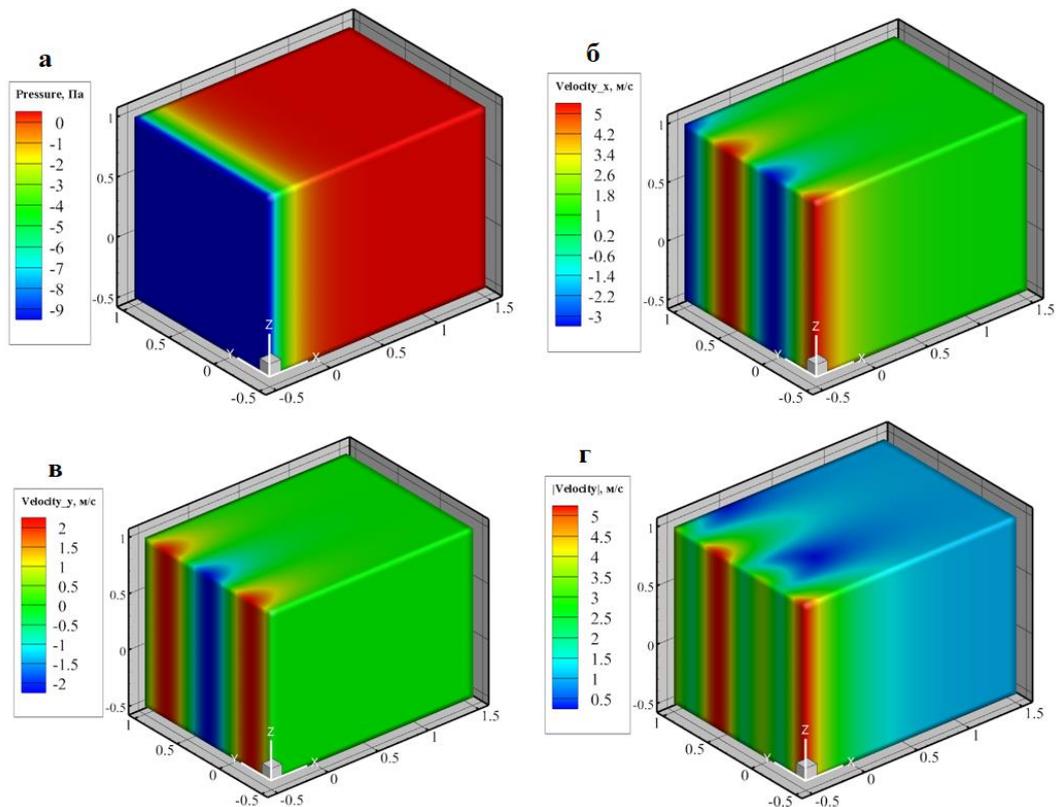


Рисунок 3 – Расчётная область и сетка

Рисунок 4 – Аналитическое решение задачи при  $Re = 10$  и  $t = 0$ : давление (а),  $x$ -компонента скорости (б),  $y$ -компонента скорости (в), модуль скорости (г),

Конечные элементы – тетраэдры, оснащённые базисом первого порядка пространства  $H^1$  для поля давления и полными базисами от первого до второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для вектора скорости.

Для решения СЛАУ используется комбинированный решатель на базе методов бисопряжённых градиентов (BiCG – Biconjugate Gradient Method) и GMRES(5) (GMRES – Generalized Minimal Residual Method). Итерации метода GMRES подавляют медленно осциллирующую компоненту вектора невязки, итерации метода

BiCG подавляют быстро осциллирующую компоненту. Чередование итераций разных методов позволяет построить эффективный алгоритм решения СЛАУ с несимметричной матрицей. Порог точности для останова алгоритмов  $\varepsilon = 10^{-12}$ . Идея применения комбинированных решателей на подпространствах Крылова принадлежит профессору, д.т.н. Э.П. Шуриной.

Для линеаризации уравнений Навье-Стокса используются методы Пикара (Picard) и Ньютона (Newton). Порог точности для останова итерационного процесса по нелинейности  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Нестационарная задача рассматривается в отрезке  $[0, 1]$  с шагом  $\Delta t = 0.1$ . Для классического МКЭ используется алгебраическое расщепление матрицы СЛАУ, для стабилизированного МКЭ и DG-метода – неявная двухслойная схема Эйлера с линеаризацией конвективного члена. В проекционном методе Chorin-Teman используется разрывный метод Галёркина.

Относительные погрешности для скорости и давления, полученных численно разными методами, определяются в норме пространства  $L^2$

$$\Delta_{\mathbf{v}} = \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} 100\%, \quad \Delta_p = \frac{\|p - p^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|p\|_{L^2(\Omega)}} 100\%, \quad (2.108)$$

где  $(\mathbf{v}^h, p^h)$  – численное решение,  $(\mathbf{v}, p)$  – аналитическое решение.

Параметр стабилизации в разрывном методе Галёркина  $\tau^{\text{DG}}$  влияет не только на точность решения задачи, но и на число обусловленности матрицы СЛАУ. Для построения графиков зависимости числа обусловленности от параметра стабилизации применим формулу для вычисления числа обусловленности

$$\text{Cond}(\mathbf{A}) = \sigma_1 / \sigma_r, \quad (2.109)$$

где  $\sigma_1$  – наибольшее сингулярное число,  $\sigma_r$  – наименьшее, отличное от нуля, сингулярное число матрицы  $\mathbf{A}$ . Алгоритм сингулярного разложения матриц (SVD) на базе ортогональных преобразований описан в [226].

Общее число степеней свободы в таблицах будет обозначаться аббревиатурой DOF (Degrees of Freedom). DOF совпадает с числом неизвестных в СЛАУ.

Таблица 5 – Результаты:  $Re = 100$ , полный базис первого порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления

метод	DOF		погрешность		$\ \nabla \cdot \mathbf{v}\ _{L^2(\Omega)}$	итерации	время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}},\%$	$\Delta_p,\%$			
Классический МКЭ + алгебраическое расщепление	19584	729	Базисы не удовлетворяют ЛББ условию				
SFEM + неявная схема + Picard	19584	729	8.3	9.5	8.51E – 7	26	10.2
SFEM + неявная схема + Newton			6.3	5.2	7.62E – 7	5	2.3
NIPG + неявная схема + Picard	36864	12288	8.3	9.5	8.65E – 7	31	32.2
NIPG + неявная схема + Newton			6.3	5.2	7.91E – 7	5	4.7
Chorin-Temam Method			8.1	9.7	8.18E – 7	–	2.6

Таблица 6 – Результаты:  $Re = 100$ , базис второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления (элементы Taylor-Hood)

метод	DOF		погрешность		$\ \nabla \cdot \mathbf{v}\ _{L^2(\Omega)}$	итерации	время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}},\%$	$\Delta_p,\%$			
Классический МКЭ + алгебраическое расщепление	23768	729	6.3	8.5	4.68E – 8	–	2.8
SFEM + неявная схема + Picard	23768	729	6.6	8.5	7.34E – 8	29	12.2
SFEM + неявная схема + Newton			5.0	4.4	4.34E – 8	5	2.8
NIPG + неявная схема + Picard	55296	12288	6.6	8.5	8.21E – 8	32	39.0
NIPG + неявная схема + Newton			5.0	4.4	5.89E – 8	5	5.6
Chorin-Temam Method			6.3	8.5	4.68E – 8	–	3.2

Таблица 7 – Результаты:  $Re = 100$ , базис второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления (элементы Crouzeix-Raviart)

метод	DOF		погрешность		$\ \nabla \cdot \mathbf{v}\ _{L^2(\Omega)}$	итерации	время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}},\%$	$\Delta_p,\%$			
Классический МКЭ + алгебраическое расщепление	27952	729	5.9	7.6	2.13E – 8	–	3.5
SFEM + неявная схема + Picard	27952	729	6.3	7.7	5.98E – 9	31	16.6
SFEM + неявная схема + Newton			4.7	3.9	1.02E – 9	5	3.4
NIPG + неявная схема + Picard	73728	12288	6.3	7.7	9.31E – 9	34	50.7
NIPG + неявная схема + Newton			4.7	3.9	3.91E – 9	5	7.3
Chorin-Temam Method			5.9	7.6	2.13E – 8	–	3.9

Таблица 8 – Результаты:  $Re = 2500$ , полный базис первого порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления

метод	DOF		погрешность		$\ \nabla \cdot \mathbf{v}\ _{L^2(\Omega)}$	итерации	время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}},\%$	$\Delta_p,\%$			
Классический МКЭ + алгебраическое расщепление	19584	729	Базисы не удовлетворяют ЛББ условию				
SFEM + неявная схема + Picard	19584	729	Аварийный выход: стагнация по нелинейности				
SFEM + неявная схема + Newton			6.3	5.2	7.62E – 7	5	2.3
NIPG + неявная схема + Picard	36864	12288	Аварийный выход: стагнация по нелинейности				
NIPG + неявная схема + Newton			6.3	5.2	7.91E – 7	5	4.7
Chorin-Temam Method			8.1	9.7	8.18E – 7	–	2.6

Таблица 9 – Результаты:  $Re = 2500$ , базис второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления (элементы Taylor-Hood)

метод	DOF		погрешность		$\ \nabla \cdot \mathbf{v}\ _{L^2(\Omega)}$	итерации	время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}},\%$	$\Delta_p,\%$			
Классический МКЭ + алгебраическое расщепление	23768	729	Аварийный выход по максимальному числу итераций				
SFEM + неявная схема + Picard	23768	729	Аварийный выход: стагнация по нелинейности				
SFEM + неявная схема + Newton			5.0	4.4	4.34E – 8	5	2.8
NIPG + неявная схема + Picard	55296	12288	Аварийный выход: стагнация по нелинейности				
NIPG + неявная схема + Newton			5.0	4.4	5.89E – 8	5	5.6
Chorin-Temam Method			6.3	8.5	4.68E – 8	–	3.2

Таблица 10 – Результаты:  $Re = 2500$ , базис второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления (элементы Crouzeix-Raviart)

метод	DOF		погрешность		$\ \nabla \cdot \mathbf{v}\ _{L^2(\Omega)}$	итерации	время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}},\%$	$\Delta_p,\%$			
Классический МКЭ + алгебраическое расщепление	27952	729	Аварийный выход по максимальному числу итераций				
SFEM + неявная схема + Picard	27952	729	Аварийный выход: стагнация по нелинейности				
SFEM + неявная схема + Newton			4.7	3.9	1.02E – 9	5	3.4
NIPG + неявная схема + Picard	73728	12288	Аварийный выход: стагнация по нелинейности				
NIPG + неявная схема + Newton			4.7	3.9	3.91E – 9	5	7.3
Chorin-Temam Method			5.9	7.6	2.13E – 8	–	3.9

Вычислительные эксперименты проводились для трёх типов конечных элементов: с базисами первого порядка для вектора скорости и давления, Taylor-Hood и Crouzeix-Raviart. Элементы Taylor-Hood выбраны с базисами первого порядка для поля давления и второго порядка (до edge-based-face-функций) для вектора скорости. Элементы Crouzeix-Raviart дополнительно оснащены edge-based-bubble-face-функциями для вектора скорости.

Таблицы 5 – 7 содержат результаты вычислительных экспериментов для параметра  $Re = 100$ . Классический метод конечных элементов с проекционной процедурой алгебраического расщепления матрицы СЛАУ не позволяет получить решение задачи при использовании элементов одного порядка для вектора скорости и давления, поскольку они не удовлетворяют ЛББ условию. Наилучший результат по соотношению точности и затраченных вычислительных ресурсов показывает проекционная процедура физического расщепления Chorin-Teman, которая на первом этапе вычисляет вектор скорости по неявной схеме на базе разрывного метода Галёркина и поле давления по явной схеме с помощью проекционного оператора на втором этапе. Разрывный метод Галёркина с неявной схемой интегрирования по времени и методом Пикара для линеаризации уравнения движения является неэффективным, поскольку время решения задачи увеличилось примерно на порядок по сравнению с методом Ньютона для разрывного метода Галёркина и стабилизированного метода конечных элементов. Оптимальное соотношение точности и времени решения при использовании неявной схемы интегрирования по времени и метода Ньютона для линеаризации показывает стабилизированный метод конечных элементов.

В таблицах 8 – 10 приведены результаты вычислительных экспериментов, параметр  $Re = 2500$ . Классический МКЭ становится неустойчивым, поскольку система Навье-Стокса является жёсткой. Методы, использующие неявные схемы интегрирования по времени и метод Пикара, не достигают требуемой точности. Устойчивость при решении жестких задач показывают проекционная процедура физического расщепления Chorin-Teman и алгоритмы, использующие неявные схемы интегрирования по времени и метод Ньютона для линеаризации.

На рисунках 5 – 12 приведены графики, отражающие зависимость погрешности решения уравнений Навье-Стокса (для поля давления) и числа обусловленности матрицы СЛАУ от параметра стабилизации в разрывном методе Галёркина.

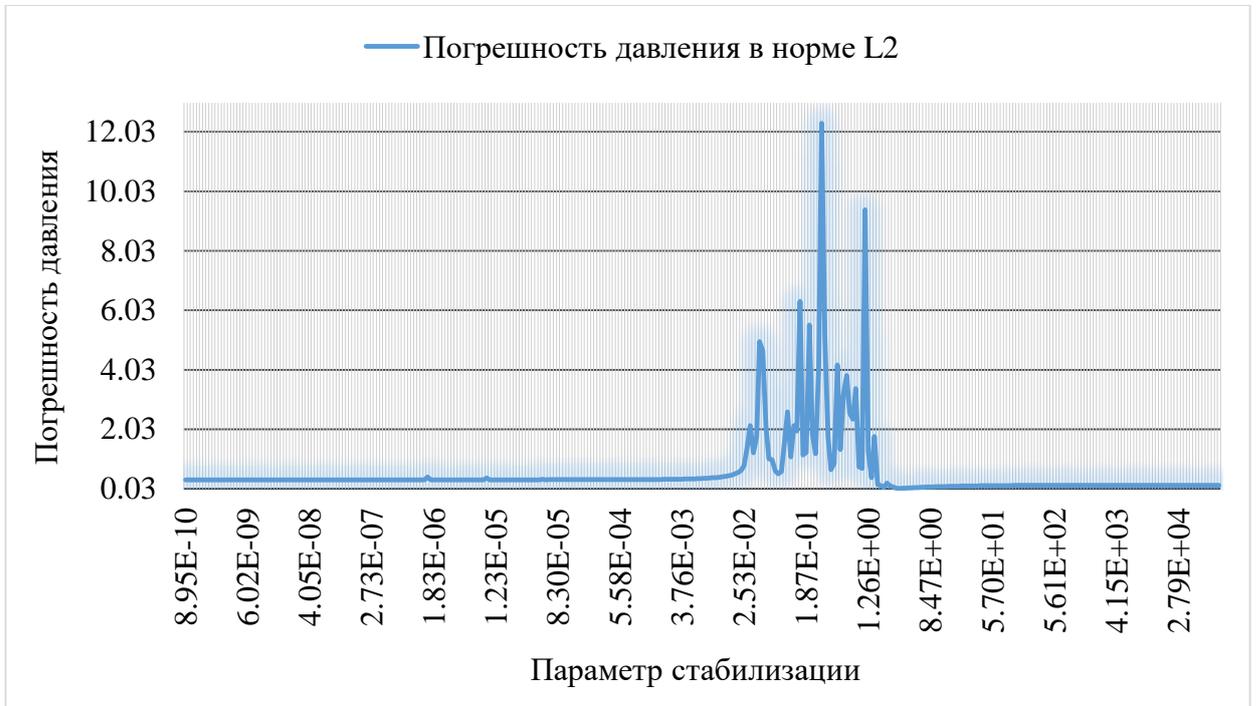


Рисунок 5 – Зависимость погрешности давления от параметра стабилизации (симметричная IP-постановка,  $Re = 100$ )

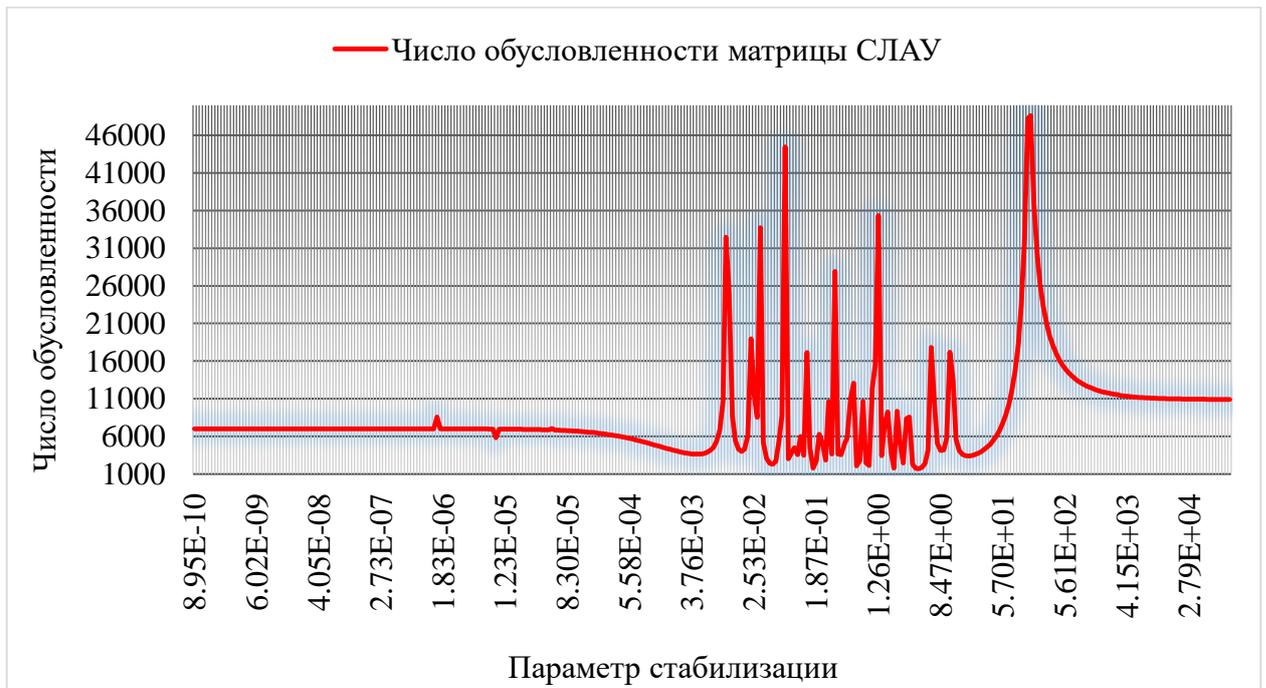


Рисунок 6 – Зависимость числа обусловленности матрицы СЛАУ от параметра стабилизации (симметричная IP-постановка,  $Re = 100$ )

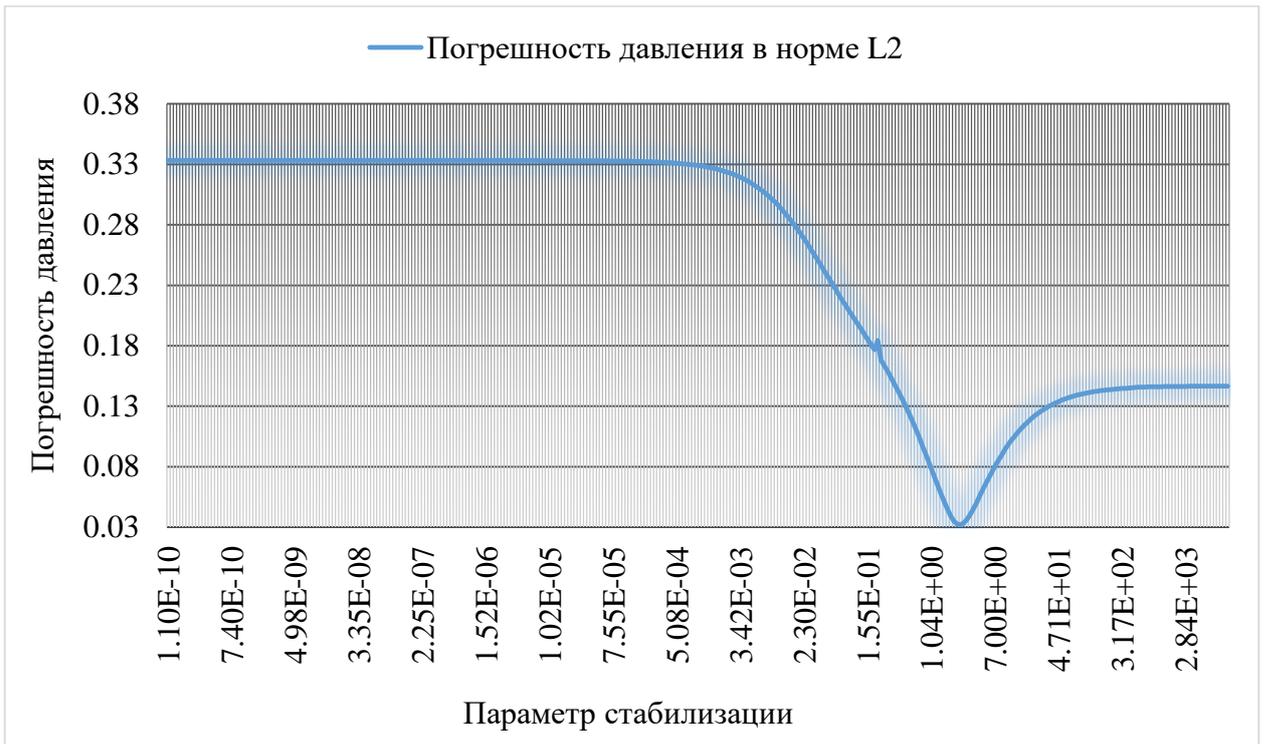


Рисунок 7 – Зависимость погрешности давления от параметра стабилизации (несимметричная IP-постановка,  $Re = 100$ )

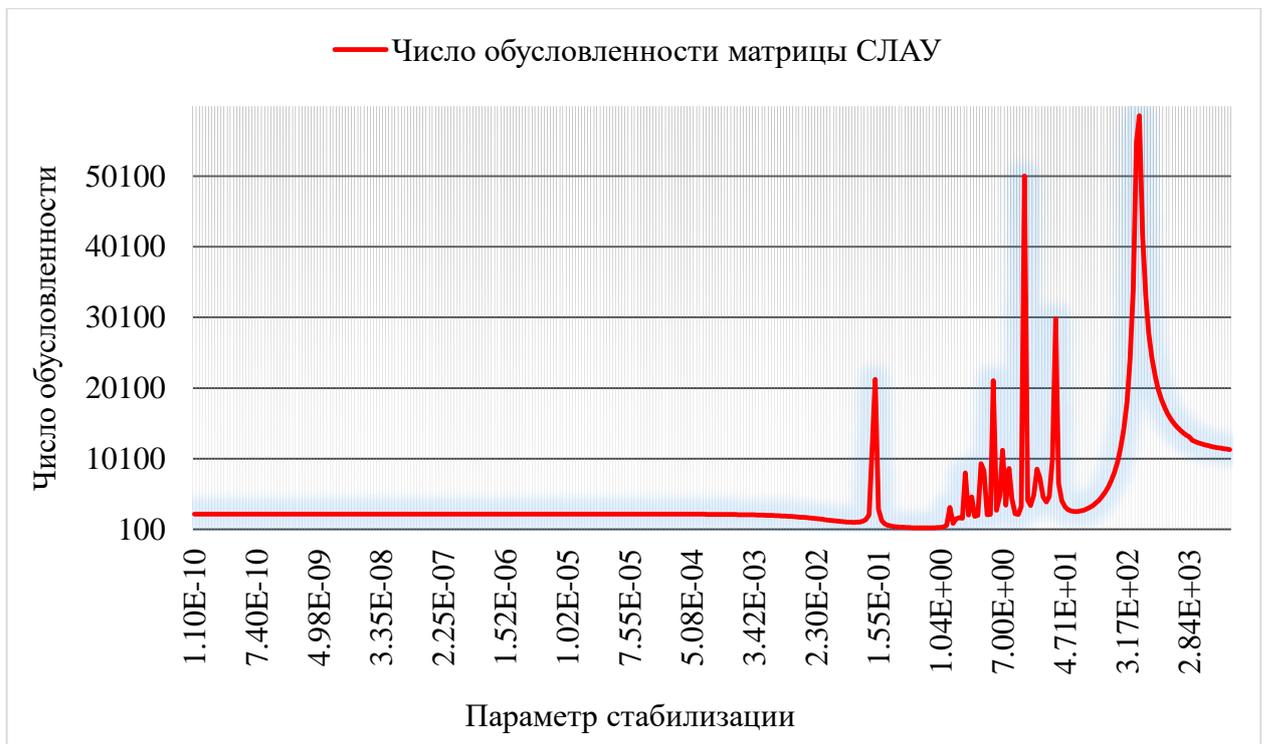


Рисунок 8 – Зависимость числа обусловленности матрицы СЛАУ от параметра стабилизации (несимметричная IP-постановка,  $Re = 100$ )

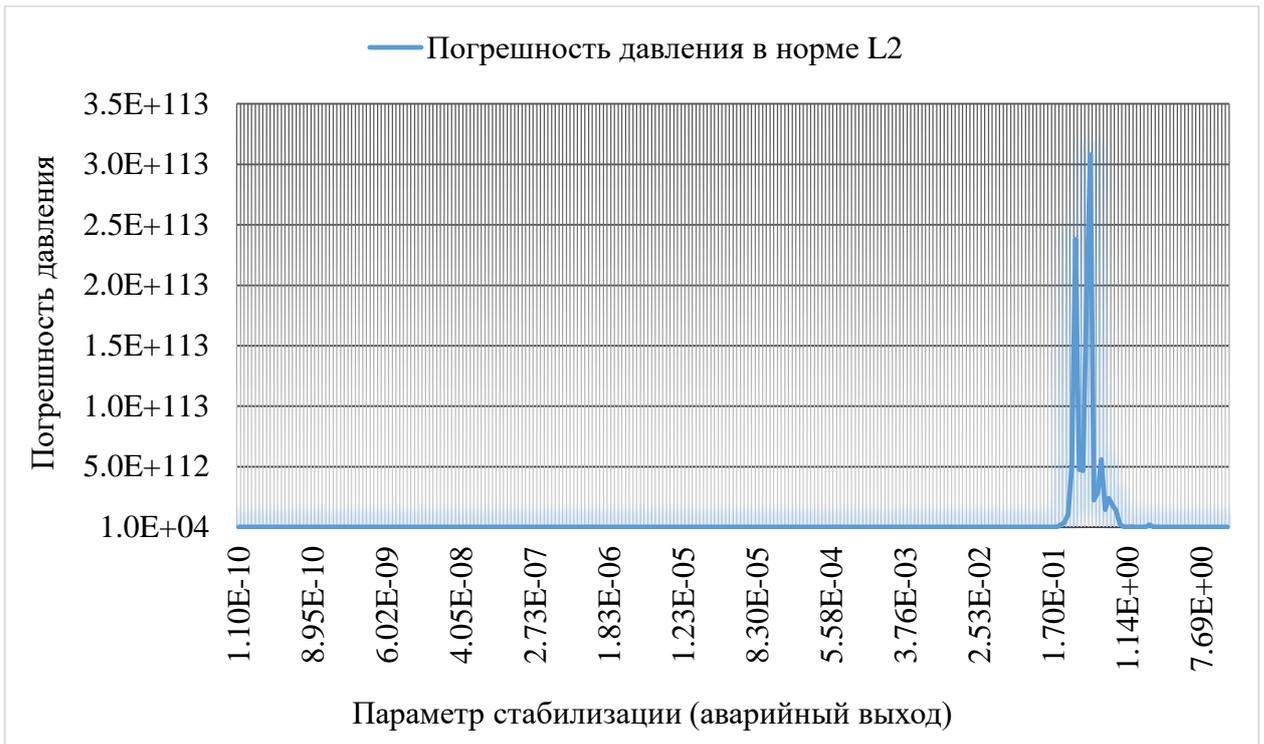


Рисунок 9 – Зависимость погрешности давления от параметра стабилизации (симметричная IP-постановка,  $Re = 2500$ )

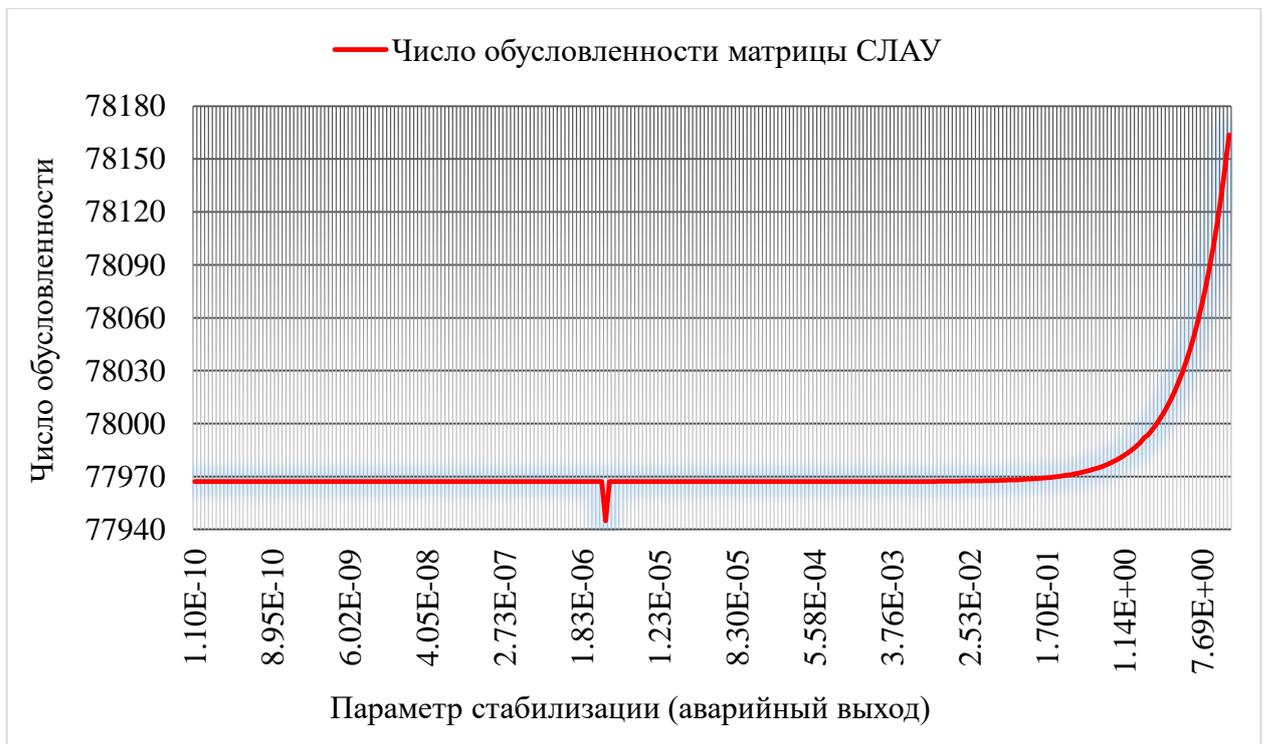


Рисунок 10 – Зависимость числа обусловленности матрицы СЛАУ от параметра стабилизации (симметричная IP-постановка,  $Re = 2500$ )

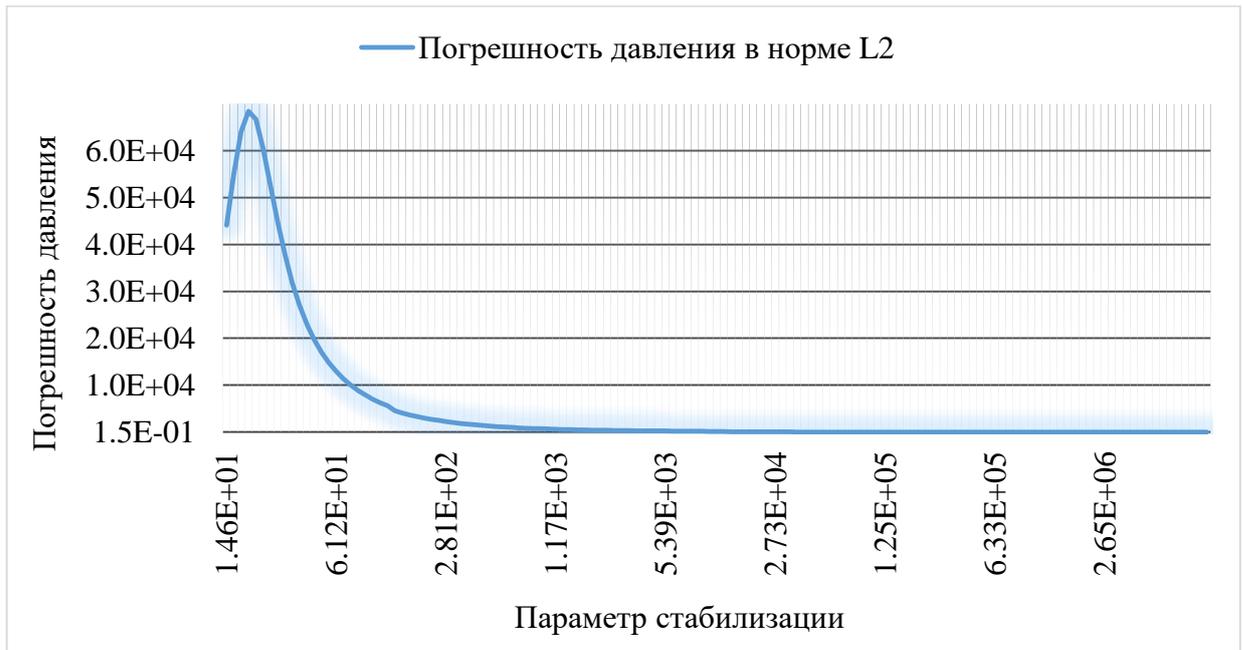


Рисунок 11 – Зависимость погрешности давления от параметра стабилизации (несимметричная IP-постановка,  $Re = 2500$ )

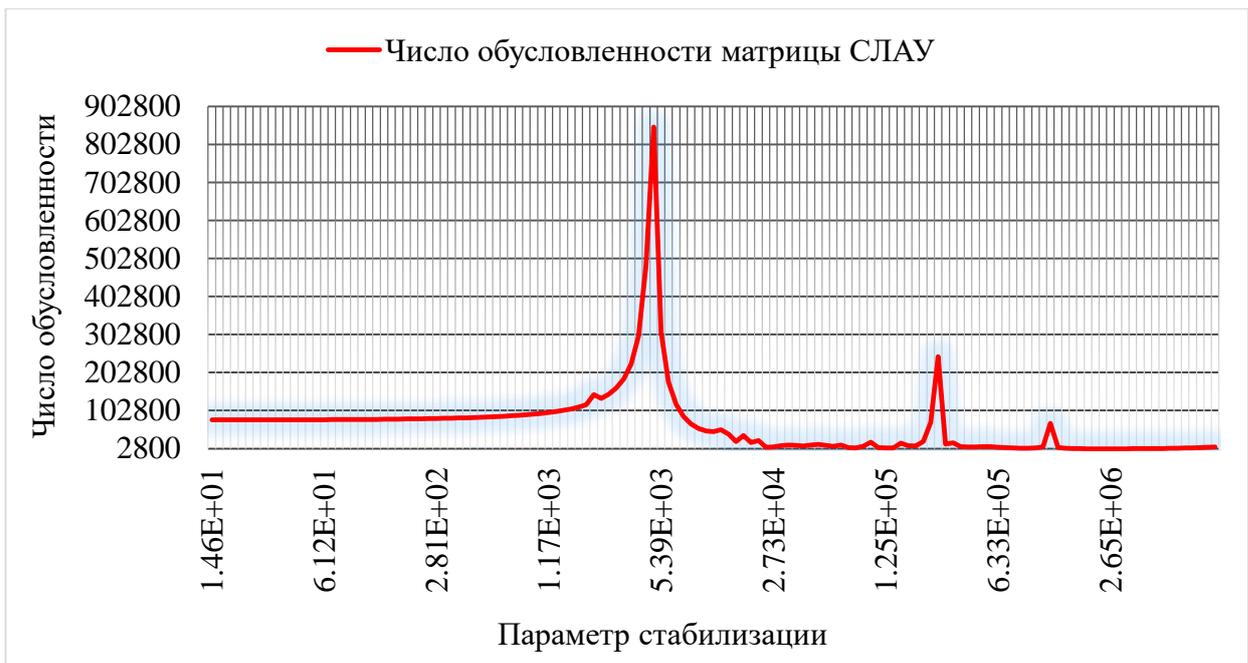


Рисунок 12 – Зависимость числа обусловленности матрицы СЛАУ от параметра стабилизации (несимметричная IP-постановка,  $Re = 2500$ )

Из анализа графиков, изображённых на рисунках 5 – 12, можно сделать вывод, что симметричная постановка разрывного метода Галёркина является менее устойчивой, чем несимметричная, поэтому не пригодна для решения жёстких задач (см. рисунки 9 – 10). Устойчивость несимметричной постановки обеспечивается выбором  $\tau^{DG} = Re$ . Такие же выводы были сделаны в работах [202, 203, 214, 231].

## 2.4 Моделирование ламинарных и вихревых течений флюида

Моделирование течения флюидов в кавернах (каналах) является важной задачей на этапе закачки пропанта в процессе гидравлического разрыва пласта. Как отмечается в работе [167], одна из причин появления пропантовых пробок в трещинах связана с увеличением концентрации пропанта вследствие сужения канала, а также появления карманов, в которых происходит оседание пропанта при вихревом течении закачиваемой жидкости-носителя.

Модель вихревых и ламинарных течений несжимаемой жидкости в канале описывается системой уравнений Навье-Стокса, которая не всегда имеет аналитическое решения в среде со сложной структурой. Поэтому целесообразно провести валидацию вычислительных схем разрывного метода Галёркина и стабилизированного векторного метода конечных элементов на базе результатов физического эксперимента.

В механике сплошных сред процесс течения несжимаемых жидкостей и газов описывается математической моделью, основанной на системе несжимаемых уравнений Навье-Стокса [27]. Поэтому для валидации можно использовать результаты физических экспериментов по измерению скорости несжимаемого потока воздуха, приведённые в работе В.Ф. Армалу и др. [104].

На рисунке 13 изображена тестовая камера, которая является составной частью механизма для сепарации сыпучих смесей. Общая длина тестовой камеры  $L = 100$  см, высота  $H = 2$  см и ширина  $W = 8$  см. Поток воздуха со скоростью  $v_0$  попадает в камеру через входное отверстие шириной  $h = 1$  см и преодолевает ступенчатый выступ, высота которого  $S = 1$  см и длина  $d = 1.5$  см.

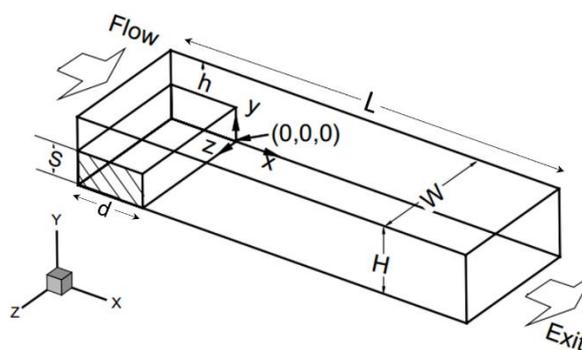


Рисунок 13 – Тестовая камера из эксперимента В.Ф. Армалу [104, с. 3575]

Согласно работе [104] конфигурация, изображённая на рисунке 13, приводит к появлению в камере вихревых течений, которые обеспечивают работу устройства для сепарации. Отсев вещества необходимой фракции происходит за счёт изменения величины скорости потока воздуха на входе. Плотность воздуха  $1.3 \text{ кг/м}^3$ , динамическая вязкость воздуха  $18.27 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$ .

При использовании LVD-системы (Laser Doppler Velocimeter) измеряются величины компонент скорости  $v_x$  и  $v_y$  с погрешностью  $\pm 0.01\%$  и  $\pm 0.005\%$ , соответственно.

Несжимаемое течение воздуха-носителя сыпучих смесей в физическом эксперименте может трактоваться как течение несжимаемой жидкости-носителя пропана в рамках механики сплошных сред.

Математическая формализация описанного физического эксперимента основана на системе уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p = \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) + \rho \mathbf{g}, \quad (2.110)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (2.111)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad (2.112)$$

неоднородным краевым условием Дирихле на входной границе

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{\text{FLOW}}} = v_0 \quad (2.113)$$

и с однородными условиями Неймана на границе вытекания

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{\text{EXIT}}} = \mathbf{0}. \quad (2.114)$$

На непроницаемой боковой поверхности камеры условие непротекания формулируются для нормальной компоненты скорости в виде

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{\text{WALL}}} = 0, \quad (2.115)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе  $\Gamma_{\text{WALL}} = \partial\Omega \setminus (\Gamma_{\text{FLOW}} \cup \Gamma_{\text{EXIT}})$  – боковая поверхность камеры.

Триангуляция расчётной области  $\Omega$  показана на рисунке 14. Сетка содержит 2335 вершин, 13550 рёбер, 21200 граней и 9984 тетраэдра. Используются конечные

элементы с базисами от первого до второго порядка для вектора скорости и первого порядка для поля давления.

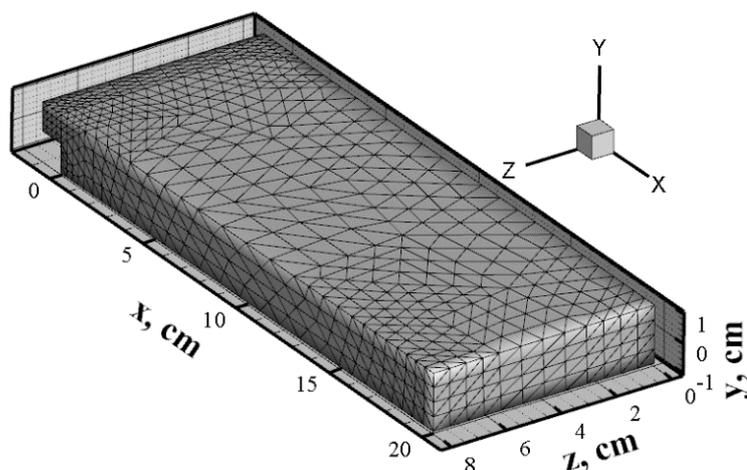


Рисунок 14 – Триангуляция расчётной области  $\Omega$

Для решения задачи (2.110) – (2.115) используется проекционная процедура физического расщепление Chorin-Temam на базе разрывного метода Галёркина в несимметричной постановке (NIPG) и стабилизированного метода конечных элементов (SFEM). Для решения СЛАУ используется комбинированный решатель на базе методов бисопряжённых градиентов BiCG и GMRES(5). Порог точности для останова алгоритмов  $\varepsilon = 10^{-12}$ .

Относительную погрешность скорости определим в евклидовой норме

$$\Delta_{\mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}^*\|_{E^n(\Omega)}}{\|\mathbf{u}^*\|_{E^n(\Omega)}} \cdot 100\%, \quad (2.116)$$

где  $\mathbf{u}^h$  – численное решение,  $\mathbf{u}^*$  – данные эксперимента.

Распределение поля давления и модуля скорости в сечении  $z = 4$  для  $Re = 98$  (безвихревое течение) показано на рисунке 15.

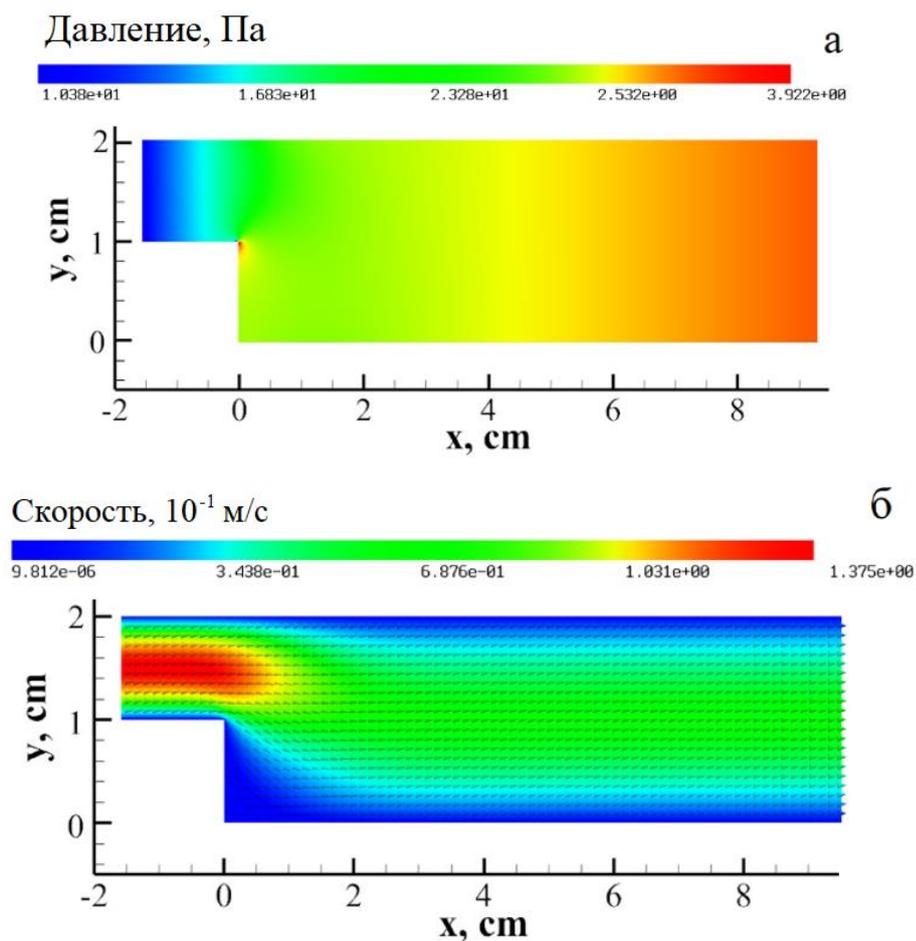


Рисунок 15 – Распределение давления (а) и модуль вектора скорости (б) и в тестовой камере,  $Re = 98$  ( $v_0 = 0.138$  м/с): в момент времени  $t = 0.07$  с

Распределение поля давления и модуля скорости в сечении  $z = 4$  для  $Re = 100$  показана на рисунках 17 – 23.

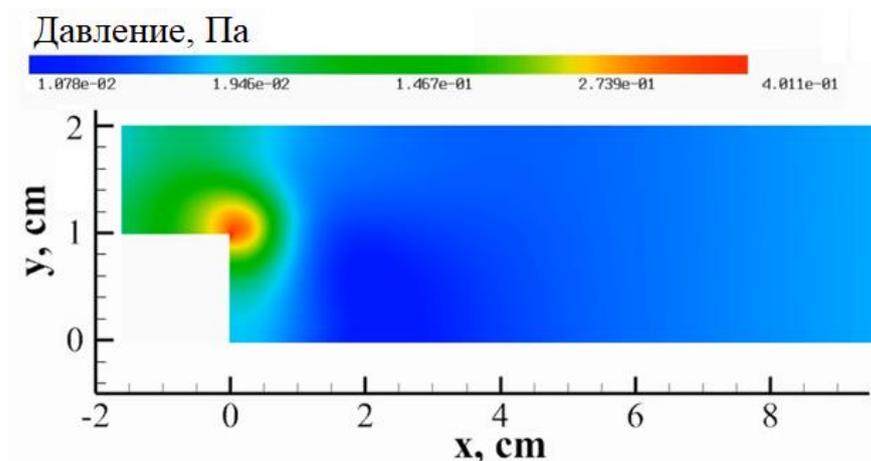


Рисунок 16 – Распределение давления в тестовой камере,  $Re = 100$  ( $v_0 = 0.14$  м/с) в момент времени  $t = 0.01$

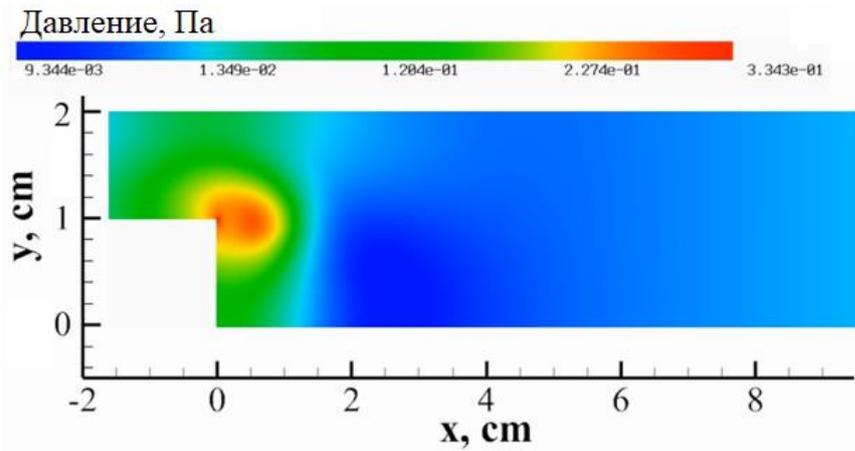


Рисунок 17 – Распределение давления в тестовой камере,  $Re = 100$  ( $v_0 = 0.14$  м/с): в момент времени  $t = 0.03$  с

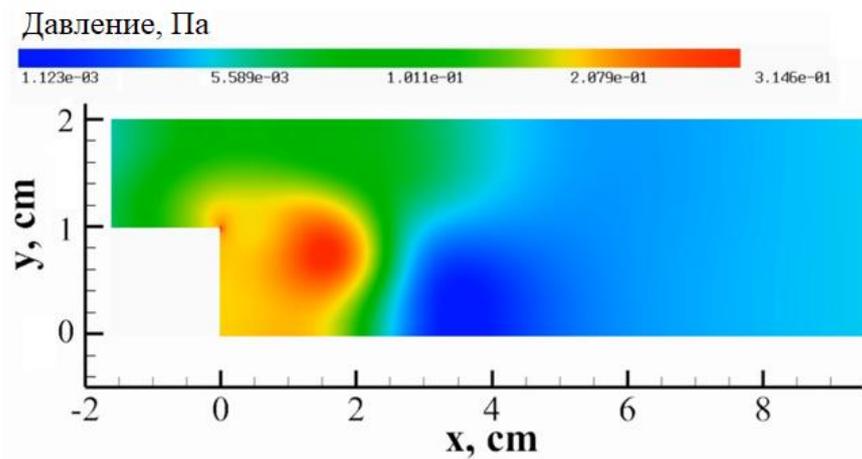


Рисунок 18 – Распределение давления в тестовой камере,  $Re = 100$  ( $v_0 = 0.14$  м/с): в момент времени  $t = 0.05$  с

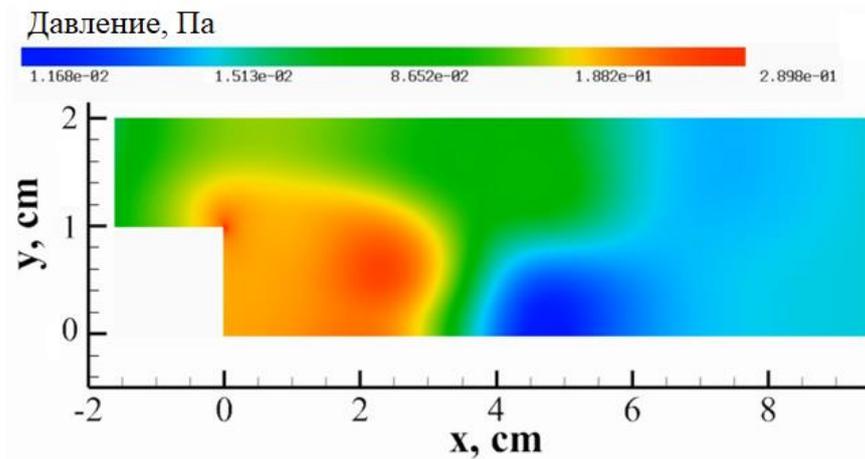


Рисунок 19 – Распределение давления в тестовой камере,  $Re = 100$  ( $v_0 = 0.14$  м/с): в момент времени  $t = 0.07$  с

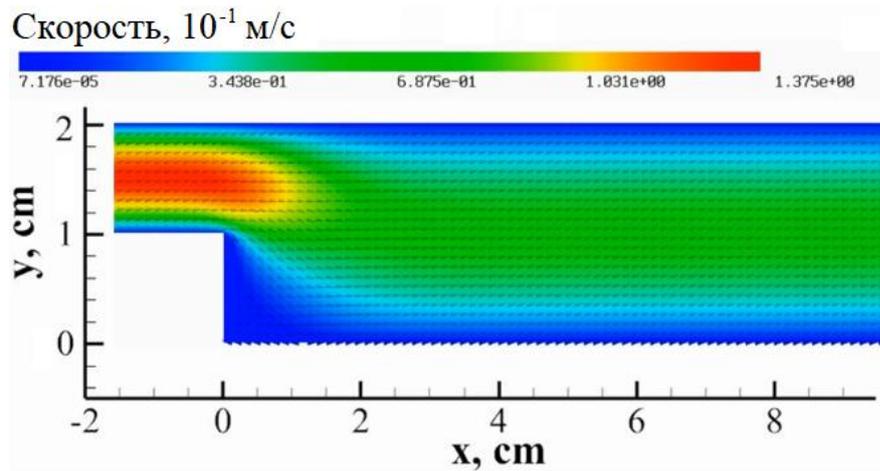


Рисунок 20 – Модуль вектора скорости в тестовой камере,  $Re = 100$  ( $v_0 = 0.14$  м/с) в момент времени  $t = 0.01$  с

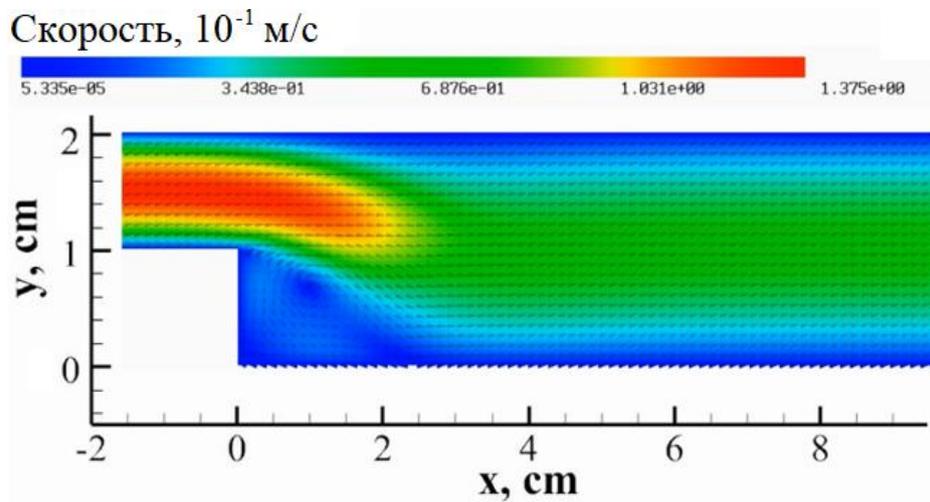


Рисунок 21 – Модуль вектора скорости в тестовой камере,  $Re = 100$  ( $v_0 = 0.14$  м/с) в момент времени  $t = 0.03$  с

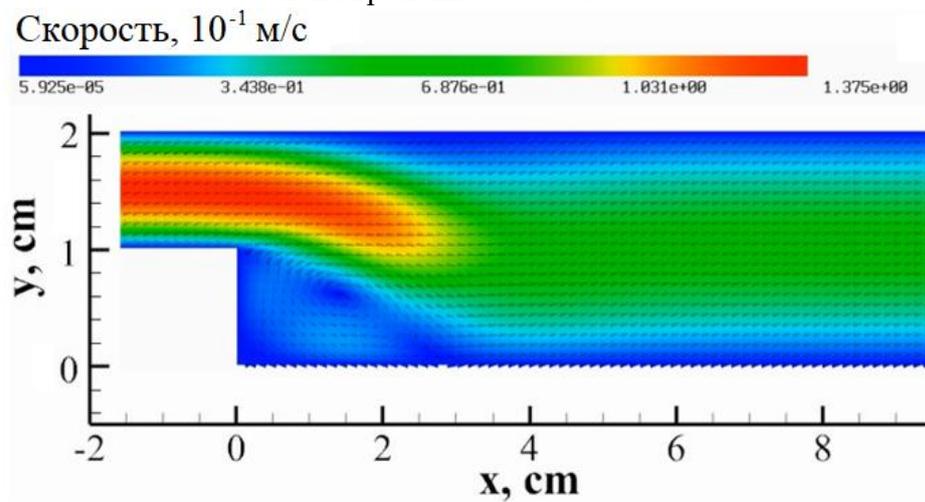


Рисунок 22 – Модуль вектора скорости в тестовой камере,  $Re = 100$  ( $v_0 = 0.14$  м/с) в момент времени  $t = 0.05$  с

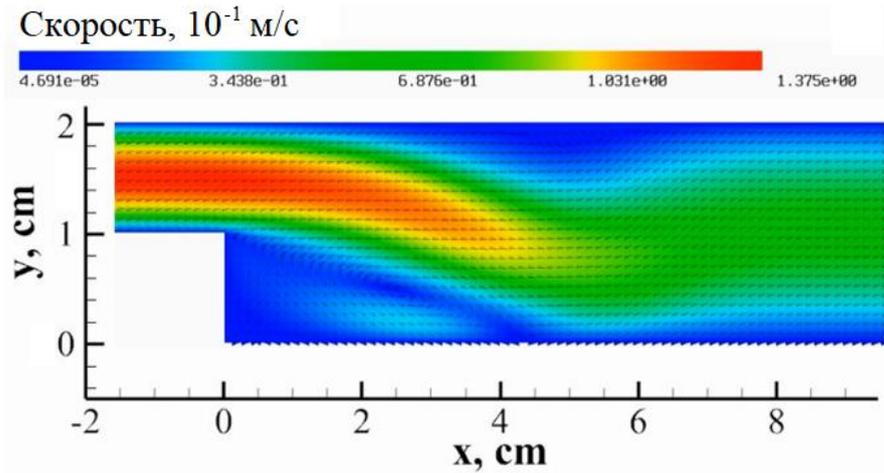


Рисунок 23 – Модуль вектора скорости в тестовой камере,  $Re = 100$  ( $v_0 = 0.14$  м/с) в момент времени  $t = 0.07$  с

Было установлено, что при  $Re > 98.5$  наблюдается зарождения вихревого течения в пристеночной области за ступенчатым выступом, что подтверждается результатами измерений в [104]. Применительно к задаче о течении воды-носителя пропанта зона зарождения вихревых течений является потенциальным местом возникновения пропантовой пробки.

На рисунке 24 показаны профили  $x$ -компоненты вектора скорости при установившемся вихревом течении ( $Re = 525$ ) в сечениях  $z = 0.125$  и  $1$ , полученные в ходе физического эксперимента.

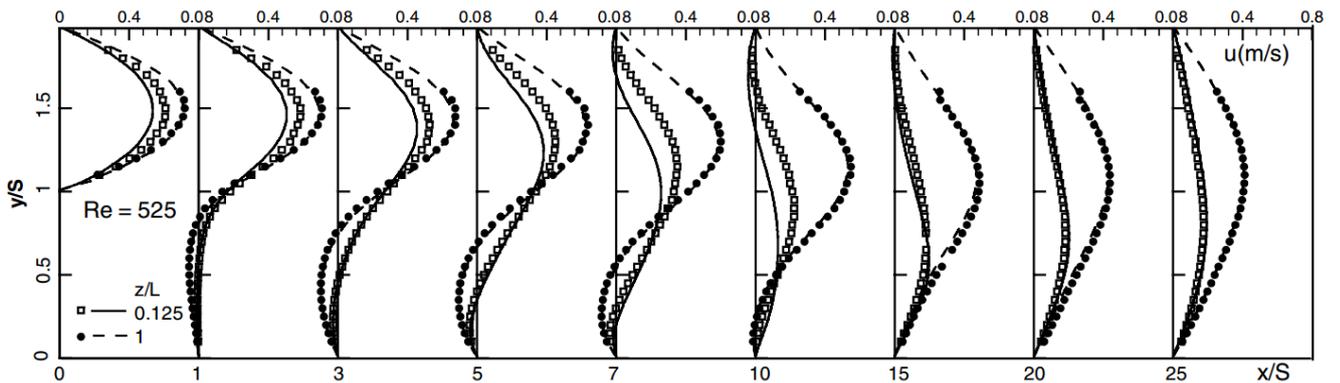


Рисунок 24 – Физический эксперимент: установившееся течение,  $Re = 525$  ( $v_0 = 0.7$  м/с), профили  $x$ -компоненты вектора скорости [104, с. 3581]

На рисунке 25 изображён график вычисленной  $x$ -компоненты вектора скорости в сечении  $z = 0.125$ .

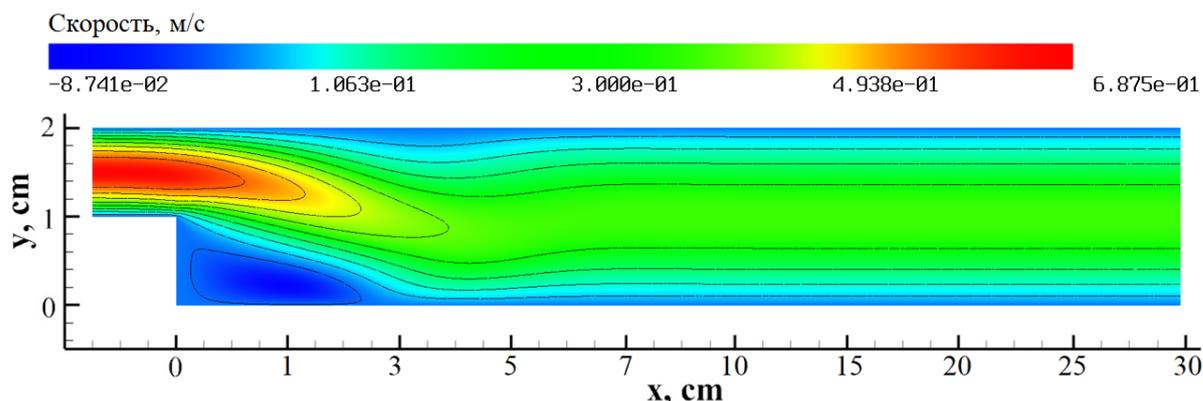


Рисунок 25 – Численное решение: установившееся течение,  $Re = 525$  ( $v_0 = 0.7$  м/с), график  $x$ -компоненты вектора скорости в сечении  $z = 0.125$

По графикам физического эксперимента были выбраны опорные точки, в которых вычислялась относительная погрешность численного решения задачи (2.110) – (2.115) по формуле (2.116). Результаты отражены в таблицах 11 – 16.

Таблица 11 – Относительная погрешность  $x$ -компоненты скорости:  $Re = 525$ ,  $z = 0.125$ , полный базис первого порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления, шаг по времени  $\Delta t = 0.01$

метод	Относительная погрешность для $x$ -компоненты вектора скорости $\Delta_u$ , %						
	$x := 0$	$x := 1$	$x := 3$	$x := 5$	$x := 7$	$x := 10$	$x := 15$
NIPG	5.3	8.4	10.6	9.8	8.4	5.5	5.4
SFEM	5.0	8.1	10.2	9.8	8.2	5.3	5.3

Таблица 12 – Относительная погрешность  $x$ -компоненты скорости:  $Re = 525$ ,  $z = 0.125$ , элементы Taylor-Hood, шаг по времени  $\Delta t = 0.01$

метод	Относительная погрешность для $x$ -компоненты вектора скорости $\Delta_u$ , %						
	$x := 0$	$x := 1$	$x := 3$	$x := 5$	$x := 7$	$x := 10$	$x := 15$
NIPG	3.2	6.3	7.5	6.5	6.2	3.1	3.1
SFEM	3.5	6.6	7.8	6.7	6.3	3.4	3.3

Таблица 13 – Относительная погрешность  $x$ -компоненты скорости:  $Re = 525$ ,  $z = 0.125$ , элементы Crouzeix-Raviart, шаг по времени  $\Delta t = 0.01$

метод	Относительная погрешность для $x$ -компоненты вектора скорости $\Delta_u$ , %						
	$x := 0$	$x := 1$	$x := 3$	$x := 5$	$x := 7$	$x := 10$	$x := 15$
NIPG	3.2	6.3	7.5	6.5	6.2	3.1	3.1
SFEM	3.5	6.6	7.8	6.7	6.3	3.4	3.3

Таблица 14 – Относительная погрешность  $x$ -компоненты скорости:  $Re = 525$ ,  $z = 0.125$ , полный базис первого порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления, шаг по времени  $\Delta t = 0.005$

метод	Относительная погрешность для $x$ -компоненты вектора скорости $\Delta_u$ , %						
	$x := 0$	$x := 1$	$x := 3$	$x := 5$	$x := 7$	$x := 10$	$x := 15$
NIPG	4.7	7.3	9.6	8.2	7.5	4.9	4.9
SFEM	4.4	7.1	9.3	8.0	7.1	4.7	4.7

Таблица 15 – Относительная погрешность  $x$ -компоненты скорости:  $Re = 525$ ,  $z = 0.125$ , элементы Taylor-Hood, шаг по времени  $\Delta t = 0.005$

метод	Относительная погрешность для $x$ -компоненты вектора скорости $\Delta_u$ , %						
	$x := 0$	$x := 1$	$x := 3$	$x := 5$	$x := 7$	$x := 10$	$x := 15$
NIPG	2.5	5.7	6.6	5.0	4.9	2.5	2.5
SFEM	2.8	5.9	6.9	5.2	5.0	2.8	2.8

Таблица 16 – Относительная погрешность  $x$ -компоненты скорости:  $Re = 525$ ,  $z = 0.125$ , элементы Crouzeix-Raviart, шаг по времени  $\Delta t = 0.005$

метод	Относительная погрешность для $x$ -компоненты вектора скорости $\Delta_u$ , %						
	$x := 0$	$x := 1$	$x := 3$	$x := 5$	$x := 7$	$x := 10$	$x := 15$
NIPG	2.5	5.7	6.6	5.0	4.9	2.5	2.5
SFEM	2.8	5.9	6.9	5.2	5.0	2.8	2.8

По результатам вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что вычислительные схемы разрывного метода Галёркина и стабилизированного метода конечных элементов являются устойчивыми, поскольку при повышении порядка базисных функций и измельчении шага по времени наблюдается уменьшение относительной погрешности решения задачи.

Наибольшая величина относительной погрешности была определена в сечениях по оси  $Ox$  от 1 до 7 см, поскольку в этой зоне формируется вихревое течение, которое характеризуется быстро меняющимся градиентом решения, что требует использование локального уточнения сетки (или повышение порядка базиса) и адаптивного шага по времени в проекционной процедуре Chorin-Teman.

Наилучший результат показал разрывный метод Галёркина при использовании элементов семейства Taylor-Hood или Crouzeix-Raviart: для безвихревых течений величина относительной погрешности составила 2.5%, для вихревых – 6.6%. Стабилизированный метод конечных элементов оказался эффективнее разрывного метода Галёркина при использовании базисных функций первого порядка для аппроксимации вектора скорости и давления: для безвихревых течений величина относительной погрешности 4.4%, для вихревых – 9.3%.

## 2.5 МКЭ-дискретизация макромасштабной модели фильтрации

Пусть процесс неустановившейся фильтрации жидкости протекает в пористой среде  $\Omega \in R^3$ , с границей втекания  $\Gamma_1$ , границей вытекания  $\Gamma_2$  и непроницаемой границей  $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ .

Для пористых сред уравнение неразрывности имеет модифицированную форму [9, 52, 68, 222]

$$\frac{\partial \varphi \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.117)$$

где  $\varphi$  – пористость,  $\rho$  – плотность флюида ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ).

Уравнение движения в поле силы тяжести описывается законом Дарси [13, стр.79]

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot (\rho \mathbf{g} - \nabla p) \text{ в } \Omega, \quad (2.118)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость фильтрации ( $\text{м}/\text{с}$ ),  $\mu$  – динамическая вязкость ( $\text{Па} \cdot \text{с}$ ),  $\mathbf{K}$  – тензор проницаемости ( $\text{м}^2$ ),  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения ( $\text{м}/\text{с}^2$ ),  $p$  – давление ( $\text{Па}$ ).

Предполагается, что пористость среды и вязкость флюида не зависят от давления. Для слабосжимаемого флюида в модель фильтрации добавляется уравнение состояния, которое связывает плотность с давлением [222]

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = C_f, \quad (2.119)$$

где  $C_f$  – изотермическая сжимаемость флюида ( $\text{Па}^{-1}$ ).

При подстановке закона Дарси (2.118) в уравнение неразрывности (2.117) и условии  $dp = \frac{1}{\rho C_f} d\rho$  получается модель фильтрации слабосжимаемого однофазного флюида при постоянной пористости относительно плотности [222]

$$\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla \rho \right) + 2\rho \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \nabla \rho = 0 \text{ в } \Omega. \quad (2.120)$$

Если проинтегрировать уравнение состояния (2.119) и выполнить разложение в ряд Тейлора, то  $\rho \approx \rho_0 (1 + C_f (p - p_0))$ , где  $\rho_0, p_0$  – начальные распределения плотности и давления, соответственно.

Модель фильтрации слабосжимаемого однофазного флюида при постоянной пористости относительно давления имеет вид (уравнение пьезопроводности) [222]

$$\varphi \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla p \right) + 2\rho_0 (1 + C_f p) \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \nabla p = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.121)$$

с начальными условиями для давления и плотности

$$p|_{t=0} = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0. \quad (2.122)$$

На границе  $\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma_1$  – граница втекания,  $\Gamma_2$  – граница вытекания, краевые условия формулируются как

$$p|_{\Gamma_D} = p_D, \quad \rho|_{\Gamma_D} = \rho_0 \left( 1 + C_f p|_{\Gamma_D} \right), \quad (2.123)$$

где  $p_D$  – величина давления на  $\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

На непроницаемой границе  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  сформулированы условия непротекания [222]

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = - \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla p = \left| \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla p \right|_{\Gamma_N} = 0. \quad (2.124)$$

В условиях Неймана (2.124) предполагается, что вектор ускорения свободного падения  $\mathbf{g}$  направлен по оси  $Oz$  вниз, вектор внешней нормали  $\mathbf{n}$  перпендикулярно к оси  $Oz$ , тогда  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \equiv 0$ .

Параболические уравнения (2.120) и (2.121) содержат общий оператор конвекции-диффузии. В уравнении однофазной фильтрации относительно плотности (2.120) конвективное слагаемое доминирует при  $\left\| 2\rho \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \right\| \gg \left\| \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \right\|$ , в уравнении относительно давления (2.121) – при  $\left\| 2\rho_0 (1 + C_f p) \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \right\| \gg \left\| \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \right\|$ . Поэтому вариационные формулировки для задач фильтрации с уравнениями (2.120) и (2.121) будут различаться только множителем при конвективном слагаемом. В следующем разделе будет приведена вариационная формулировка разрывного метода Галёркина для уравнения однофазной фильтрации относительно плотности.

### 2.5.1 Вариационная формулировка разрывного метода Галёркина для уравнения однофазной фильтрации

DG-дискретизации для уравнения неустановившейся однофазной фильтрации различаются выбором “численных потоков” для аппроксимации решения на межэлементной границе. Описание DG-формулировок для дифференциальных уравнений второго порядка можно найти в [105, 106, 112, 113, 118, 131, 202, 203].

Идея разрывного метода Галёркина для уравнения (2.120) основана на использовании классической формулировки DG-метода для эллиптического уравнения второго порядка с дуальной переменной  $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla \rho$  и противопоточной дискретизации (upwind-формулировка) для конвективного слагаемого.

Общая слабая вариационная формулировка разрывного метода Галёркина для уравнения (2.120) [105]: найти  $\boldsymbol{\tau}^h \in \mathbf{V}^h \times [0, T]$ ,  $\rho^h \in W^h \times [0, T]$ , что  $\forall w^h \in W^h$

$$a(w^h, \rho^h) + c(\mathbf{g}; w^h, \rho^h) = 0, \quad (2.125)$$

$$a(w^h, \rho^h) = \sum_K \left( \int_{\Omega_K} \varphi \rho_t^h w^h d\Omega_K + \int_{\Omega_K} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \nabla w^h d\Omega_K \right) + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \left( [\tilde{\rho} - \rho^h] \cdot \{\nabla w^h\} - \{\tilde{\boldsymbol{\tau}}\} \cdot [w^h] \right) dS + \quad (2.126)$$

$$+ \sum_M \int_{\partial\Omega_M} \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \left( \{\tilde{\rho} - \rho^h\} [\nabla w^h] - \{w^h\} [\tilde{\boldsymbol{\tau}}] \right) dS, \quad \partial\Omega_M \in \Gamma_0,$$

$$c(\mathbf{g}; w^h, \rho^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} 2r \rho^h \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \nabla w^h d\Omega_K + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} 2r \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \tilde{\rho} w^h dS, \quad (2.127)$$

где  $r = \rho^h$ , а трилинейная форма  $c(\mathbf{g}; w^h, \rho^h)$  должна быть линеаризована по методу Пикара или Ньютона,  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  и  $\tilde{\rho}$  – “численные потоки”.

Для несимметричной постановки разрывного метода Галёркина NIPG “потоки” выбираются в виде [105]

$$\tilde{\rho}|_{\Gamma_0} = \{\rho^h\} + \mathbf{n} \cdot [\rho^h], \quad \tilde{\rho}|_{\Gamma_D} = \mathbf{n} \cdot [\rho^h - \rho_D], \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}}|_{\Gamma_0} = \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla \rho^h \right\}. \quad (2.128)$$

NIPG-формулировка разрывного метода Галёркина для уравнения (2.120)

[105]: найти  $\rho^h \in W^h \times [0, T]$ , что  $\forall w^h \in W^h$

$$a(w^h, \rho^h) + c(\mathbf{g}; w^h, \rho^h) = (f^h, w^h), \quad (2.129)$$

$$a(w^h, \rho^h) = \sum_K \left( \int_{\Omega_K} \varphi \rho_t^h w^h d\Omega_K + \int_{\Omega_K} \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla \rho^h \cdot \nabla w^h d\Omega_K \right) + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \left( [\rho^h] \cdot \{\nabla w^h\} - \{\nabla \rho^h\} \cdot [w^h] + \gamma [\rho^h] \cdot [w^h] \right) dS, \quad (2.130)$$

$$c(\mathbf{g}; w^h, \rho^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} 2r \rho^h \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \nabla w^h d\Omega_K + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} 2r \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} [\rho^h] \cdot [w^h] dS, \quad (2.131)$$

$$(f^h, w^h) = \int_{\Gamma_D} \rho_D \left( - \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla w^h - \gamma w^h - 2r \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} w^h \right) dS, \quad (2.132)$$

где  $\rho_D$  – значение плотности на границе с условием Дирихле  $\Gamma_D$ ,  $\gamma > 1$  – параметр стабилизации.

## 2.5.2 Дискретизация уравнения однофазной фильтрации по времени

Для дискретизации нелинейных уравнений (2.120) и (2.121) по времени необходимо использовать устойчивую неявную схему.

Двухслойная неявная схема для производных по времени имеет вид

$$\rho_t = \frac{\rho^{j+1} - \rho^j}{\Delta t}, \quad p_t = \frac{p^{j+1} - p^j}{\Delta t}, \quad (2.133)$$

где  $j$  – слой по времени,  $\Delta t$  – шаг по времени.

При использовании схемы (2.133) на каждом шаге по времени решается СЛАУ, в матрицу которой вносится вклад  $\mathbf{M} = \int_{\Omega} \varphi \rho^{j+1} w^h / \Delta t d\Omega$ , в правую часть

$\mathbf{M} p^j = \int_{\Omega} \varphi \rho^j w^h / \Delta t d\Omega$  – для плотности;  $\mathbf{M} = \int_{\Omega} \varphi p^{j+1} w^h / \Delta t d\Omega$ , в правую часть

$\mathbf{M} p^j = \int_{\Omega} \varphi p^j w^h / \Delta t d\Omega$  – для давления, где  $\mathbf{M}$  – матрица массы. Дополнительно на

каждом временном слое выполняются итерации по нелинейности.

### 2.5.3 Линеаризация уравнения однофазной фильтрации

Линеаризацию слагаемого  $c(\mathbf{g}; w^h, \rho^h)$  в вариационной формулировке (2.129) – (2.132) выполним с помощью метода Ньютона. Представим решение задачи в виде

$$\rho = \rho^0 + \delta\rho \quad (2.134)$$

где  $\rho^0$  – начальное приближение,  $\delta\rho$  – коррекция.

Вариационная формулировка метода Ньютона-Галёркина относительно коррекции имеет вид: найти  $\delta\rho^h \in W^h \times [0, T]$ , что  $\forall w^h \in W^h$

$$a(w^h, \delta\rho^h) + c(\mathbf{g}; w^h, \delta\rho^h) = (f^h, w^h) - a(w^h, \rho^0) - c(\mathbf{g}; w^h, \rho^0), \quad (2.135)$$

на границе  $\Omega$  условия Дирихле модифицируются

$$\delta\rho|_{\partial\Omega} = \rho_D - \rho^0. \quad (2.136)$$

Полученная вариационная формулировка сохраняет однородные условия Неймана.

### 2.5.4 Верификация вычислительных схем МКЭ-дискретизации макромасштабной модели фильтрации

Для верификации вычислительной схемы разрывного метода Галёркина для уравнения однофазной фильтрации рассмотрим в расчётной области  $\Omega \in R^3: [-0.5; 1.5] \times [-0.5; 1] \times [-0.5; 1]$  задачу с пограничным слоем

$$\mathbf{v} \cdot \rho \nabla \rho = \kappa \nabla \cdot (\nabla \rho) + f \text{ в } \Omega, \quad (2.137)$$

с неоднородными краевыми условиями Дирихле на границе

$$\rho|_{\partial\Omega} = \cos \pi(x + y) \left( 1 - e^{-\frac{x-1}{\varepsilon}} \right) \left( 1 - e^{-\frac{y-1}{\varepsilon}} \right) \quad (2.138)$$

и вектором скорости

$$\mathbf{v} = (2, 1, 0). \quad (2.139)$$

Триангуляция показана на рисунке 3: сетка содержит 729 вершин, 4184 ребра со средней длиной  $d = 0.2$ , 6528 граней, 3072 тетраэдра.

Для решения задачи (2.137) – (2.138) используется несимметричная формулировка разрывного метода Галёркина NIPG и классический метод конечных элементов. Конечные элементы оснащены иерархическим базисом пространства  $H^l$ .

Для решения СЛАУ используется комбинированный решатель на базе методов бисопряжённых градиентов BiCG и GMRES(5). Порог точности для останова алгоритмов  $\varepsilon = 10^{-12}$ .

Для линеаризации уравнения используется метод Ньютона (Newton). Порог точности для останова итерационного процесса по нелинейности  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

Относительная погрешность решения определяется в норме пространства  $L^2$

$$\Delta_\rho = \frac{\|\rho - \rho^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|\rho\|_{L^2(\Omega)}} 100\%, \quad (2.140)$$

где  $\rho^h$  – численное решение,  $\rho$  – аналитическое решение.

Общее число степеней свободы в таблицах 17 – 22 обозначается DOF (Degrees of Freedom) и совпадает с числом неизвестных в СЛАУ.

Таблица 17 – Задача с пограничным слоем:  $\kappa = 0.1$ , базис первого порядка пространства  $H^1$

метод	DOF	погрешность	итерации	время, с
	$\rho$	$\Delta_\rho, \%$		
Классический МКЭ	729	7.2	5	1.2
NIPG	12288	7.2	8	3.6

Таблица 18 – Задача с пограничным слоем:  $\kappa = 0.1$ , базис второго порядка пространства  $H^1$

метод	DOF	погрешность	итерации	время, с
	$\rho$	$\Delta_\rho, \%$		
Классический МКЭ	4913	3.3	5	2.1
NIPG	30720	3.3	8	12.2

Таблица 19 – Задача с пограничным слоем:  $\kappa = 0.1$ , базис третьего порядка пространства  $H^1$

метод	DOF	погрешность	итерации	время, с
	$\rho$	$\Delta_\rho, \%$		
Классический МКЭ	11441	1.8	5	3.2
NIPG	43008	1.8	8	14.9

Таблица 20 – Задача с пограничным слоем:  $\kappa = 0.001$ , базис первого порядка пространства  $H^1$

метод	DOF	погрешность	итерации	время, с
	$\rho$	$\Delta_\rho, \%$		
Классический МКЭ	Аварийный выход по максимальному числу итераций			
NIPG	12288	7.4	8	3.6

Таблица 21 – Задача с пограничным слоем:  $\kappa = 0.001$ , базис второго порядка пространства  $H^1$ 

метод	DOF	погрешность	итерации	время, с
	$\rho$	$\Delta_\rho, \%$		
Классический МКЭ	Аварийный выход по максимальному числу итераций			
NIPG	30720	3.4	8	12.2

Таблица 22 – Задача с пограничным слоем:  $\kappa = 0.001$ , базис третьего порядка пространства  $H^1$ 

метод	DOF	погрешность	итерации	время, с
	$\rho$	$\Delta_\rho, \%$		
Классический МКЭ	Аварийный выход по максимальному числу итераций			
NIPG	43008	2.1	8	14.9

Для пограничного слоя с параметром  $\kappa = 0.001$  СЛАУ, ассемблированная классическим методом конечных элементов, не решена, поскольку задача становится сингулярно-возмущённой, и аварийный останов алгоритма происходит по максимальному числу итераций. Для параметра  $\kappa = 0.1$  разрывный метод Галёркина позволяет получить решение задачи с такой же точностью, что и классический МКЭ, но с существенными вычислительными затратами.

В таблице 23 показано влияние параметра стабилизации  $\gamma$  в разрывном методе Галёркина на погрешность решения задачи при использовании базиса первого порядка. Прочерк “–” означает аварийный выход решателя СЛАУ по максимальному числу итераций.

Таблица 23 – Влияние параметра стабилизации  $\gamma$  при  $\kappa = 0.001$  на погрешность решения задачи разрывным методом Галёркина (базис первого порядка)

$\gamma$	0.01	0.05	0.1	0.72	1.0	1.5	2.0
$\Delta_\rho$	–	–	7.26E + 0	1.64E + 0	9.26E – 1	6.22E – 1	4.39E – 1

Необходимо отметить высокую чувствительность вычислительной схемы разрывного метода Галёркина к выбору параметра стабилизации. При использовании базисных функций первого порядка и некорректном выборе параметра стабилизации решение задачи (2.137) – (2.139) может быть физически нерелевантным. Согласно результатам вычислительных экспериментов, параметр стабилизации в NIPG-постановке разрывного метода Галёркина можно выбрать в виде

$$\gamma = 1 - \lg\left(\max_{i,j} \mathbf{K}_{ij}\right), \quad 0 < \mathbf{K}_{ij} < 1. \quad (2.141)$$

## 2.6 МКЭ-дискретизация мезомасштабной модели фильтрации

Рассмотрим систему, состоящую из пористой среды  $\Omega_2$  и каверны  $\Omega_1$ , которая заполнена флюидом, см. рисунок 26. Под действием внешнего давления флюид из каверны просачивается в окружающую пористую среду. Для каверны  $\Omega_1$  обозначим через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  границы втекания и вытекания, соответственно. Непроницаемая поверхность каверны  $\Gamma_0 = \partial\Omega_1 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ . Будем считать, что пористая среда всюду имеет непроницаемую границу  $\Gamma_N = \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{12}$  за исключением границы просачивания  $\Gamma_{12}$ , которая является общей границей для каверны и пористой среды.

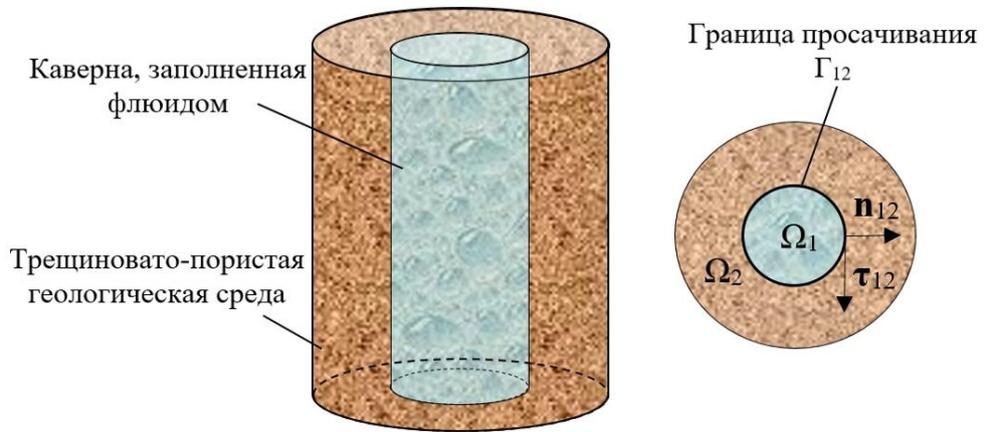


Рисунок 26 – Структура фильтрационной системы:  $\Omega_1$  – каверна,  $\Omega_2$  – пористая среда

Обозначим скорость и давление флюида в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  как  $(\mathbf{v}_1, p_1)$  и  $(\mathbf{v}_2, p_2)$ . Границу пересечения областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  обозначим  $\Gamma_{12}$ . Установившийся процесс просачивания несжимаемого ньютоновского флюида в фильтрационной системе в поле силы тяжести описывается системой Навье-Стокса-Дарси [202, 203]

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + \nabla p_1 &= \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{v}_1 + (\nabla \mathbf{v}_1)^T \right) + \rho \mathbf{g} \text{ в } \Omega_1, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}_1) &= 0 \text{ в } \Omega_1, \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot (\nabla p_2 - \rho \mathbf{g}) \text{ в } \Omega_2, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}_2) &= 0 \text{ в } \Omega_2, \end{aligned} \quad (2.143)$$

где  $\rho$  – плотность флюида ( $\text{кг/м}^3$ ),  $\mu$  – динамическая вязкость флюида ( $\text{Па}\cdot\text{с}$ ),  $\mathbf{K}$  – тензор проницаемости ( $\text{м}^2$ ).

На границе пористой среды  $\Omega_2$ , за исключением внутренней  $\Gamma_{12}$ , обычно задаются однородные условия непротекания флюида [202, 203]

$$-\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla p_2 \Big|_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{12}} = 0, \quad (2.144)$$

на границах втекания и вытекания в каверне  $\Omega_1$  за исключением границы просачивания  $\Gamma_{12}$  задаются условия

$$\mathbf{v}_1|_{\Gamma_1} = \mathbf{v}_D, \quad (2.145)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{0}, \quad (2.146)$$

для непроницаемой границы каверны условие имеет вид

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_0} = 0, \quad (2.147)$$

Введём обозначения  $\mathbf{n}_{12}$  и  $\boldsymbol{\tau}_{12}$  для внешних нормального и тангенциального вектора к границе  $\Gamma_{12}$  (см. рисунок 26). Тогда условия стыковки областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  формулируются на основе законов сохранения массы и баланса сил [180, 202, 203]

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_{12}|_{\Gamma_{12}} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_{12}|_{\Gamma_{12}}, \quad (2.148)$$

$$p_1|_{\Gamma_{12}} - \mu \left( \nabla \mathbf{v}_1 + (\nabla \mathbf{v}_1)^T \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{n}_{12} \Big|_{\Gamma_{12}} = p_2|_{\Gamma_{12}}, \quad (2.149)$$

закон Бивера-Джозефа-Саффмана формулируется в виде [202, 203]

$$\mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}|_{\Gamma_{12}} = -m\mu \left( \nabla \mathbf{v}_1 + (\nabla \mathbf{v}_1)^T \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}|_{\Gamma_{12}}, \quad (2.150)$$

где  $m > 0$  – коэффициент трения, который определяется по таблице 24.

Таблица 24 – Формулы для определения параметра трения  $m$  ( $d/\Delta$  – шероховатость)

Режим течения	Число Рейнольдса	Формула для $m$
Ламинарный	$Re < 2300$	$m = 64 / Re$
Турбулентный	1	$4000 < Re < 10 d/\Delta$ $m = 0.3164 / Re^{0.25}$ (ф. Блазиуса) $m = 1 / (1.8(\lg Re) - 1.5)^2$ (ф. Конакова)
	2	$10 d/\Delta < Re < 560 d/\Delta$ $m = 0.11(\Delta/d + 68/Re)^{0.25}$ (ф. Альтшуля)
	3	$Re > 560 d/\Delta$ $\frac{1}{\sqrt{m}} = -2 \lg(3.71\Delta/d)$ (ф. Никурадзе)

### 2.6.1 Вариационная формулировка разрывного метода Галёркина для системы уравнений Навье-Стокса-Дарси

DG-дискретизация системы сопряжённых уравнений Стокса-Дарси состоит из ранее описанных вариационных формулировок для задачи Навье-Стокса и задачи однофазной фильтрации. При этом модификации подвергнутся поверхностные интегралы по внутренней границе стыковки сред. Использование межинтерфейсных условий Бивера-Джозефа-Саффмана можно найти в [162, 202, 229, 231].

Скалярно умножим уравнение движения в модели Навье-Стокса (2.142) на тестовую функцию  $\mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$ , применим формулу интегрирования по частям и просуммируем результат по всем тетраэдрам  $\Omega_k \in \Xi_h$

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_k \in \Omega_1} \left( \int_{\Omega_k} \mu (\nabla \mathbf{v}_1^h + \nabla^T \mathbf{v}_1^h) : \nabla \mathbf{w}^h + \rho (\mathbf{v}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{v}_1^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega - \int_{\Omega_k} p_1^h \nabla \cdot \mathbf{w}^h d\Omega \right) - \\ & - \sum_{\partial\Omega_k \in \partial\Omega_1} \int_{\partial\Omega_k} \left( -p_1^h \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v}_1^h + \nabla^T \mathbf{v}_1^h) \right) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}^h dS = \sum_{\Omega_k \in \Omega_1} \int_{\Omega_k} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^h d\Omega. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Выделим границу  $\Gamma_{12}$  в поверхностном интеграле из (2.151) и разложим вектор-функции  $\mu (\nabla \mathbf{v}_1^h + \nabla^T \mathbf{v}_1^h) \cdot \mathbf{n}$  и  $\mathbf{w}^h$  на нормальную и тангенциальную компоненты

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_{12}} \left( -p_1^h \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v}_1^h + \nabla^T \mathbf{v}_1^h) \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{w}^h dS = \\ & = \int_{\Gamma_{12}} \left( p_1^h \mathbf{I} - \mu (\nabla \mathbf{v}_1^h + \nabla^T \mathbf{v}_1^h) \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{n}_{12} (\mathbf{w}^h \cdot \mathbf{n}_{12}) dS + \\ & + \int_{\Gamma_{12}} \left( p_1^h \mathbf{I} - \mu (\nabla \mathbf{v}_1^h + \nabla^T \mathbf{v}_1^h) \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau}_{12} (\mathbf{w}^h \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}) dS. \end{aligned} \quad (2.152)$$

С учётом законов сохранения массы, баланса и  $p_1^h \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \boldsymbol{\tau}_{12} \equiv 0$  получим

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_{12}} \left( -p_1^h \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v}_1^h + \nabla^T \mathbf{v}_1^h) \right) \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{w}^h dS = \\ & = \int_{\Gamma_{12}} p_2^h (\mathbf{w}^h \cdot \mathbf{n}_{12}) dS + \int_{\Gamma_{12}} \frac{\mu}{m} (\mathbf{v}_1^h \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}) (\mathbf{w}^h \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}) dS. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Умножим дивергентное ограничение в законе Дарси (2.143) на тестовую функцию  $q^h \in P^h$ , применим формулу интегрирования по частям и просуммируем результат по всем тетраэдрам  $\Omega_k \in \Xi_h$

$$\sum_{\Omega_k \in \Omega_1} \int_{\Omega_k} \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot (\nabla p_2^h - \rho \mathbf{g}) \cdot \nabla q^h d\Omega - \sum_{\partial\Omega_k \in \partial\Omega_1} \int_{\partial\Omega_k} \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot (\nabla p_2^h - \rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} q^h dS = 0. \quad (2.154)$$

Выделим границу  $\Gamma_{12}$  в поверхностном интеграле из (2.154), применим закон сохранения массы и получим условие стыковки подобластей

$$\int_{\Gamma_{12}} \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot (\nabla p_2^h - \rho \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_{12} q^h dS = \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{v}_1^h \cdot \mathbf{n}_{12} q^h dS. \quad (2.155)$$

Вариационная формулировка для задачи Стокса-Дарси на базе IP-DG-дискретизации имеет вид: найти такие  $\mathbf{v}_1^h \in \mathbf{V}^h$ ,  $p_1^h \in P^h$ ,  $p_2^h \in P^h$ , что  $\forall \mathbf{w}_1^h \in \mathbf{V}^h$ ,  $q_1^h \in P^h$  и  $q_2^h \in P^h$

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{w}_1^h, \mathbf{v}_1^h) + b(\mathbf{w}_1^h, p_1^h) + \Lambda(\mathbf{w}_1^h, p_2^h) &= (\mathbf{w}_1^h, \mathbf{F}), \\ -b(\mathbf{v}_1^h, q_1^h) + d(q_1^h, p_1^h) &= 0, \\ a_2(p_2^h, q_2^h) + \Lambda(\mathbf{v}_1^h, q_2^h) &= 0, \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{w}_1^h, \mathbf{v}_1^h) &= \sum_K \int_{\Omega_K} \mu (\nabla \mathbf{v}_1^h + \nabla^T \mathbf{v}_1^h) : \nabla \mathbf{w}_1^h + \rho (\mathbf{v}_1^h \cdot \nabla) \mathbf{v}_1^h \cdot \mathbf{w}_1^h d\Omega_K + \sum_{\Gamma_k \in \Gamma_{12}} \int_{\Gamma_k} \frac{\mu}{m} (\mathbf{v}_1^h \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}) (\mathbf{w}_1^h \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}) dS - \\ &- \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \left\{ \mu (\nabla \mathbf{v}_1^h + (\nabla \mathbf{v}_1^h)^T) \right\} : [\underline{\mathbf{w}}_1^h] + \lambda \left\{ \mu (\nabla \mathbf{w}_1^h + (\nabla \mathbf{w}_1^h)^T) \right\} : [\underline{\mathbf{v}}_1^h] - \tau_1^{DG} [\underline{\mathbf{v}}_1^h] : [\underline{\mathbf{w}}_1^h] dS, \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$b(\mathbf{v}_1^h, q_1^h) = - \sum_K \int_{\Omega_K} \nabla \cdot \mathbf{v}_1^h q_1^h d\Omega_K + \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \{q_1^h\} [\underline{\mathbf{v}}_1^h] dS, \quad (2.158)$$

$$\Lambda(\mathbf{w}_1^h, p_2^h) = \sum_{\Gamma_k \in \Gamma_{12}} \int_{\Gamma_k} p_2^h (\mathbf{w}_1^h \cdot \mathbf{n}_{12}) dS, \quad (2.159)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_1^h, \mathbf{F}) &= \sum_K \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}_1^h d\Omega_K + \sum_{\Gamma_k \in \Gamma_2} \int_{\Gamma_k} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_1^h dS + \lambda \sum_{\Gamma_k \in \Gamma_1} \int_{\Gamma_k} \mu (\nabla \mathbf{w}_1^h + \nabla^T \mathbf{w}_1^h) : (\mathbf{v}_D \otimes \mathbf{n}) - \\ &- \tau^{DG} (\mathbf{v}_D \otimes \mathbf{n}) : (\mathbf{w}_1^h \otimes \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (2.160)$$

$$d(q^h, p^h) = \sum_{\Gamma_k \in \Gamma_0} \tau^{DG} \int_{\Gamma_k} [q^h] \cdot [p^h] \quad (2.161)$$

$$\begin{aligned} a_2(p_2^h, q_2^h) &= \sum_K \int_{\Omega_K} \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla p_2^h \cdot \nabla q_2^h d\Omega_K + \sum_{\Gamma_k \in \Gamma_{12}} \int_{\Gamma_k} (\mathbf{v}_2^h \cdot \mathbf{n}_{12}) q_2^h dS - \\ &- \sum_K \int_{\partial\Omega_K} \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla p_2^h \right\} \cdot [q_2^h] + \lambda \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla q_2^h \right\} : [p_2^h] - \tau_2^{DG} [p_2^h] \cdot [q_2^h] dS. \end{aligned} \quad (2.162)$$

В матричной форме можно записать

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} & \mathbf{\Lambda} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{\Lambda}^T & 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.163)$$

где элементы векторов и матриц вычисляются  $\forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}^h$ ,  $\varphi \in P^h$  в виде

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_1]_{ij}^{\Omega_K} &= \int_{\Omega_K} \mu (\nabla \boldsymbol{\psi}_j^h + \nabla^T \boldsymbol{\psi}_j^h) : \nabla \boldsymbol{\psi}_i^h + \rho (\mathbf{v}_1^h \cdot \nabla) \boldsymbol{\psi}_j^h \cdot \boldsymbol{\psi}_i^h d\Omega + \int_{\partial\Omega_K \in \Gamma_{12}} \frac{\mu}{m} (\boldsymbol{\psi}_j^h \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}) (\boldsymbol{\psi}_i^h \cdot \boldsymbol{\tau}_{12}) dS - \\ &- \int_{\partial\Omega_K} \left\{ \mu (\nabla \boldsymbol{\psi}_j^h + (\nabla \boldsymbol{\psi}_j^h)^T) \right\} : [\boldsymbol{\psi}_i^h] + \lambda \left\{ \mu (\nabla \boldsymbol{\psi}_i^h + (\nabla \boldsymbol{\psi}_i^h)^T) \right\} : [\boldsymbol{\psi}_j^h] - \tau_1^{DG} [\boldsymbol{\psi}_j^h] : [\boldsymbol{\psi}_i^h] dS, \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$[\mathbf{B}]_{ij}^{\Omega_K} = - \int_{\Omega_K} \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_j^h \varphi_i^h d\Omega_K + \int_{\partial\Omega_K} \{ \varphi_i^h \} [\boldsymbol{\psi}_j^h] dS, \quad (2.165)$$

$$[\mathbf{\Lambda}]_{ij}^{\Omega_K} := \int_{\partial\Omega_K \in \Gamma_{12}} \varphi_j^h (\boldsymbol{\psi}_i^h \cdot \mathbf{n}_{12}) dS, \quad (2.166)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}]_i^{\Omega_K} &= \int_{\Omega_K} \rho \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\psi}_i^h d\Omega + \int_{\partial\Omega_K \in \Gamma_2} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\psi}_i^h dS + \lambda \int_{\partial\Omega_K \in \partial\Omega} \mu (\nabla \boldsymbol{\psi}_i^h + \nabla^T \boldsymbol{\psi}_i^h) : (\mathbf{v}_D \otimes \mathbf{n}) - \\ &- \tau^{DG} (\mathbf{v}_D \otimes \mathbf{n}) : (\boldsymbol{\psi}_i^h \otimes \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (2.167)$$

$$[\mathbf{D}]_{ij}^{\Omega_K} = \tau^{DG} \int_{\partial\Omega_K \in \Gamma_0} [\varphi_j^h] \cdot [\varphi_i^h] \quad (2.168)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_2]_{ij}^{\Omega_K} &= \int_{\Omega_K} \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla \varphi_j^h \cdot \nabla \varphi_i^h d\Omega + \int_{\partial\Omega_K \in \Gamma_{12}} (\boldsymbol{\psi}_j^h \cdot \mathbf{n}_{12}) \varphi_i^h dS - \\ &- \int_{\partial\Omega_K} \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla \varphi_j^h \right\} \cdot [\varphi_i^h] + \lambda \left\{ \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla \varphi_i^h \right\} : [\varphi_j^h] - \tau_2^{DG} [\varphi_j^h] \cdot [\varphi_i^h] dS. \end{aligned} \quad (2.169)$$

При  $\lambda = -1$  формулировка называется несимметричной NIPG (Nonsymmetrical Inner Penalty Galerkin), на параметр стабилизации накладывается условие  $\tau^{DG} > 1$  [202]. При  $\lambda = 1$  формулировка называется симметричной SIPG (Symmetrical Inner Penalty Galerkin), на параметр стабилизации накладывается условие  $\tau^{DG} \gg 1$  [202].

Нестационарный процесс просачивания описывается нестационарной системой уравнений Навье-Стокса и нестационарным уравнением однофазной фильтрации относительно давления (2.121). В вариационную формулировку (2.156) –

(2.162) добавляются дополнительные слагаемые для производных по времени и конвективных членов, вид которых был определён ранее в разделах 2.3.5 и 2.5.1.

## 2.6.2 Верификация вычислительных схем МКЭ-дискретизации мезомасштабной модели фильтрации

Рассмотрим установившийся процесс просачивания флюида в области  $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $\Omega_1 := [-1, 1]^3$ ,  $\Omega_2 := [-2, 2]^3$ , представленной на рисунке 27а, для верификации вычислительной схемы разрывного метода Галёркина. Триангуляция области  $\Omega$  показана на рисунке 27б и содержит 4673 вершины, 31680 рёбер и 53632 грани, 26624 тетраэдра.

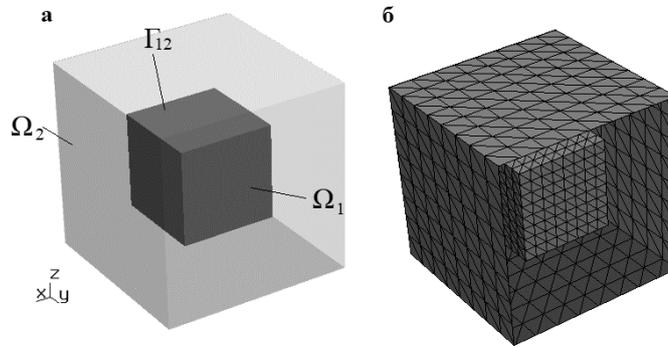


Рисунок 27 – Расчётная область  $\Omega$  (а) и триангуляция (б)

Задача Стокса-Дарси описывается следующей системой уравнений

$$\nabla p_1 = \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{v}_1 + (\nabla \mathbf{v}_1)^T \right) \text{ в } \Omega_1, \quad (2.170)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}_1) = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (2.171)$$

$$\mu \mathbf{v}_2 = -\nabla p_2 \text{ в } \Omega_2, \quad (2.172)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}_2) = 0 \text{ в } \Omega_2, \quad (2.173)$$

с краевыми условиями, которые также удовлетворяют интерфейсным условиям Бивера-Джозефа-Саффмана (см. графики на рисунке 28)

$$p_1|_{\Omega_1} = \mu e^y \sin(x), \quad \mathbf{v}_1|_{\Omega_1} = \begin{pmatrix} -e^y \cos(x) \\ -e^y \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.174)$$

$$p_2|_{\Omega_2} = \mu e^y \cos(x) + 3e^y \sin(x), \quad \mathbf{v}_2|_{\Omega_2} = \begin{pmatrix} e^y \sin(x) - 3e^y \cos(x) \\ -e^y \cos(x) - 3e^y \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.175)$$

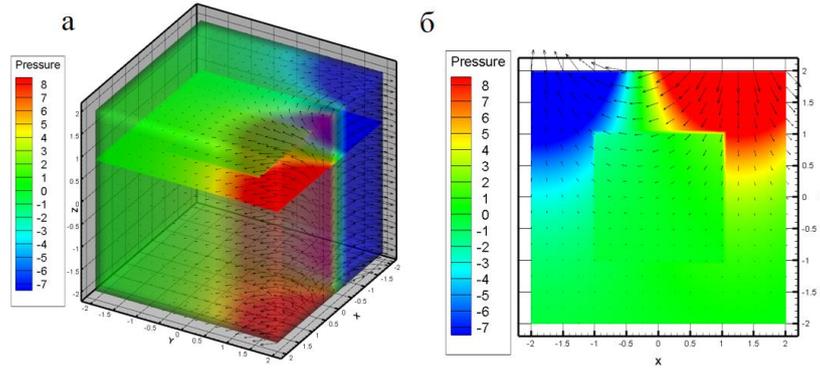


Рисунок 28 – Задача Стокса-Дарси при  $\mu = 1$ : поведение аналитического решения в 3D (а) и в сечении  $Z = 0$  (б)

Конечные элементы – тетраэдры с базисом первого порядка пространства  $H^1$  для поля давления (для подобластей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ) и полными базисами от первого до второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для вектора скорости (только для  $\Omega_2$ ).

Для решения СЛАУ используется комбинированный решатель на базе методов бисопряжённых градиентов BiCG и GMRES(5). Порог точности для останова алгоритмов  $\varepsilon = 10^{-12}$ .

Относительные погрешности для скорости и давления, полученных численно, определяются в норме пространства  $L^2$

$$\Delta_{\mathbf{v}_1} = \frac{\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}_1\|_{L^2(\Omega)}} 100\%, \quad \Delta_{p_1} = \frac{\|p_1 - p_1^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|p_1\|_{L^2(\Omega)}} 100\%, \quad (2.176)$$

$$\Delta_{\mathbf{v}_2} = \frac{\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}_2\|_{L^2(\Omega)}} 100\%, \quad \Delta_{p_2} = \frac{\|p_2 - p_2^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|p_2\|_{L^2(\Omega)}} 100\%, \quad (2.177)$$

где  $(\mathbf{v}^h, p^h)$  – численное решение,  $(\mathbf{v}, p)$  – аналитическое решение.

Общее число степеней свободы в таблицах DOF совпадает с числом неизвестных в СЛАУ.

Таблицы 25 – 30 содержат результаты решения задачи Стокса-Дарси с применением классического метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина. Вариационная формулировка классического метода конечных элементов для задачи Стокса-Дарси полностью совпадает с IP-формулировкой разрывного метода Галёркина, если из неё исключить все поверхностные интегралы за исключением

внутренней границы просачивания с интерфейсными условиями Бивера-Джозефа-Саффмана.

Таблица 25 – Задача Стокса-Дарси:  $\mu = 1$ , полный базис первого порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления

Метод	DOF		погрешность				время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}_1}, \%$	$\Delta_{p_1}, \%$	$\Delta_{\mathbf{v}_2}, \%$	$\Delta_{p_2}, \%$	
Классический МКЭ	106896	4673	Базисы не удовлетворяют ЛББ-условию				
SIPG-DG (симметричная)	319488	106496	6.3	6.6	7.2	7.9	8.3
NIPG-DG (несимметричная)			6.3	6.6	7.2	7.9	8.1

Таблица 26 – Задача Стокса-Дарси:  $\mu = 1$ , базис второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления (элементы Taylor-Hood)

Метод	DOF		погрешность				время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}_1}, \%$	$\Delta_{p_1}, \%$	$\Delta_{\mathbf{v}_2}, \%$	$\Delta_{p_2}, \%$	
Классический МКЭ	138576	4673	5.0	5.1	5.9	6.2	3.7
SIPG-DG (симметричная)	479232	106496	5.1	5.4	6.8	7.1	15.9
NIPG-DG (несимметричная)			5.1	5.4	6.8	7.1	15.8

Таблица 27 – Задача Стокса-Дарси:  $\mu = 1$ , базис второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления (элементы Crouzeix-Raviart)

Метод	DOF		погрешность				время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}_1}, \%$	$\Delta_{p_1}, \%$	$\Delta_{\mathbf{v}_2}, \%$	$\Delta_{p_2}, \%$	
Классический МКЭ	170256	4673	4.2	4.3	5.1	5.5	3.7
SIPG-DG (симметричная)	638976	106496	4.5	4.9	6.2	6.7	21.1
NIPG-DG (несимметричная)			4.5	4.9	6.2	6.7	21.1

Таблица 28 – Задача Стокса-Дарси:  $\mu = 10^{-4}$ , полный базис первого порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления

Метод	DOF		погрешность				время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}_1}, \%$	$\Delta_{p_1}, \%$	$\Delta_{\mathbf{v}_2}, \%$	$\Delta_{p_2}, \%$	
Классический МКЭ	106896	4673	Базисы не удовлетворяют ЛББ-условию				
SIPG-DG (симметричная)	319488	106496	Аварийный выход по максимальному числу итераций				
NIPG-DG (несимметричная)			6.3	6.6	7.2	7.9	8.1

Таблица 29 – Задача Стокса-Дарси:  $\mu = 10^{-4}$ , базис второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления (элементы Taylor-Hood)

Метод	DOF		погрешность				время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}_1}, \%$	$\Delta_{p_1}, \%$	$\Delta_{\mathbf{v}_2}, \%$	$\Delta_{p_2}, \%$	
Классический МКЭ	138576	4673	Аварийный выход по максимальному числу итераций				
SIPG-DG (симметричная)	479232	106496	5.1	5.4	6.8	7.1	15.9
NIPG-DG (несимметричная)			5.1	5.4	6.8	7.1	15.8

Таблица 30 – Задача Стокса-Дарси:  $\mu = 10^{-4}$ , базис второго порядка пространства  $\mathbf{H}^{\text{div}}$  для скорости и первого порядка пространства  $H^1$  для давления (элементы Crouzeix-Raviart)

Метод	DOF		погрешность				время, с
	$\mathbf{v}$	$p$	$\Delta_{\mathbf{v}_1}, \%$	$\Delta_{p_1}, \%$	$\Delta_{\mathbf{v}_2}, \%$	$\Delta_{p_2}, \%$	
Классический МКЭ	170256	4673	Аварийный выход по максимальному числу итераций				
SIPG-DG (симметричная)	638976	106496	4.5	4.9	6.2	6.7	21.1
NIPG-DG (несимметричная)			4.5	4.9	6.2	6.7	21.1

Вычислительные эксперименты показали, что классический метод конечных элементов при решении жестких систем уравнений Стокса-Дарси (при вязкости  $\mu = 10^{-4}$  Па·с) приводит к плохо обусловленной матрице СЛАУ и не позволяет получить физически релевантное решение.

Симметричная формулировка разрывного метода Галёркина SIPG является неустойчивой при использовании базисов первого порядка для решения жестких задач, поскольку выбор параметра стабилизации ( $\tau^{\text{DG}} \gg 1$ ) достаточно сложный. Несимметричная постановка разрывного метода Галёркина NIPG является устойчивой вычислительной схемой при решении жестких задач с параметром стабилизации  $\tau^{\text{DG}} > 1$ . Следует отметить, что схожий результат для сопряженных задач Стокса-Дарси был получен В. Riviere в работе [203].

## 2.7 Вычисление эффективного тензора проницаемости

Одной из прикладных задач при проведении гидравлического разрыва пласта и эксплуатации существующих месторождений нефти является задача определения абсолютной проницаемости геологической среды.

В лабораторных условиях при исследовании кернов определяется локальная изотропная модель проницаемости геологической среды [65, 67]. Оценка абсолютной проницаемости образца зависит от геометрического строения системы каналов и пустот. Наиболее информативным методом компьютерного моделирования транспортных свойств фильтрационных систем является метод давления.

### 2.7.1 Метод давления: постановка задачи

Метод давления применяется при компьютерном моделировании процесса фильтрации в гетерогенных средах и является наиболее информативным, поскольку позволяет учесть структуру геологической среды. Оценка абсолютной проницаемости вычисляется в результате решения серии задач однофазной фильтрации жидкости, движение которой обеспечивается градиентом давления.

Задача однофазной фильтрации решается на мезомасштабном уровне с учётом всей неоднородности среды. Затем при тех же начальных и граничных условиях вычисляются такие параметры макромасштабной модели, при которых могут быть получены те же потоки и давление флюида, что и для мезомасштабной модели.

Рассмотрим однородную среду  $\Omega^0$ , которая изображена на рисунке 29а.

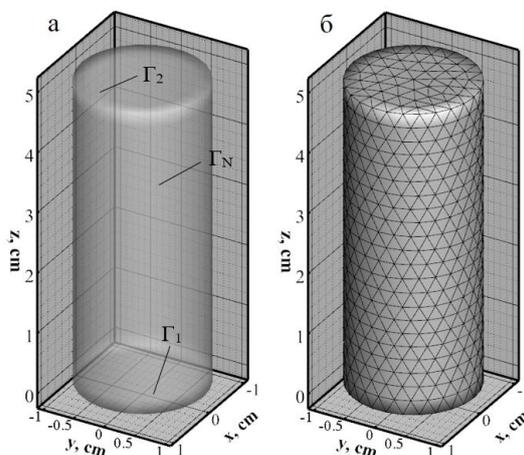


Рисунок 29 – Фильтрационная система керна: однородная среда  $\Omega^0$  (а) и триангуляция (б)

Ось керна лежит между точками  $(0, 0, 0)$  и  $(0, 0, 5)$ , радиус керна  $R = 1$  см. Флюид – вода с вязкостью  $\mu = 1$  мПа·с и изотермической сжимаемостью  $C_f = 4.6 \cdot 10^{10}$  Па<sup>-1</sup>. Перепад давления по высоте керна составляет 1 МПа, и градиент давления сонаправлен с вектором свободного падения (сверху вниз). Параметр микропористости матрицы среды  $\phi = 8\%$ . Обратим внимание, что параметр микропористости матрицы среды не учитывает пористость мезоуровня.

Триангуляция расчётной области представлена на рисунке 29б и содержит 3760 тетраэдров, 1009 вершин. Время фильтрации – 10 ч, шаг по времени – 10 мин.

Макромасштабная модель однофазной фильтрации описывается уравнением

$$\phi \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla p \right) + 2\rho_0 (1 + C_f p) \frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \mathbf{g} \cdot \nabla p = 0 \text{ в } \Omega^0, \quad (2.178)$$

с начальными условиями для плотности и давления

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 = 1000, p|_{t=0} = p_0 = 0, \quad (2.179)$$

краевыми условиями Дирихле на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$

$$p|_{\Gamma_1} = 0, p|_{\Gamma_2} = 10^6, \quad (2.180)$$

где  $\Gamma_1$  – граница вытекания,  $\Gamma_2$  – граница втекания,  $\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , на границе  $\Gamma_N = \partial\Omega^0 \setminus \Gamma_D$  заданы условия непротекания

$$\frac{\mathbf{K}}{\mu C_f} \cdot \nabla p \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_N} = 0, \quad (2.181)$$

где  $\phi$  – пористость,  $\rho$  – плотность (кг/м<sup>3</sup>),  $C_f$  – изотермическая сжимаемость (Па<sup>-1</sup>),  $\mathbf{K}$  – абсолютная проницаемость (м<sup>2</sup>),  $\mu$  – динамическая вязкость (Па·с),  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения.

Для решения прямой задачи однофазной фильтрации используется разрывный метод Галёркина с базисными функциями пространства  $H^1(\Omega)$  второго порядка. Результат решения задачи (2.178) – (2.181) – давление и скорость фильтрации.

В следующем разделе ставится обратная коэффициентная задача для вычисления компонент эффективного тензора абсолютной проницаемости.

### 2.7.2 Обратная коэффициентная задача: постановка

Определение параметров макромасштабной модели в методе давления представляет собой сложную вычислительную задачу, поскольку в общем случае зависимость параметров модели от решения задачи (2.178) – (2.181) в керне носит нелинейный характер. Поэтому возникает необходимость в решении обратной коэффициентной задачи при вычислении тензора абсолютной проницаемости среды.

Предполагается, что величина давления флюида не влияет на деформацию геологической среды, т.е. пористость не зависит от давления.

Обратная коэффициентная задача формулируется в виде [76]

$$\mathbf{A}\Theta = \mathbf{F}, \quad (2.182)$$

где  $\mathbf{A}: X \rightarrow Y$  – оператор обратной задачи,  $\Theta \in X$  – вектор неизвестных параметров,  $\mathbf{F} \in Y$  – модель наблюдения,  $X$  и  $Y$  – гильбертовы пространства.

Модель наблюдения может содержать погрешность измерений

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* + \xi, \quad (2.183)$$

где  $\mathbf{F}^*$  – истинные данные,  $\xi$  – шум с нормальным распределением.

Поскольку тензор абсолютной проницаемости является симметричным [216], то пространство неизвестных параметров состоит из 6 элементов и  $X = E^6$

$$\Theta = \{k_{xx}, k_{xy}, k_{xz}, k_{yy}, k_{yz}, k_{zz}\} \quad (2.184)$$

В общем случае задача (2.182) является некорректной. Получить приближённое решение задачи (2.182) можно путём минимизации сглаживающего функционала А.Н. Тихонова [76]

$$J_\alpha(\Theta) = \|\mathbf{A}\Theta - \mathbf{F}\|^2 + \alpha\|\Theta\|^2 \quad (2.185)$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации, который должен быть согласован с величиной ошибки  $\xi$  [77]. Если  $\Theta^*$  – решение задачи (2.182), то  $J_\alpha(\Theta^*) = \min_{\Theta \in E^6} J_\alpha(\Theta)$ .

Измеряемыми данными является модуль вектора скорости просачивания в исследуемой геологической среде при использовании метода давления. Следует отметить, что скорость просачивания связана с истинной скоростью течения жидкости соотношением  $\mathbf{v}^{прос.} = \phi \mathbf{v}^{истин.}$ , где  $\phi$  – пористость [43, 222].

Оператор  $\mathbf{A}^{-1}$  является оператором решения прямой задачи однофазной фильтрации (2.178) – (2.181). Поскольку разрывный метод Галёркина позволяет определить решение прямой задачи в пространстве  $L^2(\Omega)$ , то  $Y = L^2(\Omega)$ . Поэтому минимизация функционала (2.185) эквивалента минимизации [75]

$$J_\alpha(\Theta) = \int_T \int_\Omega (F - F^*)^2 d\Omega dt + \alpha \|\Theta\|^2 \quad (2.186)$$

где  $F^*$  – интегральная оценка модуля скорости фильтрации в гетерогенной среде,  $F$  – интегральная оценка модуля скорости фильтрации в однородной среде для заданного набора параметров (2.184),  $\alpha$  – параметр регуляризации.

На неизвестные параметры должно быть наложено ограничение из физических соображений

$$k_{xx}, k_{xy}, k_{xz}, k_{yy}, k_{yz}, k_{zz} > 0. \quad (2.187)$$

Ограничение (2.187) реализуется как увеличение параметра  $\alpha$  для компоненты решения, которая становится отрицательной, и как уменьшение итерационного параметра в случае превышения некоторого критического значения  $k_\Omega$ .

Пусть ошибка задания правой части уравнения  $\|F^* - F\| = \delta$  неизвестна, определим квазиоптимальное значение параметра регуляризации по оценке разности приближенных решений на соседних итерациях  $\|\Theta_{\alpha_{k+1}} - \Theta_{\alpha_k}\|$ . Алгоритм вычисления параметра регуляризации можно найти в [42, 75, 76, 77, 78].

Согласно работам [76, 216], функционал (2.186) является сильно выпуклым. Поэтому для его минимизации можно применить градиентные итерационные методы. Для минимизации функционала (2.186) используется метод сопряжённых градиентов Флетчера-Ривса.

### 2.7.3 Метод Флетчера-Ривса

Идея градиентных методов: если в точке  $p \in P$  градиент функционала  $J(p)$  не равен нулю, то, двигаясь в направлении антиградиента в точку  $(p + \delta p)$ , можно уменьшить значение функционала  $J(p + \delta p)$  при условии, что шаг спуска достаточно мал [176]. Градиентный метод Флетчера-Ривса доставляет минимум квадратичной  $n$ -мерной функции за  $(n + 1)$ -итерацию [176].

Вектор градиента функционала (2.186) обозначим как

$$\mathbf{d} = 2 \int_0^T \left( \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \right)^T (F - F^*) dt + 2\alpha \Theta, \quad (2.188)$$

$\Theta^{(0)}$  – начальное приближение,  $\mathbf{s}$  – вектор направления,  $n$  – текущая итерация, векторную функцию чувствительности определим в виде

$$\Psi = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \theta_i}, i := 1..6 \right\} \quad (2.189)$$

и градиент функционала (2.186) без регуляризации

$$\nabla J = \left\{ \frac{\partial J}{\partial \theta_i} = 2 \int_0^T \frac{\partial F}{\partial \theta_i} (F - F^*) dt, i := 1..6 \right\}. \quad (2.190)$$

---

#### Алгоритм 5 – Метод Флетчера-Ривса

---

- 1: выбрать начальное приближение  $\Theta^{(0)}$ , точность  $\varepsilon$ , MAX – макс. число итераций;
  - 2: вычислить  $\mathbf{d}^{(0)}(\Theta^{(0)})$ ;
  - 3:  $\mathbf{s}^{(0)} := -\mathbf{d}^{(0)}$ ;
  - 4: **for**  $n := 0, 2, 3 \dots$  **do**
  - 5:     вычислить  $\tau^{(n+1)} := \arg \min_{\beta} J(\Theta^{(n)} + \beta^{(n)} \mathbf{s}^{(n)}) := -(\mathbf{d}^{(n)})^T \cdot (\nabla J) / (\mathbf{d}^{(n)})^T \left( \int_0^t \Psi^T \cdot \Psi dt \right) \cdot (\mathbf{d}^{(n)})$ ;
  - 6:      $\Theta^{(n+1)} := \Theta^{(n)} + \tau^{(n)} \mathbf{s}^{(n)}$ ;
  - 7:     вычислить  $\mathbf{d}^{(n+1)}(\Theta^{(n+1)})$ ;
  - 8:      $\mathbf{s}^{(n+1)} := -\mathbf{d}^{(n+1)} + \mathbf{s}^{(n)} \frac{(\mathbf{d}^{(n+1)}, \mathbf{d}^{(n)})}{(\mathbf{d}^{(n)}, \mathbf{d}^{(n)})}$ ;
  - 9:     **if**  $\|\mathbf{d}^{(n+1)}\| < \varepsilon$  или  $n > \text{MAX}$  **then** Stop.
  - 10: **end for.**
- 

Алгоритм Флетчера-Ривса использует функцию чувствительности  $\Psi$ . Применим для её вычисления схему Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_i} = \frac{F(\theta_i + \Delta\theta_i) - F(\theta_i)}{\Delta\theta_i}, \quad (2.191)$$

где  $\Delta\theta_i = \theta_i^{(n)} - \theta_i^{(n-1)}$ .

Градиентные итерационные методы чувствительны к выбору начального приближения  $\Theta^{(0)}$ , и в окрестности точного решения может наблюдаться осцилляция градиента функционала (2.186). Поэтому предлагается использовать метод Ньютона для локальной минимизации функционала (2.186) с начальным приближением метода Флетчера-Ривса по достижению им критерия останова.

### 2.7.4 Локальный метод Ньютона

Обозначим  $\Theta^{(0)}$  результат минимизации функционала (2.186) по методу Флетчера-Ривса. Поскольку  $J_\alpha(\Theta) \in C^2(\Omega)$ , то в окрестности точки  $\Theta^{(0)}$  можно использовать разложение в ряд Тейлора функции многих переменных

$$J_\alpha(\Theta) = J_\alpha(\Theta^{(0)}) + \nabla J_\alpha(\Theta^{(0)})^T \cdot (\Delta\Theta) + \frac{1}{2}(\Delta\Theta)^T \cdot \mathbf{H}(\Theta^{(0)}) \cdot (\Delta\Theta) + o(\|\Delta\Theta\|^2), \quad (2.192)$$

где  $\mathbf{H}(\Theta^{(0)})$  – матрица Гессе,  $\Delta\Theta := \Theta - \Theta^{(0)}$ .

Необходимым и достаточным условием существования экстремума сильно выпуклого квадратичного функционала является равенство нулю его градиента

$$\nabla J_\alpha(\Theta) = \nabla J_\alpha(\Theta^{(0)})^T + \mathbf{H}(\Theta^{(0)}) \cdot (\Delta\Theta) = 0, \quad (2.193)$$

откуда

$$\Theta^{(n+1)} = \Theta^{(n)} - [\mathbf{H}(\Theta^{(n)})]^{-1} \cdot \nabla J_\alpha(\Theta^{(n)}). \quad (2.194)$$

---

#### Алгоритм 6 – Итерационный метод минимизации функционала (2.186)

---

- 1: выбрать начальное приближение  $\Theta^{(0)}$ , точность  $\varepsilon$ , МАХ – макс. число итераций;
- 2: согласовать выбор параметра регуляризации  $\alpha$  с ошибкой задания модели наблюдения;
- 3: выполнить не менее 7-ми итераций метода Флетчера-Ривса;  
продолжить минимизацию с помощью локального метода Ньютона для полученного решения, пока не будет достигнут критерий останова

- 4: 
$$\frac{\|J(\Theta^{(n+1)}) - J(\Theta^{(n)})\|}{\|J(\Theta^{(n)})\|} < \varepsilon \quad (2.195)$$

---

Отметим, что  $J(\Theta^{(n)})$  вычисляется по формуле (2.186) при  $\alpha = 0$ .

### 2.7.5 Исследование оператора прямой задачи

Существование решения обратной задачи (2.182) зависит от свойств оператора прямой задачи. Поэтому необходимо установить, при каком допустимом уровне возмущения неизвестных параметров оператор прямой задачи однофазной фильтрации определён и непрерывен. Применение теории возмущений можно найти в работе А.А. Абрамова и Л.Ф. Юхно [1].

Рассмотрим задачу однофазной фильтрации (2.178) – (2.181) в однородной среде, которая изображена на рисунке 29а. Для компонент тензора абсолютной проницаемости  $\mathbf{K}$  предлагается использовать вектор  $\Theta^{(0)} = \{\theta_i = 0.1\}$ . Построим серию решений для  $\Theta^{(1)} = \{\theta_i + \Delta\theta_i\}$ , где  $\Delta\theta_i = 0.05\theta_i$ ,  $0.1\theta_i$  и  $0.15\theta_i$ , что соответствует возмущению компонент тензора проницаемости 5, 10 и 15%, соответственно.

Пусть оператор прямой задачи  $\mathbf{A}: X \rightarrow Y$  действует из вещественного банахова пространства  $X$  в вещественное банахово пространство  $Y$ . Тогда производная Фреше оператора прямой задачи – ограниченный линейный оператор  $\mathbf{P}: X \rightarrow Y$  такой, что

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{A}(\Theta + \mathbf{h}) - \mathbf{A}(\Theta), \quad (2.196)$$

где  $\mathbf{h} = \{\Delta\theta_i\}$ .

Если производная Фреше существует, то оператор прямой задачи непрерывен и определён во всей области  $\Omega^0$ . Иначе обратный оператор  $\mathbf{A}^{-1}$  может быть определён не на всём пространстве  $Y$ , и обратная задача (2.182) становится некорректной.

Для проверки существования производной Фреше применим сингулярное разложение (Singular Value Decomposition) её матрицы. Диагональная матрица SVD-разложения состоит из сингулярных чисел, упорядоченных по убыванию. Ранг матрицы сингулярных чисел должен совпадать с рангом матрицы оператора прямой задачи. Алгоритм SVD-разложения можно найти в [226].

На рисунках 30 – 37 показаны сингулярные числа SVD-разложения матрицы Фреше в результате аппроксимации оператора прямой задачи с помощью классического метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина.



Рисунок 30 – Сингулярные числа матрицы Фреше при использовании классического МКЭ и при возмущении диагональных компонент тензора

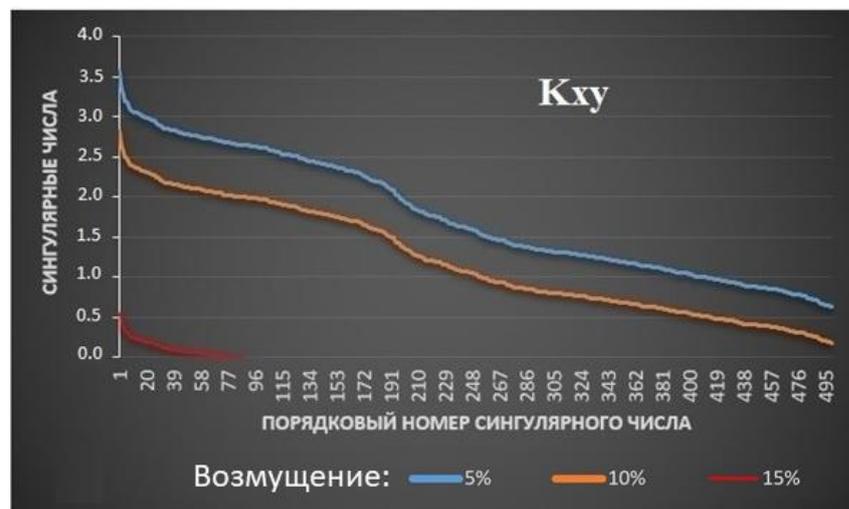


Рисунок 31 – Сингулярные числа матрицы Фреше при использовании классического МКЭ и при возмущении компоненты  $K_{xy}$



Рисунок 32 – Сингулярные числа матрицы Фреше при использовании классического МКЭ и при возмущении компоненты  $K_{xz}$



Рисунок 33 – Сингулярные числа матрицы Фреше при использовании классического МКЭ и при возмущении компоненты  $K_{yz}$



Рисунок 34 – Сингулярные числа матрицы Фреше при использовании разрывного метода Галёркина и при возмущении диагональных компонент тензора



Рисунок 35 – Сингулярные числа матрицы Фреше при использовании разрывного метода Галёркина и при возмущении компоненты  $K_{xy}$



Рисунок 36 – Сингулярные числа матрицы Фреше при использовании разрывного метода Галёркина и при возмущении компоненты  $K_{xz}$



Рисунок 37 – Сингулярные числа матрицы Фреше при использовании разрывного метода Галёркина и при возмущении компоненты  $K_{yz}$

Анализ графиков на рисунках 30 – 37 позволяет сделать вывод, что возмущение недиагональных компонент тензора абсолютной проницаемости приводит к сингулярно-возмущённой прямой задаче (2.178) – (2.181) в дискретной постановке классического МКЭ. Ранги матрицы сингулярных чисел и матрицы оператора прямой задачи не совпадают. Применение разрывного метода Галёркина позволяет корректно аппроксимировать операторы сингулярно-возмущённых прямых задач.

## 2.7.6 Исследование функции чувствительности и градиента функционала

Построим серию решений прямых задач однофазной фильтрации в однородной среде для тензора абсолютной проницаемости с компонентами  $\Theta^{(0)} = \{\theta_i = 0.1\}$  и их возмущением 5, 10 и 15%. Функции чувствительности для каждого параметра

вычисляются по формуле (2.191). Графики функций чувствительности изображены на рисунке 38.

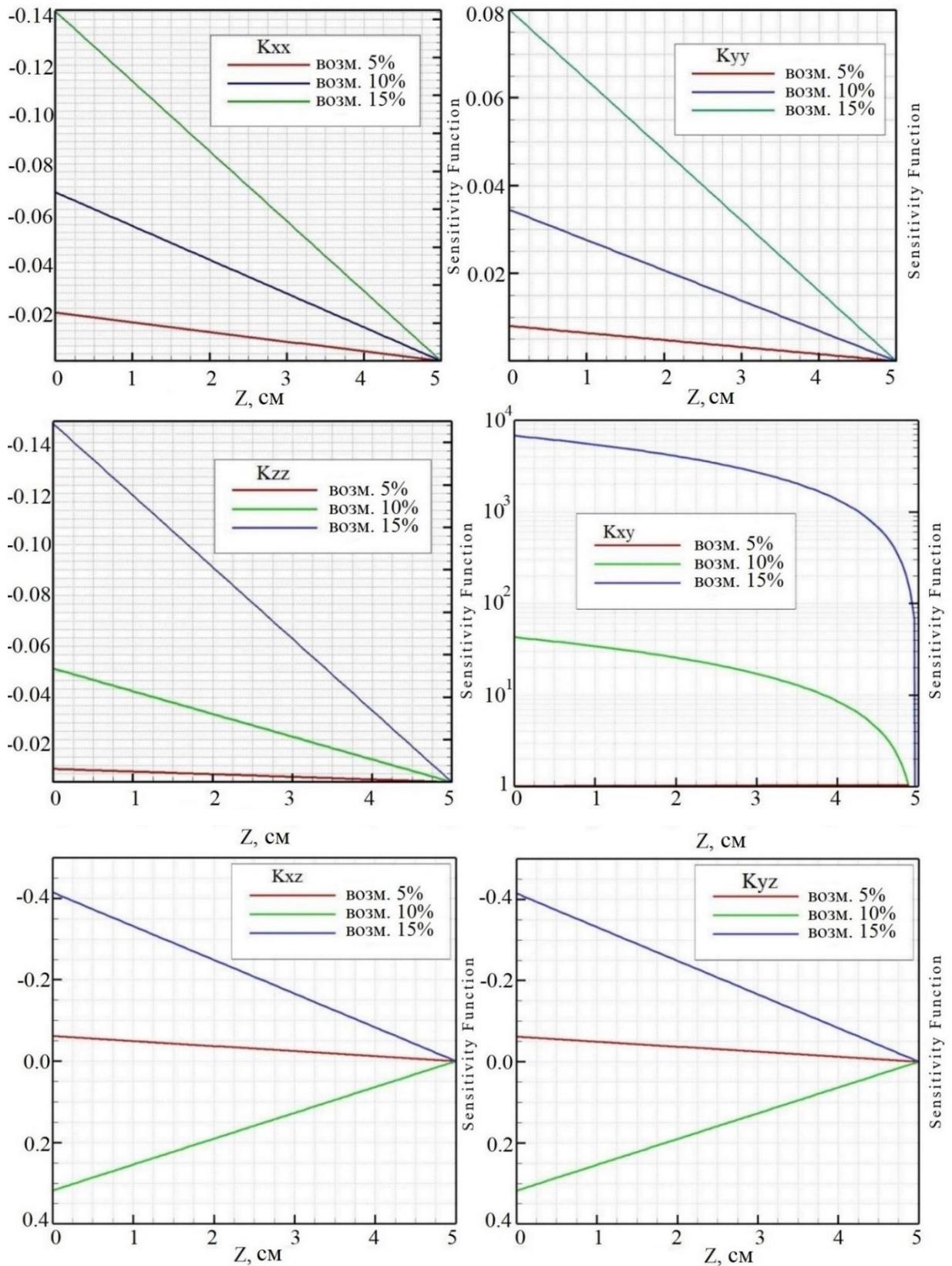


Рисунок 38 – Графики функций чувствительности по высоте расчётной области при возмущении разных компонент тензора абсолютной проницаемости

Графики функций чувствительности, выведенные по высоте расчётной области, при возмущении компонент тензора абсолютной проницаемости показывают, что удовлетворительную оценку функции чувствительности в методе давления можно получить для уровня возмущения не более 10%. Необходимо отметить быстрый рост функции чувствительности при возмущении недиагональных компонент тензора проницаемости. Так, для недиагональной компоненты тензора  $K_{xy}$  возмущение 15% приводит к значению функции чувствительности  $10^4$ , что может вызвать осцилляцию градиента функционала обратной задачи и привести к физически нерелевантному решению задачи определения компонент тензора абсолютной проницаемости.

Единственность решения обратной коэффициентной задачи (2.182) и существование градиента функционала (2.186) согласно работам [75, 76] обеспечиваются применением устойчивых вычислительных схем для решения прямых сингулярно-возмущённых задач и схемы регуляризации в случае некорректно заданной модели наблюдений. Для рассмотренной расчётной области при начальном приближении тензора абсолютной проницаемости  $\Theta^{(0)} = \{\theta_i = 0.1\}$  установлен допустимый порог возмущения параметров не более чем на 10% при использовании разрывного метода Галёркина для дискретизации оператора прямой задачи.

Чувствительность градиента функционала (2.186) к вариациям компонент тензора согласно формуле (2.190) полностью определяется функцией чувствительности. Поэтому все выводы, сделанные для функций чувствительности, сохраняют свою силу при анализе чувствительности градиента функционала, при этом графики частных производных  $\frac{\partial J}{\partial \theta_i}$  отличаются от графиков функций чувствительности только масштабным множителем  $2(F - F^*)$ .

### 2.7.7 Верификация метода решения обратной задачи

Для верификации метода решения обратной коэффициентной задачи (ОКЗ) получим данные измерений интегральной оценки модуля скорости фильтрации как результат решения задачи однофазной фильтрации (2.178) – (2.181) в однородной среде, которая изображена на рисунке 29а, с тензором абсолютной проницаемости

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1.0e-4 & 1.0e-6 & 1.0e-6 \\ 1.0e-6 & 1.0e-4 & 1.0e-6 \\ 1.0e-6 & 1.0e-6 & 1.0e-5 \end{pmatrix}.$$

Генерацию нормально распределённой случайной величины для зашумления измерений выполним при помощи функции NormalDistribution из сборки платформы .NET библиотеки System.Web.DataVisualization.dll. Нормальное распределение функции NormalDistribution имеет среднее значение 0 со стандартным отклонением 1. Случайную величину зашумления можно выразить как

$$\xi = \lambda F \text{ NormalDistribution}(f),$$

где  $\lambda$  – уровень зашумления,  $F$  – модуль скорости фильтрации,  $f$  – масштабированный модуль скорости в отрезке  $[-1, 1]$ , который вычисляется по формуле

$$f = \frac{2F - (F_{\max} + F_{\min})}{F_{\max} - F_{\min}},$$

где  $F_{\max}$  – наибольшее значение и  $F_{\min}$  – наименьшее значение модуля скорости.

Используются уровни зашумления синтетических данных 5, 10 и 15%. Для оценки относительной погрешности решений применим формулу

$$\Delta_{\mathbf{K}^{\text{eff}}} = \frac{\|F - F^*\|_{L^2(\Omega)}}{\|F^*\|_{L^2(\Omega)}} \cdot 100\%, \quad (2.197)$$

где  $F$  – интегральная оценка модуля скорости фильтрации в однородной среде  $\Omega^0$  с вычисленным эффективным тензором проницаемости,  $F^*$  – интегральная оценка модуля скорости фильтрации в пористой неоднородной среде (без зашумления).

Начальное приближение  $\Theta^{(0)} = \{\theta_i = 0.1\}$ . Вычисленный эффективный тензор проницаемости будет приводиться с двумя верхними индексами  $\mathbf{K}^{FR+N}$ , где  $FR$  – число итераций метода Флетчера-Ривса,  $N$  – число итераций метода Ньютона.

Таблица 31 – Верификация метода решения ОКЗ

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективный тензор абсолютной проницаемости, $m^2$	Погрешность $\Delta_{\mathbf{K}^{eff}}$ , %
5	$3.5e-10$	$\mathbf{K}^{8+3} = \begin{pmatrix} 1.3e-4 & 1.2e-6 & 1.2e-6 \\ 1.2e-6 & 1.3e-4 & 1.2e-6 \\ 1.2e-6 & 1.2e-6 & 1.4e-5 \end{pmatrix}$	1.98
10	$7.3e-10$	$\mathbf{K}^{8+3} = \begin{pmatrix} 3.1e-4 & 2.7e-6 & 1.8e-6 \\ 2.7e-6 & 4.0e-4 & 3.5e-6 \\ 1.8e-6 & 3.5e-6 & 3.9e-5 \end{pmatrix}$	2.74
15	$1.8e-9$	$\mathbf{K}^{8+5} = \begin{pmatrix} 1.9e-3 & 2.7e-5 & 7.2e-6 \\ 2.7e-5 & 8.3e-4 & 2.9e-5 \\ 7.2e-6 & 2.9e-5 & 5.1e-5 \end{pmatrix}$	9.35

По результатам вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что предложенный метод решения обратной коэффициентной задачи позволяет вычислить эффективный тензор абсолютной проницаемости при зашумлении измерений до 10% с относительной погрешностью не более 3%.

## 2.8 Процесс фильтрации в слоистой среде

Слоистость является естественным свойством большинства геологических сред. Слоистая структура определяет неоднородность проницаемости и является причиной её анизотропной природы. Особый интерес для геологических приложений представляет слоистая среда с зонами, которые содержат целики – участки залежей с изолированными карманами неизвлечённой нефти. Такие объекты можно трактовать как включения с низкой проницаемостью, наличие которых приводит к снижению коэффициента отдачи нефти [65]. Поэтому требуется решение задачи определения эффективного тензора проницаемости таких сред.

Рассмотрим слоистую среду, изображённую на рисунке 39а. На рисунке 39б показан участок извлечённой нефти по центру. Объёмная концентрация целика – 54%. Ось керна лежит между точками  $(0, 0, 0)$  и  $(0, 0, 5)$ , радиус керна  $R = 1$  см. Одно из главных направлений напластования совпадает с осью  $Oz$ . Триангуляция неоднородной среды представлена на рисунке 39в.

Целики заполнены нефтью с вязкостью  $\mu = 50$  мПа·с. На верхнее основание керна прикладывается давление  $10^5$  Па, а на нижнее – 0 Па. Боковая поверхность свободная. Геологическая порода имеет микропористость  $\phi = 8\%$ . Просачивается вода с вязкостью  $\mu = 1$  мПа·с и сжимаемостью  $C_f = 4.6 \cdot 10^{10}$  Па<sup>-1</sup>. Исходная проницаемость матрицы среды составляет  $10^{-5}$  м<sup>2</sup>. Процесс фильтрации длится 10 ч, шаг дискретизации по времени составляет 10 минут.

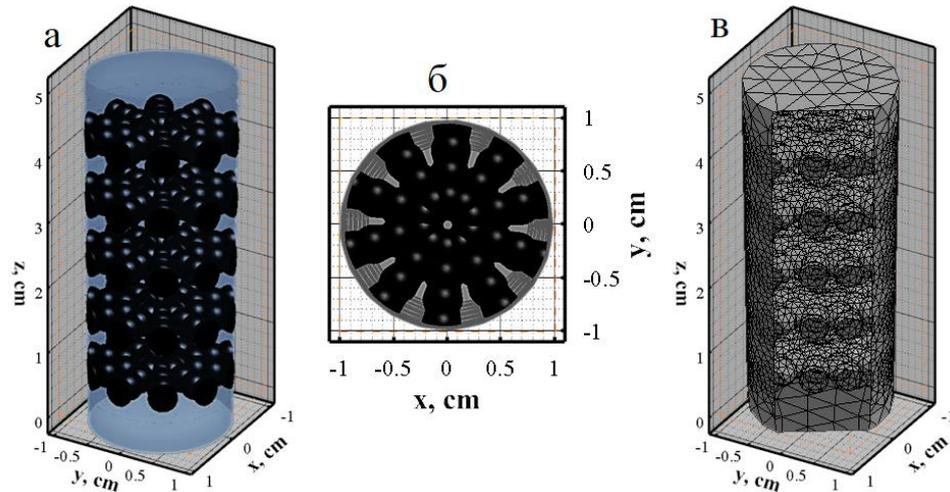


Рисунок 39 – Слоистая среда с 54% объёмной доли целика нефти (а), сечение в плоскости  $z = 4.5$  (б), триангуляция (в): 54571 тетраэдр, 218284 степени свободы

Процесс фильтрации воды внутри геологической среды описывается моделью однофазной фильтрации относительно давления, поведение нефти внутри пор описывается моделью Навье-Стокса. Согласование поведения давления на границе геологической среды и пор основано на законе сохранения массы, баланса сил и закона Бивера-Джозефа-Саффмана (2.148) – (2.150).

Результаты решения задачи просачивания воды в неоднородной среде с целиками нефти представлены на рисунках 40 и 41.

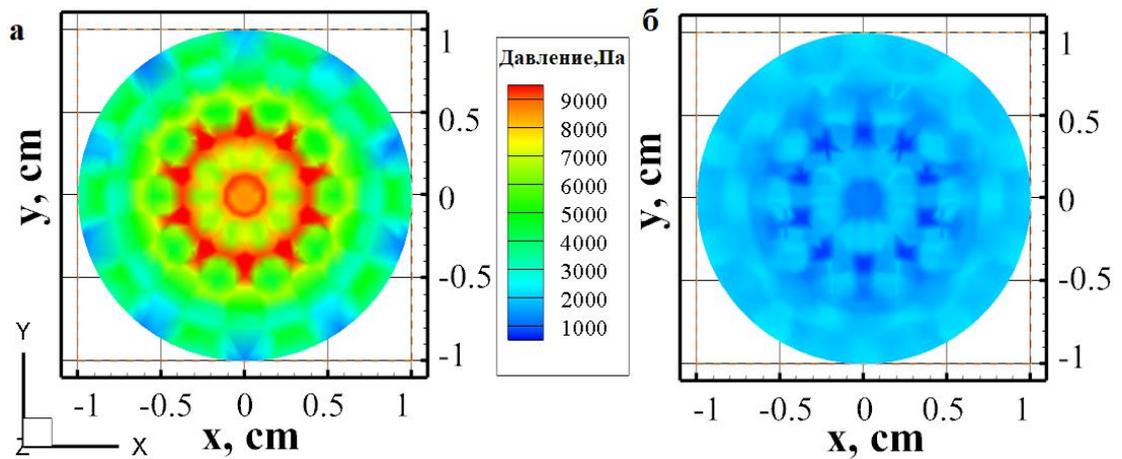


Рисунок 40 – Распределение давления в плоскости  $z = 4.5$ (а),  $z = 5$ (б)

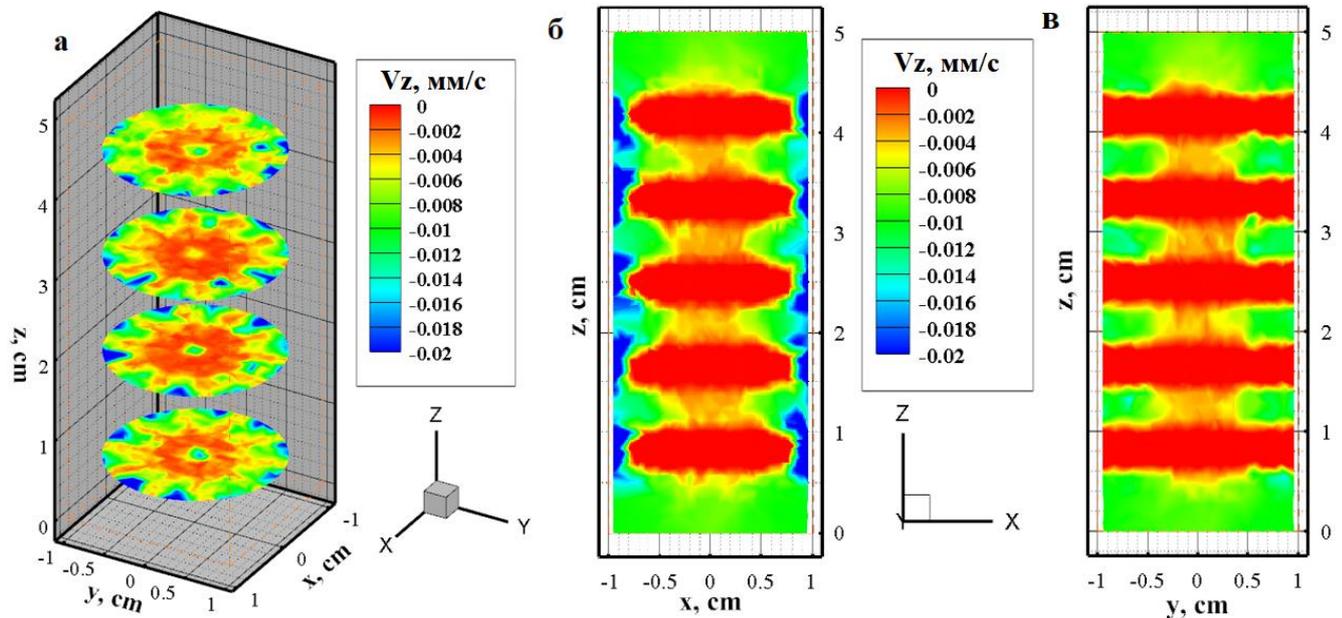


Рисунок 41 – Распределение  $z$ -компоненты вектора скорости в сечениях  $z = 1, 2, 3, 4.5$  (а),  $y = 0.3$  (б) и  $x = -0.2$  (в)

Вычисленный модуль вектора скорости фильтрации в гетерогенной среде с це-ликами используется при решении обратной коэффициентной задачи для опреде-ления эффективного тензора абсолютной проницаемости.

В таблице 32 представлены результаты решения обратной задачи для различ-ных уровней зашумления измерений модуля скорости фильтрации в гетерогенной среде и влияние параметра регуляризации на относительную погрешность решения обратной коэффициентной задачи.

Таблица 32 – Слоистая среда: эффективный тензор и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективный тензор гидравлической проницаемости, $\text{м}^2$	Погрешность $\Delta_{\mathbf{K}^{\text{eff}}}$ , %
5	$1.2e-9$	$\mathbf{K}^{10+5} = \begin{pmatrix} 4.62e-6 & 3.81e-6 & 4.73e-7 \\ 3.81e-6 & 5.13e-6 & 1.26e-7 \\ 4.73e-7 & 1.26e-7 & 8.23e-7 \end{pmatrix}$	2.31
10	$5.2e-9$	$\mathbf{K}^{10+9} = \begin{pmatrix} 8.91e-6 & 5.44e-6 & 2.11e-7 \\ 5.44e-6 & 8.78e-6 & 3.89e-7 \\ 2.11e-7 & 3.89e-7 & 7.19e-7 \end{pmatrix}$	3.91
15	$9.4e-9$	$\mathbf{K}^{10+10} = \begin{pmatrix} 8.36e-6 & 8.35e-6 & 2.99e-6 \\ 8.35e-6 & 1.36e-6 & 6.56e-6 \\ 2.99e-6 & 6.56e-6 & 6.23e-6 \end{pmatrix}$	11.71

Для слоистой среды с 54% объёмной концентрации целиксов нефти получены эффективные тензоры абсолютной проницаемости при уровнях зашумления 5% и 10% с относительной погрешностью 2.31% и 3.91%, соответственно. Одна из главных осей тензора совпадает с продольным направлением напластования вдоль оси Oz, что соответствует структуре неоднородной слоистой среды. Для уровня зашумления 15% не удалось восстановить локально-ортотропную структуру тензора, о чём говорит высокий уровень полученной погрешности в 11.71%. Абсолютная проницаемость в продольном направлении напластования отличается от проницаемости в поперечном на порядок.

Был вычислен эффективный тензор проницаемости по явной формуле для слоистых сред (1.6)

$$\mathbf{K}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 1.25e-6 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25e-6 & 0 \\ 0 & 0 & 5.97e-7 \end{pmatrix}, \Delta_{\mathbf{K}^{\text{eff}}} = 8.3\% .$$

Явный метод оценки тензора абсолютной проницаемости по формуле (1.6) не даёт приемлемого результата для сред с двумя неизвестными направлениями напластования. Однако позволяют вычислить нижнюю границу проницаемости в поперечном направлении напластования. Похожий результат был получен в работах F. Murat и L. Tartar, как отмечает А.Ю. Беляев в [13].

## 2.9 Процесс фильтрации в пористых средах

Моделирование процесса фильтрации жидкостей в пористых средах является нетривиальной задачей, поскольку учёт геометрии всего порового пространства приводит к значительным вычислительным затратам. Поэтому требуется использование макроскопических моделей для описания процесса фильтрации в эффективной среде. Основная сложность, связанная с переходом от микро- к макромасштабной модели, заключается в выборе физической модели проницаемости, которая в зависимости от геометрии порового пространства может быть изотропной или анизотропной.

Как отмечается в работах F.A. Khan [177] и K.Vafai [222], для равномерно заполненных пористых сред существует пороговое значение пористости, при котором возможен переход от анизотропной модели проницаемости к изотропной в предположении о соизмеримости пор.

Рассмотрим пористые среды, изображённые на рисунке 42. Ось керна лежит между точками  $(0, 0, 0)$  и  $(0, 0, 5)$ , радиус керна  $R = 1$  см. Концентрация макропор в первом керне 1%, во втором – 6% и в третьем – 10%. Центры пор и радиусы пор внутри кернов сгенерированы случайным образом. Радиус пор варьируется от 0.1 мм до 1 мм.

Поры кернов заполнены нефтью с вязкостью  $\mu = 50$  мПа·с. На верхнее основание кернов прикладывается давление  $10^5$  Па, а на нижнее – 0 Па. Боковая поверхность свободная. Геологические породы имеют микропористость  $\phi = 8\%$ . Просачивается вода с вязкостью  $\mu = 1$  мПа·с и сжимаемостью  $C_f = 4.6 \cdot 10^{10}$  Па<sup>-1</sup>. Исходная проницаемость матрицы сред составляет  $10^{-5}$  м<sup>2</sup>. Процесс фильтрации длится 10 ч, шаг дискретизации по времени составляет 10 мин.

Для моделирования процесса фильтрации с учётом всей пористой структуры кернов используется метод явного учёта неоднородностей. Строится триангуляция среды так, что максимально возможное ребро тетраэдра не превышает 50% от наименьшего радиуса поры.

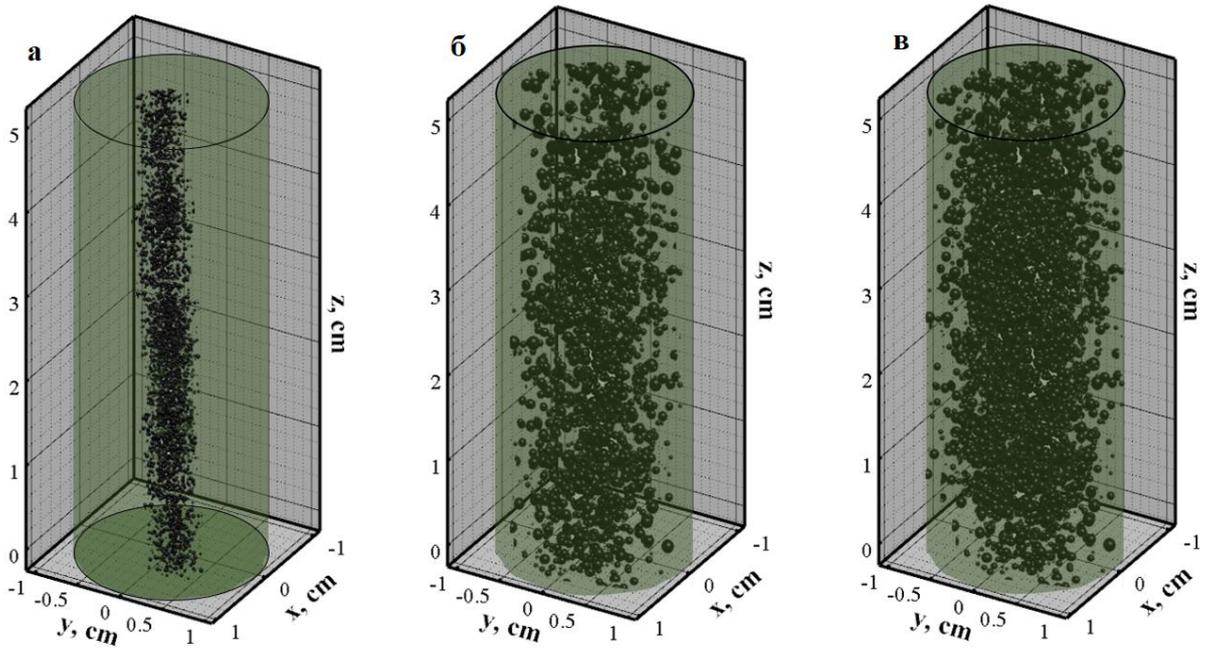


Рисунок 42 – Пористые среды с объёмной концентрацией пор: 1% (а), 6% (б), 10% (в)

Триангуляция образца с 1% пористости содержит 931456 тетраэдров и 3725824 степени свободы, триангуляция образца с 6% пористости содержит 745965 тетраэдров и 2983860 степеней свободы (см. рисунок 43а), триангуляция образца с 10% пористости содержит 839185 тетраэдров и 3356740 степеней свободы.

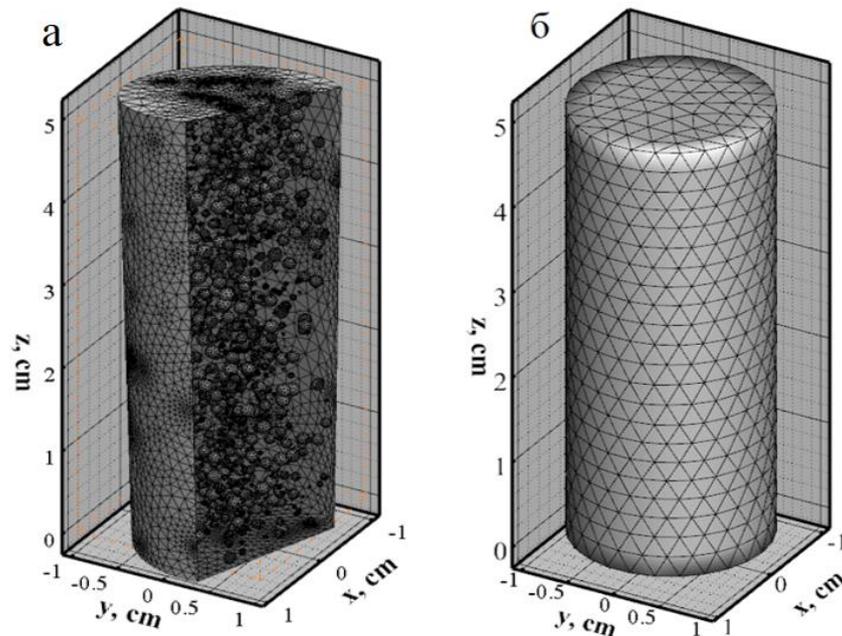


Рисунок 43 – Триангуляция: образец №2 (а) – 745965 тетраэдров, 2983860 степеней свободы; однородная среда (б): 3760 тетраэдров, 15040 степеней свободы

Метод явного учёта неоднородных включений является одним из самых ресурсозатратных и в то же время наиболее распространённым при моделировании процесса фильтрации в пористых среда со случайным распределением проницаемости по объёму.

Процесс фильтрации воды внутри геологической среды описывается моделью однофазной фильтрации относительно давления, поведение нефти внутри пор описывается моделью Навье-Стокса. Согласование поведения давления на границе геологической среды и пор основано на законе сохранения массы, баланса сил и закона Бивера-Джозефа-Саффмана (2.148) – (2.150).

Результаты решения задачи фильтрации с учётом случайной пористости кернов представлены на рисунках 44 – 49 в сечении  $y = 0$ .

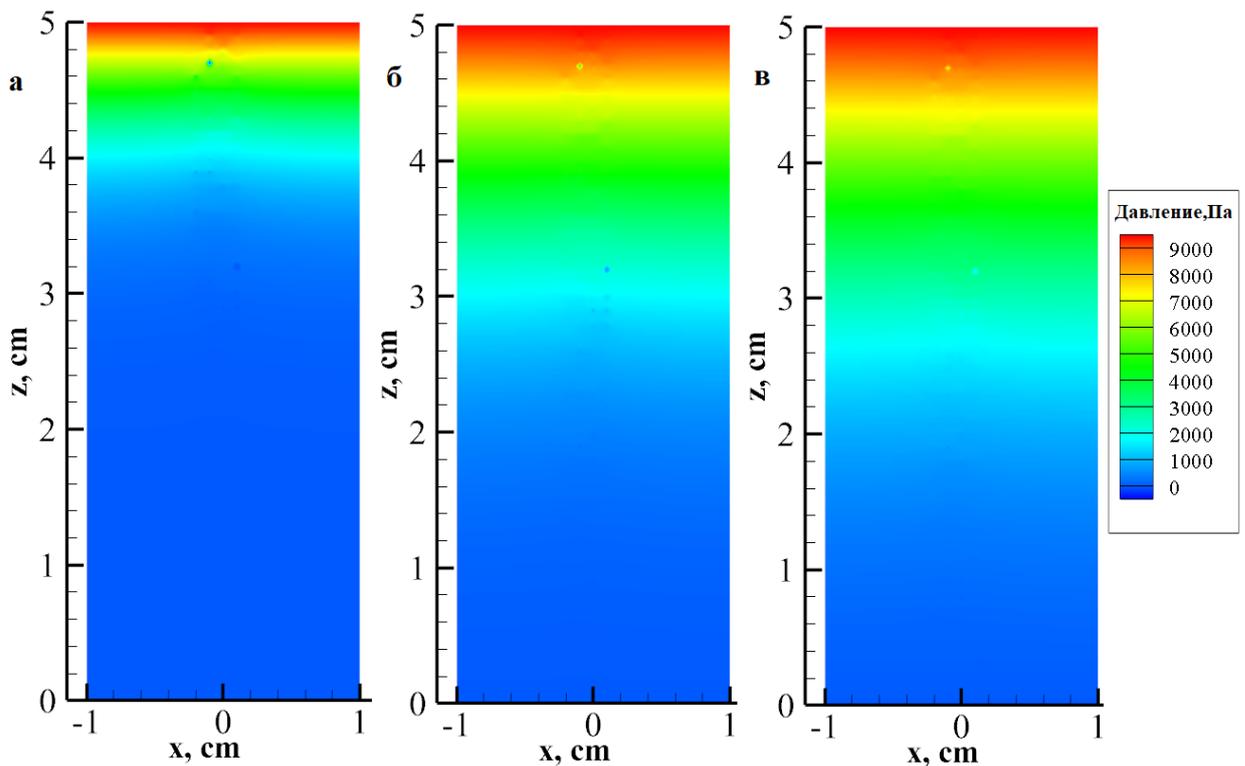


Рисунок 44 – Распределение поля давления в сечении керна  $y = 0$  с объёмной концентрацией пор 1% спустя 10 мин (а), 20 мин (б), 60 мин (в)

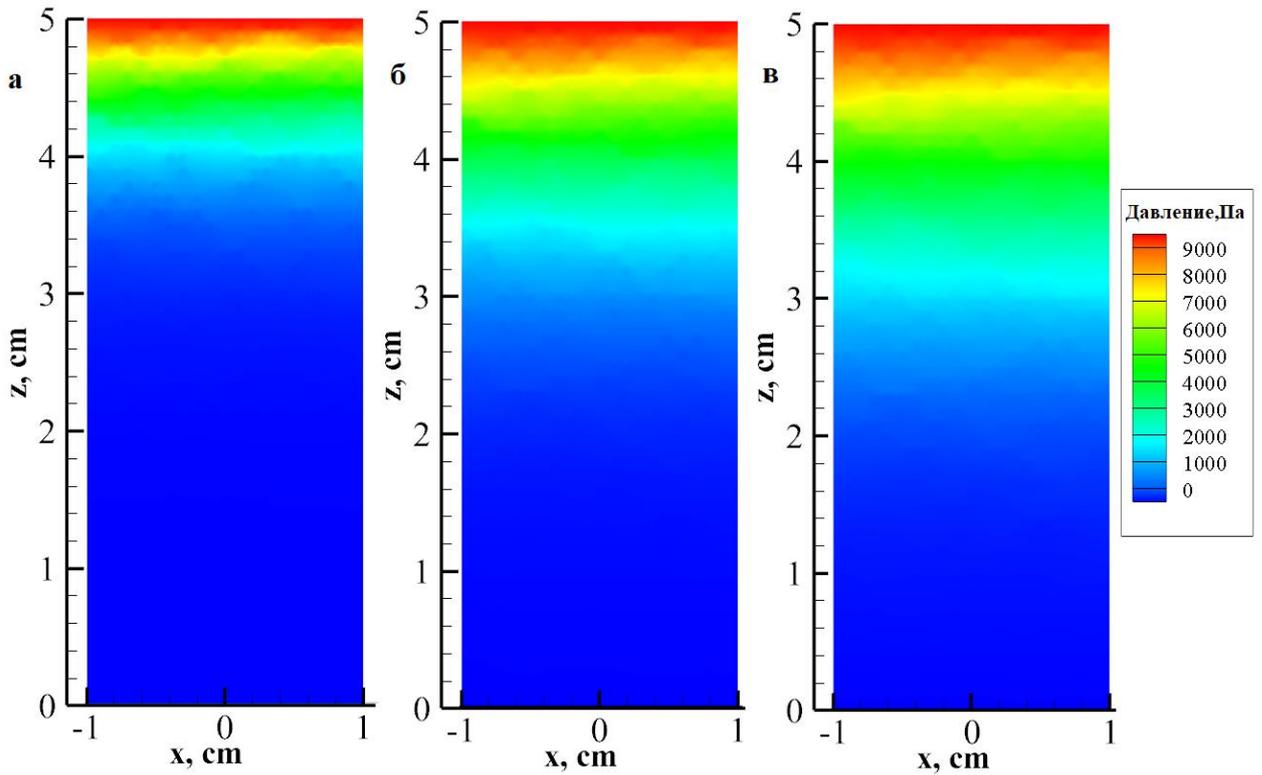


Рисунок 45 – Распределение поля давления в сечении ядра  $y = 0$  с объёмной концентрацией пор 6% спустя 10 мин (а), 20 мин (б), 60 мин (в)

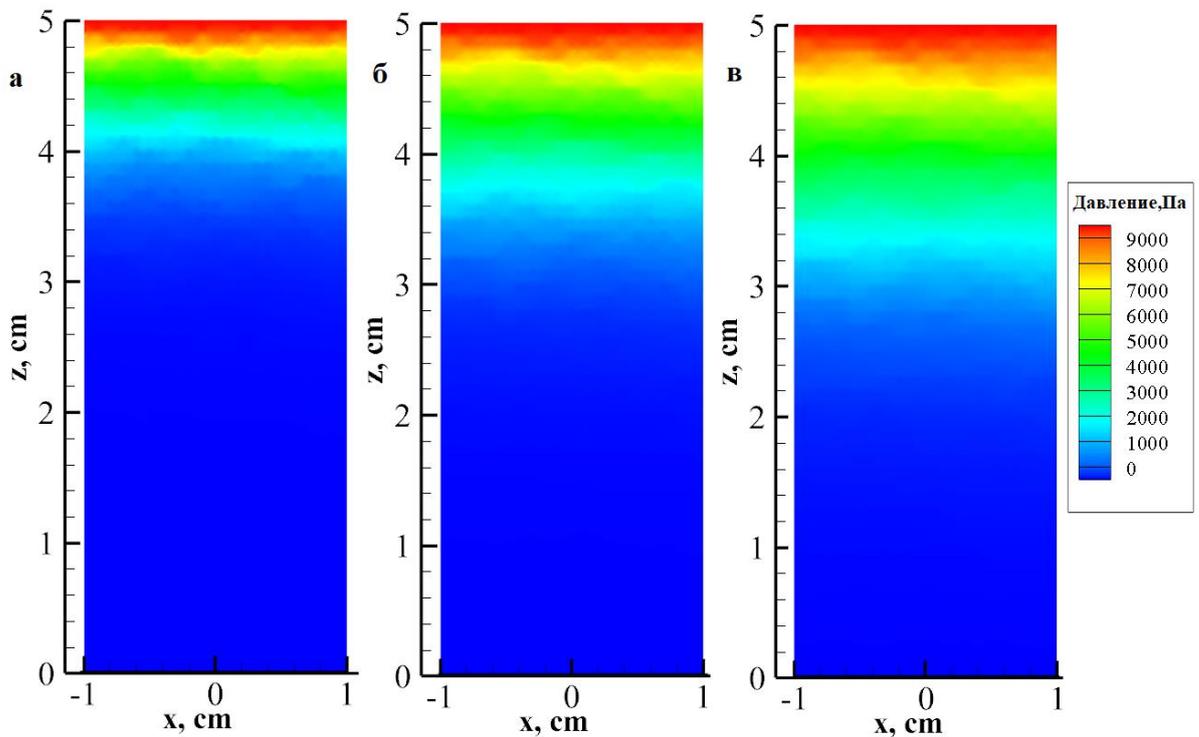


Рисунок 46 – Распределение поля давления в сечении ядра  $y = 0$  с объёмной концентрацией пор 10% спустя 10 мин (а), 20 мин (б), 60 мин (в)

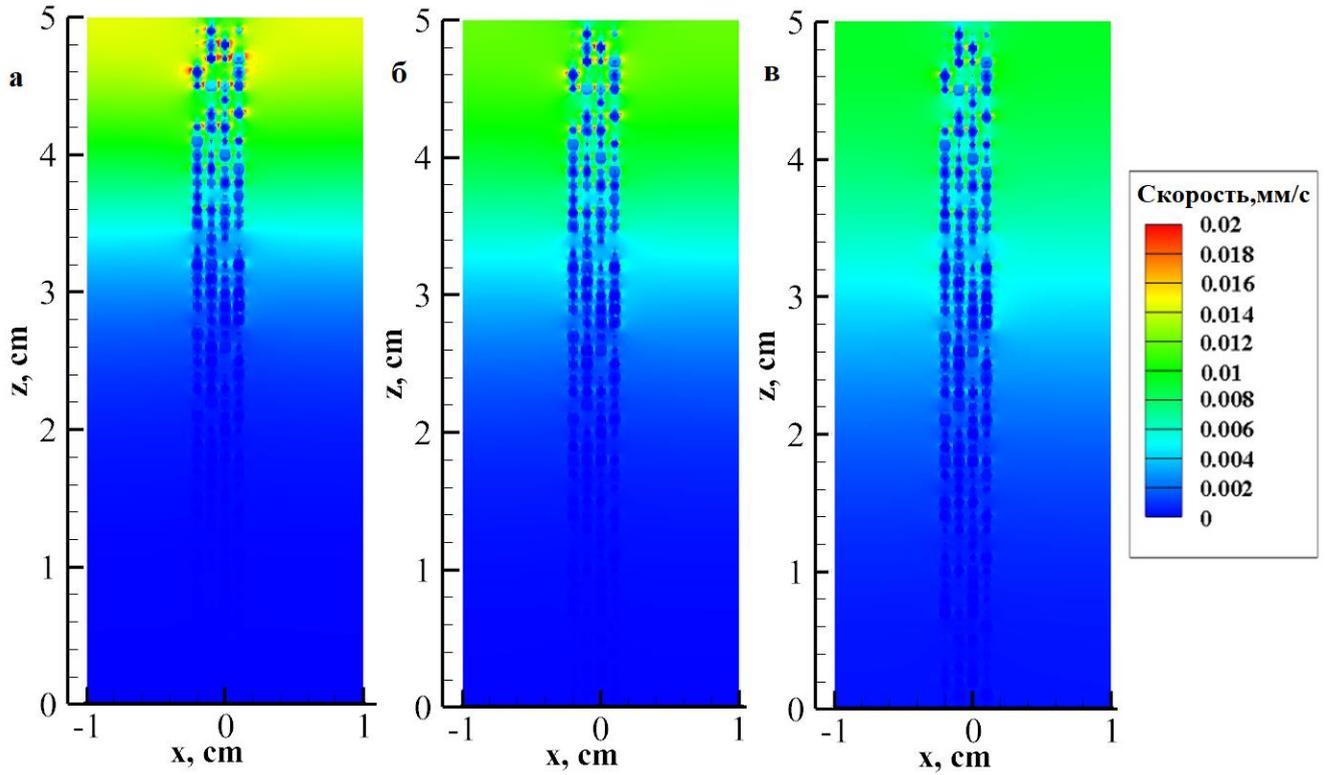


Рисунок 47 – Распределение модуля скорости фильтрации в сечении ядра  $y = 0$  с объёмной концентрацией пор 1% спустя 10 мин (а), 20 мин (б), 60 мин (в)

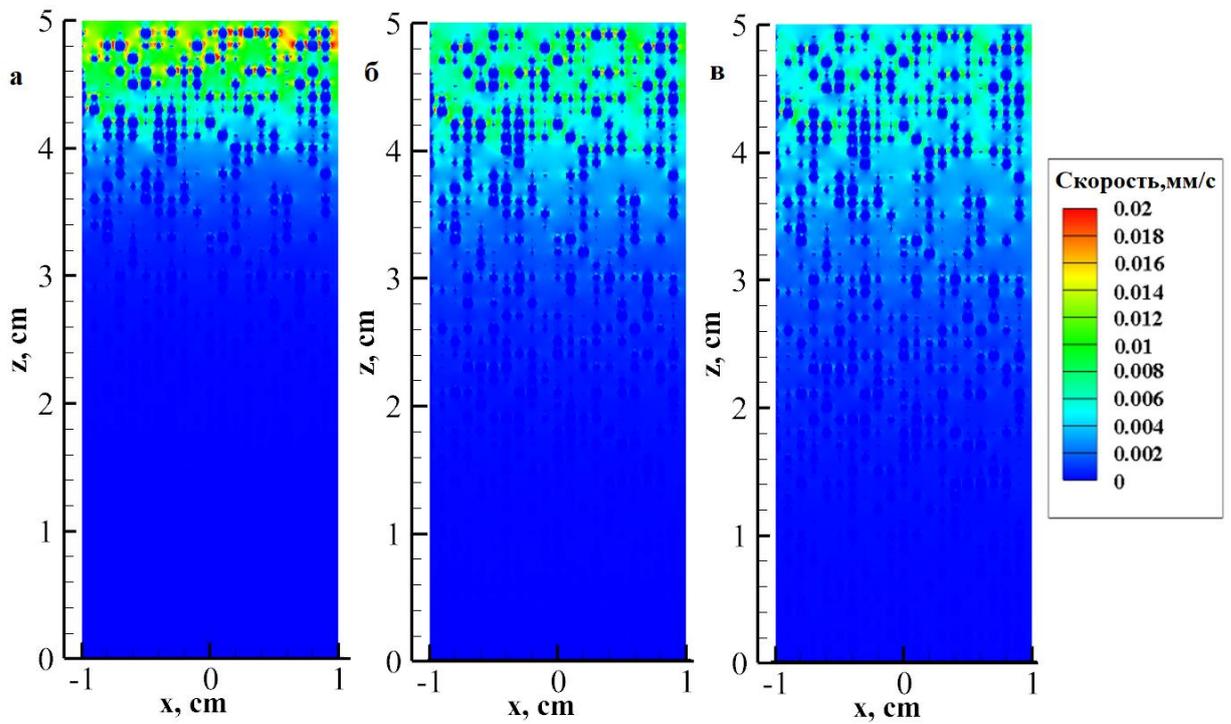


Рисунок 48 – Распределение модуля скорости фильтрации в сечении ядра  $y = 0$  с объёмной концентрацией пор 6% спустя 10 мин (а), 20 мин (б), 60 мин (в)

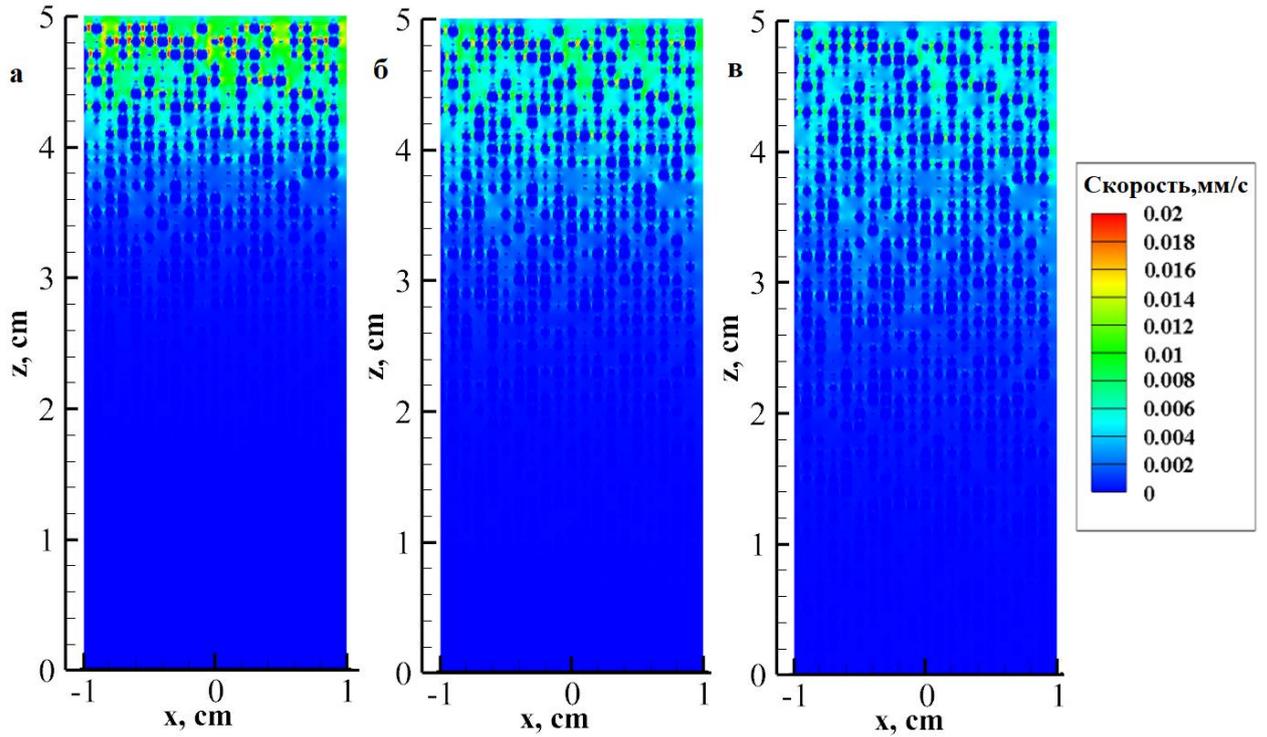


Рисунок 49 – Распределение модуля скорости фильтрации в сечении ядра  $y = 0$  с объёмной концентрацией пор 10% спустя 10 мин (а), 20 мин (б), 60 мин (в)

В таблицах 33 – 35 представлены результаты решения обратной коэффициентной задачи для различных уровней зашумления данных измерений модуля скорости фильтрации в гетерогенной среде (с учётом пор), влияние параметра регуляризации на погрешность решения обратной коэффициентной задачи.

Таблица 33 – Среда с пористостью 1%: эффективный тензор и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективный тензор гидравлической проницаемости, $\text{м}^2$	Погрешность $\Delta_{\mathbf{K}^{\text{eff}}}$ , %
5	$5.2e-9$	$\mathbf{K}^{10+4} = \begin{pmatrix} 9.19e-6 & 7.61e-7 & 5.78e-7 \\ 7.61e-7 & 9.20e-6 & 6.13e-7 \\ 5.78e-7 & 6.13e-7 & 9.97e-6 \end{pmatrix}$	3.65
10	$6.5e-9$	$\mathbf{K}^{10+7} = \begin{pmatrix} 5.87e-6 & 6.17e-7 & 9.56e-7 \\ 6.17e-7 & 5.93e-6 & 5.73e-7 \\ 9.56e-7 & 5.73e-7 & 6.31e-6 \end{pmatrix}$	4.13
15	$1.8e-8$	$\mathbf{K}^{10+10} = \begin{pmatrix} 5.12e-6 & 4.89e-6 & 3.17e-6 \\ 4.89e-6 & 6.34e-6 & 5.42e-6 \\ 3.17e-6 & 5.42e-6 & 8.38e-6 \end{pmatrix}$	4.48

Таблица 34 – Среда с пористостью 6%: эффективный тензор и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективный тензор гидравлической проницаемости, $\text{м}^{-2}$	Погрешность $\Delta_{\mathbf{K}^{\text{eff}}}$ , %
5	$6.1e-9$	$\mathbf{K}^{10+4} = \begin{pmatrix} 8.35e-6 & 4.56e-7 & 6.03e-7 \\ 4.56e-7 & 8.69e-6 & 4.99e-7 \\ 6.03e-7 & 4.99e-7 & 8.49e-6 \end{pmatrix}$	3.43
10	$9.3e-9$	$\mathbf{K}^{10+7} = \begin{pmatrix} 8.21e-6 & 3.82e-7 & 5.93e-7 \\ 3.82e-7 & 9.31e-6 & 5.41e-7 \\ 5.93e-7 & 5.41e-7 & 9.06e-6 \end{pmatrix}$	3.96
15	$8.2e-8$	$\mathbf{K}^{10+10} = \begin{pmatrix} 9.01e-6 & 3.79e-6 & 7.51e-6 \\ 3.79e-6 & 8.53e-6 & 5.17e-6 \\ 7.51e-6 & 5.17e-6 & 9.16e-6 \end{pmatrix}$	5.12

Таблица 35 – Среда с пористостью 10%: эффективный тензор и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективный тензор гидравлической проницаемости, $\text{м}^{-2}$	Погрешность $\Delta_{\mathbf{K}^{\text{eff}}}$ , %
5	$6.1e-9$	$\mathbf{K}^{10+5} = \begin{pmatrix} 8.37e-6 & 4.56e-8 & 8.25e-8 \\ 4.56e-8 & 8.41e-6 & 1.72e-8 \\ 8.25e-8 & 1.72e-8 & 8.35e-6 \end{pmatrix}$	2.05
10	$9.3e-9$	$\mathbf{K}^{10+7} = \begin{pmatrix} 8.49e-6 & 5.06e-8 & 7.91e-8 \\ 5.06e-8 & 8.39e-6 & 2.63e-8 \\ 7.91e-8 & 2.63e-8 & 8.31e-6 \end{pmatrix}$	2.93
15	$8.2e-8$	$\mathbf{K}^{10+9} = \begin{pmatrix} 7.85e-6 & 5.91e-7 & 7.03e-7 \\ 5.91e-7 & 8.03e-6 & 5.39e-7 \\ 7.03e-7 & 5.39e-7 & 7.91e-6 \end{pmatrix}$	3.40

Для неоднородных сред со случайной пористостью  $\phi = 1\%$ ,  $6\%$  и  $10\%$  получены эффективные тензоры абсолютной проницаемости, в которых выделяются главные направления осей, что соответствует теоретическим сведениям о проницаемости пористых сред. Диагональные компоненты тензора абсолютной проницаемости значениями приближаются друг к другу при увеличении объёмной концентрации пор. Таким образом, установлено существование асимптотического порога объёмной концентрации пор, при котором возможен переход от анизотропной модели пласта к изотропной. Похожие результаты для сред со случайной пористой структурой были получены в работах [177] и [222].

## 2.10 Сравнение с физическим экспериментом

Величина абсолютной проницаемости зависит от объёмной концентрации пор и трещин в геологической среде. Для валидации метода вычисления эффективной абсолютной проницаемости используются результаты физического эксперимента, приведённые в презентации компании EXA DIGITALROCK TECHNOLOGY (David Freed, August 9, 2017) [160].

На рисунке 50 изображены три пористых образца кубической формы, которые были получены из кернов (сухой песчаник). Длина ребра каждого образца 5 см. В ходе лабораторных исследований для каждого образца были установлены пористость, распределение радиусов пор по объёму, кривые капиллярного давления при просачивании воды и абсолютная проницаемость.

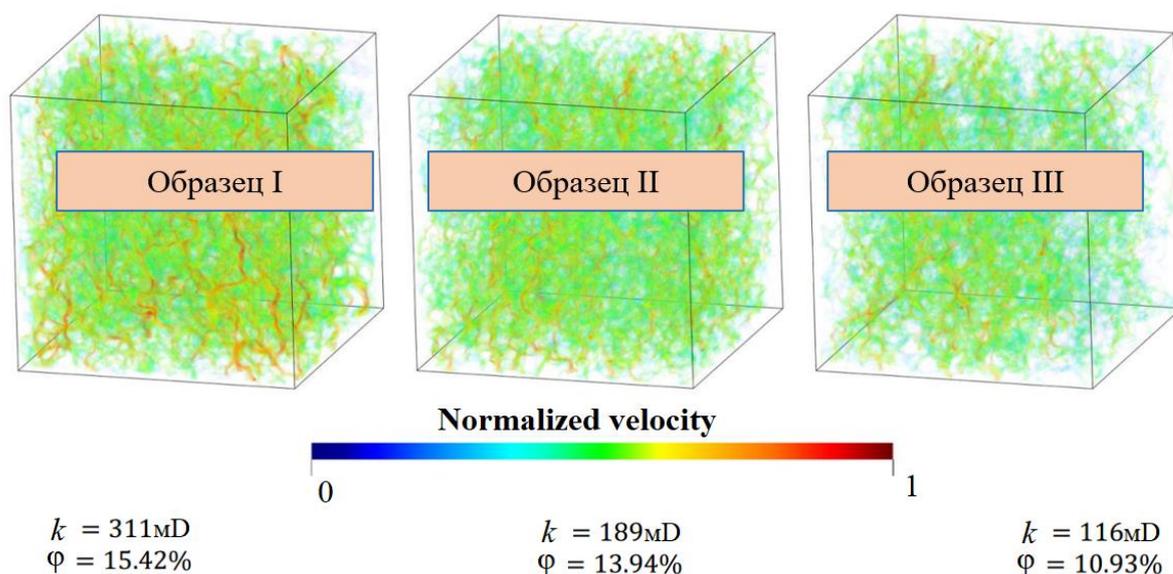


Рисунок 50 – Физический эксперимент: пористые образцы [160]

На рисунке 50 пористость образца обозначена символом  $\phi$ , абсолютная проницаемость –  $k$ . Величина 1 Дарси составляет  $0.9869 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ .

На рисунке 51 показаны образцы для вычислительного эксперимента. Серым цветом показана матрица среды, белым и светло-серым – каналы течения флюида. Флюид – вода с вязкостью  $\mu = 1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$  и сжимаемостью  $C_f = 4.6 \cdot 10^{10} \text{ Па}^{-1}$ . Перепад давления по высоте образцов составляет 1000 КПа. Процесс фильтрации длится 24 часа, шаг дискретизации по времени составляет 10 минут.

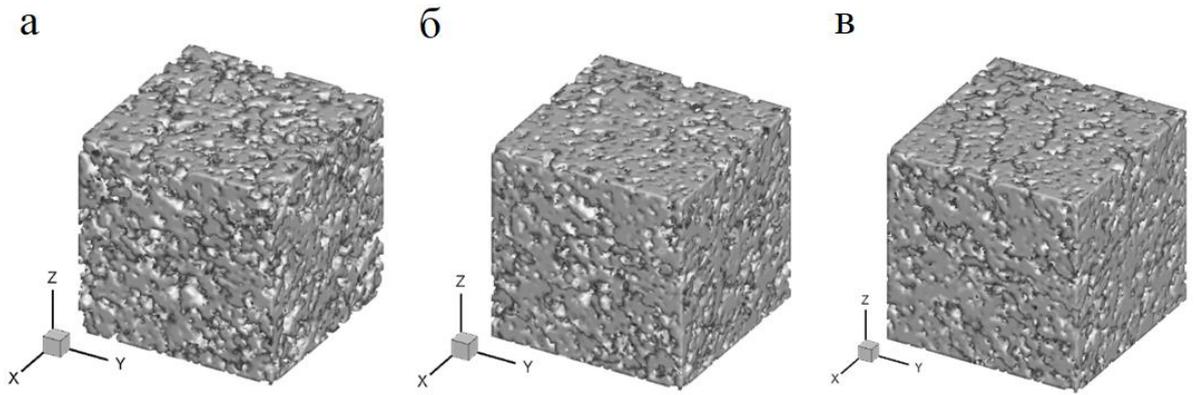


Рисунок 51 – Образцы для вычислительного эксперимента: объёмная пористость  $\varphi = 15.42\%$  (а),  $13.94\%$  (б) и  $10.93\%$  (в)

Триангуляция для образца №1 показана рисунке 52.

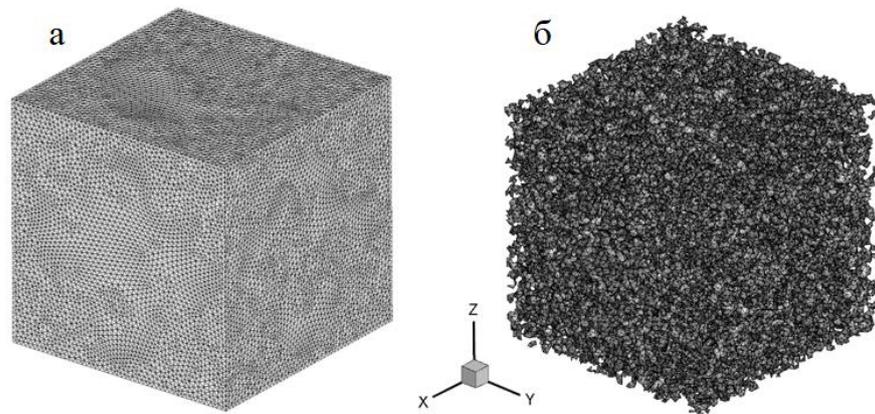


Рисунок 52 – Триангуляция образца №1: матрица (а) – 147468 вершин, 840309 тетраэдров; каналы (б) – 108151 вершина, 126975 тетраэдров

Результаты решения прямой задачи в неоднородной среде показаны на рисунках 53 и 54.

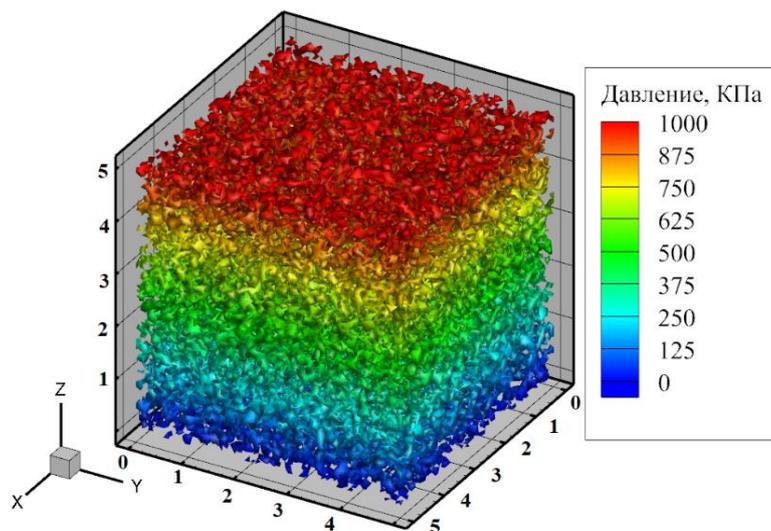


Рисунок 53 – Распределение давления в каналах образца №1 (спустя 23 ч)

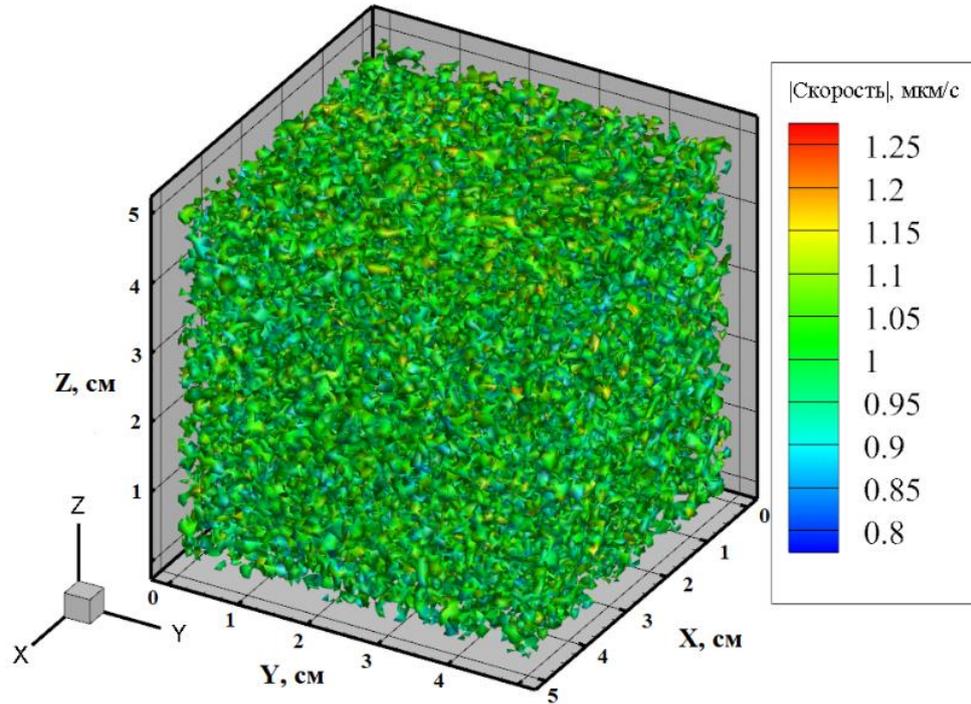


Рисунок 54 – Распределение модуля скорости в каналах образца №1 (спустя 23 ч)

В таблицах 36 – 38 представлены результаты решения обратной коэффициентной задачи для различных уровней зашумления данных измерений модуля скорости фильтрации в гетерогенной среде (данные физического эксперимента), влияние параметра регуляризации на погрешность решения обратной коэффициентной задачи.

Относительная погрешность вычисленной эффективной абсолютной проницаемости определяется по формуле

$$\Delta = \frac{|k_0 - k_{zz}|}{k} 100\%, \quad (2.198)$$

где  $k_0$  – экспериментальная абсолютная проницаемость (мД),  $k_{zz}$  – вычисленная абсолютная проницаемость (мД).

Таблица 36 – Образец I (пористость 15.42%): проницаемость и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективная абсолютная проницаемость $k_{zz}$ , мД	Погрешность $\Delta$ , %
5	$3.8e-8$	289	7.0
10	$9.1e-8$	283	9.0
15	$2.7e-7$	256	17.7

Таблица 37 – Образец II (пористость 13.94%): проницаемость и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективная абсолютная проницаемость $k_{zz}$ , мД	Погрешность $\Delta$ , %
5	$2.2e-8$	175	7.4
10	$5.9e-8$	171	9.5
15	$8.2e-7$	165	12.7

Таблица 38 – Образец III (пористость 10.93%): проницаемость и относительная погрешность

Уровень шума, %	Регуляр. $\alpha$	Эффективная абсолютная проницаемость $k_{zz}$ , мД	Погрешность $\Delta$ , %
5	$2.7e-8$	110	5.2
10	$3.2e-8$	106	8.6
15	$5.1e-7$	93	19.8

По результатам вычислительного эксперимента можно сделать вывод, что величина z-компоненты тензора абсолютной проницаемости для пористых образцов увеличивается при увеличении объёмной доли порового пространства, что подтверждается данными физического эксперимента в [160].

### Выводы по главе

Для методов моделирования процесса течения несжимаемой жидкости в канале с меняющимся диаметром проведена валидация реализованных вычислительных схем разрывного метода Галёркина и стабилизированного метода конечных элементов, которая установила совпадение результатов вычислительных экспериментов с данными физических экспериментов до 3%.

Устойчивое решение обратной коэффициентной задачи (ОКЗ) для определения эффективного тензора абсолютной проницаемости на базе метода давления существует при возмущении неизвестных параметров до 10% и при использовании вычислительной схемы разрывного метода Галёркина для аппроксимации оператора прямой сингулярно-возмущённой задачи однофазной фильтрации.

Минимизацию целевого функционала Тихонова при решении ОКЗ целесообразно проводить на базе градиентного метода Флетчера-Ривса с ограниченным числом итераций и локального метода Ньютона для уточнения решения. В результате верификации метода минимизации было установлено, что допустимый порог шумленности в модели наблюдения при решении ОКЗ не должен превышать 10%.

При дискретизации математических моделей процесса фильтрации на разных уровнях иерархии предпочтение следует отдать вычислительным схемам стабилизированного метода конечных элементов и несимметричной постановке разрывного метода Галёркина. Результаты вычислительных экспериментов при верификации вычислительных схем на классах жёстких задач, имеющих аналитическое решение, позволяют сделать вывод, что методы являются абсолютно устойчивыми.

При решении нестационарных жёстких задач Навье-Стокса высокую эффективность показала проекционная процедура физического расщепления Chorin-Teman на базе разрывного метода Галёркина.

При проведении вычислительных экспериментов по моделированию процессов фильтрации в пористых средах со случайным распределением пор по объёму был установлен факт существования порогового значения пористости, при которой возможен переход от анизотропной модели пласта к изотропной. Сравнительный анализ решений в пористой неоднородной и эффективных средах показал расхождение результатов от 2% до 5% при уровне зашумления модели наблюдения от 5% до 10%.

Вычислительные схемы показали высокую эффективность и гибкость при решении широкого класса задач фильтрации на разных уровнях иерархии геологических сред, что позволило создать единый программный комплекс для моделирования процессов фильтрации флюидов в геологических средах.

## ГЛАВА 3 ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС

В главе приводится описание разработанного программного комплекса для многомасштабного моделирования процесса фильтрации в геологических средах и системные требования к компьютерной архитектуре для запуска приложения.

### 3.1 Назначение, системные требования и структура

Программный комплекс FEM\_2.0 предназначен для вычисления эффективного тензора абсолютной проницаемости геологической среды и решения задачи фильтрации флюида в гетерогенных средах при использовании вычислительных схем классического и стабилизированного метода конечных элементов, разрывного метода Галёркина.

Программный комплекс реализован на языке программирования C# 7.0. Объём программного кода составляет 16.8 Мб. Для запуска приложения требуется процессор с многоядерной архитектурой, установленная 64-битная операционная система и платформа .NET 4.6 и выше.

Все результаты, приведённые в тексте диссертации, были получены на 4-ядерной компьютерной архитектуре с установленной 64-разрядной операционной системой Windows 10, процессор Intel® Core(TM) i7-4790 3.60 Ghz.

Программный комплекс FEM\_2.0 предоставляет пользователю для реализации два открытых интерфейса: прямая задача `Direct_Problem` и обратная задача `Inverse_Problem`.

Реализованный интерфейс `Inverse_Problem` предоставляет методы для решения обратных коэффициентных задач при определении эффективного тензора абсолютной проницаемости. Методы интерфейса `Inverse_Problem` принимают в качестве параметра реализованный интерфейс `Direct_Problem`.

Реализованный интерфейс `Direct_Problem` предоставляет методы для решения следующих задач:

- моделирование процесса течения однофазного флюида в канале/трещине;

- моделирование процесса фильтрации однофазного флюида в пористой или трещиновато-пористой среде;
- моделирование процесса просачивания однофазного флюида из канала в окружающую пористую или трещиновато-пористую среду.

Диаграмма интерфейса прямой задачи `Direct_Problem` показана на рисунке 55.

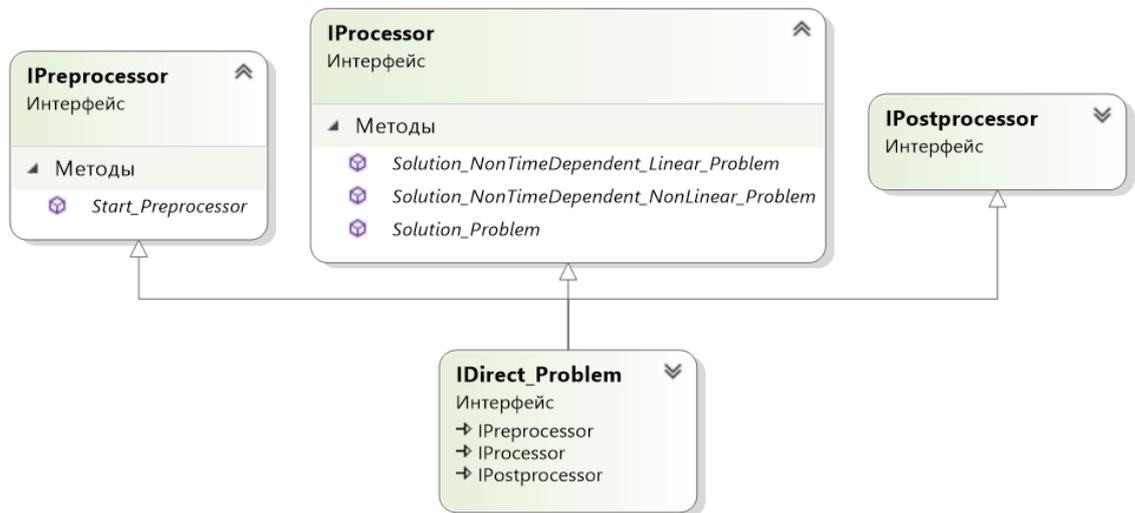


Рисунок 55 – Диаграмма интерфейса прямой задачи

Интерфейс `Direct_Problem` наследует скрытые от пользователя интерфейсы: препроцессор `Preprocessor`, процессор `Processor` и постпроцессор `Postprocessor`.

### 3.2 Препроцессор

Реализованный интерфейс `Preprocessor` предоставляет методы для построения виртуальных моделей случайно заполненных пористых сред, конечноэлементных сеток, формирования списков геометрических объектов, степеней свободы и инициализации портретов дискретных аналогов. Интерфейс `Preprocessor` является закрытым от пользователя и реализуется в момент начала решения прямой задачи.

Кроме встроенных механизмов для построения конечноэлементных сеток, препроцессор предоставляет средства для импорта готовых файлов конечноэлементных сеток из открытых мешеров `Netgen` (<https://ngsolve.org>), `FreeFEM++` (<http://www.freefem.org>), `Gmesh` (<http://gmsh.info>).

При построении виртуальных моделей случайно заполненных пористых сред используются операторы конструктивной блочной геометрии (`Constructive Solid`

Geometry, CSG), которые обеспечивают совместимость препроцессора с открытым генератором сеток Netgen. Сгенерированная геометрия может быть экспортирована в Netgen и вновь импортирована в препроцессор в виде конечноэлементной тетраэдральной сетки.

Входным параметром для процедуры инициализации Препроцессора является текстовый файл, который имеет следующую структуру:

1. N – число подобластей в расчётной области;
2. M – номер подобласти;
3. тип конечного элемента в формате: < метод >\_< элемент >\_< dof >, где метод принимает значение CG (классический и стабилизированный МКЭ) или DG (разрывный метод Галёркина), элемент – Rect (прямоугольник), Triangle (треугольник), Brick (шестигранник) и Tetr (тетраэдр), dof – число степеней свободы.

Ниже приведена текстовая информация в файле для импорта готовой конечноэлементной тетраэдральной сетки из мешера Netgen в формате Elmer:

1	число подобластей
1	номер подобласти
DG_Tetr_4	тип конечного элемента: DG – используется разрывный метод Галёркина, Tetr – тетраэдры, 4 – число степеней свободы
Grid\\Pressure\\	путь к файлам формата Elmer

В зависимости от типа решаемой прямой задачи, от типа используемых конечных элементов и базисных функций реализуется интерфейс Preprocessor, который инициализирует и наполняет структуру данных расчётной области Grid. Реализованный интерфейс расчётной области Grid используется в качестве параметра для реализации интерфейса Processor.

### 3.3 Процессор

Реализация интерфейса Processor предоставляет методы для решения задач фильтрации. При реализации интерфейса Processor по данным, которые ввёл пользователь, инициализируются такие структурные элементы, как локальные матрицы, базисные функции, схема интегрирования и решатель.

Интерфейс Processor является закрытым от пользователя и реализуется в момент начала решения прямой задачи. В зависимости от типа задачи, процессор может быть реализован для решения линейных/нелинейных, стационарных/нестационарных задач.

Программная реализация процессора основана на многопоточной технологии. Главный поток в реальном времени предоставляет пользователю информацию о текущем состоянии процесса решения задачи, а также запускает дочерние потоки, которые выполняют ассемблирование локальных матриц и учёт краевых условий. Сгенерированная в результате конечноэлементной дискретизации СЛАУ передаётся для решения в структурный блок Решатель, который включает в себя преобусловливатель. Метод решения СЛАУ и тип предобусловливателя выбирается опционально пользователем.

Фрагменты листинга выполнения программы при решении нестационарной нелинейной задачи однофазной фильтрации показан ниже

Filtration_1_parabolic_nonlinear	сообщается, что решается нелинейная нестационарная задача фильтрации под номером 1
Parabolic problem -> solving...	инициализация решателя
Time layer: 0.1 -> solving...	итерационный процесс по всем временным слоям
Time layer: 0.2 -> solving...	

Опционально пользователь может указать путь к файлу для вывода текущей информации о ходе решения СЛАУ

Solver: BiCG with ILU(0)		метод решения и предобусловливатель
ITERATION	RESIDUAL	
1	1.551909E+004	итерационный процесс решения СЛАУ
2	3.462115U+003	

Интерфейс Processor имеет три реализации: решатель системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости, решатель задачи однофазной фильтрации и решатель сопряжённой задачи Стокса-Дарси.

Полученное решение задачи передаётся для обработки в реализуемый интерфейс Postprocessor.

### 3.4 Постпроцессор

Реализация интерфейса Postprocessor предоставляет методы для вывода текстовой и графической информации о расчётной области и визуализации решения задачи. Интерфейс Postprocessor является закрытым от пользователя и реализуется в момент завершения решения прямой задачи

Графическая информация экспортируется в файл с расширением .plt для визуализации численного решения в программном продукте TecPlot (домашняя страница <https://www.tecplot.com>).

Опционально пользователю доступны средства встроенного визуализатора, который реализован на языке C++ при использовании открытой графической библиотеки Glut.

Кроме описанных средств визуализации решения задачи, реализованы алгоритмы для анализа матрицы СЛАУ и решения задачи:

- SVD-разложение матрицы СЛАУ;
- визуализация портрета матрицы СЛАУ;
- вычисление относительной невязки решений, полученных различными методами или на вложенных сетках;
- трёхмерная интерполяция решения по дискретному набору измерений.

### 3.5 Масштабируемость программного комплекса

На рисунке 56 представлены структуры конечноэлементных матриц СЛАУ, полученные при использовании вычислительных схем классического МКЭ, стабилизированного МКЭ и разрывного метода Галёркина для аппроксимации системы уравнений Навье-Стокса. Применение иерархических базисов пространств  $H^1$  и  $\mathbf{H}(\text{div})$  позволяет получить блочную структуру конечноэлементных матриц СЛАУ.

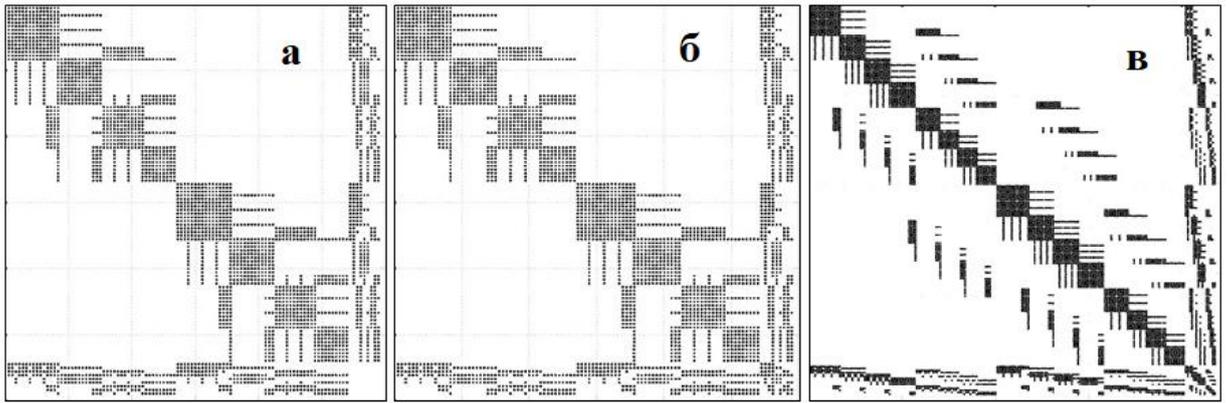


Рисунок 56 – Структура конечноэлементных матриц СЛАУ: классический МКЭ (а), стабилизированный МКЭ (б), разрывный метод Галёркина (в)

Естественная параллельность разрывного метода Галёркина даёт возможность параллельного ассемблирования матрицы СЛАУ для любых типов базисных функций. Применение параллельного ассемблирования глобальной матрицы СЛАУ в классическом МКЭ и стабилизированном МКЭ возможно только при независимом переборе множеств базисных функций: в пространстве  $H^1$  – отдельная сборка для edge-, face- и bubble-функций, в пространстве  $\mathbf{H}(\text{div})$  – отдельная сборка для face- и bubble-функций на каждом конечном элементе.

Результаты замера времени ассемблирования матрицы СЛАУ на процессоре Intel® Core(TM) i7-4790 3.60 Ghz для сетки, которая содержит 839185 тетраэдров и 3356740 степеней свободы, представлены на рисунках 57 и 58.

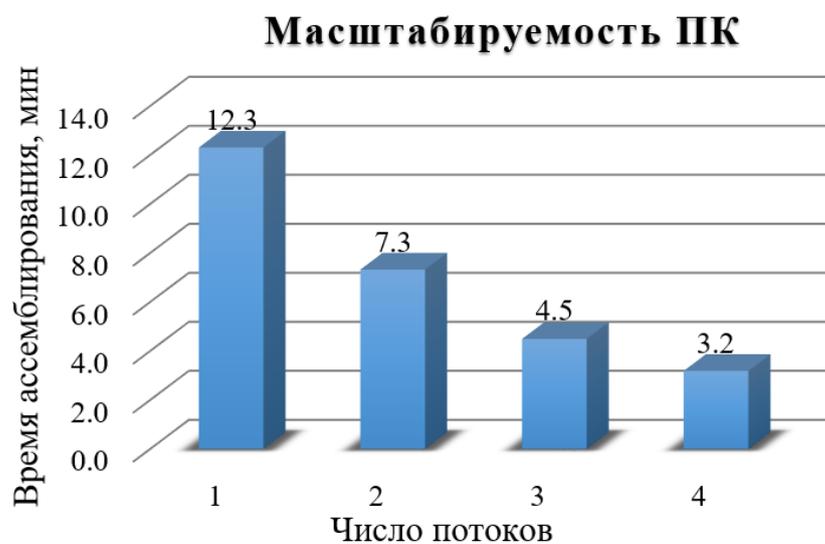


Рисунок 57 – Замер времени ассемблирования (C#: System.Threading)



Рисунок 58 – Замер времени ассемблирования (C++: библиотека OpenMP)

На рисунке 57 показаны диаграммы замера времени ассемблирования глобальной матрицы СЛАУ при использовании средств языка C# и System.Threading. На рисунке 58 показаны диаграммы замера времени ассемблирования глобальной матрицы СЛАУ при использовании средств языка C++ и библиотеки OpenMP. Линейный закон уменьшения времени ассемблирования указывает на естественную параллельность реализованных вычислительных схем при ассемблировании глобальной матрицы СЛАУ с учётом их блочной структуры.

### Вывод по главе

Программный комплекс FEM\_2.0 для решения задачи фильтрации флюида в геологической среде состоит из трёх структурных блоков: препроцессор, процессор и постпроцессор. Абстрактная реализация на языке C# позволяет расширить возможности комплекса FEM\_2.0 для решения широкого класса прикладных задач без существенных структурных изменений программного кода. Естественная параллельность реализованных вычислительных схем при ассемблировании глобальной матрицы СЛАУ с учётом их блочной структуры позволяет получить линейное уменьшение времени решения прямой задачи.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена математическому моделированию процесса фильтрации несжимаемой жидкости в трёхмерных многомасштабных гетерогенных средах на базе разработанных и реализованных в виде программного комплекса вычислительных схем конформных и неконформных конечноэлементных методов.

Решена задача о моделировании процесса течения однофазной несжимаемой жидкости в каверне (канале) с последующим просачиванием в пористую среду:

- разработаны и реализованы в виде программного комплекса вычислительные схемы для моделирования процесса течения однофазной несжимаемой жидкости в каверне с учётом сложной геометрии пространства на базе стабилизированного векторного конформного метода конечных элементов и разрывного метода Галёркина;
- разработаны и реализованы в виде программного комплекса вычислительные схемы для моделирования процесса упругой однофазной фильтрации жидкости в геологической среде с учётом анизотропной природы проницаемости на базе разрывного метода Галёркина;
- разработаны и реализованы в виде программного комплекса вычислительные схемы для моделирования процесса просачивания однофазной несжимаемой жидкости в пористую среду на базе разрывного метода Галёркина.

Решена задача о вычислении абсолютной проницаемости геологической среды с фиксированной структурой:

- разработан и реализован в виде программного комплекса алгоритм вычисления тензора абсолютной проницаемости трёхмерной гетерогенной среды на базе решения обратной коэффициентной задачи и метода давления;
- установлено влияние геометрической структуры гетерогенной среды на оценку тензора абсолютной проницаемости для слоистых сред и случайно заполненных пористых сред;
- определены границы применимости анизотропной и изотропной моделей проницаемости пласта с равномерно пористой структурой.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. Формулы теории возмущений нелинейной спектральной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т.58, №6. – 2018. – с. 890–894.
2. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Рост почти заполненной осесимметричной трещины гидроразрыва при малых и больших утечках // ФТПРПИ №3. – 2004. – С. 1–11.
3. Алиев З.С., Бондаренко В.В. Исследование горизонтальных скважин. М.: Нефть и газ; РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2004. – 300 с.
4. Андреев В.Б. О равномерной сходимости на неравномерной сетке классической разностной схемы для одномерного сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т.44, №3. – 2004. – с. 476–492.
5. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с. – ISBN 978-5-9221-0905-5.
6. Арсеньев-Образцов С.С. Определение тензора коэффициентов проницаемости численным моделированием течения флюида на цифровой модели пористой среды / С.С. Арсеньев-Образцов // Труды РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина. – 2015. - №4/281. – С.64-77.
7. Афанасьев К. Е. Алгоритм поиска ближайших соседей в методе сглаженных частиц и его параллельная реализация / К. Е. Афанасьев, Р. С. Макаручук, А. Ю. Попов // Вычислительные технологии, в. 5. – 2008. – Т. 13. – С.9 – 14.
8. Афанасьев К. Е. Моделирование задач методом граничных элементов / К. Е. Афанасьев, Е. Н. Березин // LAPLAMBERT Academic Publishing GmbH & Co.KG. – 2012. – 98 с.
9. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. – 288 с.

10. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1993. – 416 с. – ISBN 5-247-02323-4.
11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 6-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
12. Баюк И.О. Основные принципы математического моделирования макроскопических физических свойств коллекторов углеводородов // Технологии сейсморазведки, № 4. – 2013. – с. 5–18.
13. Беляев А. Ю. Усреднение в задачах теории фильтрации / А. Ю. Беляев; Рос. акад. наук, Ин-т вод. проблем. – М.: Наука, 2004 (СПб.: ГУП Тип. Наука). – 198 с. ISBN 5-02-032909-6.
14. Бойко О. А. Применение методов планирования эксперимента при решении обратных коэффициентных задач теплопереноса / О. А. Бойко, С. М. Зеркаль, Н. Б. Иткина. – Новосибирск : Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2004 (ПУ ИМ СО РАН). – 20 с.
15. Борисов В.Е., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Явные схемы для задач фильтрации многофазного многокомпонентного флюида в пористой среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2013. – № 92. – 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-92>.
16. Василевский Ю.В., Данилов А.А., Николаев Д.В., Руднев С.Г., Саламатова В.Ю., Смирнов А.В. Конечно-элементный анализ задач биоимпедансной диагностики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т.52, №4. – 2012. – с. 733–745.
17. Васильев В.И., Васильева М.В., Григорьев А.В., Прокопьев Г.А. Математическое моделирование задачи двухфазной фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах с использованием модели двойной пористости и метода конечных элементов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – №160 (1). – 2018. – с.165 – 182.

18. Васильев В.И., Васильева М.В., Лаевский Ю.М., Тимофеева Т.С. Численное моделирование фильтрации двухфазной жидкости в гетерогенных средах // Сиб. журн. индустр. матем. – № 20 (2). – 2017. – с. 33–40.
19. Воронин К.В., Лаевский Ю.М. Об одном подходе к построению потоковых схем расщепления в смешанном методе конечных элементов // Матем. моделирование. – т. 26(12). – 2014. – с. 33–47.
20. Воскобойников Ю.Е. Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации : монография / Ю. Е. Воскобойников; Федеральное агентство по образованию Российской Федерации, Новосибирский гос. архитектурно-строительный ун-т (Сибстрин). - Новосибирск : НГАСУ, 2006. - 180 с. ISBN 5-7795-0322-2.
21. Галанин М. П., Прошунин Н. Н., Родин А. С., Сорокин Д. Л. Решение трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов с учетом фазовых переходов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2016. – 29 с.
22. Галанин М. П., Ходжаева С. Р. Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов. – Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2013. – 29 с.
23. Головизнин В.М., Горбачев Д.Ю., Колокольников А.М., Майоров П.А., Тлепсук Б.А. Неявные обратимые по времени схемы “кабаре” для квазилинейных уравнений мелкой воды // Выч. мет. программирование, т.17, №4. – 2016. – с. 402–414.
24. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). Учебное пособие. М.: Наука, 1977. – 440 с.
25. Григорьев А.В., Лаевский Ю.М., Яковлев П.Г. О модели двойной пористости трещиновато-пористых коллекторов на основе гибридной функции перетока // Сиб. журн. вычисл. матем., в.21, №2. – 2018. – с. 155 – 169.

26. Григорьева И. В. Несогласованная линейная аппроксимация в методе граничных элементов для решения пространственных задач / И. В. Григорьева, С. А. Томилов // Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование. – Кемерово: ИНТ, 2006. – С. 351 – 357.
27. Димитриенко Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды. – М.: Физматлит, 2009. – 624 с. – ISBN 978-5-9221-1110-2.
28. Добрынин В.М. Геофизические исследования скважин. – М.: Изд. «Нефть и газ», 2004. – 397 с.
29. Дугаров Г.А., Дучков А.А., Дучков А.Д., Дробчик А.Н. Лабораторное изучение акустических свойств гидратосодержащих осадков [Электронный ресурс] // Ученые записки физического факультета Московского университета: Электронный журнал. – 2017. – № 5. – С. 1750812-1 – 1750812-4.
30. Ентов В.М., Зазовский А.Ф., Стелин И.Б., Хараидзе Д.М. Одномерная модель распространения трещины гидроразрыва // Материалы IX Всесоюз. семинара «Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред». – Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР. – 1989. – С. 91-95.
31. Жалнин Р.В., Ладонкина М.Е., Масыгин В.Ф., Тишкин В.Ф. Применение разрывного метода Галеркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках. – Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование, т.9, №3. –2016. – с. 144–151.
32. Жалнин Р.В., Ладонкина М.Е., Масыгин В.Ф., Тишкин В.Ф. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 56, №6. – 2016. – с. 989–998.
33. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Издательская фирма "Физико-математическая литература", 1993, – 464 с.

34. Жуков В. Т., Новикова Н. Д., Феодоритова О. Б. Итерационный метод для конечно-элементных схем высокого порядка. Часть II // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2003. – 12 с.
35. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. – 2000. – 345 с.
36. Иткина Н.Б., Марков С.И. Определение эффективного тензора проницаемости в анизотропных средах / Н.Б. Иткина, С.И. Марков // Труды XIII международной научно-технической конференции Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2016: сб. тр. науч.-техн. конф. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 3-6 октября, 2016. – т.8. – с.76-82. – ISBN 978-1-5090-4068-1.
37. Иткина Н.Б., Марков С.И. Определение эффективного тензора проницаемости пористых сред / Н.Б. Иткина, С.И. Марков // Материалы X Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 23-27 мая 2016 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И.В.Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – с.175-181. – ISBN 978-5-906855-33-6. – Работа выполнена: при финансовой поддержке стипендии Президента РФ СП-3627.2016.5.
38. Иткина Н.Б., Марков С.И. Определение эффективного тензора фильтрации в пористых средах / Н.Б. Иткина, С.И. Марков // Многоядерные процессоры, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сигналов [Текст]: сборник научных статей VI Международной научно-практической конференции / отв. ред. В.И. Иордан (Барнаул, 11–12 марта 2016 г.). – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2016. – с.131-138. – ISSN 2313-6111.
39. Иткина Н.Б., Марков С.И. Применение разрывного метода Галёркина для решения сингулярно-возмущённых задач / Н.Б. Иткина, С.И. Марков // Вычислительные технологии. – 2016. – Т. 21. – Ч. 4. – с. 49-63.

40. Иткина Н.Б., Марков С.И. Применение стабилизированного векторного метода конечных элементов для моделирования течений газов / Н.Б. Иткина, С.И. Марков // Доклады Академии наук высшей школы. – Изд-во: НГТУ, 2016. – вып.2(31). – с.57-67. – DOI: 10.17212/1727-2769-2016-2-57-67. – Работа выполнена: при финансовой поддержке стипендии Президента РФ СП-3627.2016.5.
41. Иткина Н.Б., Марков С.И. Применение разрывного метода Галёркина для решения задачи Навье-Стокса // Многоядерные процессы, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сигналов. 2017. Ч.7. С. 73-79.
42. Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Улучшенная форма метода сопряженных градиентов. – Матем. моделирование, т.23, №7. – 2011. – с. 33–51.
43. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 128 с.
44. Карнаков П.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г., Есипов Д.В. Особенности распространения трещины гидроразрыва породы при закачке в нее смеси пропанта и жидкости // Теплофизика и аэромеханика. – 2018. – Т.25. – № 4. – С.611-628. – ISSN 0869-8635.
45. Келдыш М. В. О методе В. Г. Галеркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР. Сер. матем. – т.6 (6). – 1942. – с. 309–330.
46. Ковеня В.М., Чирков Д.В. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики / Электронное учебное пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013. – 87 с.
47. Ковеня В. М., Кудряшов А. С. Метод факторизации для численного решения уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем., в.19, №2. – 2016. – С. 61-73.
48. Козлов С.М. Метод усреднения и блуждания в неоднородных средах // УМН, 40:2(242). –1985. – р. 61-120.

49. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учётом капиллярных сил // Численные методы механики сплошной среды, Т.3, №5. – 1972. – с. 52-68.
50. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970 (2-е изд.). – 288 с.
51. Лаевский Ю.М., Литвиненко С.А. Об одном вычислительном алгоритме решения уравнений Баклея–Левретта // Сиб. журн. индустр. матем. – т.16 (3). – 2013. – с. 106–115.
52. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 244 с.
53. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации. Учебное пособие. – М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 88 с.
54. Лисейкин В.Д., Шокин Ю.И., Васева И.А., Лиханова Ю.В. Технология построения разностных сеток / Новосибирск: Наука, 2009. – 414 с. – ISBN 978-5-02-023308-9.
55. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 6-е. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 824 с.
56. Марков С.И., Иткина Н.Б. Восстановление эффективного тензора проницаемости в пористых средах / С.И. Марков, Н.Б. Иткина // тезисы 8-ой международной молодежной научной школы-конференции Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. – Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск 1–7 сентября 2016 г. – с. 90.
57. Марков С. И. Математическое моделирование процессов фильтрации в анизотропных средах / С. И. Марков // Материалы 54-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2016: Математика / Ново-

- сиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2016, 16-20 апреля, 2016 г. : тез. докл. – Новосибирск, 2016. – С. 124. – ISBN 978-5-4437-0487-6. – Работа выполнена: при финансовой поддержке стипендии Президента РФ СП-3627.2016.5
58. Марков С.И. Иткина Н.Б. Моделирование процесса фильтрации в пористых средах / С.И. Марков, Н.Б. Иткина // стендовый доклад на XXI Всероссийской конференции Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики, посвященной памяти К. И. Бабенко. – Абрау-Дюрсо, 5–10 сентября 2016 г.
59. Марков С. И. Многоуровневые алгебраические методы решения системы уравнений Навье – Стокса // Материалы 55-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2017: Математика / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. – 119 с.
60. Марков С.И., Иткина Н.Б. Многомасштабное моделирование процесса просачивания однофазного флюида в пористых средах / С.И. Марков, Н.Б. Иткина // Сибирские электронные математические известия (Siberian Electronic Mathematical Reports), т.15. – 2018. – с. 115–134. DOI 10.17377/semi.2018.15.013.
61. Марков С.И. Определение эффективного тензора проницаемости нефтеносного пласта / С.И. Марков // стендовый доклад на VIII Всероссийской конференции Актуальные проблемы прикладной математики и механики, посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова. – Абрау-Дюрсо, 6 сентября 2016 г.
62. Марков С. И. Применение стабилизированного векторного метода конечных элементов для моделирования течений газов / С. И. Марков // Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 30 октября – 3 ноября, 2016 г.: программа конф. : тез. докл. – Новосибирск, 2016. – С. 13,53. – Работа выполнена: при финансовой поддержке стипендии Президента РФ СП-3627.2016.5.

63. Марков С. И., Иткина Н. Б. Решение задачи идентификации объёмного теплового источника при капиллярной пропитке пористых сред // Сборник тезисов IX Международной молодёжной школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Новосибирск, Академгородок, 26 июня – 2 июля 2017 г. – С.43.
64. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем / М.: Наука, 1979 г. – 319 с.
65. Меркулов В.П. Геофизические исследования скважин. Томск: ТПУ, 2004. – 83 с.
66. Москалев П.В., Шитов В.В. Математическое моделирование пористых структур. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 120 с. – ISBN 978-5-9221-0818-8
67. Орлов И.Р. Повышение эффективности управления разработкой анизотропных пластов с учётом тензорной природы проницаемости: Дис. на соис. уч. ст. к.т.н.: 25.00.17. – М., 2009. – 153 с.
68. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. 2-е изд., М.: Наука, 1977. – 664 с.
69. Роменский Е.И., Лысь Е.В., Чеверда В.А., Эпов М.И. Распространение упругих волн в среде с предварительными напряжениями // Технологии сейсморазведки. – 2014. – № 4. – С. 5 – 12.
70. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985. – 240 с.
71. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М: ЛКИ, 2009. – 480 с.
72. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.
73. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. Перевод с англ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
74. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. – 512 с.

75. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. – М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 285 с.
76. Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // ДАН СССР, т. 163, № 3. – 1965. – с. 591-594.
77. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. – 232 с.
78. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. Издательство: МГУ 1986. – 282 с.
79. Тишкин В. Ф., Жуков В. Т., Мышецкая Е. Е. К обоснованию схемы Годунова в многомерном случае. – Матем. моделирование, т. 28, №2. – 2016. – с. 86–96.
80. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: МФТИ, 1994. – 528 с.
81. Хавкин А.Я. Основы нефтегазодобычи. Учебное пособие. — Москва, 2012. – 399 с. – ISBN 978-5-4344-0054-1.
82. Хаматдинов Р.Т., Митюшин Е.М. Ядерно-магнитный томографический каротаж // Каротажник. – 2002. – №100. – С.138-170.
83. Четверушкин Б.Н., Люпа А.А., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Лемешевский С.В. Моделирование процессов нефтедобычи с применением высокопроизводительных вычислительных систем // Матем. Моделирование. – т. 27, в. 9. – 2015. – С. 73–80; Math. Models Comput. Simul. – v.8(2). – 2016. – P. 129–134.
84. Шишкин Г.И. Компьютерная разностная схема для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции–диффузии при наличии возмущений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., в. 57, №5. – 2017. – С. 814-831.

85. Шишкин Г.И. Обусловленность и устойчивость разностных схем на равномерных сетках для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции–диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., в. 53, №4. – 2013. – С. 575-599.
86. Шокин Ю.И., Шурина Э.П., Иткина Н.Б. Современные многосеточные методы. Часть 1. Многомасштабные методы. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 68 с.
87. Шокин Ю.И., Шурина Э.П., Иткина Н.Б. Современные многосеточные методы. Часть 2. Многоуровневые методы. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. – 98 с.
88. Шурина Э. П., Иткина Н. Б., Кутищева А. Ю., Марков С. И. Математическое моделирование процесса упругой деформации пористой флюидонасыщенной среды / Э. П. Шурина, Н. Б. Иткина, А. Ю. Кутищева, С. И. Марков // Краевые задачи и математическое моделирование : тем. сб. науч. ст. – Новокузнецк, 2017. – С. 225–232. - 500 экз. - ISBN 978-5- 8353-1965-7. – Работа выполнена: при финансовой поддержке РФФИ офи-м (заявка № 16-29-15094).
89. Эдер Л.В., Филимонова И.В., Немов В.Ю., Проворная И.В., Мишенин М.В., Комарова А.В., Ельцов И.Н., Эпов М.И., Бурштейн Л.М., Сенников Н.В., Ершов С.В., Моисеев С.А., Казаненков В.А., Малев-Ланецкий Д.В., Юркевич Н.В. Нефтегазовый комплекс России. Часть 1. Нефтяная промышленность: долгосрочные тенденции и современное состояние: Научно-аналитическое издание // ИНГГ СО РАН – Новосибирск – 2017. – 72 с.
90. Эпов М.И., Никитенко М.Н., Глинских В.Н., Еремин В.Н. Изучение электрической макроанизотропии интервалов наклонно-горизонтальных скважин по данным высокочастотного индукционного каротажа в процессе бурения // Каротажник. – 2016. – № 11 (269). – С. 94 – 109.
91. Эпов М.И., Глинских В.Н., Сухорукова К.В., Никитенко М.Н., Еремин В.Н. Численное моделирование и инверсия данных электромагнитного

- каротажа в процессе бурения и шаблонирования нефтегазовых скважин // Геология и геофизика. – 2015. – Т. 56. – № 8. – С. 1520 – 1529.
92. Эпов М.И., Ельцов И.Н., Назарова Л.А., Назаров Л.А., Нестерова Г.В., Соболев А.Ю. Скважинная геоэлектрика нефтегазовых пластов, разбурывае-  
мых на репрессии давления в неравнокомпонентном поле напряжений // Геология и геофизика. – 2014. – Т. 55. – № 5-6. – С. 978 – 990.
93. Эпов М.И., Антонов Е.Ю., Неведрова Н.Н., Оленченко В.В., Поспеева Е.В., Напреев Д.В., Санчаа А.М., Потапов В.В., Плотников А.Е. Комплекс электромагнитных и геохимических методов для нефтепоисковых исследований в Западной Сибири // Геология и геофизика. – 2014. – Т. 55. – № 5-6. – С. 962 – 977.
94. Эфрос Д.А. Исследование фильтрации неоднородных систем. – М. Гостоптехиздат, 1963. – 351 с.
95. Юдин Е.В. Моделирование фильтрации жидкости в неоднородных средах для анализа и планирования разработки нефтяных месторождений. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Московский Физико-Технический Институт, Москва, 2014. – 173 с.
96. Яненко Н.Н. Численный анализ. Теория приближения функций: Учеб. пособие / Яненко Н. Н., Шокин Ю. И.; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибирск: Б.и., 1980. — 83 с. — Библиогр.: с.81.
97. Abraham F.F., Broughton J.Q., Bernstein N. and Kaxiras E. Concurrent coupling of length scales: methodology and application // Phys. Rev. B, vol. 60, no. 4. – 1999, – P. 2391–2402.
98. Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J. Computer simulation of hydraulic fracturesInternational // Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, v. 44–2007. – P. 739 – 757.
99. Allaire G., Braides A., Buttazzo G. School on Homogenization. Lecture notes of the courses held at ICTP, Trieste, September 6 – 17, 1993. – 191 p.

100. Allaire G., Craig A. Numerical analysis and optimization: An introduction to mathematical modelling and numerical simulation. Oxford University Press, 2007. – 472 p.
101. Allaire G. Quantum transport: modelling analysis and asymptotics : lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, Italy, September 11-16, 2006.
102. Andersen M.A., Duncan B., McLin R. Core Truth in Formation Evaluation / M.A. Andersen, B. Duncan, R. McLin // Houston, Texas, USA, Overfield Review Vol. 25. – No. 2. – 2013. – 10 p.
103. Arbogast T., Pencheva G., Wheeler M.F., Yotov I. A multiscale mortar mixed finite element method // Multiscale Model. Simul., V.6 (1). – 2007. – P. 319–346.
104. Armaly B.F, Li A., Nie J.H. Measurements in three-dimensional laminar separated flow // Int. J. Heat Mass Transfer, v. 46 (19). – 2003. – P. 3573-3582
105. Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Marini D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal., V.39, No. 5. – 2002. – P.1749-1779.
106. Arnold D.N., Falk R.S., Winther R. Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications // Acta Num. 15. – 2006. – P. 1-155.
107. Auriault J.-L. On the domain validity of Brinkman's equation // Transport in porous media. – 2009. – vol. 79. – p. 215-223.
108. Ascher U.M. Numerical Methods for Evolutionary Differential Equations. Society for Industrial & Applied, 2008. – 409 p. – ISBN: 0898716527
109. Ascher U. M., Haber E. A multigrid method for distributed parameter estimation problems. // Electron. Trans. Numer. Anal., v.15. – 2003. – p. 1–17.
110. Badea L., Discacciati M., Quarteroni A. Numerical analysis of the Navier–Stokes/Darcy coupling // Numerische Mathematik, V. 115, I. 2. – 2010. – p. 195–227.

111. Bassi F., Rebay S. GMRES for discontinuous Galerkin solution of the compressible Navier-Stokes equations // in *Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computation and Applications*, B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu, eds., *Lecture Notes in Comput. Sci. Engrg.*, v.11, Springer-Verlag, NewYork. – 2000. – P. 197-208.
112. Bassi F., Rebay S., Mariotti G., Pedinotti S., and Savini M. A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows // in *Proceedings of 2nd European Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*, R. Decuypere and G. Dibelius, eds., Technologisch Instituut, Antwerpen, Belgium. – 1997. – P. 99–108.
113. Baumann C.E., Oden J.T. A discontinuous hp-finite element method for convection-diffusion problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v.175. – 2000. – P. 311-341.
114. Beirao da Veiga L., Lovadina C., Vacca G. Divergence free virtual elements for the Stokes problem on polygonal meshes, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, v. 51 (2). – 2017. – P. 509–535.
115. Bensoussan A., Lion J. L., Papanicolaou G. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam Holland, 1978.
116. Boschan A., Noetinger B. Scale Dependence of Effective Hydraulic Conductivity Distributions in 3D Heterogeneous Media: A Numerical Study // *Transport in Porous Media*, v.94, Issue 1. – 2012. – p. 101–121.
117. Brenner S.C., Scott L.R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Texts in Applied Mathematics*, v.15 : 3rd ed. Springer. – 2007. – 420 p.
118. Brezzi F., Cockburn B., Marini L.D., Suli E. Stabilization mechanisms in Discontinuous Galerkin finite element methods // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 195, Issues 25–28. – 2006. – P. 3293-3310.
119. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods* // New York: Springer-Verlag, 1991. – 362 p. – ISBN 0-387-97582-9
120. Brezzi F., Marini L. Virtual element method for plate bending problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 253. – 2012. – P. 455–462.

121. Brooks A., Hughes T.J.R. Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations // *Comput. Meths.Appl. Mech. Engrg.*, v. 32. – 1982. – P. 199-259.
122. Brown D., Peterseim D. A multiscale method for porous microstructures // *SIAM MMS*, v. 14. – 2016. – P.1123–1152.
123. Buffa A. and Ciarlet P. On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part I: An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra. *Mathematical Methods // Applied Sciences*. – v. 24. – 2001. – P. 9 –30.
124. Cangiani A., Manzini G., Russo A., Sukumar N. Hourglass stabilization and the virtual element method // *Int. J. Numer. Meth. Engng*, v.1. – 2014. – P. 1–33.
125. Chavent G., Roberts J.-E. A unified physical presentation of mixed, mixed-hybrid finite element method and standard finite difference approximations for the determination of velocities in water flow problems // *Adv. Water Resour.*, V. 14, I. 6. – 1991. – P. 329-348.
126. Chen Z. On the heterogeneous multiscale method with various macroscopic solvers [Journal] / Z. Chen // *Nonlinear Analysis*, v.71. – 2009. – p. 3267-3282.
127. Cherny S.G., Lapin V.N., Kuranakov D.S., Alekseenko O.P. 3D model of transversal fracture propagation from a cavity caused by Herschel–Bulkley fluid injection // *International Journal of Fracture*. – 2018. – Vol.212. – Iss. 1. – P.15-40. – ISSN 0376-9429. – EISSN 1573-2673.
128. Choy Tuck C. *Effective Medium Theory: Principles and Applications*. Oxford, 1999. – 240 p.
129. Chung E., Efendiev Y., Hou T.Y. Adaptive multiscale model reduction with Generalized Multiscale Finite Element Methods // *Journal of Computational Physics* v.320. – 2016. – P. 69–95.
130. Cohen G., Pernet S. *Finite Element and Discontinuous Galerkin Methods for Transient Wave Equations* // Springer Science+Business Media, Dordrecht, 2017. – 393 p. – ISBN-10: 9401777594

131. Cockburn B. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // In High-Order Methods for Computational Physics, Springer, v. 5. – 2005. – P.69-224.
132. Cockburn B., Karniadakis G.E., Shu C.-W. Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications. Springer, 2000. – 470 p.
133. Cockburn B., Gopalakrishnan J., Wang H. Locally conservative fluxes for the continuous Galerkin method // SIAM J. Numer. Anal., v. 45. – 2007. – P. 1742-1776.
134. Cockburn B., Shu C. -W. The local discontinuous Galerkin time-dependent method for convection-diffusion systems // SIAM J. Numer. Anal. V.35. – 1998. – P.2440-2463.
135. Costabel M., Dauge M., Demkowicz L. Polynomial extension operators for  $H^1$ ,  $H_{\text{curl}}$  and  $H_{\text{div}}$ -spaces on a cube // Mathematics of Computation / Mathematics of Computation, American Mathematical Society. – 2008. – v. 77 (264). – P.1967 – 1999.
136. Dal Maso G. An Introduction to  $\Gamma$ -Convergence. Birkhauser Boston, 1993, 352 p.
137. Demkowicz L., Babuska I.  $p$ -interpolation error estimates for edge finite elements of variable order in two dimensions // SIAM J. Numer. Anal. – v.41 (4). – 2003. – P.1195 – 1208.
138. Demkowicz L., Buffa A.  $H^1$ ,  $\mathbf{H}(\text{curl})$  and  $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming projection-based interpolation in three dimensions. Quasi-optimal  $p$ -interpolation estimates // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – v.194. – 2005. – P. 267 – 296.
139. Dolean V., Jolivet P., Nataf F. An introduction to domain decomposition methods: algorithms, theory, and parallel implementation // Master. France, 2015. – 296 p.
140. Donea J., Huerta A. Finite Element Methods for Flow Problems. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003. – 358 p. – ISBN 0471496669.

141. Dong C. Numerical Modeling of Contaminant Transport in Fractured Porous Media using Mixed Finite Element and Finite Volume Methods: dissertation presented to the Graduate School of Clemson University. – 2010. – 56 p.
142. Douanla H. Homogenization of Steklov Spectral Problems with Indefinite Density Function in Perforated Domains // *Acta Applicandae Mathematicae*, v. 123, i. 1. – 2013. – P. 261–284.
143. Durlofsky L.J. Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media // *Water Res. Res.*, v. 27. – 1991. – p. 699–708.
144. E W. Principles of Multiscale Modeling. Cambridge University Press, 2011. – 496 p. ISBN 10: 1107096545.
145. Edwards M.G., Zheng H. Double-families of quasi-positive Darcy-flux approximations with highly anisotropic tensors on structured and unstructured grids // *J. Comput. Phys.*, v. 229. – 2010. – P. 594–625.
146. Efendiev Y., Galvis J. A domain decomposition preconditioner for multiscale high-contrast problems // in: Y. Huang, R. Kornhuber, O. Widlund, J. Xu (Eds.), *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XIX*, in: *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, vol. 78, Springer-Verlag. – 2011. – P. 189–196.
147. Efendiev Y., Galvis J., Hou T. Generalized multiscale finite element methods // *J. Comput. Phys.*, V. 251. – 2013. – P. 116–135.
148. Efendiev Y., Galvis J., Lazarov R., Moon M., Sarkis M. Generalized multiscale finite element method. Symmetric interior penalty coupling // *J. Comput. Phys.* V. 255. – 2013. – P. 1–15.
149. Efendiev Y., Galvis J., Lazarov R., Willems J. Robust domain decomposition preconditioners for abstract symmetric positive definite bilinear forms // *ESAIM: Math. Model. Numer. Anal.*, v. 46. – 2012. – P. 1175–1199.
150. Efendiev Y., Galvis J., Li G., Presho M. Generalized multiscale finite element methods. Oversampling strategies // *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, v. 12 (6). – 2014. – P. 225–254.

151. Efendiev Y., Ginting V., Hou T., Ewing R. Accurate multiscale finite element methods for two-phase flow simulations // *J. Comput. Phys.*, v. 220. – 2006. – P. 155–174.
152. Efendiev Y., Hou T. *Multiscale Finite Element Methods: Theory and Applications* // Springer, 2009. – 246 p.
153. Efendiev Y., Jin B., Presho M., Tan X. Multilevel Markov chain Monte Carlo method for high-contrast single-phase flow problems // *Commun. Comput. Phys.*, v. 17 (1). – 2015. – P. 259-286.
154. Efendiev Y., Lazarov R., Moon M., Shi K. A spectral multiscale hybridizable discontinuous Galerkin method for second order elliptic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 292. – 2015. – P. 243-256.
155. Egger H., Schoberl J. A Mixed-Hybrid-Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Convection-Diffusion Problems // *J. Numer. Anal.* – 2009. – P.1-24.
156. Elfverson D., Georgoulis G.H., Malqvist A. An adaptive discontinuous Galerkin multiscale method for elliptic problems // *Multiscale Modeling & Simulation*, v. 11, No. 3. – 2013. – P. 747-765.
157. Epov M.I., Shurina E.P., Itkina N.B., Kutischeva A.U., Markov S.I. Finite element modeling of a multi-physics poro-elastic problem in multiscale media // *Journal of Computational and Applied Mathematics* • September 2018. DOI: 10.1016/j.cam.2018.08.039.
158. Ern A., Guermond J. L. *Theory and Practice of Finite Elements* // Springer Series in Computational Mathematics, No. 159, Springer-Verlag, Berlin. – 2004.
159. Ferziger J.H., Perit M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd edition. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Germany, 2002. – 423 p.
160. Freed D. Exa digitalrock technology – Electron presentation, August 9, 2017, 57 p.

161. Ghazanfari E. Development of a mathematical model for electrically assisted oil transport in porous media: PhD dissertation, Lehigh University, Bethlehem, 2013. – 158 p.
162. Girault V., Vassilev D. and Yotov I. Mortar multiscale finite element methods for Stokes-Darcy flows // *Numer. Math.*, v. 127. – 2014. – P. 93 – 165.
163. Glotov V.Yu., Goloviznin V.M. Cabaret scheme for the two-dimensional incompressible fluid in terms of «stream function – vorticity» // *Math. Models Comput. Simul.*, v.4(2). – 2012. – P. 144-154.
164. Goloviznin V.M., Isakov V.A. Balance-characteristic scheme as applied to the shallow water equations over a rough bottom // *Comput. Math. Math. Phys.*, v.57(7). – 2017. – P. 1140-1157.
165. Jikov V. V., Kozlov S. M., Oleinik O. A. Homogenization of differential operators and integral functionals. – New York: Springer-Verlag, 1994. – 570 p. – ISBN 978-0387548098.
166. Haber E., Ascher U.M., Oldenburg D. On optimization techniques for solving nonlinear inverse problems // *Inverse Problems*, V.16, № 5. – 2000. – p. 1263-1280.
167. Hossain M.M., Rahman M.K., Rahman S.S. Hydraulic fracture initiation and propagation: roles of wellbore trajectory, perforation and stress regimes // *J. Petrol. Sci. Eng.*, v.27(3-4). – 2000. – P. 129-149.
168. Howell Jason S., Walkington Noel J. Dual-Mixed finite element methods for the Navier-Stokes equations // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 47 (3). – 2013. – P. 789-805.
169. Hou J., Yan W., Chen J. Velocity Projection with Upwind Scheme Based on the Discontinuous Galerkin Methods for the Two Phase Flow Problem // *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, v. 4. – 2015. – P. 127-141. <http://dx.doi.org/10.4236/ijmnta.2015.42009>.

170. Houston P., Schotzau D., Wihler T. *hp*-Adaptive discontinuous Galerkin finite element methods for the Stokes problem // European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2004. – Jyvaskyla, 24-28 July 2004. – 20 p.
171. Hughes T.J.R., Franca L.P., Balestra M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the Babuska-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations // *Comput. Methods Appl. Mech.Engrg*, v.59. – 1986. – P. 85-99.
172. Hughes T.J.R., Scovazzi G., Bochev P.B., Buffa A. A multiscale discontinuous Galerkin method with the computational structure of a continuous Galerkin method // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195 (19-22). – 2006. – P. 2761-2787.
173. Hughes T.J.R., Harari I. Stabilized finite element methods for steady advection-diffusion with production. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 115:165–191, 1994.
174. Itkina N.B., Markov S.I. Determing an effective permeability tensor in anisotropic media / N.B. Itkina, S.I. Markov // 2016 13th International Scientific Techical Confererence on Actual Problems of Eletronic instrument Engineering (APEIE) Proceedings: сб. тр. науч.-техн. конф. – Novosibirsk: NSTU, October 3-6, 2016. – Vol.1(P.2). – P.538-543. – ISBN 978-1-5090-4068-1.
175. Karim M. R., Krabbenhoft K. New Renormalization Schemes for Conductivity Upscaling in Heterogeneous Media // *Transp. Porous Med.*, v. 85. – 2010. – p. 677–690. DOI: 10.1007/s11242-010-9585-9.
176. Khalil K. Abbo, Farah H. Mohammed. Spectral Fletcher-Reeves algorithm for solving nonlinear unconstrained optimization problems // *Iraqi Journal of Statistical Sciences*. – 2011. – P. 21–38.
177. Khan F. A. A Model for Complex Heat and Mass Transport Involving Porous Media with Related Applications. A thesis submitted in partial fulfillment of

- the requirements for the degree in Doctor of Philosophy, Electronic Thesis and Dissertation Repository, paper 3659. – 175 p.
178. Kouznetsova V. G. Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials. – Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2002. – p. 134.
  179. Larson M. G., Bengzon F. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. / Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 402 p. – ISBN: 3642332862.
  180. Layton W.J., Schieweck F., Yotov I. Coupling fluid flow with porous media flow // *SIAM J. Numer. Anal.*, v.40. – 2003. – P. 2195–2218.
  181. Lehrenfeld Chr. Hybrid Discontinuous Galerkin methods for solving incompressible flow problems. Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen. – 2010. – 111 P.
  182. Li S. Meshfree and particle methods and their applications / S. Li, W. K. Liu // *Appl. Mech. Rev.* – 2002. – № 55. – P. 1 – 34.
  183. Lin G., Liu J., Sadre-Marandi F. A comparative study on the weak Galerkin, discontinuous Galerkin, and mixed finite element methods // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 273. – 2015. – P. 346–362.
  184. Liu G. R. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method / G. R. Liu, M. B. Liu // World Scientific Publishing Company. – 2003. – 472 p.
  185. Lo K. H. M. A Space-Time Discontinuous Galerkin Method for Navier-Stokes with Recovery // Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (Aerospace Engineering) in The University of Michigan. – 2011. – 257 p.
  186. Logg A. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book. Springer, 2012. – 726 p. – (Lecture Notes in Computational Science and Engineering). – ISBN 3642230989.
  187. Manzini G., Russo A., Sukumar N. New perspectives on polygonal and polyhedral finite element methods // *Math. Models Methods Appl. Sci.*, v.24 (8). – 2014. – P. 1665-1699.

188. Markov S.I. Stabilized Vector Finite Element Method for Modeling Gas Flows / S.I. Markov // Городская научно-практическая конференция студентов, магистрантов и аспирантов ASPIRE TO SCIENCE: тез. науч.-практ. конф. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 7 апреля, 2016. – С.116-117. – Работа выполнена: при финансовой поддержке стипендии Президента РФ СП-3627.2016.5.
189. Markov S.I. Multiscale Nonconformal Finite Element Methods for Solving Problems with Moving Boundaries / S.I. Markov // 2018 14th International Scientific Technical Conference on Actual Problems of Electronic instrument Engineering (APEIE) Proceedings: сб. тр. науч.-техн. конф. – Novosibirsk: NSTU, October 3-6, 2018. – Vol.1(P.4). – P.174-176. – ISBN 978-1-5386-7053-8.
190. Markov S.I., Itkina N.B. Projection Methods for Mathematical Modeling of Eddy Flows / S.I. Markov, N.B. Itkina // 2018 14th International Scientific Technical Conference on Actual Problems of Electronic instrument Engineering (APEIE) Proceedings: сб. тр. науч.-техн. конф. – Novosibirsk: NSTU, October 3-6, 2018. – Vol.1(P.4). – P.177-180. – ISBN 978-1-5386-7053-8.
191. Meirmanov A. M., Reshetova G.V., Tcheverda V.A. Analysis of models of oil-by-water displacement through the microstructure // Doklady Earth Sciences. – 2016. – Vol. 470. – No. 1. – P. 990 – 993.
192. Nazarov L. A., Nazarova L.A., Romenskii E.I., Tcheverda V.A., Epov M.I. Acoustic method for defining the stress state of a rock massif based on solution of the seismic inverse problem // Doklady Earth Sciences. – 2016. – Vol. 466. – No. 2. – P. 210 – 213.
193. Nazarov S. A. Branching periodicity: Homogenization of the dirichlet problem for an elliptic system // Doklady Mathematics, v. 70, I.1. – 2004. – 628 p.
194. Nedelec J. C. A new family of mixed finite elements in  $R^3$  // Numerische Mathematik, v.50. – 1986. – P. 57 – 81.
195. Nocedal J., Wright S. J. Numerical Optimization. – 2nd edition. – USA: Springer, 2006. – ISBN 978-0-387-30303-1.

196. Oden J.T., Babuska I., Baumann C.E. A discontinuous hp-finite element method for diffusion problems // *Journal of computational physics*, v.146. – 1998. – P. 103-122.
197. Oleinik O. A. Some asymptotic problems of the theory of partial differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 216 p. – ISBN 0-521-48537-1.
198. Ortiz-Bernardin A., Russo A., Sukumar N. Consistent and stable meshfree Galerkin methods using the virtual element decomposition // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.112 (7). – 2017. – P. 655-684.
199. Pan C., Hilpert M., Miller C.T. Pore-scale modeling of saturated permeabilities in random sphere packings // *Phys. Rev. E: Stat. Phys., Plasmas, Fluids*, v. 64. – 2001.
200. Reed W.H., Hill T. R. Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation, Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM, 1973.
201. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes in C – The art of scientific computing*. Cambridge University Press. – 1992. – 1018 p.
202. Riviere B. Analysis of a discontinuous finite element method for the coupled Stokes and Darcy problems // *Journal of Scientific Computing*, v. 22 no. 1. – 2005. – P. 479-500.
203. Riviere B. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory and Implementation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. – 212 p.
204. Russo A. Bubble stabilization of the finite element methods for the linearized incompressible NavierStokes equation // *Comput. Methods in Applied Mech. and Eng.*, v.132. – 1996. – P. 335-343.
205. Saad Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. 2nd edition with corrections. – SIAM, 2003. – 528 p. – ISBN-13 978-0-898715-34-7. ISBN-10 0-89871-534-2.

206. Salinas P., Pavlidis D., Xie Z., Osman H., Pain C.C., Jacksonb M.D. A discontinuous control volume finite element method for multi-phase flow in heterogeneous porous media // *Journal of Computational Physics*, v.352. – 2018. – P. 602–614.
207. Shao Q., Bouhala L., Fiorelli D., Fahs M., Younes A., Nunez P., Belouettar S., Makradi A. Influence of fluid flow and heat transfer on crack propagation in SOFC multi-layered like material with anisotropic porous layers // *International Journal of Solids and Structures*, 78-79. – 2016. – P. 189–198.
208. Shelukhin V.V., Chemetov N.V. Global Solvability of the One-Dimensional Cosserat-Bingham Fluid Equations // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. – 2015. – Vol. 17. – No. 3. – P. 495 – 511.
209. Shu Chi-Wang. Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Multiscale Problems // *Journal of Scientific Computing*, Volume 66, Issue 1. – 2016. – P. 321–345.
210. Shurina E. P., Itkina N. B., Arkhipov D. A., Dobrolyubova D. V., Kutisheva A. Yu., Markov S. I., Shtanko E. I. Non-conforming methods for 3D problems of mathematical physics // *Математика в современном мире. Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева (Новосибирск, 14-19 августа 2017 г.): Тез. докладов / под ред. Г. В. Демиденко. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. — С. 530. ISBN 978-5-86134-206-3.*
211. Sochi T. Pore-Scale Modeling of Non-Newtonian Flow in Porous Media. A dissertation submitted to the Department of Earth Science and Engineering Imperial College London in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, 2007. – 190 p.
212. Solin P., Segeth K., Dolezel I. Higher-order finite element methods. Chapman and Hall/CRC, 2004. – 388 p.
213. Steinhauser M.O. Computational Multiscale Modeling of Fluids and Solids: Theory and Applications, 2nd Edition. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2017. – 419 p. – ISBN: 3662532220.

214. Sudirham J. J., Van der Vegt J. J. W., Van Damme R. M. J. A study on discontinuous Galerkin finite element methods for Elliptic problems // Tech. Memorandum Dept. Appl. Math.v.1690. – 2003. – P. 1-21.
215. Sukumar, N. The natural element method in solid mechanics / N. Sukumar, B. Moran, T. Belytschko // Int. J. Num. Methods Eng. – 1998. – №43 (5). – P. 839 – 887.
216. Tarantola A. Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation, Paris: SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. – 352 p.
217. Tcheverda V., Kostin V., Reshetova G., Lisitsa V. Simulation of seismic waves propagation in multiscale media: Impact of cavernous/fractured reservoirs // Communications in Computer and Information Science, 3rd Russian Supercomputing Days Conference, RuSCDays 2017 (Moscow, Russia, September 25-26, 2017). – 2017. – Vol. 793. – P. 183-193.
218. Temam R. Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. Society for Industrial Mathematics, 1987. – 155 p.
219. Tezduyar T. E., Osawa Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., v. 190. – 2000. – P. 411-430.
220. Torquato S. Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties. Springer, 2002. – P. 702. – ISBN 978-1-4757-6355-3.
221. Qiuying Gu. Model-based strategy for control of hydraulic fracturing processes: a Dissertation in Chemical Engineering. Texas Tech University, 2014.
222. Vafai K. Handbook of Porous Media. Second edition. Taylor & Francis Group, LLC USA. – 2005. – 727 p.
223. Wameyo P. Magnetotelluric and transient electromagnetic methods in geothermal prospecting with examples from Menengai, Kenya. Report 21 in: Geothermal training in Iceland. – 2005. – UNU-GTP, Iceland. – P.409-439.

224. Wang Y., Wang S., Xue Sh., Adhikary D. Numerical Modeling of Porous Flow in Fractured Rock and Its Applications in Geothermal Energy Extraction // Journal of Earth Science, Vol.26, No.1. – 2015. – P. 20-27.
225. Wathen A. J. Preconditioning // Acta Numerica, v.14. – 2005. – P. 1–137.
226. Watkins D.S. Fundamentals of Matrix Computations. 3rd edition. – John Wiley & Sons, 2010. – 664 p. – ISBN: 0470528338.
227. Webb J. P. Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements / J.P. Webb // IEEE Trans. on antennas and propagation. – 1999. – vol. 47(8). – P. 1244-1253.
228. Weiss J. M., Maruszewski J. P., Smith W. A. Implicit Solution of Preconditioned Navier-Stokes Equations Using Algebraic Multigrid // AIAA J. – 1999. – Vol 37, №1. – P. 29-36.
229. Wheeler Mary F., Yotov Ivan. A multipoint flux mixed finite element method // Computational Geosciences, Volume 18, Issue 1. – 2014. – P. 57-75.
230. Wheeler Mary F., Balhoff Matthew T., Thomas Sunil G. Mortar coupling and upscaling of pore-scale models // Comput Geosci, v.12. – 2008. – P. 15-27.
231. Wheeler Mary F., Mikelic Andro. Convergence of iterative coupling for coupled flow and geomechanics // Computational Geosciences, Volume 18, Issue 3–4. – 2014. – P. 325-341.
232. Wheeler Mary F. Modeling hydraulic fracturing in porous media // Computational Mathematics for Oil and Gas Applications Second International Conference on Engineering and Computational Mathematics, Hong Kong Polytechnic University, Dec. 16-18, 2013.
233. Whittall K. P., Oldenburg D. W. Inversion of Magnetotelluric Data for a One-Dimensional Conductivity. SEG Books, 1992. – (Geophysical Monograph Series No. 5). – 121 p. – ISBN 978-1-56080-058-3, 978-0-931830-56-3.
234. Wicke M., Botsch M., Gross M. A Finite Element Method on Convex Polyhedra // Computer Graphics Forum (Eurographics), v. 26. – 2007. – P. 355-364.

235. Wolfgang H. Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus. Springer, 2012. – 500 p. – (Springer Series in Computational Mathematics 42). – ISBN 978-3-642-28026-9.
236. Xu T., Ranjith P.G., Au A.S.K., Wasantha P.L.P., Yang T.H., Tang C.A., Liu H.L., Chen C.F. Numerical and experimental investigation of hydraulic fracturing in Kaolin clay // Journal of Petroleum Science and Engineering, v.134. – 2015. – P. 223-236.
237. Yildizdag K., Weber F., Konietzky H. Hydraulic Fracturing // Computers and Geotechnics, v.83. – 2017. – P. 209 – 220.
238. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. / 7th Edition. – Butterworth-Heinemann, 2013. – 756 p. – ISBN: 1856176339.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А****Функции форм пространств  $H^1$  и  $H(\text{div})$**

В приложении А приведены графические изображения базисных функций в пространствах  $H^1$  и  $\mathbf{H}(\text{div})$  для тетраэдра, который изображён на рисунке 59.

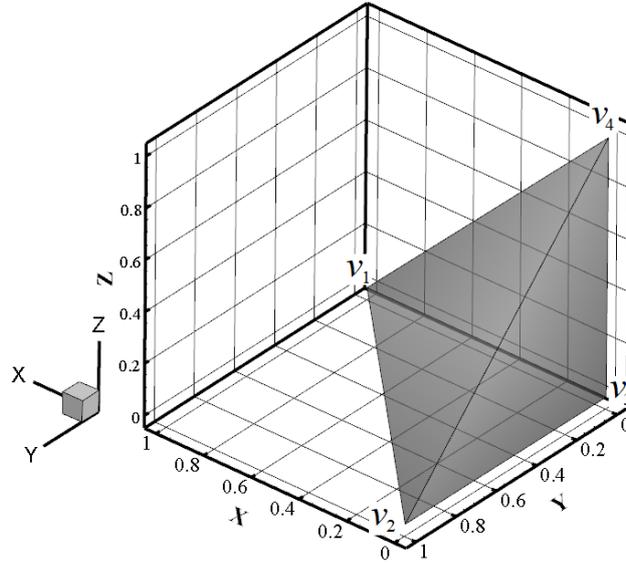


Рисунок 59 – Тетраэдр с вершинами  $v_1 := (1,0,0)$ ,  $v_2 := (0,1,0)$ ,  $v_3 := (0,0,0)$ ,  $v_4 := (0,0,1)$

На рисунке 60 показаны edge-функции (2.25) пространства  $H^1$  для ребра тетраэдра с вершинами  $v_1 := (1,0,0)$  и  $v_2 := (0,1,0)$ .

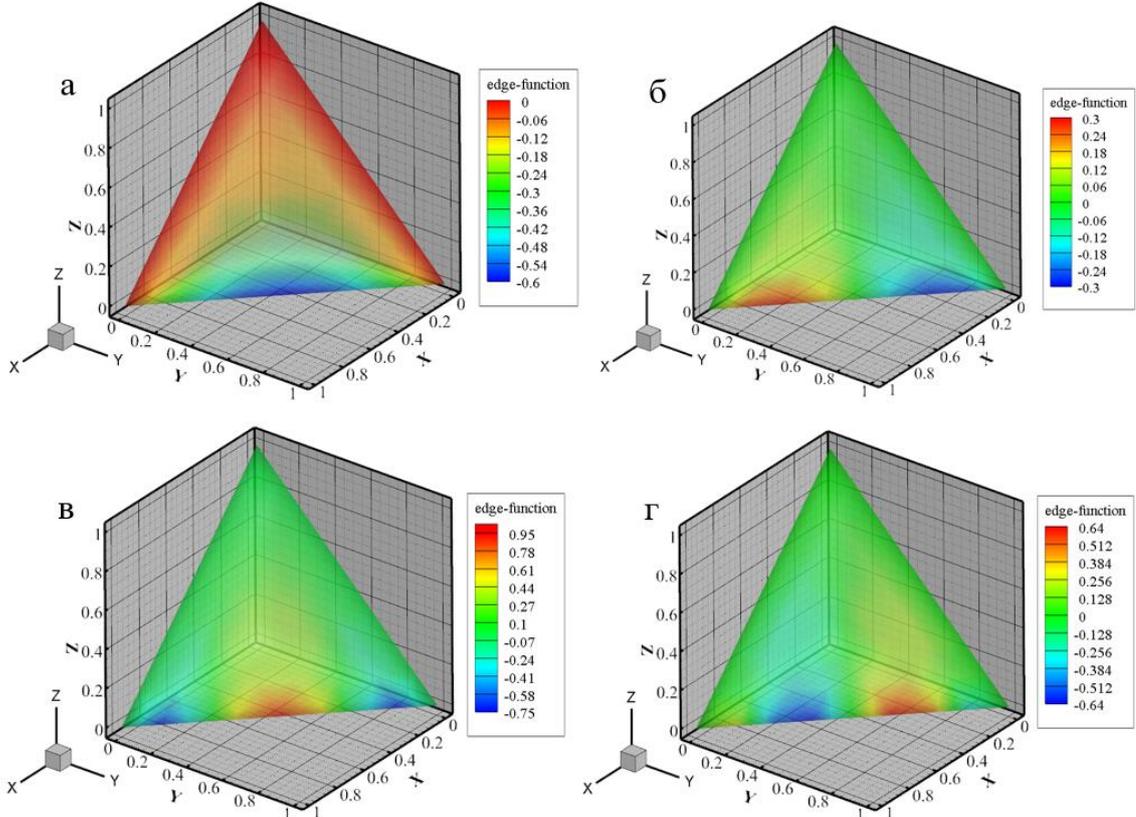


Рисунок 60 - Edge-функции 2-го порядка  $\varphi_2^{e_j}$  (а), 3-го порядка  $\varphi_3^{e_j}$  (б), 4-го порядка  $\varphi_4^{e_j}$  (в) и 5-го порядка  $\varphi_5^{e_j}$  (г)

На рисунке 61 показаны face-функции (2.26) пространства  $H^1$ , ассоциированные с гранью, которая содержит точки тетраэдра  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  и  $(0,0,1)$ . Функция  $\varphi_{1,1}^{S_i}$  вместе с edge-функциями (2.25) при  $p^{e_j} < 3$  образуют кубический базис. Функции  $\varphi_{1,2}^{S_i}$  и  $\varphi_{2,1}^{S_i}$  используются при построении базиса 4-го порядка.

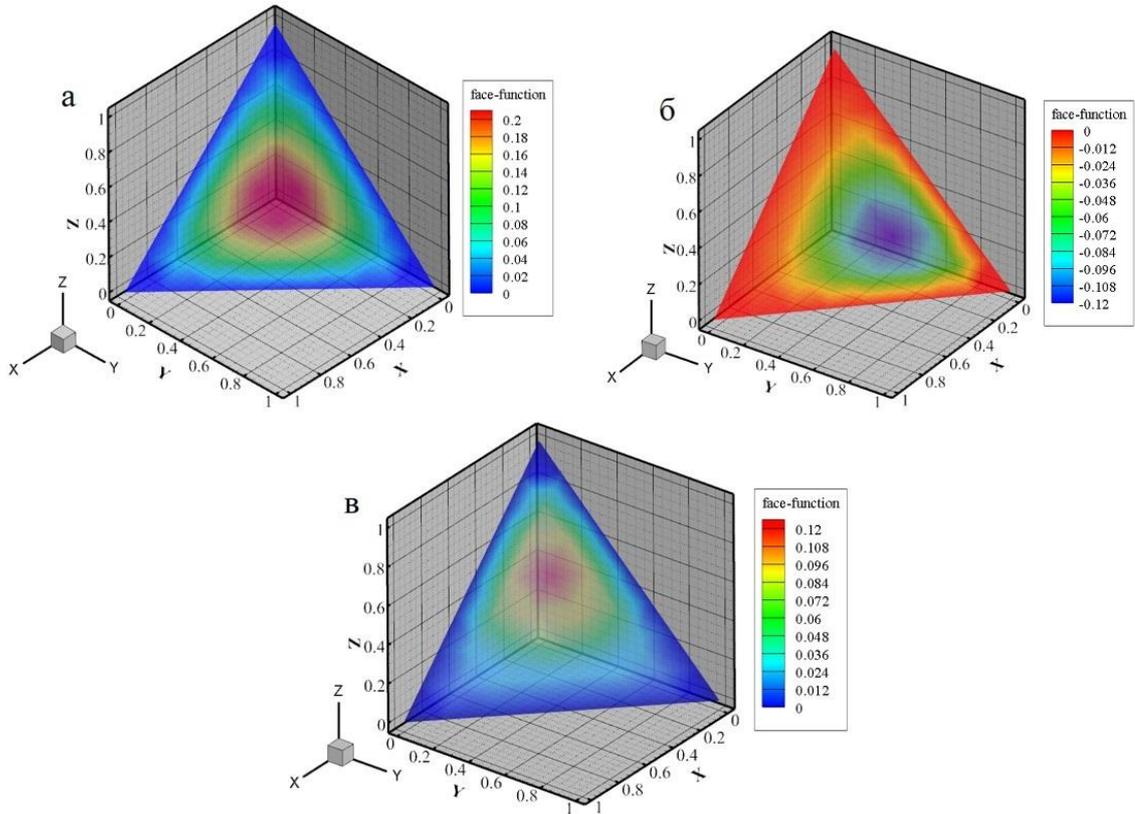


Рисунок 61 – Face-функции 3-го порядка  $\varphi_{1,1}^{S_i}$  (а), 4-го порядка  $\varphi_{1,2}^{S_i}$  (б) и  $\varphi_{2,1}^{S_i}$  (в)

На рисунке 62 показана Whitney-функция (2.31) пространства  $\mathbf{H}(\text{div})$ , ассоциированная с гранью, которая содержит точки тетраэдра  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  и  $(0,0,1)$ . Нормальная компонента Whitney-функции на трёх других гранях в сечениях имеет нулевой след. Линейные функции (2.32) показаны на рисунке 63.

Edge-based face-функции (2.34), ассоциированная с гранью  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  и  $(0,0,1)$ , для ребра тетраэдра между вершинами  $(1,0,0)$  и  $(0,1,0)$  показана на рисунке 64. Вид genuine face-функции (2.35) представлен на рисунке 65.

Edge-based bubble-функция (2.36), ассоциированная с гранью  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  и  $(0,0,1)$ , для ребра тетраэдра между вершинами  $(1,0,0)$  и  $(0,1,0)$  показана на рисунке 66. На рисунке 67 показана face-based bubble-функция (2.37), ассоциированная с гранью  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  и  $(0,0,1)$ .

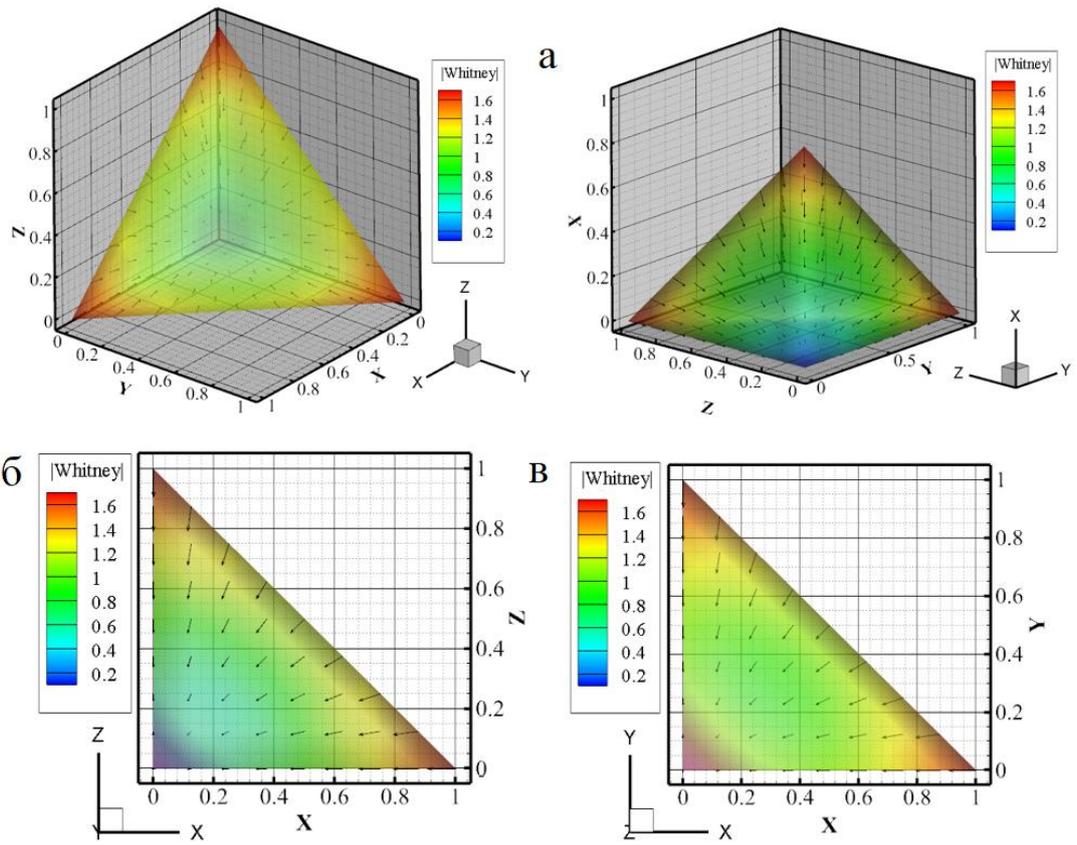


Рисунок 62 – Whitney-форма, ассоциированная с гранью (а), в плоскости  $y = \text{const}$  (б), в сечении  $z = \text{const}$  (в)

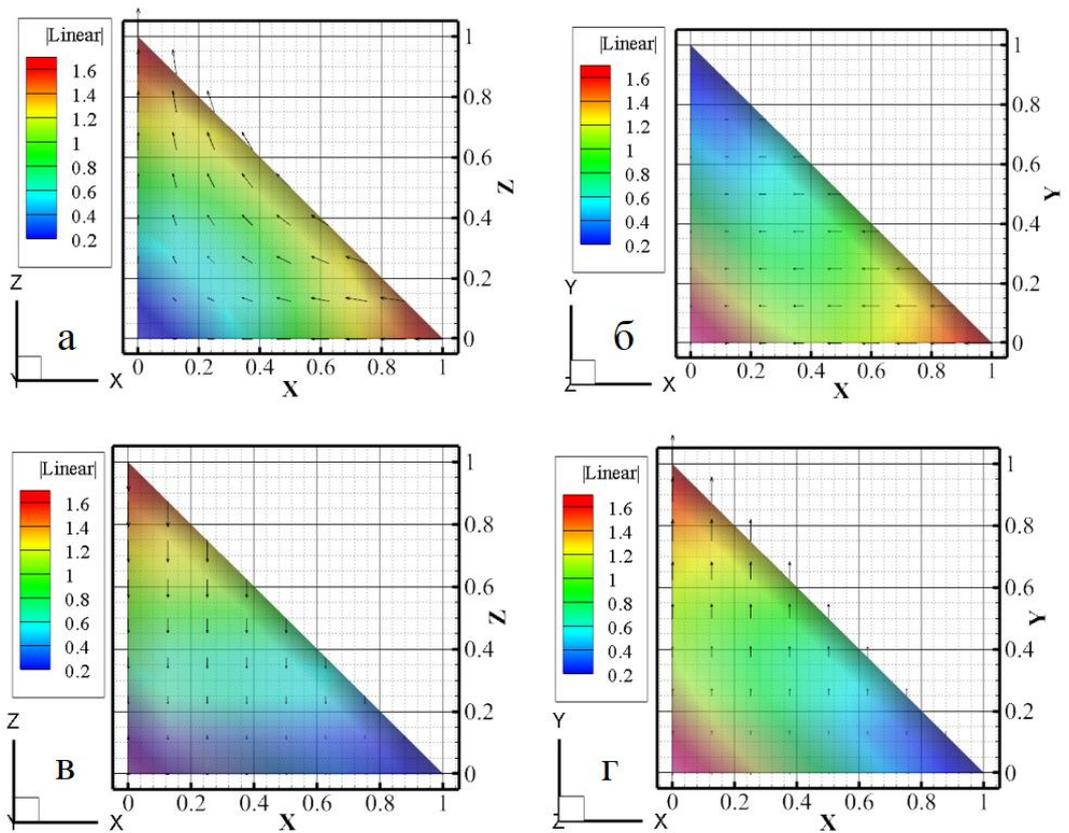


Рисунок 63 – Линейные функции  $\gamma_1^{S_i,1}$  (а, б) и  $\gamma_1^{S_i,2}$  (в, г)

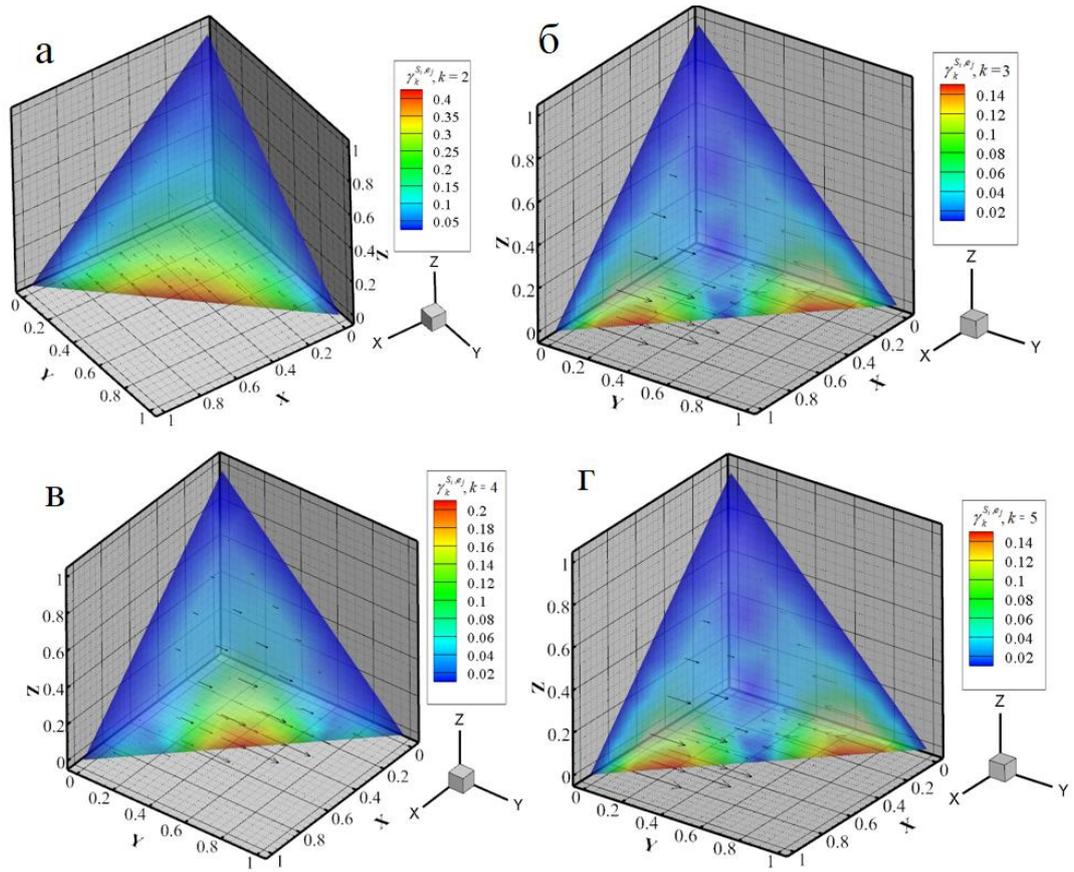


Рисунок 64 – Edge-based face-функция 2-го порядка (а), 3-го порядка (б), 4-го порядка (в) и 5-го порядка (г)

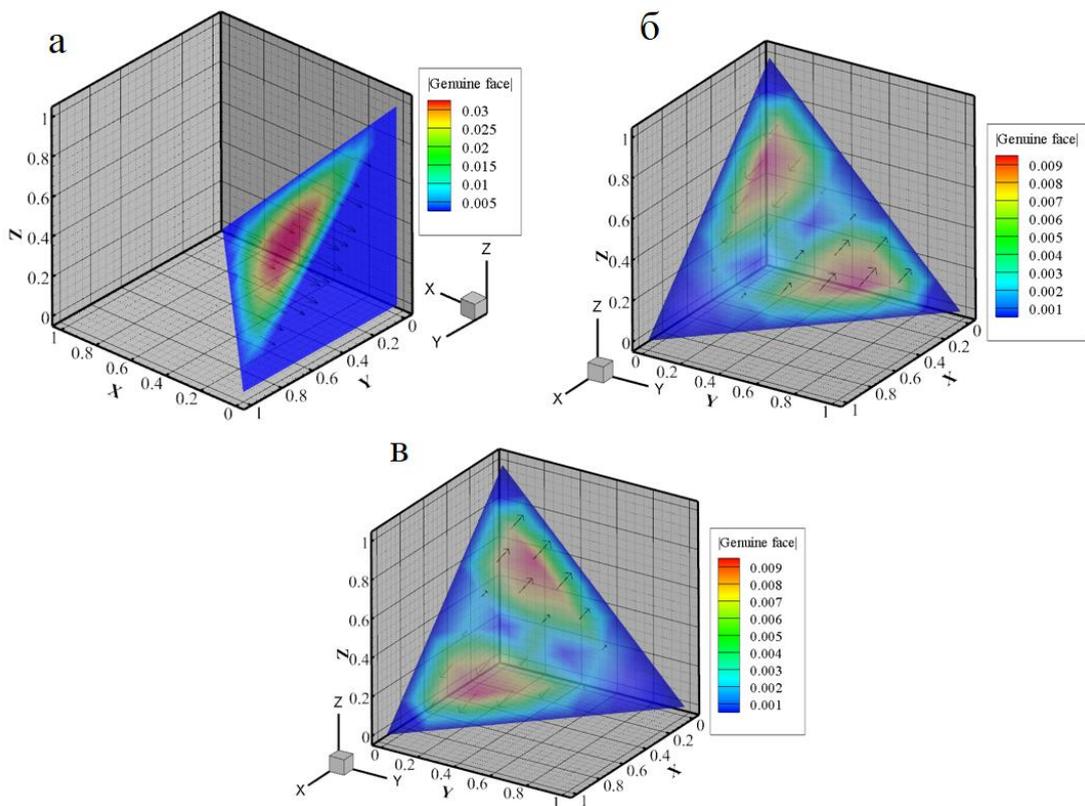


Рисунок 65 – Genuine face-функции 3-го порядка (а) и 4-го порядка (б, в)

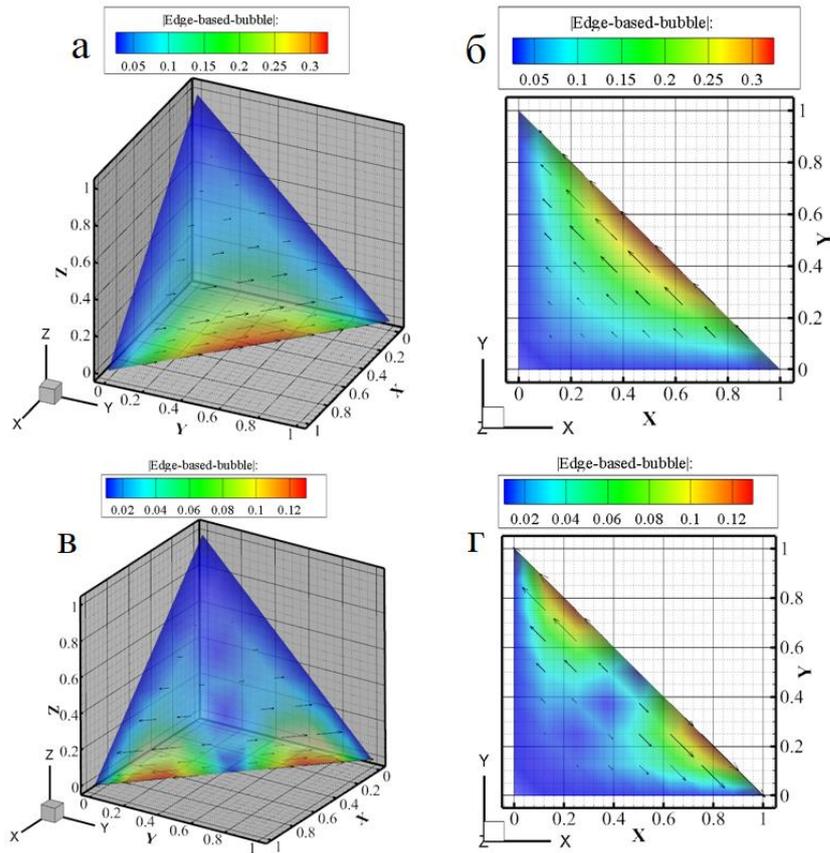


Рисунок 66 – Edge-based bubble-функции 2-го порядка (а, б) и 3-го порядка (в, г)

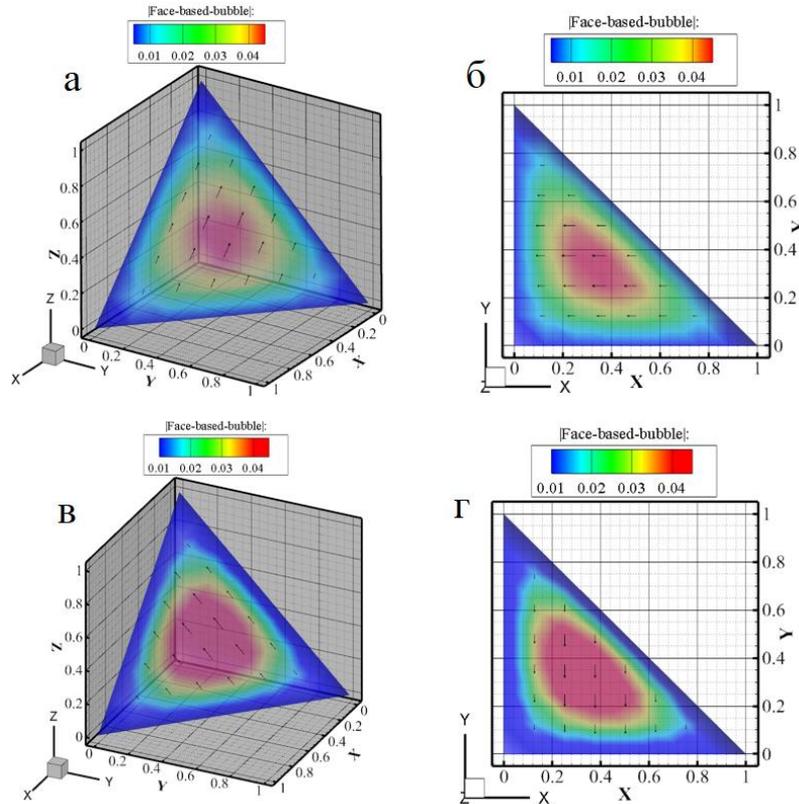


Рисунок 67 – Face-based bubble-функции 3-го порядка:  $\gamma_{1,1}^{S_i,b,1}$  (а, б),  $\gamma_{1,1}^{S_i,b,2}$  (в, г)

## **ПРИЛОЖЕНИЕ Б**

**Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ**

## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017662475

**Программа для вычисления эффективного тензора  
проницаемости нефтегазоносных пластов**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Новосибирский государственный технический университет»  
(RU)*

Автор: *Марков Сергей Игоревич (RU)*

Заявка № 2017616854

Дата поступления 13 июля 2017 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 09 ноября 2017 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев



## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018616266

«NaSFEM»

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук (ИНГГ СО РАН) (RU)*

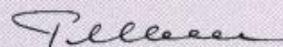
Авторы: *Шурина Элла Петровна (RU),  
Марков Сергей Игоревич (RU)*

Заявка № 2018613316

Дата поступления 05 апреля 2018 г.

Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ 25 мая 2018 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев
